

---

---

## **Κεφάλαιο 6** Τυπικές συναρτήσεις κατανομής στην τεχνική υδρολογία

---

---

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε τις τρεις βασικές οικογένειες συναρτήσεων κατανομής που χρησιμοποιούνται στην τεχνική υδρολογία. Η πρώτη περιλαμβάνει την κανονική κατανομή και τις παράγωγες κατανομές που προκύπτουν από λογαριθμικό μετασχηματισμό της. Η δεύτερη είναι η οικογένεια κατανομών γάμα που περιλαμβάνει την εκθετική κατανομή, τις κατανομές γάμα δύο και τριών παραμέτρων, και την παράγωγη κατανομή Log-Pearson III που προκύπτει από λογαριθμικό μετασχηματισμό της τελευταίας. Η τρίτη οικογένεια περιλαμβάνει τις κατανομές ακροτάτων με τυπικές εκπροσώπους τις κατανομές Gumbel και Weibull. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνονται ορισμένες άλλες κατανομές με δευτερεύουσα σημασία στην τεχνική υδρολογία, όπως οι κατανομές βήτα και Pareto.

### **6.1 Κανονική κατανομή και μετασχηματισμοί της**

#### **6.1.1 Κανονική κατανομή**

Μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί αναλυτικά και σε έκταση στην κανονική κατανομή και στη χρήση της στη στατιστική αλλά και στην τεχνική υδρολογία. Συγκεκριμένα, η κανονική κατανομή έχει εισαχθεί, ως συνέπεια του κεντρικού οριακού θεωρήματος, στην ενότητα 2.8 μαζί με δύο στενά συνδεδεμένες κατανομές, τις  $\chi^2$  και Student (ή  $t$ ), οι οποίες, αν και

δεν χρησιμοποιούνται στην περιγραφή υδρολογικών μεταβλητών, είναι βασικής σημασίας για τις στατιστικές εκτιμήσεις. Σε πολλά σημεία του κεφαλαίου 3 έχει χρησιμοποιηθεί η κανονική κατανομή στην θεωρητική εξαγωγή στατιστικών εκτιμήσεων. Τέλος, στο κεφάλαιο 5 έχει περιγραφεί σε λεπτομέρεια η χρήση της κανονικής κατανομής για την περιγραφή υδρολογικών μεταβλητών.

Στο τυπολόγιο του Πίν. 6.1 συνοψίζονται οι βασικότερες μαθηματικές σχέσεις που συνδέονται με την κανονική κατανομή, οι οποίες έχουν αναλυθεί και σε προηγούμενες ενότητες.

**Πίν. 6.1** Τυπολόγιο κανονικής κατανομής.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s)ds$
Τιμές μεταβλητής	$-\infty < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$\mu$ : παράμετρος θέσης (= μέση τιμή) $\sigma > 0$ : παράμετρος κλίμακας (= τυπική απόκλιση)
Μέση τιμή	$\mu_X = \mu$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \sigma^2$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = 0$
Τέταρτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(4)} = 3\sigma^4$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = 0$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_X} = 3$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = \mu$
Διάμεσος	$x_{0.5} = \mu$

Συμπερασματικά, πρόκειται για συμμετρική κατανομή δύο παραμέτρων με κωδωνοειδές σχήμα. Η συμμετρία της κατανομής και η δυνατότητα της μεταβλητής  $X$  να παίρνει αρνητικές τιμές έρχονται σε αντίθεση με τη φυσική απαίτηση, σύμφωνα με την οποία οι υδρολογικές μεταβλη-

τές κατά κανόνα έχουν αποκλειστικά θετικές τιμές. Το πρόβλημα αυτό έχει ήδη συζητηθεί διεξοδικά στο ένθετο εδάφιο της ενότητας 5.4.

Μια βασική ιδιότητα της κατανομής είναι ότι είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση. Έτσι, το άθροισμα (και γενικότερα ο γραμμικός συνδυασμός) δύο μεταβλητών που ακολουθούν κανονική κατανομή, ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή.

### Τυπικοί υπολογισμοί

Οι τυπικοί υπολογισμοί αφορούν στον υπολογισμό της τιμής  $u = F_X(x_u)$  της συνάρτησης κατανομής για δεδομένη τιμή  $x_u$  της μεταβλητής, ή, αντίστροφα, στον υπολογισμό του  $u$ -ποσοστημορίου της μεταβλητής, δηλαδή τον υπολογισμό της τιμής  $x_u$  όταν είναι γνωστή η τιμή  $u$ . Το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα που υπεισέρχεται στον ορισμό της κανονικής συνάρτησης κατανομής (Πίν. 6.1) δεν υπολογίζεται αναλυτικά, δημιουργεί ορισμένες δυσκολίες στους τυπικούς υπολογισμούς. Η απλούστερη λύση στηρίζεται στην πινακοποίηση των τιμών της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής  $z = (x - \mu) / \sigma$ . Η τελευταία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1 (βλ. ενότητα 2.5), πράγμα που διευκολύνει την πινακοποίηση. Η πινακοποίηση αυτή περιέχεται σε όλα τα βιβλία θεωρίας πιθανοτήτων και στατιστικής, καθώς και στο Πίν. Π1 του Παραρτήματος (στο τέλος του βιβλίου).

Έτσι, ο υπολογισμός του  $u$ -ποσοστημορίου ( $x_u$ ) γίνεται από την εξίσωση

$$x_u = \mu + z_u \sigma \quad (6.1)$$

αφού προηγουμένως προσδιοριστεί από τον Πίν. Π1 η τιμή  $z_u$  που αντιστοιχεί στη δεδομένη τιμή της συνάρτησης κατανομής  $u = F_Z(z_u)$ . Αντίστροφα, για δεδομένο  $x_u$  υπολογίζεται από την (6.1) το  $z_u$  και από τον Πίν. Π1 προκύπτει το  $u = F_Z(z_u)$ .

Στη βιβλιογραφία δίνονται διάφορες αριθμητικές προσεγγίσεις της κανονικής συνάρτησης κατανομής, με βάση τις οποίες μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση πινάκων (Press et al., 1987· Stedinger et al., 1993). Η χρήση των προσεγγίσεων αυτών είναι πλεονεκτικότερη όταν οι υπολογισμοί γίνονται με ηλεκτρονικούς υπολογιστές ή αριθμομηχανές. Στο Παράρτημα 6.A δίνονται οι απλούστερες προσεγγίσεις.

**Εκτίμηση παραμέτρων**

Όπως έχουμε δει στην ενότητα 3.4, και η μέθοδος των ροπών και η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας δίνουν τις ίδιες εκτιμήσεις για τις παραμέτρους της κανονικής κατανομής, οι οποίες είναι

$$\mu = \bar{x} \quad \sigma = s_X \quad (6.2)$$

Υπενθυμίζεται ότι το μέγεθος  $s_X$  στη σχέση (6.2) κανονικά είναι η μεροληπτική εκτίμηση της τυπικής απόκλισης. Ωστόσο συχνά χρησιμοποιείται η αμερόληπτη εκτίμηση αντί της μεροληπτικής.

**Τυπικό σφάλμα ποσοστημορίου και όρια εμπιστοσύνης**

Στο εδάφιο 3.3.4 ορίσαμε την έννοια του τυπικού σφάλματος και των ορίων εμπιστοσύνης στην εκτίμηση του ποσοστημορίου, και δώσαμε τις αντίστοιχες εξισώσεις για το ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής. Ανακεφαλαιώνοντας και συνοψίζοντας, αναφέρουμε ότι η σημειακή εκτίμηση του  $u$ -ποσοστημορίου της κανονικής κατανομής είναι

$$\hat{x}_u = \bar{x} + z_u s_X \quad (6.3)$$

το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης είναι

$$\varepsilon_u = \frac{s_X}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{z_u^2}{2}} \quad (6.4)$$

και τα αντίστοιχα όρια εμπιστοσύνης για βαθμό εμπιστοσύνης  $\gamma$  είναι

$$\hat{x}_{u_{1,2}} \approx (\bar{x} + z_u s_X) \pm z_{(1+\gamma)/2} \frac{s_X}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{z_u^2}{2}} = \hat{x}_u \pm z_{(1+\gamma)/2} \frac{s_X}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{z_u^2}{2}} \quad (6.5)$$

**Χαρτί κανονικής κατανομής**

Όπως έχει περιγραφεί στο εδάφιο 5.3.3 στο ειδικό χαρτί της κανονικής κατανομής η συνάρτηση κατανομής ευθειοποιείται. Η απεικόνιση στο χαρτί κανονικής κατανομής είναι ισοδύναμη με την απεικόνιση της μεταβλητής  $x$  (κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής  $z$  (οριζόντιος άξονας).

### 6.1.2 Λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων

Η λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων προκύπτει από την κανονική κατανομή και το μετασχηματισμό

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y \quad (6.6)$$

Έτσι, λέμε ότι η μεταβλητή  $X$  ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων αν η  $Y$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu_Y, \sigma_Y)$ . Στο τυπολόγιο του Πίν. 6.2 συνοψίζονται οι βασικότερες μαθηματικές σχέσεις που συνδέονται με τη λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων.

**Πίν. 6.2** Τυπολόγιο της λογαριθμοκανονικής κατανομής δύο παραμέτρων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma_Y}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = \int_0^x f_X(s)ds$
Τιμές μεταβλητής	$0 < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$\mu_Y$ : παράμετρος κλίμακας $\sigma_Y > 0$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$\mu_X = e^{\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2}}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = e^{2\mu_Y + \sigma_Y^2} (e^{\sigma_Y^2} - 1)$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = e^{3\mu_Y + \frac{3\sigma_Y^2}{2}} (e^{3\sigma_Y^2} - 3e^{\sigma_Y^2} + 2)$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_{v_X} = \sqrt{e^{\sigma_Y^2} - 1}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = 3C_{v_X} + C_{v_X}^3$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = e^{\mu_Y - \sigma_Y^2}$
Διάμεσος	$x_{0.5} = e^{\mu_Y}$

Ως άμεση συνέπεια της (6.6), η μεταβλητή  $X$  είναι θετική. Από τον Πίν. 6.2 προκύπτει ότι η κατανομή έχει πάντα θετική ασυμμετρία. Έτσι, το σχήμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας είναι πάντα κωδωνοειδές και θετικά ασύμμετρο. Αυτές οι βασικές ιδιότητες της λογαριθμοκανονικής κατανομής είναι συμβατές με τις παρατηρημένες ιδιότητες πολλών υδρολογικών μεταβλητών, γι' αυτό και η χρήση της κατανομής είναι συχνή στην τεχνική υδρολογία. Σημειώνεται ακόμη ότι το γινόμενο δύο μεταβλητών που ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων, ακολουθεί επίσης λογαριθμοκανονική κατανομή. Αυτή η ιδιότητα σε συνδυασμό με το κεντρικό οριακό θεώρημα έχει από πολλούς θεωρηθεί ως θεωρητική τεκμηρίωση της χρήσης της κατανομής στην υδρολογία, αφού σε πολλές περιπτώσεις οι μεταβλητές μπορούν να θεωρηθούν ως αποτέλεσμα πολλών πολλαπλασιαστικών, παρά αθροιστικών, παραγόντων.

### Τυπικοί υπολογισμοί

Οι τυπικοί υπολογισμοί της λογαριθμοκανονικής κατανομής βασίζονται στους αντίστοιχους υπολογισμούς της κανονικής κατανομής. Έτσι, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.1) και (6.6) παίρνουμε

$$y_u = \mu_Y + z_u \sigma_Y \Leftrightarrow x_u = e^{\mu_Y + z_u \sigma_Y} \quad (6.7)$$

όπου  $z_u$  το  $u$ -ποσοστημόριο της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής. Το τελευταίο μπορεί να βρεθεί από πίνακες ή να υπολογιστεί αριθμητικά σύμφωνα με όσα περιγράφηκαν στο εδάφιο 6.1.1.

### Εκτίμηση παραμέτρων

Όπως εύκολα προκύπτει από τις εξισώσεις του Πίν. 6.2, η μέθοδος των ροπών δίνει

$$\sigma_Y = \sqrt{\ln(1 + s_X^2 / \bar{x}^2)} \quad \mu_Y = \ln \bar{x} - \sigma_Y^2 / 2 \quad (6.8)$$

Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας δίνει τις ακόλουθες εκτιμήσεις (βλ. π.χ. Kite, 1988, σ. 57)

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^n \ln x_i / n = \bar{y} \quad \sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu_Y)^2 / n} = s_Y \quad (6.9)$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μέθοδοι όχι μόνο δίνουν διαφορετικές εκτιμήσεις αλλά στηρίζονται και σε διαφορετικά δειγματικά χαρακτηριστικά. Έτσι, η μέθοδος των ροπών στηρίζεται στη μέση τιμή και την (μεροληπτική) τυπική απόκλιση της μεταβλητής  $X$ , ενώ η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας στηρίζεται στη μέση τιμή και την (μεροληπτική) τυπική απόκλιση του λογαρίθμου της μεταβλητής  $X$ .

