
Κεφάλαιο 8 Ανάλυση τυχαίας μεταβλητής εξαρτημένης από παράμετρο - Όμβριες καμπύλες

Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε τις γνώσεις όλων των προηγούμενων κεφαλαίων σε ένα τυπικό πρόβλημα της τεχνικής υδρολογίας, το οποίο περιλαμβάνει την πιθανοτική ανάλυση περισσότερων από μίας τυχαίων μεταβλητών, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί σε μια δεδομένη τιμή μιας παραμέτρου. Το πρόβλημα αυτό το αντιμετωπίζουμε στην ανάλυση των ισχυρών βροχοπτώσεων μιας περιοχής, η οποία καταλήγει στην κατάρτιση των αποκαλούμενων όμβριων καμπυλών. Οι *όμβριες καμπύλες*, όπως απλούστερα έχει καθιερωθεί να αποκαλούνται στην ελληνική τεχνική ορολογία οι *καμπύλες έντασης-διάρκειας-περιόδου επαναφοράς* βροχόπτωσης, αποτελούν ένα από τα βασικότερα εργαλεία του υδρολόγου μηχανικού για το σχεδιασμό αντιπλημμυρικών έργων. Πρόκειται για απλές αναλυτικές ή γραφικές εκφράσεις της μέγιστης έντασης βροχής i συναρτήσει της διάρκειας d και της περιόδου επαναφοράς T . Για την κατάρτιση των όμβριων καμπυλών πρέπει να είναι διαθέσιμες ιστορικές σειρές μέγιστων εντάσεων βροχής για ένα σύνολο k διαρκειών d_j , $j = 1, \dots, k$, ξεκινώντας από την ελάχιστη διάρκεια που επιτρέπει η ευκρίνεια των παρατηρήσεων (π.χ. 5 min - 1 h) και φθάνοντας μέχρι τη μέγιστη διάρκεια βροχής που ενδιαφέρει στα τυπικά προβλήματα του μηχανικού (π.χ. 24 - 48 h). Αναλυτικά, ο ορισμός των μεγεθών αυτών και ο τρόπος κατασκευής της σειράς τιμών της μεταβλη-

τής i από τη διαθέσιμη πλήρη χρονοσειρά εντάσεων βροχής φαίνεται στην ενότητα 8.1.

Η χρησιμότητα των όμβριων καμπυλών είναι άμεση σε όλα τα προβλήματα υδρολογικού σχεδιασμού που αφορούν στην αντιπλημμυρική προστασία. Ουσιαστικά η χρήση τους συνίσταται στην πρόγνωση της έντασης βροχής i , για δεδομένη διάρκεια d , η οποία έχει σχέση με τα χαρακτηριστικά του υδατορεύματος ή αγωγού που μελετάται, και για δεδομένη περίοδο επαναφοράς T , που έχει σχέση με τη σημασία του έργου που μελετάται. Οι όμβριες καμπύλες αποτελούν τη βασική είσοδο σε όλα τα μοντέλα μετασχηματισμού της βροχόπτωσης σε πλημμυρική απορροή, ξεκινώντας από την απλή ορθολογική μέθοδο ($Q = c i A$) και φτάνοντας σε πιο σύνθετες μεθόδους, όπως αυτές του μοναδιαίου υδρογραφήματος, και των υδρολογικών και υδραυλικών μοντέλων διόδευσης. Στο κείμενο αυτό δεν θα αναφερθούμε στην εφαρμογή των όμβριων καμπυλών σε υδρολογικά προβλήματα, αλλά στον τρόπο κατάρτισής τους. Για τις εφαρμογές ο αναγνώστης παραπέμπεται σε πληρέστερα βιβλία υδρολογίας και υδραυλικών έργων, όπως στους Ξανθόπουλο, 1990, Μιμίκου, 1990 και Κουτσογιάννη, 1993 (για να περιοριστούμε στην ελληνική βιβλιογραφία).

Το πρόβλημα της κατάρτισης όμβριων καμπυλών είναι κάπως ιδιόμορφο. Κατ' αρχήν δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί ως πρόβλημα μιας τυχαίας μεταβλητής, αφού περιλαμβάνει την ταυτόχρονη αντιμετώπιση της έντασης i και της διάρκειας d . Ούτε ως πρόβλημα δύο τυχαιών μεταβλητών μπορεί να θεωρηθεί αφού η ένταση i αντιστοιχεί πράγματι σε μια τυχαία μεταβλητή I , αλλά η διάρκεια d δεν αποτελεί τυχαία μεταβλητή αλλά παράμετρο (βλ. ενότητα 8.1). Έτσι έχουμε να αντιμετωπίσουμε μια οικογένεια τυχαιών μεταβλητών $I(d)$, όπου η παράμετρος d παίρνει (θεωρητικά άπειρες) τιμές από ένα πραγματικό διάστημα. Η οικογένεια τυχαιών μεταβλητών $I(d)$ δεν αποτελεί τυπική στοχαστική ανέλιξη (βλ. εδάφιο 4.1.2) αφού η μεταβλητή I δεν αποτελεί πραγματική ένταση, αλλά μέγιστη μέση ένταση για διάρκεια d , αλλά και η διάρκεια d δεν συμβολίζει συνεχή (ή διακριτό) χρόνο, αλλά χρονικό διάστημα (βλ. ενότητα 8.1). Όπως θα δούμε παρακάτω, οι μεταβλητές $I(d)$ κατασκευάζονται με κάποιο ειδικό τρόπο από την ανέλιξη της πραγματικής έντασης βροχής σε συνεχή χρόνο. Στην πραγματικότητα, δεν είναι απαραίτητη η χρήση της θεωρίας στοχαστικών ανελιξεων στο πρόβλημα που αντιμετωπί-

ζουμε, γιατί δεν μας ενδιαφέρει η πολυδιάστατη κατανομή των μεταβλητών $I(d)$. Αντίθετα, μας ενδιαφέρει μόνο η συνάρτηση κατανομής πρώτης τάξης της μεταβλητής $I(d)$, δηλαδή η $F(i; d) = P(I(d) < i)$, η οποία αποτελεί και τον τελικό στόχο της ανάλυσης αυτού του κεφαλαίου. Πράγματι, η συνάρτηση $F(i; d)$ μετατρέπεται άμεσα σε σχέση μεταξύ των μεγεθών i, d, T , δεδομένου ότι $T = 1 / (1 - F)$.

Για την κατάστρωση αυτής της σχέσης έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι στην τεχνική υδρολογία, από καθαρά εμπειρικές χωρίς στατιστική θεμελίωση, μέχρι συνεπείς στατιστικές. Στο κεφάλαιο αυτό δεν θα περιοριστούμε σε μία μοναδική μέθοδο, αλλά θα δώσουμε μια σειρά μεθόδων, παραλείποντας μόνο τις καθαρά εμπειρικές.

Τελειώνοντας αυτή την εισαγωγή θα πρέπει να τονίσουμε ότι η κατάρτιση όμβριων καμπυλών προϋποθέτει την ύπαρξη μετρήσεων της βροχής με υψηλή χρονική ευκρίνεια (π.χ. από μερικά λεπτά μέχρι μία ώρα). Τέτοια ευκρίνεια παρέχεται από τις ταινίες αυτογραφικών οργάνων (βροχογράφων) ή από τους πιο σύγχρονους ψηφιακούς αισθητήρες του ύψους βροχής. Τα δεδομένα από βροχόμετρο, που κανονικά έχουν ευκρίνεια μίας ημέρας δεν προσφέρονται για την εξαγωγή όμβριων καμπυλών. Ωστόσο, και στην περίπτωση του βροχομέτρου, αν συναξιολογηθούν και τα δεδομένα γειτονικών βροχογράφων, είναι δυνατή η εξαγωγή όμβριων καμπυλών με έμμεσο τρόπο. Μια ενδεικτική μεθοδολογία για τη συναξιολόγηση των δεδομένων χαμηλής χρονικής ευκρίνειας δίνεται στην ενότητα 8.5· σημειώνουμε, ωστόσο, ότι δεν υπάρχει ενιαία καθιερωμένη μεθοδολογία για αυτό το σκοπό. Είναι βεβαίως προφανές ότι στην περίπτωση που λείπουν τα άμεσα δεδομένα υψηλής ευκρίνειας στην υπό εξέταση θέση, η αξιοπιστία των όμβριων καμπυλών είναι περιορισμένη.

8.1 Έννοια και τρόπος κατασκευής των μεταβλητών

Ο απλούστερος τρόπος για να διευκρινίσουμε την έννοια των μεταβλητών i και d που υπεισέρχονται στο πρόβλημα είναι να δώσουμε τον τρόπο κατασκευής της σειράς τιμών της μεταβλητής i από πλήρη χρονοσειρά εντάσεων βροχής $\zeta(t)$, βασισμένη στα βροχογραφήματα ενός συγκεκριμένου σταθμού. Η κατασκευή αυτή περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα (βλ. και ενότητα 4.1):

1. Επιλέγουμε μια δεδομένη διάρκεια d (συνήθως από μερικά λεπτά της ώρας μέχρι μερικές ώρες), η οποία λειτουργεί ως “χρονικό παράθυρο” μέσα από το οποίο βλέπουμε τη συνεχή χρονοσειρά $\zeta(t)$.
2. Μετακινώντας το χρονικό παράθυρο μήκους d κατά τη διάρκεια του χρόνου για τον οποίο διατίθενται μετρήσεις της $\zeta(t)$, υπολογίζουμε την σειρά κινούμενων μέσων όρων $\zeta_d(t)$, ήτοι

$$\zeta_d(t) = \frac{1}{d} \int_{t-d}^t \zeta(s) ds \quad (8.1)$$

Στην πραγματικότητα, επειδή ποτέ δεν έχουμε μετρήσεις της στιγμιαίας έντασης βροχής $\zeta(t)$ αλλά της μέσης έντασης $\zeta_\delta(t)$ για μια δεδομένη ευκρίνεια δ (συνήθως 5-10 min μέχρι 1 h), η παραπάνω σχέση τροποποιείται και γίνεται

$$\zeta_d(t) = \frac{\delta}{d} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_\delta(t - i \delta) \quad (8.2)$$

όπου υποτίθεται ότι η διάρκεια d είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ευκρίνειας δ , ήτοι $d = N \delta$.

3. Στη συνέχεια, επιλέγοντας τις αιχμές της χρονοσειράς κινούμενων μέσων όρων $\zeta_d(t)$ σχηματίζουμε μια σειρά μέγιστων εντάσεων $i_l(d)$ ($l = 1, \dots, n$) η οποία περιλαμβάνει n τιμές, όπου n είναι το πλήθος των υδρολογικών ετών για τα οποία διατίθενται μετρήσεις. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

- 3.1 Σύμφωνα με τον πρώτο τρόπο σχηματίζουμε τη σειρά ετήσιων μεγίστων, παίρνοντας την αιχμή κάθε υδρολογικού έτους, δηλαδή

$$i_l(d) := \max_{\Gamma < t < \Gamma^+} \{\zeta_d(t)\} \quad (8.3)$$

όπου Γ και Γ^+ είναι ο χρόνος έναρξης και λήξης του l υδρολογικού έτους.

3.2 Σύμφωνα με το δεύτερο τρόπο σχηματίζουμε τη σειρά υπεράνω κατώφλιου (γνωστή και ως σειρά μερικής διάρκειας) παίρνοντας όσες τιμές υπερβαίνουν ένα δεδομένο κατώφλι φ . Για εξασφάλιση της στοχαστικής ανεξαρτησίας μεταξύ των διαδοχικών τιμών αυτής της σειράς θέτουμε και ένα όριο τ ελάχιστης χρονικής απόστασης για τις διαδοχικές τιμές (π.χ. μία ημέρα ή περισσότερο). Τέλος, επιλέγουμε (μετά από δοκιμές) το κατώφλι φ έτσι ώστε η σειρά $\{i_l(d)\}$ να περιλαμβάνει ακριβώς n τιμές (όσα είναι τα υδρολογικά έτη). Συμβολικά, η σειρά υπεράνω κατώφλιου είναι

$$\{i_l(d), l = 1, \dots, n\} := \left\{ \zeta_d(t_l) \mid \zeta_d(t_l) > \varphi, t_l > t_{l-1} + \tau, \zeta_d(t_l) = \max_{t_l - \tau < t < t_l + \tau} \{ \zeta_d(t) \} \right\} \quad (8.4)$$

όπου οι τρεις συνθήκες του δεξιού μέλους πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα, διαφορετικά δεν επιλέγεται το σημείο t_l και η αντίστοιχη ένταση $\zeta_d(t_l)$.

Στην πραγματικότητα οι παραπάνω εργασίες γίνονται ταυτόχρονα για ένα σύνολο k διαρκειών $d_j, j = 1, \dots, k$, ξεκινώντας από ελάχιστη διάρκεια ίση με την ευκρίνεια δ των παρατηρήσεων (π.χ. 5-10 min για βροχογράφο ημερήσιας ταινίας και 1 h για βροχογράφο εβδομαδιαίας ταινίας) και φθάνοντας μέχρι τη μέγιστη διάρκεια βροχής που ενδιαφέρει στα τυπικά προβλήματα του μηχανικού (π.χ. 24 ή 48 h). Κανονικά όλες οι k σειρές θα πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό δεδομένων n , αλλά, λόγω των ελλείψεων που συχνά υπάρχουν στα πρωτογενή δεδομένα, είναι δυνατό ο αριθμός αυτός (n_j) να διαφέρει από διάρκεια σε διάρκεια.

Ο πιο πάνω τρόπος κατασκευής των σειρών μέγιστων εντάσεων μας επιτρέπει να κάνουμε τις ακόλουθες διευκρινιστικές παρατηρήσεις:

1. Η διάρκεια d δεν είναι τυχαία μεταβλητή αλλά παράμετρος. Δεν έχει σχέση με την πραγματική διάρκεια των επεισοδίων βροχής, αλλά εκφράζει τη χρονική διάρκεια για την οποία εξάγεται η μέση ένταση βροχής.
2. Η σειρά μέγιστων εντάσεων $i(d)$ που κατασκευάστηκε με έναν από τους δύο παραπάνω τρόπους δεν περιλαμβάνει στιγμιαίες εντάσεις, αλλά μέσες εντάσεις για διάρκεια d . Η σειρά αυτή θεωρείται ότι απο-

τελεί τυχαίο δείγμα της τυχαίας μεταβλητής $I(d)$. Χάριν συντομίας κάθε τιμή $i(d)$ την αποκαλούμε *μέγιστη ένταση βροχής για διάρκεια d αντί μέγιστη μέση ένταση για διάρκεια d* , όπως θα ήταν ακριβέστερο.

3. Από τον τρόπο κατασκευής των σειρών $i(d)$ είναι προφανές ότι για δύο διάρκειες $d_1 < d_2$ ισχύει

$$i_l(d_1) \geq i_l(d_2) \geq (d_1 / d_2) i_l(d_1) \quad (8.5)$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να ελέγξουμε (χονδροειδώς) τις σειρές διάφορων διαρκειών, οι οποίες συχνά δίνονται έτοιμες από τις αρμόδιες υπηρεσίες, και να εντοπίσουμε τυχόν σφάλματα της συγκεκριμένης μορφής.

Εφαρμογή 8.1

Στον Πίν. 8.1 (στήλες 1 και 2) φαίνονται οι καταγραφές του ύψους βροχής ανά δεκάλεπτο του αυτόματου τηλεμετρικού μετεωρολογικού σταθμού του ΕΜΠ στην Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, για το επεισόδιο βροχής της 31/05/1994. Να υπολογιστούν οι μέγιστες μέσες εντάσεις βροχής για διάρκειες 10 min, 20 min, 30 min, 1 h, 2h και 4 h. Σημειώνεται ότι οι προηγούμενες και επόμενες καταγραφές έξω από τις ώρες που δίνονται στον Πίν. 8.1 είναι μηδενικές για χρονικά διαστήματα αρκετών ημερών.

Η λύση του προβλήματος είναι πολύ απλή και δίνεται στον Πίν. 8.1 (στήλες 3-8). Στη στήλη 3 έχουμε απλώς μετατρέψει τα ύψη βροχής της στήλης 2 σε εντάσεις διαιρώντας διά της ευκρίνειας δ , η οποία στην περίπτωσή μας είναι $\delta = 10 \text{ min} = (1/6) \text{ h}$ (άρα $1 / \delta = 6 \text{ h}^{-1}$). Στις υπόλοιπες στήλες έχουμε εφαρμόσει την εξίσωση (8.2). Για παράδειγμα ας δούμε πως υπολογίζεται η τιμή της στήλης της 1 h που αντιστοιχεί στο χρόνο $t = 31/05/1994 \text{ 19:53}$. Εδώ θα έχουμε $\delta / d = (1/6) / 1 = 1/6$ και το άθροισμα υπολογίζεται από $t - d + \delta = t - 50 \text{ min} = 31/05/1994 \text{ 19:03}$ μέχρι t . Επομένως η ζητούμενη τιμή είναι $(1/6) (0 + 0 + 0 + 0 + 1.8 + 49.8) = 8.6 \text{ mm/h}$, δηλαδή ταυτίζεται με το μέσο όρο των 6 προηγούμενων τιμών των δεκάλεπτων εντάσεων βροχής.

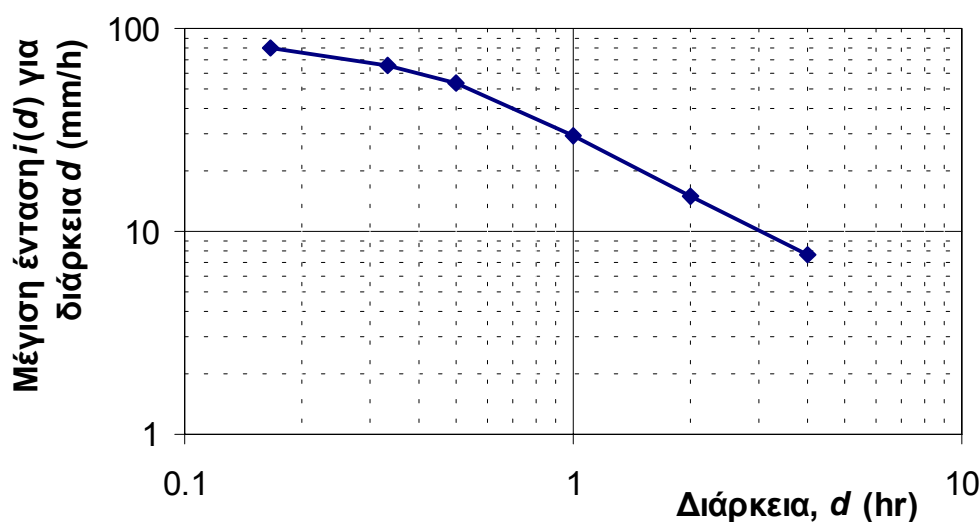
Πίν. 8.1 Πινακοποιημένο βροχογράφημα και υπολογισμός μέγιστων εντάσεων βροχής του επεισοδίου της 31/05/1994 στην Αθήνα (Δεδομένα από τον αυτόματο τηλεμετρικό μετεωρολογικό σταθμό του ΕΜΠ - Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου).

