



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

«ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ»

**Προσαρμογή εξελικτικού αλγορίθμου
ανόπτησης-απλόκου για βελτιστοποίηση
στοχαστικών στοχικών συναρτήσεων σε
προβλήματα υδατικών πόρων**

Παναγιώτης Σ. Κοσσιέρης

**«ΕΠΙΣΤΗΜΗ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ
ΠΟΡΩΝ**

Αθήνα, Δεκέμβριος 2013

Επιβλέπων: Καθηγητής Δ. Κουτσογιάννης

Ευχαριστίες

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της τόσο επίπονης, αλλά ταυτόχρονα ευχάριστης, προσπάθειας νοιώθω την ανάγκη να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στα άτομα που μου πρόσφεραν, πάντα απλόχερα και ανιδιοτελώς, τη βοήθειά τους.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από τα βάθη της καρδιάς μου τον Καθηγητή και Δάσκαλο Δημήτρη Κουτσογιάννη για την αμέριστη συμπαράσταση και βοήθεια που μου πρόσφερε. Επίσης, τον ευχαριστήσω γιατί κατάφερε να μου μεταδώσει ένα πολύ ιδιαίτερο τρόπο σκέψης, που στηρίζεται στην απλότητα, μα πάνω από όλα στην ανθρωπιά.

Θα ήθελα να πω ένα τεράστιο ευχαριστώ στον φίλο μου Αντρέα Ευστρατιάδη, ο οποίος έπαιξε καταλυτικό ρόλο τόσο στο σχεδιασμό όσο και στην ολοκλήρωση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας. Σε αυτόν οφείλω τη γνωριμία μου με τον μαγικό κόσμο της βελτιστοποίησης. Επίσης τον ευχαριστώ για τη ψυχολογική στήριξη που μου προσέφερε σε κρίσιμες στιγμές αυτής της εργασίας. Ο Αντρέας αποτελεί εδώ και πολλά χρόνια ένα τεράστιο κεφάλαιο του τομέα Υδατικών Πόρων, καταβάλλοντας μεγάλη προσπάθεια για την πρόοδο όλων των φοιτητών. Νοιώθω πραγματικά τυχερός που είχα την ευκαιρία να συνεργαστούμε τόσο στενά.

Θα ήταν μεγάλη παράλειψη αν δεν απέδιδα την ευγνωμοσύνη μου στα άτομα που με στηρίζουν σε κάθε βήμα της ζωής μου όλα αυτά τα χρόνια. Πρώτα, στη μητέρα μου, Ζωή, και στον αδερφό μου, Στέλιο, για την αμέριστη αγάπη που μου προσφέρουν. Στον Γιώργο και στη Χαρά για όλους αυτούς τους λόγους που τους κάνουν ξεχωριστούς. Στον Γιώργο και στη Γωγώ για τις πάσης φύσεως ενδιαφέρουσες και χρήσιμες συζητήσεις, μέσω των οποίων κατανόησα και διαλεύκανα πολλά λεπτά σημεία της μεταπτυχιακής μου.

Παναγιώτης Κοσσιέρης

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	i
---------------	---

Extended abstract	i
1 Εισαγωγή.....	1
1.1 Αντικείμενο της εργασίας	1
1.2 Πρωτότυπα σημεία.....	1
1.3 Διάρθρωση της εργασίας.....	3
2 Η έννοια της στοχαστικής βελτιστοποίησης και βιβλιογραφική επισκόπηση συναφών μεθόδων και τεχνικών	5
2.1 Θεμελιώδεις έννοιες και ορισμοί βελτιστοποίησης	5
2.1.1 Η βελτιστοποίηση ως μαθηματική έννοια	6
2.1.2 Βελτιστοποίηση συστημάτων υπό το καθεστώς αβεβαιοτήτων	8
2.2 Τεχνικές έμμεσης αναζήτησης (μέθοδοι κλίσης).....	14
2.2.1 Αναλυτικός υπολογισμός ακροτάτων	14
2.2.2 Η μέθοδος στοχαστικής προσέγγισης (stochastic approximation).....	16
2.2.3 Μέθοδοι επιφάνειας απόκρισης (response surface methodology).....	21
2.3 Τεχνικές άμεσης αναζήτησης.....	23
2.3.1 Τεχνικές αναζήτησης σε πρότυπο	23
2.3.2 Μέθοδοι βελτιστοποίησης βασιζόμενες στο άπλοκο.....	24
2.4 Τεχνικές ολικής βελτιστοποίησης.....	30
2.4.1 Η μέθοδος προσομοιωμένης απόπτωσης (simulated annealing)	30
3 Προσαρμογή του εξελικτικού αλγορίθμου απόπτωσης-απλόκου για τη βελτιστοποίηση στοχαστικών στοχικών συναρτήσεων.....	37
3.1 Γενικά χαρακτηριστικά του αλγορίθμου.....	38
3.2 Περιγραφή της υπολογιστικής διαδικασίας	40
3.3 Ανάλυση και προσαρμογή του αλγορίθμου σε στοχαστικά προβλήματα.....	44

4 Αξιολόγηση του νέου εξελικτικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου σε συναρτήσεις ελέγχου	53
4.1 Μαθηματικές συναρτήσεις ελέγχου	53
4.2 Μεθοδολογία αξιολόγησης αλγορίθμων	58
4.2.1 Δείκτες επίδοσης αλγορίθμων βελτιστοποίησης σε προβλήματα με αβεβαιότητα	59
4.3 Αξιολόγηση αλγορίθμων.....	60
5 Βαθμονόμηση υδρολογικών μοντέλων	69
5.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί	69
5.2 Περιγραφή του μοντέλου «Ζυγός»	72
5.3 Στοχαστική βαθμονόμηση μοντέλου «Ζυγός».....	78
5.3.1 Περιγραφή λεκανών μελέτης	78
5.3.2 Βαθμονόμηση και εφαρμογή του μοντέλου.....	81
6 Βαθμονόμηση του μοντέλου Bartlett – Lewis	89
6.1 Εισαγωγή - Η μελέτη της βροχής στις «μικρές» χρονικές κλίμακες	89
6.2 Μοντέλα συστάδων ορθογωνικών παλμών.....	91
6.2.1 Το μοντέλο ορθογωνικών παλμών Neyman-Scott (NSRPM).....	92
6.3 Το μοντέλο ορθογωνικών παλμών Bartlett – Lewis (BLRPM).....	94
6.3.1 Το τυχαίο μοντέλο Bartlett-Lewis (RBLRPM).....	100
6.3.2 Το τυχαίο μοντέλο γάμα Bartlett-Lewis (RPBLGM)	106
6.3.3 Άλλες εκδοχές μοντέλων Bartlett-Lewis	107
6.3.4 Βιβλιογραφικά συμπεράσματα από την εφαρμογή του μοντέλου	110
6.4 Εκτίμηση παραμέτρων μοντέλων Bartlett – Lewis.....	113
6.4.1 Τοποθέτηση του προβλήματος στα πλαίσια της βελτιστοποίησης.....	113

6.4.2	Κριτήρια επιλογής στατιστικών μεγεθών	114
6.4.3	Ευαισθησία παραμέτρων στην κλίμακα μελέτης.....	119
6.5	Εφαρμογή των μοντέλων Bartlett-Lewis για την προσομοίωση της βροχής της Αθήνας	121
6.5.1	Περιγραφή των δεδομένων και το κλίμα της Αθήνας.....	121
6.5.2	Εφαρμογή του κλασικού μοντέλου Bartlett - Lewis (BLRPM) στη βροχή της Αθήνας	132
6.5.3	Εφαρμογή του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis (BLRPM) στη βροχή της Αθήνας	147
7	Συμπεράσματα - Προτάσεις	178
	Βιβλιογραφία.....	180

Περίληψη

Στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας εξετάστηκε το πρόβλημα βελτιστοποίησης συστημάτων που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη πλήθους πηγών αβεβαιότητων. Κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης συστημάτων οι αβεβαιότητες μεταφέρονται, και τελικά αποτυπώνονται, στις αποκρίσεις των στοχικών συναρτήσεων, που χρησιμοποιούνται ως μέτρα επίδοσης, δυσκολεύοντας ιδιαίτερα τη διαδικασία αναζήτησης του ολικά βέλτιστου σημείου. Σε αυτά τα πλαίσια ερευνήθηκαν οι μέθοδοι και τεχνικές που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων και επιδιώχθηκε η βελτίωση του εξελικτικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου. Η βιβλιογραφική επισκόπηση είχε ως αποτέλεσμα τη σύλληψη και τελικά ενσωμάτωση στον κλασικό αλγόριθμο νέων μηχανισμών για τη περαιτέρω βελτίωση της αποτελεσματικότητάς του. Οι μηχανισμοί αφορούν στην προστασία του απλόκου από πρόωρο εκφυλισμό που επιφέρει γρήγορη σύγκλιση και παγίδευση του αλγορίθμου σε μη βέλτιστα σημεία. Ο νέος αλγόριθμος ελέγχθηκε σε μια σειρά από κλασικά μαθηματικά προβλήματα διαφορετικής δυσκολίας και διαστάσεων. Η παραγωγή τυχαίων αποκρίσεων έγινε μέσω της προσθήκης ενός τυχαίου όρου από κανονική κατανομή, με μηδενική μέση τιμή και μεταβλητή τυπική απόκλιση. Επιπλέον μελετήθηκαν σε βάθος δυο κλασικά προβλήματα από το χώρο της υδρολογίας. Το πρώτο αφορά την βαθμονόμηση υδρολογικών μοντέλων και το δεύτερο την εύρεση των παραμέτρων του στοχαστικού μοντέλου ανέλιξης Bartlett-Lewis για τη προσομοίωση της βροχής. Για το πρώτο πρόβλημα διατυπώθηκε μια νέα μέθοδος βαθμονόμησης σύμφωνα με την οποία, αντί για το σύνολο του δείγματος, χρησιμοποιούνται τυχαία δείγματα για τον υπολογισμό του δείκτη καλής προσαρμογής. Για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων, η παραπάνω μεθοδολογία εκτελέστηκε σε τρεις λεκάνες απορροής του Ελλαδικού χώρου που χαρακτηρίζονται από διαφορετικές υδρογεωλογικές ιδιότητες. Τέλος, εξετάστηκε η καταλληλότητα του μοντέλου Bartlett-Lewis για την αναπαραγωγή των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της βροχής της Αθήνας. Πέρα από τις αναλύσεις και την ερευνητική δουλειά, κατασκευάστηκαν, προς ελεύθερη χρήση, δυο πακέτα λογισμικού υλοποιημένα σε προγραμματιστική γλώσσα R. Το πακέτο EAS περιλαμβάνει το βελτιωμένο εξελικτικό αλγόριθμο ανόπτησης-απλόκου, ενώ το πακέτο Zygos ένα εννοιολογικό συγκεντρωτικό υδρολογικό μοντέλο προσομοίωσης.

Extended abstract

Introduction

Water resource problems are characterized by the presence of multiple sources of uncertainty. The implementation of Monte Carlo simulation techniques within powerful optimization methods is required, in order to handle these uncertainties. In the framework of the present thesis we investigate how the various sources of uncertainty affect the optimization procedure as well as the various models. Furthermore, we investigate a modified version of the evolutionary annealing-simplex method in global optimization applications, where uncertainty is explicitly considered in terms of stochastic objective functions. We evaluate the algorithm against several benchmark functions, as well as in the stochastic calibration of a lumped rainfall-runoff model (Zygos). In this context, we examine different calibration criteria and different sources of uncertainty, in order to assess not only the robustness of the derived parameters but also the predictive capacity of the models. As one other problem that requires the combined use of optimization and simulation, we examine the applicability of a widely used rainfall model for the case of Athens. Taking advantage of the simulation and optimization functionalities of HyetosR package, we evaluate the performance of two versions of Bartlett-Lewis model in representing the convective and frontal rainfall of Athens. We demonstrate that although these models reproduce the essential statistical characteristics of rainfall at the hourly as well as daily time scales (mean, variance, autocorrelation structure), they fail to preserve important temporal properties, such as the duration and time distance of rainfall events.

Posing the problem of optimization under uncertainty

Uncertainty appears in the majority of the real-world optimization problems, including hydrological. Typical sources are: (a) data uncertainty, due to observation and processing errors; (b) model uncertainty, due to simplified representation of significantly complex systems; (c) parameter uncertainty, due to statistically inconsistent fitting criteria and inefficient calibrations.

The optimization problem under uncertainty can be formulated as:

$$\min f(\mathbf{x}) = \min F(\mathbf{x}, \omega), \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}$$

where \mathbf{x} is a vector of n control variables, $f(\mathbf{x})$ is the fitness function, ω is a noise component and $F(\mathbf{x}, \omega)$ a random estimate at \mathbf{x} . In the case of simulation models, where the system performance f is inferred either from historical or synthetic data samples, ω represents the sampling uncertainty. Uncertainty makes the response surface of the function even rougher, by randomly creating local minima and maxima (Fig. 1).

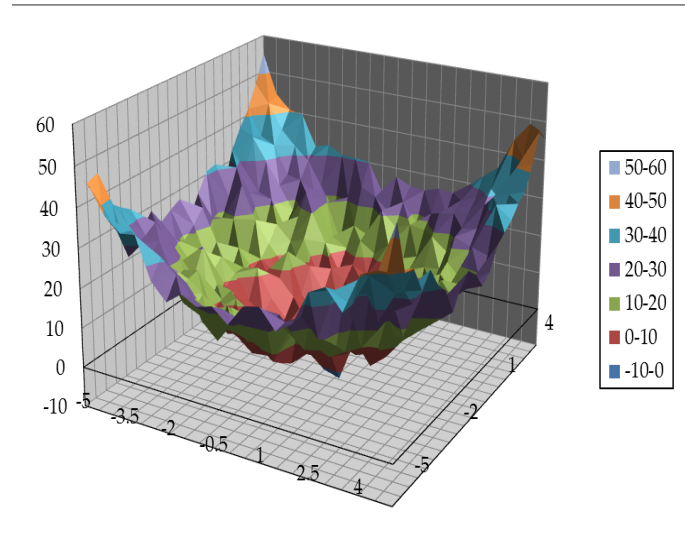


Figure 1: Response surface of noisy sphere function $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + N(0, 1)$.

The modified evolutionary annealing-simplex method for stochastic objective function

The evolutionary annealing-simplex method is a heuristic global optimization technique coupling the strength of simulated annealing in rough search spaces with the efficiency of the downhill simplex method (Nelder & Mead, 1965) in smoother spaces (Efstratiadis & Koutsoyiannis, 2002). The key features of the method are:

- an adaptive annealing cooling schedule determines the degree of randomness through the search procedure;
- all transitions are probabilistic, since a stochastic term is added to the objective function, relative to temperature, thus $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + uT$;
- new points are generated via simplex transformations or mutations;
- all simplex configurations employ quasi-stochastic scale factors;
- multiple expansions and uphill transitions are allowed, in order to accelerate the search and escape from local minima, respectively.

The original version of the above described method was modified to handle noisy objective functions and avoid early convergence to false optima or local minima, due to the dominance of noise. The modifications include:

- **Dynamic adjustment of shrinkage coefficient**, based on the current temperature of the system, T , which protects the algorithm from an early degeneration of the simplex (Fig. 2).
- **Re-evaluation of the current best point in the population** after n subsequent transformations that reduce the size of the simplex; this ensures that search will not be guided by a point, in which has assigned an erroneously low value, due to noise.
- **Re-annealing of the system** when the temperature, T , becomes lower than a specific value, to enhance the search procedure with sufficient randomness.

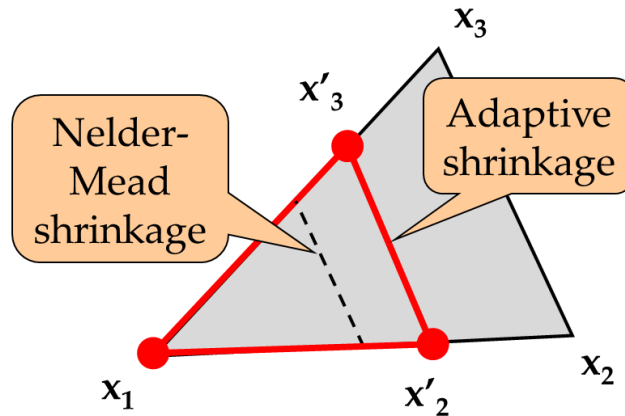


Figure 2: Shrinkage of the simplex around the current best vertex x_1 according to the Nelder-Mead formula, i.e. $\mathbf{x}'_i = 0.5 (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_1)$ and the dynamic adjustment formula, given by $\mathbf{x}'_i = \delta \mathbf{x}_i + (1 - \delta) \mathbf{x}_1$, where $\delta = 1 - 0.5 (T - T_0)$, T is the current temperature and T_0 is the initial temperature.