### Τυπικό σφάλμα ποσοστημορίου και όρια εμπιστοσύνης

Εφόσον για την εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής χρησιμοποιείται η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας, η σημειακή εκτίμηση των  $u$ -ποσοστημορίων των  $y$  και  $x$  είναι

$$\hat{y}_u = \ln(\hat{x}_u) = \bar{y} + z_u s_Y \Rightarrow \hat{x}_u = e^{\bar{y} + z_u s_Y} \quad (6.10)$$

όπου  $z_u$  το  $u$ -ποσοστημόριο της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής. Το τετράγωνο του τυπικού σφάλματος εκτίμησης της  $Y$  κατά τα γνωστά είναι

$$\varepsilon_Y^2 = \text{Var}(\hat{Y}_u) = \text{Var}(\ln \hat{X}_u) = \frac{s_Y^2}{n} \left( 1 + \frac{z_u^2}{2} \right) \quad (6.11)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε την ακόλουθη προσεγγιστική σχέση υπολογισμού των ορίων εμπιστοσύνης της  $x_u$  για βαθμό εμπιστοσύνης  $\gamma$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{u,1,2} &\approx \exp \left[ (\bar{y} + z_u s_Y) \pm z_{(1+\gamma)/2} \frac{s_Y}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{z_u^2}{2}} \right] = \\ &= \hat{x}_u \exp \left[ \pm z_{(1+\gamma)/2} \frac{s_Y}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{z_u^2}{2}} \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

όπου  $z_{(1+\gamma)/2}$  το  $[(1+\gamma)/2]$ -ποσοστημόριο της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής.

Στην περίπτωση που ο υπολογισμός των παραμέτρων γίνεται με τη μέθοδο των ροπών το τυπικό σφάλμα και τα αντίστοιχα όρια εμπιστοσύνης είναι διαφορετικά. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στον Kite (1988, σ. 60).

### Χαρτί λογαριθμοκανονικής κατανομής

Το ειδικό χαρτί της κανονικής κατανομής (βλ. προηγούμενο εδάφιο) εύκολα μετασχηματίζεται σε χαρτί λογαριθμοκανονικής κατανομής, στο οποίο η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής ευθειοποιείται. Αρκεί να χρησιμοποιηθεί λογαριθμικός κατακόρυφος άξονας. Η απεικόνιση στο χαρτί λογαριθμοκανονικής κατανομής είναι ισοδύναμη με την απεικόνιση του λογαρίθμου της μεταβλητής  $\ln x$  (κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής  $z$  (οριζόντιος άξονας).

#### Εφαρμογή 6.1.2

Στον Πίν. 6.3 δίνεται το δείγμα των μηνιαίων όγκων απορροής της λεκάνης του ποταμού Ευήνου ανάντη του υδρομετρικού σταθμού Πόρος Ρηγαίου, για το μήνα Ιανουάριο. Ζητείται η προσαρμογή της λογαριθμοκανονικής κατανομής 2 παραμέτρων και η εκτίμηση της απορροής πεντηκονταετίας.

**Πίν. 6.3** Δείγμα μηνιαίου όγκου απορροής (σε  $\text{hm}^3$ ) στη θέση Πόρος Ρηγαίου του ποταμού Ευήνου για το μήνα Ιανουάριο.

Υδρολ. έτος	Όγκος απορροής	Υδρολ. έτος	Όγκος απορροής	Υδρολ. έτος	Όγκος απορροής
1970-71	102	1977-78	121	1984-85	178
1971-72	74	1978-79	317	1985-86	185
1972-73	78	1979-80	213	1986-87	101
1973-74	48	1980-81	111	1987-88	57
1974-75	31	1981-82	82	1988-89	24
1975-76	48	1982-83	61	1989-90	22
1976-77	114	1983-84	133	1990-91	51

Η μέση τιμή του δείγματος είναι

$$\bar{x} = \sum x / n = 102.4 \text{ hm}^3$$

Η τυπική απόκλιση (μεροληπτική εκτίμηση) είναι

$$s_X = \left( \sum x^2 / n - \bar{x}^2 \right)^{1/2} = 70.4 \text{ hm}^3$$

και ο συντελεστής μεταβλητότητας

$$\hat{C}_{v_X} = s_X / \bar{x} = 70.4 / 102.4 = 0.69$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας (μεροληπτική εκτίμηση) προκύπτει



$$\hat{C}_{s_X} = 1.4$$

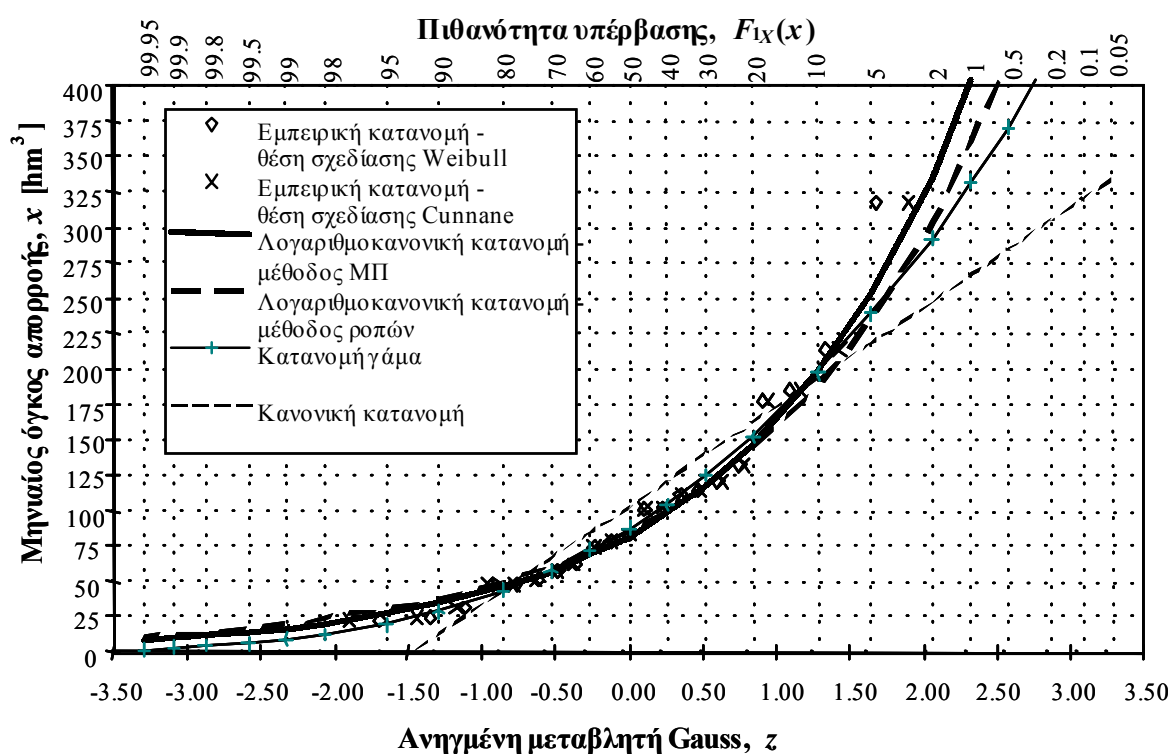
Αυτές οι τιμές των συντελεστών μεταβλητότητας και ασυμμετρίας δείχνουν μεγάλη απόκλιση από την κανονική κατανομή.

Η μέθοδος των ροπών δίνει

$$\sigma_Y = \sqrt{\ln(1 + s_X^2 / \bar{x}^2)} = 0.622, \mu_Y = \ln \bar{x} - \sigma_Y^2 / 2 = 4.435$$

Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας δίνει

$$\mu_Y = \sum \ln x / n = 4.404 \text{ hm}^3, \sigma_Y = \sqrt{\sum (\ln x)^2 / n - \mu_Y^2} = 0.687$$



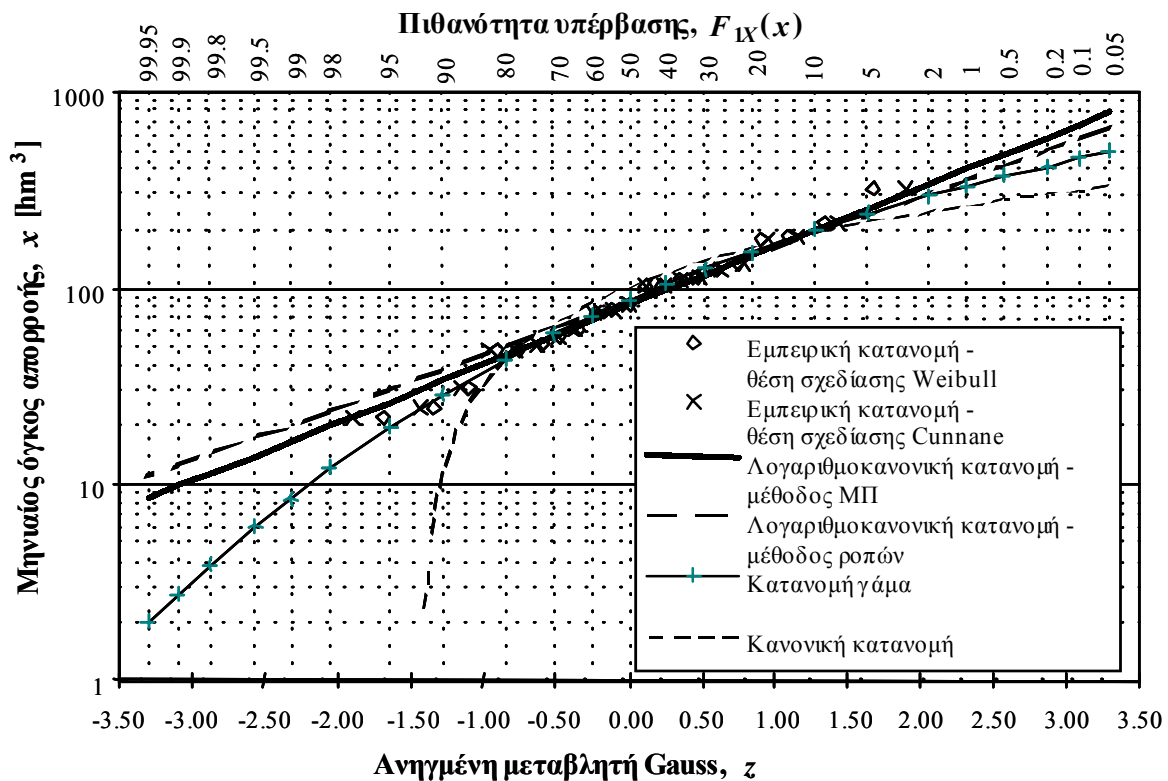
Σχ. 6.1 Εμπειρική και θεωρητικές συναρτήσεις κατανομής του όγκου απορροής του Ιανουαρίου στον Πόρο Ρηγανίου (Εφαρμογή 6.1.2) σε χαρτί κανονικής κατανομής.

Ο μηνιαίος όγκος απορροής πενήνταετίας δίνεται από την εξίσωση  $x_u = \exp(\mu_Y + z_u \sigma_Y)$  όπου  $u = 1 - 1/50 = 0.98$  και  $z_u = 2.054$  (Πίν Π1). Με τις παραμέτρους της μεθόδου των ροπών προκύπτει  $x_{0.98} = 302.7 \text{ hm}^3$ , ενώ με τις παραμέτρους της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας προκύπτει  $x_u = 335.1$ . Στην τελευταία περίπτωση τα όρια εμπιστοσύνης 95% της τιμής αυτής είναι (με βάση την (6.12), για  $z_u = 2.054$  και  $z_{(1+\gamma)/2} = 1.96$ )

$$\hat{x}_{u_{1,2}} \approx \exp \left[ 4.404 + 2.054 * 0.687 \pm 1.96 * \frac{0.687}{\sqrt{21}} * \sqrt{1 + \frac{2.054^2}{2}} \right]$$

$$= \exp(5.815 \pm 0.518) = \begin{cases} 562.8 \\ 199.7 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το διάστημα εμπιστοσύνης είναι πολύ ευρύ, γεγονός που αντανακλά τη μικρή αξιοπιστία στην πρόγνωση της απορροής πενηνταετίας του Ιανουαρίου. Η μείωση της μεγάλης αβεβαιότητας στην πρόγνωση αυτή προϋποθέτει σημαντικά μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος.



Σχ. 6.2 Εμπειρική και θεωρητικές συναρτήσεις κατανομής του όγκου απορροής του Ιανουαρίου στον Πόρο Ρηγανίου (Εφαρμογή 6.1.2) σε χαρτί λογαριθμοκανονικής κατανομής.

Η καταλληλότητα της λογαριθμοκανονικής κατανομής μπορεί να ελεγχθεί με τη δοκιμή  $\chi^2$  (βλ εδάφιο 5.5.1). Αντί του ελέγχου αυτού δίνουμε στα Σχ. 6.1 και Σχ. 6.2 γραφική σύγκριση της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής με τη λογαριθμοκανονική κατανομή. Το Σχ. 6.1 σχεδιάστηκε σε χαρτί κανονικής κατανομής, ενώ το Σχ. 6.2 σε χαρτί λογαριθμοκανονικής κατανομής. Για την εμπειρική κατανομή χρησιμοποιήθηκαν οι θέσεις σχεδίασης Weibull και Cunnane (βλ. Πίν. 5.7). Για τη λογαριθμοκανονική κατανομή χρησιμοποιήθηκαν και οι

δύο παραπάνω ομάδες παραμέτρων. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας δίνει καλύτερη προσαρμογή στην περιοχή των μικρών πιθανοτήτων υπέρβασης, που ενδιαφέρουν περισσότερο. Για σύγκριση έχει σχεδιαστεί και η κανονική κατανομή, η ακαταλληλότητα της οποίας για το συγκεκριμένο δείγμα είναι εμφανής, καθώς και η κατανομή γάμα (βλ. Εφαρμογή 6.2.2).