Ημερομηνία-ώρα	Ύψος βροχής	Μέση ένταση βροχής $\zeta_d(t)$ σε mm/h για $d =$					
		10 min	20 min	30 min	1 h	2 h	4 h
31/05/1994 19:03	0	0.000					
31/05/1994 19:13	0	0.000	0.000				
31/05/1994 19:23	0	0.000	0.000	0.000			
31/05/1994 19:33	0	0.000	0.000	0.000			
31/05/1994 19:43	0.3	1.800	0.900	0.600			
31/05/1994 19:53	8.3	49.800	25.800	17.200	8.600		
31/05/1994 20:03	13.5	81.000	65.400	44.200	22.100		
31/05/1994 20:13	5.1	30.600	55.800	53.800	27.200		
31/05/1994 20:23	0.7	4.200	17.400	38.600	27.900		
31/05/1994 20:33	0.9	5.400	4.800	13.400	28.800		
31/05/1994 20:43	0.8	4.800	5.100	4.800	29.300		
31/05/1994 20:53	0	0.000	2.400	3.400	21.000	14.800	
31/05/1994 21:03	0.3	1.800	0.900	2.200	7.800	14.950	
31/05/1994 21:13	0.1	0.600	1.200	0.800	2.800	15.000	
31/05/1994 21:23	0	0.000	0.300	0.800	2.100	15.000	
31/05/1994 21:33	0	0.000	0.000	0.200	1.200	15.000	
31/05/1994 21:43	0	0.000	0.000	0.000	0.400	14.850	
31/05/1994 21:53	0	0.000	0.000	0.000	0.400	10.700	
31/05/1994 22:03	0	0.000	0.000	0.000	0.100	3.950	
31/05/1994 22:13	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1.400	
31/05/1994 22:23	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1.050	
31/05/1994 22:33	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.600	
31/05/1994 22:43	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200	
31/05/1994 22:53	0.1	0.600	0.300	0.200	0.100	0.250	7.525
31/05/1994 23:03	0.1	0.600	0.600	0.400	0.200	0.150	7.550
31/05/1994 23:13	0.1	0.600	0.600	0.600	0.300	0.150	7.575
31/05/1994 23:23	0	0.000	0.300	0.400	0.300	0.150	7.575
31/05/1994 23:33	0.1	0.600	0.300	0.400	0.400	0.200	7.600
31/05/1994 23:43	0.2	1.200	0.900	0.600	0.600	0.300	7.575
31/05/1994 23:53	0.2	1.200	1.200	1.000	0.700	0.400	5.550
01/06/1994 00:03	0.1	0.600	0.900	1.000	0.700	0.450	2.200
01/06/1994 00:13	0	0.000	0.300	0.600	0.600	0.450	0.925
01/06/1994 00:23	0	0.000	0.000	0.200	0.600	0.450	0.750
01/06/1994 00:33	0	0.000	0.000	0.000	0.500	0.450	0.525
01/06/1994 00:43	0	0.000	0.000	0.000	0.300	0.450	0.325
01/06/1994 00:53	0	0.000	0.000	0.000	0.100	0.400	0.325
Μέγιστη τιμή		81.000	65.400	53.800	29.300	15.000	7.600

Στην τελευταία σειρά του πίνακα έχουμε εξαγάγει τις μέγιστες μέσες εντάσεις που έχουν παρατηρηθεί στη διάρκεια του επεισοδίου.

Αν ο πίνακας επεκτεινόταν στη διάρκεια ενός ολόκληρου υδρολογικού έτους, τότε τα μεγέθη που θα προέκυπταν με αυτό τον τρόπο θα ήταν τα $i(d)$ που φαίνονται στην (8.3). Για εποπτικότερη παρουσίαση των μέγιστων εντάσεων της τελευταίας στήλης του πίνακα, είτε σε βάση επεισοδίου βροχής, είτε σε βάση υδρολογικού έτους, χρησιμοποιούμε τη γραφική απεικόνιση σε λογαριθμικούς άξονες $d - i(d)$, όπως φαίνεται στο Σχ. 8.1.

Τέλος, παρατηρούμε ότι οι μέγιστες εντάσεις που υπολογίστηκαν υπακούουν στη σχέση (8.5), πράγμα που αποτελεί ένα χονδροειδή έλεγχο της ορθότητάς τους.



Σχ. 8.1 Μέγιστες εντάσεις που παρατηρήθηκαν κατά τη διάρκεια του επεισοδίου της 31/05/1994 στην Αθήνα (Δεδομένα από τον αυτόματο τηλεμετρικό μετεωρολογικό σταθμό του ΕΜΠ - Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου).

8.2 Συμβατική στατιστική μέθοδος εξαγωγής όμβριων καμπυλών

Μετά την κατασκευή των σειρών μέγιστων εντάσεων ακολουθεί η επεξεργασία τους με στόχο την κατάρτιση των όμβριων καμπυλών. Το πρώτο βήμα, σύμφωνα με τη συμβατική στατιστική μέθοδο, την οποία θα περιγράψουμε στην παρούσα ενότητα, είναι η επιλογή και προσαρμογή μιας συνάρτησης κατανομής σε καθεμιά από τις σειρές, η οποία αναφέρεται σε δεδομένη διάρκεια. Δεδομένου ότι πρόκειται για σειρές μέγιστων τιμών, η τυπική κατάλληλη συνάρτηση κατανομής είναι η Gumbel

μεγίστων. Λιγότερο συχνά χρησιμοποιείται και η κατανομή Log-Pearson III, καθώς και άλλες κατανομές (βλ. και εδάφιο 8.3.1 πιο κάτω).

Ουσιαστικά, η προσαρμογή μιας συνάρτησης κατανομής για μια δεδομένη διάρκεια d , ισοδυναμεί με τον καθορισμό μιας παραμετρικής σχέσης ανάμεσα στη μέγιστη ένταση και την περίοδο επαναφοράς, της μορφής $i = g_d(T)$. Η σχέση αυτή καθορίζεται πλήρως από την συνάρτηση κατανομής που έχει επιλεγεί και τις παραμέτρους της. Αν δοθεί η διάρκεια d και η περίοδος επαναφοράς T , τότε από αυτή τη σχέση μπορεί να γίνει η πρόγνωση της έντασης i . Ανάλογα με την συνάρτηση κατανομής, η σχέση αυτή μπορεί να έχει απλή αναλυτική έκφραση (όπως στην περίπτωση της κατανομής Gumbel· βλ. Εφαρμογή 8.2.1) ή πιο σύνθετη, οπότε ο υπολογισμός της έντασης γίνεται με χρήση αριθμητικών μεθόδων, πινάκων ή διαγραμμάτων.

Ωστόσο, η οικογένεια των καμπυλών $i = g_d(T)$ δεν είναι τόσο εύχρηστη, δεδομένου ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο εφόσον η διάρκεια d ταυτίζεται με μία από τις δεδομένες διάρκειες d_j , για τις οποίες υπάρχουν δείγματα εντάσεων. Στην πράξη, όμως, απαιτείται ο υπολογισμός της έντασης για διάρκειες διαφορετικές από τις d_j . Στην περίπτωση αυτή απαιτείται κάποια παρεμβολή ή επέκταση. Είναι προφανές ότι η παρεμβολή ή επέκταση δεν μπορεί να είναι γραμμική, αλλά πρέπει να ακολουθεί κάποιο μη γραμμικό νόμο. Αυτός ο μη γραμμικός νόμος μπορεί να προσδιοριστεί με συστηματικό τρόπο χρησιμοποιώντας τις εντάσεις που αντιστοιχούν σε όλες τις δεδομένες διάρκειες d_j για μια δεδομένη περίοδο επαναφοράς. Ο νόμος αυτός μπορεί να διατυπωθεί με τη μορφή μιας σχέσης της μορφής $i = g'_T(d)$. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι η συναγωγή του νόμου $i = g'_T(d)$, στον οποίο η διάρκεια d είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ η περίοδος επαναφοράς T είναι η παράμετρος, ξεκινώντας από τον γνωστό νόμο $i = g_d(T)$, στον οποίο η διάρκεια d είναι η παράμετρος, ενώ η περίοδος επαναφοράς T είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή.

8.2.1 Μεμονωμένες καμπύλες για κάθε διάρκεια

Στην απλούστερη περίπτωση, για μια δεδομένη περίοδο επαναφοράς T , οι όμβριες καμπύλες $i = g'_T(d)$ εκφράζονται ως υπερβολικές συναρτήσεις της διάρκειας, σε μια από τις ακόλουθες διαδοσόμενες μορφές

$$i = \frac{\omega}{(d + \theta)^\eta} \quad (8.6)$$

$$i = \frac{\omega}{d^\eta} \quad (8.7)$$

$$i = \frac{\omega}{d + \theta} \quad (8.8)$$

όπου ω , θ και η είναι παράμετροι που οι τιμές τους εξαρτώνται από την περίοδο επαναφοράς. Είναι προφανές ότι η δεύτερη και τρίτη από τις παραπάνω εκφράσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της πρώτης (για $\theta = 0$ και $\eta = 1$, αντίστοιχα). Στη βιβλιογραφία συναντάται επίσης και η εξίσωση

$$i = \frac{\omega}{d^\eta + \theta} \quad (8.9)$$

η οποία, αν και στην αναλυτική της έκφραση διαφέρει από τις παραπάνω, αριθμητικά περιγράφεται με αμελητέο σφάλμα από την (8.6), και γι' αυτό δεν μελετάται ξεχωριστά στο κείμενο αυτό.

Η εξάρτηση των παραμέτρων των (8.6) - (8.8) από την περίοδο επαναφοράς εισάγει έμμεσα την περίοδο επαναφοράς στην εκτίμηση της έντασης i .

Η μέθοδος εφαρμόζεται σε δύο ξεχωριστά στάδια. Το πρώτο στάδιο αντιστοιχεί στην προσαρμογή μιας συνάρτησης κατανομής και το δεύτερο στην εκτίμηση των παραμέτρων της (8.6) (ή των (8.7) ή (8.8)). Αναλυτικότερα, στο πρώτο στάδιο επιλέγεται, προσαρμόζεται και ελέγχεται με βάση τις γνωστές μεθόδους της στατιστικής, μια κατάλληλη συνάρτηση κατανομής (π.χ. Gumbel ή Log Pearson III), ξεχωριστά για κάθε δείγμα δεδομένης διάρκειας. Ο προσδιορισμός των παραμέτρων ω , θ και η για μια δεδομένη περίοδο επαναφοράς T γίνεται στο δεύτερο στάδιο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων, όπως διευκρινίζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Εφαρμογή 8.2.1

Στον Πίν. 8.2 δίνονται οι τιμές των ετήσιων μέγιστων εντάσεων βροχής στο σταθμό Ελληνικό (αεροδρόμιο Αθήνας) της Εθνικής Μετεωρολογικής Υπηρεσίας, όπως έχουν προκύψει μετά από επεξεργασία βροχογρα-

φημάτων 30 ετών, για διάρκειες βροχής από 5 min μέχρι 24 h (με ορισμένες ελλείψεις σε μερικές διάρκειες). Ζητείται ο υπολογισμός των όμβριων καμπυλών για περιόδους επαναφοράς $T = 5$ και $T = 50$.

Πίν. 8.2 Καταγραμμένες ετήσιες μέγιστες εντάσεις βροχής στο σταθμό Ελληνικό (Πηγή Εθνική Μετεωρολογική Υπηρεσία).

Υδρολ. Έτος	Μέγιστη ένταση βροχής i (mm/h) για διάρκεια $d =$							
	5 min	10 min	30 min	1 h	2 h	6 h	12 h	24 h
1957-58	81.600	66.000	53.200	35.000	26.900	8.967	6.267	
1958-59	58.800	48.000	33.000	21.500	11.200	6.750	3.983	
1959-60	39.600	34.800	20.000	11.600	6.850	2.400	1.817	
1960-61	54.000	34.800	18.400	11.000	6.650	3.617	2.275	
1961-62	120.000	85.800	41.800	24.800	19.300	7.317	3.733	
1962-63	67.200	60.000	23.600	13.800	7.200	3.033	1.942	
1963-64	78.000	48.000	27.800	14.300	8.500	3.517	2.717	
1964-65	96.000	63.000	28.000	15.500	10.650	4.283	2.167	
1965-66	38.400	36.000	23.000	12.000	6.550	2.450	1.692	
1966-67	74.400	63.600	28.400	15.100	7.550	4.883	2.458	
1967-68	36.000	24.600	16.600	10.200	6.650	3.650	2.750	1.583
1968-69	126.000	69.000	43.200	26.800	15.150	5.933	2.967	1.483
1969-70	82.800	64.200	41.600	24.500	12.450	5.450	2.750	1.763
1970-71	42.000	42.000	25.200	17.700	8.950	3.700	3.092	1.546
1971-72	117.600	85.200	65.200	35.900	19.750	10.017	5.008	2.925
1972-73	68.400	49.800	39.400	33.500	17.750	6.783	5.267	2.679
1973-74	60.000	42.000	28.600	15.200	9.850	4.200	3.467	2.004
1974-75	48.000	48.000	30.600	15.900	8.300	4.267	2.600	1.300
1975-76	120.000	120.000	74.000	40.900	21.500	7.383	4.542	2.271
1976-77	115.200	87.600	41.400	23.200	14.900	6.117	3.300	1.650
1977-78	56.400	46.200	38.600	32.700	20.150	6.733	3.367	1.683
1978-79	78.000	66.600	47.600	30.000	19.550	11.933	6.117	3.371
1979-80	67.200	40.800	17.200	13.300	8.600	4.217	2.808	1.621
1980-81	58.800	56.400	30.400	19.400	11.100	5.583	3.267	1.950
1981-82	67.200	64.800	40.600	24.700	13.050	4.350	2.275	1.138
1982-83	141.600	79.800	49.600	36.200	22.900	7.633	4.517	2.292
1983-84	102.000	69.000	50.400	29.000	17.700	7.033	3.633	1.817
1984-85	40.800	31.800	16.400	12.900	12.150	9.867	6.000	3.400
1985-86	74.400	66.000	29.200	15.600	9.400	3.133	1.567	0.833
1986-87			32.200	29.100	18.550	9.500	7.242	3.846

Πριν προχωρήσουμε στην λύση του προβλήματος, παρατηρούμε ότι όλες οι τιμές του Πίν. 8.2 υπακούουν στην (8.5), πράγμα που εξασφαλίζει την απουσία χονδροειδών λαθών. Ακόμη, παρατηρούμε ότι οι ελλείψεις δεν είναι επιτρεπτό να συμπληρωθούν, π.χ. με εκτίμηση μέσω παλινδρόμησης από άλλες διάρκειες, ή από γειτονικούς

σταθμούς, και έτσι τα δείγματα θα πρέπει να θεωρηθούν ως έχουν (βλ. και εδάφιο 8.4.1).

Για λόγους που έχουν συζητηθεί στην ενότητα 6.3, περιμένουμε ότι η κατανομή μεγίστων Gumbel θα αποτελεί κατάλληλο μοντέλο για τις μέγιστες εντάσεις βροχής, πράγμα που μπορούμε να ελέγξουμε στατιστικά εκ των υστέρων. Στον Πίν. 8.3 έχουν εξαχθεί τα στατιστικά χαρακτηριστικά των δειγμάτων των επιμέρους διαρκειών και έχουν γίνει οι αναγκαίοι υπολογισμοί προσαρμογής της συνάρτησης κατανομής Gumbel με τη μέθοδο των ροπών (εξ. 6.37).

Πίν. 8.3 Στατιστικά χαρακτηριστικά και παράμετροι κατανομής Gumbel των μεγίστων εντάσεων βροχής στο σταθμό Ελληνικό.

Παρά- μετρος	Διάρκεια $d =$							
	5 min	10 min	30 min	1 h	2 h	6 h	12 h	24 h
n	29	29	30	30	30	30	30	20
\bar{x}	76.221	58.407	35.173	22.043	13.325	5.823	3.520	2.058
s_x	29.144	20.318	13.877	8.889	5.660	2.433	1.464	0.786
λ	0.0440	0.0631	0.0924	0.1442	0.2265	0.5270	0.8758	1.6310
c	63.104	49.263	28.928	18.043	10.778	4.728	2.861	1.704
$\psi = \lambda c$	2.776	3.108	2.672	2.602	2.441	2.492	2.505	2.779

Μια βασική παρατήρηση στον Πίν. 8.3 είναι ότι η αδιάστατη παράμετρος ψ που προκύπτει ως γινόμενο των παραμέτρων θέσης (c) και κλίμακας (λ) της κατανομής παραμένει περίπου σταθερή για όλες τις διάρκειες, πράγμα που θα το εκμεταλλευτούμε σε επόμενες ενότητες.

Η δοκιμή χ^2 οδηγεί σε μη απόρριψη της κατανομής Gumbel για όλες τις διάρκειες. Οπτικά, η καταλληλότητα της κατανομής διαπιστώνεται στο Σχ. 8.2 για τις μικρές διάρκειες βροχής (5 min - 1 h) και στο Σχ. 8.3 για τις μεγάλες διάρκειες βροχής (2 h - 24 h). Για την εμπειρική συνάρτηση κατανομής έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση Gringorten $F_i = (i - 0.44) / (n + 0.12)$ (βλ. Πίν. 5.7), ενώ η ανηγμένη μεταβλητή Gumbel είναι $k = -\ln(-\ln F)$.

