

Υδρομετεωρολογία

Θερμοδυναμική της ατμόσφαιρας

Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα 2001

(έκδοση 2013 με προσαρμογές)

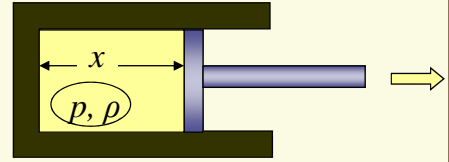
1 Εισαγωγικές έννοιες

Γενικά για τη θερμοδυναμική

- ✓ Η θερμοδυναμική μελετά τις μεταβολές ενέργειας ενός **συστήματος** και τις μεταφορές ενέργειας από ένα σύστημα σε άλλο.
- ✓ Για να περιγράψει την **κατάσταση** ενός συστήματος (σε κάθε σημείο του) χρησιμοποιεί ένα πεπερασμένο αριθμό **μεταβλητών κατάστασης** ή **θερμοδυναμικών συντεταγμένων** που αντιστοιχούν στις **ιδιότητες** του συστήματος (π.χ. πίεση, θερμοκρασία κτλ.).
- ✓ Η συναρτησιακή σχέση που συνδέει τις μεταβλητές κατάστασης είναι η **καταστατική εξίσωση** (ή εξίσωση κατάστασης).
- ✓ Η θερμοδυναμική υποθέτει συνεχή μέσα.
- ✓ Η θερμοδυναμική βασίζεται σε δύο νόμους.

Έργο - Ενέργεια

- ✓ Ορισμός έργου: $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
- ✓ Παράδειγμα: Έργο από εκτόνωση ρευστού
 - Συνθήκες θαλάμου: πίεση p , πυκνότητα ρ
 - Έργο για μετακίνηση εμβόλου dx
 $dW = p A dx = p dV$
όπου A η επιφάνεια του εμβόλου
 - Έργο ανά μονάδα μάζας
 $dw = p dV / M = p d(1/\rho) = p dv$
όπου $v = 1 / \rho = \text{ειδικός όγκος}$
- ✓ **Ενέργεια:** Ικανότητα παραγωγής έργου
 - Ποσοτικά εκφράζεται από το έργο που μπορεί να παραχθεί ή το έργο που δαπανήθηκε για να φτάσει το σύστημα στην κατάσταση που βρίσκεται.
 - Διακρίνονται διάφορες μορφές ενέργειας.



Μορφές ενέργειας

Όλες οι ποσοτικές εκφράσεις αναφέρονται σε ενέργεια ανά μονάδα μάζας (E / M)

- ✓ Κινητική: $\varepsilon_k = u^2 / 2$, $d\varepsilon_k = u du$
(u η ταχύτητα οργανωμένης κίνησης)
- ✓ Δυναμική λόγω βαρύτητας $\varepsilon_\delta = g z$, $d\varepsilon_\delta = g dz$
(g η επιτάχυνση βαρύτητας, z το υψόμετρο)
- ✓ Ενέργεια πίεσης (ή ενέργεια ροής) $\varepsilon_p = p / \rho = p v$, $d\varepsilon_p = d(p v) = p dv + v dp$
- ✓ Εσωτερική ενέργεια* ε_I : κινητική ενέργεια μορίων λόγω των τυχαίων – μη οργανωμένων κινήσεων. Πρακτικά είναι ανάλογη της θερμοκρασίας T :
 $d\varepsilon_I \propto dT$

* Γενικά ο όρος χαρακτηρίζει ένα σύνολο μορφών ενέργειας, π.χ. μηχανική, θερμική, ηλεκτρική, χημική κτλ.

2 Πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής

Αρχική διατύπωση

- ✓ Η θερμότητα q είναι ενέργεια σε μεταφορά.
 - Προκαλείται από θερμοκρασιακές διαφορές.
 - Δεν χαρακτηρίζει την κατάσταση ενός συστήματος.
- ✓ Πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής = Αρχή διατήρησης ενέργειας
- ✓ Γενική διατύπωση για οποιοδήποτε θερμοδυναμικό σύστημα:

$$dq' = d\varepsilon_i + dw'$$

dq' η θερμότητα που προστίθεται στο σύστημα.*

$d\varepsilon_i$ η εσωτερική ενέργεια του συστήματος.

dw' το έργο που παράγεται.*

- ✓ Εφαρμογή στο σύστημα εκτόνωσης ρευστού

$$dq' = d\varepsilon_i + p dv$$

* Οι τόνοι μπαίνουν σε ποσότητες που δεν χαρακτηρίζουν την κατάσταση του συστήματος – δεν είναι τέλεια διαφορικά

3 Στοιχεία ρευστοδυναμικής

Εξισώσεις ρευστοδυναμικής στην ατμόσφαιρα (1)

- ✓ Αγνώστα μεγέθη:
Πίεση p , πυκνότητα ρ , θερμοκρασία T , ταχύτητα $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$
- ✓ Πεδίο δυνάμεων (ανά μονάδα μάζας)

- Βαρύτητα: $\mathbf{g} = (0, 0, g)$, όπου

$$g = g_0(1 - 2.6373 \times 10^{-3} \cos(2\varphi) + 5.9 \times 10^{-6} \cos^2(2\varphi)) \quad (1)$$

φ το γεωγραφικό πλάτος και $g_0 = 9.8062 \text{ m/s}^2$ η επιτάχυνση βαρύτητας για $\varphi = 45^\circ$.

- Δύναμη Coriolis (αδρανειακή δύναμη λόγω περιστροφής της γης)

$$\mathbf{a}_C = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \quad (2)$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα της γης ($\|\boldsymbol{\omega}\| = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

- ✓ Τυπικοί συμβολισμοί

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla = \left(u_x \frac{\partial}{\partial x}, u_y \frac{\partial}{\partial y}, u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3)$$

Εξισώσεις ρευστοδυναμικής στην ατμόσφαιρα (2)

- ✓ Εξίσωση συνέχειας (= διατήρησης μάζας)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

- ✓ Εξίσωση κίνησης (= διατήρησης ορμής) για μη συνεκτικό ρευστό*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{ή} \quad \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (5)$$

- ✓ Εξίσωση ενέργειας για μη συνεκτικό ρευστό*

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\varepsilon_1 + g z + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla (p \mathbf{u}) \quad (6)$$

* Ο ατμοσφαιρικός αέρας μπορεί να θεωρηθεί με καλή προσέγγιση μη συνεκτικό ρευστό, εκτός από την περιοχή του συνοριακού στρώματος.

Παραγωγή της τυπικής έκφρασης του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου από τις εξισώσεις της ρευστοδυναμικής

Από την εξίσωση κίνησης (5) προκύπτει

$$\frac{D}{Dt} \left(g z + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \mathbf{u} \nabla p = 0 \quad (7)$$

ενώ από την εξίσωση συνέχειας (4) προκύπτει

$$\frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{u} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{Dv}{Dt} \quad (8)$$

οπότε συνδυάζοντας με την εξίσωση ενέργειας (6) παίρνουμε

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{D\varepsilon_1}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt} \quad (9)$$

Σημείωση: Αν υπάρχει συνεκτικότητα (ή τυρβώδης συνεκτικότητα) προστίθενται και άλλοι όροι.

Παρατηρήσεις στην εξίσωση ενέργειας

Η αρχική μορφή της εξίσωσης ενέργειας

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\varepsilon_i + g z + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \mathbf{u}) \quad (6)$$

δείχνει κατ' αρχήν ότι η ενέργεια (θερμότητα) q που προσφέρεται στο σύστημα μπορεί να αυξηθεί (εναλλακτικά ή σε συνδυασμό) (1) την εσωτερική ενέργεια (ε_i), (2) τη δυναμική ενέργεια ($g z$), (3) την κινητική ενέργεια ($\|\mathbf{u}\|^2 / 2$), (4) την ενέργεια πίεσης ($p / \rho = p v$).

Όμως η τελική μορφή

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{D\varepsilon_i}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt} \quad (9)$$

δείχνει ότι τελικώς θα αυξηθεί (εναλλακτικά ή σε συνδυασμό) (1) η εσωτερική ενέργεια (ε_i), (2) η ενέργεια πίεσης με εκτόνωση $dv > 0$ ή $dp < 0$.

Για ασυμπίεστα ρευστά $dq = d\varepsilon_i$.

Παραγωγή της εξίσωσης Bernoulli (από την εξίσωση κίνησης)

Από την (7) για μόνιμο πεδίο πιέσεων ($\partial p / \partial t = 0$) προκύπτει

$$\frac{D}{Dt} \left(g z + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (10)$$

που για ασυμπίεστα ρευστά ($\rho = \text{σταθερή}$) γίνεται

$$\frac{D}{Dt} \left(g z + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (11)$$

και τελικά (εξίσωση Bernoulli)

$$g z + \frac{p}{\rho} + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} = c t \quad (12)$$

Σημείωση: Ο ατμοσφαιρικός αέρας μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστος μόνο υπό τις εξής προϋποθέσεις: (1) αμελητέα μεταφορά θερμότητας (2) αμελητέες μεταβολές ταχύτητας και στάθμης κατά μήκος των γραμμών ροής (Stewart, 1945, σ. 431).