### 6.1.3 Λογαριθμοκανονική κατανομή τριών παραμέτρων (Galton)

Με συνδυασμό της κανονικής κατανομής και του τροποποιημένου λογαριθμικού μετασχηματισμού

$$y = \ln(x - c) \Leftrightarrow x = c + e^y \quad (6.13)$$

παίρνουμε τη λογαριθμοκανονική κατανομή τριών παραμέτρων ή κατανομή Galton\*. Η κατανομή αυτή διαθέτει μία επιπλέον παράμετρο από την απλούστερη λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων, την παράμετρο θέσης  $c$ , η οποία αποτελεί και το κάτω όριο της μεταβλητής. Η τρίτη αυτή παράμετρος επιτρέπει την καλύτερη προσαρμογή της κατανομής στα δεδομένα. Έτσι, αν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των ροπών, η τρίτη παράμετρος επιτρέπει τη διατήρηση του συντελεστή ασυμμετρίας της μεταβλητής. Στο τυπολόγιο του Πίν. 6.4 συνοψίζονται οι βασικότερες μαθηματικές σχέσεις που συνδέονται με τη λογαριθμοκανονική κατανομή τριών παραμέτρων.

#### Τυπικοί υπολογισμοί

Ο χειρισμός της κατανομής είναι παρόμοιος με αυτόν της λογαριθμοκανονικής κατανομής δύο παραμέτρων και γίνεται με βάση τη σχέση

$$y_u = \mu_Y + z_u \sigma_Y \Leftrightarrow x_u = c + e^{\mu_Y + z_u \sigma_Y} \quad (6.14)$$

όπου  $z_u$  το  $u$ -ποσοστημόριο της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής.

---

\* Sir Francis Galton: Γενετιστής και βιοστατιστικός (1822-1911), γνωστός περισσότερο από τον ομώνυμο νόμο στον οποίο στηρίζεται η θεωρία της γραμμικής παλινδρόμησης (regression).

**Εκτίμηση παραμέτρων**

Οι ακόλουθες εξισώσεις της μεθόδου των ροπών προκύπτουν μετά από πράξεις από τις εκφράσεις των ροπών που δίνονται στον Πίν. 6.4. Η παράμετρος  $\sigma_Y$  υπολογίζεται από την

$$\sigma_Y = \sqrt{\ln(1 + \phi^2)} \quad (6.15)$$

όπου

$$\phi = \frac{1 - \omega^{2/3}}{\omega^{1/3}} \quad \omega = \frac{-\hat{C}_{s_X} + \sqrt{\hat{C}_{s_X}^2 + 4}}{2} \quad (6.16)$$

**Πίν. 6.4** Τυπολόγιο της λογαριθμοκανονικής κατανομής τριών παραμέτρων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{1}{(x-c)\sqrt{2\pi\sigma_Y}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x-c)-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = \int_c^x f_X(s) ds$
Τιμές μεταβλητής	$c < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$c$ : παράμετρος θέσης $\mu_Y$ : παράμετρος κλίμακας $\sigma_Y > 0$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$\mu_X = c + e^{\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2}}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = e^{2\mu_Y + \sigma_Y^2} (e^{\sigma_Y^2} - 1)$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = e^{3\mu_Y + \frac{3\sigma_Y^2}{2}} (e^{3\sigma_Y^2} - 3e^{\sigma_Y^2} + 2)$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = 3(e^{\sigma_Y^2} - 1)^{1/2} + (e^{\sigma_Y^2} - 1)^{3/2}$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = c + e^{\mu_Y - \sigma_Y^2}$
Διάμεσος	$x_{0.5} = c + e^{\mu_Y}$

Οι άλλες δύο παράμετροι υπολογίζονται από τις εξισώσεις

$$\mu_Y = \ln(s_X / \phi) - \sigma_Y^2 / 2 \quad c = \bar{x} - \frac{s_X}{\phi} \quad (6.17)$$

Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας στηρίζεται στις εξισώσεις (βλ. π.χ. Kite, 1988, σ. 74)

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^n \ln(x_i - c) / n \quad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n [\ln(x_i - c) - \mu_Y]^2 / n \quad (6.18)$$

$$(\mu_Y - \sigma_Y^2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - c} = \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i - c)}{x_i - c} \quad (6.19)$$

οι οποίες μόνο αριθμητικά μπορούν να επιλυθούν.

Η εκτίμηση των ορίων εμπιστοσύνης για την εν λόγω κατανομή απαιτεί πολύπλοκους υπολογισμούς. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στον Kite (1988, σ. 77).

## 6.2 Η ομάδα των κατανομών γάμα

### 6.2.1 Εκθετική κατανομή

Μια από τις απλούστερες αλλά και πολύ χρήσιμες κατανομές της στατιστικής είναι η εκθετική, τα βασικά χαρακτηριστικά της οποίας συνοψίζονται στον Πίν. 6.5.

Στην απλούστερη μορφή της, που έχουμε ήδη συναντήσει στην Εφαρμογή 2.4 έχει μόνο μία παράμετρο, την παράμετρο κλίμακας  $\lambda$  (η δεύτερη παράμετρος  $c$  είναι ίση με 0). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής είναι παντού φθίνουσα, δηλαδή έχει σχήμα ανεστραμμένου J.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει (ενότητα 2.4, ένθετο εδάφιο και Εφαρμογή 2.4) η εκθετική κατανομή χρησιμοποιείται για την περιγραφή υδρολογικών μεταβλητών σε μικρή χρονική κλίμακα, όπως για παράδειγμα των ωριαίων ή ημερήσιων υψών βροχής. Από ένα θεώρημα της θεωρίας πιθανοτήτων προκύπτει ότι οι αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών τυχαίων σημείων στο χρόνο ακολουθούν εκθετική κατανομή. Αυτό το θεώρημα έχει συχνή εφαρμογή στην τεχνική υδρολογία, όπου, για παράδειγμα, οι

χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στις εμφανίσεις διαδοχικών επεισοδίων βροχής ακολουθούν εκθετική κατανομή. Επιπλέον, και οι διάρκειες των επεισοδίων βροχής ακολουθούν πολύ συχνά εκθετική κατανομή.

**Πίν. 6.5** Τυπολόγιο της εκθετικής κατανομής.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(x-c)}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda(x-c)}$
Τιμές μεταβλητής	$c < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$c$ : παράμετρος θέσης $\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας
Μέση τιμή	$\mu_X = c + \frac{1}{\lambda}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = \frac{2}{\lambda^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(4)} = \frac{9}{\lambda^4}$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_{v_X} = \frac{1}{c\lambda + 1}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = 2$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_X} = 9$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = c$
Διάμεσος τιμή	$x_{0.5} = c - \frac{\ln 0.5}{\lambda}$

### 6.2.2 Κατανομή γάμα δύο παραμέτρων

Η κατανομή γάμα είναι από τις πιο διαδεδομένες κατανομές της τεχνικής υδρολογίας. Τα βασικά χαρακτηριστικά της δίνονται στο τυπολόγιο του Πίν. 6.6. Όπως και η λογαριθμική κατανομή δύο παραμέτρων είναι θετικά ασύμμετρη και ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής. Οι

ιδιότητες αυτές την κάνουν συμβατή με τις πιο χαρακτηριστικές υδρολογικές μεταβλητές, όπως μηνιαίες και ετήσιες παροχές ή βροχές.

**Πίν. 6.6** Τυπολόγιο της κατανομής γάμα 2 παραμέτρων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\lambda x}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = \int_0^x f_X(s) ds$
Τιμές μεταβλητής	$0 < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας $\kappa > 0$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$\mu_X = \frac{\kappa}{\lambda}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \frac{\kappa}{\lambda^2}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = \frac{2\kappa}{\lambda^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(4)} = \frac{3\kappa(\kappa+2)}{\lambda^4}$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_{v_X} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} = 2C_{v_X}$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_X} = 3 + \frac{6}{\kappa} = 3 + 6C_{v_X}^2$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = (\kappa - 1) / \lambda$ (για $\kappa > 1$ )

Η κατανομή γάμα έχει δύο παραμέτρους, την παράμετρο κλίμακας  $\lambda$  και την παράμετρο σχήματος  $\kappa$ .<sup>\*</sup> Για  $\kappa = 1$  η κατανομή ταυτίζεται με την εκθετική, η οποία είναι ειδική περίπτωση της γάμα. Για  $\kappa > 1$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής εμφανίζει κωδωνοειδές σχήμα, ενώ για  $\kappa < 1$  το σχήμα της γίνεται ανεστραμμένο J, με άπειρη

<sup>\*</sup> Για ακέραια τιμή του  $\kappa$ , η κατανομή γάμα πολλές φορές αναφέρεται ως κατανομή Erlang.

τεταγμένη στη θέση  $x = 0$ . Για μεγάλες τιμές του  $k$  (πάνω από 15-30) η κατανομή γάμα πλησιάζει προς την κανονική.

Η κατανομή γάμα, όπως και η κανονική, είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση, αλλά μόνο όταν υπάρχει στοχαστική ανεξαρτησία και κοινή παράμετρος κλίμακας των προσθετέων. Έτσι, το άθροισμα δύο ανεξάρτητων μεταβλητών που ακολουθούν κατανομές γάμα με κοινή παράμετρο κλίμακας  $\lambda$ , ακολουθεί επίσης κατανομή γάμα.

Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι η κατανομή  $\chi^2$ , η οποία έχει εξεταστεί στο εδάφιο 2.8.3, είναι ειδική περίπτωση της κατανομής γάμα.

### Τυπικοί υπολογισμοί

Όπως συμβαίνει και με την κανονική κατανομή, το ολοκλήρωμα της συνάρτησης κατανομής γάμα δεν υπολογίζεται αναλυτικά, πράγμα που δημιουργεί δυσκολίες στους υπολογισμούς. Η απλούστερη λύση στηρίζεται στην πινακοποίηση των τιμών της τυποποιημένης μεταβλητής  $k = (x - \mu_X) / \sigma_X$ , όπου  $\mu_X$  και  $\sigma_X$  η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της  $X$ , αντίστοιχα. Τέτοια πινακοποίηση περιέχεται σε διάφορα βιβλία θεωρίας πιθανοτήτων, καθώς και στους Πίν. Π4α και Π4β του Παραρτήματος (στο τέλος του βιβλίου).

Έτσι, ο υπολογισμός του  $u$ -ποσοστημορίου ( $x_u$ ) γίνεται από την εξίσωση

$$x_u = \mu_X + k_u \sigma_X \quad (6.20)$$

αφού προηγουμένως προσδιοριστεί από τον Πίν. Π4α ή Π4β η τιμή  $k_u$  που αντιστοιχεί στη δεδομένη τιμή της συνάρτησης κατανομής  $u = F_K(k_u)$ . Αντίστροφα, για δεδομένο  $x_u$  υπολογίζεται από την (6.1) το  $k_u$  και από τον Πίν. Π4α ή Π4β το  $u = F_K(k_u)$ . Στον Πίν. Π4α ή Π4β κάθε στήλη αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $k$  (ή, ισοδύναμα, του συντελεστή ασυμμετρίας  $C_{sX} = 2 / \sqrt{k} = 2\sigma_X / \bar{x}$ ). Έτσι θα πρέπει να επιλεγεί η κατάλληλη στήλη, ή να γίνει κατάλληλη παρεμβολή των τιμών γειτονικών στηλών.

Στη βιβλιογραφία δίνονται διάφορες αριθμητικές προσεγγίσεις της συνάρτησης κατανομής γάμα, με βάση τις οποίες μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση πινάκων (Press et al., 1987· Stedinger et al., 1993). Η χρήση των προσεγγίσεων αυτών είναι πλεονεκτικότερη όταν οι υπολογι-



σμοί γίνονται με ηλεκτρονικούς υπολογιστές ή αριθμομηχανές. Στο Παράρτημα 6.B δίνονται οι απλούστερες προσεγγίσεις.

### Εκτίμηση παραμέτρων

Η μέθοδος των ροπών δίνει άμεσα τις ακόλουθες απλές εκτιμήσεις των παραμέτρων της κατανομής γάμα:

$$\kappa = \frac{\bar{x}^2}{s_x^2} \quad \lambda = \frac{\bar{x}}{s_x^2} \quad (6.21)$$

Οι εκτιμήσεις της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας είναι πολυπλοκότερες. Βασίζονται στην επίλυση των εξισώσεων (βλ. π.χ. Bobée and Ashkar, 1991)

$$\ln \kappa - \psi(\kappa) = \ln \bar{x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad \lambda = \frac{\kappa}{\bar{x}} \quad (6.22)$$

όπου  $\psi(\kappa) = d \ln \Gamma(\kappa) / d\kappa$  η λεγόμενη συνάρτηση δίζαμα (παράγωγος του λογαρίθμου της συνάρτησης γάμα), πινακοποιημένες τιμές της οποίας δίνονται σε μαθηματικά συγγράμματα. Οι Masuyama and Kuroiwa (1951) έδωσαν την ακόλουθη προσεγγιστική σχέση για την επίλυση ως προς  $\kappa$  της πρώτης από τις παραπάνω εξισώσεις:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{0.5000876 + 0.1648852\phi - 0.054427\phi^2}{\phi} & 0 \leq \phi \leq 0.5772 \\ \frac{8.898919 + 9.05995\phi + 0.9775373\phi^2}{\phi(17.7928 + 11.968477\phi + \phi^2)} & 0.5772 \leq \phi \leq 17.0 \end{cases} \quad (6.23)$$

όπου  $\phi = \ln \kappa - \psi(\kappa)$ . Το σφάλμα της προσέγγισης αυτής είναι πρακτικά αμελητέο (0.0088% για την πρώτη εξίσωση και 0.0054% για τη δεύτερη).