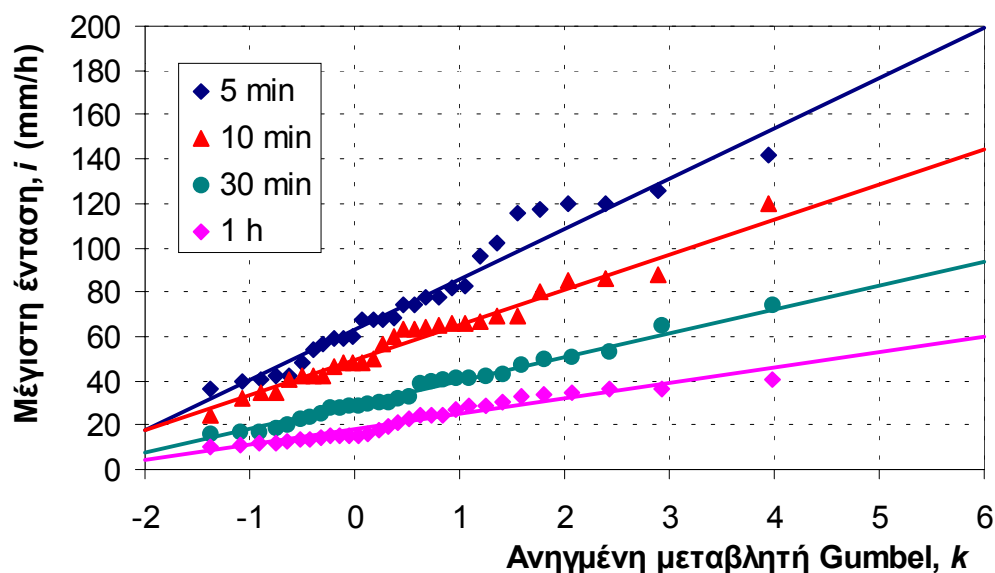
Έχοντας εκτιμήσει τις παραμέτρους των κατανομών Gumbel μπορούμε να υπολογίσουμε για καθεμιά από τις δεδομένες διάρκειες την μέγιστη ένταση που αντιστοιχεί σε κάποια περίοδο επαναφοράς T . Για το σκοπό αυτό εφαρμόζουμε την εξίσωση (6.36):

$$i = c - \ln[-\ln(1 - 1/T)] / \lambda = (1 / \lambda) \{ \psi - \ln[-\ln(1 - 1/T)] \}$$

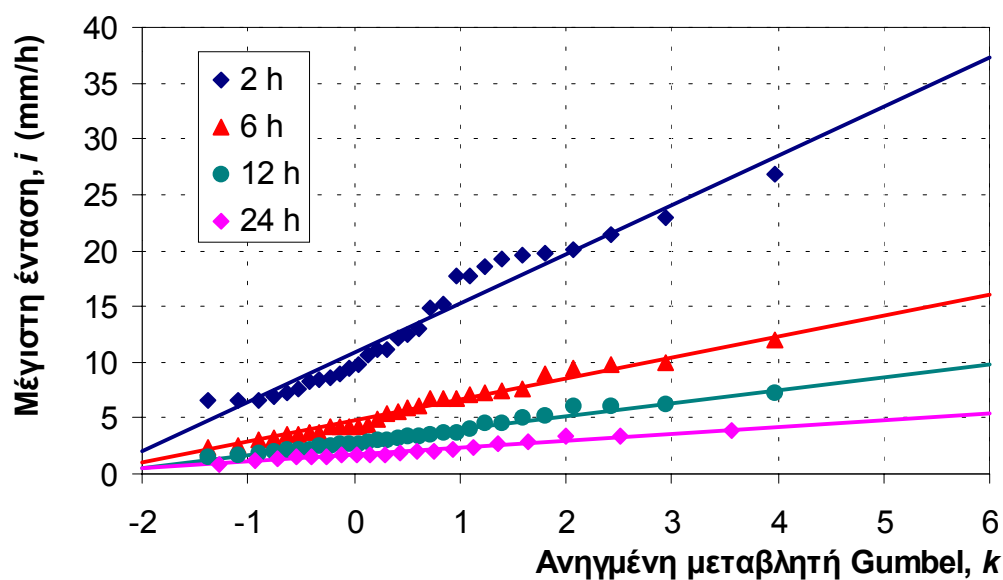
Για παράδειγμα, για $d = 5$ min και $T = 5$ έχουμε

$$i = (1 / 0.0440) \{ 2.776 - \ln[-\ln(1 - 1/5)] \} = 97.180 \text{ mm/h}$$

(Η τιμή αυτή προκύπτει και γραφικά από τη συνεχή καμπύλη του Σχ. 8.2 για $k = -\ln[-\ln(1-1/5)] = 1.5$.) Με τον ίδιο τρόπο έχουν υπολογιστεί και δίνονται στον Πίν. 8.4 οι τιμές της μέγιστης έντασης βροχής για όλες τις δεδομένες διάρκειες και για $T = 5$ και 50.



Σχ. 8.2 Εμπειρικές και θεωρητικές (Gumbel) συναρτήσεις κατανομής των μέγιστων εντάσεων βροχής στο Ελληνικό για διάρκειες βροχής από 5 min μέχρι 1 h.



Σχ. 8.3 Εμπειρικές και θεωρητικές (Gumbel) συναρτήσεις κατανομής των μέγιστων εντάσεων βροχής στο Ελληνικό για διάρκειες βροχής από 2 h μέχρι 1 h.

Πίν. 8.4 Μέγιστες εντάσεις βροχής κατά Gumbel στο σταθμό Ελληνικό για περιόδους επαναφοράς $T = 5$ και 50.

Περίοδος επαναφ.	Διάρκεια $d =$							
	5 min	10 min	30 min	1 h	2 h	6 h	12 h	24 h
5	97.180	73.026	45.151	28.446	17.399	7.575	4.573	2.624
50	151.771	111.093	71.147	45.104	28.004	12.133	7.316	4.096

Στο Σχ. 8.4 έχουμε απεικονίσει σε λογαριθμικό διάγραμμα, με οριζόντιο άξονα τη διάρκεια d και κατακόρυφο τη μέγιστη ένταση i , τα σημεία που προκύπτουν από τον Πίν. 8.4. Ειδικότερα, με τετράγωνα έχουμε συμβολίσει τα σημεία που αντιστοιχούν σε περίοδο επαναφοράς $T = 5$ και με κύκλους τα σημεία που αντιστοιχούν σε περίοδο επαναφοράς $T = 50$. Παρατηρούμε ότι και οι δύο σημειοσειρές διατάσσονται σχεδόν ευθύγραμμα στο λογαριθμικό διάγραμμα, πράγμα που μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $i(d)$ με μια εξίσωση δύναμης, δηλαδή να υιοθετήσουμε την εξίσωση (8.7). Όπως έχουμε δει και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η εξίσωση δύναμης απεικονίζεται ως ευθεία σε λογαριθμικό διάγραμμα. Η εκτίμηση των παραμέτρων της (8.7) γίνεται με τον τρόπο που έχει περιγραφεί στο εδάφιο 7.3.3. Συγκεκριμένα λογαριθμίζουμε τις τιμές της διάρκειας και έντασης του Πίν. 8.4 και κατά τα γνωστά (βλ. και Εφαρμογή 7.3.3) για $T = 5$ βρίσκουμε την εξίσωση

$$\ln i = 3.182 - 0.649 \ln d$$

με αρκετά υψηλό συντελεστή συσχέτισης: $r = -0.9938$. Απολογαριθμίζοντας, βρίσκουμε την τελική όμβρια καμπύλη

$$i = 24.09 / d^{0.649} \quad (i \text{ σε mm/h}, d \text{ σε h}), \quad T = 5 \quad (\alpha)$$

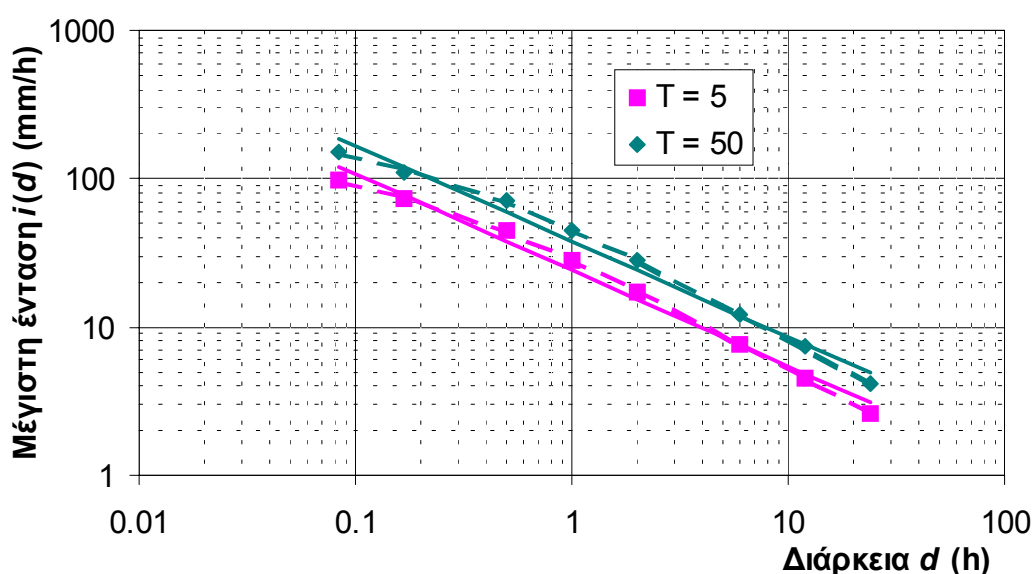
Αντίστοιχα, για $T = 50$ βρίσκουμε την εξίσωση $\ln i = 3.635 - 0.644 \ln d$, με συντελεστή συσχέτισης $r = -0.9931$. Απολογαριθμίζοντας, βρίσκουμε την τελική όμβρια καμπύλη

$$i = 37.91 / d^{0.644} \quad (i \text{ σε mm/h}, d \text{ σε h}), \quad T = 50 \quad (\beta)$$

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις έχουν παρασταθεί στο λογαριθμικό διάγραμμα του Σχ. 8.4 με συνεχείς ευθείες καθώς στο Σχ. 8.5 (γραμμικοί άξονες) με συνεχείς καμπύλες.

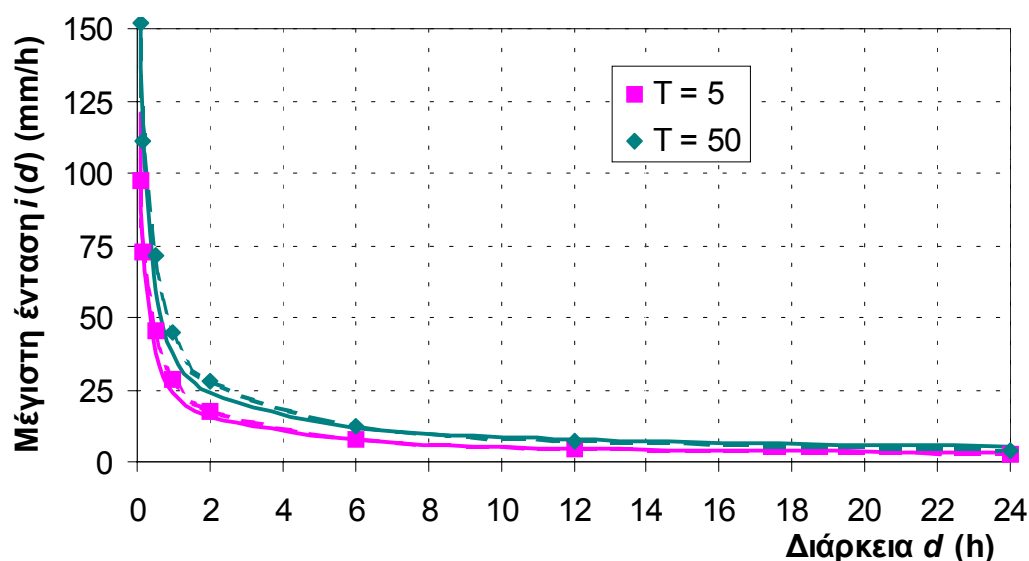
Μια σημαντική παρατήρηση στα παραπάνω αποτελέσματα είναι η ακόλουθη: Οι εκθέτες των δύο εξισώσεων ελαφρώς διαφέρουν, πράγμα που σημαίνει ότι οι κλίσεις των δύο ευθειών στο Σχ. 8.4 είναι διαφορετικές, ή αλλιώς, οι δύο ευθείες δεν είναι παράλληλες. Αυτό θεωρητικά δεν είναι σωστό, γιατί το σημείο τομής (i_τ, d_τ) των δύο

ευθειών θα αντιστοιχεί σε δύο περιόδους επαναφοράς, $T = 5$ και $T = 50$, πράγμα το οποίο είναι άτοπο. Ωστόσο, στην πράξη αυτό δεν έχει και τόσο μεγάλη σημασία αν οι εξισώσεις χρησιμοποιούνται για διάρκειες μέσα στο εύρος διακύμανσης των διαρκειών για τις οποίες υπάρχουν δεδομένα (στο συγκεκριμένο παράδειγμα 5 min - 24 h). Πράγματι, εύκολα μπορεί να βρεθεί ότι το σημείο τομής των δύο παραπάνω εξισώσεων αντιστοιχεί σε διάρκεια $d_\tau = 2.2 \times 10^{-43}$ h, δηλαδή πρακτικώς μηδενική. Παρόλα αυτά, η μαθηματική συνέπεια επιβάλλει την ταύτιση των δύο εκθετών, πράγμα που μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με άλλες μεθόδους κατάρτισης όμβριων καμπυλών που αναπτύσσονται στη συνέχεια.



Σχ. 8.4 Όμβριες καμπύλες για περιόδους επαναφοράς $T = 5$ και 50 στο Ελληνικό, υπολογισμένες από ξεχωριστές εξισώσεις για κάθε περίοδο επαναφοράς (λογαριθμικοί άξονες). Με συνεχείς και διακεκομμένες γραμμές απεικονίζονται οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε $\theta = 0$ και $\theta \neq 0$, αντίστοιχα.

Στο Σχ. 8.4 είναι εμφανές ότι η προσαρμογή των ευθειών στα σημεία δίνει κάποιες αποκλίσεις που δεν είναι αμελητέες. Πράγματι, η παραπάνω εξίσωση όμβριας καμπύλης (β) για $T = 50$ και για $d = 5$ min δίνει ένταση $i = 188.00$ mm/h ενώ η αντίστοιχη τιμή του Πίν. 8.4 είναι 151.77 mm/h. Για να αποφύγουμε αυτές τις αποκλίσεις είναι προτιμότερο να υιοθετήσουμε για την περιγραφή των όμβριων καμπυλών την γενικότερη εξίσωση (8.6) αντί της (8.7), δεδομένου ότι η πρώτη επιτρέπει την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα, αφού περιέχει μια επιπλέον παράμετρο. Βεβαίως, αυτό ενέχει κάπως μεγαλύτερη υπολογιστική δυσκολία, επειδή η (8.6) δεν γραμμικοποιείται και ως προς τις τρεις παραμέτρους της.



Σχ. 8.5 Όμβριες καμπύλες για περιόδους επαναφοράς $T = 5$ και 50 στο Ελληνικό, υπολογισμένες από ξεχωριστές εξισώσεις για κάθε περίοδο επαναφοράς (γραμμικοί άξονες). Με συνεχείς και διακεκομμένες γραμμές απεικονίζονται οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε $\theta = 0$ και $\theta \neq 0$, αντίστοιχα.

Η μέθοδος που προτείνουμε εδώ για την εκτίμηση των παραμέτρων της (8.6) είναι η μερική γραμμικοποίηση με λογαρίθμησή της, που δίνει

$$\ln i = \ln \omega - \eta \ln (d + \theta) \quad (\gamma)$$

Ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η απόλυτη τιμή του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των $\ln i$ και $\ln (d + \theta)$. Η αριθμητική ανάλυση βοηθά στην επίτευξη αυτού του στόχου. Επίσης τα σύγχρονα κοινά υπολογιστικά πακέτα (π.χ. λογιστικά φύλλα) αυτοματοποιούν τη σχετική υπολογιστική διαδικασία. Πάντως η επαναληπτική διαδικασία μπορεί να γίνει και με απλές δοκιμές, υποθέτοντας διάφορες τιμές της παραμέτρου θ και ελέγχοντας το συντελεστή συσχέτισης. Οι επαναλήψεις συνεχίζονται μέχρι να βρεθεί η μέγιστη απόλυτη τιμή του συντελεστή συσχέτισης.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι τελικές όμβριες καμπύλες της μορφής (8.6) που μεγιστοποιούν το συντελεστή συσχέτισης είναι οι ακόλουθες:

$$i = 32.03 / (d + 0.166)^{0.785} \quad (i \text{ σε mm/h, } d \text{ σε h), \quad T = 5 \quad (\delta)$$

$$i = 51.68 / (d + 0.185)^{0.791} \quad (i \text{ σε mm/h, } d \text{ σε h), \quad T = 5 \quad (\epsilon)$$

με αντίστοιχους συντελεστές συσχέτισης -0.99988 και -0.99974 . Οι εξισώσεις αυτές έχουν παρασταθεί με διακεκομμένες γραμμές στα Σχ. 8.4 και Σχ. 8.5, όπου είναι εμφανής η καλύτερη (σε σχέση με τις (α) και (β)) προσαρμογή τους στα αρχικά σημεία.

8.2.2 Ενιαία ημιαμπειρική έκφραση όμβριων καμπυλών

Όπως συζητήσαμε και στην προηγούμενη εφαρμογή η παράμετρος η της εξίσωσης (8.7) θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη της περιόδου επαναφοράς. Διαφορετικά θα ήταν δυνατό για δεδομένη διάρκεια d και για δύο διαφορετικές περιόδους επαναφοράς να προκύψει η ίδια τιμή της έντασης βροχής i , οπότε δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία έντασης και περιόδου επαναφοράς. Στις εκφράσεις (8.6) και (8.8) δεν είναι κατ' αρχήν απαραίτητο οι παράμετροι θ και η να έχουν σταθερές τιμές, ανεξάρτητες της περιόδου επαναφοράς (δεν προκύπτει για κάθε συνδυασμό παραμέτρων η παραπάνω άτοπη συνέπεια). Ωστόσο, και πάλι η υιοθέτηση σταθερών τιμών (ανεξάρτητων από την περίοδο επαναφοράς) των παραμέτρων αυτών διευκολύνει την ανάλυση και αποκλείει την πιθανότητα υιοθέτησης εσφαλμένου συνδυασμού παραμέτρων (δηλαδή, τέτοιου που να καταργεί την αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία έντασης και περιόδου επαναφοράς).

Καταλήγουμε λοιπόν στην απλουστευτική παραδοχή, σύμφωνα με την οποία μόνο ο αριθμητής ω στις εκφράσεις (8.6) - (8.8) επιτρέπεται να εξαρτάται από την περίοδο επαναφοράς T , οπότε οδηγούμαστε στην παρακάτω έκφραση όμβριων καμπυλών (βλ. και Koutsoyiannis, 1994)

$$i = \frac{a(T)}{b(d)} \quad (8.10)$$

όπου οι $a(T)$ και $b(d)$ είναι συναρτήσεις της περιόδου επαναφοράς και διάρκειας, αντίστοιχα. Σε αντιστοιχία με τις (8.6) - (8.8) η $b(d)$ παίρνει μια από τις ακόλουθες μορφές:

$$b(d) = (d + \theta)^n \quad b(d) = d^n \quad b(d) = d + \theta \quad (8.11)$$

Κατά μία εμπειρική θεώρηση, η έκφραση της συνάρτησης $a(T)$ μπορεί να πάρει μια από τις ακόλουθες μορφές:

$$a(T) = \lambda T^\kappa \quad a(T) = \frac{1}{\lambda} (\psi + \ln T) \quad (8.12)$$

Συνδυάζοντας την πρώτη από τις (8.11) με την πρώτη από τις (8.14), παίρνουμε την συχνότερα χρησιμοποιούμενη ενιαία ημιεμπειρική έκφραση όμβριων καμπυλών

$$i = \frac{\lambda T^\kappa}{(d + \theta)^\eta} \quad (8.13)$$

με την οποία θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα στο εδάφιο αυτό. Η αντιμετώπιση ενιαίων εκφράσεων που προκύπτουν με βάση τη δεύτερη από τις εξισώσεις (8.12) είναι πιο πολύπλοκη.