Test new evolutionary annealing-simplex algorithm in mathematical functions

We tested six benchmark functions of ranging complexity in deterministic and stochastic setting, assuming three levels of Gaussian noise by changing the standard deviation of the stochastic term, $N(0.0, 0.75)$, $N(0.0, 1.00)$ and $N(0.0, 1.25)$. In all cases the global minimum lies in the origin ($\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$). For each test function we carried out 100 independent runs of the algorithm, for $n = 2$ and $n = 10$ variables, as well as three population sizes ($n+1$, $2n+1$, $8n+1$). The results are summarized in the next figure (Fig.3).

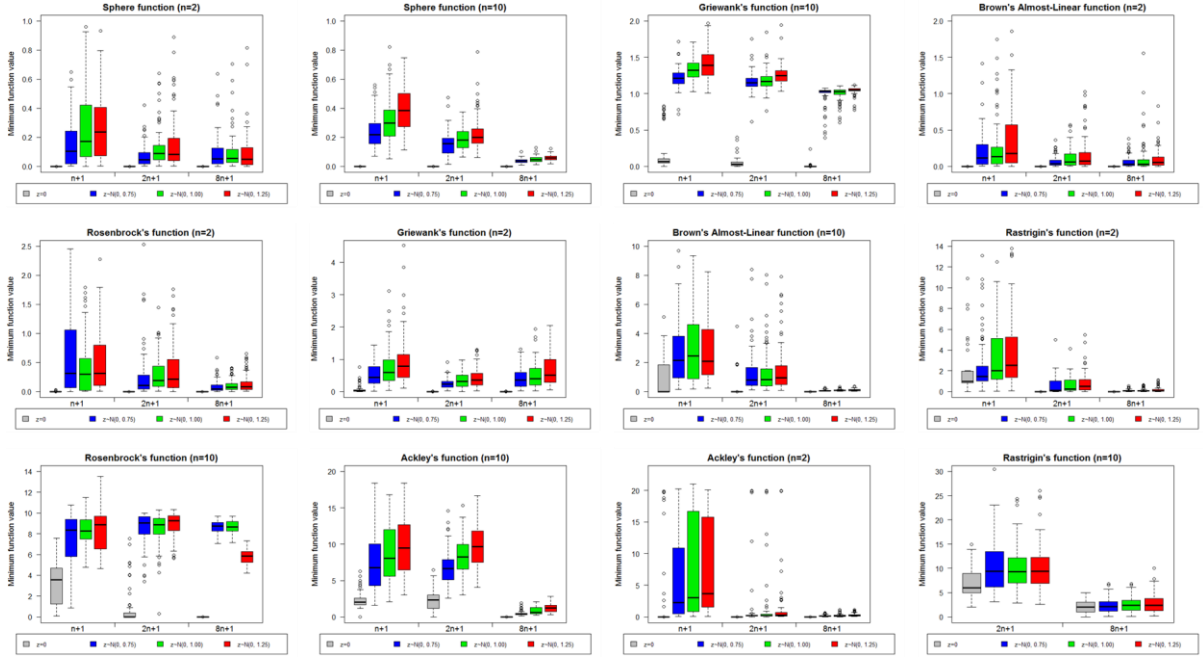


Figure 3: Box plots with optimization results, derived from 100 runs of each problem

Stochastic calibration of hydrological models

It is well-known that the parameters of conceptual hydrological models may vary substantially across different calibration periods. This questions model transposability in time, which is key requirement for ensuring a satisfactory predictive capacity (Gharari et al., 2013). In this context, we propose a stochastic calibration procedure, in which the fitting criterion (e.g. Nash-Sutcliffe efficiency, NSE) is estimated from randomly changing samples that are determined by means of (typically short) moving windows across the full series of the observed responses. The above strategy was tested in three large-scale river basins of Greece (Acheloos, Aliakmon and Boeotikos Kephisos) that exhibit different hydrological behaviour, where we fitted the conceptual model Zygus against the observed runoff. The software supports various parameterizations, according to the complexity of each basin and the available data, and its full structure uses nine parameters (<http://itia.ntua.gr/en/softinfo/22>). We applied the EAS algorithm to provide 100 independent stochastic calibrations at each basin, with different moving windows. As shown in the next Figures (Fig. 4-6), even when using very short windows (i.e. from 1 to 5 years), the NSE values are close to the ones estimated from the full sample of observed runoff.

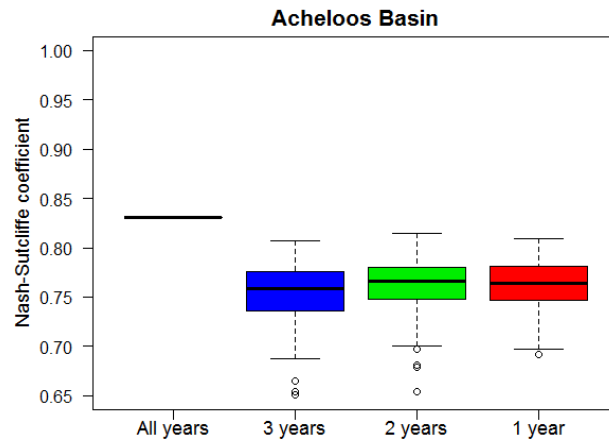


Figure 4: Boxplot of NSE at Acheloos Basin for different moving windows

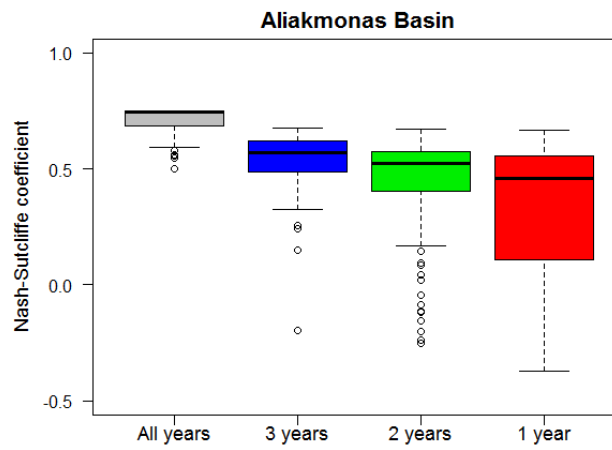


Figure 5: Boxplot of NSE at Aliakmonas Basin for different moving windows

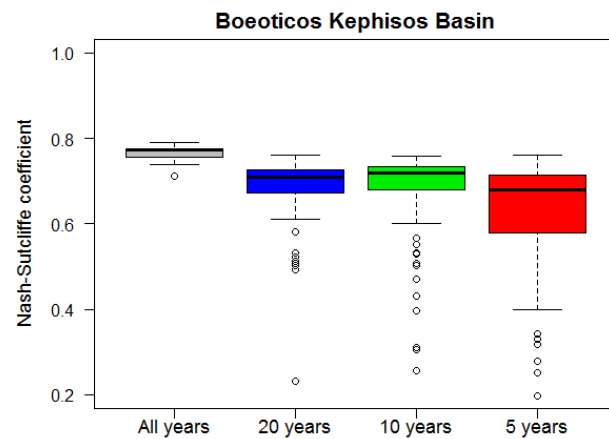


Figure 6: Boxplot of NSE at Boeotikos Kephisos Basin for different moving windows

Applicability of Bartlett-Lewis model in Athens Rainfall

In the framework of present study, we investigate the applicability of rectangular pulse Bartlett-Lewis model for the simulation of Athens rainfall. The main assumptions of the model are (Fig. 7):

- **Storm origins** t_i occur in a Poisson process, with rate λ
- **Cell origins** t_{ij} occur in a Poisson process, with rate β
- **Cell arrivals** terminate after time v_i , which is exponentially distributed (parameter γ)
- **Cell durations** w_{ij} are exponentially distributed (parameter η)
- **Cell intensities** x_{ij} are either exponentially or gamma distributed.

In the modified version (Rodriguez-Iturbe *et al.*, 1988), parameter η is assumed gamma distributed, with scale parameter ν and shape parameter a , and varies for each event, such as β/η and γ/η remain constant. Model parameters are estimated via calibration, seeking to minimize the departures between the key theoretical and observed statistics.

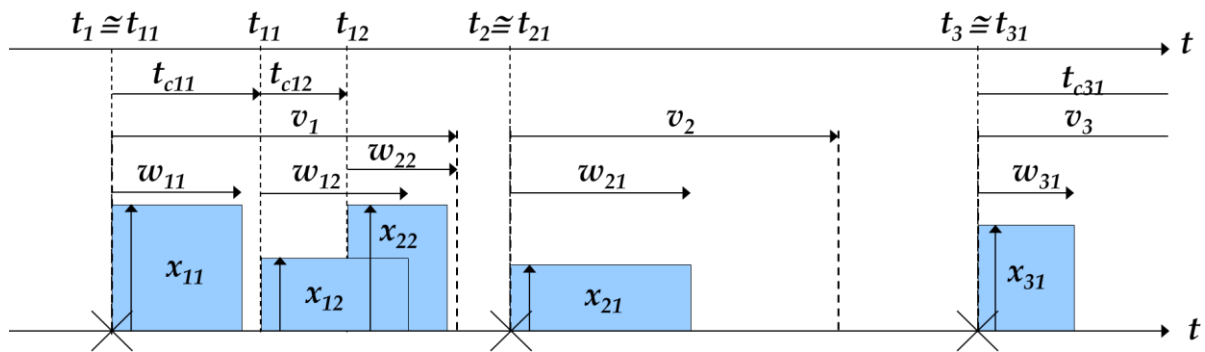


Figure 7: The Bartlett-Lewis model

We examined the performance of the original (BL) and modified (MBL) Bartlett-Lewis model using hourly rainfall data from the National Observatory of Athens (1927-1996), for two months with different meteorological behaviour (January, June). Model parameters were calibrated against the theoretical statistics (mean, standard deviation, autocovariance and probability dry), for 1 and 24 h. The simulated statistics were estimated from a synthetic series of 1000 years length. For the generation of synthetic series we used HyetosR package (Kossieris *et al.*, 2011). The next table represents a comparison between the historical, modelled and simulated statistics for the two versions of Bartlett-Lewis model.

	Historical	Theoretical – BL	Simulated – BL	Theoretical – RBL	Simulated – RBL	
Average (mm)	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065	January, Hourly statistics
Standard deviation (mm)	0.458	0.458	0.458	0.458	0.458	
Coefficient of skewness	16.957	-	11.884	-	12.663	
Average (mm)	1.555	1.555	1.557	1.563	1.563	January, Daily statistics
Standard deviation (mm)	4.532	4.532	4.535	4.053	4.083	
Coefficient of skewness	5.301	-	4.235	-	5.289	
Average (mm)	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	June, Hourly statistics
Standard deviation (mm)	0.370	0.370	0.375	0.370	0.374	
Coefficient of skewness	50.578	-	47.684	-	49.428	
Average (mm)	0.365	0.365	0.360	0.365	0.365	June, Daily statistics
Standard deviation (mm)	2.694	2.694	2.822	2.692	2.638	
Coefficient of skewness	11.881	-		-		

Table 1: Historical, modeled and simulated characteristics of BL model for daily and hourly rainfall of January and June

Apart from the main statistics, we also examined the performance of the two models on the temporal characteristics of Athens rainfall. Both versions of the BL model fail to reproduce the significant variability of rainfall events, due to the overclustering of pulses. This also results to an over-estimation of probability dry, at the hourly and daily time scales (Fig. 8) as well as the generation of rainfall events of shorter duration, and thus longer dry intervals (Figs. 9 and 10).

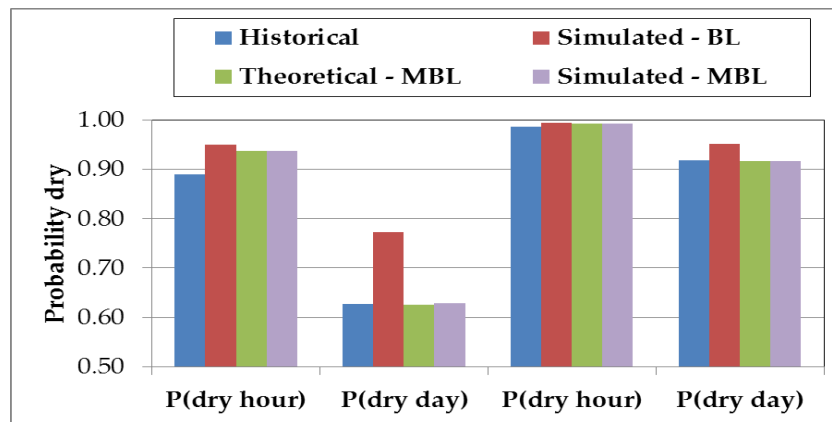


Figure 8: Probabilities of dry hour and dry day for January (left) and June (right).

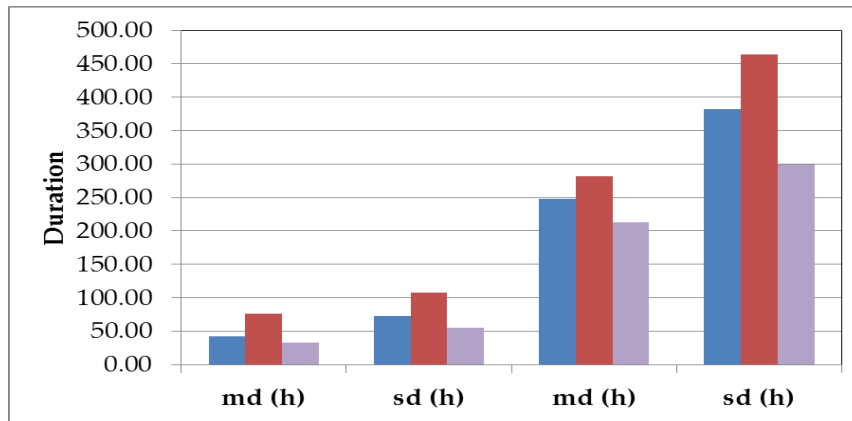


Figure 9: Mean (md) and standard deviation (sd) of dry time intervals for January (left) and June (right).

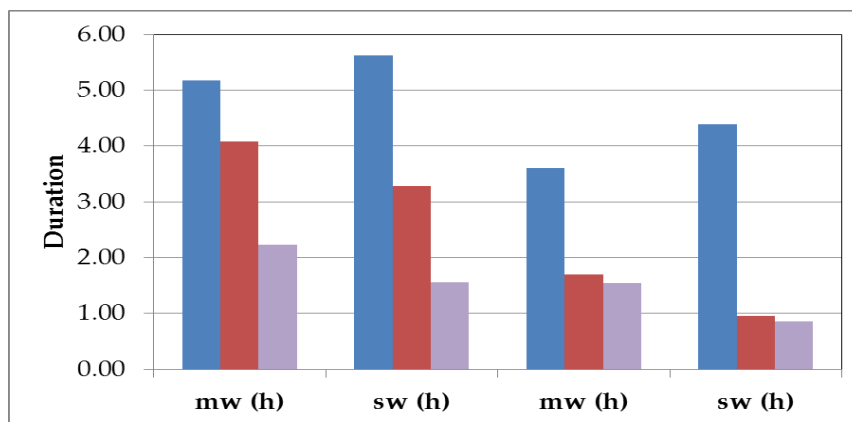


Figure 10: Mean (mw) and standard deviation (sw) of duration of rainfall events for January (left) and June (right).

Conclusions

- The various sources of uncertainty, involved either directly or indirectly, in real system optimization problems pose particular difficulties in the search of optimal solutions and decision-making. Uncertainties transferred to optimization problems creating response surfaces which are strongly disordered, rough and non-convex.
- The evolutionary annealing-simplex algorithm was tested on a series of mathematical functions when the response surface is disrupted by the addition of a stochastic term by normal distribution. As revealed by the increase in the intensity of noise, which is controlled through the standard deviation of the distribution, the performance of the algorithm is deteriorated. However, it seemed that the use of large populations for efficient exploration of the feasible search space allows the detection of global optimal point with relatively high accuracy. This finding is consistent with the general literature

which stated that the algorithms that make use of large populations (e.g. genetic algorithms) supersede those based on a small number of points to identify any area attraction.