Παρατήρηση: Η εξίσωση Bernoulli παρότι εκφράζεται με όρους ενέργειας προκύπτει από την εξίσωση ορμής. Ισοδύναμα μπορεί να παραχθεί και από την εξίσωση ενέργειας (6) με τις παραπάνω παραδοχές και επιπλέον με την υπόθεση ότι $Dq / Dt = D\varepsilon_i / Dt$.

Κατανομή της πίεσης στην ατμόσφαιρα (με βάση την εξίσωση κίνησης)

Η εξίσωση κίνησης (για μη συνεκτικά ρευστά) στην κατακόρυφη διεύθυνση z (με τη διεύθυνση x στον άξονα ανατολή-δύση) γράφεται

$$\frac{Du_z}{Dt} - 2\omega u_x \cos \varphi = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (14)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ισορροπία κίνησης στη διεύθυνση z ($Du_z / Dt = 0$). Παρατηρούμε ότι για $\cos \varphi = 1$ (= μέγιστη δυνατή τιμή) και $u_x = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}$ (με $\omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) ισχύει

$$2\omega u_x \cos \varphi = 2.19 \times 10^{-3} = 0.02\% g \quad (15)$$

οπότε ο όρος Coriolis μπορεί να παραλειφτεί (δεν ισχύει το ίδιο για τις άλλες διευθύνσεις x και y). Με τις προϋποθέσεις αυτές παίρνουμε τη γνωστή υδροστατική εξίσωση κατανομής της πίεσης

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g} \quad (16)$$

4 Δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής Εισαγωγή

- ✓ **Αντιστρεπτή μεταβολή:** Ιδεατή διεργασία μεταβολής της κατάστασης ενός συστήματος σε τρόπο ώστε να είναι δυνατή η επαναφορά στην αρχική κατάσταση.
- ✓ **Εντροπία** (ανά μονάδα μάζας):

$$ds := \left. \frac{dq}{T} \right]_{\text{αντ}}, \quad s = \int_a^{\tau} \frac{dq}{T}$$

όπου η μεταβολή από την αρχική κατάσταση a στην τελική τ είναι αντιστρεπτή.

- ✓ Η εντροπία εξαρτάται μονοσήμαντα από την κατάσταση του συστήματος, για δεδομένη αρχική κατάσταση αναφοράς a .

Διατύπωση του δεύτερου νόμου

- ✓ Υπάρχει μια συνάρτηση s της κατάστασης ενός συστήματος που ονομάζεται εντροπία (ανά μονάδα μάζας)
- ✓ Για κάθε απειροστή μεταβολή της κατάστασης του συστήματος, κατά την οποία το σύστημα απορροφά (ή αποδίδει) θερμότητα dq ισχύει

$$ds \geq \frac{dq}{T}$$

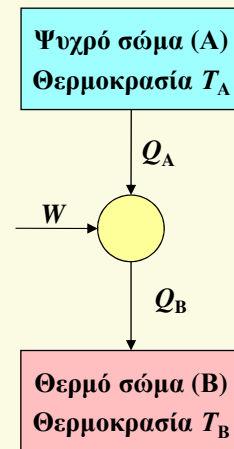
- ✓ Αν η μεταβολή είναι αντιστρεπτή ισχύει το σύμβολο της ισότητας, ενώ διαφορετικά ισχύει το σύμβολο της ανισότητας.

Εναλλακτικές διατυπώσεις

- ✓ Ως συνέπεια των φυσικών διεργασιών, η εντροπία του σύμπαντος (ή ενός θερμικά απομονωμένου συστήματος) αυξάνεται με το χρόνο.
- ✓ Ως συνέπεια των φυσικών διεργασιών, η αταξία του σύμπαντος (ή ενός θερμικά απομονωμένου συστήματος) αυξάνεται με το χρόνο.
- ✓ Ως συνέπεια των φυσικών διεργασιών, η ενέργεια γίνεται όλο και λιγότερο διαθέσιμη για παραγωγή έργου (αρχή της υποβάθμισης της ενέργειας).
- ✓ Είναι αδύνατο να κατασκευαστεί συσκευή η οποία, λειτουργώντας με κυκλικό τρόπο, θα έχει μοναδικό αποτέλεσμα τη μεταβίβαση θερμότητας από ένα ψυχρότερο σε ένα θερμότερο σώμα (διατύπωση Clausius).

Παράδειγμα εφαρμογής του δεύτερου θερμοδυναμικού νόμου

- ✓ Το σχήμα απεικονίζει ένα μοντέλο ενός ψυγείου ή αντλίας θερμότητας ($T_A < T_B$).
- ✓ Ναδειχτεί ότι η μεταβίβαση θερμότητας Q ($= Q_A = Q_B$) από το ψυχρό σώμα A στο θερμό B χωρίς την προσθήκη εξωτερικού έργου αντιβαίνει στο δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο (μειώνει την εντροπία του συστήματος).
- ✓ Ναδειχτεί ότι $Q_B / Q_A \geq T_B / T_A$
- ✓ Να υπολογιστεί το εξωτερικό έργο W που απαιτείται κατ' ελάχιστο για τη μεταφορά θερμότητας Q_B στο B, ως ποσοστό του Q_B (ή του Q_A).



$$\frac{Q_B}{Q_A} \geq \frac{T_B}{T_A} \quad \text{και} \quad \frac{W}{Q_B} \geq \frac{T_B - T_A}{T_B}$$

5 Τέλεια ή ιδανικά αέρια και καταστατική εξίσωσή τους

- ✓ Τα τέλεια ή ιδανικά αέρια υπακούουν στην *καταστατική εξίσωση*

$$p v = R_* T / m = R T$$

όπου $R_* = 8314.3 \text{ J/K kmol}$ η παγκόσμια σταθερά των αερίων, m το μοριακό βάρος του αερίου (kg/kmol), $R = R_* / m$ η σταθερά του αερίου (J/kg K) και T η θερμοκρασία (K).

- ✓ Μίγματα τέλειων αερίων διαφορετικού μοριακού βάρους συμπεριφέρονται σαν τέλεια αέρια με σταθερές

$$m = \sum M_i / \sum (M_i / m_i), \quad R = \sum (M_i R_i) / \sum M_i = R_* / m$$

όπου M_i η μάζα του αερίου i στο μίγμα, m_i το μοριακό βάρος του και $R_i = R_* / m_i$.

- ✓ Ο ατμοσφαιρικός αέρας πρακτικώς συμπεριφέρεται ως τέλειο αέριο. Για ξηρό αέρα ισχύει $m = 28.96 \text{ kg/kmol}$, $R = 287 \text{ J/kg K}$.

6 Ειδική θερμότητα

Γενικά στοιχεία

- ✓ Γενικός ορισμός

$$c = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta T} \right)$$

- ✓ Γενικά η ειδική θερμότητα εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο προστίθεται η θερμότητα.
- ✓ Για αέρια διακρίνουμε δύο χαρακτηριστικές ειδικές θερμότητες:

$$c_v = \left(\frac{dq}{dT} \right)_v \quad \text{για σταθερό όγκο } v$$

$$c_p = \left(\frac{dq}{dT} \right)_p \quad \text{για σταθερή πίεση } p$$

- ✓ Για στερεά και υγρά πρακτικώς έχουμε μια τιμή της ειδικής θερμότητας
- ✓ Γενικά η ειδική θερμότητα εξαρτάται από τη θερμοκρασία, αλλά μπορεί με καλή προσέγγιση να θεωρηθεί σταθερή.

Η ειδική θερμότητα για σταθερό όγκο

Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής

$$dq = d\varepsilon_1 + p dv$$

για σταθερό όγκο ($dv = 0$) γράφεται

$$(dq)_v = d\varepsilon_1$$

και συνεπώς

$$c_v = \frac{d\varepsilon_1}{dT} \quad \text{ή} \quad d\varepsilon_1 = c_v dT$$

Στην έκφραση αυτή το μέγεθος c_v δεν εξαρτάται από τον τρόπο που προστίθεται η θερμότητα ή που αυξάνεται η εσωτερική ενέργεια, γιατί η τελευταία εξαρτάται από την κατάσταση και μόνο.