### Τυπικό σφάλμα ποσοστημορίου και όρια εμπιστοσύνης

Η σημειακή εκτίμηση του  $u$ -ποσοστημορίου της κατανομής γάμα είναι

$$\hat{x}_u = \bar{x} + k_u s_x \quad (6.24)$$

Στην περίπτωση που οι παράμετροι υπολογίζονται με τη μέθοδο των ροπών, το τετραγωνικό τυπικό σφάλμα της εκτίμησης είναι (βλ. π.χ. Bobée and Ashkar, 1991, σ. 50)

$$\varepsilon_u^2 = \frac{s_X^2}{n} \left[ (1 + k_u C_{v_X})^2 + \frac{1}{2} \left( k_u + 2C_{v_X} \frac{\partial k_u}{\partial C_{s_X}} \right)^2 (1 + C_{v_X})^2 \right] \quad (6.25)$$

Το μέγεθος  $\partial k_u / \partial C_{s_X}$  μπορεί να εκτιμηθεί προσεγγιστικά από κάποια προσέγγιση της κατανομής γάμα, π.χ. από την προσέγγιση Wilson-Hilferty. Συχνά, σε πρώτη προσέγγιση, ο αντίστοιχος όρος παραλείπεται οπότε η παραπάνω έκφραση απλοποιείται σημαντικά:

$$\varepsilon_u^2 = \frac{s_X^2}{n} \left[ 1 + 2C_{v_X} k_u + \frac{1}{2} (1 + 3C_{v_X}^2) k_u^2 \right] \quad (6.26)$$

Έτσι, τα προσεγγιστικά όρια εμπιστοσύνης για βαθμό εμπιστοσύνης  $\alpha$  είναι

$$\hat{x}_{u_{1,2}} \approx (\bar{x} + k_u s_X) \pm z_{(1+\gamma)/2} \frac{s_X}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 2C_{v_X} k_u + \frac{1}{2} (1 + 3C_{v_X}^2) k_u^2} \quad (6.27)$$

Αν χρησιμοποιείται η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας ο υπολογισμός των ορίων εμπιστοσύνης είναι πιο πολύπλοκος. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στους Bobée and Ashkar (1991, σ. 46).

### Χαρτί κατανομής γάμα

Δεν μπορεί να κατασκευαστεί χαρτί κατανομής γάμα, τέτοιο που να ευθειοποιεί κάθε συνάρτηση κατανομής γάμα. Ωστόσο, μπορεί να κατασκευαστεί χαρτί γάμα αλλά για δεδομένη τιμή της παραμέτρου σχήματος  $\kappa$ . Κάτι τέτοιο, βεβαίως, δεν είναι πρακτικό και γι' αυτό η απεικόνιση της κατανομής γάμα γίνεται συνήθως σε χαρτί κανονικής κατανομής ή σε χαρτί κατανομής Weibull. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, η κατανομή δεν απεικονίζεται ως ευθεία, αλλά ως καμπύλη.

#### Εφαρμογή 6.2.2

Ζητείται η προσαρμογή της κατανομής γάμα 2 παραμέτρων και η εκτίμηση της απορροής πενηντηκονταετίας για το δείγμα των μηνιαίων όγκων απορροής της λεκάνης του ποταμού Ευήνου ανάντη του υδρομετρικού

σταθμού Πόρος Ρηγανίου, για το μήνα Ιανουάριο (Εφαρμογή 6.1.2, Πίν. 6.3).

Για μέση τιμή  $102.4 \text{ hm}^3$  και τυπική απόκλιση  $70.4 \text{ hm}^3$  η μέθοδος των ροπών δίνει τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων της κατανομής:

$$\kappa = 102.4^2 / 70.4^2 = 2.11, \lambda = 102.4 / 70.4^2 = 0.0207.$$

Για  $T = 50$  ή ισοδύναμα  $F = 0.98$  από τον Πίν Π4α\* προκύπτει  $k_{0.98} = 2.70$  και

$$x_u = 102.4 + 2.70 \times 70.4 = 292.5 \text{ hm}^3.$$

Παίρνοντας από τον Πίν. Π1 τις τιμές του  $k_u$  για διάφορες τιμές του  $u$  υπολογίζουμε μια σειρά ποσοστημορίων της κατανομής, οπότε είμαστε σε θέση να απεικονίσουμε τη συνάρτηση κατανομής. Η απεικόνιση αυτή δίνεται (σε σύγκριση και με άλλες κατανομές) στα Σχ. 6.1 (σε χαρτί κανονικής κατανομής) και Σχ. 6.2 (σε χαρτί λογαριθμοκανονικής κατανομής). Παρατηρούμε ότι η κατανομή γάμα γενικά προσεγγίζει την λογαριθμοκανονική κατανομή, αλλά στην περιοχή των μικρών πιθανοτήτων υπέρβασης η προσαρμογή της προς την εμπειρική κατανομή του συγκεκριμένου δείγματος είναι χειρότερη από αυτήν της λογαριθμοκανονικής κατανομής.

---

\* Εναλλακτικά, αντί να χρησιμοποιήσουμε τον Πίν Π4α, μπορούμε να αξιοποιήσουμε την προσέγγιση της εξίσωσης (6.64) (βλ. Παράρτημα 6.B). Σε αυτή την περίπτωση, οι υπολογισμοί είναι οι ακόλουθοι:

$$\mu = 0.6 \times (2.11^{0.5} - 1) - (1/2.11^{0.5} - 1) = 0.583$$

$$\nu = 0.6 \times (2.11^{0.5} - 1) + 0.01 \times (2.11 - 1) + 1 = 1.283$$

$$a = 0.6 / 2.11^{0.5} + 0.08 = 0.493$$

$$\beta = 0.0234 \ln(2.11) = 0.0175$$

$$c = 1 + 31 \times \exp[-11.6 \times (2.11 - 1)^{-0.25}] = 1.0$$

Έτσι, η (6.64) γίνεται

$$\begin{aligned} x_u &= [0.583 / (0.0207 \times 0.493)] u^{0.493} + [1.283 / (0.0207 \times 0.0175)] [1 - (1-u)^{0.0175}] \\ &= 57.12 u^{0.493} + 3541.8 [1 - (1-u)^{0.0175}] \end{aligned}$$

Για  $u = 0.98$  η παραπάνω εξίσωση δίνει

$$x_u = 56.6 + 234.4 = 291.0 \text{ hm}^3$$

Για τον υπολογισμό των ορίων εμπιστοσύνης 95% της απορροής 50ετίας χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική σχέση (6.27), η οποία για  $z_{(1+\gamma)/2} = 1.96$ ,  $k_u = 2.70$  και  $C_{vX} = 0.69$  δίνει

$$\begin{aligned}\hat{x}_{u,2} &\approx 292.5 \pm 1.96 * \frac{70.4}{\sqrt{21}} * \sqrt{1 + 2 * 0.69 * 2.70 + \frac{1}{2} (1 + 3 * 0.69^2) * 2.70^2} \\ &\approx 292.5 \pm 110.9 = \begin{cases} 403.4 \\ 181.6 \end{cases}\end{aligned}$$

### 6.2.3 Κατανομή γάμα τριών παραμέτρων (Pearson III)

Με την προσθήκη μιας παραμέτρου θέσης στην κατανομή γάμα δύο παραμέτρων, παίρνουμε την κατανομή γάμα τριών παραμέτρων, πιο γνωστή ως κατανομή Pearson τύπου III.

Η παράμετρος θέσης  $c$ , η οποία αποτελεί και το κάτω όριο του μεταβλητής επιτρέπει την καλύτερη προσαρμογή της κατανομής στα δεδομένα. Έτσι, αν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των ροπών, η τρίτη παράμετρος επιτρέπει τη διατήρηση του συντελεστή ασυμμετρίας της μεταβλητής. Στο τυπολόγιο του Πίν. 6.7 συνοψίζονται οι βασικότερες μαθηματικές σχέσεις που συνδέονται με την κατανομή Pearson III.

Οι ιδιότητες της κατανομής είναι παρόμοιες με αυτές της κατανομής γάμα δύο παραμέτρων. Για τους τυπικούς υπολογισμούς της κατανομής χρησιμοποιείται και εδώ η εξίσωση (6.20). Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν οι προσεγγίσεις που δόθηκαν για την κατανομή γάμα δύο παραμέτρων. Διαφορετικές είναι οι εξισώσεις για την εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής. Έτσι, η μέθοδος των ροπών δίνει

$$\kappa = \frac{4}{\hat{C}_{s_X}^2} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\kappa}}{s_X} \quad c = \bar{x} - \frac{\kappa}{\lambda} \quad (6.28)$$

Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας δίνει πιο πολύπλοκες εξισώσεις, τις οποίες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει π.χ. στα βιβλία των Bobée and Ashkar (1991, σ. 59) και Kite (1988, σ. 117). Στα ίδια βιβλία υπάρχουν και οι τύποι για την εκτίμηση του τυπικού σφάλματος και των ορίων εμπιστοσύνης των ποσοστημορίων της κατανομής.

**Πίν. 6.7** Τυπολόγιο της κατανομής Pearson III.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} (x-c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(x-c)}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = \int_c^x f_X(s) ds$
Τιμές μεταβλητής	$c < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$c$ : παράμετρος θέσης $\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας $\kappa > 0$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$\mu_X = c + \frac{\kappa}{\lambda}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \frac{\kappa}{\lambda^2}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = \frac{2\kappa}{\lambda^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(4)} = \frac{3\kappa(\kappa+2)}{\lambda^4}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = \frac{2}{\sqrt{\kappa}}$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_X} = 3 + \frac{6}{\kappa}$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = c + (\kappa - 1) / \lambda$ (για $\kappa > 1$ )

### 6.2.4 Κατανομή Log-Pearson III

Η κατανομή Log-Pearson III προκύπτει από την κατανομή Pearson III και το μετασχηματισμό

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y \quad (6.29)$$

Έτσι, λέμε ότι η μεταβλητή  $X$  ακολουθεί κατανομή Log-Pearson III αν η  $Y$  ακολουθεί κατανομή Pearson III. Στο τυπολόγιο του (Πίν. 6.8) συνοψίζονται οι βασικότερες μαθηματικές σχέσεις που συνδέονται με την κατανομή Log-Pearson III.

**Πίν. 6.8** Τυπολόγιο της κατανομής Log Pearson III.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{\lambda^\kappa}{x\Gamma(\kappa)} (\ln x - c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(\ln x - c)}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = \int_{e^c}^x f_X(s) ds$
Τιμές μεταβλητής	$e^c < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$c$ : παράμετρος κλίμακας $\lambda > 0$ : παράμετρος σχήματος $\kappa > 0$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$\mu_X = e^c \left( \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right)^\kappa$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = e^{2c} \left[ \left( \frac{\lambda}{\lambda - 2} \right)^\kappa - \left( \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right)^{2\kappa} \right]$
Ροπή περί την αρχή τάξης $r$	$m_X^{(r)} = e^{rc} \left( \frac{\lambda}{\lambda - r} \right)^\kappa$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Log-Pearson III μπορεί να πάρει διάφορα σχήματα, όπως κωδωνοειδές, ανεστραμμένο J, U, κ.ά. Από τον Πίν. 6.8 προκύπτει ότι η τρίτη ροπή της κατανομής μπορεί να γίνει ακόμη και άπειρη, για  $\lambda \leq 3$ . Αυτό δείχνει ότι η κατανομή μπορεί να έχει πολύ μεγάλο συντελεστή ασυμμετρίας. Σε αυτή την ιδιότητα της οφείλεται η ευρεία διάδοσή της στην τεχνική υδρολογία. Κυρίως έχει χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή πλημμυρικών παροχών, παράλληλα με τις ασυμπτωτικές κατανομής μεγίστων που θα εξεταστούν στην επόμενη ενότητα. Ειδικά στις ΗΠΑ έχει υιοθετηθεί ως η τυπική κατανομή για πλημμύρες από όλες τις κρατικές υπηρεσίες.

### Τυπικοί υπολογισμοί

Οι τυπικοί υπολογισμοί της κατανομής Log-Pearson III βασίζονται στους αντίστοιχους υπολογισμούς της κατανομής Pearson III. Έτσι, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.20) και (6.29) παίρνουμε

$$y_u = \mu_Y + k_u \sigma_Y \Leftrightarrow x_u = e^{\mu_Y + k_u \sigma_Y} \quad (6.30)$$

όπου η τιμή του  $k_u$  μπορεί να βρεθεί από πίνακες (Πίν. Π4α ή Π4β). Η τιμή του  $y_u$  μπορεί ακόμη να υπολογιστεί αριθμητικά σύμφωνα με όσα περιγράφηκαν στο εδάφιο 6.2.2.

### Εκτίμηση παραμέτρων

Η εκτίμηση των παραμέτρων είτε με τη μέθοδο των ροπών, είτε με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας απαιτεί μια αρκετά πολύπλοκη διαδικασία (Bobée and Ashkar, 1991, σ. 85· Kite, 1988, σ. 138). Εδώ θα περιοριστούμε στην αναφορά της απλούστερης *έμμεσης μεθόδου των ροπών*: Σύμφωνα με αυτή από το διαθέσιμο δείγμα υπολογίζονται οι τιμές  $y_i = \ln x_i$ , στη συνέχεια υπολογίζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά των  $y_i$  και τέλος εφαρμόζονται οι εξισώσεις της μεθόδου των ροπών για τη μεταβλητή  $Y$ , δηλαδή

$$\kappa = \frac{4}{\hat{C}_{sY}^2} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\kappa}}{s_Y} \quad c = \bar{y} - \frac{\kappa}{\lambda} \quad (6.31)$$

Όπως και στην περίπτωση της κατανομής Pearson III, έτσι και εδώ η εκτίμηση των ορίων εμπιστοσύνης είναι αρκετά πολύπλοκη.