- The presence of noise in the response of objective function changes drastically the search path of the algorithm against deterministic problems. Specifically, at each iteration the probability of executed move that reduces the volume of the simplex is twice the probability that the simplex become larger. This has as a consequence the strong disturbance of the shape and size of the simplex and fast convergence of the algorithm suboptimal spots.
- The integration of original annealing-simplex algorithm with new techniques and mechanisms has a positive effect on the overall performance of the algorithm. These techniques aim at preservation of simplex from premature degeneration and incorrect convergence to a sub-optimal point. The performance improvement was more pronounced in the use of smaller populations, while the performance of the two algorithms is almost identical for large populations.
- From the stochastic calibration of the conceptual hydrological model Zygos was proven both the robustness of the solutions found by the algorithm and the adequate predictive capacity of the model. Even with the use of very small sample length, model succeeds to yield sufficiently large amplitude responses that produce three basins with completely different characteristics.
- The Bartlett-Lewis model reproduces with high accuracy the basic statistical characteristics of Athens rainfall at different scales for a single set of parameters. However, the model fails to maintain the temporal properties of rainy episodes and dry periods so that its use is limited to the field of study of flooding.

Κεφάλαιο 1^ο

1 Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της εργασίας

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των μεθόδων και τεχνικών βελτιστοποίησης υπό το καθεστώς θορύβου και αβεβαιοτήτων. Οι τεχνικές αυτές βρίσκουν άμεση εφαρμογή σε προβλήματα υδατικών πόρων όπου καλούμαστε να έρθουμε συνεχώς αντιμέτωποι με τον στοχαστικό χαρακτήρα των υδρολογικών μεταβλητών. Η αβεβαιότητα εμφανίζεται στην πλειονότητα των πραγματικών προβλημάτων βελτιστοποίησης, επηρεάζοντας άμεσα τη διαδικασία λήψης αποφάσεων. Σε αυτά τα πλαίσια, ως πηγές αβεβαιότητας θα μπορούσαμε να ορίσουμε: (α) την ελλιπή γνώση πάνω σε κρίσιμες παραμέτρους του συστήματος, (β) την έλλειψη επαρκών δεδομένων, (γ) την ύπαρξη συστηματικών αλλά και τυχαίων σφαλμάτων στις μετρήσεις, (δ) τα δομικά σφάλματα των μαθηματικών μοντέλων προσομοίωσης λόγω των απλοποιητικών παραδοχών που αυτά ενσωματώνουν για την αναπαράσταση πολύπλοκων διεργασιών.

Αρχικά, διενεργήθηκε εκτενής θεωρητική βιβλιογραφική επισκόπηση των μεθόδων και τεχνικών που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της αβεβαιότητας κατά τη βελτιστοποίηση συστημάτων. Εν συνεχεία, μελετήθηκε η προσαρμογή του εξελικτικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου σε στοχαστικά προβλήματα και αξιολογήθηκε η επίδοσή του τόσο σε μαθηματικές συναρτήσεις ελέγχου όσο και σε δυο τυπικά προβλήματα υδατικών πόρων. Συγκεκριμένα, εξετάστηκε το πρόβλημα βαθμονόμησης υδρολογικών μοντέλων και στοχαστικών μοντέλων προσομοίωσης βροχής.

1.2 Πρωτότυπα σημεία

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αρχικά επιχειρήθηκε η αξιολόγηση της επίδοσης του εξελικτικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου σε προβλήματα βελτιστοποίησης, στα οποία η επιφάνεια απόκρισης είναι διαταραγμένη. Οι διαταραχές οφείλονται στην παρουσία αβεβαιοτήτων, που δεν επιτρέπουν τον ακριβή υπολογισμό της τιμής της στοχαστικής συνάρτησης, παρά μια σημειακή, τυχαία εκτίμηση αυτής. Τέτοιου είδους προβλήματα είναι συνήθη στο πεδίο της υδρολογίας όπου ερχόμαστε αντιμέτωποι συνεχώς με το στοχαστικό χαρακτήρα των υδρομετεωρολογικών διεργασιών. Ταυτόχρονα, η βιβλιογραφική

επισκόπηση πάνω σε μεθόδους και τεχνικές που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων είχε ως αποτέλεσμα τη σύλληψη και τελικά ενσωμάτωση στον κλασικό αλγόριθμο νέων μηχανισμών για την περαιτέρω βελτίωση της αποτελεσματικότητάς του. Οι μηχανισμοί αφορούν στην προστασία του απλόκου από πρόωρο εκφυλισμό που επιφέρει γρήγορη σύγκλιση και παγίδευση του αλγορίθμου σε μη βέλτιστα σημεία.

Για τον έλεγχο και σύγκριση των επιδόσεων τόσο του νέου και του κλασικού αλγορίθμου ανόπτησης-αλγορίθμου έγινε εκτενής επισκόπηση των μαθηματικών συναρτήσεων ελέγχου που χρησιμοποιούνται σε αυτές τις περιπτώσεις. Οι δοκιμές που έγιναν για τα διάφορα επίπεδα έντασης θορύβου, τις δυο διαστάσεις προβλημάτων και τις διαφορετικές παραμέτρους εισόδου των αλγορίθμων μας επέτρεψαν να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα για το πώς μεταβάλλεται η επίδοση συναρτήσει της μορφής του προβλήματος.

Στα πλαίσια της ίδιας εργασίας μελετήθηκαν σε βάθος δυο τυπικά προβλήματα εκτίμησης παραμέτρων από το χώρο της υδρολογίας. Το πρώτο αφορά την βαθμονόμηση υδρολογικών μοντέλων και το δεύτερο την εύρεση των παραμέτρων του στοχαστικού μοντέλου Bartlett-Lewis για τη προσομοίωση της βροχής. Για το πρώτο πρόβλημα διατυπώθηκε και ελέγχθηκε μια νέα μέθοδος βαθμονόμησης σύμφωνα με την οποία, αντί για το σύνολο του δείγματος, χρησιμοποιούνται τυχαία δείγματα για τον υπολογισμό του δείκτη καλής προσαρμογής. Για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων, η παραπάνω μεθοδολογία ελέγχθηκε σε τρεις λεκάνες απορροής του Ελλαδικού χώρου, που χαρακτηρίζονται από διαφορετική υδρολογική συμπεριφορά.

Στα πλαίσια του δεύτερου προβλήματος μελετήθηκε η καταλληλότητα του μοντέλου Bartlett-Lewis για την αναπαραγωγή των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της ωριαίας βροχής της Αθήνας (δεδομένα από Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών), για κάθε μήνα ξεχωριστά. Συγκεκριμένα εξετάστηκαν τόσο η κλασική όσο και η τυχαία έκδοση του μοντέλου για διαφορετικά σύνολα στατιστικών μεγεθών και στοχαστικών συναρτήσεων.

Σημαντική συμβολή της εργασίας αποτελεί και η ανάπτυξη πακέτων λογισμικού που υλοποιήθηκαν στη προγραμματιστική γλώσσα R. Το πρώτο, υπό την ονομασία EAS, περιλαμβάνει την νέα έκδοση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης, ενώ το δεύτερο το εννοιολογικό συγκεντρωτικό υδρολογικό μοντέλο Ζυγός, το οποίο λειτουργεί ως πρόσθετο εργαλείο του λογισμικού «Υδρογνώμων». Παράλληλα, βελτιώθηκε η ταχύτητα του πακέτου HyetosR με τη προσθήκη συναρτήσεων υλοποιημένων σε γλώσσα C++.

1.3 Διάρθρωση της εργασίας

Η παρούσα εργασία περιλαμβάνει, μαζί με την εισαγωγή (Κεφάλαιο 1), επτά Κεφάλαια και τρία Παραρτήματα.

Στο Κεφάλαιο 2 εισάγεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό την παρουσία αβεβαιοτήτων και γίνεται εκτενής βιβλιογραφική επισκόπηση των μεθόδων και τεχνικών που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί σε τέτοιου είδους προβλήματα. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη μέθοδο προσομοιωμένης ανόπτησης και στις μεθόδους που κάνουν χρήση του απλόκου.

Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται ο εξελικτικός αλγόριθμος ανόπτησης-απλόκου και μελετάται η προσαρμογή του σε στοχαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης.

Στο Κεφάλαιο 4 αξιολογείται η επίδοση του κλασικού και του νέου αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου σε μαθηματικές συναρτήσεις ελέγχου.

Στο Κεφάλαιο 5 μελετάται η εφαρμογή του νέου αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου στο πρόβλημα βαθμονόμησης του συγκεντρωτικού υδρολογικού μοντέλου «Ζυγός» και εισάγεται μια νέα μέθοδος αξιολόγησης της ευρωστίας των λύσεων και των τακτικών επίλυσης.

Στο Κεφάλαιο 6 εξετάζεται η εφαρμογή του στοχαστικού μοντέλου ορθογωνικών παλμών Bartlett-Lewis για τη προσομοίωση της βροχής της Αθήνας.

Στο Κεφάλαιο 7 συγκεντρώνονται τα κύρια συμπεράσματα της εργασίας και διατυπώνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Στο Παράρτημα Α δίνεται ο πηγαίος κώδικας των αλγορίθμων βελτιστοποίησης σε προγραμματιστική γλώσσα R και παρουσιάζεται το πακέτο EAS.

Στο Παράρτημα Β παρουσιάζεται το πακέτο HyetosR για την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών από το μοντέλο Bartlett-Lewis.

Τέλος, στο Παράρτημα Γ παρατίθεται ο πηγαίος κώδικας για το εννοιολογικό συγκεντρωτικό υδρολογικό μοντέλο «Ζυγός», σε προγραμματιστική γλώσσα R.

Κεφάλαιο 2^ο

2 Η έννοια της στοχαστικής βελτιστοποίησης και βιβλιογραφική επισκόπηση συναφών μεθόδων και τεχνικών

2.1 Θεμελιώδεις έννοιες και ορισμοί βελτιστοποίησης

Με τον όρο βελτιστοποίηση εννοούμε τη διαδικασία αξιολόγησης μιας σειράς εναλλακτικών επιλογών/αποφάσεων, μέσω ενός πραγματικού μέτρου επίδοσης που ποσοτικοποιεί τις επιπτώσεις κάθε επιλογής. Σε αυτή την περίπτωση, ως βέλτιστη νοείται εκείνη η απόφαση που μεγιστοποιεί τον εν λόγω μέτρο.

Η έννοια της βελτιστοποίησης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με αυτή του συστήματος καθώς, στην πράξη, τα περισσότερα προβλήματα μηχανικού θέτουν ως στόχο είτε το βέλτιστο σχεδιασμό είτε τη βέλτιστη λειτουργία ενός συστήματος. Σύμφωνα με τους Mays και Tung (1996) ως σύστημα νοείται ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους στοιχείων που αλληλεπιδρούν, το οποίο χαρακτηρίζεται από: α) ένα σύνορο που καθορίζει αν ένα στοιχείο ανήκει στο σύστημα ή στο περιβάλλον, β) αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον (είσοδοι-εξόδοι), και γ) σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του και των εισόδων-εξόδων.

Στην πράξη, η ανάλυση και προσομοίωση ενός πολύπλοκου συστήματος, όπως είναι τα φυσικά συστήματα, απαιτεί την κατασκευή ενός μοντέλου το οποίο, μέσω απλοποιητικών αλλά ταυτόχρονα ρεαλιστικών μαθηματικών και λογικών σχέσεων, περιγράφει τις λειτουργίες που συντελούνται σε αυτό. Έτσι, η βελτιστοποίηση ενός συστήματος μεταπίπτει σε πρόβλημα βελτιστοποίησης ενός μαθηματικού μοντέλου. Σύμφωνα με τον ορισμό του Pierre (1984): Ένα σύστημα είναι βέλτιστο ως προς ένα δεδομένο μέτρο επίδοσης και ένα δεδομένο σύνολο περιορισμών εφόσον λειτουργεί/αποδίδει τουλάχιστον ίσα αν όχι καλύτερα από κάθε άλλο σύστημα που ικανοποιεί τους ίδιους περιορισμούς.

Η αξιολόγηση και άρα η βελτιστοποίηση ενός συστήματος γίνεται μέσω ενός πραγματικού μέτρου επίδοσης, γνωστό και ως στοχική συνάρτηση (objective function), το οποίο εκφράζεται συναρτήσει ενός συνόλου παραμέτρων, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, που υπεισέρχονται στο μαθηματικό μοντέλο, και λαμβάνει τη μορφή:

$$P = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2-1)$$

Η παραπάνω σχέση δεν εκφράζει απόλυτα μια αναλυτική μαθηματική έκφραση, που περιγράφει άμεσα ένα σύστημα. Το εν λόγω μέγεθος μπορεί αν είναι ένα πραγματικό μετρήσιμο μέγεθος, ένας συνδυασμός πραγματικών μεγεθών ή ακόμη και ένας εμπειρικός δείκτης χωρίς φυσική ερμηνεία. Για παράδειγμα, σε προβλήματα βελτιστοποίησης μοντέλων προσομοίωσης, το αποτέλεσμα εκτιμάται μέσω ενός απλού μέτρου επίδοσης το οποίο «κρύβει» από πίσω του ένα σύνολο από πολύπλοκες υπολογιστικές διεργασίες.

2.1.1 Η βελτιστοποίηση ως μαθηματική έννοια

Από καθαρά μαθηματική σκοπιά, η βελτιστοποίηση έγκειται στη διαδικασία εντοπισμού των ακροτάτων μιας συνάρτησης. Συνεπώς, ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Να βρεθούν οι τιμές του διανύσματος \mathbf{x} , το οποίο ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί τη τιμή της συνάρτησης $f(\mathbf{x})$, ενώ παράλληλα ικανοποιούνται οι παρακάτω ανισωτικοί και εξισωτικοί περιορισμοί:

$$d_i(\mathbf{x}) \leq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2-2)$$

$$e_i(\mathbf{x}) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2-3)$$

όπου $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ ένα διάνυσμα n διαστάσεων με τις μεταβλητές ελέγχου x_i , για $i = 1, \dots, n$, $f(\mathbf{x})$ η αντικειμενική ή στοχική συνάρτηση (objective function), $d_i(\mathbf{x})$ και $e_i(\mathbf{x})$ οι μαθηματικές εκφράσεις των ανισωτικών και εξισωτικών περιορισμών αντίστοιχα, με a_i, b_i σταθερές. Στην περίπτωση πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης η στοχική συνάρτηση είναι ένα διάνυσμα της μορφής $f(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\}$. Αν από τη διατύπωση του προβλήματος, οι εξισώσεις 2-2 και 2-3 απουσιάζουν τότε αναφερόμαστε σε *προβλήματα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς* (unconstrained optimization), ενώ σε αντίθετη περίπτωση σε *προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς* (constrained optimization).

Οι μεταβλητές ελέγχου (control variables) x_i καλούνται επίσης μεταβλητές απόφασης (decision variables) ή απλά παράμετροι (parameters) του συστήματος, και λαμβάνουν τιμές από ένα σύνολο D το οποίο καλείται πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή εφικτός χώρος (feasible space) ή χώρος αποφάσεων (decision space) ή χώρος αναζήτησης (search space). Η γεωμετρική απεικόνιση της στοχικής συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ στο χώρο αναζήτησης D ονομάζεται επιφάνεια απόκρισης (response surface). Η επιφάνεια απόκρισης συχνά αντιμετωπίζεται ως γεωγραφικός χάρτης και για τη περιγραφή της τοπογραφίας της χρησιμοποιούνται όροι όπως

«λόφοι» (hills), «κορυφές» (picks), «αυχένες» (saddles), «κοιλάδες» (valleys), «χαράδρες» (ridges) και «βυθίσματα» (sinks).

Η μαθηματική μορφή της στοχικής συνάρτησης και των περιορισμών διαμορφώνει τόσο τη γεωμετρία του χώρου αναζήτησης D όσο και το τοπογραφικό ανάγλυφο της επιφάνειας απόκρισης. Εφόσον δεν εισάγονται στο πρόβλημα περιορισμοί, τότε ο χώρος αναζήτησης ταυτίζεται με τον n -διάστατο Ευκλείδειο χώρο, $D \equiv R^n$. Σε αντίθετη περίπτωση, ο χώρος αναζήτησης είναι ένα υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου, $D \subseteq R^n$. Οι χώροι αναζήτησης διακρίνονται σε γραμμικούς ή μη γραμμικούς, συνεχείς ή διακριτούς και σε κυρτούς ή μη κυρτούς. Ως γραμμικός ορίζεται ο χώρος αναζήτησης όταν περιγράφεται από γραμμικούς περιορισμούς της μορφής:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq, =, \geq 0 \quad (2-4)$$

Το πεδίο αναζήτησης D είναι συνεχές αν κάθε σημείο \mathbf{x} τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$, όπου \mathbf{x}_0 εσωτερικό σημείο του D και $\varepsilon > 0$, ανήκει στο D . Ένας μη συνεχής χώρος αναζήτησης καλείται διακριτός.