Όπως και στην περίπτωση των μεμονωμένων καμπυλών για κάθε διάρκεια (εδάφιο 8.2.1), και εδώ η μέθοδος περιλαμβάνει δύο ξεχωριστά στάδια. Το πρώτο στάδιο αντιστοιχεί στην προσαρμογή μιας συνάρτησης κατανομής και το δεύτερο στην εκτίμηση των παραμέτρων της (8.13).

Αναλυτικότερα, στο πρώτο στάδιο επιλέγεται, προσαρμόζεται και ελέγχεται με βάση τις γνωστές μεθόδους της στατιστικής, μια κατάλληλη συνάρτηση κατανομής (π.χ. Gumbel ή Log Pearson III), ξεχωριστά για κάθε δείγμα δεδομένης διάρκειας. Στο στάδιο αυτό δεν γίνεται συσχέτισμός με τη διάρκεια βροχής ούτε προσπάθεια ενοποιημένης αντιμετώπισης των επιμέρους δειγμάτων. Κατά συνέπεια στο στάδιο αυτό ακολουθούμε την τυπική μεθοδολογία στατιστικής ανάλυσης μιας μεταβλητής (όπως και στην περίπτωση των μεμονωμένων καμπυλών του εδαφίου 8.2.1).

Στο δεύτερο στάδιο εφαρμόζουμε τη μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων για την εκτίμηση των παραμέτρων της, χρησιμοποιώντας όχι τις αρχικές μετρημένες εντάσεις βροχής, αλλά αυτές που προκύπτουν από τις συναρτήσεις κατανομής του πρώτου σταδίου για ένα καθορισμένο διάστημα μεταβολής της περιόδου επαναφοράς. Η μέθοδος ελάχιστων τετραγώνων είναι εύκολο να εφαρμοστεί δεδομένου ότι η (8.13) γραμμικοποιείται με λογαρίθμηση και γίνεται

$$\ln i = \ln \lambda + \kappa \ln T - \eta \ln(d + \theta) \quad (8.14)$$

πράγμα που επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό των παραμέτρων λ , κ και η , ενώ προϋποθέτει επαναλήψεις ως προς την παράμετρο θ .

Συγκεκριμένα η εφαρμογή του δεύτερου σταδίου περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Επιλέγουμε κάποιες περιόδους επαναφοράς μέσα στο επιθυμητό εύρος μεταβολής.
2. Από τις συναρτήσεις κατανομής του πρώτου σταδίου υπολογίζουμε για κάθε δεδομένη διάρκεια d_j και για κάθε τιμή της περιόδου επαναφοράς T (του βήματος 1) τη θεωρητική τιμή της έντασης βροχής i .
3. Υποθέτουμε μια δοκιμαστική τιμή της παραμέτρου θ .
4. Προσαρμόζουμε τη σχέση (8.14) στις θεωρητικές εντάσεις βροχής που προέκυψαν από το βήμα 3, υπολογίζοντας έτσι τις τιμές των παραμέτρων λ , κ και η .
5. Υπολογίζουμε το συντελεστή προσδιορισμού που αντιστοιχεί στην (8.14)
6. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 3 έως 5 με διαφορετικές τιμές της παραμέτρου θ μέχρι να επιτύχουμε τη μέγιστη τιμή του συντελεστή προσδιορισμού.

Η μέθοδος της ενιαίας ημιεμπειρικής έκφρασης των όμβριων καμπυλών έχει το πλεονέκτημα της διατύπωσης της σχέσης μεταξύ της έντασης, της διάρκειας και της περιόδου επαναφοράς της βροχόπτωσης με μια μοναδική εξίσωση. Ωστόσο, έχει ένα σοβαρό μειονέκτημα: την υποκατάσταση της πραγματικής συνάρτησης κατανομής της έντασης με μια εμπειρική εξίσωση δύναμης. Για το λόγο αυτό οι παράμετροι κ και λ αυτής της εξίσωσης δεν μπορεί να θεωρηθούν σταθερές, αλλά εξαρτώνται από το διάστημα μεταβολής της περιόδου επαναφοράς T (βλ. και εφαρμογή που ακολουθεί). Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, υπάρχουν τρόποι να αποφύγουμε αυτό το μειονέκτημα και να οδηγηθούμε σε ενιαία έκφραση των όμβριων καμπυλών με πιο συνεπή τρόπο και με σταθερές παραμέτρους.

Εφαρμογή 8.2.2

Να καταρτιστεί ενιαία έκφραση όμβριων καμπυλών της μορφής (8.13) με βάση τα δεδομένα του σταθμού Ελληνικό, που δίνονται στον Πίν. 8.2 (βλ. Εφαρμογή 8.2.1).

Στην Εφαρμογή 8.2.1 έχουμε δει ότι οι μέγιστες εντάσεις ακολουθούν κατανομές Gumbel και έχουμε εξαγάγει τις παραμέτρους λ και ψ αυτών των κατανομών για τις διάφορες διάρκειες στον Πίν. 8.3. Έτσι, για κάθε διάρκεια και για δεδομένη περίοδο επαναφοράς T μπορούμε να βρούμε τη μέγιστη ένταση από την εξίσωση

$$i = (1/\lambda) \{ \psi - \ln[-\ln(1 - 1/T)] \}$$

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε για το διάστημα διακύμανσης της περιόδου επαναφοράς από 2 μέχρι 50 χρόνια. Διαλέγουμε στο διάστημα αυτό τις χαρακτηριστικές τιμές $T = 2, 5, 10, 20$ και 50 . Για κάθε συνδυασμό αυτών των τιμών και των δεδομένων διάρκειών υπολογίζουμε από την πιο πάνω εξίσωση την ένταση i και δίνουμε στον Πίν. 8.5 το λογάριθμό της. Στον ίδιο πίνακα δίνουμε και τους λογαρίθμους των μεγεθών T και $d + \theta$, υποθέτοντας κατ' αρχήν ότι $\theta = 0$. Με οδηγό την εξίσωση (8.14), κάνουμε πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση ανάμεσα στα μεγέθη

$$y = \ln i, x_1 = \ln T, x_2 = \ln(d + \theta)$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο που περιγράφεται στο εδάφιο 7.3.1. Προκύπτει τελικά η ακόλουθη εξίσωση

$$i = 15.755 T^{0.237} / d^{0.648} \quad (i \text{ σε mm/h, } d \text{ σε h}) \quad (\alpha)$$

με συντελεστή προσδιορισμού $r^2 = 0.9865$. Για σύγκριση με τις εξισώσεις που έχουν εξαχθεί στην Εφαρμογή 8.2.1 θέτουμε στην παραπάνω $T = 2$ και $T = 50$, οπότε προκύπτει

$$i = 23.06 / d^{0.648} \quad (i \text{ σε mm/h, } d \text{ σε h}), \quad T = 5 \quad (\beta)$$

$$i = 39.79 / d^{0.648} \quad (i \text{ σε mm/h, } d \text{ σε h}), \quad T = 50 \quad (\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις, οι οποίες παριστάνονται με συνεχείς γραμμές στο Σχ. 8.6, δεν απέχουν από αυτές της Εφαρμογής 8.2.1.

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για διάφορες δοκιμαστικές δοκιμές του θ , κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή στη στήλη $\ln(d + \theta)$ του Πίν. 8.5 και υπολογίζοντας εκ νέου τους συντελεστές της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης, καθώς και το συντελεστή προσδιορισμού. Καταλήγουμε ότι τη μέγιστη τιμή του συντελεστή προσδιορισμού ($r^2 = 0.9984$) δίνει η τιμή $\theta = 0.170$. Η αντίστοιχη ενιαία έκφραση είναι η ακόλουθη:

Πίν. 8.5 Βοηθητικός πίνακας υπολογισμών για την πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση των λογαρίθμων των μεγεθών T , $d + \theta$ και i με στόχο την εξαγωγή ενιαίας έκφρασης όμβριων καμπυλών ($2 \leq T \leq 50$, $\theta = 0$).

T	d	$\ln T$	$\ln (d + \theta)$	$\ln i$	T	d	$\ln T$	$\ln (d + \theta)$	$\ln i$	
2	5/60	0.693	-2.485	4.269	10	2	2.303	0.693	3.031	
	1/4	0.693	-1.792	4.008		6	2.303	1.792	2.197	
	1/2	0.693	-0.693	3.493		12	2.303	2.485	1.692	
	1	0.693	0.000	3.025		24	2.303	3.178	1.126	
	2	0.693	0.693	2.517		20	5/60	2.996	-2.485	4.872
	6	0.693	1.792	1.691			1/4	2.996	-1.792	4.568
	12	0.693	2.485	1.187			1/2	2.996	-0.693	4.112
	24	0.693	3.178	0.657			1	2.996	0.000	3.654
5	5/60	1.609	-2.485	4.577	2	2.996	0.693	3.173		
	1/4	1.609	-1.792	4.291	6	2.996	1.792	2.338		
	1/2	1.609	-0.693	3.810	12	2.996	2.485	1.833		
	1	1.609	0.000	3.348	24	2.996	3.178	1.260		
	2	1.609	0.693	2.856	50	5/60	3.912	-2.485	5.022	
	6	1.609	1.792	2.025		1/4	3.912	-1.792	4.710	
	12	1.609	2.485	1.520		1/2	3.912	-0.693	4.265	
	24	1.609	3.178	0.965		1	3.912	0.000	3.809	
10	5/60	2.303	-2.485	4.738	2	3.912	0.693	3.332		
	1/4	2.303	-1.792	4.442	6	3.912	1.792	2.496		
	1/2	2.303	-0.693	3.975	12	3.912	2.485	1.990		
	1	2.303	0.000	3.516	24	3.912	3.178	1.410		

$$i = 21.064 T^{0.237} / (d + 0.170)^{0.785} \quad (i \text{ σε mm/h, } d \text{ σε h}) \quad (\delta)$$

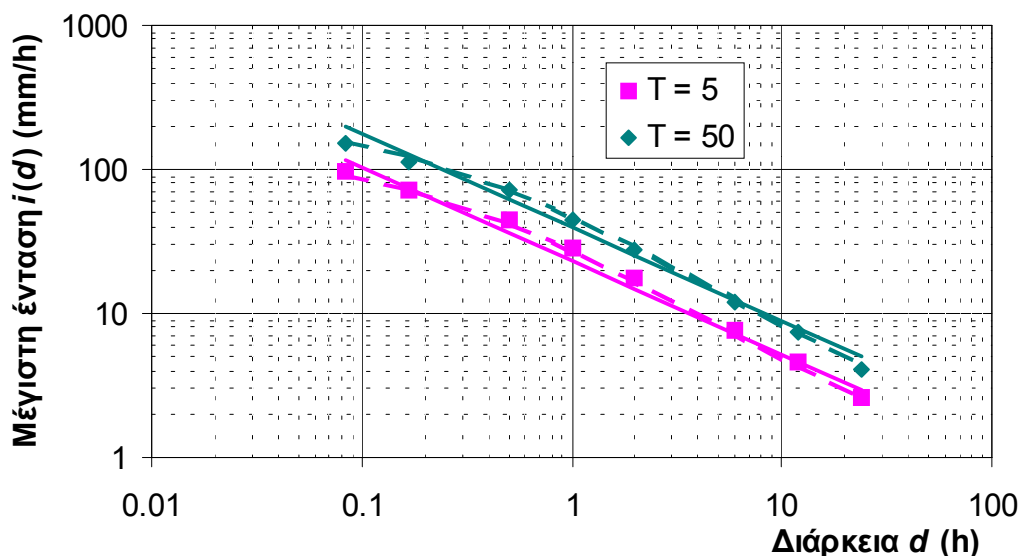
Η παραπάνω για $T = 2$ και $T = 50$ δίνει

$$i = 30.83 / (d + 0.170)^{0.785} \quad (i \text{ σε mm/h, } d \text{ σε h}), \quad T = 5 \quad (\epsilon)$$

$$i = 53.20 / (d + 0.170)^{0.785} \quad (i \text{ σε mm/h, } d \text{ σε h}), \quad T = 50 \quad (\sigma\tau)$$

Και πάλι διαπιστώνουμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις, οι οποίες παριστάνονται με διακεκομμένες γραμμές στο Σχ. 8.6, δεν απέχουν από αυτές της Εφαρμογής 8.2.1.

Για λόγους διερεύνησης έχουμε υπολογίσει ενιαίες ημιεμπειρικές εκφράσεις της μορφής (8.13) και για ένα άλλο διάστημα μεταβολής της περιόδου επαναφοράς: το διάστημα $100 \leq T \leq 10\,000$ με χαρακτηριστικές τιμές $T = 100, 200, 500, 1000, 2\,000, 5\,000$ και $10\,000$. Για $\theta = 0$ προκύπτει τελικά η εξίσωση



Σχ. 8.6 Όμβριες καμπύλες για περιόδους επαναφοράς $T = 5$ και 50 στο Ελληνικό, υπολογισμένες από ενιαία ημιεμπειρική έκφραση (8.13) (λογαριθμικοί άξονες). Με συνεχείς και διακεκομμένες γραμμές απεικονίζονται οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε $\theta = 0$ και $\theta \neq 0$, αντίστοιχα.

$$i = 26.15 T^{0.106} / d^{0.642} \quad (i \text{ σε mm/h, } d \text{ σε h}) \quad (\zeta)$$

με συντελεστή προσδιορισμού $r^2 = 0.9850$. Το μέγιστο συντελεστή προσδιορισμού ($r^2 = 0.9992$) δίνει η τιμή $\theta = 0.188$, με τελική έκφραση

$$i = 36.14 T^{0.106} / (d + 0.196)^{0.794} \quad (i \text{ σε mm/h, } d \text{ σε h}) \quad (\eta)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (ζ) και (η) διαφέρουν σημαντικά από τις αντίστοιχές τους (α) και (δ), ιδιαίτερα ως προς τους συντελεστές κ και λ . Αυτό είναι, όπως έχουμε πει και παραπάνω, ένα σοβαρό μειονέκτημα της μεθόδου.

8.3 Συνεπείς μέθοδοι εξαγωγής όμβριων καμπυλών

Η γενική σχέση (8.10) που διατυπώθηκε στο προηγούμενο εδάφιο αποτελεί χωρίς αμφιβολία μια ορθή βάση για την έκφραση των όμβριων καμπυλών. Ωστόσο, όπως είδαμε, στη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε παραπάνω τέθηκαν ορισμένες παραδοχές, οι οποίες αποτελούν ασυνέπειες ως προς την φύση του προβλήματος που μελετάμε. Η πρώτη ασυνέ-

πεια είναι η υιοθέτηση μιας εμπειρικής έκφρασης της συνάρτησης $a(T)$, ενώ η έκφραση κανονικά συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής της μέγιστης έντασης βροχής. Επακόλουθη αυτής της ασυνέπειας είναι η μη σταθερότητα των παραμέτρων της ενιαίας έκφρασης. Η δεύτερη ασυνέπεια συνδέεται με την εκτίμηση των παραμέτρων με πολλαπλή παλινδρόμηση, στην οποία συσχετίζεται το μέγεθος i , το οποίο αντιστοιχεί σε μια τυχαία μεταβλητή, με τα μεγέθη d και T , τα οποία δεν αποτελούν τυχαίες μεταβλητές. Ασφαλώς, αυτού του είδους η συσχέτιση δεν έχει θεωρητική συνέπεια. Στην παρούσα ενότητα θα δούμε ότι τα παραπάνω προβλήματα μπορούν να παρακαμφθούν χρησιμοποιώντας μια διαφορετική προσέγγιση, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε ενιαία σχέση με σταθερές παραμέτρους. Η προσέγγιση αυτή αρχικά θεμελιώθηκε από τον Koutsoyiannis (1993) και διερευνήθηκε από τους Δέα (1994), Κοζώνη (1995) και Κουτσογιάννη και Μανέτα (1995).

Από τη γενική σχέση (8.10) συνάγουμε εύκολα ότι η συνάρτηση $a(T)$ είναι πρακτικώς η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $Y = I b(d)$, δηλαδή $a(T) \equiv y_T$, όπου y_T είναι το ποσοστημόριο της κατανομής της Y που αντιστοιχεί σε περίοδο επαναφοράς T . Κατά συνέπεια η $a(T)$ εξαρτάται άμεσα από τον τύπο της συνάρτησης κατανομής που υιοθετείται για την ένταση βροχής I . Αφού η διάρκεια d στην ανάλυσή μας δεν αποτελεί τυχαία μεταβλητή, αλλά παράμετρο, το μέγεθος $b(d)$ δεν επηρεάζει τον τύπο της συνάρτησης κατανομής, παρά μόνο την παράμετρο κλίμακας της συνάρτησης κατανομής. Στην επόμενη ενότητα εξετάζονται οι συνηθέστεροι τύποι συνάρτησης κατανομής που είναι κατάλληλες για την πιθανοτική περιγραφή της έντασης I και υπολογίζεται για κάθε τύπο η αντίστοιχη έκφραση της συνάρτησης $a(T)$.

8.3.1 Εναλλακτικοί τύποι συνάρτησης κατανομής

Κατανομή Gumbel

Από τη φύση της η κατανομή μεγίστων τύπου I (Gumbel) είναι κατάλληλη για την περιγραφή μεγίστων μεγεθών, γι' αυτό και είναι η πιο διαδεδομένη κατανομή για τη μοντελοποίηση των μεγίστων εντάσεων βροχής. Η μαθηματική της έκφραση είναι

$$F_X(x) = \exp(-e^{-\lambda x + \psi}) \quad (8.15)$$

όπου λ και ψ είναι οι παράμετροι κλίμακας και θέσης, αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι η εξίσωση (8.15) έχει γραφεί ελαφρώς διαφοροποιημένη από την καθιερωμένη της μορφή (βλ. Πίν. 6.9) και συγκεκριμένα στον ανώτερο εκθέτη αντί της παράστασης $-\lambda(x - c)$ έχει γραφεί $-\lambda x + \psi$, όπου $\psi = \lambda c$. Η μεταβλητή X συμβολίζει είτε την ένταση βροχής I είτε το γινόμενο $Y = I b(d)$ (το μόνο που αλλάζει είναι η τιμή της παραμέτρου κλίμακας). Στην τελευταία περίπτωση, παίρνοντας υπόψη ότι

$$F_Y(y) = F_I(i) = 1 - \frac{1}{T} \quad (8.16)$$

και επιλύοντας την (8.15) ως προς y , παίρνουμε

$$y_T \equiv a(T) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \psi - \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right] \right\} \quad (8.17)$$

όπου οι παράμετροι λ και ψ αναφέρονται στη μεταβλητή Y .