Με αυτά τα δεδομένα, ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής γράφεται εναλλακτικά

$$dq = c_v dT + p dv$$

Η ειδική θερμότητα για σταθερή πίεση

Δεδομένου ότι $p dv + v dp = d(pv) = d(RT) = R dT$, ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής γράφεται εναλλακτικά

$$dq = c_v dT + R dT - v dp = (c_v + R) dT - v dp$$

Αλλά για σταθερή πίεση ($dp = 0$)

$$(dq)_p = c_p dT$$

οπότε

$$c_p = c_v + R$$

Με βάση και τα παραπάνω ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής παίρνει τις ακόλουθες εναλλακτικές μορφές

$$dq = \varepsilon_1 + p dv = c_v dT + p dv = c_p dT - v dp$$

Χαρακτηριστικές τιμές της ειδικής θερμότητας

Όλες οι τιμές αναφέρονται σε μονάδες J/(kg K)

✓ Νερό σε στερεά μορφή	2106
✓ Νερό σε υγρή μορφή	4218
✓ Υδρατμοί - c_v	1463
✓ Υδρατμοί - c_p	1924
✓ Ξηρός αέρας - c_v	717
✓ Ξηρός αέρας - c_p	1004

✓ Για μίγματα αερίων ισχύει

$$c_v = \frac{\sum (M_i c_{vi})}{\sum M_i}, \quad c_p = \frac{\sum (M_i c_{pi})}{\sum M_i}$$

7 Θερμοδυναμικές μεταβλητές κατάστασης

✓ Συνηθέστερες θερμοδυναμικές μεταβλητές

- Πίεση, p (άμεσα μετρήσιμη)
- Θερμοκρασία, T (άμεσα μετρήσιμη)
- Ειδικός όγκος, v , ή πυκνότητα, $\rho = 1/v$

Μόνο οι δύο από τις τρεις αυτές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, λόγω της καταστατικής εξίσωσης ($p v = R T$)

✓ Άλλες χρήσιμες θερμοδυναμικές μεταβλητές

- Εσωτερική ενέργεια (ανά μονάδα μάζας) $\varepsilon_1 = c_v (T - T_0)$
- Ενθαλπία (ανά μονάδα μάζας) $h := \varepsilon_1 + p v = c_p (T - T_0)$
- Εντροπία (ανά μονάδα μάζας) $s = c_p \ln(T/T_0) - R \ln(p/p_0)$
- Δυνητική (ή δυναμική) θερμοκρασία: $\theta = T (p_0/p)^{R/c_p}$

όπου κατά σύμβαση $T_0 = 200 \text{ K} = -73.16^\circ\text{C}$ και $p_0 = 1000 \text{ hPa}$

✓ Βασική σχέση μεταξύ θ και s : $s = c_p \ln(\theta/T_0) = c_p \ln \theta + ct$

8 Ιδιότητες του αέρα με υγρασία

Λόγος ανάμιξης και ειδική υγρασία

Ο αέρας με υγρασία είναι μίγμα αερίων με μεταβλητή αναλογία συστατικών.

Λόγος ανάμιξης:

$$r := \frac{\rho_v}{\rho_d}$$

όπου ρ_v είναι η πυκνότητα των υδρατμών, γνωστή και ως **απόλυτη υγρασία**, και ρ_d η πυκνότητα του ξηρού αέρα.

Ειδική υγρασία:

$$q := \frac{\rho_v}{\rho_v + \rho_d}$$

Σχέση λόγου ανάμιξης και ειδικής υγρασίας:

$$q = \frac{r}{1+r} \quad \text{ή} \quad r = \frac{q}{1-q}$$

Πρακτικώς τα δύο μεγέθη δεν διαφέρουν πολύ, επειδή η συνεισφορά της μάζας των υδρατμών στη συνολική μάζα του αέρα είναι πολύ μικρή.

Νόμος Gibbs-Dalton Μερική πίεση υδρατμών

Νόμος Gibbs-Dalton: Συνολική πίεση (ή εσωτερική ενέργεια ή εντροπία) μίγματος αερίων = άθροισμα μερικών πιέσεων (ή εσωτερικών ενεργειών ή εντροπιών) των συστατικών (για ίδιο όγκο και θερμοκρασία).

Μερική πίεση υδρατμών, e

$$e = \rho_v R_v T = \rho_v (R_d / \varepsilon) T$$

Μερική πίεση ξηρού αέρα, $p - e$

$$p - e = \rho_d R_d T$$

όπου $\varepsilon = R_d / R_v = m_v / m_d = 18.016 / 28.966 = 0.622$. Άρα

$$r := \frac{\varepsilon e}{p - e}, \quad q := \frac{\varepsilon e}{p - (1 - \varepsilon) e}$$

Κορεσμός, σχετική υγρασία και σημείο δρόσου

Κορεσμός: η θερμοδυναμική κατάσταση που οι υδρατμοί βρίσκονται σε ισορροπία με γειτονική επιφάνεια νερού σε υγρή ή στερεά μορφή, σε τρόπο ώστε η μάζα νερού που εξατμίζεται να ισοσκελίζει αυτή που συμπυκνώνεται.

Η **πίεση κορεσμού υδρατμών** e_* είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας T και υπολογίζεται από την εξίσωση (Koutsoyiannis, 2012):

$$e_* = f(T) = p_0 \exp \left[24.921 \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) \right] \left(\frac{T_0}{T} \right)^{5.06}, \quad T_0 = 273.16 \text{ K}, p_0 = 6.11657 \text{ hPa}$$

Σχετική υγρασία:

$$U = \frac{e}{e_*}$$

Σημείο δρόσου: Η θερμοκρασία T_d για την οποία επιτυγχάνεται κορεσμός, αν οι υδρατμοί ψυχθούν χωρίς μεταβολή της πίεσης και του λόγου ανάμιξης. Υπολογίζεται ως $T_d = f^{-1}(e/U)$ όπου f^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της f .

Παρατηρήσεις για τον υπολογισμό του σημείου δρόσου

Αντιστροφή της εξίσωσης $e^* = f(T)$: Επειδή η εξίσωση δεν επιλύεται αναλυτικά ως προς T , υπολογίζεται μια πρώτη προσέγγιση T' με τη μέθοδο Newton-Raphson:

$$\frac{T_0}{T'} = 1 + \frac{1}{24.921 - 5.06} \ln\left(\frac{p_0}{e^*}\right)$$

Η προσέγγιση αυτή στη συνέχεια βελτιώνεται με επαναληπτική εφαρμογή της ακόλουθης εξίσωσης (αρκούν 2-3 επαναλήψεις):

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{1}{24.921} \ln\left(\frac{p_0}{e^*}\right) + \frac{5.06}{24.921} \ln\left(\frac{T_0}{T'}\right)$$

Εναλλακτικές προσεγγιστικές σχέσεις για υπολογισμούς (δεν συστήνονται)

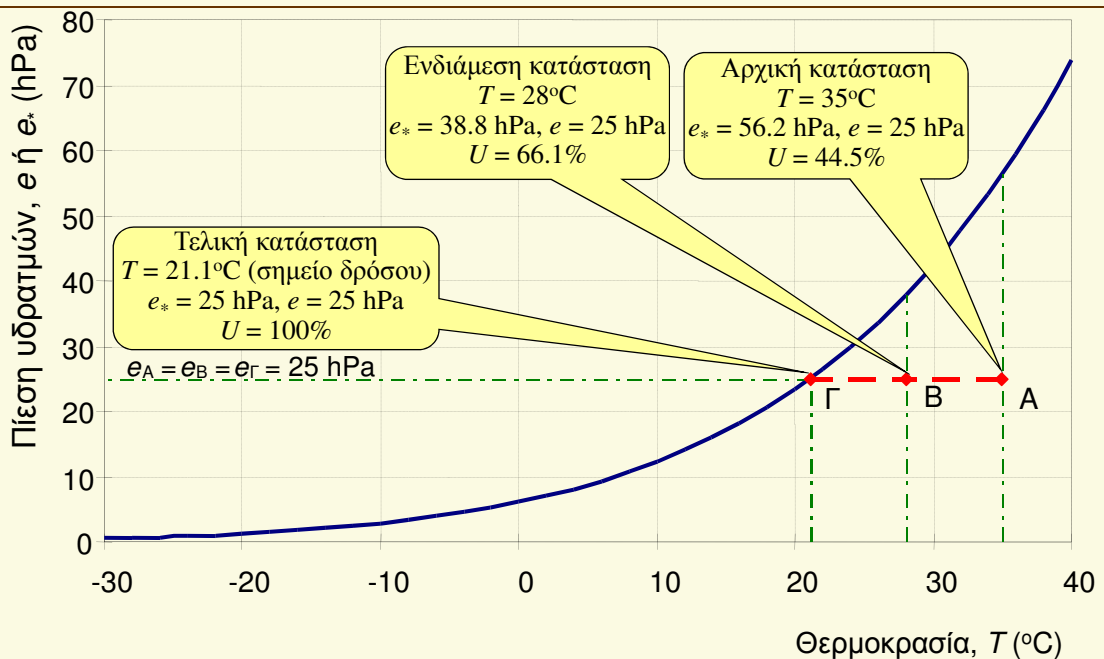
(α) Απλουστευμένη επίλυση της εξίσωσης Clausius-Clapeyron (βλ. π.χ. Koutsoyiannis, 2012):

$$e^* = p_0 \exp\left[19.84\left(1 - \frac{T_0}{T}\right)\right], T_0 = 273.16 \text{ K}, p_0 = 6.11657 \text{ hPa}$$

(β) Προσεγγιστική εξίσωση Magnus με τις πιο ενημερωμένες τιμές των σταθερών που υφιστάονται στη μαθηματική έκφραση (Alduchov and Eskridge, 1996):

$$e^* = 6.1094 \exp\left(\frac{17.625T}{243.04 + T}\right) [T \text{ in } ^\circ\text{C}, p \text{ in hPa}]$$

Σχέση πίεσης υδρατμών, πίεσης κορεσμού, θερμοκρασίας, σχετικής υγρασίας και σημείου δρόσου