Μια ιδιότητα που παίζει ιδιαίτερο ρόλο στη βελτιστοποίηση είναι η κυρτότητα του χώρου αναζήτησης. Ένα n -διάστατο πεδίο D θα είναι κυρτό αν για κάθε ζεύγος σημείων $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \in D$ και για κάθε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in D$. Η σχέση αυτή υποδηλώνει πως για να χαρακτηριστεί ένα πεδίο κυρτό θα πρέπει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δυο οποιαδήποτε σημεία του να κείται και αυτό στο ίδιο πεδίο. Η έννοια της κυρτότητας μεταφέρεται και στην επιφάνεια απόκρισης μιας συνάρτησης. Έτσι, μια συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ με πεδίο ορισμού το κυρτό χώρο $D \subseteq R^n$ θα είναι κυρτή αν για κάθε ζεύγος σημείων $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \in D$ και για κάθε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει η σχέση:

$$\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_2) \geq f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \quad (2-5)$$

Η παραπάνω σχέση υποδεικνύει πως όταν η συνάρτηση είναι κυρτή, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δυο τυχαία σημεία του πεδίου ορισμού της δεν βρίσκονται ποτέ κάτω από το γράφημα της. Σε αυτή την περίπτωση, η επιφάνεια απόκρισης μιας μη γραμμικής συνάρτησης έχει τη μορφή «κρεμασμένου σεντονιού», και περιλαμβάνει ένα και μόνο ακρότατο, που είναι και το ολικό βέλτιστο. Αντίθετα, η συνάρτηση θα είναι μη κυρτή, με πολύπλοκη γεωμετρία και μεγάλο πλήθος τοπικών ελαχίστων και μεγίστων.

Στην πιο απλή περίπτωση, το σύνολο μαθηματικών περιορισμών περιγράφεται από σχέσεις της μορφής:

$$l_j \leq x_j \leq u_j \quad j=1,2,\dots,n \quad (2-6)$$

που εκφράζουν τα όρια διακύμανσης των παραμέτρων ή περιορισμούς τύπου χωρητικότητας. Αν η μαθηματική διατύπωση της στοχαστικής συνάρτησης και των περιορισμών είναι γραμμική τότε αναφερόμαστε σε *προβλήματα γραμμικής βελτιστοποίησης* (linear programming). Αν η $f(\mathbf{x})$ είναι τετραγωνική (quadratic) και οι περιορισμοί γραμμικοί τότε αναφερόμαστε σε *προβλήματα τετραγωνικής βελτιστοποίησης* (quadratic programming). Τέλος, αν η $f(\mathbf{x})$ είναι μη γραμμική ή τετραγωνική ή/και οι περιορισμοί μη γραμμικοί τότε έχουμε *προβλήματα μη γραμμικής βελτιστοποίησης* (nonlinear programming). Εκτός από τις εξισωτικές και ανισωτικές σχέσεις, σε πραγματικά προβλήματα ενσωματώνονται συχνά και άλλοι τύποι περιορισμών, όπως αυτοί που επιβάλλουν ακέραιες τιμές για κάποιες ή όλες τις μεταβλητές ελέγχου. Αν όλες οι μεταβλητές ελέγχου λαμβάνουν ακέραιες τιμές τότε έχουμε *καθαρό ακέραιο προγραμματισμό* (pure integer programming), ενώ σε αντίθετη περίπτωση αναφερόμαστε σε *μικτό ακέραιο προγραμματισμό* (mixed integer programming).

2.1.2 Βελτιστοποίηση συστημάτων υπό το καθεστώς αβεβαιοτήτων

Όπως είδαμε στην ενότητα 2.1, η βελτιστοποίηση είναι μια διαδικασία αξιολόγησης εναλλακτικών εφικτών επιλογών, με στόχο την εύρεση εκείνης που βελτιστοποιεί τη λειτουργία του συστήματος. Ωστόσο, στην πλειονότητα των πραγματικών πρακτικών προβλημάτων η παραπάνω διαδικασία διεξάγεται σε ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον που χαρακτηρίζεται από την έντονη παρουσία πλήθους αβεβαιοτήτων (uncertainties). Ο παράγοντας «αβεβαιότητα» μεταφέρεται, είτε άμεσα είτε έμμεσα, στο μέτρο επίδοσης που εξετάζεται, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται η διαδικασία αξιολόγησης και κατά συνέπεια η επιλογή εύρωστων λύσεων. Οι πηγές αβεβαιοτήτων ή θορύβου (noise) που υπεισέρχονται στη διαδικασία είναι πολλαπλές και μπορούν να αποδοθούν:

- στην ελλιπή γνώση και έλλειψη στοιχείων για κρίσιμες λειτουργίες του συστήματος
- σε δομικά σφάλματα του μαθηματικού μοντέλου προσομοίωσης
- σε σφάλματα πειραματικών μετρήσεων που χρησιμοποιούνται ως είσοδοι του μοντέλου
- στην αδυναμία εκτίμησης της ακριβούς επίδοσης του συστήματος όταν δεν είναι διαθέσιμη αναλυτική μαθηματική σχέση

- στην έλλειψη μεγάλου μήκους δειγμάτων για την αξιόπιστη βαθμονόμηση κρίσιμων παραμέτρων του συστήματος
- στην διαχρονική μεταβολή των χαρακτηριστικών του συστήματος (π.χ. λόγω εξωτερικών αλλαγών), που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση σταθερών τιμών των παραμέτρων του και επηρεάζει τόσο τη μορφή της στοχαστικής συνάρτησης όσο και τους περιορισμούς
- στη χρήση τεχνικών δειγματοληψίας για την εκτίμηση της επίδοσης του συστήματος, η οποία εξαρτάται από το εκάστοτε τυχαίο δείγμα.

Οι παραπάνω πηγές αβεβαιότητας εμφανίζονται, μεμονωμένα ή συνδυαστικά στα περισσότερα προβλήματα βελτιστοποίησης συστημάτων υδατικών πόρων. Ειδικότερα, το τελευταίο σημείο αφορά σε όλες τις εφαρμογές στοχαστικής προσομοίωσης, όπου μερικές τουλάχιστον από τις διεργασίες του συστήματος αναπαρίστανται ως τυχαίες μεταβλητές, οπότε και η εκτιμήτρια του μέτρου επίδοσης του συστήματος είναι εξ ορισμού τυχαία μεταβλητή. Πρακτικά, σε κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης συστημάτων υδατικών πόρων η στοχαστική συνάρτηση είναι αβέβαιη, καθώς η τιμή της εξαρτάται από κάποιο τυχαίο δείγμα.

Οι παραπάνω αβεβαιότητες μπορούν να ενσωματωθούν στη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης με διάφορους τρόπους. Ο πλέον συνήθης είναι με την προσθήκη ενός επιπλέον όρου στη στοχαστική συνάρτηση που αναπαριστά τη στοχαστική συνιστώσα του προβλήματος. Σε αυτή τη περίπτωση, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης έχει ως εξής:

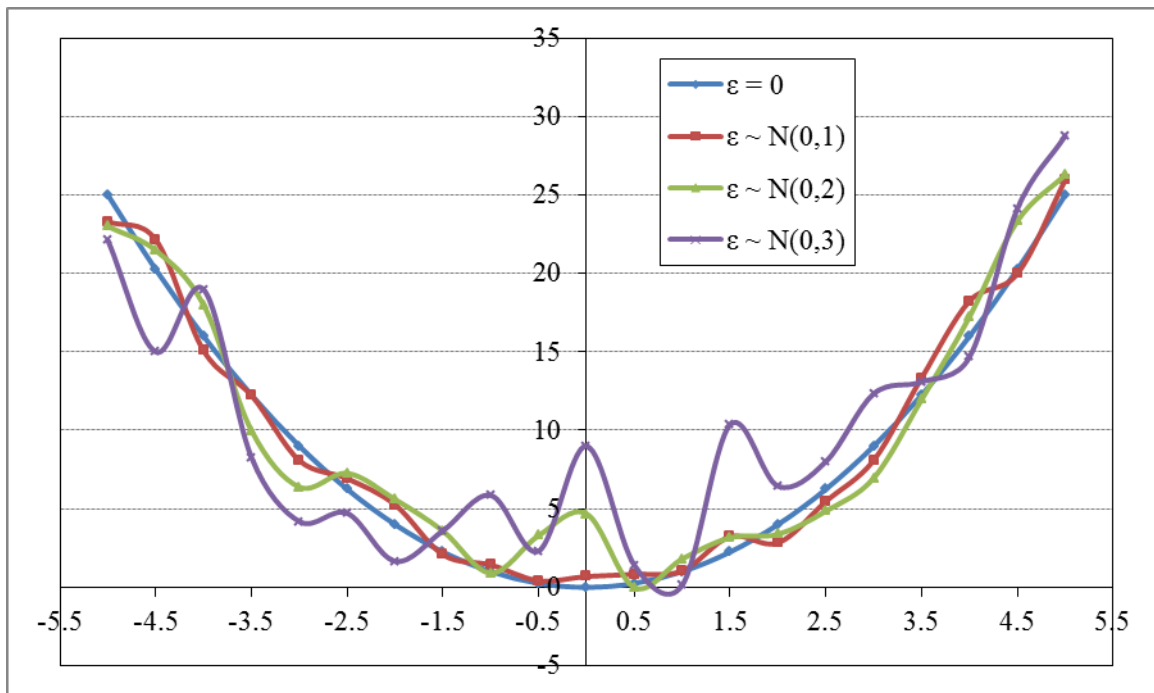
$$\min F(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D \quad (2-7)$$

όπου \mathbf{x} διάνυσμα μεταβλητών ελέγχου που λαμβάνουν τιμές στο $D = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}$, $f(\mathbf{x})$ η στοχαστική συνάρτηση του προβλήματος και $\varepsilon(\mathbf{x})$ τυχαία μεταβλητή, που αναπαριστά τη πηγή θορύβου-αβεβαιότητας που ενσωματώνεται στο πρόβλημα. Η συνιστώσα της αβεβαιότητας, $\varepsilon(\mathbf{x})$, είναι εκφρασμένη συναρτήσει του διανύσματος \mathbf{x} ώστε να υποδηλώνει το γεγονός ότι η συγκεκριμένη ποσότητα δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο του εφικτού χώρου D . Τελικά, η προς βελτιστοποίηση συνάρτηση είναι η $F(\mathbf{x})$, η οποία είναι και αυτή τυχαία μεταβλητή, και στην πραγματικότητα συμβολίζει μια σημειακή εκτίμηση (δείγμα) της $f(\mathbf{x})$ στο σημείο \mathbf{x} . Κατά κανόνα, μας ενδιαφέρει η βελτιστοποίηση της αναμενόμενης τιμής της $F(\mathbf{x})$, που δίνεται από τη σχέση:

$$E[F(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\mathbf{x}) + \varepsilon] p(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2-8)$$

όπου $p(\varepsilon)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής ε . Φυσικά, ο διαχωρισμός μεταξύ ντετερμινιστικής και στοχαστικής συνιστώσας είναι εφικτός μόνο σε θεωρητικά προβλήματα, που η ένταση και ο τρόπος επιβολής του θορύβου είναι ελεγχόμενος. Σε πραγματικά προβλήματα βελτιστοποίησης συστημάτων, η αβεβαιότητα είναι εκ φύσεως ενσωματωμένη στην απόκριση του συστήματος και το μοναδικό μέγεθος που είναι μετρήσιμο ή μπορεί να εκτιμηθεί μέσω προσομοίωσης είναι η τιμή $F(\mathbf{x})$.

Όπως είναι φυσικό, οι διάφορες πηγές αβεβαιότητας που διέπουν ένα σύστημα μεταφέρονται άμεσα στη διαδικασία βελτιστοποίησης, προκαλώντας την έντονη παραμόρφωση της επιφάνειας απόκρισης. Έτσι, ενώ στα προβλήματα χωρίς παρουσία θορύβου η επιφάνεια απόκρισης έχει σταθερή γεωμετρία, δηλαδή σε κάθε σημείο \mathbf{x} αντιστοιχεί μία συγκεκριμένη τιμή της $F(\mathbf{x})$, στα προβλήματα με αβέβαιες αποκρίσεις η γεωμετρία του χώρου αναζήτησης μεταβάλλεται συνεχώς. Χαρακτηριστικό είναι το ακόλουθο Γράφημα 2.1 που αναπαριστά την έντονη παραμόρφωση που υφίσταται η επιφάνεια απόκρισης της απλής τετραγωνικής συνάρτησης $f(x) = x^2$ με την προσθήκη μιας τυχαίας μεταβλητής από κανονική κατανομή. Η αρχικά ομαλή και κυρτή επιφάνεια μετατρέπεται σε μια διαρκώς μεταβαλλόμενη τραχιά επιφάνεια που χαρακτηρίζεται από μεγάλο αριθμό τοπικών ελαχίστων και μεγίστων. Παρατηρούμε δε, ότι η παραμόρφωση είναι τόσο μεγάλη που προκαλεί την εμφάνιση τοπικού μέγιστου στη θέση του ολικού ελάχιστου, ενώ το ολικό ελάχιστο μετατοπίζεται στιγμιαία σε άλλο σημείο του εφικτού χώρου. Όπως είναι λογικό, με την αύξηση της έντασης του θορύβου (noise strength), η παραμόρφωση της επιφάνειας απόκρισης γίνεται όλο και πιο έντονη.



Γράφημα 2.1: Διαταραχή της επιφάνειας απόκρισης της συνάρτησης $f(x) = x^2$ με τη προσθήκη τυχαίου όρου από κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 1, 2 και 3 αντίστοιχα

Χαρακτηριστικό παράδειγμα βελτιστοποίησης υπό την έντονη παρουσία αβεβαιοτήτων είναι η διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων στοχαστικών μοντέλων προσομοίωσης. Τα μοντέλα αυτά επιδιώκουν την περιγραφή πολύπλοκων διεργασιών και ενσωματώνουν από τη μαθηματική τους διατύπωση τυχαίες μεταβλητές για τη περιγραφή των στοχαστικών συνιστωσών του συστήματος. Συνεπώς, η απόκριση των στοχαστικών μοντέλων προσομοίωσης, για δεδομένο σύνολο τιμών των παραμέτρων τους, αποτελεί εκ φύσεως μια στιγμιαία αποτύπωση της επίδοσης, δηλαδή μια δειγματική απόκριση (sample response). Με άλλα λόγια, για το ίδιο σύνολο τιμών των παραμέτρων $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, το σύστημα έχει διαφορετικές αποκρίσεις $f(\mathbf{x}, \omega)$, με τον όρο ω να υποδεικνύει την επίδραση του στοχαστικού όρου στην απόκριση.

Στην πλειονότητα των περιπτώσεων, από τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης μοντέλων προσομοίωσης επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση της αναμενόμενης τιμής της στοχαστικής συνάρτησης του προβλήματος. Σε αυτή τη περίπτωση το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\min F(\mathbf{x})=E[f(\mathbf{x}, \omega)], \mathbf{x} \in D \subset R^n \quad (2-9)$$

όπου \mathbf{x} διάνυσμα μεταβλητών ελέγχου που λαμβάνουν τιμές στο $D = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}$, $f(\mathbf{x}, \omega)$ ένα δείγμα του μέτρου επίδοσης (sample performance measure) στο σημείο \mathbf{x} , και

$E[f(\mathbf{x}, \omega)]$ η αναμενόμενη τιμή του μέτρου επίδοσης στο σημείο \mathbf{x} . Τα διανύσματα \mathbf{l} και \mathbf{u} είναι το άνω και κάτω όριο διακύμανσης για τις παραμέτρους \mathbf{x} . Ανάλογα με τη δομή του εφικτού χώρου D , μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής τρεις κατηγορίες προβλημάτων:

- Συνεχή προβλήματα προσομοίωσης - βελτιστοποίησης (continuous optimization via simulation problems). Το διάνυσμα \mathbf{x} περιέχει διακριτές ή ακέραιες μεταβλητές απόφασης που λαμβάνουν τιμές σε ένα διακριτό υποσύνολο $D \in R^n$.
- Διακριτά προβλήματα προσομοίωσης - βελτιστοποίησης (discrete optimization via simulation problems). Το διάνυσμα \mathbf{x} περιέχει συνεχείς μεταβλητές απόφασης που λαμβάνουν τιμές σε ένα κυρτό υποσύνολο $D \in R^n$.
- Προβλήματα κατάταξης και επιλογής (ranking and selection problem). Ο εφικτός χώρος D περιέχει μικρό πλήθος λύσεων (συνήθως λιγότερες από 100), οι οποίες μπορούν να αξιολογηθούν άμεσα ώστε να επιλεγεί η βέλτιστη.