### Χαρτί κατανομής Log-Pearson III

Δεν μπορεί να κατασκευαστεί χαρτί κατανομής γάμα, τέτοιο που να ευθειοποιεί κάθε συνάρτηση κατανομής Log-Pearson III. Ωστόσο, μπορεί να κατασκευαστεί χαρτί για δεδομένη τιμή της παραμέτρου σχήματος  $\kappa$ . Ένα τέτοιο χαρτί έχει άξονα πιθανοτήτων ταυτόσημο με αυτό του χαρτιού γάμα και άξονα τιμών της μεταβλητής λογαριθμικό. Κάτι τέτοιο, βεβαίως, δεν είναι πρακτικό και γι' αυτό η απεικόνιση της κατανομής Log-Pearson III γίνεται συνήθως σε χαρτί λογαριθμοκανονικής κατανομής ή σε χαρτί κατανομής Gumbel. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, η κατανομή δεν απεικονίζεται ως ευθεία, αλλά ως καμπύλη.

## 6.3 Ασυμπτωτικές κατανομές ακροτάτων

Με τον όρο *ασυμπτωτική κατανομή ακροτάτων* εννοούμε την οριακή κατανομή της ακρότατης (δηλαδή της μεγαλύτερης ή, εναλλακτικά, της μικρότερης) από  $k$  ισόνομες μεταβλητές, όταν ο αριθμός  $k$  τείνει στο

άπειρο. Συμβολικά, αν  $Y_1, \dots, Y_k$  είναι μια ακολουθία ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και

$$X_k = \max(Y_1, \dots, Y_k) \quad (6.32)$$

τότε η αντίστοιχη ασυμπτωτική κατανομή μεγίστων είναι η

$$F_X(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{X_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(X_k \leq y) \quad (6.33)$$

Αντίστοιχα ορίζεται και η ασυμπτωτική κατανομή ελαχίστων. Στην περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές  $Y_i$  είναι ανεξάρτητες, ο προσδιορισμός της  $F_X(x)$  απλοποιείται αρκετά, δεδομένου ότι

$$F_{X_k}(x) = [F_Y(x)]^k \quad (6.34)$$

όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί παίρνοντας υπόψη την ανεξαρτησία των μεταβλητών.

Σε πολλές περιπτώσεις η παραπάνω ασυμπτωτική κατανομή δεν εξαρτάται από το ακριβές σχήμα της αρχικής συνάρτησης κατανομής  $F_Y(y)$ . Οι περιπτώσεις αυτές, που έχουν μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, έχουν μελετηθεί σε λεπτομέρεια από τον Gumbel (1958). Αναφέρονται σε τυχαίες μεταβλητές  $Y_i$  ανεξάρτητες και ισόνομες, των οποίων οι κατανομές ικανοποιούν ορισμένες γενικές συνθήκες.

Η σημασία των κατανομών ακροτάτων στην τεχνική υδρολογία προκύπτει από την ομοιότητα της έννοιας των ακροτάτων, όπως ορίζεται πιο πάνω, με την ανέλιξη ακροτάτων, όπως έχει οριστεί στο εδάφιο 4.1.2. Έτσι, για παράδειγμα, αν συμβολίσουμε με  $Y_i$  την ημερήσια παροχή σε μια διατομή ποταμού κατά την ημέρα  $i$  και με  $X_{365}$  την μέγιστη ημερήσια παροχή κατά τη διάρκεια ενός έτους, είναι προφανής η σύνδεση των μεταβλητών αυτών με την (6.32). Στα πρακτικά προβλήματα αντιπλημμυρικού σχεδιασμού αυτό που ενδιαφέρει είναι η κατανομή μεταβλητών όπως η  $X_{365}$  του παραδείγματος (παρά η κατανομή της  $Y_i$ ). Ωστόσο, οι αυστηρές προϋποθέσεις, κάτω από τις οποίες προκύπτουν θεωρητικά οι κατανομές ακροτάτων, σπάνια ικανοποιούνται από τις φυσικές υδρολογικές μεταβλητές. Στο παραπάνω παράδειγμα, οι διάφορες  $Y_i$  ούτε ανεξάρτητες ούτε ισόνομες μπορούν να θεωρηθούν. Εξ άλλου η σύγκλιση προς την οριακή κατανομή είναι κατά κανόνα πολύ αργή. Για όλους αυτούς τους λόγους δεν είναι ποτέ αυτονόητο ότι μια



συγκεκριμένη μέγιστη ή ελάχιστη υδρολογική μεταβλητή ακολουθεί την ασυμπτωτική κατανομή που προβλέπεται θεωρητικά. Η υιοθέτηση της συγκεκριμένης κατανομής θα πρέπει να γίνεται μετά από έλεγχο προσαρμογής στα πραγματικά δεδομένα.

Στα παρακάτω εδάφια εξετάζονται οι δύο πιο διαδεδομένες στην τεχνική υδρολογία κατανομές ακροτάτων. Στην τεχνική υδρολογία χρησιμοποιούνται επιτυχώς και άλλοι τύποι κατανομών για την περιγραφή ακροτάτων, πέρα από τις ασυμπτωτικές κατανομές. Για παράδειγμα, η λογαριθμοκανονική κατανομή, οι κατανομές γάμα δύο και τριών παραμέτρων και η κατανομή Log Pearson III πολύ συχνά χρησιμοποιούνται για την περιγραφή υδρολογικών μεγίστων (πλημμυρικών παροχών, καταιγίδων κτλ.)

### 6.3.1 Κατανομή μεγίστων τύπου I (Gumbel)

Η κατανομή μεγίστων τύπου I προκύπτει όταν οι μεταβλητές  $Y_i$  είναι ισόνομες και ανεξάρτητες με διάστημα τιμών το  $(-\infty, +\infty)$  και η κοινή συνάρτηση πιθανότητας υπέρβασής τους εμφανίζει, τουλάχιστον από μια τιμή της μεταβλητής και πάνω, εκθετική μείωση, δηλαδή μπορεί να εκφραστεί ως

$$F_{1Y}(y) = 1 - F_Y(y) = e^{-g(y)} \quad (6.35)$$

όπου η  $g(y)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $y$ . Αυτός ο τελευταίος όρος ικανοποιείται από τις πιο κοινές κατανομές (π.χ. κανονική, γάμα, κτλ.).

Τα διάφορα χαρακτηριστικά της κατανομής φαίνονται στον Πίν. 6.9. Η κατανομή έχει απλή μαθηματική έκφραση και διαθέτει δύο παραμέτρους. Το μέγεθος  $\gamma$  που εμφανίζεται στην έκφραση της μέσης τιμής της μεταβλητής είναι η σταθερά του Euler.\*

#### Τυπικοί υπολογισμοί

Λόγω της απλής μαθηματικής έκφρασης της συνάρτησης κατανομής, οι τυπικοί υπολογισμοί είναι άμεσοι και δεν προϋποθέτουν τη χρήση πινά-

---

\* Η σταθερά του Euler ορίζεται από τη σχέση

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \approx 0.5772156649\dots$$

κων ή αριθμητικών μεθόδων. Η συνάρτηση κατανομής υπολογίζεται άμεσα αν είναι γνωστή η τιμή της μεταβλητής. Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση υπολογίζεται αναλυτικά, και έτσι το  $u$ -ποσοστημόριο της κατανομής δίνεται από την

$$x_u = c - \frac{\ln(-\ln u)}{\lambda} \quad (6.36)$$

**Πίν. 6.9** Τυπολόγιο της κατανομής Gumbel μεγίστων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(x-c) - e^{-\lambda(x-c)}}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = e^{-e^{-\lambda(x-c)}}$
Τιμές μεταβλητής	$-\infty < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$c$ : παράμετρος θέσης $\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας
Μέση τιμή	$\mu_X = c + \frac{\gamma}{\lambda} = c + \frac{0.5772}{\lambda}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \frac{\pi^2}{6\lambda^2} = \frac{1.645}{\lambda^2}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = \frac{2.404}{\lambda^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(4)} = \frac{14.6}{\lambda^4}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = 1.1396$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_X} = 5.4$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = c$
Διάμεσος τιμή	$x_{0.5} = c - \frac{\ln(-\ln 0.5)}{\lambda} = c + \frac{0.3665}{\lambda}$

### Εκτίμηση παραμέτρων

Όπως προκύπτει άμεσα από τις εκφράσεις ροπών του Πίν. 6.9, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της κατανομής με τη μέθοδο των ροπών είναι:

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{6}s_X} = \frac{1}{0.78s_X} \quad c = \bar{x} - \frac{\gamma}{\lambda} = \bar{x} - \frac{0.577}{\lambda} = \bar{x} - 0.45s_X \quad (6.37)$$

Ανάλογες εξισώσεις προκύπτουν και από μια άλλη μέθοδο (Gumbel, 1958, σ. 227), η οποία βασίζεται στην προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων της θεωρητικής συνάρτησης κατανομής προς την εμπειρική κατανομή, όπως δίνεται από τη σχέση Weibull. Στις εξισώσεις αυτής της μεθόδου υπεισέρχονται ορισμένες εκφράσεις του μεγέθους του δείγματος  $n$ , πινακοποίηση των οποίων έχει δοθεί από τον Gumbel (1958, σ. 228). Αντί των αυθεντικών αυτών εξισώσεων δίνουμε τις ακόλουθες τροποποιημένες προσεγγιστικές εξισώσεις, με τις οποίες αποφεύγεται η χρήση πινάκων:

$$\lambda = \frac{1}{0.78} - \frac{1.57}{(n+1)^{0.65}} \quad c = \bar{x} - \frac{0.577 - \frac{0.53}{(n+2.5)^{0.74}}}{\lambda} \quad (6.38)$$

Το σφάλμα προσέγγισης, σε σχέση με τις αυθεντικές εξισώσεις, είναι μικρότερο του 0.25% για την πρώτη εξίσωση και του 0.10% για τη δεύτερη (για  $n \geq 10$ ).

Για μικρές πιθανότητες υπέρβασης, η δεύτερη αυτή μέθοδος (εξισώσεις (6.38)) δίνει δυσμενέστερες προβλέψεις σε σχέση με αυτές της μεθόδου των ροπών (εξισώσεις (6.37)). Άλλες μέθοδοι εκτίμησης, στις οποίες περιλαμβάνεται και η αρκετά πολυπλοκότερη μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας, επισκοπούνται από τον Kite (1988, σ. 96).

### Τυπικό σφάλμα ποσοστημορίου και όρια εμπιστοσύνης

Στην περίπτωση που οι παράμετροι της κατανομής υπολογίζονται με τη μέθοδο των ροπών, η σημειακή εκτίμηση του  $u$ -ποσοστημορίου της κατανομής Gumbel μπορεί να γραφεί και με την ακόλουθη μορφή, ισοδύναμη της (6.36):

$$\hat{x}_u = \bar{x} - 0.5772 / \lambda - \ln(-\ln u) / \lambda = \bar{x} + k_u s_X \quad (6.39)$$

όπου,

$$k_u = \frac{-0.5772 - \ln(-\ln u)}{\lambda s_X} = -0.45 - 0.78 \ln(-\ln u) \quad (6.40)$$

Σε αυτή την περίπτωση αποδεικνύεται (Gumbel, 1958, σ. 228· Kite, 1988, σ. 103) ότι το τετραγωνικό τυπικό σφάλμα εκτίμησης είναι

$$\varepsilon_X^2 = \text{Var}(\hat{X}_u) = \frac{s_X^2}{n} (1 + 1.1396 k_u + 1.1 k_u^2) \quad (6.41)$$

Κατά συνέπεια, τα όρια εμπιστοσύνης του  $u$ -ποσοστημορίου για βαθμό εμπιστοσύνης  $\gamma$  είναι κατά προσέγγιση

$$\hat{x}_{u_{1,2}} = (\bar{x} + k_u s_X) \pm z_{(1+\gamma)/2} \frac{s_X}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 1.1396 k_u + 1.1 k_u^2} \quad (6.42)$$

### Χαρτί κατανομής Gumbel

Μπορεί εύκολα να κατασκευαστεί ειδικό χαρτί της κατανομής Gumbel, στο οποίο η συνάρτηση κατανομής ευθειοποιείται. Αρκεί η διαγράμμιση του οριζόντιου άξονα της πιθανότητας να γίνει με βάση το μέγεθος  $h = -\ln(-\ln F)$ . Η διαγράμμιση του κατακόρυφου άξονα που απεικονίζει τη μεταβλητή είναι κοινή δεκαδική, χωρίς κανένα μετασχηματισμό. Όπως προκύπτει από την (6.36), η απεικόνιση της συνάρτησης κατανομής σε τέτοιους άξονες είναι ευθεία.

#### Εφαρμογή 6.3.1

Στον Πίν. 6.10 δίνεται το δείγμα των μέγιστων ημερήσιων παροχών του ποταμού Ευήνου στη θέση του υδρομετρικού σταθμού Πόρος Ρηγαίου. Ζητείται η προσαρμογή της κατανομής Gumbel (μεγίστων), καθώς και η εκτίμηση της μέγιστης παροχής εκατονταετίας.