Χαρακτηριστικές ιδιότητες αέρα με υγρασία

Σταθερά αερίου:

$$R = R_d \frac{1 + r/\varepsilon}{1 + r} \approx R_d (1 + 0.61 r), \text{ όπου } R_d = 287 \text{ J/(kg K)}$$

Πυκνότητα:

$$\rho = \rho_d \frac{1 + r}{1 + r/\varepsilon} \approx \rho_d (1 - 0.61 r) < \rho_d$$

Ειδική θερμότητα για σταθερό όγκο

$$c_v = c_{vd} \frac{1 + r (c_{vv}/c_{vd})}{1 + r} \approx c_{vd} (1 + 1.04 r), \text{ όπου } c_{vd} = 717 \text{ J/(kg K)}$$

Ειδική θερμότητα για σταθερή πίεση

$$c_p = c_{pd} \frac{1 + r (c_{pv}/c_{pd})}{1 + r} \approx c_{pd} (1 + 0.92 r), \text{ όπου } c_{pd} = 1004 \text{ J/(kg K)}$$

Μεταβολές φάσης – Λανθάνουσα θερμότητα

Λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης, λ : Η απαραίτητη ποσότητα θερμότητας για την εξάτμιση μιας μονάδας μάζας ενός υγρού. Κατά την εξάτμιση το σύνολο της θερμότητας δαπανάζεται για την αλλαγή μοριακών σχηματισμών (π.χ. διάσπαση των δεσμών υδρογόνου στην περίπτωση του νερού) και έτσι η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή (T). Άρα

$$\Delta q = \lambda, \quad \Delta s = \lambda / T$$

Το μέγεθος λ εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Για το νερό ισχύει (Koutsoyiannis, 2012):

$$\lambda = 3.139 \times 10^6 - 2336 T \quad (\lambda: \text{J/kg}, T: \text{K})$$

Στις πρακτικές εφαρμογές χρησιμοποιείται συχνά η τιμή $\lambda \approx 2.5 \times 10^6 \text{ J/kg}$. Η **λανθάνουσα θερμότητα συμπύκνωσης** είναι ίση με τη λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης.

Κατά παρόμοιο τρόπο ορίζεται η **λανθάνουσα θερμότητα πήξης και τήξης** που για το νερό σε θερμοκρασία 0°C είναι $0.334 \times 10^6 \text{ J/kg}$.

9 Μεταβολές κατάστασης στην ατμόσφαιρα

Τυπικές μεταβολές ξηρού αέρα

Όνομα μεταβολής	Συνθήκη	Θερμότητα	Σχέσεις μεταβλητών κατάστασης
Ισοβαρής	$p = ct$	$dq = c_p dT$	$T/v = ct = p/R$ $T/\theta = ct = (p/p_0)^{R/c_p}$
Ισόχωρη	$v = ct \Leftrightarrow \rho = ct$	$dq = c_v dT$	$T/p = ct = v/R$ $T/\theta^{c_p/c_v} = (R/p_0 v)^{R/c_v}$
Ισόθερμη	$T = ct \Leftrightarrow e = ct$ $\Leftrightarrow h = ct$	$dq = T d(\ln v)$	$p v = ct = R T$ $\theta p^{R/c_p} = ct = T p_0^{R/c_p}$
Ισεντροπική (αντιστρεπτή αδιαβατική)	$s = ct \Leftrightarrow \theta = ct$	$dq = 0$	$T/p^{R/c_p} = ct = \theta/p_0^{R/c_p}$ $p v^{c_p/c_v} = ct =$ $= (R \theta)^{c_p/c_v} / p_0^{R/c_v}$

Σημείωση 1: $p_0 = 1000 \text{ hPa} = 10^5 \text{ Pa}$.

Σημείωση 2: Στις αριθμητικές εφαρμογές θα πρέπει να εκφράζονται όλα τα μεγέθη στις τυπικές μονάδες του SI δηλαδή: T και θ σε K (προσοχή, όχι °C)· ρ σε kg/m^3 · v σε m^3/kg · p σε Pa (προσοχή, όχι hPa)· q , e , και h σε J/kg· s , c_p , c_v και R σε J/(kg K).

Τυπικές μεταβολές μη κορεσμένου αέρα (1)

- ✓ Γενικά έχουν ισχύ οι εξισώσεις που περιγράφουν τις μεταβολές στον ξηρό αέρα.
- ✓ Για ακριβείς υπολογισμούς, στη θέση των παραμέτρων (π.χ. R , c_p) του ξηρού αέρα τοποθετούνται οι αντίστοιχες του αέρα με υγρασία, οι οποίες είναι συναρτήσεις του λόγου ανάμιξης r .
- ✓ Ωστόσο, επειδή στις εξισώσεις υπεισέρχονται λόγοι τέτοιων παραμέτρων (π.χ. R/c_p) μπορεί, χωρίς ουσιαστικό σφάλμα να χρησιμοποιηθούν οι τιμές των παραμέτρων του ξηρού αέρα.
- ✓ Επιπλέον των εξισώσεων του ξηρού αέρα χρησιμοποιείται και η ακόλουθη

$$r = \varepsilon e / (p - e) = ct$$

που περιγράφει τη διατήρηση της μάζας υδρατμών και ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι δεν πραγματοποιείται συμπύκνωση ή εξάτμιση (όχι συνθήκες κορεσμού ή παρουσίας σταγόνων νερού).

Τυπικές μεταβολές μη κορεσμένου αέρα (2)

Δεδομένου ότι

$$e = e_*(T_d) \text{ και } r = r_*(T_d, p) = \varepsilon e_*(T_d) / [p - e_*(T_d)]$$

η σχέση

$$r = ct$$

μετασχηματίζεται ισοδύναμα σε σχέση μεταξύ των T_d και p , ήτοι

$$r_*(T_d, p) = ct = r \text{ ή } e_*(T_d) / p = ct = r / (r + \varepsilon)$$

Κορεσμένη ισεντροπική μεταβολή

Στην κορεσμένη ισεντροπική (αναστρέψιμη αδιαβατική) μεταβολή ο αέρας βρίσκεται συνεχώς σε συνθήκες κορεσμού και έχουμε μεταβλητό λόγο ανάμιξης, ενώ διατηρείται η εντροπία, δηλαδή (Beers, 1945, σ. 359)

$$ds_d + d(r_* s_{wv}) + (r_w + r_*) ds_w = 0$$

όπου r_* ο λόγος ανάμιξης κορεσμού, $r_w = M_w / M_d$ ο «λόγος ανάμιξης» της ποσότητας νερού σε υγρή φάση ($r_w + r_* = \text{σταθερό}$), s_d η εντροπία (ανά μονάδα μάζας) του ξηρού αέρα, s_{wv} η εντροπία (ανά μονάδα μάζας) του νερού που αλλάζει φάση και s_w η εντροπία του νερού σε υγρή φάση.

Η ολοκλήρωση ανάμεσα στις καταστάσεις 1 (αρχική) και 2 (τελική) δίνει

$$c_{pd} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R_d \ln\left(\frac{p_2 - e_{*2}}{p_1 - e_{*1}}\right) + \underbrace{\left(\frac{\lambda r_*}{T}\right)_2 - \left(\frac{\lambda r_*}{T}\right)_1}_{\Delta(r_* s_{wv})} + \underbrace{c_w (r_w + r_*) \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}_{(r_w + r_*) \Delta s_w} = 0$$

όπου c_{pd} η ειδική θερμότητα του ξηρού αέρα για σταθερή πίεση, c_w η ειδική θερμότητα του νερού σε υγρή μορφή, R_d η σταθερά αερίου του ξηρού αέρα, και λ η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης.

Κορεσμένη ψευδο-αδιαβατική μεταβολή

Στην ψευδο-αδιαβατική μεταβολή ο αέρας βρίσκεται συνεχώς σε συνθήκες κορεσμού, αλλά οι υδρατμοί που συμπυκνώνονται διαφεύγουν με κατακρήμνιση, δηλαδή συνεχώς ισχύει $r_w = 0$, οπότε η εντροπία σε διαφορική μορφή γράφεται

$$ds_d + d(r_* s_{wv}) + d(r_* s_w) = 0$$

Η ολοκλήρωση ανάμεσα στις καταστάσεις 1 (αρχική) και 2 (τελική) δίνει

$$c_{pd} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R_d \ln\left(\frac{p_2 - e_{*2}}{p_1 - e_{*1}}\right) + \underbrace{\left(\frac{\lambda r_*}{T}\right)_2 - \left(\frac{\lambda r_*}{T}\right)_1}_{\Delta(r_* s_{wv})} + \underbrace{c_w \int_1^2 r_* \frac{dT}{T}}_{\Delta(r_* s_w)} = 0$$

Ο τελευταίος όρος είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με τους άλλους δύο και συχνά παραλείπεται ή υπολογίζεται προσεγγιστικά, π.χ.,

$$\xi = \Delta(r_* s_w) = c_w \sqrt{r_{*1} r_{*2}} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Κορεσμένη ψευδο-αδιαβατική μεταβολή: Υπολογισμοί και απλοποιήσεις

Η εξίσωση της ψευδο-αδιαβατικής μεταβολής γράφεται ισοδύναμα με την ακόλουθη μορφή, χρήσιμη για τους υπολογισμούς:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1-\xi} = \frac{\exp(\lambda_1 r_{*1} / c_{pd} T_1) (p_2 - e_{*2})^{R_d / c_{pd}}}{\exp(\lambda_2 r_{*2} / c_{pd} T_2) (p_1 - e_{*1})^{R_d / c_{pd}}}$$

Η εξίσωση επιλύεται με τη γενική επαναληπτική μέθοδο π.χ. ως προς T_2 για δεδομένα T_1 , p_1 και p_2 , με τα ακόλουθα βήματα: (α) υπολογίζονται όλοι οι όροι που αναφέρονται στην κατάσταση 1· (β) υποτίθεται μια τιμή του T_2 · (γ) υπολογίζονται τα e_{*2} , r_{*2} και ξ · (δ) υπολογίζεται το T_2 από την παραπάνω εξίσωση· (ε) Επαναλαμβάνονται τα βήματα (β-δ) μέχρι να υπάρξει σύγκλιση.