Για την εκτίμηση των παραμέτρων λ και ψ από οποιοδήποτε δείγμα μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι που συζητούνται στο εδάφιο 6.3.1. Για παράδειγμα, η μέθοδος ροπών δίνει

$$\lambda = 1 / (0.78 s_X) \quad \psi = \lambda \bar{x} - 0.577 \quad (8.18)$$

Κατανομή γάμα

Μια άλλη κατανομή που έχει χρησιμοποιηθεί, αν και όχι τόσο συχνά, για την περιγραφή μέγιστων εντάσεων βροχής είναι η κατανομή γάμα (Pearson III) δύο παραμέτρων, η οποία περιγράφεται από τις εξισώσεις του Πίν. 6.6. Λόγω της πολύπλοκης αναλυτικής έκφρασης της συνάρτησης κατανομής δεν είναι κατ' αρχήν δυνατή η ρητή έκφραση της συνάρτησης $a(T)$ για τη συγκεκριμένη κατανομή. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση που έχει αναπτυχθεί στο Παράρτημα 6.B μπορούμε να γράψουμε

$$a(T) \approx \frac{\mu}{\lambda \alpha} \left(1 - \frac{1}{T} \right)^\alpha + \frac{\nu}{\lambda \beta} \left[\xi - \left(\frac{1}{T} \right)^\beta \right] \quad \kappa \neq 1 \quad (8.19)$$

Για την περίπτωση που $\kappa = 1$, η κατανομή μεταπίπτει στην απλούστερη εκθετική κατανομή (βλ. αντίστοιχο εδάφιο πιο κάτω). Στην παραπάνω

εξίσωση, το λ είναι η παράμετρος κλίμακας της κατανομής, ενώ τα μ , ν , α , β και ξ είναι σταθεροί συντελεστές, οι τιμές των οποίων εξαρτώνται από την παράμετρο σχήματος κ της κατανομής και δίνονται από τις εξισώσεις (6.65)-(6.69). Η απλούστερη μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων κ και λ της κατανομής γάμα από το δείγμα είναι η μέθοδος των ροπών (εξισώσεις (6.21)).

Κατανομή Log Pearson III

Μια άλλη κατανομή που έχει χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή μέγιστων εντάσεων βροχής, ιδίως όταν εμφανίζονται πολύ υψηλές εντάσεις για μεγάλες περιόδους επαναφοράς, είναι η κατανομή Log Pearson III, οι εξισώσεις της οποίας δίνονται στον Πίν. 6.8. Η κατανομή διαθέτει τρεις παραμέτρους: την παράμετρο κλίμακας c , και τις παραμέτρους σχήματος κ και λ . Λόγω της πολύπλοκης αναλυτικής έκφρασης της συνάρτησης κατανομής δεν είναι κατ' αρχήν δυνατή η ρητή έκφραση της συνάρτησης $a(T)$ για τη συγκεκριμένη κατανομή. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας την ίδια προσέγγιση όπως στην κατανομή γάμα μπορούμε να γράψουμε

$$a(T) = \exp \left\{ c + \frac{\mu}{\lambda\alpha} \left(1 - \frac{1}{T} \right)^\alpha + \frac{\nu}{\lambda\beta} \left[\xi - \left(\frac{1}{T} \right)^\beta \right] \right\} \kappa \neq 1 \quad (8.20)$$

Για την περίπτωση που $\kappa = 1$, η κατανομή μεταπίπτει στην απλούστερη κατανομή Pareto (βλ. αντίστοιχο εδάφιο πιο κάτω). Στην παραπάνω εξίσωση, τα μ , ν , α , β και ξ είναι σταθεροί συντελεστές, οι τιμές των οποίων εξαρτώνται από την παράμετρο σχήματος κ και δίνονται και πάλι από τις εξισώσεις (6.65)-(6.69). Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων κ , λ και c της κατανομής log Pearson III με την έμμεση μέθοδο των ροπών δίνονται από τις εξισώσεις (6.31).

Κατανομή Pareto

Η συνάρτηση κατανομής Pareto δύο παραμέτρων δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση, η οποία προκύπτει ως ειδική περίπτωση των εξισώσεων του Πίν. 6.15 (αν τεθεί στη θέση του κ το $-\kappa$ για θεωρηθεί $c = \lambda = \alpha / \kappa$)

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x} \right)^{1/\kappa} \quad x \geq \lambda \quad (8.21)$$

όπου κ και λ είναι οι παράμετροι σχήματος και κλίμακας, αντίστοιχα, της κατανομής. Άμεσα προκύπτει από την (8.21) ότι

$$a(T) = \lambda T^\kappa \quad (8.22)$$

Η μέθοδος ροπών δίνει τις ακόλουθες εκτιμήτριες των παραμέτρων κ και λ της κατανομής:

$$\kappa = \sqrt{\hat{C}_{v_x}^2 (1 + \hat{C}_{v_x}^2)} - \hat{C}_{v_x}^2 \quad \lambda = \bar{x} (1 - \kappa) \quad (8.23)$$

όπου \bar{x} και $\hat{C}_{v_x}^2$ η δειγματική μέση τιμή και ο δειγματικός συντελεστής μεταβλητότητας, αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (8.22) ταυτίζεται με την πρώτη από τις εμπειρικές εκφράσεις της (8.12), πράγμα που σημαίνει ότι η υιοθέτηση της εν λόγω εμπειρικής έκφρασης ουσιαστικά ισοδυναμεί με υιοθέτηση της κατανομής Pareto για τις μέγιστες εντάσεις βροχής. Ωστόσο, η εμπειρία δείχνει ότι η εν λόγω κατανομή δεν είναι κατάλληλη ως μοντέλο για τις μέγιστες εντάσεις βροχής. Η διαδεδομένη χρήση της (8.22) για την έκφραση όμβριων καμπυλών οφείλεται αποκλειστικά στην απλή μαθηματική έκφραση της και όχι στην καταλληλότητα της κατανομής Pareto. Έτσι δεν συνιστούμε την κατανομή Pareto για άμεση χρήση, παρά μόνο μετά από προσεκτική εξέταση. Παρόλα αυτά η εξίσωση (8.22) μπορεί να χρησιμοποιείται ως προσέγγιση άλλων συνθετότερων εκφράσεων για ένα ορισμένο διάστημα μεταβολής της περιόδου επαναφοράς T . Σε αυτή όμως την περίπτωση δεν είναι σκόπιμη η χρήση των εξισώσεων (8.23) για την εκτίμηση των παραμέτρων κ και λ , αλλά πρέπει να χρησιμοποιείται η ημιεμπειρική μέθοδος που περιγράφηκε στο εδάφιο 8.2.2.

Εκθετική κατανομή

Η εκθετική συνάρτηση κατανομής δύο παραμέτρων δίνεται από την εξίσωση

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x + \psi} \quad x \geq \psi / \lambda \quad (8.24)$$

όπου ψ και λ είναι οι παράμετροι θέσης και κλίμακας, αντίστοιχα, της κατανομής. Άμεσα προκύπτει από την (8.21) ότι

$$a(T) = \frac{1}{\lambda} (\psi + \ln T) \quad (8.25)$$

Ας σημειωθεί ότι η εξίσωση (8.24) έχει γραφεί ελαφρώς διαφοροποιημένη από την καθιερωμένη μορφή της (βλ. Πίν. 6.5) και συγκεκριμένα στον εκθέτη αντί της παράστασης $-\lambda(x - c)$ έχει γραφεί $-\lambda x + \psi$, όπου $\psi = \lambda c$. Η μέθοδος ροπών δίνει τις ακόλουθες εκτιμήτριες των παραμέτρων ψ και λ της κατανομής:

$$\lambda = \frac{1}{s_x} \quad \psi = \lambda \bar{x} - 1 \quad (8.26)$$

Όπως συμβαίνει και με την αντίστοιχη έκφραση της κατανομής Pareto, η λογαριθμική έκφραση (8.25) είναι επίσης πολύ συνηθισμένη για την έκφραση όμβριων καμπυλών (βλ. και εξίσωση (8.12)). Αυτό οφείλεται σε δύο λόγους: (α) στην απλή μαθηματική έκφραση της (8.25) και (β) στην καταλληλότητα της εκθετικής κατανομής για την περιγραφή των σειρών υπεράνω κατωφλίου (βλ. και εδάφιο 8.4.3).

Για την περίπτωση των σειρών ετήσιων μεγίστων ισχύουν και για την εκθετική κατανομή όσες παρατηρήσεις γράφονται για την κατανομή Pareto ως προς τις επιφυλάξεις άμεσης χρήσης της και ως προς τη σύσταση του έμμεσου τρόπου υπολογισμού των παραμέτρων της ψ και λ αντί της χρήσης των εξισώσεων (8.26). Ωστόσο, στην περίπτωση που οι μέγιστες εντάσεις βροχής ακολουθούν κατανομή Gumbel, μπορεί άμεσα να χρησιμοποιηθεί η έκφραση (8.25) ως προσέγγιση της (8.17) για μεγάλες τιμές της περιόδου επαναφοράς T , με παραμέτρους ψ και λ , όπως υπολογίζονται από την (8.18). Πράγματι, για μεγάλες τιμές του T (π.χ. $T \geq 50$) ισχύει $\ln [1 - (1/T)] = -(1/T) - (1/T)^2 - \dots \approx -(1/T)$, οπότε η (8.17) μεταπίπτει στην (8.25).

8.3.2 Εκτίμηση παραμέτρων

Το σύνολο των παραμέτρων των όμβριων καμπυλών περιλαμβάνει αφενός τις παραμέτρους θ και η της συνάρτησης διάρκειας $b(d)$, και αφετέρου τις παραμέτρους της κατανομής που χρησιμοποιείται, οι οποίες ταυτίζονται με τις παραμέτρους της συνάρτησης $a(T)$. Οι τελευταίες εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη κατανομή που κάθε φορά υιοθετείται. Στην ενότητα αυτή δίνουμε δύο διαφορετικές μεθόδους για την εκτίμηση

του συνόλου των παραμέτρων των όμβριων καμπυλών. Σε κάθε περίπτωση υποτίθεται ότι διατίθενται k δείγματα εντάσεων βροχής που το καθένα αναφέρεται σε ξεχωριστή διάρκεια βροχής. Συμβολίζουμε με d_1, \dots, d_k τις διάρκειες βροχής των δειγμάτων αυτών και με n_1, \dots, n_k τα αντίστοιχα μεγέθη τους.

Εκτίμηση με ενοποίηση διαρκειών

Η μέθοδος εκτίμησης με ενοποίηση διαρκειών υπολογίζει το σύνολο των παραμέτρων των όμβριων καμπυλών σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο υπολογίζονται οι παράμετροι της συνάρτησης $b(d)$ και στο δεύτερο αυτές της $a(T)$.

Από την (8.10) προκύπτει άμεσα ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = I b(d)$ έχει συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητη της διάρκειας d , η οποία καθορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση $a(T)$. Πρέπει λοιπόν οι παράμετροι θ και η να υπολογιστούν έτσι ώστε να ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη.

Αν υποθέσουμε ότι είναι γνωστές οι τιμές των παραμέτρων θ και η , τότε μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές $y_{jl} = i_{jl} b(d_j)$. Ενοποιώντας όλα τα δείγματα που περιέχουν τις τιμές y_{jl} αποκτούμε ένα συνολικό δείγμα μεγέθους

$$m = \sum_{j=1}^k n_j \quad (8.27)$$

Με βάση το δείγμα αυτό, καταταγμένο σε φθίνουσα σειρά, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε αύξοντες αριθμούς ή βαθμούς (ranks) r_{jl} σε όλες τις m τιμές y_{jl} (Για την περίπτωση που έχουμε ταυτόσημες τιμές y_{jl} χρησιμοποιούμε το μέσο όρο των αντίστοιχων βαθμών). Επανερχόμενοι στα αρχικά επιμέρους δείγματα των ξεχωριστών διαρκειών υπολογίζουμε για κάθε τιμή το μέσο βαθμό

$$\bar{r}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{l=1}^k r_{jl} \quad (8.28)$$

Αν όλα τα επιμέρους δείγματα έχουν την ίδια κατανομή τότε κάθε \bar{r}_j θα πρέπει να βρίσκεται πολύ κοντά στην τιμή $(m + 1) / 2$, διαφορετικά οι τιμές \bar{r}_j θα διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Αυτό μας οδηγεί στη χρήση της στατιστικής παραμέτρου Kruskal-Wallis (βλ. π.χ. Hirsch et al.,

1993, σ. 17.25), η οποία που συνδυάζει τους μέσους βαθμούς από όλα τα επιμέρους δείγματα:

$$h = \frac{12}{m(m+1)} \sum_{j=1}^k n_j \left(\bar{r}_j - \frac{m+1}{2} \right)^2 \quad (8.29)$$

Κατά συνέπεια το πρόβλημα του προσδιορισμού των παραμέτρων θ και η μπορεί να αναχθεί στην ελαχιστοποίηση της στατιστικής παραμέτρου h .^{*} Η αναλυτική ελαχιστοποίηση δεν είναι δυνατή και γι' αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί αριθμητική μέθοδος, η οποία ελέγχει με συστηματικό τρόπο δοκιμαστικές τιμές των παραμέτρων. Για παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτιστοποίηση η τυπική μέθοδος διχοτόμησης.

Για λόγους καλύτερης προσαρμογής της συνάρτησης $b(d)$ στην περιοχή των υψηλότερων εντάσεων, είναι σκόπιμο να μη χρησιμοποιείται σε αυτό το πρώτο στάδιο υπολογισμού το σύνολο των δεδομένων κάθε επιμέρους δείγματος, αλλά ένα μέρος αυτών των δεδομένων. Για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιείται μόνο το πρώτο 1/3 των δεδομένων από κάθε διάρκεια, αφού τα δεδομένα καταταγούν σε φθίνουσα σειρά.

Αφού προσδιοριστούν οι παράμετροι θ και η , είναι απλή υπόθεση η εκτίμηση των παραμέτρων της συνάρτησης $a(T)$, η οποία γίνεται στο δεύτερο στάδιο υπολογισμού. Συγκεκριμένα, οι τελευταίες παράμετροι εκτιμώνται με τις τυπικές μεθόδους της στατιστικής (π.χ. με τη μέθοδο ροπών), όπως αυτές περιγράφονται στο κεφάλαιο 6 και συνοψίζονται στην ενότητα 8.3.1, χρησιμοποιώντας το ενοποιημένο δείγμα που περιέ-

* Αν τα επιμέρους δείγματα είναι ανεξάρτητα, τότε η στατιστική συνάρτηση H , της οποίας η σημειακή εκτίμηση είναι η παραπάνω τιμή h , ακολουθεί κατανομή χ^2 με $k - 1$ βαθμούς ελευθερίας. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατός ο έλεγχος της υπόθεσης $H = 0$, που ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι όλα τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό. Ο έλεγχος αυτός είναι μη παραμετρικός με την έννοια ότι δεν κάνει καμιά υπόθεση σχετικά με την κατανομή που ακολουθεί η μεταβλητή Y . Ωστόσο, στην περίπτωση που εξετάζουμε τα επιμέρους δείγματα που αναφέρονται σε διαφορετικές διάρκειες δεν είναι ανεξάρτητα, αλλά, αντίθετα, ισχυρώς συσχετισμένα. Έτσι δεν είναι γνωστή η κατανομή της H και δεν είναι δυνατός ο στατιστικός έλεγχος. Πάντως, ο στόχος της ελαχιστοποίησης της τιμής h εξακολουθεί να έχει νόημα και σε αυτή την περίπτωση.

χει όλα τα m δεδομένα y_{jl} . Είναι βέβαια αυτονόητο ότι σε αυτό το δεύτερο στάδιο υπολογισμού πρέπει να χρησιμοποιείται το σύνολο των δεδομένων, και όχι ένα τμήμα τους.

Καθολική εκτίμηση

Η μέθοδος αυτή εκτιμά ταυτόχρονα το σύνολο των παραμέτρων των όμβριων καμπυλών ελαχιστοποιώντας το συνολικό σφάλμα των όμβριων καμπυλών σε σχέση με τα ιστορικά δεδομένα.

Προϋπόθεση για τη χρήση αυτής της μεθόδου είναι να αντιστοιχιστεί σε κάθε στοιχείο κάθε δείγματος μια συγκεκριμένη περίοδος επαναφοράς. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την εμπειρική συνάρτηση κατανομής, οπότε για το στοιχείο (ένταση βροχής) l του δείγματος j , διατεταγμένου σε φθίνουσα σειρά (συμβολικά i_{jl}), η περίοδος επαναφοράς είναι

$$T_{jl} = \frac{n_j + 0.12}{l - 0.44} \quad (8.30)$$

αν δεχτούμε την έκφραση κατά Gringorten, ή

$$T_{jl} = \frac{n_j + 0.2}{l - 0.4} \quad (8.31)$$

αν δεχτούμε την έκφραση κατά Cunnane. Κατά συνέπεια, κάθε στοιχείο δείγματος περιγράφεται από μια τριάδα αριθμών (i_{jl} , T_{jl} , d_j). Αν υποθέσουμε ότι είναι γνωστό το σύνολο των παραμέτρων των όμβριων καμπυλών, τότε από την (8.10) για δεδομένα T_{jl} και d_j υπολογίζεται η αντίστοιχη θεωρητική (μοντελοποιημένη) ένταση

$$\hat{i}_{jl} = \frac{a(T_{jl})}{b(d_j)} \quad (8.32)$$

και το αντίστοιχο σφάλμα

$$e_{jl} = \ln i_{jl} - \ln \hat{i}_{jl} = \ln \left(i_{jl} / \hat{i}_{jl} \right) \quad (8.33)$$

Στην τελευταία εξίσωση έχουμε χρησιμοποιήσει λογαριθμικό μετασχηματισμό των εντάσεων, προκειμένου να κρατήσουμε ισορροπία ανάμεσα στα σφάλματα των εντάσεων για μικρές και μεγάλες διάρκειες (δεδομένου ότι στις πρώτες οι εντάσεις είναι μεγαλύτερες). Το καθολικό μέσο σφάλμα υπολογίζεται από την ακόλουθη εξίσωση

$$E = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} \sum_{l=1}^{n_j} e_{jl}^2 \quad (8.34)$$

Η ελαχιστοποίηση του παραπάνω καθολικού σφάλματος αποτελεί το στόχο της διαδικασίας εκτίμησης παραμέτρων. Λόγω των πολύπλοκων εκφράσεων των όμβριων καμπυλών, ιδιαίτερα της συνάρτησης $a(T)$, δεν μπορεί να κατασκευαστεί γενική αναλυτική λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης. Για το λόγο αυτό πρέπει να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους. Μία τέτοια μέθοδος περιγράφεται από τους Κουτσογιάννη και Μανέτα (1995).