Η μέση τιμή του δείγματος είναι

$$\bar{x} = \sum x / n = 385.1 \text{ m}^3/\text{s}$$

Η τυπική απόκλιση είναι

$$s_X = \sqrt{\sum x^2 / n - \bar{x}^2} = 181.5 \text{ m}^3/\text{s}$$

και ο συντελεστής μεταβλητότητας

**Πίν. 6.10** Δείγμα μέγιστης ημερήσιας παροχής (σε m<sup>3</sup>/s) του ποταμού Ευήνου στη θέση Πόρος Ρηγαίου.

Υδρολ. έτος	Μέγιστη παροχή	Υδρολ. έτος	Μέγιστη παροχή	Υδρολ. έτος	Μέγιστη παροχή
1970-71	884	1977-78	365	1984-85	317
1971-72	305	1978-79	502	1985-86	374
1972-73	215	1979-80	381	1986-87	188
1973-74	378	1980-81	387	1987-88	192
1974-75	176	1981-82	525	1988-89	448
1975-76	430	1982-83	412	1989-90	70
1976-77	713	1983-84	439		

$$\hat{C}_{v_X} = s_X / \bar{x} = 181.5 / 385.1 = 0.47$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας προκύπτει

$$\hat{C}_{s_X} = 0.94$$

δηλαδή δεν απέχει πολύ από τη θεωρητική τιμή 1.14 της κατανομής Gumbel.

Η μέθοδος των ροπών δίνει

$$\lambda = 1 / (0.78 \times 181.5) = 0.00706, c = 385.1 - 0.45 \times 181.5 = 303.4$$

Η μέγιστη ημερήσια παροχή για  $T = 100$ , ή ισοδύναμα για  $u = 1 - 1/100 = 0.99$ , είναι

$$x_{0.99} = 303.4 - \ln[-\ln(0.99)] / 0.00706 = 955.0$$

Με βάση την (6.42), για

$$k_u = (955.0 - 385.1) / 181.5 = 3.16, z_{(1+\gamma)/2} = 1.96$$

υπολογίζουμε τα όρια εμπιστοσύνης 95% της τιμής αυτής, τα οποία είναι:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{u,2} &\approx 955.0 \pm 1.96 * \frac{181.5}{\sqrt{20}} * \sqrt{1 + 1.1396 * 3.16 + 1.1 * 3.16^2} \\ &\approx 955.0 \pm 313.1 = \begin{cases} 1268.1 \\ 641.9 \end{cases} \end{aligned}$$

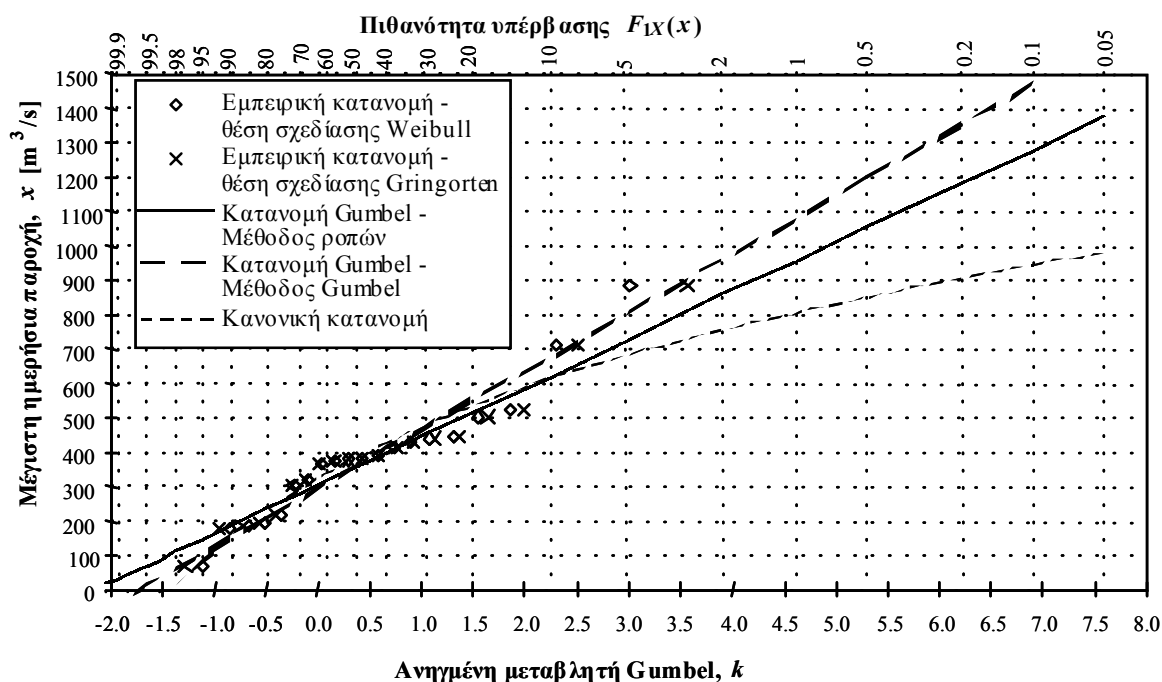
Η μέθοδος του Gumbel με εφαρμογή των προσεγγιστικών εξισώσεων (6.38), για  $n = 20$ , δίνει

$$\lambda = 0.00587, c = 295.7$$

Η μέγιστη ημερήσια παροχή για  $T = 100$  είναι

$$x_{0.99} = 295.7 - \ln[-\ln(0.99)] / 0.00587 = 1079.4$$

Στο Σχ. 6.3 δίνουμε τη γραφική σύγκριση της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής και της κατανομής Gumbel, σε χαρτί κατανομής Gumbel. Για την εμπειρική κατανομή χρησιμοποιήθηκαν οι θέσεις σχεδίασης Weibull και Gringorten (βλ. Πίν. 5.7). Παρατηρούμε ότι η μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων του Gumbel δίνει καλύτερη προσαρμογή στην περιοχή των μικρών πιθανοτήτων υπέρβασης, που ενδιαφέρουν περισσότερο. Για σύγκριση έχει σχεδιαστεί και η κανονική κατανομή, η ακαταλληλότητα της οποίας για το συγκεκριμένο δείγμα είναι εμφανής.



Σχ. 6.3 Εμπειρική και θεωρητική συνάρτηση κατανομής της μέγιστης ημερήσιας παροχής του Ευήνου στον Πόρο Ρηγανίου (Εφαρμογή 6.3.1) σε χαρτί κατανομής Gumbel (μεγίστων).

### 6.3.2 Κατανομή ελαχίστων τύπου I (Gumbel)

Κατά ανάλογο τρόπο, η κατανομή ελαχίστων τύπου I προκύπτει όταν οι μεταβλητές  $Y_i$  είναι ισόνομες και ανεξάρτητες με διάστημα τιμών το  $(-\infty, +\infty)$  και η κοινή συνάρτηση κατανομής τους εμφανίζει, τουλάχιστον από μια τιμή της μεταβλητής και κάτω, εκθετική μείωση.

Τα διάφορα χαρακτηριστικά της κατανομής, που μοιάζουν πολύ με αυτά της αντίστοιχης κατανομής μεγίστων, φαίνονται στον Πίν. 6.11.

**Πίν. 6.11** Τυπολόγιο της κατανομής Gumbel ελαχίστων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \lambda e^{\lambda(x-c) - e^{\lambda(x-c)}}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = 1 - e^{-e^{\lambda(x-c)}}$
Τιμές μεταβλητής	$-\infty < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$c$ : παράμετρος θέσης $\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας
Μέση τιμή	$\mu_X = c - \frac{\gamma}{\lambda} = c - \frac{0.5772}{\lambda}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \frac{\pi^2}{6\lambda^2} = \frac{1.645}{\lambda^2}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = -\frac{2.404}{\lambda^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(4)} = \frac{14.6}{\lambda^4}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = -1.1396$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_X} = 5.4$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = c$
Διάμεσος τιμή	$x_{0.5} = c + \frac{\ln(-\ln 0.5)}{\lambda} = c - \frac{0.3665}{\lambda}$

Ο υπολογιστικός χειρισμός της κατανομής είναι παρόμοιος με αυτόν της αντίστοιχης κατανομής μεγίστων. Η αντίστροφη συνάρτηση υπολογίζεται αναλυτικά, και έτσι το  $u$ -ποσοστημόριο της κατανομής δίνεται από την

$$x_u = c + \frac{\ln[-\ln(1-u)]}{\lambda} \quad (6.43)$$

Παρόμοιος είναι και ο τρόπος εκτίμησης παραμέτρων. Για παράδειγμα η μέθοδος των ροπών δίνει:

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{6}s_X} = \frac{1}{0.78s_X} \quad c = \bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda} = \bar{x} + \frac{0.577}{\lambda} = \bar{x} + 0.45s_X \quad (6.44)$$

Γραφικά μπορεί να παρασταθεί στο χαρτί κατανομής Gumbel μεγίστων, με αντιμετάθεση της πιθανότητας υπέρβασης και της πιθανότητας μη υπέρβασης. Μπορεί, όμως, εύκολα να κατασκευαστεί ειδικό χαρτί της κατανομής Gumbel ελαχίστων, αρκεί η διαγράμμιση του οριζόντιου άξονα της πιθανότητας να γίνει με βάση το μέγεθος  $h = \ln[-\ln(1-F)]$ . Η διαγράμμιση του κατακόρυφου άξονα που απεικονίζει τη μεταβλητή είναι κοινή δεκαδική, χωρίς κανένα μετασχηματισμό.

### 6.3.3 Κατανομή ελαχίστων τύπου III (Weibull)

Η κατανομή ελαχίστων τύπου III προκύπτει όταν οι μεταβλητές  $Y_i$  είναι ισόνομες και ανεξάρτητες με διάστημα τιμών το  $(c, +\infty)$  και η κοινή συνάρτηση κατανομής τους μπορεί να εκφραστεί στη γειτονιά του  $c$  ως

$$F_Y(y) = \rho (y - c)^k \quad (6.45)$$

όπου  $\rho$  και  $k$  θετικές σταθερές. Αυτός ο τελευταίος όρος ικανοποιείται από διάφορες κατανομές όπως η γάμα. Αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση η ασυμπτωτική κατανομή των ελαχίστων\* είναι η

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-c}{\alpha-c}\right)^k} \quad (6.46)$$

Η κατανομή έχει τρεις παραμέτρους. Στον Πίν. 6.12 φαίνονται τα διάφορα χαρακτηριστικά της κατανομής για την περίπτωση που η παράμετρος θέσης  $c$  έχει τιμή μηδέν. Αυτή η απλουστευμένη διπαραμετρική κατανομή είναι η πιο συνηθισμένη στην υδρολογία (π.χ. για την περιγραφή παροχών ξηρασίας), είναι δε γνωστή και ως κατανομή Weibull.

---

\* Η αντίστοιχη κατανομή μεγίστων τύπου III ορίζεται κατ' αναλογία και έχει συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = e^{-\left(\frac{c-x}{c-\alpha}\right)^k}$$



**Τυπικοί υπολογισμοί**

Λόγω της απλής μαθηματικής έκφρασης της συνάρτησης κατανομής, οι τυπικοί υπολογισμοί είναι άμεσοι και δεν προϋποθέτουν τη χρήση πινάκων ή αριθμητικών μεθόδων. Η συνάρτηση κατανομής υπολογίζεται άμεσα αν είναι γνωστή η τιμή της μεταβλητής. Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση υπολογίζεται αναλυτικά, και έτσι το  $u$ -ποσοστημόριο της κατανομής δίνεται από την

$$x_u = \alpha[-\ln(1-u)]^{1/\kappa} \quad (6.47)$$

**Πίν. 6.12** Τυπολόγιο της κατανομής Weibull (δύο παραμέτρων).

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{\kappa}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\kappa-1} e^{-(x/\alpha)^\kappa}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\kappa}$
Τιμές μεταβλητής	$0 < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$\alpha > 0$ : παράμετρος κλίμακας $\kappa > 0$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$\mu_X = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \alpha^2 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\kappa}\right) - \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \right]^2 \right\}$
Τρίτη ροπή περί την αρχή	$m_X^{(3)} = \alpha^3 \Gamma\left(1 + \frac{3}{\kappa}\right)$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_{v_x} = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\kappa}\right) / \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \right]^2 - 1$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = \alpha(1 - 1/\kappa)^{1/\kappa}$ (για $\kappa > 1$ )
Διάμεσος	$x_{0.5} = \alpha(\ln 2)^{1/\kappa}$

**Εκτίμηση παραμέτρων**

Όπως προκύπτει άμεσα από τις εκφράσεις ροπών του Πίν. 6.12, οι εξισώσεις της μεθόδου των ροπών είναι:

$$\frac{\Gamma(1+2/\kappa)}{\Gamma^2(1+1/\kappa)} = \frac{s_X^2}{\bar{x}^2} + 1 \quad \alpha = \frac{\bar{x}}{\Gamma(1+1/\kappa)} \quad (6.48)$$

Η επίλυση της πρώτης εξίσωσης ως προς  $\kappa$  γίνεται μόνο αριθμητικά.