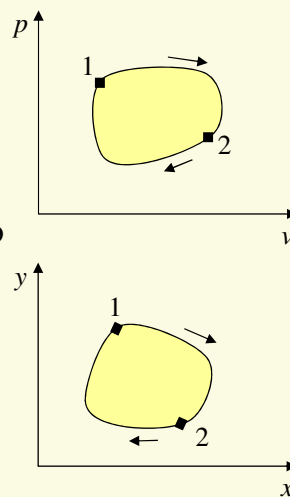
Σημείωση: Τόσο στην κορεσμένη ισεντροπική, όσο και στην ψευδο-αδιαβατική μεταβολή ο τρίτος όρος της αντίστοιχης εξίσωσης μπορεί να παραλειφθεί χωρίς ουσιώδες σφάλμα. Τότε οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται και παίρνουν την εξής σχετικά απλούστερη μορφή (αντιστοιχεί σε $\xi = 0$):

$$c_{pd} \ln T - R_d \ln(p - e_*) + \frac{\lambda r_*}{T} = ct$$

10 Θερμοδυναμικά διαγράμματα

Το διάγραμμα Clapeyron – Ισοδύναμα διαγράμματα

- ✓ Διάγραμμα Clapeyron: διάγραμμα με συντεταγμένες $p-v$.
- ✓ Κάθε σημείο του διαγράμματος (π.χ., το σημείο 1) παριστάνει μονοσήμαντα τη θερμοδυναμική κατάσταση σε ένα σημείο του χώρου που καταλαμβάνει ένα αέριο.
- ✓ Κάθε ανοιχτή καμπύλη (π.χ. το τμήμα 1-2) στο διάγραμμα παριστάνει μια θερμοδυναμική μεταβολή.
- ✓ Κάθε κλειστή καμπύλη (π.χ. 1-2-1) παριστάνει ένα θερμοδυναμικό κύκλο. Το εμβαδό της καμπύλης είναι ίσο με (α) την καθαρή ποσότητα θερμότητας που μεταφέρεται κατά τη διάρκεια του κύκλου και (β) το καθαρό έργο που πραγματοποιείται.
- ✓ Άλλα διαγράμματα: Στη μετεωρολογία χρησιμοποιούνται ισοδύναμα διαγράμματα με άξονες άλλα ζεύγη θερμοδυναμικών μεταβλητών ($x-y$ στο σχήμα) που αποτελούν μετασχηματισμούς των p και v . Πιο εύχρηστα είναι διαγράμματα που διατηρούν τα εμβαδά (ενέργειες).



Το τεφίγραμμα – Κατασκευή

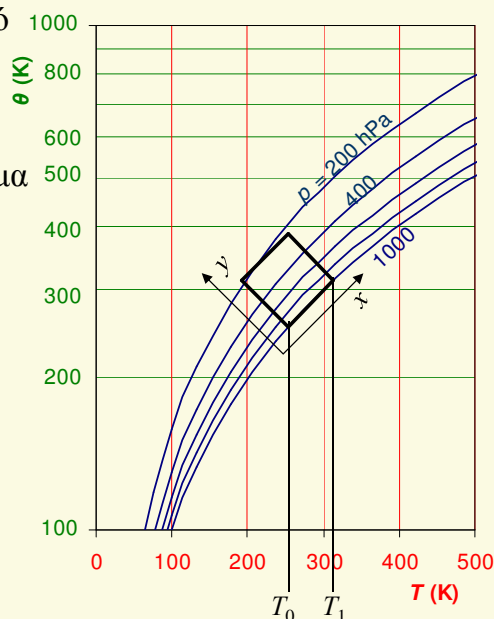
- ✓ Τεφίγραμμα ($T-\varphi$ -γραμμα): Θερμοδυναμικό διάγραμμα με άξονες θερμοκρασία (T) - εντροπία (s - παλιότερο σύμβολο φ). Διατηρεί τα εμβαδά.
- ✓ Δεδομένου ότι $s = c_p \ln \theta + ct$, το τεφίγραμμα είναι πιο εύχρηστο να εκφράζεται (ισοδύναμα) σε άξονες $T-\ln \theta$.
- ✓ Οι ισοβαρείς δίνονται από την εξίσωση

$$T/\theta = ct = (p/p_0)^{R/c_p}$$

- ✓ Τελικώς γίνεται και μια περιστροφή των αξόνων κατά 45° έτσι ώστε οι ισοβαρείς να είναι περίπου οριζόντιες. Έτσι είναι:

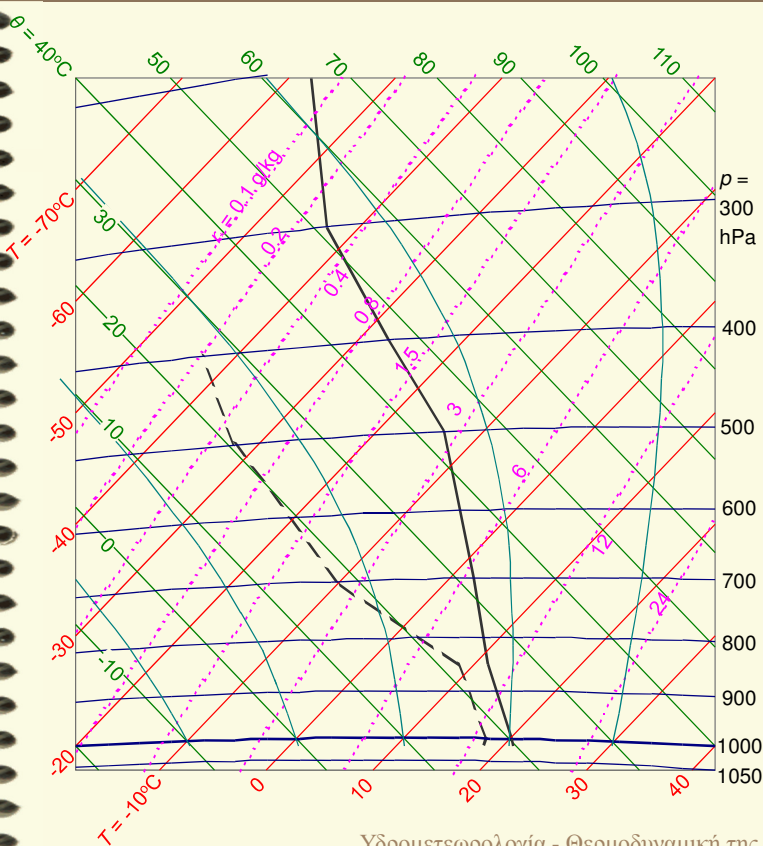
$$x = \frac{T - T_0}{2(T_1 - T_0)} + \frac{\ln(\theta / T_0)}{2 \ln(T_1 / T_0)},$$

$$y = -\frac{T - T_0}{2(T_1 - T_0)} + \frac{\ln(\theta / T_0)}{2 \ln(T_1 / T_0)}$$