Παρά το γεγονός ότι η παραπάνω διατύπωση είναι η πιο συνήθης, σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί και πλήρης, καθώς δεν λαμβάνει υπόψη της άλλα σημαντικά στατιστικά χαρακτηριστικά της τυχαίας μεταβλητής «μέτρο επίδοσης», $f(\mathbf{x}, \omega)$, όπως είναι η διασπορά και η διάμεσος. Για παράδειγμα, αν κάποιος ενδιαφερόταν να ελαχιστοποιήσει τη διασπορά των αποκρίσεων ενός συστήματος και όχι την αναμενόμενη τιμή της, η παραπάνω διατύπωση του προβλήματος θα ήταν ακατάλληλη. Ακατάλληλη θα ήταν επίσης και στην περίπτωση που το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση της πιθανότητας η απόκριση να υπερβεί κάποιο συγκεκριμένο κατώφλι.

Συχνά, σε προβλήματα εύρεσης παραμέτρων στοχαστικών μοντέλων προσομοίωσης η στοχαστική συνιστώσα του μοντέλου μεταφέρεται και στους περιορισμούς που έχουν τεθεί. Ένα χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η διαστασιολόγηση ταμιευτήρων, δηλαδή η εκτίμηση της ελάχιστης ωφέλιμης χωρητικότητας του ταμιευτήρα ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση d σύμφωνα με κάποια πιθανότητα, που είναι γνωστή και ως αξιοπιστία του συστήματος. Σε τέτοιου είδους προβλήματα, που χαρακτηρίζονται από πλήθος αβεβαιοτήτων λόγω των φυσικών διεργασιών που εμπλέκονται, χρησιμοποιούνται περιορισμοί της μορφής:

$$\mathbf{P}\{\mathbf{g}(\mathbf{x}) < 0\} > 1 - \mathbf{a} \quad (2-10)$$

όπου \mathbf{P} ένα διάνυσμα με τις πιθανότητες παραβίασης των περιορισμών, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ διάνυσμα με τους περιορισμούς του προβλήματος, και \mathbf{a} ένα διάνυσμα με τις τιμές διακινδύνευσης που είμαστε σε θέση να δεχτούμε. Οι περιορισμοί του προβλήματος έχουν αποκτήσει πλέον και

αυτοί χαρακτήρα τυχαίας μεταβλητής και συνήθως αντικαθίστανται από την αναμενόμενη τιμή τους.

Για τη βελτιστοποίηση στοχαστικών στοχικών συναρτήσεων και μοντέλων προσομοίωσης έχουν κατά καιρούς προταθεί πολλές τεχνικές και αλγόριθμοι αναζήτησης, οι οποίοι έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να λαμβάνουν υπόψη τους την παρουσία του θορύβου κατά την υπολογιστική διαδικασία. Επίσης, χρησιμοποιείται ευρέως πλήθος μεθόδων τοπικής και ολικής βελτιστοποίησης, οι οποίες στην πραγματικότητα έχουν σχεδιαστεί για την επίλυση ντετερμινιστικών προβλημάτων. Οι μέθοδοι αυτές είτε εφαρμόζονται αυτούσιες, είτε προσαρμόζονται, μέσω κατάλληλων τροποποιήσεων, στις ανάγκες και απαιτήσεις του στοχαστικού προβλήματος.

Για την αποτελεσματική λειτουργία των παραπάνω μεθόδων πολλές φορές επιχειρείται ακόμα και τροποποίηση του στοχαστικού προβλήματος ώστε αυτό να αντιμετωπίζεται ως ντετερμινιστικό. Στα πλαίσια αυτής της λογικής τοποθετείται η βελτιστοποίηση με βάση τη διαδρομή του δείγματος (sample path optimization) σύμφωνα με την οποία η απόκριση του συστήματος δεν προκύπτει από έναν μόνο υπολογισμό (προσομοίωση), αλλά λαμβάνεται ίση με το μέσο όρο των αποκρίσεων που προκύπτουν από πολλές ανεξάρτητες σημειακές δοκιμές. Έστω ότι επιθυμούνται την επίλυση του προβλήματος όπως αυτό ορίστηκε από τη σχέση (2-9). Έστω $f' = (f(\mathbf{x}_0, \omega_1), f(\mathbf{x}_0, \omega_2), \dots, f(\mathbf{x}_0, \omega_m), \dots)$ ένα σύνολο με όλες τις πιθανές τιμές που μπορεί να λάβει η συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ στο σημείο \mathbf{x}_0 . Ορίζουμε τη δειγματική μέση τιμή των m πρώτων παρατηρήσεων ως:

$$\bar{f}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(\mathbf{x}_0, \omega_i) \quad (2-11)$$

Εφόσον οι ανεξάρτητων τυχαίες μεταβλητές, $f(\mathbf{x}_0, \omega_i)$, ακολουθούν την ίδια κατανομή και το δείγμα m είναι μεγάλο, τότε σύμφωνα με τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών θα ισχύει:

$$\bar{f}(\mathbf{x}_0) \rightarrow F(\mathbf{x}_0) \quad (2-12)$$

Συνεπώς, για βελτιστοποίηση επιλέγεται η συνάρτηση:

$$\min \bar{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D \subset R^n \quad (2-13)$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι απαλλαγμένο από το θόρυβο και για την επίλυσή του μπορούν να χρησιμοποιηθούν τεχνικές βελτιστοποίησης μη στοχαστικών προβλημάτων. Περισσότερα

στοιχεία για τις μεθόδους βελτιστοποίησης που μπορούν να συνδυαστούν με τη παραπάνω λογική παρουσιάζονται στις εργασίες των Chen and Schmeiser (1994), Shapiro (1996) και Robinson (1996).

2.2 Τεχνικές έμμεσης αναζήτησης (μέθοδοι κλίσης)

Οι τεχνικές έμμεσης αναζήτησης, γνωστές και ως μέθοδοι κλίσης, στηρίζουν τη λειτουργία τους στις ιδιότητες του διαφορικού λογισμού, για τον εντοπισμό κάποιου τοπικού ακρότατου. Κατά τη διάρκεια της αναζήτησης, οι παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της στοχικής συνάρτησης παρέχουν στον αλγόριθμο πληροφορίες για τον τρόπο που αυτός θα κινηθεί στην επιφάνεια απόκρισης. Η παράγωγος 1^{ης} τάξης παρέχει πληροφορίες για την κατεύθυνση κατά την οποία η f παρουσιάζει το μεγαλύτερο βαθμό μείωσης (κατεύθυνση πλέον απότομης κατάβασης) και με τον μηδενισμό της υποδεικνύει τον εντοπισμό ενός στάσιμου σημείου. Εφόσον έχει εντοπιστεί ένα στάσιμο σημείο, από τις τιμές των παραγώγων 2^{ης} τάξης προκύπτει αν αυτό είναι τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο ή σημείο σέλλας.

2.2.1 Αναλυτικός υπολογισμός ακροτάτων

Ο αναλυτικός υπολογισμός των ακροτάτων μιας συνάρτησης είναι εφικτός εφόσον διατίθενται αναλυτικές μαθηματικές εξισώσεις τόσο για τη συνάρτηση f όσο και για τις παραγώγους αυτής.

Μια πραγματική συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ ορισμένη στο $X \subseteq R^n$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο (local minimum) στο σημείο $\mathbf{x}^* \in X$ όταν υπάρχει περιοχή $X_0 \subset X$ του \mathbf{x}^* τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X_0$ να ισχύει:

$$f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}) \quad (2-14)$$

Αντίστοιχος είναι και ο ορισμός για το τοπικό μέγιστο (local maximum). Κάθε σημείο τοπικού ελαχίστου ή τοπικού μεγίστου καλείται τοπικό ακρότατο (local extreme), ενώ όταν $X_0 \equiv X$ το ακρότατο χαρακτηρίζεται ως ολικό (global).

Έστω $f(\mathbf{x})$ συνάρτηση ορισμένη στο R^n η οποία είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 1^{ης} και 2^{ης} τάξης. Τότε ως κλίση ή βαθμίδα της $f(\mathbf{x})$ ορίζεται:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \text{grad}f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right]^T \quad (2-15)$$

Δηλαδή, η κλίση της συνάρτησης είναι ένα διάνυσμα το οποίο έχει συντεταγμένες τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης (διανυσματική συνάρτηση). Εφόσον η κλίση στο σημείο \mathbf{x}^* είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \text{grad}f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2-16)$$

τότε το σημείο \mathbf{x}^* είναι τοπικό ακρότατο. Σε αντίθετη περίπτωση το παραπάνω μέγεθος υποδεικνύει την κατεύθυνση πλέον απότομης μεταβολής της f κοντά στο \mathbf{x}_0 .

Ωστόσο, για να χαρακτηριστεί ένα σημείο \mathbf{x}^* ως ελάχιστο, μέγιστο ή σημείο σέλλας (saddle point) απαιτείται ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων $2^{\text{ης}}$ τάξης της συνάρτησης. Με την υπόθεση ότι οι μερικές παράγωγοι $2^{\text{ης}}$ τάξης της f είναι συνεχής κοντά και γύρω από το σημείο υπολογισμού τους ορίζεται το εσσιανό (Hessian) μητρώο:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

Αν $H_i(\mathbf{x})$ είναι η i υπο-ορίζουσα του εσσιανού μητρώου, η οποία προκύπτει με αφαίρεση των $n - i$ τελευταίων γραμμών και στηλών του, τότε:

- Αν $H_i(\mathbf{x}^*) > 0$ για κάθε i , το \mathbf{x}^* είναι τοπικό ελάχιστο
- Αν $H_i(\mathbf{x}^*) < 0$ για κάθε i , και $\text{sign}(H_i) = \text{sign}(-1)^i$ το \mathbf{x}^* είναι τοπικό μέγιστο
- Αν $H_i(\mathbf{x}^*) \neq 0$ για κάθε i και δεν ισχύει καμία από τις παραπάνω συνθήκες, το μπορεί να είναι στάσιμο σημείο αλλά δεν είναι ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο σέλλας, δηλαδή η τομή επιπέδων που το ένα παρουσιάζει μέγιστο και το άλλο ελάχιστο.
- Αν $H_i(\mathbf{x}^*) = 0$ για κάθε i τότε δεν μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα.

Αν η συνάρτηση είναι κυρτή και ικανοποιούνται η πρώτη ή η δεύτερη από τις παραπάνω συνθήκες, τότε έχει μοναδικό στάσιμο σημείο που αντιστοιχεί στο ολικό ακρότατο αυτής (είτε μέγιστο είτε ελάχιστο). Αν δεν ισχύει το κριτήριο κυρτότητας τότε η συνάρτηση έχει παραπάνω από ένα στάσιμα σημεία και χαρακτηρίζεται ως πολυκόρυφη ή πολυσχηματική.

2.2.2 Η μέθοδος στοχαστικής προσέγγισης (stochastic approximation)

Η πιο γνωστή τεχνική έμμεσης αναζήτησης για τη βελτιστοποίηση στοχαστικών μοντέλων προσομοίωσης και συναρτήσεων υπό τη παρουσία θορύβου είναι η μέθοδος στοχαστικής προσέγγισης (stochastic approximation algorithm). Η μέθοδος αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η στοχαστική εκδοχή της μεθόδου πλέον απότομης κατάβασης (steepest descent method), η οποία ψάχνει την επόμενη λύση στη διεύθυνση κατά την οποία η f έχει το μεγαλύτερο βαθμό μείωσης γύρω από το τρέχον καλύτερο σημείο.

Στη μέθοδο πλέον απότομης κατάβασης, η παραγωγή του νέου σημείου $\mathbf{x}^{[k]}$ γίνεται προς την κατεύθυνση που υποδεικνύει η κλίση της συνάρτησης στο προηγούμενο σημείο $\mathbf{x}^{[k-1]}$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{x}^{[k-1]} - \beta^{[k]} \nabla f(\mathbf{x}^{[k-1]}) \quad (2-18)$$

όπου $\mathbf{x}^{[k-1]}$ το σημείο που έχει βρεθεί στην επανάληψη $k-1$, $\mathbf{x}^{[k]}$ το νέο σημείο στην επανάληψη k , $\nabla f(\mathbf{x}^{[k-1]})$ το διάνυσμα των παραγώγων της $f(\mathbf{x})$ στο σημείο $\mathbf{x}^{[k-1]}$, και $\beta^{[k]}$ βαθμωτό μέγεθος το οποίο υποδεικνύει το μέγεθος της μετακίνησης.

Η μέθοδος πλέον απότομης κατάβασης στηρίζεται στον εντοπισμό, σε κάθε επανάληψη, της διεύθυνσης κατά την οποία προκαλείται η μεγαλύτερη μεταβολή στη συνάρτηση και στον εντοπισμό του βέλτιστου σημείου πάνω σε αυτή τη ευθεία. Ωστόσο, αν επιχειρηθεί μια απότομη κατάβαση με μεγάλο βήμα, β , ελλοχεύει ο κίνδυνος απόκλισης του αλγορίθμου από τη γειτονιά του τοπικού ακρότατου. Για να αποφευχθεί αυτό το ενδεχόμενο, το μέγεθος $\beta^{[k]}$ υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη k από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης:

$$g(\beta^{[k]}) = f(\mathbf{x}^{[k]} - \beta^{[k]} \nabla f(\mathbf{x}^{[k]})) \quad (2-19)$$

Η σύγκλιση της μεθόδου πλέον απότομης κατάβασης είναι αργή και επιβραδύνεται ακόμα περισσότερο όσο πλησιάζουμε στη γειτονιά του τοπικού ελάχιστου.

Οι Robbins and Monro (1951) διετύπωσαν μια τροποποιημένη εκδοχή της παραπάνω μεθοδολογίας για την εύρεση των ριζών μιας συνάρτησης όταν δεν είναι διαθέσιμη η αναλυτική μαθηματική της σχέση. Η επαναληπτική διαδικασία διατυπώνεται, κατά αντιστοιχία με τη μέθοδο πλέον απότομης κατάβασης, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{x}^{[k-1]} - \alpha_n^{[k]} \hat{\nabla} f(\mathbf{x}^{[k-1]}) \quad (2-20)$$

όπου $\mathbf{a}_n^{[k]}$ ένα διάνυσμα με τα μεγέθη των μετακινήσεων (step size) και $\hat{\nabla} f(\mathbf{x}^{[k-1]})$ μια εκτίμηση της κλίσης $\nabla f(\mathbf{x}^{[k-1]})$ στο σημείο $\mathbf{x}^{[k-1]}$.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι η μέθοδος στοχαστικής προσέγγισης διαφέρει ως προς αυτή της πλέον απότομης κατάβασης σε δυο κρίσιμα σημεία. Πρώτον, χρησιμοποιεί μια εκτίμηση της πραγματική κλίσης της συνάρτησης για την εύρεση της διεύθυνσης μετακίνησης, και δεύτερον το μέγεθος των μετακινήσεων είναι προκαθορισμένο και δεν προσαρμόζεται άμεσα στην μορφή της επιφάνειας απόκρισης. Και τα δυο αυτά μεγέθη παίζουν καθοριστικό ρόλο στην επιτυχή σύγκλιση της μεθόδου. Οι τεχνικές που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί για την αριθμητική εκτίμηση των παραγώγων περιγράφονται στην ενότητα που ακολουθεί.

Ο αρχικός αλγόριθμος των Robbins and Monro, καθώς και οι μετέπειτα βελτιωμένες εκδοχές του, έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως σε συνεχή προβλήματα βελτιστοποίησης μοντέλων προσομοίωσης. Εκτενή επισκόπηση των κριτηρίων σύγκλισης, που έχουν κατά καιρούς διατυπωθεί, για τη μέθοδο στοχαστικής προσέγγισης γίνεται από τον Spall (1998). Στην παρούσα εργασία θα περιοριστούμε στο πιο απλό αλλά ταυτόχρονα και πιο γενικό κριτήριο που αφορά την ακολουθία των διανυσμάτων των μετακινήσεων $\mathbf{a}_n^{[k]}$.