Μια απλούστερη μέθοδος προκύπτει αν χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός  $Y = \ln X$ . Εύκολα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της  $Y$  είναι

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\kappa(y - \ln \alpha)} \quad (6.49)$$

δηλαδή είναι η συνάρτηση κατανομής ελαχίστων τύπου I με παράμετρο θέσης  $\ln \alpha$  και παράμετρο κλίμακας  $\kappa$ . Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της τελευταίας προκειμένου να εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους. Έτσι παίρνουμε

$$\kappa = \frac{1}{0.78 s_Y} \quad \alpha = e^{\bar{y} + 0.45 s_Y} \quad (6.50)$$

όπου  $\bar{y}$  και  $s_Y$  η δειγματική μέση τιμή και τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, των λογαρίθμων της μεταβλητής.

Για τις εξισώσεις της τριπαραμετρικής κατανομής ελαχίστων τύπου III ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στον Kite (1988, σ. 154).

### Χαρτί κατανομής Weibull

Μπορεί εύκολα να κατασκευαστεί ειδικό χαρτί της κατανομής Weibull, στο οποίο η συνάρτηση κατανομής ευθειοποιείται. Αρκεί η διαγράμμιση του οριζόντιου άξονα της πιθανότητας να γίνει με βάση το μέγεθος  $h = \ln[-\ln(1-F)]$  (όπως και στο χαρτί Gumbel ελαχίστων) και του κατακόρυφου άξονα που απεικονίζει τη μεταβλητή με βάση το μέγεθος  $v = \ln x$  (λογαριθμική κλίμακα). Όπως προκύπτει από την (6.47), η απεικόνιση της συνάρτησης κατανομής σε τέτοιους άξονες είναι ευθεία. Το χαρτί Weibull χρησιμοποιείται ακόμη για την παράσταση της εκθετικής κατανομής, η οποία είναι ειδική περίπτωση και της γάμα και της Weibull.

#### Εφαρμογή 6.3.3

Στον Πίν. 6.13 δίνεται το δείγμα των ελάχιστων ημερήσιων παροχών του ποταμού Ευήνου στη θέση του υδρομετρικού σταθμού Πόρος Ρηγα-

νίου. Ζητείται η προσαρμογή των κατανομών Gumbel (ελαχίστων) και Weibull, καθώς και η εκτίμηση της ελάχιστης παροχής εικοσαετίας.

**Πίν. 6.13** Δείγμα ελάχιστης ημερήσιας παροχής (σε m<sup>3</sup>/s) του ποταμού Ευήνου στη θέση Πόρος Ρηγανίου.

Υδρολ. έτος	Ελάχιστη παροχή	Υδρολ. έτος	Ελάχιστη παροχή	Υδρολ. έτος	Ελάχιστη παροχή
1970-71	0.00	1977-78	2.14	1984-85	0.54
1971-72	2.19	1978-79	2.00	1985-86	0.54
1972-73	2.66	1979-80	1.93	1986-87	1.70
1973-74	2.13	1980-81	2.29	1987-88	1.70
1974-75	1.28	1981-82	2.66	1988-89	0.32
1975-76	0.56	1982-83	2.87	1989-90	1.37
1976-77	0.13	1983-84	1.88		

Η μέση τιμή του δείγματος είναι

$$\bar{x} = \sum x / n = 1.545 \text{ m}^3/\text{s}$$

Η τυπική απόκλιση είναι

$$s_X = \sqrt{\sum x^2 / n - \bar{x}^2} = 0.878 \text{ m}^3/\text{s}$$

και ο συντελεστής μεταβλητότητας

$$\hat{C}_{v_X} = s_X / \bar{x} = 0.878 / 1.545 = 0.57$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας προκύπτει

$$\hat{C}_{s_X} = -0.40$$

Η αρνητική αυτή τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας είναι αναμενόμενη για ένα δείγμα ελαχίστων παροχών.

Για την κατανομή Gumbel, η μέθοδος των ροπών δίνει

$$\lambda = 1 / (0.78 \times 0.878) = 1.460, c = 1.545 + 0.45 \times 0.878 = 1.940$$

. Η ελάχιστη ημερήσια παροχή για  $T = 20$ , ή ισοδύναμα για  $u = 1/20 = 0.05$ , είναι

$$x_{0.05} = 1.940 + \ln[-\ln(1 - 0.05)] / 1.460 = -0.09$$

Φυσικά, η αρνητική τιμή δεν έχει νόημα και γι' αυτό θα θεωρήσουμε ότι το ζητούμενο μέγεθος είναι μηδέν.

Για την κατανομή Weibull η μέθοδος των ροπών δίνει

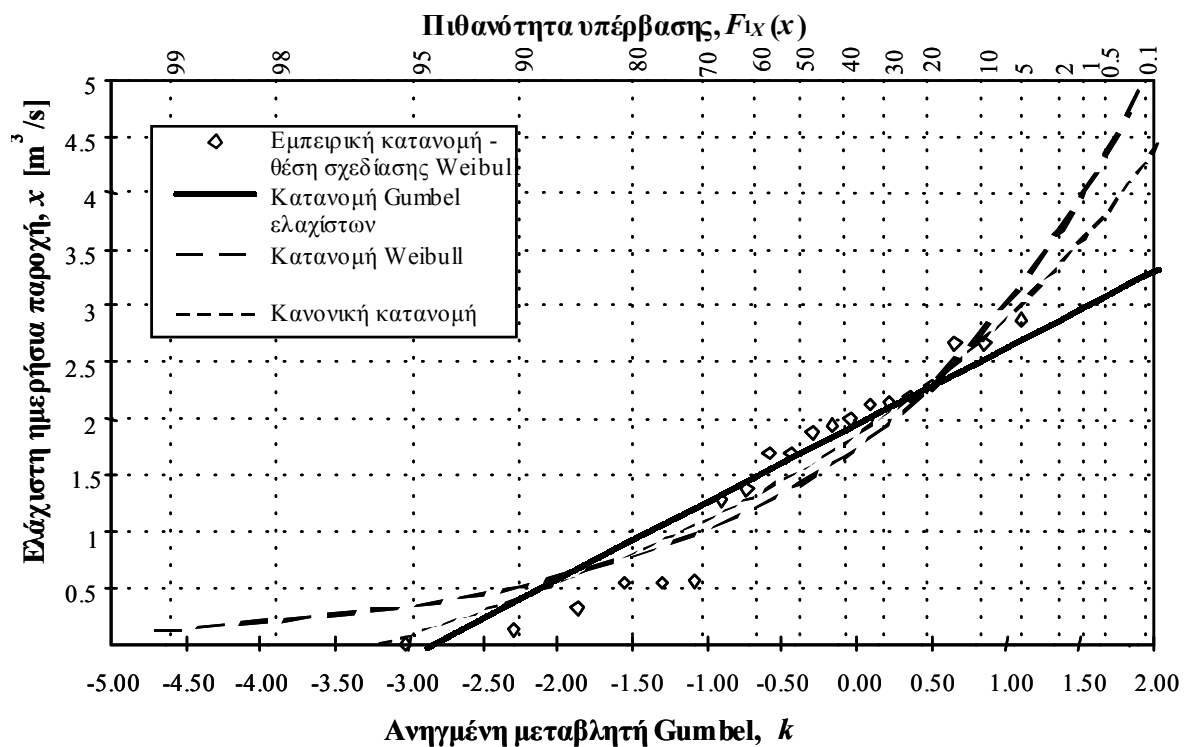
$$\kappa = 1.826, \alpha = 1.738$$

Η εύρεση της τιμής του  $\kappa$  προϋποθέτει αριθμητική επίλυση της πρώτης από τις εξισώσεις (6.48). Για έλεγχο δίνουμε τις τιμές των μεγεθών που υπεισέρχονται στην εν λόγω εξίσωση:

$$\Gamma(1 + 2/\kappa) = \Gamma(2.095) = 1.044, \Gamma(1 + 1/\kappa) = \Gamma(1.548) = 0.889$$

Η μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων με λογαριθμικό μετασχηματισμό της μεταβλητής εδώ δεν είναι εφαρμόσιμη, λόγω της παρουσίας της μηδενικής τιμής στο συγκεκριμένο δείγμα. Η ελάχιστη ημερήσια παροχή για  $T = 20$  είναι

$$x_{0.05} = 1.738 \times [-\ln(1-0.05)]^{1/1.826} = 0.342 \text{ m}^3/\text{s}$$



Σχ. 6.4 Εμπειρική και θεωρητική συνάρτηση κατανομής της ελάχιστης ημερήσιας παροχής του Ευήνου στον Πόρο Ρηγαίου (Εφαρμογή 6.0) σε χαρτί κατανομής Gumbel (ελαχίστων).

Στο Σχ. 6.4 δίνουμε τη γραφική σύγκριση της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής και των δύο παραπάνω θεωρητικών κατανομών, σε χαρτί κατανομής Gumbel ελαχίστων. Για την εμπειρική κατανομή χρησιμοποιήθηκε η θέση σχεδίασης Weibull. Παρατηρούμε ότι καμία από τις δύο θεωρητικές κατανομές δεν προσαρμόζεται πολύ καλά στο

δείγμα, αλλά πάντως η κατανομή Gumbel είναι σχετικά καλύτερη, ιδίως στην περιοχή των μικρών πιθανοτήτων μη υπέρβασης, που ενδιαφέρουν περισσότερο. Το γεγονός ότι η κατανομή Weibull ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής αποτελεί κατ' αρχήν συγκριτικό θεωρητικό πλεονέκτημα της κατανομής αυτής. Ωστόσο, για το συγκεκριμένο δείγμα αυτό είναι εμφανώς μειονέκτημα γιατί, όπως φαίνεται στο Σχ. 6.4, οδηγεί σε μεγάλη απόκλιση από την εμπειρική συνάρτηση κατανομής. Καλύτερη συμπεριφορά έχει η κατανομή Gumbel, με την προϋπόθεση όμως ότι απαλείφουμε εκείνο το τμήμα της που αντιστοιχεί σε αρνητικές τιμές της μεταβλητής. Για σύγκριση έχει σχεδιαστεί και η κανονική κατανομή, η οποία τοποθετείται ανάμεσα στις δύο κατανομές ελαχίστων.

## 6.4 Άλλες χρήσιμες κατανομές

### 6.4.1 Κατανομή βήτα δύο παραμέτρων

Η κατανομή βήτα είναι μια πολύ βασική κατανομή της θεωρίας πιθανοτήτων, η οποία χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στην υδρολογία, κυρίως για δεσμευμένες κατανομές υδρολογικών μεταβλητών. Βασική της ιδιότητα είναι ότι το πεδίο ορισμού της μεταβλητής είναι το φραγμένο διάστημα  $[0, 1]$  (σε αντίθεση με όλες τις άλλες κατανομές που εξετάστηκαν, των οποίων το πεδίο ορισμού εκτείνεται μέχρι το  $+\infty$ ).

Η κατανομή έχει δύο παραμέτρους σχήματος  $\alpha$  και  $\beta$  (εύκολα μπορεί να εισαχθεί και μια παράμετρος κλίμακας). Ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να αποκτήσει διάφορα σχήματα. Για  $\alpha = \beta = 1$  η κατανομή μεταπίπτει στην ομοιόμορφη, ενώ για  $\alpha = 1$  και  $\beta = 2$  (ή  $\alpha = 2$  και  $\beta = 1$ ) μεταπίπτει στην τριγωνική με αρνητική (θετική) ασυμμετρία. Για  $\alpha < 1$  (ή  $\beta < 1$ ) η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας απειρίζεται στο σημείο  $x = 0$  ( $x = 1$ ). Για  $\alpha > 1$  και  $\beta > 1$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αποκτά κωδωνοειδές σχήμα. Στον Πίν. 6.14 δίνονται τα διάφορα χαρακτηριστικά της κατανομής.

**Πίν. 6.14** Τυπολόγιο της κατανομής βήτα 2 παραμέτρων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = \int_0^x f_X(s) ds$
Τιμές μεταβλητής	$0 < x < 1$ (συνεχής)
Παράμετροι	$\alpha, \beta > 0$ : παράμετροι σχήματος
Μέση τιμή	$\mu_X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$
Τρίτη ροπή περί την αρχή	$m_X^{(3)} = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 2)}$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_{v_X} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta + 1)}}$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}$ (για $\alpha, \beta > 1$ )

### 6.4.2 Κατανομή Pareto

Η γενικευμένη κατανομή Pareto\* είναι μια απλή και χρήσιμη κατανομή που έχει χρησιμοποιηθεί και στην τεχνική υδρολογία για την περιγραφή μεταβλητών που ξεπερνούν ένα δεδομένο κατώφλι. Τα κύρια χαρακτηριστικά της κατανομής φαίνονται στον Πίν. 6.15.

\* Την κατανομή αυτή εισήγαγε ο ιταλός οικονομολόγος V. Pareto (1848-1923) για τη μελέτη του ατομικού εισοδήματος.