Τεφίγραμμα – Παράσταση της κατάστασης του ατμοσφαιρικού αέρα

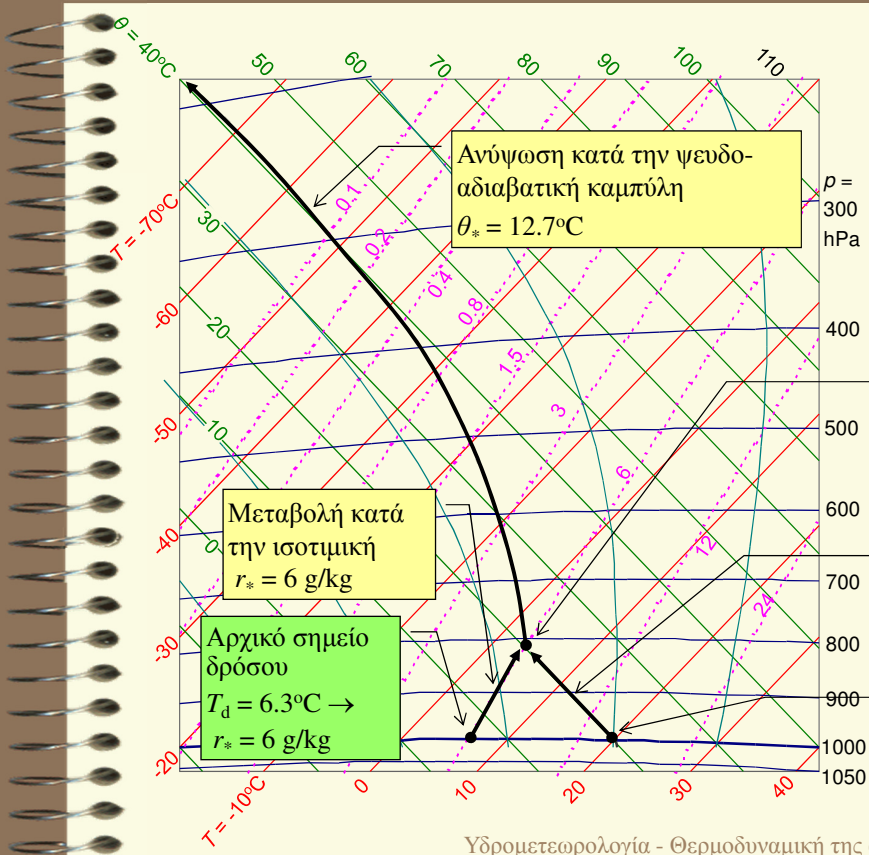
- ✓ Για να εκφραστεί η θερμοδυναμική κατάσταση σε οποιοδήποτε σημείο της ατμόσφαιρας απαιτούνται τρεις ανεξάρτητες θερμοδυναμικές συντεταγμένες, η τρίτη από τις οποίες αναφέρεται στην ατμοσφαιρική υγρασία, π.χ., p , v , r , ή p , T , T_d .
- ✓ Για το λόγο αυτό προστίθενται στο σκελετό του τεφιγράμματος (εκτός από τις ισόθερμες, τις ισεντροπικές ή μη κορεσμένες αδιαβατικές, και τις ισοβαρείς) και άλλες δύο ομάδες καμπυλών: οι καμπύλες ίσου λόγου ανάμιξης κορεσμού υδρατμών ($r_*(T_d, p) = ct = r$) και οι ψευδο-αδιαβατικές (σύμφωνα με την αντίστοιχη εξίσωση). Κάθε ψευδοαδιαβατική καμπύλη χαρακτηρίζεται από μια τιμή θ_* , όπου για $p = 1000$ hPa, $\theta_* = \theta = T$.
- ✓ Έτσι, η θερμοδυναμική κατάσταση ενός σημείου της ατμόσφαιρας αποδίδεται στο τεφίγραμμα με δύο σημεία: (T, θ) και (T_d, θ_d) όπου και τα δύο βρίσκονται στην ίδια ισοβαρή p .
- ✓ Στην περίπτωση κορεσμένης ατμόσφαιρας τα δύο σημεία (T, θ) και (T_d, θ_d) συμπίπτουν. Η μεταβολή κατάστασης σε κορεσμένη ατμόσφαιρα γίνεται πάνω σε μια ψευδοαδιαβατική καμπύλη θ_* .
- ✓ Σε περίπτωση μη κορεσμένης ατμόσφαιρας, σε κάθε μεταβολή κατάστασης το σημείο (T_d, θ_d) κινείται πάνω σε μια καμπύλη ίσου λόγου ανάμιξης κορεσμού.



Τεφίγραμμα: Παράδειγμα 1 – Παράσταση ραδιοβόλισης

Το σχήμα παριστάνει τις μετρήσεις της ραδιοβόλισης της ΕΜΥ στην Αθήνα στις 5 Ιουνίου 1972, ώρα 02:00 EET (00:00 GMT).

Η συνεχής μαύρη γραμμή παριστάνει τη μεταβολή της θερμοκρασίας T και η διακεκομμένη τη μεταβολή του σημείου δρόσου T_d .

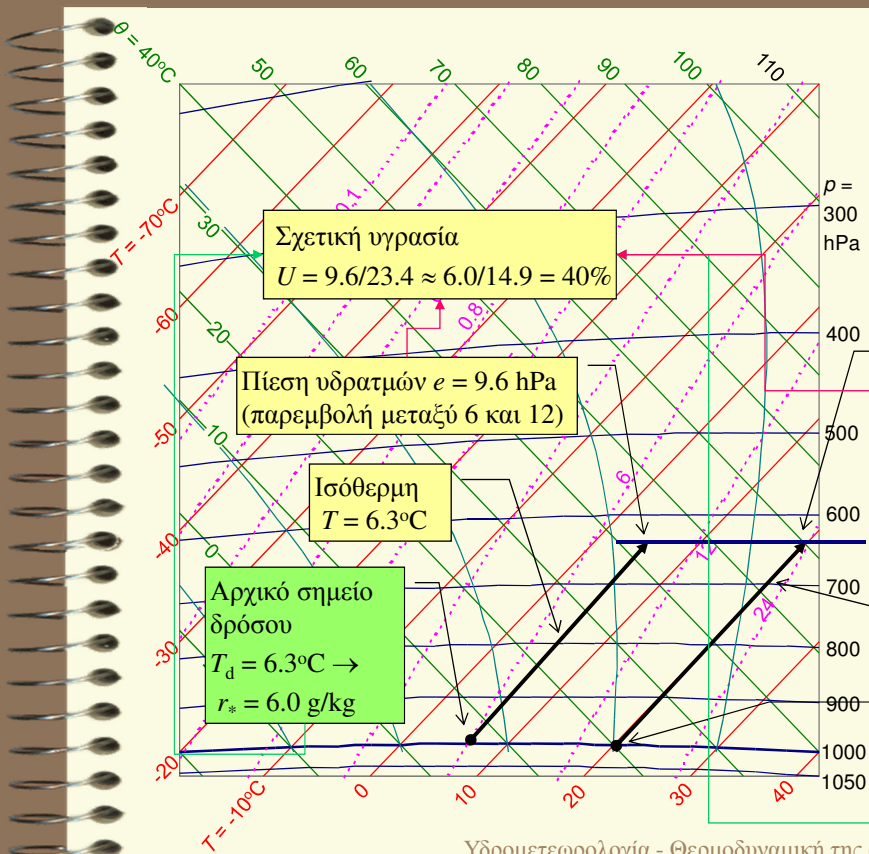


Τεφίγραμμα: Παράδειγμα 2 – Παράσταση τυπικής ανύψωσης πακέτου αέρα

Επίπεδο συμπύκνωσης με ανύψωση
 $\theta = 20.0^\circ\text{C}$, $T = T_d = 3.4^\circ\text{C}$,
 $p = 815 \text{ hPa}$, $\theta_* = 12.7^\circ\text{C}$

Αδιαβατική μεταβολή κατά την ισηντροπική
 $\theta = 20.0^\circ\text{C}$

Αρχική θερμοκρασία
 $T = 20.0^\circ\text{C}$ για $p = 1000 \text{ hPa}$
 $\rightarrow \theta = 20.0^\circ\text{C}$



Τεφίγραμμα: Παράδειγμα 3 – Γραφικοί υπολογισμοί υγρασίας

Σχετική υγρασία
 $U = 9.6/23.4 \approx 6.0/14.9 = 40\%$

Πίεση υδρατμών $e = 9.6 \text{ hPa}$
 (παρεμβολή μεταξύ 6 και 12)

Ισόθερμη
 $T = 6.3^\circ\text{C}$

Αρχικό σημείο δρόσου
 $T_d = 6.3^\circ\text{C} \rightarrow$
 $r_* = 6.0 \text{ g/kg}$

Πίεση κορεσμού υδρατμών $e_* = 23.4 \text{ hPa}$
 (παρεμβολή μεταξύ 12 και 24)

Ισοβαρής
 $p = 622 \text{ hPa}$

Ισόθερμη
 $T = 20^\circ\text{C}$

Αρχική θερμοκρασία
 $T = 20.0^\circ\text{C}$ για $p = 1000 \text{ hPa}$
 $\rightarrow r_* = 14.9 \text{ g/kg}$

11 Κατακόρυφη μεταβολή θερμοδυναμικών μεταβλητών Βασικές εξισώσεις

Υδροστατική εξίσωση κατανομής της πίεσης

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Καταστατική εξίσωση

$$p = \rho R T$$

Για τον προσδιορισμό της κατανομής της πίεσης απαιτείται μια ακόμη σχέση μεταξύ των θερμοδυναμικών μεταβλητών ή/και του υψομέτρου z . Αυτή κατά κανόνα προκύπτει με την παραδοχή σταθερής **θερμοβαθμίδας**:

$$\frac{dT}{dz} = -\gamma = ct$$

Συνδυάζοντας τις τρεις εξισώσεις και απαλείφοντας τα ρ , T παίρνουμε

$$\frac{dp}{p} = \frac{-g}{R} \frac{dz}{T_0 - \gamma z}$$

όπου T_0 η θερμοκρασία για τη στάθμη αναφοράς $z = 0$ (όχι απαραίτητα με αφετηρία τη θάλασσα).