Εφαρμογή 8.3.2

Να εξαχθούν συνεπείς ενιαίες σχέσεις όμβριων καμπυλών για τα δεδομένα του σταθμού Ελληνικό (Πίν. 8.2) με τη μέθοδο της ενοποίησης διάρκειών.

Όπως εξηγήσαμε στην Εφαρμογή 8.2.1, για την πιθανοτική περιγραφή των εντάσεων υιοθετούμε την κατανομή Gumbel, οπότε η συνάρτηση $a(T)$ θα δίνεται από την (8.17), και για τη συνάρτηση διάρκειας υιοθετούμε την τριπαραμετρική εξίσωση $b(d) = (d + \theta)^n$. Κατά συνέπεια, η έκφραση των όμβριων καμπυλών θα είναι

$$i = \frac{a(T)}{b(d)} = \frac{\frac{1}{\lambda} \left\{ \psi - \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right] \right\}}{(d + \theta)^n} \quad (\alpha)$$

Ισοδύναμα, η έκφραση μπορεί να γραφεί

$$i = \frac{1}{l(d)} \left\{ \psi - \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right] \right\} \quad (\beta)$$

όπου

$$l(d) = \lambda (d + \theta)^n \quad (\gamma)$$

Ας σημειωθεί ότι η (β) ουσιαστικά ταυτίζεται με μία (αντίστροφη) συνάρτηση κατανομής Gumbel, στην οποία η παράμετρος κλίμακας είναι συνάρτηση της διάρκειας $l(d)$, ενώ η αδιάστατη παράμετρος ψ είναι σταθερή, ανεξάρτητη της διάρκειας. Το γεγονός ότι η παράμετρος ψ είναι σταθερή επιβεβαιώνεται (κατά προσέγγιση) και από τις μεμονωμένες συναρτήσεις κατανομής που προσαρμόσαμε στα επιμέρους δείγματα στην Εφαρμογή 8.2.1 (Πίν. 8.3).

Σύμφωνα με τη γενική μεθοδολογία που αναπτύχθηκε πιο πάνω, στο πρώτο στάδιο εκτιμάμε τις παραμέτρους θ και η . Όπως είδαμε, διαδικασία περιλαμβάνει επαναλήψεις, οι οποίες απαιτούν μακροσκελείς υπολογισμούς που για λόγους χώρου δεν μπορούν να παρατεθούν εδώ στο σύνολό τους. Θα παραθέσουμε μόνο τους υπολογισμούς της τελικής, βέλτιστης λύσης, $\theta = 0.189$ και $\eta = 0.796$.

Στον Πίν. 8.6 έχουν υπολογιστεί οι τιμές $y = i b(d)$ για κάθε διάρκεια, όπου οι τιμές i έχουν ληφθεί από τον Πίν. 8.2 και οι τιμές $b(d)$ είναι ίσες με $(d + 0.189)^{0.796}$. Τα δείγματα των επιμέρους διαρκειών έχουν καταταγεί σε φθίνουσα σειρά.

Για την εξαγωγή των βαθμών των δεδομένων του Πίν. 8.6 έχει ληφθεί το $1/3$ των δεδομένων από κάθε διάρκεια. Έτσι για τις διάρκειες 5 και 10 min που διαθέτουν 29 δεδομένα παίρνουμε τα δέκα πρώτα ($29/3 = 9.67 \approx 10$), για τις διάρκειες 30 min - 12 h παίρνουμε επίσης τα δέκα πρώτα δεδομένα, και για τη διάρκεια των 24 h παίρνουμε τα πρώτα 7 δεδομένα ($20/3 = 6.67 \approx 7$). Η τεθλασμένη γραμμή που έχει χαραχτεί στον Πίν. 8.6 δείχνει ακριβώς ποια δεδομένα παίρνονται υπόψη στην εξαγωγή των βαθμών. Για τα δεδομένα αυτά έχουν εξαχθεί οι βαθμοί στον Πίν. 8.7. Για παράδειγμα, ο βαθμός 1 δίνεται στην μεγαλύτερη απ' όλες τις τιμές, (55.012), ο βαθμός 2 στη δεύτερη (53.002) κ.ο.κ. Στην τελευταία σειρά του Πίν. 8.7 έχουν εξαχθεί οι μέσοι βαθμοί για κάθε διάρκεια.

Ο συνολικός αριθμός δεδομένων είναι $m = 10 \times 7 + 7 = 77$. Ο θεωρητικά αναμενόμενος μέσος βαθμός για κάθε διάρκεια είναι $(m + 1) / 2 = 39$. Το άθροισμα του δεξιού μέλους της (8.29) είναι

$$10 \times (32.9 - 39)^2 + 10 \times (49 - 39)^2 + 10 \times (40.1 - 39)^2 + \\ 10 \times (36.1 - 39)^2 + 10 \times (36.6 - 39)^2 + 10 \times (41.4 - 39)^2 + \\ 10 \times (36.1 - 39)^2 + 7 \times (39.7 - 39)^2 = 1671.2.$$

Κατά συνέπεια η στατιστική παράμετρος h είναι

$$h = [12 / (77 \times 78)] \times 1671.2 = 3.34$$

Μπορεί να διαπιστωθεί ότι με οποιοδήποτε άλλο συνδυασμό παραμέτρων θ και η προκύπτει μεγαλύτερη τιμή της h .*

* Για ενδεικτικούς λόγους περιγράφουμε και τη διαδικασία στατιστικού ελέγχου αν και όπως είδαμε στην υποσημείωση της σ. 277, δεν έχει νόημα, λόγω της ισχυρής εξάρτησης των επιμέρους δειγμάτων. Οι βαθμοί ελευθερίας είναι $k - 1 = 8 - 1 = 7$. Η κρίσιμη τιμή της στατιστικής δοκιμής για επίπεδο σημαντικότητας 5% είναι $\chi_{0.95}^2(7) = 14.07 > 3.34$, γεγονός που θα μας οδηγούσε στη μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ότι τα δείγματα της μεταβλητής Y προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό.

Πίν. 8.6 Δείγματα της μεταβλητής $Y = I b(d)$ καταταγμένα σε φθίνουσα σειρά, για $\theta = 0.189$ και $\eta = 0.796$. Εντάσεις βροχής από το σταθμό Ελληνικό (Πίν. 8.2).

A/A	Μεταβλητή $y = i b(d)$ για διάρκεια $d =$							
	5 min	10 min	30 min	1 h	2 h	6 h	12 h	24 h
1	50.281	52.700	55.012	46.943	50.187	50.919	53.002	48.570
2	44.742	38.471	48.470	41.548	42.724	42.743	45.866	42.938
3	42.611	37.681	39.549	41.204	40.112	42.103	44.768	42.571
4	42.611	37.417	37.467	40.171	37.593	40.537	43.912	36.939
5	41.759	35.046	36.873	38.449	36.847	38.263	38.547	33.832
6	40.907	30.303	35.386	37.531	36.474	32.571	36.652	28.945
7	36.219	30.303	32.115	34.432	36.007	31.504	33.241	28.680
8	34.089	29.249	31.074	33.399	34.608	31.222	33.058	25.308
9	29.402	28.985	30.925	33.285	33.116	30.010	29.150	24.626
10	28.975	28.985	30.777	30.760	33.022	28.944	27.320	22.946
11	27.697	28.458	30.182	28.464	28.265	28.803	26.589	22.264
12	27.697	28.195	29.290	28.349	27.799	28.730	25.374	21.254
13	26.419	27.931	28.695	28.120	24.347	26.102	24.642	20.837
14	26.419	27.668	24.532	26.628	23.228	25.317	24.152	20.471
15	24.288	26.350	23.937	24.676	22.668	23.823	23.910	19.991
16	23.862	24.769	22.748	22.266	20.896	23.256	22.629	19.524
17	23.862	21.871	22.599	20.315	20.709	20.836	21.714	18.728
18	23.862	21.080	21.707	18.249	19.869	18.562	20.551	16.417
19	21.305	21.080	21.261	17.905	18.377	18.276	20.126	14.372
20	20.879	21.080	21.113	17.790	17.537	18.208	20.126	10.520
21	20.879	20.290	20.815	17.446	16.698	17.994	19.885	
22	20.027	18.445	20.667	17.331	16.045	17.922	19.028	
23	19.175	18.445	18.734	16.413	15.858	15.788	17.989	
24	17.044	18.445	17.544	15.839	15.485	15.575	16.650	
25	14.914	17.918	17.098	15.265	14.086	15.434	16.650	
26	14.914	15.283	14.868	14.806	13.433	15.007	15.860	
27	14.488	15.283	13.679	13.773	12.780	13.369	14.213	
28	14.062	13.966	12.786	13.314	12.407	12.942	13.298	
29	12.783	10.804	12.340	12.625	12.407	10.454	12.383	
30			12.192	11.707	12.220	10.241	11.468	

Ακολουθεί η εκτίμηση των παραμέτρων λ και ψ της κατανομής Gumbel. Η μέση τιμή του συνόλου των δεδομένων του Πίν. 8.6 (όλων των στηλών) είναι 25.701 και η τυπική απόκλιση 10.208. Κατά συνέπεια η μέθοδος ροπών δίνει

$$\lambda = 1 / (0.78 \times 10.208) = 0.1256, \psi = 0.1256 \times 25.710 - 0.577 = 2.652$$

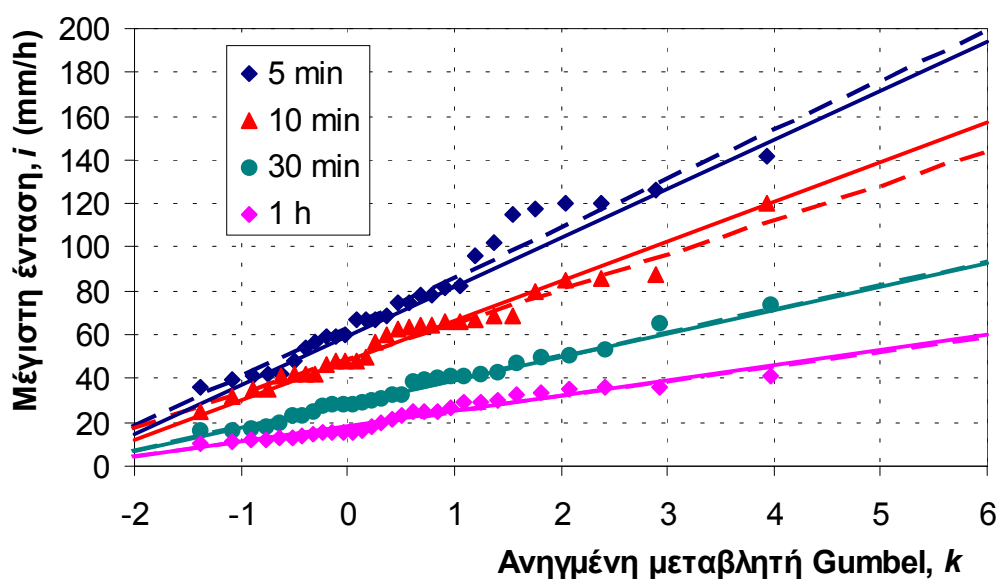
Έτσι η τελική εξίσωση όμβριων καμπυλών είναι

$$i = \frac{1}{0.1256 (d + 0.189)^{0.796}} \left\{ 2.652 - \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right] \right\} \quad (\delta)$$

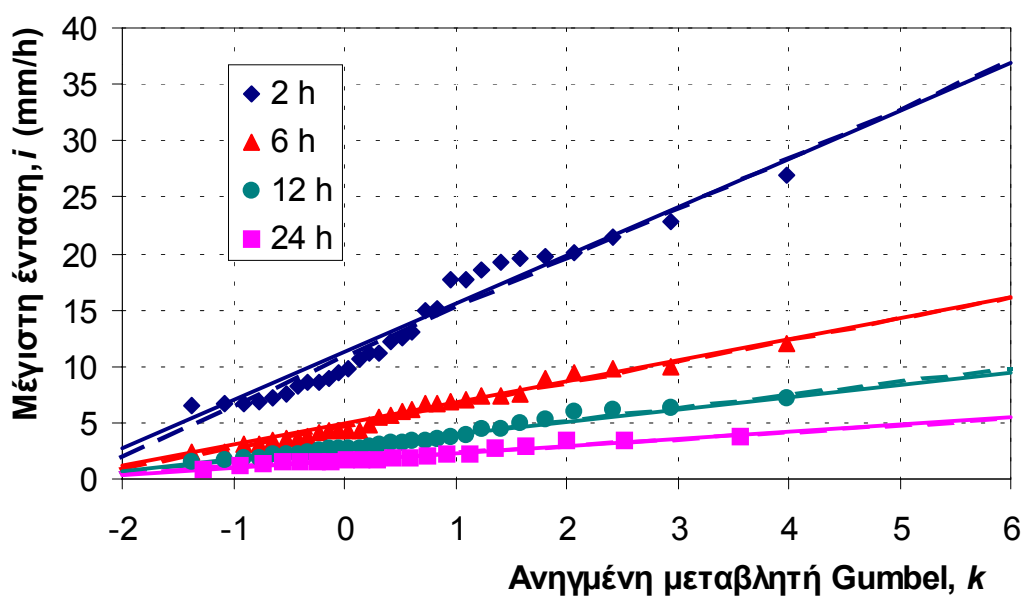
Η απεικόνιση και η σύγκριση της παραπάνω εξίσωσης γίνεται σε δύο ομάδες σχημάτων. Στο Σχ. 8.7 και στο Σχ. 8.8 απεικονίζονται σε χαρτί Gumbel οι συναρτήσεις κατανομής των μέγιστων εντάσεων βροχής στο Ελληνικό ξεχωριστά για κάθε διάρκεια. Με σημεία παριστάνονται οι εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής (κατά Gringorten), με συνεχείς γραμμές οι συναρτήσεις Gumbel της συνεπούς ενιαίας έκφρασης (δ) και με διακεκομμένες γραμμές οι μεμονωμένες οι συναρτήσεις Gumbel που έχουν εξαχθεί στην Εφαρμογή 8.2.1. Παρατηρούμε την πολύ καλή συμφωνία των δύο ομάδων καμπυλών, τόσο μεταξύ τους, όσο και με τις σημειοσειρές των εμπειρικών κατανομών. Στο Σχ. 8.9 παριστάνονται οι όμβριες καμπύλες όπως προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση (δ) για περιόδους επαναφοράς από 5 μέχρι 5000. Για σύγκριση έχουν απεικονιστεί και τα σημεία που προκύπτουν από τις μεμονωμένες συναρτήσεις Gumbel που έχουν εξαχθεί στην Εφαρμογή 8.2.1. Άξια προσοχής είναι η πολύ καλή συμφωνία των καμπυλών με τα σημεία για όλο το φάσμα των περιόδων επαναφοράς (τρεις τάξεις μεγέθους). Αυτό επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό μας ότι η παραπάνω συνεπής μέθοδος καλύπτει όλο το φάσμα μεταβολής διαρκειών και περιόδων επαναφοράς με ένα μοναδικό σύνολο παραμέτρων.

Πίν. 8.7 Αύξοντες αριθμοί (βαθμοί) του 1/3 των δεδομένων του Πίν. 8.6.

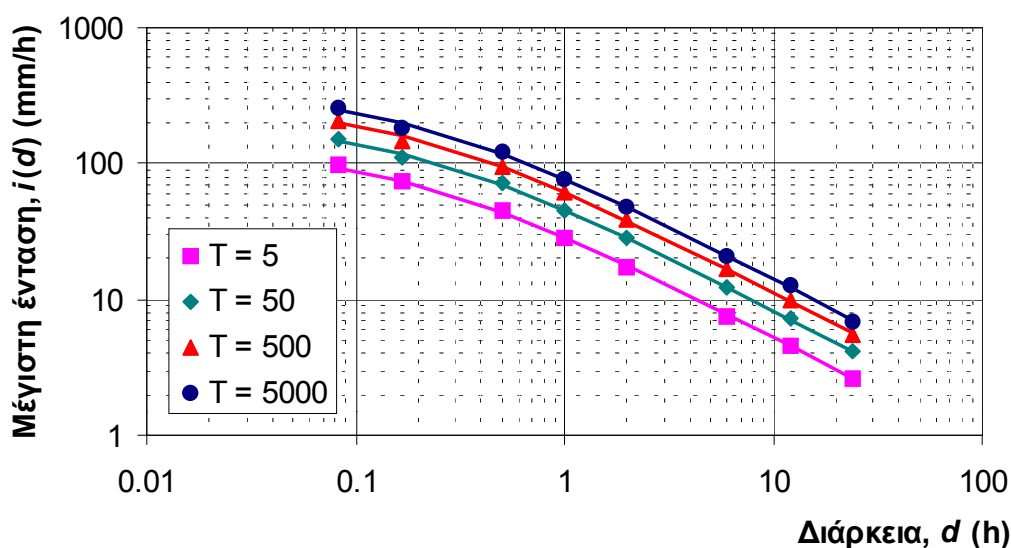
A/A	Βαθμοί των δεδομένων κάθε επιμέρους δείγματος διάρκειας $d =$							
	5 min	10 min	30 min	1 h	2 h	6 h	12 h	24 h
1	5	3	1	9	6	4	2	7
2	12	30	8	22	16	15	10	14
3	17	33	28	23	27	20	11	19
4	17	37	36	26	34	25	13	38
5	21	46	39	31	40	32	29	50
6	24	65	45	35	42	57	41	74
7	43	65	58	48	44	59	53	76
8	49	69	61	51	47	60	55	
9	68	71	62	52	54	67	70	
10	73	71	63	64	56	75	77	
Μέσος βαθμός	32.9	49.0	40.1	36.1	36.6	41.4	36.1	39.7



Σχ. 8.7 Συναρτήσεις κατανομής των μέγιστων εντάσεων βροχής στο Ελληνικό για διάρκειες βροχής από 5 min μέχρι 1 h. Με σημεία παριστάνονται οι εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής, με συνεχείς γραμμές οι συναρτήσεις Gumbel της συνεπούς ενιαίας έκφρασης και με διακεκομμένες γραμμές οι μεμονωμένες οι συναρτήσεις Gumbel ανά διάρκεια.



Σχ. 8.8 Συναρτήσεις κατανομής των μέγιστων εντάσεων βροχής στο Ελληνικό για διάρκειες βροχής από 2 μέχρι 24 h. Με σημεία παριστάνονται οι εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής, με συνεχείς γραμμές οι συναρτήσεις Gumbel της συνεπούς ενιαίας έκφρασης και με διακεκομμένες γραμμές οι μεμονωμένες οι συναρτήσεις Gumbel ανά διάρκεια.



Σχ. 8.9 Όμβριες καμπύλες για περιόδους επαναφοράς $T = 5, 50, 500$ και 5000 στο Ελληνικό, υπολογισμένες από τη συνεπή ενιαία εξίσωση με παραμέτρους εκτιμημένες με τη μέθοδο ενοποίησης των διαρκειών (λογαριθμικοί άξονες).