**Πίν. 6.15** Τυπολόγιο της κατανομής Pareto.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \kappa \frac{x-c}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\kappa}-1}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = 1 - \left(1 - \kappa \frac{x-c}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$
Τιμές μεταβλητής	Για $\kappa < 0$ , $c \leq x < \infty$ Για $\kappa > 0$ , $c \leq x < c + \alpha / \kappa$ (συνεχής)
Παράμετροι	$c$ : παράμετρος θέσης $\alpha > 0$ : παράμετρος κλίμακας $\kappa$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$\mu_X = c + \frac{\alpha}{1 + \kappa}$
Διασπορά (ορίζεται για $\kappa > -0.5$ )	$\sigma_X^2 = \frac{\alpha^2}{(1 + \kappa)^2 (1 + 2\kappa)}$
Τρίτη κεντρική ροπή (ορίζεται για $\kappa > -0.33$ )	$\mu_X^{(3)} = \frac{2\alpha^3(1 - \kappa)}{(1 + \kappa)^3 (1 + 2\kappa)(1 + 3\kappa)}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = \frac{2(1 - \kappa)\sqrt{1 + 2\kappa}}{1 + 3\kappa}$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = c$
Διάμεσος	$x_{0.5} = c + \frac{\alpha}{\kappa} (1 - 0.5^\kappa)$

### Παράρτημα 6.Α: Αριθμητικές προσεγγίσεις της κανονικής κατανομής

Παίρνοντας υπόψη ότι οι τιμές του  $u = F_Z(z)$  κυμαίνονται στο διάστημα  $[0, 1]$  και ότι η κανονική κατανομή είναι συμμετρική, μπορούμε να εκφράσουμε προσεγγιστικά την παράγωγο της συνάρτησης  $z(u)$  (δηλαδή της αντίστροφης της συνάρτησης κατανομής) με την εξίσωση

$$z'(u) = \frac{dz}{du} = \kappa u^{\alpha-1} + \kappa (1-u)^{\alpha-1} \quad (6.51)$$

όπου  $\kappa$  και  $\alpha$  σταθερές προς προσδιορισμό. Μετά την ολοκλήρωση ως προς  $u$  και τον προσδιορισμό των σταθερών προκύπτει η ζητούμενη έκφραση του  $u$ -ποσοστημορίου της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής. Έτσι, οι Stedinger et al. (1993) προτείνουν την προσεγγιστική εξίσωση

$$z_u = \frac{u^{0.135} - (1-u)^{0.135}}{0.1975} \quad (6.52)$$

Στο κείμενο αυτό προτείνεται η εφαρμογή της ακόλουθης, ελαφρώς διαφοροποιημένης, προσεγγιστικής εξίσωσης, η οποία, μετά από αριθμητική διερεύνηση, προέκυψε να δίνει μεγαλύτερη ακρίβεια:

$$z_u = 5.53 \left[ u^{0.12} - (1-u)^{0.12} \right] \quad (6.53)$$

Η (6.53) δίνει καλές προσεγγίσεις για  $0.0001 \leq u = F_Z(z_u) \leq 0.9999$ , δίνοντας απόλυτο σφάλμα (οριζόμενο ως  $e = |z_u - \tilde{z}_u|$ , όπου  $\tilde{z}_u$  η ορθή τιμή) μικρότερο της τιμής 0.03 σε οποιοδήποτε σημείο του παραπάνω πεδίου εφαρμογής της προσέγγισης. Η (6.53) πρέπει να συνδυαστεί με την (6.1) προκειμένου να υπολογιστεί το  $u$ -ποσοστημόριο της  $x$ .

Για το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή για τον υπολογισμό του  $u$  για δεδομένο  $x$  ή  $z$ , μπορούμε και πάλι να κάνουμε χρήση της (6.53), αλλά ωστόσο απαιτούνται δοκιμές, δεδομένου ότι δεν επιλύεται άμεσα ως προς  $u$ . Για τη συστηματοποίηση των υπολογισμών προτείνεται η χρήση της ακόλουθης εξίσωσης που αποτελεί κατάλληλη τροποποίηση της εξίσωσης Newton-Raphson:



$$u = \begin{cases} u_0 e^{t_1} & \text{αν } t_1 < 0 \\ 1 - (1 - u_0) e^{-t_2} & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (6.54)$$

όπου

$$t_1 = \frac{z - z_0}{z'_0 u_0} \quad t_2 = \frac{z - z_0}{z'_0 (1 - u_0)} \quad (6.55)$$

ενώ  $u_0$  είναι μια αρχική προσέγγιση του  $u$  και  $z'_0$  η παράγωγος του  $z$  στη θέση  $u_0$ , που υπολογίζεται από την εξίσωση

$$z'_0 = 0.664 [u_0^{-0.88} + (1 - u_0)^{-0.88}] \quad (6.56)$$

Η σειρά των υπολογισμών είναι η ακόλουθη:

1. Υποτίθεται μια αρχική τιμή  $u_0 = 0.5$ .
2. Υπολογίζεται η τιμή του  $z'_0$  από την (6.56).
3. Υπολογίζεται το  $t_1$  από την (6.55), και αν προκύψει θετικό υπολογίζεται και το  $t_2$ .
4. Υπολογίζεται η νέα προσέγγιση του  $u$  από την (6.54).
5. Επαναλαμβάνονται τα βήματα 2-4 θέτοντας ως  $u_0$  τη νέα προσέγγιση, μέχρι η διαφορά  $u - u_0$  να γίνει αμελητέα (συνήθως αυτό επιτυγχάνεται σε 2-3 δοκιμές).

### Παράρτημα 6.B: Αριθμητικές προσεγγίσεις της κατανομής γάμα

Μια πολύ συνηθισμένη προσέγγιση είναι αυτή του μετασχηματισμού Wilson-Hilferty. Σύμφωνα με αυτή, ο υπολογισμός της τυποποιημένης μεταβλητής γάμα  $k_u$  ανάγεται στον υπολογισμό της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής  $z_u$ , σύμφωνα με την εξίσωση

$$k_u = \frac{2}{C_{s_x}} \left[ \left( 1 + \frac{C_{s_x} z_u}{6} - \frac{C_{s_x}^2}{36} \right)^3 - 1 \right] \quad (6.57)$$

Ο Kirby (1972) ανέπτυξε την ακόλουθη τροποποιημένη έκφραση του μετασχηματισμού Wilson-Hilferty, η οποία έχει τύχει ευρείας εφαρμογής στην τεχνική υδρολογία

$$k_u = A \left[ \max \left( H, 1 + \frac{Gz_u}{6} - \frac{G^2}{36} \right)^3 - B \right] \quad (6.58)$$

όπου

$$A = \max(2 / C_{s_x}, 0.4) \quad (6.59)$$

$$B = 1 + 0.0144 \max(0, C_{s_x} - 2.25)^2 \quad (6.60)$$

$$G = C_{s_x} - 0.063 \max(0, C_{s_x} - 1)^{1.85} \quad (6.61)$$

$$H = \left[ B - (2 / C_{s_x}) / A \right]^{1/3} \quad (6.62)$$

Η εν λόγω προσέγγιση θεωρείται ικανοποιητική για συντελεστή ασυμμετρίας στο διάστημα  $0.25 \leq C_{s_x} \leq 9.75$ . Μειονέκτημα και του αρχικού και του τροποποιημένου μετασχηματισμού Wilson-Hilferty είναι η σύνδεσή τους με την κανονική μεταβλητή  $z_u$ , ο υπολογισμός της οποίας δεν είναι άμεσος αλλά απαιτεί νέους αριθμητικούς υπολογισμούς ή χρήση πινάκων (βλ. εδάφιο 6.6.1.1).

Παρακάτω παρουσιάζεται μια νέα μέθοδος η οποία μπορεί να υπολογίσει άμεσα το  $u$ -ποσοστημόριο της κατανομής γάμα. Η μέθοδος αυτή θεμελιώνεται στην ακόλουθη προσέγγιση (ανάλογη της (6.51)) της παραγώγου της  $x(u)$

$$x'(u) = \frac{dx}{du} = \frac{\mu}{\lambda} u^{\alpha-1} + \frac{\nu}{\lambda} (1-u)^{\beta-1} \quad (6.63)$$

όπου  $\lambda$  είναι η παράμετρος κλίμακας της κατανομής ενώ  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\xi$  είναι συντελεστές προς προσδιορισμό που εξαρτώνται από την παράμε-

τρο  $\kappa$ . Ολοκληρώνοντας παίρνουμε την ακόλουθη σχέση προσδιορισμού του  $u$ -ποσοστημορίου

$$x_u = \begin{cases} -\frac{\ln(1-u)}{\lambda} & \kappa = 1 \\ \frac{\mu}{\lambda\alpha} u^\alpha + \frac{\nu}{\lambda\beta} [\xi - (1-u)^\beta] & \kappa \neq 1 \end{cases} \quad (6.64)$$

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\xi$  προτείνουμε τις ακόλουθες σχετικά απλές εξισώσεις

$$\mu = 0.6(\sqrt{\kappa} - 1) - (1/\sqrt{\kappa} - 1) \quad (6.65)$$

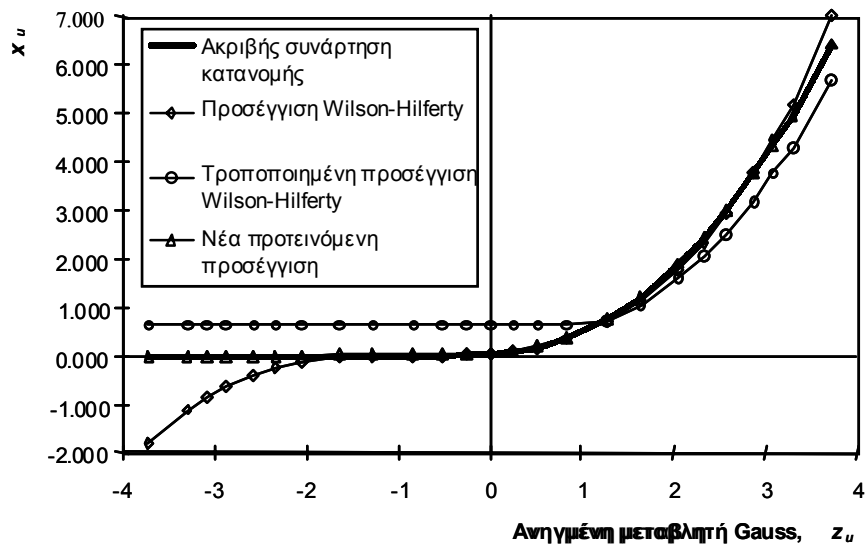
$$\nu = 0.6(\sqrt{\kappa} - 1) + 0.01(\kappa - 1) + 1 \quad (6.66)$$

$$\alpha = 0.6 / \sqrt{\kappa} + 0.08 \quad (6.67)$$

$$\beta = 0.0234 \ln \kappa \quad (6.68)$$

$$\xi = \begin{cases} 1 & \kappa \leq 1 \\ 31e^{-11.6(\kappa-1)^{-0.25}} & \kappa > 1 \end{cases} \quad (6.69)$$

Η παραπάνω προσέγγιση είναι ικανοποιητική για  $0.2 \leq \kappa \leq 100$  ( $0.2 \leq C_s \leq 4.5$ ) και  $0.0001 \leq F(x) \leq 0.9999$ . Το σφάλμα που προκύπτει από την εφαρμογή της (6.64), οριζόμενο ως  $e = |x_u - \hat{x}_u| / \sigma_x$ , δεν υπερβαίνει την τιμή 0.11 σε κανένα σημείο του πεδίου εφαρμογής της προσέγγισης (δηλαδή του χώρου που ορίζεται από τις πιο πάνω ανισώσεις). Το σφάλμα αυτό είναι μικρότερο από τα αντίστοιχα σφάλματα των προσεγγίσεων Wilson-Hilferty (τυπικής και τροποποιημένης, εξισώσεις (6.57) και (6.58), αντίστοιχα) για  $\kappa \leq 4$  ( $C_s \geq 1$ ) (βλ. Σχ. 6.5).



**Σχ. 6.5** Σύγκριση τριών προσεγγίσεων της κατανομής γάμα για  $\kappa = 0.25$  ( $C_s = 4$ ) και  $\lambda = 1$ . Η πλησιέστερη προς την ακριβή συνάρτηση κατανομής νέα προτεινόμενη προσέγγιση δίνεται από την (6.64).

Το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή ο υπολογισμός του  $u$  για δεδομένο  $x$ , είναι απλό στην περίπτωση που  $\kappa = 1$ , δεδομένου ότι

$$u = 1 - e^{-\lambda x} \quad \kappa = 1 \quad (6.70)$$

Για  $\kappa \neq 1$  μπορούμε να κάνουμε χρήση της (6.64), αλλά ωστόσο απαιτούνται δοκιμές, αφού δεν επιλύεται άμεσα ως προς  $u$ . Για τη συστηματοποίηση των υπολογισμών προτείνεται η χρήση της ακόλουθης εξίσωσης, που αποτελεί κατάλληλη τροποποίηση της εξίσωσης Newton-Raphson:

$$u = \begin{cases} u_0 e^{t_1} & \text{αν } t_1 < -1/\kappa \text{ ή } t_2 < \ln(1-u_0) \\ 1 - (1 - u_0) e^{-t_2} & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (6.71)$$

όπου

$$t_1 = \frac{x - x_0}{x'_0 u_0} \quad t_2 = \frac{x - x_0}{x'_0 (1 - u_0)} \quad (6.72)$$

$u_0$  είναι μια αρχική προσέγγιση της  $u_0$  και  $x'_0$  η παράγωγος του  $x$  στη θέση  $u_0$ , που υπολογίζεται από την εξίσωση (6.63). Η σειρά των υπολογισμών είναι η ακόλουθη:

1. Υποτίθεται μια αρχική τιμή  $u_0 = 0.5$ .

2. Υπολογίζεται η τιμή του  $z'_0$  από την (6.63).
3. Υπολογίζονται τα  $t_1$  και  $t_2$  από την (6.72).
4. Υπολογίζεται η νέα προσέγγιση του  $u$  από την (6.71).
5. Επαναλαμβάνονται τα βήματα 2-4 θέτοντας ως  $u_0$  τη νέα προσέγγιση, μέχρι η διαφορά  $u - u_0$  να γίνει αμελητέα (συνήθως αυτό επιτυγχάνεται σε 2-5 δοκιμές).