Αποτελέσματα υπολογισμών

Η επίλυση των εξισώσεων δίνει

α) για $\gamma = 0$

$$T = T_0, \quad p = p_0 e^{-\frac{g z}{R T_0}}, \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{g z}{R T_0}}$$

β) για $\gamma \neq 0$

$$T = T_0 - \gamma z, \quad p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R \gamma}}, \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R \gamma} - 1}$$

όπου p_0 η πίεση για $z = 0$ και $\rho_0 = p_0 / R T_0$ η αντίστοιχη πυκνότητα.

Χρήσιμες σχέσεις για $\gamma \neq 0$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R \gamma}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R \gamma} - 1}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1 - \frac{R \gamma}{g}}$$

Σημείωση: η επίλυση έγινε με την παραδοχή $g = ct$, η οποία πρακτικώς ισχύει για την τροπόσφαιρα.

Εφαρμογή για χαρακτηριστικές τιμές της θερμοβαθμίδας

Παραδοχή	Θερμοβαθμίδα	Κατανομή θερμοκρασίας	Κατανομή πίεσης	Κατανομή πυκνότητας
Ισόθερμη ατμόσφαιρα	$\gamma = 0$	$T = T_0$	$p = p_0 e^{-\frac{g z}{R T_0}}$	$\rho = \rho_0 e^{-\frac{g z}{R T_0}}$
Πρότυπη ατμόσφαιρα	$\gamma = 6.5 \times 10^{-3}$ K/m	$T = T_0 - \gamma z$	$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{5.256}$	$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{4.256}$
Αδιαβατική ισορροπία	$\gamma = \gamma_d = g / c_p = 9.8 \times 10^{-3}$ K/m	$T = T_0 - \gamma_d z$	$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma_d z}{T_0}\right)^{\frac{c_p}{R}}$	$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma_d z}{T_0}\right)^{\frac{c_p}{R}}$
Ομογενής ατμόσφαιρα	$\gamma = g / R = 34.2 \times 10^{-3}$ K/m	$T = T_0 - \gamma z$	$p = p_0 - \rho_0 g z$	$\rho = \rho_0$

Σημειώσεις: (1) Για ξηρό αέρα ισχύει $c_p / R = 3.50$, $c_v / R = 2.50$.

(2) T_0 , p_0 και ρ_0 είναι η θερμοκρασία, πίεση και πυκνότητα για $z = 0$ (αφετηρία όχι απαραίτητα στη στάθμη της θάλασσας), ενώ $\rho_0 = p_0 / R T_0$.

Εφαρμογή στη μέτρηση του υψομέτρου με αλτίμετρο

Χαρακτηριστικά της πρότυπης ατμόσφαιρας (ICAO):

- Ο αέρας θεωρείται απόλυτα ξηρός με ίδια σύσταση σε όλα τα ύψη, συμπεριφέρεται σαν τέλειο αέριο και έχει χαρακτηριστικά $m = 28.9644$ kg/kmol, $R = 287.04$ J/kg K.
- Στη μέση στάθμη της θάλασσας ισχύει $g_0 = 9.8067$ m/s², $T_0 = 288.16$ K = 15°C, $p_0 = 1013.25$ hPa
- Ισχύει η υδροστατική εξίσωση, ενώ η θερμοβαθμίδα είναι 6.5 K/km μέχρι το ύψος των 11 km· για ύψη 11-20 km η θερμοκρασία είναι σταθερή 216.66 K (-56.5 °C).

Με αυτές τις συνθήκες για $z \leq 11\ 000$ m ισχύει $T = 15 - 0.0065 z$ και

$$p = 1013.25 \times [1 - 2.256 \times 10^{-5} z]^{5.256} \Leftrightarrow z = 44\ 332 \left[1 - \left(\frac{p}{1013.25} \right)^{0.19025} \right]$$

και για $11\ 000 \leq z \leq 20\ 000$ ισχύει $T = -56.5$ °C και

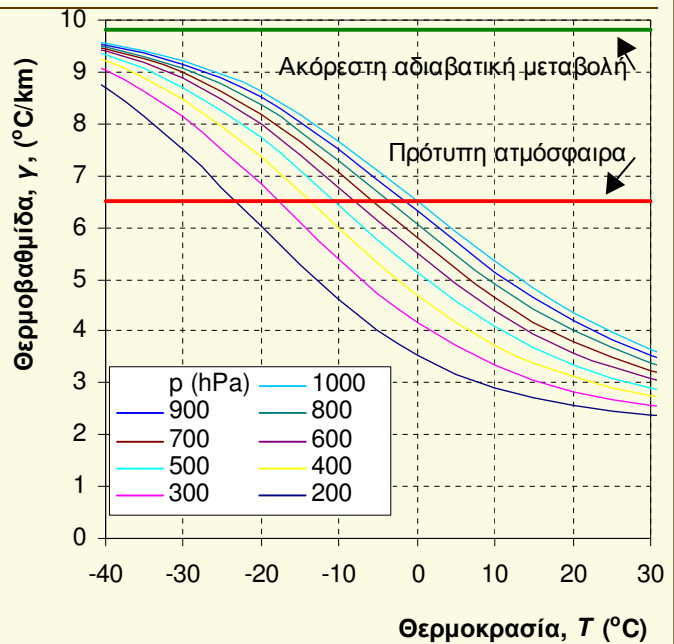
$$p = 226.27 e^{-0.00015769 (z - 11\ 000)} \Leftrightarrow z = 11\ 000 + 6341.6 \ln(226.27 / p)$$

(μονάδες z : m, T : °C, p : hPa)

Η θερμοβαθμίδα στην κορεσμένη ψευδο-αδιαβατική ατμόσφαιρα

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες απλές περιπτώσεις, στην κορεσμένη ατμόσφαιρα σε ψευδο-αδιαβατικό ισοζύγιο η θερμοβαθμίδα δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται τόσο με τη θερμοκρασία, όσο και με την πίεση. Προσεγγιστικά η τιμή της δίνεται από την εξίσωση (Beers, 1945)

$$\gamma_* = \gamma_d \frac{p + \frac{\epsilon \lambda e_*}{R_d T}}{p + \frac{\epsilon^2 \lambda^2 e_*}{c_p R_d T^2}}$$

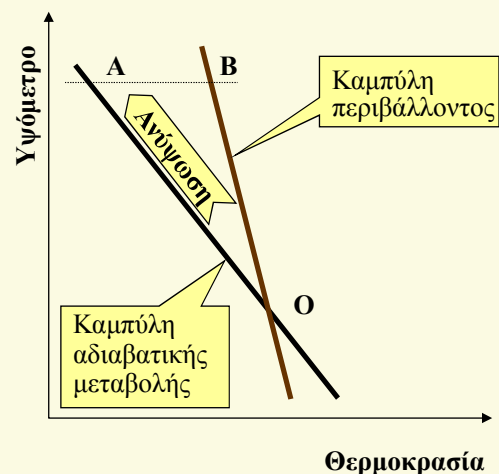


12 Ατμοσφαιρική ευστάθεια και αστάθεια

Ευσταθής ισορροπία

- ✓ Αν ένα πακέτο αέρα ανυψωθεί αδιαβατικά από το O στο A:
Θερμοκρασία: $T_A < T_B$
Πυκνότητα: $\rho_A > \rho_B$
(επειδή $\rho = p / RT$)
- ✓ Κατά συνέπεια:
Το πακέτο έχει την τάση να επανέλθει στο O.
- ✓ Συμπέρασμα: Ευσταθής ισορροπία

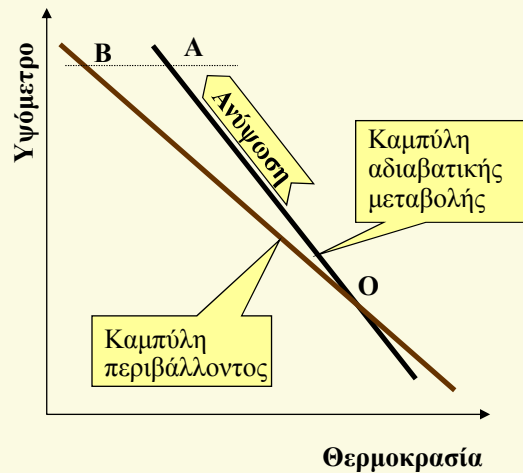
Σημείωση: Ίδιο συμπέρασμα προκύπτει αν τα πακέτο καταβιβαστεί.