8.4 Συμπληρωματικά στοιχεία

8.4.1 Ενοποίηση δειγμάτων διαφορετικών σταθμών

Μερικές φορές λειτουργούν δύο ή περισσότεροι βροχογραφικοί σταθμοί σε πολύ κοντινές αποστάσεις μεταξύ τους. Είναι αναμενόμενο ότι οι σχέσεις έντασης-διάρκειας-περιόδου επαναφοράς στους σταθμούς αυτούς θα είναι ταυτόσημες. Με άλλα λόγια μπορεί να υποτεθεί ότι τα δείγματα των μέγιστων εντάσεων βροχής που έχουν ληφθεί στους διαφορετικούς σταθμούς προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό ή αποτελούν δείγματα της ίδιας τυχαίας μεταβλητής. Αν είναι αληθής η υπόθεση αυτή, τα δείγματα των διαφορετικών σταθμών για κάθε δεδομένη διάρκεια μπορούν να ενοποιηθούν και να αποκτηθούν έτσι δείγματα μεγαλύτερου μήκους. Οι παράμετροι των όμβριων καμπυλών μπορούν στη συνέχεια να εκτιμηθούν από τα ενοποιημένα δείγματα, με έναν από τους τρόπους που περιγράφηκαν παραπάνω. Η ενοποίηση των δειγμάτων διαφορετικών σταθμών είναι γνωστή με τον όρο *μέθοδος σταθμών-ετών*.

Η υπόθεση ότι τα επιμέρους δείγματα εκφράζουν την ίδια τυχαία μεταβλητή πρέπει να ελέγχεται με δύο τρόπους: εμπειρικά και στατιστικά:

1. Ο εμπειρικός έλεγχος αφορά στη διαπίστωση ότι οι θέσεις των μετρητικών σταθμών βρίσκονται στο ίδιο μικροκλιματικό περιβάλλον: ίδια υδρολογική λεκάνη, κοντινές αποστάσεις, περίπου ίδια υψόμετρα, παρόμοιες ορογραφικές συνθήκες, κτλ.
2. Ο στατιστικός έλεγχος αφορά στην εφαρμογή της δοκιμής Kruskal-Wallis (βλ. εξίσωση (8.29)) για κάθε ομάδα επιμέρους δειγμάτων δεδομένης διάρκειας. Για να μην απορριφθεί η μηδενική υπόθεση και να καταστεί έτσι επιτρεπτή η ενοποίηση, θα πρέπει οι στατιστικές παράμετροι h να είναι μικρότερες της κρίσιμης τιμής h_c για όλες τις διάρκειες.

Για να έχει νόημα ο παραπάνω στατιστικός έλεγχος θα πρέπει τα δείγματα των διαφορετικών σταθμών, που αναφέρονται στην ίδια διάρκεια, να είναι στατιστικώς ανεξάρτητα. Αυτό ελέγχεται κατά προσέγγιση και πάλι με δύο τρόπους: εμπειρικά και στατιστικά.

1. Ο εμπειρικός έλεγχος αφορά στη διαπίστωση ότι η μέγιστη ένταση βροχής σε καθέναν από τους σταθμούς έχει καταγραφεί σε διαφορετική ημερομηνία του ίδιου έτους, δηλαδή ότι δεν πρόκειται για καταγραφές ίδιων επεισοδίων βροχής σε διαφορετικές χωρικές θέσεις.
2. Ο στατιστικός έλεγχος εξετάζει κατά κανόνα το κατά πόσο ο συντελεστής συσχέτισης μπορεί να θεωρηθεί στατιστικώς μηδέν.

Η μέθοδος σταθμών ετών έχει χρησιμοποιηθεί πολύ συχνά με στόχο την απόκτηση ενός μεγάλου σε μήκος δείγματος από δύο ή περισσότερα μικρά δείγματα και, άρα, την αύξηση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων ή, ισοδύναμα, τον περιορισμό των ορίων εμπιστοσύνης τους. Θα διατυπώσουμε, ωστόσο, ορισμένες επιφυλάξεις ως προς την φύση της μεθόδου, οι οποίες θα πρέπει να είναι εις γνώση του μηχανικού που χρησιμοποιεί τη μέθοδο.

1. Η θετική έκβαση του ελέγχου της ανεξαρτησίας των μικρών δειγμάτων που πρόκειται να ενοποιηθούν, δεν σημαίνει απαραίτητα και την ανεξαρτησία των αντίστοιχων μεταβλητών. Πράγματι, σε μέτρια σε μέγεθος επεισόδια βροχής φαίνεται να υπάρχει ανεξαρτησία των

καταγραφών σε γειτονικούς σταθμούς. Ωστόσο, η πείρα έχει δείξει ότι τα πολύ εξαιρετικά επεισόδια καταιγίδων, δίνουν ταυτόχρονα (άρα εξαρτημένα) μέγιστα σε γειτονικούς σταθμούς. Κατά συνέπεια, αν διαθέταμε μακροχρόνια δείγματα (π.χ. 100 ετών) μέγιστων εντάσεων στους γειτονικούς σταθμούς είναι πολύ πιθανό ότι θα είχαμε εξαρτημένες καταγραφές στην περιοχή των πολύ υψηλών εντάσεων βροχής. Άρα η ανεξαρτησία που διαπιστώνουμε όταν διαθέτουμε μικρά δείγματα, είναι ενδεχομένως παραπλανητική.

2. Όσο μεγαλώνει η χρονική διάρκεια αναφοράς d τόσο η ανεξαρτησία τίθεται εν αμφιβόλω, ακόμη και σε μικρά δείγματα. Έτσι, για διάρκειες βροχής π.χ. 24 ή 48 ωρών τα ίδια επεισόδια βροχής δίνουν συνήθως μέγιστες εντάσεις σε αρκετούς σταθμούς μιας περιοχής.
3. Όσο μικραίνει η απόσταση ανάμεσα σε δύο γειτονικούς σταθμούς τόσο περισσότερο εξαρτημένα θα είναι τα δείγματα. Αλλά, μια αρκετά μεγάλη απόσταση ανάμεσα στους σταθμούς, που θα εξασφάλιζε την ανεξαρτησία, ακυρώνει την ουσιαστική προϋπόθεση της μεθόδου, ότι ανήκουν στο ίδιο μικροκλιματικό περιβάλλον.

Κατά συνέπεια, δεν συνιστάται η γενική και ανεπιφύλακτη εφαρμογή της μεθόδου σταθμών-ετών. Η εφαρμογή της μπορεί να είναι απαραίτητη μόνο σε ειδικές περιπτώσεις ανεπαρκών σε μέγεθος δειγμάτων, αλλά και πάλι χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή, κυρίως στην εκτίμηση των ορίων εμπιστοσύνης, όπου παίζει καθοριστικό ρόλο το μέγεθος του δείγματος.

8.4.2 Επίδραση της χρονικής ευκρίνειας

Η χρονική ευκρίνεια των πρωτογενών δεδομένων (βροχογραφήμάτων ή ψηφιακών μετρήσεων) είναι προφανές ότι επηρεάζει τη σειρά των μέγιστων εντάσεων βροχής. Εκ των πραγμάτων κατά την εξαγωγή της σειράς μέγιστων εντάσεων, αντί της ακριβούς εξίσωσης (8.1) χρησιμοποιείται η προσεγγιστική εξίσωση (8.2), στην οποία υπεισέρχεται και η χρονική ευκρίνεια των παρατηρήσεων. Αυτό έχει συνέπεια την υπεκτίμηση των μέγιστων εντάσεων. Είναι προφανές ότι το μέγεθος του σφάλματος εξαρτάται από το λόγο διάρκειας προς ευκρίνεια (d/δ) και αν ο λόγος αυτός είναι αρκετά μεγάλος τότε το σφάλμα γίνεται αμελητέο. Για την άρση του σφάλματος για μικρές τιμές του λόγου d/δ , συνήθως γίνεται αναγωγή των τιμών $i(d)$, με πολλαπλασιασμό επί ένα συντελεστή που εξαρτάται από το λόγο d/δ . Τιμές αυτού του συντελεστή έχουν βρεθεί από έρευνες

στην Αμερική και δίνονται στη βιβλιογραφία (π.χ. Linsley et al., 1975, σ. 357), απ' όπου προέρχεται και ο Πίν. 8.8 που δίνεται παρακάτω.

Πίν. 8.8 Τιμές του συντελεστή άρσης του σφάλματος διακριτοποίησης

Λόγος διάρκειας προς ευκρίνεια (d/δ)	Συντελεστής άρσης του σφάλματος διακριτοποίησης
1	1.13
2	1.04
3-4	1.03
5-8	1.02
9-24	1.01

8.4.3 Σχέση σειρών ετήσιων μεγίστων και σειρών υπεράνω κατωφλίου

Είναι προφανές ότι ο τρόπος κατάρτισης της σειράς μέγιστων εντάσεων βροχής επηρεάζει τις τελικές εξισώσεις των όμβριων καμπυλών. Συγκεκριμένα, για την ίδια περίοδο επαναφοράς, η σειρά των ετήσιων μεγίστων θα δώσει, μετά από τη στατιστική επεξεργασία της, χαμηλότερη τιμή της έντασης βροχής από την αντίστοιχη τιμή που θα προκύψει από την επεξεργασία της σειράς υπεράνω κατωφλίου. Πάντως, η διαφορά αυτή γίνεται αμελητέα για μεγάλες τιμές της περιόδου επαναφοράς ($T > 10$).

Πιο αντιπροσωπευτικές για τη μελέτη έργων με μικρή περίοδο επαναφοράς σχεδιασμού είναι οι όμβριες καμπύλες που προκύπτουν από τις σειρές υπεράνω κατωφλίου. Ωστόσο, στην πράξη χρησιμοποιούνται περισσότερο οι σειρές ετήσιων μεγίστων, λόγω του ευκολότερου τρόπου κατασκευής τους. Μπορεί πάντως και εκ των υστέρων να γίνει αναγωγή των αποτελεσμάτων που προέρχονται από επεξεργασία σειρών ετήσιων μεγίστων σε τρόπο ώστε να αντιστοιχούν προσεγγιστικά σε αυτά που προέρχονται από επεξεργασία σειρών υπεράνω κατωφλίου. Η απλούστερη μέθοδος για το σκοπό αυτό αφορά στην αναγωγή της περιόδου επαναφοράς σύμφωνα με τον τύπο (Raudkivi, 1979, σ. 411)

$$T = \frac{1}{1 - \exp(-1/T')} \Leftrightarrow T' = \frac{1}{-\ln(1 - 1/T)} \quad (8.35)$$

όπου T' η περίοδος επαναφοράς για δεδομένη ένταση βροχής όπως προκύπτει από τη σειρά μεγίστων υπεράνω κατωφλίου και T η αντίστοιχη

περίοδος επαναφοράς για τη σειρά ετησίων μεγίστων. Η πιο πάνω σχέση προσεγγίζεται με ακρίβεια δεύτερου δεκαδικού ψηφίου από την απλούστερη σχέση

$$T = T' + 0.5 \quad (8.36)$$

Πρακτικώς η αναγωγή δεν είναι απαραίτητη για $T > 10$.

Σε μερικά βιβλία υδρολογίας δίνεται σε πινακοποιημένη μορφή η αντιστοιχία των μεγεθών T' και T (π.χ. Linsley et al., 1975, σ. 356· Haan, 1977, σ. 134· Viessman et al., 1989, σ. 742). Οι τιμές των πινάκων συμφωνούν με την εξίσωση (8.35). Σε άλλα βιβλία δίνονται συντελεστές αναγωγής των εντάσεων αντί των περιόδων επαναφοράς οι οποίοι κυμαίνονται από 0.88 για $T = 2$ μέχρι 0.99 για $T = 10$ (Haan, 1977, σ. 155· Chow et al., 1988, σ. 456). Ωστόσο η μέθοδος που στηρίζεται στην αναγωγή των περιόδων επαναφοράς (εξίσωση (8.35)) συνιστάται ως πλέον ορθολογιστική.

Ας σημειωθεί ότι η (8.35) επιτρέπει την άμεση αναγωγή των εξισώσεων των όμβριων καμπυλών σε τρόπο ώστε να εκφράζονται συναρτήσει της T' αντί της T , παρόλο που στην όλη ανάλυση χρησιμοποιείται η σειρά των ετήσιων μεγίστων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της κατανομής Gumbel, η εξίσωση (8.17) μετασχηματίζεται σε

$$a(T) = \frac{1}{\lambda} (\psi + \ln T') \quad (8.37)$$

όπου οι παράμετροι λ και ψ εκτιμώνται από τη σειρά ετήσιων μεγίστων.

8.4.4 Όρια εμπιστοσύνης όμβριων καμπυλών

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η μεμονωμένη θεώρηση των δειγμάτων των διάφορων διαρκειών d_j (εδάφιο 8.2.1) τα όρια (και κατ' επέκταση οι καμπύλες) εμπιστοσύνης των μέγιστων εντάσεων βροχής για καθεμιά από τις διάρκειες d_j , για τις οποίες υπάρχουν δείγματα όμβριων καμπυλών μπορούν να εκτιμώνται με τις μεθόδους του κεφαλαίου 6. Πρόβλημα ανακύπτει για ενδιάμεσες διάρκειες, όπου χρειάζεται να γίνει κάποια παρεμβολή.

Η γενικευμένη έκφραση των όμβριων καμπυλών με ενσωμάτωση της θεωρητικής συνάρτησης κατανομής σε αυτή (ενότητα 8.3), διευκολύνει την εκτίμηση των διαστημάτων εμπιστοσύνης. Η μέθοδος εκτίμησης με

ενοποίηση διαρκειών προσφέρει την μαθηματικά συνεπέστερη βάση για την εκτίμηση ορίων εμπιστοσύνης, για το λόγο ότι σε αυτή τη μέθοδο οι παράμετροι της συνάρτησης $a(T)$ εκτιμώνται με βάση καθιερωμένες στατιστικές μεθόδους (όπως π.χ. η μέθοδος ροπών) για τις οποίες υπάρχει γνωστή μεθοδολογία εκτίμησης ορίων εμπιστοσύνης. Ωστόσο υπάρχει ένα σημείο που χρειάζεται προσοχή, το οποίο έχει σχέση με την τιμή του μεγέθους δείγματος που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των ορίων εμπιστοσύνης. Συγκεκριμένα, θα είναι λάθος να θεωρήσει κανείς ότι το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με το πλήθος των τιμών του ενοποιημένου δείγματος m , δεδομένου ότι τα δείγματα των επιμέρους διαρκειών που ενοποιούνται δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, αλλά αντίθετα έχουν ισχυρή στατιστική εξάρτηση. Αλλά ούτε και μπορεί να θεωρηθεί ίσο με το μέγεθος του κάθε επιμέρους δείγματος n , δεδομένου ότι η ενοποίηση των δειγμάτων αυξάνει την αξιοπιστία της εκτίμησης, πράγμα που ισοδυναμεί με αύξηση του μεγέθους δείγματος. Πρακτικά, περιμένει κανείς ότι το μέγεθος δείγματος που πρέπει να χρησιμοποιηθεί στην εκτίμηση ορίων εμπιστοσύνης βρίσκεται κάπου ανάμεσα στις τιμές n και m . Ο ακριβής προσδιορισμός χρειάζεται εκτεταμένη θεωρητική και εμπειρική ανάλυση. Στην πράξη συνιστάται η χρήση της τιμής n , η οποία δίνει εκτιμήσεις προς την πλευρά της ασφάλειας.

8.5 Εξαγωγή όμβριων καμπυλών με χρήση δεδομένων από βροχόμετρα

Στην Ελλάδα αλλά και σε άλλες χώρες η γενική κατάσταση των βροχομετρικών δικτύων χαρακτηρίζεται από (α) ένα σχετικά αραιό δίκτυο σταθμών εξοπλισμένων με βροχογράφο και (β) ένα πολύ πυκνότερο δίκτυο σταθμών με βροχόμετρο, στο οποίο τυπικά η μέτρηση γίνεται μία φορά ημερησίως (συνήθως στις 08:00, αν και υπάρχουν ορισμένοι σταθμοί της ΕΜΥ με πυκνότερες μετρήσεις, π.χ. δύο μετρήσεις ημερησίως, στις 08:00 και 20:00). Οι ταινίες των βροχογράφων, μετά από ψηφιοποίησή τους, παρέχουν επαρκή βάση για την κατάρτιση όμβριων καμπυλών, ιδίως στην περίπτωση που είναι ημερήσιες, οπότε μπορεί να έχουν ευκρίνεια 5-10 min. Οι μετρήσεις των βροχομέτρων δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα για κατάρτιση όμβριων καμπυλών.

Πολλές φορές οι μελετητές, προκειμένου να αποκτήσουν μια εικόνα των εντάσεων για διάρκειες βροχής μικρότερες από 24 h, χρησιμοποιούν τις συμπληρωματικές ενδείξεις των παρατηρητών των βροχομέτρων, οι οποίες αναφέρονται στις ώρες έναρξης και λήξης της βροχής. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή δεν είναι ικανοποιητική για την κατάρτιση όμβριων καμυλών, για δύο λόγους: Πρώτον, γιατί οι ενδείξεις που αναγράφονται στα φύλλα παρατηρήσεων είναι συχνά εσφαλμένες, ιδίως στις περιπτώσεις που οι βροχοπτώσεις πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια της νύχτας. Δεύτερο και κυριότερο, η συνολική διάρκεια της βροχής, έστω και αν είναι ακριβής, δεν μπορεί να δώσει πληροφορία για τις μέγιστες εντάσεις βροχής που εμφανίστηκαν σε μικρές διάρκειες κατά τη διάρκεια του επεισοδίου βροχής, οι οποίες μπορεί να είναι πολλαπλάσιες της μέσης έντασης. Έτσι, οι καταγραφές των χρόνων έναρξης και λήξης της βροχής δεν προσφέρουν επαρκή βάση για την κατάρτιση όμβριων καμυλών.

Μια άλλη μέθοδος που έχει τύχει ευρείας εφαρμογής στην Ελλάδα είναι αυτή του U. S. Army Corps of Engineers (1965· βλ. και Ξανθόπουλος, 1975). Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί ως βάση τη μέση τιμή του ύψους των μέγιστων ετήσιων βροχοπτώσεων 24ώρου, όπως αυτή προκύπτει από τις καταγραφές των βροχομέτρων, και ορισμένα βοηθητικά στοιχεία, όπως το μέσο ετήσιο ύψος βροχής, το μέσο ετήσιο αριθμό ημερών καταιγίδας και το μέσο ετήσιο αριθμό ημερών με ύψος βροχής μεγαλύτερο του 1 mm ή των 0.25 mm. Η εφαρμογή της μεθόδου γίνεται με βάση ένα νομογράφημα, το οποίο δίνει ως εξαγόμενο τη μέγιστη βροχόπτωση περιόδου επαναφοράς $T = 2$ για διάρκεια βροχής 1 h, στην οποία μπορεί στη συνέχεια να θεμελιωθεί η κατάρτιση των όμβριων καμυλών. Αν και σε ορισμένες περιπτώσεις η εν λόγω μέθοδος έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα στον Ελλαδικό χώρο, σε άλλες περιπτώσεις έχει δώσει τελείως απαράδεκτες όμβριες καμύλες. Για το λόγο αυτό δεν συνιστάται για εφαρμογή στην Ελλάδα.