Η επιλογή της ακολουθίας των μεγεθών των μετακινήσεων, $\{\mathbf{a}^{[k]}\}$, γίνεται στην ουσία με βάση δυο αντικρουόμενα κριτήρια. Αφενός, θα πρέπει να περιορίζεται η επιρροή του θορύβου στον υπολογισμό της σχέσης (2-20), ειδικά όταν βρισκόμαστε στη περιοχή του τοπικού ακροτάτου, και αφετέρου θα πρέπει να αποφεύγεται η πρόωρη σύγκλιση του αλγορίθμου σε κάποιο μη στάσιμο σημείο. Για να επιτευχθεί το πρώτο, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η χρήση πολύ μικρών διαταραχών κοντά στη γειτονιά του τοπικού ακροτάτου, δηλαδή $\mathbf{a}_n^{[k]} \rightarrow 0$ για $k \rightarrow \infty$, ενώ για το δεύτερο απαιτείται η κλιμακωτή μείωση

του μεγέθους των διαταραχών όσο προχωρά η διαδικασία $\sum_{k=0}^{\infty} a_n^{[k]} = \infty$. Ο Andradottir (1998)

επισημαίνει πως οι δυο παραπάνω προϋποθέσεις εγγυώνται τη σύγκλιση του αλγορίθμου, μόνο περίπτωση που στη γειτονιά του τοπικού ελάχιστου η επιφάνεια απόκρισης είναι ομαλή και η κλίση σχετικά μικρή, δηλαδή η μείωση στη τιμή της στοχαστικής συνάρτησης γίνεται με αργό ρυθμό.

Τα παραπάνω κριτήρια ικανοποιούνται όταν η ακολουθία των διαταραχών παράγεται σύμφωνα με τη σχέση $a/(k+1)$, όπου a βαθμωτό μέγεθος και k ο αριθμός των

επαναλήψεων. Οι Robbins and Monro (1951) επισημαίνουν πως με την υιοθέτηση της παραπάνω σχέσης για τη παραγωγή των διαταραχών, επιτυγχάνεται ο μέγιστος ρυθμός σύγκλισης του αλγορίθμου, που είναι ίσος με $n^{-1/2}$. Όπως είναι φυσικό, η επιτυχία της μεθόδου στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στην επιλογή του βαθμωτού μεγέθους α (Andradottir, 1998), που συνήθως γίνεται μέσω δοκιμών (Spall, 1998).

Για τη βελτίωση του αλγορίθμου έχουν προταθεί διάφορες τροποποιημένες εκδόσεις που διαφοροποιούνται ως προς τον τρόπο παραγωγής της ακολουθίας $\{\alpha^{[k]}\}$ και τον τρόπο υπολογισμού της κλίσης της συνάρτησης. Στον αλγόριθμο των Kiefer and Wolfowitz (1952) η εκτίμηση της κλίσης της συνάρτησης γίνεται με χρήση πεπερασμένων διαφορών (Ενότητα 2.2.2.1). Ο Spall (1992) για τη μείωση του υπολογιστικού φόρτου διατυπώνει δυο νέους αλγορίθμους οι οποίοι υιοθετούν τη μέθοδο ανάλυσης απειροστικών διαταραχών για την εκτίμηση της κλίσης της συνάρτησης. Πολλοί ερευνητές θεωρούν πως είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται το ίδιο μέγεθος διαταραχών $\alpha_n^{[k]}$ σε πολλούς επαναληπτικούς κύκλους και να εκτελείται η μείωσή του μόνο όταν υπάρχουν ενδείξεις ότι η τρέχουσα λύση βρίσκεται στη γειτονιά κάποιου τοπικού ακρότατου (Andradottir, 1998). Ωστόσο, μια τέτοια προσέγγιση αυξάνει τη πιθανότητα ο αλγόριθμος να συγκλίνει πρόωρα σε ένα μη βέλτιστο σημείο (Fu and Healy, 1997). Επιπλέον, για τη μείωση της επιρροής του θορύβου, η παραπάνω μεθοδολογία μπορεί να συνδυαστεί με τον υπολογισμό των τιμών της συνάρτησης μέσω ανεξάρτητων δειγματοληψιών σε κάθε σημείο $\mathbf{x}^{[k]}$. Όπως είναι λογικό αυτή η προσέγγιση αυξάνει τρομερά τον ήδη μεγάλο υπολογιστικό φόρτο.

Παρά το γεγονός ότι οι παραπάνω αλγόριθμοι έχουν εφαρμοστεί εκτενώς σε προβλήματα βελτιστοποίησης πολύπλοκων μοντέλων με πολλές παραμέτρους επίλυσης, η επίδοσή τους περιορίζεται στον υπολογισμό τοπικών ελαχίστων και μεγίστων.

2.2.2.1 Υπολογισμός διανύσματος κλίσης υπό την παρουσία θορύβου

Σε κάθε επανάληψη k , η μέθοδος στοχαστικής προσέγγισης απαιτεί την εκτίμηση της κλίσης για την εύρεση της διεύθυνσης κατά την οποία θα γίνει η παραγωγή του νέου σημείου. Στη περίπτωση που δεν διατίθεται αναλυτική μαθηματική σχέση για την στοχαστική συνάρτηση και τις παραγώγους της, καθώς και στις περιπτώσεις μεγάλου υπολογιστικού φόρτου, η εκτίμηση της κλίσης γίνεται αριθμητικά.

Συνήθως, ο υπολογισμός της κλίσης γίνεται μέσω σχημάτων πεπερασμένων διαφορών (finite-difference approximations). Έστω \mathbf{e}_i η i στήλη ενός μοναδιαίου πίνακα με διαστάσεις $n \times n$,

όπου n η διάσταση του προβλήματος. Τότε, η εκτίμηση της κλίσης, $\nabla f(\mathbf{x}^{[k-1]})$, με σχήμα κατάντη διαφορών (forward finite-difference) θα είναι:

$$\hat{\nabla}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \left[\begin{array}{c} f(\mathbf{x} + c\mathbf{e}_1) \\ f(\mathbf{x} + c\mathbf{e}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x} + c\mathbf{e}_n) \end{array} \right] - f(\mathbf{x}) \quad (2-21)$$

όπου c μικρό βαθμωτό μέγεθος, θετικά ορισμένο, με το μέγεθος της διαταραχής γύρω από το \mathbf{x} . Αντίστοιχα, η εκτίμηση της κλίσης, με σχήμα κεντρικών διαφορών (central finite-difference) θα είναι:

$$\hat{\nabla}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2c} \left[\begin{array}{c} f(\mathbf{x} + c\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x} - c\mathbf{e}_1) \\ f(\mathbf{x} + c\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{x} - c\mathbf{e}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x} + c\mathbf{e}_n) - f(\mathbf{x} - c\mathbf{e}_n) \end{array} \right] \quad (2-22)$$

Συνεπώς, για την εκτίμηση της κλίσης με σχήμα ανάντη διαφορών απαιτούνται $n + 1$ υπολογισμοί της στοχικής συνάρτησης, ενώ με το σχήμα κεντρικών διαφορών απαιτούνται $2n$. Η τελευταία μέθοδος μπορεί να είναι πιο επίπονη υπολογιστικά, αλλά παρέχει εκτίμηση με λιγότερη μεροληψία. Η επιτυχία των δυο μεθόδων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την τιμή που θα λάβει το μέγεθος c , δηλαδή η διαταραχή γύρω από τη τρέχουσα θέση. Μικρή τιμή για το μέγεθος c εξασφαλίζει μικρότερη μεροληψία στην εκτίμηση της κλίσης, αλλά οι εκτιμήσεις που λαμβάνονται από ανεξάρτητες επαναλήψεις έχουν συχνά μεγάλη διασπορά. Ένας τρόπος για να αντιμετωπιστεί αυτό είναι μέσω ανεξάρτητων δειγματοληψιών, δηλαδή επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς της στοχικής συνάρτησης σε μια θέση \mathbf{x} , και υπολογισμός των διαφορικών με χρήση της μέσης τιμής του δείγματος.

Οι παραπάνω τεχνικές είναι εντελώς αναποτελεσματικές και χρονοβόρες, όταν η διάσταση του προβλήματος, n , είναι μεγάλη, λόγω του υψηλού υπολογιστικού φόρτου και της μεροληψίας που εισάγεται στη διαδικασία. Ο Spall (1998), για την αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας, προτείνει μια τροποποιημένη εκδοχή του σχήματος ανάντη διαφορών, η οποία απαιτεί μόνο δυο υπολογισμούς της στοχικής συνάρτησης για την εκτίμηση της κλίσης. Η μέθοδος ονομάζεται σχήμα ανάντη διαφορών με παράλληλες διαταραχές (simultaneous perturbations finite-difference) και εκτιμά την κλίση από τη σχέση:

$$\hat{\nabla}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} B_1^{-1} \\ B_2^{-1} \\ \vdots \\ B_n^{-1} \end{bmatrix} \frac{f(\mathbf{x} + c\mathbf{B}) - f(\mathbf{x} - c\mathbf{B})}{2c} \quad (2-23)$$

όπου $\mathbf{B}=(B_1, B_2, \dots, B_n)^T$ διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών με κατανομή Bernoulli, που λαμβάνουν τιμές -1 και 1 με ίση πιθανότητα.

Ο Azadivar (1999) τονίζει πως η μέθοδος ανάντη διαφορών με παράλληλες διαταραχές κρύβει πολλούς κινδύνους και για την επιτυχή λειτουργία της θα πρέπει να ικανοποιούνται συγκεκριμένες προϋποθέσεις τόσο για τη στοχαστική συνάρτηση όσο και για την πιθανοτική κατανομή από την οποία θα παραχθεί το διάνυσμα των διαταραχών. Προτείνει δε και άλλους τρόπους παραγωγής των διαταραχών πέραν της κατανομής Bernoulli (Fu et al, 2005).

Στην περίπτωση που η εσωτερική δομή του μοντέλου προσομοίωσης είναι γνωστή, δηλαδή όταν το μοντέλο δεν αντιμετωπίζεται ως ένα μαύρο κουτί (black-box models), μπορούμε να βελτιώσουμε την εκτίμηση της κλίσης με χρήση επιπλέον πληροφοριών. Εκτενή βιβλιογραφική επισκόπηση των μεθόδων που ακολουθούν αυτή τη λογική γίνεται από τον Fu (2008). Οι σημαντικότερες από αυτές είναι η μέθοδος ανάλυσης διαταραχών (perturbation analysis) και η μέθοδος *λόγου πιθανοφάνειας* (likelihood ratio). Οι δυο αυτές μέθοδοι έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως στη βελτιστοποίηση μοντέλων προσομοίωσης καθώς ο υπολογισμός όλων των μερικών παραγώγων γίνεται μέσω μιας μόνο προσομοίωσης.

Η μέθοδος ανάλυσης διαταραχών προσπαθεί να εκτιμήσει τις κλίσεις της στοχαστικής συνάρτησης μελετώντας την ευαισθησία που δείχνει η απόκριση του συστήματος σε μικρές διαταραχές των τιμών των μεταβλητών απόφασης. Στην πραγματικότητα, ποσοτικοποιεί την επίδραση που έχει η μεταβολή της κάθε μεταβλητής στη συνολική μεταβολή της απόκρισης του συστήματος. Η μέθοδος ανάλυσης διαταραχών προτάθηκε από τους Ho and Cao (1983) και στηρίζεται στην υπόθεση:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla E[Y(\mathbf{x})] = E[\nabla Y(\mathbf{x})] \quad (2-24)$$

όπου $Y(\mathbf{x})$ τυχαία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί το στοχαστικό κριτήριο Lipschitz, δηλαδή είναι ομοιόμορφα συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της. Τότε, η κλίση της $Y(\mathbf{x})$ που υπολογίζεται μέσω προσομοίωσης, αποτελεί προσέγγιση της κλίσης της $f(\mathbf{x})$. Εφόσον για τη συνάρτηση $Y(\mathbf{x})$ ικανοποιείται το κριτήριο Lipschitz, η εκτιμήτρια είναι αμερόληπτη και η διαδικασία πολύ γρήγορη, καθώς εκτελείται ένας μόνο υπολογισμός της

στοχικής συνάρτησης. Ωστόσο, η μέθοδος δεν είναι αξιόπιστη στη περίπτωση που κάποια μικρή αλλαγή στη τιμή κάποιας μεταβλητής αλλάζει εντελώς τη συμπεριφορά του μοντέλου προσομοίωσης. Συνεπώς, ο μελετητής θα πρέπει να έχει ιδιαίτερα καλή γνώση του μοντέλου και των διεργασιών που αυτό προσομοιώνει (Azadivar, 1999). Εκτενή ανάλυση πάνω στις μεθόδους ανάλυσης διαταραχών για την εκτίμηση της κλίσης μιας συνάρτησης γίνεται από τους Ho και Cao (1991).

Η πιο γνωστή μέθοδος ανάλυσης διαταραχών είναι η μέθοδος απειροστικών διαταραχών (infinitesimal perturbation analysis). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, προκαλείται μια τυχαία διαταραχή, $\Delta \mathbf{x}$, γύρω από το σημείο \mathbf{x} , στη θέση του οποίου θέλουμε να εκτιμήσουμε την κλίση της συνάρτησης, $\nabla f(\mathbf{x})$, και υπολογίζεται η τιμή της f σε δυο νέα σημεία, $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$ και $\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}$. Η μερική παράγωγος της f ως προς την μεταβλητή απόφασης x_i υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (Spall, 1998):

$$g_i(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x_i} \quad (2-25)$$

για $i = 1, \dots, n$. Από την παραπάνω σχέση γίνεται φανερό πως η μέθοδος απαιτεί τον υπολογισμό της συνάρτησης δυο φορές.

Για την εκτίμηση των κλίσεων, χρησιμοποιούνται επίσης η μέθοδος λόγων πιθανοφάνειας (Glynn, 1987) και η μέθοδος ανάλυσης πεδίου συχνοτήτων (Schruben and Cogliano, 1981). Περισσότερα στοιχεία για τις μεθόδους αυτές καθώς και για τις παραλλαγές που έχουν κατά καιρούς προταθεί δίνονται στις εργασίες των Azadivar (1999), Azadivar et al. (1999), και Spall (1998).

2.2.3 Μέθοδοι επιφάνειας απόκρισης (response surface methodology)

Στις μεθόδους επιφάνειας απόκρισης (response surface methodology) χρησιμοποιούνται μαθηματικές και στατιστικές τεχνικές για την ανάλυση και προσομοίωση πολύπλοκων διεργασιών που είναι συνάρτηση πολλών παραμέτρων. Οι μέθοδοι αυτές βρίσκουν εφαρμογή στη βελτιστοποίηση πολύπλοκων μοντέλων προσομοίωσης τόσο διακριτών όσο και συνεχών παραμέτρων, για τα οποία δεν υπάρχει αναλυτική μαθηματική σχέση που να αποδίδει την απόκριση του συστήματος. Γενικά, τα μοντέλα επιφάνειας απόκρισης επιχειρούν να προσομοιώσουν τη συμπεριφορά ενός συστήματος με τη προσαρμογή γραμμικών και μη γραμμικών σχέσεων (μοντέλα παλινδρόμησης), που συνδέουν τις αποκρίσεις του

συστήματος, y , με τις n παραμέτρους του, $\mathbf{x}_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Έτσι, ένα γραμμικό μοντέλο 1^{ης} τάξης θα δίνεται από τη σχέση:

$$y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n + \varepsilon \quad (2-26)$$

όπου a_i , για $i = 0, \dots, n$, συντελεστές παλινδρόμησης και ε το σφάλμα μετρήσεων ή ο θόρυβος. Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να κατασκευαστούν και μη γραμμικά μοντέλα ανώτερων τάξεων. Για την προσαρμογή συνήθως χρησιμοποιούνται τεχνικές παλινδρόμησης και νευρωνικά δίκτυα.

Απώτερος στόχος των μεθόδων αυτών είναι η κατασκευή και εξερεύνηση της γεωγραφίας της επιφάνειας απόκρισης και εν συνεχεία ο εντοπισμός της βέλτιστης απόκρισης του μοντέλου. Οι θεμελιώδεις αρχές της μεθοδολογίας διατυπώθηκαν από τους Box and Wilson (1951), οι οποίοι μελέτησαν το πρόβλημα εύρεσης του ελάχιστου μιας τετραγωνικής συνάρτησης που διαταράσσεται από τη παρουσία θορύβου. Η μεθοδολογία που γενικά ακολουθείται είναι η εξής (Fu and Healy, 1997): Αρχικά προσαρμόζεται ένα γραμμικό μοντέλο για την χονδροειδή περιγραφή μιας μεγάλης περιοχής της επιφάνειας απόκρισης και στη συνέχεια εντοπίζονται οι περιοχές που ενδέχεται να περιέχουν τοπικά ακρότατα. Για την λεπτομερέστερη εξερεύνηση των περιοχών αυτών επιχειρείται η προσαρμογή αναλυτικότερων, μη γραμμικών μοντέλων υψηλότερων τάξεων. Στις μαθηματικές σχέσεις που προκύπτουν από τη προσαρμογή, εφαρμόζεται μια κλασική τεχνική βελτιστοποίησης. Συχνά εφαρμόζεται η μέθοδος πλέον απότομης κατάβασης (Azadivar, 1999; Heller and Staats, 1973). Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης παράγει καινούργια σημεία μέχρι να αποδειχτεί πως το μαθηματικό μοντέλο που έχει προσαρμοστεί είναι ακατάλληλο για την περαιτέρω περιγραφή του εφικτού χώρου. Εν συνεχεία προσαρμόζεται ένα νέο μαθηματικό μοντέλο και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι τον εντοπισμό του τοπικού ακρότατου.