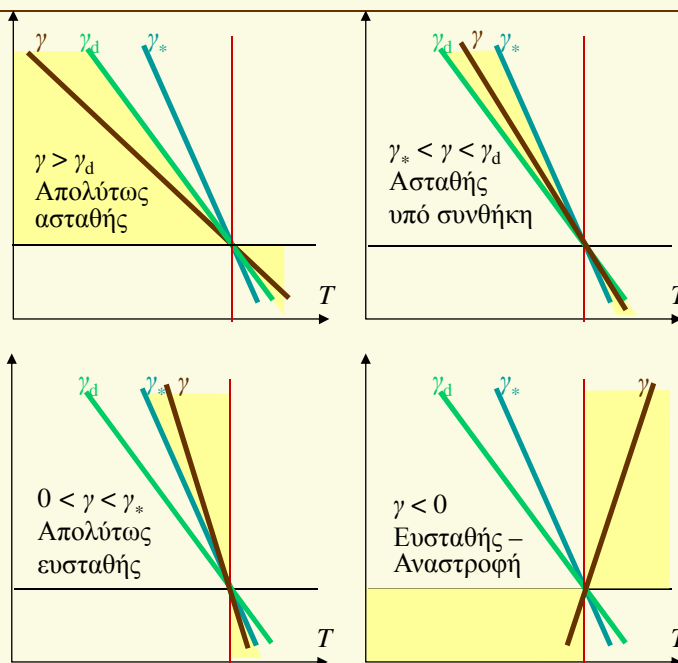
Ασταθής ισορροπία

- ✓ Αν ένα πακέτο αέρα ανυψωθεί αδιαβατικά από το Ο στο Α:
 Θερμοκρασία: $T_A > T_B$
 Πυκνότητα: $\rho_A < \rho_B$
 (επειδή $\rho = p / RT$)
- ✓ Κατά συνέπεια:
 Το πακέτο έχει την τάση να απομακρυνθεί περισσότερο από το Ο.
- ✓ Συμπέρασμα: Ασταθής ισορροπία

Σημείωση: Ίδιο συμπέρασμα προκύπτει αν τα πακέτο καταβιβαστεί.



Ταξινόμηση των συνθηκών ευστάθειας

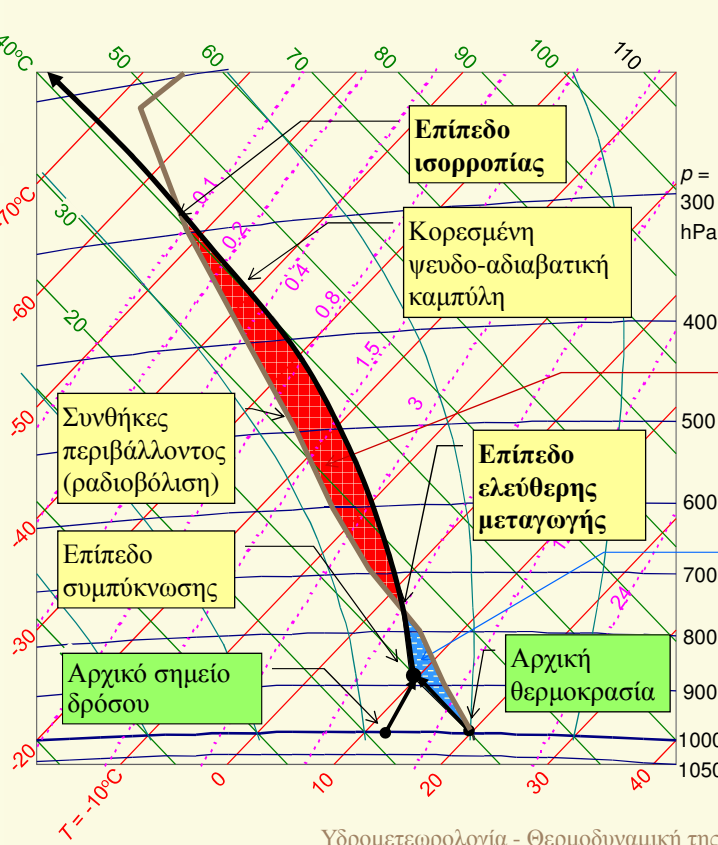


ΥΠΟΜΝΗΜΑ

- Καμπύλη περιβάλλοντος
- Ξηρή αδιαβατική
- Ψευδο-αδιαβατική
- Ισόθερμη

Σημείωση
 Για $\gamma = \gamma_d$: Ουδέτερη ευστάθεια σε μη κορεσμένες συνθήκες
 Για $\gamma = \gamma_*$: Ουδέτερη ευστάθεια σε κορεσμένες συνθήκες

Επεξήγηση ευστάθειας υπό συνθήκη με χρήση τεφιγράμματος



Υδρομετεωρολογία - Θερμοδυναμική της ατμόσφαιρας

49

Θετική ενέργεια (απελευθέρωση):
Μεταγωγική διαθέσιμη δυννητική ενέργεια (CAPE)

Αρνητική ενέργεια (κατανάλωση):
Μεταγωγική αναστολή (CIN)

CAPE > CIN: Πραγματική λανθάνουσα αστάθεια

13 Κατακρημνίσιμο νερό

Ορισμός – προσδιορισμός

Κατακρημνίσιμο νερό ή υγρό ισοδύναμο υδρατμών: Η συνολική μάζα (ή το ισοδύναμο ύψος νερού) των υδρατμών σε μια κατακόρυφη στήλη της ατμόσφαιρας:

$$W = \frac{1}{\rho_w} \int_{z_1}^{z_0} \rho_v dz = \frac{1}{\rho_w g} \int_{p_1}^{p_0} q dp$$

όπου z και p το υψόμετρο και η ατμοσφαιρική πίεση, αντίστοιχα, p_0 και p_1 η ατμοσφαιρική πίεση στις στάθμες z_0 (επιφάνεια εδάφους) και z_1 (υψόμετρο της τροπόπαυσης), αντίστοιχα, ρ_v και ρ_w είναι η πυκνότητα των υδρατμών και του νερού (σε υγρή μορφή), αντίστοιχα, q η ειδική υγρασία και g η επιτάχυνση βαρύτητας.

Προσδιορισμός με βάση στοιχεία από ραδιοβόλιση:

$$W = \frac{1}{\rho_w g} \sum_{i=1}^n \frac{q_i + q_{i-1}}{2} (p_{i-1} - p_i)$$

όπου $i = 0, \dots, n$ οι θέσεις όπου λαμβάνονται μετρήσεις (η θέση $i = 0$ αντιστοιχεί στο έδαφος).

Υδρομετεωρολογία - Θερμοδυναμική της ατμόσφαιρας

50

Εκτίμηση από δεδομένα εδάφους

Παραδοχή: κορεσμένη ψευδο-αδιαβατική ατμόσφαιρα καθορισμένη από το σημείο δρόσου T_d στο έδαφος (υψόμετρο z_0).

Τρόπος υπολογισμού: αριθμητική ολοκλήρωση.

Για άμεση εκτίμηση: πίνακες τιμών του World Meteorological Organization (1986).

Για αποφυγή χρήσης πινάκων: εμπειρική εξίσωση προσαρμοσμένη στα αριθμητικά δεδομένα των παραπάνω πινάκων

$$W = \exp(2.29 + 0.086 T_d - 0.0005 z_0 + 0.0000075 T_d z_0) - 1.82$$

(T_d : °C, z_0 : m, W : mm).

Παρατήρηση: Στην παραπάνω παραδοχή ενυπάρχει η υπόθεση συνθηκών κορεσμού στο έδαφος, οπότε $T = T_d$. Αν αυτό δεν συμβαίνει, κανονικά θα πρέπει να θεωρηθεί ως z_0 το υψόμετρο του επιπέδου συμπύκνωσης και ως T_d η αντίστοιχη θερμοκρασία σε αυτή τη θέση, που είναι μικρότερη από το σημείο δρόσου στο έδαφος· παράλληλα θα πρέπει να εκτιμηθεί ξεχωριστά η συνεισφορά του κατώτατου ακόρεστου στρώματος. Στην πράξη δεν ακολουθείται αυτή η λεπτομερής διαδικασία.

Αναφορές και βιβλία για παραπέρα μελέτη

- ✓ Alduchov O. A. and R. E. Eskridge, Improved Magnus form approximation of saturation vapour pressure, *J. Appl. Meteor.*, 35, 601–609, 1996.
- ✓ Beers, N. R., Meteorological Thermodynamics and atmospheric statics, Section V in *Handbook of Meteorology*, edited by F. A. Berry, E. Bollay, and N. R. Beers, McGraw-Hill, New York, 1945.
- ✓ Stewart, H. J., Kinematics and dynamics of fluid flow, Section VI in *Handbook of Meteorology*, edited by F. A. Berry, E. Bollay, and N. R. Beers, McGraw-Hill, New York, 1945.
- ✓ Curry, J. A., and P. J. Webster, *Thermodynamics of Atmospheres and Oceans*, Academic Press, San Diego, 1999.
- ✓ Koutsoyiannis, D., Clausius-Clapeyron equation and saturation vapour pressure: simple theory reconciled with practice, *European Journal of Physics*, 33 (2), 295–305, 2012.
- ✓ Wallace, J. W., and P. V. Hobbs, *Atmospheric Science, An Introductory Survey*, Academic Press, San Diego, Ca., 1977
- ✓ McIlveen, R., *Fundamentals of Weather and Climate*, Chapman, 1992.
- ✓ Saucier, W. J., *Principles of Meteorological Analysis*, Dover, New York, 1989.
- ✓ McIntosh, D. H., and A. S. Thom, *Essentials of Meteorology*, Wykeham, London, 1978.
- ✓ Wiesner C. J., *Hydrometeorology*, Chapman and Hall, London, 1970.
- ✓ World Meteorological Organization (WMO), *Manual for Estimation of Probable Maximum Precipitation*, Operational Hydrology Report 1, 2nd edition, Publication 332, World Meteorological Organization, Geneva, 1986.