Παρακάτω προτείνουμε μια νέα μεθοδολογία, η οποία έχει ήδη δοκιμαστεί με ενθαρρυντικά αποτελέσματα στη Στερεά Ελλάδα (Κοζώνης, 1995). Η μεθοδολογία αυτή αναφέρεται στον τρόπο εξαγωγής όμβριων καμυλών σε περιοχή που καλύπτεται από βροχόμετρο, αλλά όχι από βροχογράφο. Τα δεδομένα που απαιτεί είναι:

- Μέγιστα ύψη βροχής 24ωρης ή και 48ωρης διάρκειας από το βροχομετρικό σταθμό της περιοχής μελέτης, ο οποίος παρακάτω θα αναφέρεται ως σταθμός μελέτης.
- Μέγιστα ύψη (ή αντίστοιχες εντάσεις) για μεγάλο φάσμα διαρκειών (π.χ. με κατώτερη διάρκεια από μερικά λεπτά μέχρι 1 h και ανώτερη διάρκεια 24 ή 48 h) από τους πλησιέστερους 2-3 βροχομετρικούς σταθμούς οι οποίοι διαθέτουν και βροχογράφο επαρκούς αξιοπιστίας και περιόδου λειτουργίας.

Διευκρινίζεται ότι η μεθοδολογία αναφέρεται σε σημειακές και όχι επιφανειακές όμβριες καμπύλες (η αναγωγή των σημειακών υψών σε επιφανειακά μπορεί να γίνει με τις γνωστές μεθόδους της βιβλιογραφίας). Αν και η μεθοδολογία δεν μπορεί να τυποποιηθεί πλήρως, σε μορφή μονοσήμαντης πορείας υπολογισμών, σε γενικές γραμμές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. *Κατάρτιση των όμβριων καμπυλών από τα δεδομένα των βροχογράφων.*

Με βάση τα δεδομένα των 2-3 κοντινών σταθμών καταρτίζονται όμβριες καμπύλες με τη μορφή π.χ. (8.6), ξεχωριστά για καθένα από αυτούς. Η έκφραση που υιοθετείται για τις όμβριες καμπύλες πρέπει να είναι κοινή για όλους τους σταθμούς. Γίνεται προσπάθεια να περιοριστεί ο αριθμός των παραμέτρων της σχέσης όμβριων καμπυλών, π.χ. επιλέγοντας $\theta = 0$ ή $\eta = 1$ στην έκφραση της συνάρτησης διάρκειας $b(d)$ και υιοθετώντας διπαραμετρική και όχι τριπαραμετρική συνάρτηση κατανομής.

2. *Συγκριτική μελέτη των παραμέτρων των παραπάνω καμπυλών και επιλογή παραμέτρων του σταθμού μελέτης.*

Εξετάζονται συγκριτικά οι παράμετροι των παραπάνω καμπυλών των βροχογράφων και κατά περίπτωση υιοθετούνται ορισμένες από αυτές για τον βροχομετρικό σταθμό μελέτης, ενώ άλλες υπολογίζονται στο επόμενο βήμα 3. Οι παράμετροι του σταθμού μελέτης που υιοθετούνται στο βήμα αυτό περιλαμβάνουν όλες τις παραμέτρους της συνάρτησης διάρκειας $b(d)$ και ενδεχομένως κάποιες από τις παραμέτρους της συνάρτησης περιόδου επαναφοράς $a(T)$. Πιο συγκεκριμένα:

- 2.1 Σε περίπτωση που το σύνολο των παραμέτρων δεν διαφέρει αισθητά από σταθμό σε σταθμό επαναλαμβάνεται ο υπολογισμός των παραμέτρων με στόχο την εκτίμηση ενός μοναδικού συνόλου παραμέτρων για όλους τους γειτονικούς σταθμούς. Αυτό γίνεται με ενοποίηση των δειγμάτων όλων των σταθμών σύμφωνα με τη μέθοδο σταθμών-ετών. Από το τελικό σύνολο παραμέτρων υιοθετούνται για τον βροχομετρικό σταθμό μελέτης οι παράμετροι της συνάρτησης διάρκειας $b(d)$. Επίσης μπορεί να υιοθετηθούν και παράμετροι της συνάρτησης περιόδου επαναφοράς $a(T)$, αφήνοντας όμως τουλάχιστον μία ελεύθερη, η οποία θα προσδιοριστεί από τα δεδομένα του σταθμού μελέτης.
- 2.2 Αν οι παράμετροι της συνάρτησης διάρκειας $b(d)$ δεν διαφέρουν αισθητά από σταθμό σε σταθμό, αλλά υπάρχουν διαφορές σε κάποιες από τις παραμέτρους της συνάρτησης περιόδου επαναφοράς $a(T)$, τότε εξάγεται ο μέσος όρος των τιμών των (αντίστοιχων) παραμέτρων που δεν έχουν μεγάλες διαφορές, ο οποίος και υιοθετείται ως αντιπροσωπευτική τιμή για την αντίστοιχη παράμετρο του σταθμού μελέτης. Και πάλι θα πρέπει να αφηθεί τουλάχιστον μία ελεύθερη παράμετρος της συνάρτησης περιόδου επαναφοράς $a(T)$, η οποία θα προσδιοριστεί από τα δεδομένα του σταθμού μελέτης.
- 2.3 Αν υπάρχουν σημαντικές διαφορές από σταθμό σε σταθμό στις παραμέτρους της συνάρτησης διάρκειας $b(d)$ τότε υιοθετείται για το σταθμό μελέτης ένα από τα σύνολα παραμέτρων της $b(d)$ και συγκεκριμένα αυτό που δίνει δυσμενέστερες εντάσεις βροχής (για λόγους ασφάλειας). Για παράδειγμα, αν η $b(d)$ είναι της μορφής d^n τότε υιοθετείται για το σταθμό μελέτης η μεγαλύτερη από τις τιμές n των γειτονικών βροχομετρικών σταθμών.
3. *Τελική φάση εκτίμησης παραμέτρων.*
 Εκτιμώνται κατά περίπτωση οι υπόλοιπες παράμετροι της συνάρτησης περιόδου επαναφοράς $a(T)$ που δεν έχουν καθοριστεί στο βήμα 2. Για το σκοπό αυτό:
- 3.1 Αν πρόκειται να εκτιμηθεί σε αυτό το βήμα το σύνολο των παραμέτρων της συνάρτησης περιόδου επαναφοράς $a(T)$, τότε εφαρ-

μόζονται οι γνωστές μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων κατανομών για τη μεταβλητή $Y = I b(d)$.

- 3.2 Αν ορισμένες παράμετροι της συνάρτησης περιόδου επαναφοράς $a(T)$ έχουν ήδη καθοριστεί στο βήμα 2, τότε αναπροσαρμόζονται κατάλληλα οι εξισώσεις εκτίμησης παραμέτρων για τη μεταβλητή $Y = I b(d)$.

Ως παράδειγμα αναπροσαρμογής των εξισώσεων εκτίμησης παραμέτρων για το βήμα 3.2 αναφέρουμε τη συνηθέστερη περίπτωση που χρησιμοποιείται η κατανομή Gumbel για την περιγραφή των μέγιστων εντάσεων βροχής. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται η εξίσωση (8.17) για την έκφραση της $a(T)$. Αν υποθέσουμε ότι η αδιάστατη παράμετρος ψ έχει καθοριστεί στο βήμα 2 (υποπερίπτωση 2.1 ή 2.2) τότε η παράμετρος λ που απομένει εκτιμάται από τη δεύτερη από τις εξισώσεις (8.18), η οποία οδηγεί στη διατήρηση της μέσης τιμής των ανηγμένων εντάσεων $Y = I b(d)$. Επιλύοντας ως προς λ παίρνουμε

$$\lambda = \frac{\psi + 0.577}{\bar{y}} \quad (8.38)$$

όπου \bar{y} είναι η μέση τιμή των ανηγμένων εντάσεων του ενοποιημένου δείγματος του σταθμού μελέτης.

8.6 Γεωγραφική μεταβλητότητα των όμβριων καμπυλών

Σε πολλές χώρες το θέμα της κατάρτισης όμβριων καμπυλών έχει αντιμετωπιστεί μαζικά για εκτεταμένες γεωγραφικές περιοχές και κατασκευάστηκαν έτσι χάρτες που δίνουν έτοιμα στοιχεία για κάθε περιοχή, βάσει των οποίων μπορεί να καταρτιστούν εύκολα όμβριες καμπύλες σε οποιοδήποτε σημείο, χωρίς να απαιτείται να ανατρέξει κανείς στα πρωτογενή ιστορικά δεδομένα. Για παράδειγμα, στις ΗΠΑ έχουν κατασκευαστεί τέτοιοι χάρτες από το U. S. Weather Bureau που χρονολογούνται από το 1961 (Hershfield, 1961) οι οποίοι έχουν αναπαραχθεί σε πολλά υδρολογικά συγγράμματα (π.χ. Linsley et al., 1975, σ. 358· Viessman et al., 1989, σ. 337· Wanielista, 1990, σ. 59). Οι χάρτες αυτοί απεικονίζουν ισουέτιες καμπύλες μέγιστων υψών βροχής για διάφορες διάρκειες βρο-

χής (30 min - 24 h) και διάφορες περιόδους επαναφοράς (1 - 100). Νεότεροι χάρτες για τις ΗΠΑ έχουν κατασκευαστεί από τη NOAA (Miller et al., 1973 για τις δυτικές ΗΠΑ· Frederick et al., 1977, για τις ανατολικές και κεντρικές ΗΠΑ) και έχουν αναδημοσιευτεί από τον Smith (1993). Για τη Μεγάλη Βρετανία και την Ιρλανδία ανάλογοι χάρτες έχουν κατασκευαστεί από το Institute of Hydrology (NERC, 1975) και έχουν αναδημοσιευτεί και σε διάφορα υδρολογικά συγγράμματα (π.χ. Wilson, 1990, σσ. 278-338). Σε αυτή την περίπτωση οι χάρτες δίνουν αφενός τη βροχόπτωση 2 ημερών περιόδου επαναφοράς 5 ετών και αφετέρου το ποσοστό της βροχόπτωσης 1 ώρας περιόδου επαναφοράς 5 ετών προς την αντίστοιχη των 2 ημερών. Αλλά και σε άλλες χώρες, όπως για παράδειγμα τις Ινδίες, έχουν κατασκευαστεί ανάλογοι χάρτες που δίνουν τη μέγιστη βροχόπτωση 1 ώρας για δεδομένη περίοδο επαναφοράς, π.χ. 50 ετών (UNESCO, 1974· βλ. και Subramanya, 1984, σ. 40).

Στην Ελλάδα έχει γίνει μια πρώτη πιλοτική διερεύνηση προς την κατεύθυνση της κατασκευής ανάλογων χαρτών (Κοζώνης, 1995) με εφαρμογή στη Στερεά Ελλάδα. Η εφαρμογή αυτή αποσκοπούσε περισσότερο στον έλεγχο της προτεινόμενης μεθοδολογίας της ενότητας 8.5, η οποία αφορά στην αξιοποίηση και των δεδομένων από βροχόμετρα, και λιγότερο στην κατασκευή τελικών χαρτών που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν επιχειρησιακά. Ο χάρτης που για ενδεικτικούς λόγους αναδημοσιεύεται από την εργασία του Κοζώνη (1995) (Σχ. 8.10) δεν μπορεί να θεωρηθεί ως τελικός επιχειρησιακά αξιοποιήσιμος αλλά ως ένα πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση της κατασκευής ενός άτλαντα της χώρας. Πάντως, τα αποτελέσματα της εφαρμογής έδειξαν ότι (α) η προτεινόμενη μέθοδος είναι ικανοποιητική, (β) οι περισσότερες από τις παραμέτρους των όμβριων καμπυλών μπορούν να θεωρηθούν σταθερές σε μεγάλες γεωγραφικές περιοχές και να εκτιμηθούν από το σχετικώς αραιό δίκτυο βροχογράφων, (γ) οι υπόλοιπες παράμετροι μπορούν να εξαχθούν με βάση δεδομένα από το πυκνότερο δίκτυο βροχομέτρων, και (δ) η προτεινόμενη μέθοδος βοηθά στην κατασκευή χαρτών για την έμμεση κατάρτιση όμβριων καμπυλών χωρίς αναδρομή στα πρωτογενή δεδομένα.

Στην εν λόγω πιλοτική εργασία χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα 13 σταθμών με βροχογράφο, σχεδόν ομοιόμορφα κατανεμημένων στα υδατικά διαμερίσματα της Στερεάς Ελλάδας, και 58 σταθμών με βροχόμε-

τρο. Οι διάρκειες που επιλέχθηκαν για τα δείγματα των βροχογράφων είναι 1, 2, 6, 12, 24 και 48 h και για τα δείγματα των βροχομέτρων 24 και 48 h. Στα μέγιστα ύψη βροχής των βροχομέτρων εφαρμόστηκε η διόρθωση του σφάλματος διακριτοποίησης, όπως περιγράφεται στο εδάφιο 8.4.1.

Για την έκφραση των όμβριων καμπυλών χρησιμοποιήθηκε η κατανομή Gumbel, η οποία έδειξε να προσαρμόζεται ικανοποιητικά στο σύνολο των δειγμάτων. Υιοθετήθηκε η ακόλουθη έκφραση όμβριας

$$i = \frac{a(T)}{b(d)} = \frac{\frac{1}{\lambda} \left\{ \psi - \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right] \right\}}{d^\eta} \quad (8.39)$$

που διαθέτει τρεις μόνο παραμέτρους, τις η , ψ και λ .

Στο βήμα 2 της παραπάνω μεθοδολογίας (υποπερίπτωση 2.2) φάνηκε ότι οι παράμετροι η και ψ μπορούν να θεωρηθούν σταθερές ανά ζώνη (υδατικό διαμέρισμα), με τιμές που φαίνονται στο Σχ. 8.10. Προχωρώντας στο βήμα 3 της πιο πάνω μεθοδολογίας (υποπερίπτωση 3.2) υπολογίστηκε για καθέναν από τους βροχομετρικούς σταθμούς η παράμετρος λ (εξίσωση (8.38)) και στη συνέχεια ελέγχθηκε η προσαρμογή της εξίσωσης (8.39) στα δεδομένα, είτε γραφικά είτε με στατιστικές δοκιμές (χ^2). Τα αποτελέσματα του ελέγχου προσαρμογής ήταν γενικώς ικανοποιητικά.

Εναλλακτικά εξετάστηκε και η περίπτωση καθορισμού μιας σταθερής παραμέτρου, της η , από το βήμα 2 (υποπερίπτωση 2.2) και εκτίμησης των άλλων δύο παραμέτρων ψ και λ στο βήμα 3 (υποπερίπτωση 3.1). Τα αποτελέσματα σε αυτή την περίπτωση δεν είχαν ουσιαστικές διαφορές από αυτά της προηγούμενης, γι' αυτό και τελικά υιοθετήθηκε η πρώτη απλούστερη εκδοχή των δύο σταθερών παραμέτρων ανά ζώνη (υδατικό διαμέρισμα).

Αφού τελικά σε κάθε υδατικό διαμέρισμα υπάρχει μόνο μία παράμετρος, η λ , που μεταβάλλεται από θέση σε θέση αρκεί ένας μόνος χάρτης για την απεικόνιση της γεωγραφικής μεταβολής των όμβριων καμπυλών. Ο χάρτης αυτός αποφασίστηκε να δοθεί με τη μορφή των ισοϋετίων για διάρκεια βροχής 24 h και περίοδο επαναφοράς 5 (Σχ. 8.10). Για να κατασκευαστούν οι ισοϋέτιες υπολογίστηκε προηγουμένως σε κάθε θέση βροχομετρικού σταθμού το ύψος της μέγιστης 24ωρης βροχόπτωσης για $T =$

5, με βάση την (8.39) και στη συνέχεια χαράχτηκαν οι ισοϋέτιες με τη βοήθεια συστήματος γεωγραφικής πληροφορίας.

Χρησιμοποιώντας το χάρτη του Σχ. 8.10 μπορούμε να εφαρμόσουμε την αντίστροφη διαδικασία και να εκτιμήσουμε την όμβρια καμπύλη σε οποιοδήποτε σημείο της Στερεάς Ελλάδας. Συγκεκριμένα, εντοπίζουμε το σημείο στο χάρτη του Σχ. 8.10 και βρίσκουμε την τιμή $h_5(24)$ του μέγιστου 24ωρου ύψους βροχής για περίοδο επαναφοράς $T = 5$, ενώ από τον ίδιο χάρτη, ανάλογα με την ένταξη του σημείου σε μία από τις τρεις ζώνες, αποκτούμε τις τιμές των παραμέτρων η και ψ . Τέλος, υπολογίζουμε την παράμετρο λ από την ακόλουθη σχέση, η οποία είναι συνέπεια της (8.39):

$$\lambda = \frac{24^{1-\eta}}{h_5(24)} [\psi - \ln(-\ln 0.8)] \quad (8.40)$$

Η τελική έκφραση της όμβριας καμπύλης για το υπόψη σημείο προκύπτει με αντικατάσταση στην (8.39) των τιμών των παραμέτρων που καθορίστηκαν με τον παραπάνω τρόπο. Στην έκφραση αυτή η περίοδος επαναφοράς T αντιστοιχεί στη σειρά ετήσιων μεγίστων. Η αντίστοιχη εξίσωση για την περίοδο επαναφοράς T' της σειράς υπεράνω κατωφλίου προκύπτει άμεσα, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο εδάφιο 8.4.3, και είναι

$$i = \frac{\frac{1}{\lambda} (\psi + \ln T')}{d^\eta} \quad (8.41)$$

όπου οι παράμετροι η , ψ και λ έχουν τις ίδιες τιμές όπως στην (8.39).

Σχ. 8.10 (Επόμενη σελίδα) Χάρτης της Στερεάς Ελλάδας με πληροφορίες για την έμμεση εξαγωγή όμβριων καμπυλών. Οι συνεχείς γραμμές είναι οι ισοϋέτιες της μέγιστης 24ωρης βροχόπτωσης (σε mm) για περίοδο επαναφοράς $T = 5$. Οι διακεκομμένες γραμμές παριστάνουν τα όρια των υποπεριοχών με σταθερές παραμέτρους η και ψ . Οι κύκλοι και τα τετράγωνα δείχνουν τις θέσεις των βροχογραφικών και βροχομετρικών σταθμών, αντίστοιχα.