Οι Azadivar και Talavage (1980) επισημαίνουν πως η παραπάνω μεθοδολογία είναι πιο αποτελεσματική από την απευθείας εφαρμογή μεθόδων κλίσης σε προβλήματα που η επιφάνεια απόκρισης είναι σχετικά ομαλή, αλλά αποτυγχάνει πλήρως σε προβλήματα που η επιφάνεια απόκρισης της στοχική συνάρτησης χαρακτηρίζεται από μη ομαλό ανάγλυφο, με έντονες κορυφογραμμές και επίπεδες επιφάνειες. Το μεγάλο μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι απαιτείται μεγάλο πλήθος από προσομοιώσεις τόσο κατά τη κατασκευή της μαθηματικής σχέσης, όσο και κατά την βελτιστοποίησή του.

2.3 Τεχνικές άμεσης αναζήτησης

Οι τεχνικές άμεσης αναζήτησης (direct search methods) χρησιμοποιούνται ευρέως για τη βελτιστοποίηση μοντέλων προσομοίωσης, καθώς για την εφαρμογή τους δεν απαιτούν τη γνώση της αναλυτικής σχέσης της συνάρτησης και την εκτίμηση των παραγώγων αυτής. Η επαναληπτική διαδικασία εξελίσσεται βασιζόμενη απλά στον υπολογισμό της τιμής της στοχικής συνάρτησης για κάποιο δεδομένο σύνολο τιμών των μεταβλητών απόφασης. Το γεγονός δε, ότι οι κανόνες διερεύνησης του εφικτού χώρου δεν βασίζονται απλά στις τιμές της συνάρτησης αλλά στη σχετική τους διάταξη, καθιστά τις εν λόγω μεθόδους ως τις πλέον κατάλληλες για προβλήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από την παρουσία θορύβου.

2.3.1 Τεχνικές αναζήτησης σε πρότυπο

Ο όρος τεχνικές άμεσης αναζήτησης προέρχεται από τους Hooke and Jeeves (1961), οι οποίοι στην πρωτοποριακή εργασία τους διέτυψαν την μέθοδο άμεσης αναζήτησης σε πρότυπο (direct pattern search method). Η μέθοδός τους βασίζεται στην ιδέα ότι αν σε κάποια διεύθυνση έχει εντοπιστεί μια λύση που βελτιώνει την τρέχουσα βέλτιστη τότε η αναζήτηση θα πρέπει να συνεχιστεί προς την κατεύθυνση αυτή.

Ο αλγόριθμος ξεκινά με την επιλογή ενός συνόλου από διακεκριμένα σημεία του εφικτού χώρου, τα οποία στην ουσία αποτελούν τους κόμβους ενός θεωρητικού πλέγματος. Το πλέγμα συντελεί έναν υπερκύβο, ο οποίος διαμορφώνεται από τους άξονες \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, n$. Σε κάθε επανάληψη k , έχουμε ένα σημείο αναφοράς (base point) $\mathbf{x}^{[k]} \in R^n$, ένα διάνυσμα $\mathbf{d}^{[k]} \in R^n$ που είναι το μήκος της μετατόπισης (step length) κατά την τελευταία επανάληψη, $k-1$, και ένα νέο μήκος $h^{[k]}$. Σε κάθε επανάληψη εκτελούνται και ελέγχονται δυο ειδών κινήσεις. Μια κίνηση με χρήση του ήδη υπάρχοντος μήκους μετατόπισης (pattern step) και μια κίνηση με καινούργια διερευνητικά μήκη (exploratory steps). Η πρώτη ισοδυναμεί με διπλασιασμό του προηγούμενου βήματος και παράγει ένα νέο ενδιαμέσο σημείο $\mathbf{y}^{[k]} = \mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{d}^{[k]}$, με την ελπίδα ότι αυτό θα βελτιώνει την τιμή της συνάρτησης και άρα θα επιταχύνει τον αλγόριθμο. Στη συνέχεια, από το νέο σημείο $\mathbf{y}^{[k]}$ εκτελείται μια σειρά από διαδοχικά βήματα σύμφωνα με το καινούργιο μήκος μετατόπισης $h^{[k]}$ κατά τη διεύθυνση που ορίζουν οι άξονες \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, n$, του συστήματος συντεταγμένων. Αν το βήμα κατά κάποια διεύθυνση i παράγει σημείο που βελτιώνει τη τιμή της στοχικής συνάρτησης, τότε η τρέχουσα λύση $\mathbf{x}^{[k]}$ αντικαθίσταται από την $\mathbf{z}^{[k]} = \mathbf{x}^{[k]} + h^{[k]}\mathbf{e}_i$ και στην επόμενη επανάληψη το μήκος μετακίνησης τίθεται ίσο με $\mathbf{z}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k]}$. Στην περίπτωση που δεν επιτευχθεί βελτίωση της λύσης, το μήκος της μετακίνησης, $h^{[k]}$, υποδιπλασιάζεται και η διαδικασία επανεκτελείται. Η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται

όταν η τιμή του μήκους λαμβάνει πολύ μικρή τιμή (θεωρητικά μηδενική) και δεν εντοπίζεται σημείο που να βελτιώνει τη τιμή της τρέχουσας λύσης.

Η μέθοδος αναζήτησης σε πρότυπο απαιτεί σε κάθε επανάληψη τον υπολογισμό της στοχικής συνάρτησης από $n + 1$ έως $2n + 1$ φορές. Γενικά, η μέθοδος είναι αργή στη σύγκλιση της αλλά συγκλίνει πάντοτε σε τοπικό ακρότατο. Οι Bell and Pike (1966) για τη βελτίωση της ταχύτητας του αλγορίθμου προτείνουν μια παραλλαγή της μεθόδου, σύμφωνα με την οποία οι διερευνητικές κινήσεις εκτελούνται πρώτα κατά τις δυο διευθύνσεις στις οποίες έχει επιτευχθεί βελτίωση της λύσης στα δυο τελευταία βήματα.

Οι Arnold and Beyer (2003) αξιολόγησαν τη συμπεριφορά του κλασικού αλγορίθμου των Hooke and Jeeves στην σφαιροειδή συνάρτηση, υπό την παρουσία θορύβου, και παρατήρησαν πως η μέθοδος συγκλίνει πολύ γρήγορα σε κάποιο μη στάσιμο σημείο. Αποδίδουν δε το γεγονός αυτό στη ραγδαία μείωση του μήκους μετατόπισης $h^{[k]}$ από τις πρώτες επαναλήψεις, λόγω της επικράτησης του θορύβου στη διαδικασία. Για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων οι δυο μελετητές προτείνουν τον επαναυπολογισμό του τρέχοντος σημείου αναφοράς όταν δεν επιτυγχάνεται βελτίωση της λύσης προς κάποια διεύθυνση, υποδιπλασιασμό του μήκους μετακίνησης με πιθανότητα 0.25 και αντικατάσταση της τρέχουσας λύσης από κάποια καλύτερη με πιθανότητα 0.5. Οι τροποποιήσεις αυτές δίνουν στον αλγόριθμο μεγαλύτερη ευελιξία και βελτιώνουν αισθητά την επίδοσή του.

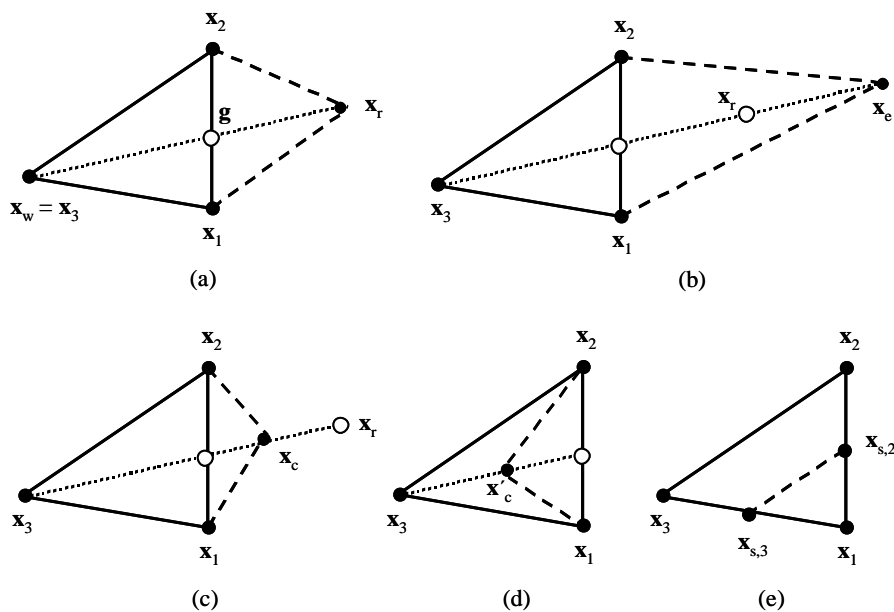
2.3.2 Μέθοδοι βελτιστοποίησης βασισμένες στο άπλοκο

Το άπλοκο είναι ένα γεωμετρικό κυρτό σχήμα, μη μηδενικού όγκου, το οποίο ορίζεται από ένα σύνολο $n + 1$ σημείων στον n -διάστατο χώρο, R^n . Επομένως, το σχήμα του απλόκου είναι τρίγωνο σε χώρο δυο διαστάσεων, R^2 , τετράεδρο σε χώρο τριών διαστάσεων, R^3 , κ.τ.λ..

Η πρώτη μέθοδος βελτιστοποίησης που κάνει χρήση του απλόκου, για την εξερεύνηση του εφικτού χώρου, αποδίδεται στους Spendley, Hext και Himsworth (1962). Κίνητρο για τους τρεις μελετητές αποτέλεσε το γεγονός, ότι μέχρι εκείνη την εποχή, οι αλγόριθμοι άμεσης αναζήτησης απαιτούσαν από $2n$ έως 2^n υπολογισμούς της στοχικής συνάρτησης για να καθοριστεί η μετακίνηση προς το επόμενο βήμα. Ταυτόχρονα, παρατήρησαν πως για τον προσδιορισμό της διεύθυνσης που βελτιστοποιεί τη συνάρτηση δεν χρειάζονται περισσότεροι από $n + 1$ υπολογισμοί της (Lewis et al., 2000). Στον κλασικό αλγόριθμο των Spendley et al. (1962) το αρχικό άπλοκο διαμορφώνεται από $n + 1$ κορυφές, για κάθε μια από τις οποίες υπολογίζεται η τιμή της στοχικής συνάρτησης. Η κορυφή με τη χειρότερη τιμή (μεγαλύτερη

για προβλήματα ελαχιστοποίησης) εντοπίζεται και αντικαθίσταται από την αντιδιαμετρική της, ως προς το κεντροειδές των υπολοίπων κορυφών. Η στοιχειώδης αυτή κίνηση ονομάζεται ανάκλαση και έχει ως αποτέλεσμα τον σχηματισμό ενός νέου απλόκου που έχει μεν καινούργια διεύθυνση, αλλά διατηρεί τον όγκο του αρχικού. Αν το καινούργιο σημείο είναι το χειρότερο, συγκρινόμενο με τα υπόλοιπα n σημεία, τότε επιλέγεται για ανάκλαση αυτό με την αμέσως χειρότερη επίδοση, έτσι ώστε να αποφευχθεί η επιστροφή στην προηγούμενη κατάσταση και άρα η ανακύκλωση των ίδιων λύσεων.

Βασιζόμενοι στην μεθοδολογία των Spendley et al., οι Nelder και Mead (1965) διατύπωσαν ένα νέο αλγόριθμο ο οποίος επιτρέπει την προσαρμογή του απλόκου στην επιφάνεια απόκρισης της εκάστοτε στοχικής συνάρτησης. Προς την κατεύθυνση αυτή, οι δυο μελετητές εκτός από την ανάκλαση εισήγαγαν τρεις ακόμα κινήσεις, την επέκταση (expansion), τη συμπίεση (contraction) και τη συρρίκνωση (shrinkage). Όπως θα δούμε στη συνέχεια, κάθε μια από τις κινήσεις αυτές παίζει το δικό της σημαντικό ρόλο στη διαδικασία ανεύρεσης του βέλτιστου σημείου και τελικά καταφέρνει να επιταχύνει σημαντικά τον αρχικό αλγόριθμο των Spendley et al.. Οι κινήσεις που εκτελεί το άπλοκο στον αλγόριθμο Nelder-Mead δίνονται γραφικά στην εικόνα που ακολουθεί (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση κινήσεων απλόκου στον διδιάστατο χώρο. α) ανάκλαση, β) επέκταση, γ) εξωτερική συμπίεση, δ) εσωτερική συμπίεση, ε) συρρίκνωση

Ο αλγόριθμος Nelder-Mead (1965) περιγράφεται από τα εξής βήματα: Έστω ότι στην αρχή της k επανάληψης είναι γνωστές οι $n + 1$ κορυφές του απλόκου, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1}\}$, και οι αντίστοιχες τιμές της στοχικής συνάρτησης, $\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_{n+1}(\mathbf{x})\}$. Οι κορυφές

τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά, ως προς τη τιμή της στοχικής συνάρτησης, και εντοπίζεται η καλύτερη λύση, \mathbf{x}_1 , η χειρότερη λύση, \mathbf{x}_{n+1} , καθώς και η αμέσως χειρότερη λύση, \mathbf{x}_n .

$$f_1(\mathbf{x}) \leq f_2(\mathbf{x}) \leq \dots \leq f_n(\mathbf{x}) \leq f_{n+1}(\mathbf{x}) \quad (2-27)$$

Υπολογίζεται το κεντροειδές, $\bar{\mathbf{x}}$, των n καλύτερων κορυφών σύμφωνα με τη σχέση:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \quad (2-28)$$

Εκτελείται ένα βήμα ανάκλασης της χειρότερης κορυφής, \mathbf{x}_{n+1} , ως προς το κεντροειδές, $\bar{\mathbf{x}}$, μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{x}_r = 2\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{n+1} \quad (2-29)$$

και υπολογίζεται η τιμή της στοχικής συνάρτησης, $f_r = f(\mathbf{x}_r)$, στο νέο σημείο. Από αυτό το σημείο και έπειτα, ο αλγόριθμος ακολουθεί διαφορετικά βήματα ανάλογα με τη τιμή της f_r . Στις περισσότερες περιπτώσεις, ο αλγόριθμος αντικαθιστά τη χειρότερη κορυφή από ένα καλύτερο σημείο, ενώ στη περίπτωση που δεν επιτυγχάνεται βελτίωση της λύσης το άπλοκο συρρικνώνεται γύρω από την τρέχουσα καλύτερη λύση γεγονός που σηματοδοτεί τον εντοπισμό της γειτονιάς κάποιου στάσιμου σημείου.

- Αν, $f_r < f_1$, δηλαδή η τιμή της συνάρτησης στη νέα κορυφή είναι καλύτερη από την τρέχουσα βέλτιστη τιμή, εκτελείται επέκταση προς την κατεύθυνση βελτίωσης της συνάρτησης που έχει εντοπιστεί. Το νέο σημείο, \mathbf{x}_e , προκύπτει από τη σχέση:

$$\mathbf{x}_e = 2\mathbf{x}_r - \bar{\mathbf{x}} \quad (2-30)$$

Υπολογίζεται η τιμή της στοχικής συνάρτησης, $f_e = f(\mathbf{x}_e)$, στο νέο σημείο. Αν το νέο σημείο είναι καλύτερο από το σημείο που προέκυψε από ανάκλαση, δηλαδή $f_e < f_r$, τότε γίνεται αποδεκτό το σημείο επέκτασης, \mathbf{x}_e , που αντικαθιστά την χειρότερη κορυφή, \mathbf{x}_{n+1} . Σε αντίθετη περίπτωση η χειρότερη κορυφή αντικαθίσταται από το σημείο ανάκλασης, \mathbf{x}_r .

- Αν, $f_n < f_r < f_{n+1}$, δηλαδή το σημείο ανάκλασης, \mathbf{x}_r , είναι καλύτερο από το χειρότερο σημείο, \mathbf{x}_{n+1} , αλλά χειρότερο από το αμέσως επόμενο χειρότερο σημείο, \mathbf{x}_n , τότε πραγματοποιείται εξωτερική συμπίεση του απλόκου, με εφαρμογή τη σχέσης:

$$\mathbf{x}_c = \bar{\mathbf{x}} + 0.5(\mathbf{x}_r - \bar{\mathbf{x}}) \quad (2-31)$$

Υπολογίζεται η τιμή της στοχικής συνάρτησης, $f_c = f(\mathbf{x}_c)$, στο νέο σημείο και αν $f_c < f_r$, τότε το νέο σημείο, \mathbf{x}_c , γίνεται αποδεκτό και αντικαθιστά την χειρότερη κορυφή.

- Αν $f_r > f_{n+1}$, δηλαδή το νέο σημείο είναι χειρότερο ακόμα και από τη τρέχουσα χειρότερη κορυφή, το άπλοκο εκτελεί εσωτερική συμπίεση, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{x}_c = \bar{\mathbf{x}} - 0.5(\mathbf{x}_r - \bar{\mathbf{x}}) \quad (2-32)$$

Υπολογίζεται η τιμή της στοχικής συνάρτησης, $f_c = f(\mathbf{x}_c)$, στο νέο σημείο και εφόσον $f_c < f_{n+1}$, το νέο σημείο, \mathbf{x}_c , γίνεται αποδεκτό και αντικαθιστά την χειρότερη κορυφή.

- Στην περίπτωση που κατά τα δυο προηγούμενα βήματα δεν προκύψει σημείο που να βελτιώνει την τιμή της στοχικής συνάρτησης, εκτελείται συρρίκνωση δηλαδή συμπίεση των κορυφών $\{\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1}\}$ προς την κατεύθυνση της καλύτερης κορυφής \mathbf{x}_1 . Οι n κορυφές συρρικνώνονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{x}_s = 0.5(\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_1) \quad (2-33)$$

Η επιτυχία του κλασικού αλγορίθμου Nelder-Mead αποδεικνύεται από τις χιλιάδες αναφορές που τυγχάνει το πρωτότυπο άρθρο σε διαφορετικούς επιστημονικούς τομείς και εφαρμογές (Lewis et al., 2000). Τόσο η Torczon (1991) όσο και οι Lewis et al. (2000) επισημαίνουν πως ο εν λόγω αλγόριθμος είναι ταχύτερος από οποιαδήποτε άλλη τεχνική άμεσης αναζήτησης. Στην ίδια διαπίστωση προχωρά και ο McKinnon (1998). Ωστόσο, οι παραπάνω μελετητές επισημαίνουν μια σειρά από απλά μαθηματικά προβλήματα (κυρτών συναρτήσεων) στα οποία ο αλγόριθμος αποτυγχάνει παταγωδώς, συγκλίνοντας σε μη στάσιμα σημεία. Ταυτόχρονα, ως αδυναμία αντιμετωπίζεται και η μη ύπαρξη θεωρητικής τεκμηρίωσης για τη σύγκλιση της μεθόδου, γεγονός που αποδίδεται στην μεταβολή του σχήματος και του όγκου του απλόκου (McKinnon, 1998; Torczon, 1991; Lagarias et al. 1996; Kelley, 1999).

Για την περαιτέρω βελτίωση του αρχικού αλγορίθμου Nelder-Mead και την εξάλειψη των αδυναμιών που αυτός παρουσιάζει, έχουν κατά καιρούς προταθεί διάφορες τροποποιήσεις, πολλές από τις οποίες αφορούν σε προβλήματα βελτιστοποίησης στοχαστικών μοντέλων προσομοίωσης συνεχών μεταβλητών. Οι τροποποιήσεις αυτές αφορούν κατά κύριο λόγο την προστασία της διαδικασίας αναζήτησης από την επικράτηση του θορύβου, καθώς και σε τεχνικές που έχουν ως στόχο τον εντοπισμό και περιορισμό του.

Παρά το γεγονός ότι ο αλγόριθμος απλόκου Nelder-Mead αρχικά αναπτύχθηκε για ντετερμινιστικές στοχικές συναρτήσεις, συχνά εφαρμόζεται τόσο σε προβλήματα

βαθμονόμησης στοχαστικών μοντέλων όσο και σε προβλήματα στοχαστικών συναρτήσεων με τη παρουσία θορύβου (Tomick, 1985; Barton and Ivey, 1996). Το πλεονέκτημα του αλγορίθμου Nelder-Mead έναντι άλλων μεθόδων άμεσης αναζήτησης, έγκειται στο ότι οι κανόνες διερεύνησης, και άρα η πορεία που θα ακολουθήσει ο αλγόριθμος, δεν βασίζονται στις απόλυτες τιμές της συνάρτησης αλλά στη σχετική διάταξη αυτών. Συνεπώς, οι μικρές στοχαστικές διαταραχές (perturbations), που δεν προκαλούν αλλαγές στην κατάταξη των λύσεων, έχουν μικρή επίδραση στην απόδοση του αλγορίθμου (Barton and Ivey, 1996). Ωστόσο, όταν η διαφορά στις τιμές των λύσεων οφείλεται κατά κύριο λόγο στο στοχαστικό κομμάτι της συνάρτησης, η πιθανότητα σύγκλισης σε ένα μη στάσιμο σημείο αυξάνει. Η τελευταία περίπτωση συναντάται συχνά όταν το άπλοκο, ύστερα από διαδοχικές συρρικνώσεις και συμπίεσεις, έχει φτάσει σε κάποια περιοχή της επιφάνειας απόκρισης που είναι σχετικά επίπεδη (συνήθως στη γειτονιά κάποιου στάσιμου σημείου).

Εκτενή ανάλυση πάνω στους μηχανισμούς που οδηγούν σε εσφαλμένη σύγκλιση του αλγορίθμου Nelder-Mead, υπό το καθεστώς θορύβου έχει γίνει από τους Barton and Ivey (1996). Οι δυο ερευνητές, μελέτησαν τις πιθανότητες μετάβασης για τις διάφορες κινήσεις του απλόκου (π.χ. πιθανότητα να εκτελεστεί συρρίκνωση στο βήμα k , όταν στο βήμα $k-1$ έχει εκτελεστεί συμπίεση) και έδειξαν πως στη περίπτωση που στη διαδικασία κυριαρχεί ο θόρυβος, η πιθανότητα να μειωθεί ο όγκος του απλόκου είναι διπλάσια από την πιθανότητα να αυξηθεί. Ταυτόχρονα, η πιθανότητα εμφάνισης είτε συρρίκνωσης είτε συμπίεσης από τα πρώτα στάδια του αλγορίθμου είναι μεγάλη και αυξάνει ραγδαία με το πέρας των επαναλήψεων. Τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα το άπλοκο να χάνει τον όγκο του, και άρα την ικανότητα να κινείται αποτελεσματικά, από τα πρώτα στάδια των επαναλήψεων.

Για την προσαρμογή του κλασικού αλγορίθμου Nelder-Mead σε προβλήματα που είναι έντονη η παρουσία θορύβου, έχουν κατά καιρούς προταθεί διάφορες βελτιώσεις. Οι σημαντικότερες και πιο αποτελεσματικές από αυτές είναι η προσαρμογή του αρχικού όγκου του απλόκου, οι διαδοχικές εκτελέσεις του αλγορίθμου με χρήση της κορυφής που προέκυψε ως βέλτιστη από την προηγούμενη προσπάθεια, και η προσαρμογή του συντελεστή συρρίκνωσης.

Για τη μείωση της πιθανότητας να εκτελεστεί συμπίεση ή συρρίκνωση του απλόκου κατά τα αρχικά στάδια επαναλήψεων οι Barton και Ivey (1991) προτείνουν και αξιολογούν τρεις διαφορετικές τακτικές που βελτιώνουν την απόδοση του αλγορίθμου. Η πρώτη αφορά στον επαναυπολογισμό της καλύτερης κορυφής του απλόκου, \mathbf{x}_1 , πριν την εκτέλεση συρρίκνωσης.

Η τεχνική αυτή επαναφέρει το άπλοκο σε κάποια αρχική κατάσταση και αποτρέπει την κυριαρχία κάποιας λύσης που έχει χαρακτηριστεί ως βέλτιστη, λόγω του θορύβου ή λόγω κάποιας λανθασμένης μέτρησης. Η τακτική αυτή είναι παρόμοια με το κανόνα “n+1” που υιοθετούν οι Spendley et al. (1962), σύμφωνα με τον οποίον αν η τρέχουσα βέλτιστη λύση δεν έχει αντικατασταθεί από κάποια καλύτερη έπειτα από $n + 1$ δοκιμές, τότε εκτελείται επαναυπολογισμός της τιμής αυτής. Η ίδια λογική ακολουθείται και για τη συμπίεση, με επαναυπολογισμό των τιμών της συνάρτησης για τις κορυφές \mathbf{x}_i και \mathbf{x}_n . Τέλος, η χρήση συντελεστών συρρίκνωσης με τιμές μεγαλύτερες του 0.5 (π.χ. 0.75, 0.90) αποσκοπεί στο να διατηρηθεί ο όγκος του απλόκου σχετικά μεγάλος, τουλάχιστον κατά τα πρώτα στάδια της αναζήτησης. Ο αλγόριθμος που προτάθηκε από τους Barton and Ivey (1996) ονομάστηκε RS9 και υιοθετεί τον επαναυπολογισμό της τρέχουσας βέλτιστης τιμής πριν την εκτέλεση συρρίκνωσης, και συντελεστή συρρίκνωσης ίσο με 0.9. Οι Tomick, Arnold and Barton (1995) επιχείρησαν την περαιτέρω βελτίωση του αλγορίθμου RS9, λαμβάνοντας μέτρα για τη μείωση της επικράτησης του θορύβου στη διαδικασία αναζήτησης. Προς αυτή την κατεύθυνση, για την εύρεση της επίδοσης, $f_i(\mathbf{x})$, κάθε κορυφής i του απλόκου εκτέλεσαν επαναλαμβανόμενες σημειακές δειγματοληψίες. Τελικά, η τιμή της στοχικής συνάρτησης προκύπτει ως ο μέσος όρος των ανεξάρτητων δειγμάτων. Το μήκος του δείγματος που παράγεται δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται σε κάθε επαναληπτικό βήμα σύμφωνα με κάποιο στατιστικό έλεγχο που εξετάζει τη διασπορά των τιμών της συνάρτησης στις κορυφές του απλόκου. Όπως αποδείχτηκε μια τέτοια προσέγγιση υπερτερεί τόσο του κλασικού αλγορίθμου όσο και του αλγορίθμου RS9 (Tomick et al., 1995).

Οι Humphrey and Wilson (2000) για την βαθμονόμηση στοχαστικών μοντέλων προσομοίωσης πρότειναν ένα σχήμα βελτιστοποίησης το οποίο ενσωματώνει τρεις διαδοχικές ανεξάρτητες εκτελέσεις (φάσεις) του αλγορίθμου Nelder-Mead. Οι τρεις λύσεις που προκύπτουν συγκρίνονται, και ως βέλτιστη λύση για το πρόβλημα επιλέγεται η καλύτερη εξ αυτών. Στην αρχή της διαδικασίας, οι κορυφές του απλόκου παράγονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μεγιστοποιείται ο όγκος του, ενώ στην αρχή των επόμενων φάσεων η παραγωγή των κορυφών γίνεται με σημείο αναφοράς τη βέλτιστη λύση της προηγούμενης φάσης. Με αυτό τον τρόπο η βέλτιστη λύση της προηγούμενης δοκιμής προστατεύεται και το άπλοκο ξεκινά την αναζήτηση κοντά στη γειτονία κάποιου ακρότατου. Τέλος, για κάθε φάση υιοθετείται διαφορετικός συντελεστής συρρίκνωσης. Αρχικά, η τιμή του συντελεστή ταυτίζεται με αυτή του κλασικού αλγορίθμου Nelder-Mead, δηλαδή ίση με 0.5, ενώ στις δυο επόμενες φάσεις ο

συντελεστής παίρνει τιμές 0.7 και 0.9, αντίστοιχα. Με τη τροποποίηση αυτή αποφεύγεται η σύγκλιση σε κάποιο μη βέλτιστο σημείο λόγω επικράτησης του θορύβου.

Μια άλλη τεχνική άμεσης αναζήτησης βασιζόμενη στο άπλοκο είναι η μέθοδος πολυδιάστατης αναζήτησης (multi-directional search). Η μέθοδος αυτή διατυπώθηκε από την Torczon (1991) και στην πραγματικότητα αποτελεί μια παραλλαγή του κλασικού αλγορίθμου Nelder-Mead. Η εμπειρική σύγκριση της αποτελεσματικότητας των δυο αλγορίθμων έδειξε πως η μέθοδος πολυδιάστατης αναζήτησης είναι πιο αποτελεσματική σε προβλήματα που η στοχαστική συνάρτηση υπόκειται σε θόρυβο ή σφάλματα (Arnold και Beyer, 2003).

Η Torczon (1991) παρατήρησε πως το κύριο πρόβλημα του αλγορίθμου Nelder-Mead είναι ο γρήγορος εκφυλισμός του απλόκου, που έχει σαν αποτέλεσμα τη σύγκλιση της μεθόδου σε μη στάσιμα σημεία. Για αυτό το λόγο, στον αλγόριθμο που προτείνει οι κορυφές του απλόκου παραμένουν αναλλοίωτες και μεταβάλλεται μόνο το σχήμα του. Σε κάθε επανάληψη ολοκληρω το άπλοκο (όχι μόνο μια κορυφή όπως στον αλγόριθμο Nelder-Mead) είτε ανακλάται είτε περιστρέφεται είτε συμπιέζεται. Συνεπώς, κάθε επανάληψη απαιτεί τον υπολογισμό της στοχαστικής συνάρτησης $2n + 1$ φορές. Οι Arnold and Beyer (2003) μελετώντας την επίδοση του αλγορίθμου στη σφαιροειδή συνάρτηση παρατήρησαν πως ο αλγόριθμος πολυδιάστατης αναζήτησης μπορεί να μην εκφυλίζεται με την παρουσία θορύβου, αλλά δεν συγκλίνει με σιγουριά σε κάποιο σημείο. Αυτό οφείλεται στην τακτική επέκτασης/συμπίεσης της μεθόδου, σύμφωνα με την οποία η κίνηση της επέκτασης είναι αποδεκτή εφόσον τουλάχιστον μια από τις n καινούργιες κορυφές που παράγονται τόσο από επέκταση όσο και από ανάκλαση βελτιώνουν τη τρέχουσα λύση. Για μεγάλη ένταση του θορύβου και για μεγάλες διαστάσεις του προβλήματος η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι πολύ μεγάλη. Συνεπώς, κάτω από αυτές τις συνθήκες η μέθοδος εκτελεί πιο συχνά επέκταση από ότι συμπίεση. Γενικότερα, η μέθοδος πολυδιάστατης αναζήτησης κρίνεται αποτελεσματικότερη για την εξερεύνηση επίπεδων και ομαλών επιφανειών απόκρισης, ενώ σε περιπτώσεις ανώμαλων επιφανειών όπου η προσαρμογή του απλόκου είναι δύσκολη παρουσιάζει δυσκολίες.

2.4 Τεχνικές ολικής βελτιστοποίησης

2.4.1 Η μέθοδος προσομοιωμένης ανόπτωσης (simulated annealing)

Η προσομοιωμένη ανόπτωση είναι μια ευρετική μέθοδος αναζήτησης, που υιοθετεί πιθανοτικούς κανόνες για τον εντοπισμό του ολικού βέλτιστου. Το όνομα και η φιλοσοφία της μεθόδου προέρχονται από τη διαδικασία της φυσικής ανόπτωσης, η οποία είναι μια

τεχνική ψύξης ενός υλικού (π.χ. μετάλλου), υπό ελεγχόμενες συνθήκες, με στόχο την επίτευξη της ολικά ελάχιστης ενέργειας του συστήματος. Καθώς το μέταλλο ψύχεται η αρχικά υψηλή κινητικότητα των μορίων περιορίζεται και αρχίζει η δημιουργία κρυστάλλων. Για να περιέλθει το υλικό (σύστημα) σε κατάσταση τέλει κρυσταλλοποίησης και άρα ελάχιστης ενέργειας, απαραίτητη προϋπόθεση είναι ο αργός ρυθμός ψύξης. Σε αντίθετη περίπτωση, το υλικό μεταβαίνει σε ενδιάμεσες καταστάσεις, υψηλότερης ενέργειας με τα μόριά του να αποκτούν πολυκρυσταλλική ή άμορφη δομή.

Οι Metropolis et al. (1953) προσπάθησαν να προσομοιώσουν την παραπάνω διαδικασία και να προβλέψουν τη κατάσταση ισορροπίας, με την ολικά ελάχιστη ενέργεια, μέσω των νόμων της στατιστικής θερμοδυναμικής. Η πιθανότητα να μεταβεί ένα θερμοδυναμικό σύστημα με θερμοκρασία T , από την ενεργειακή κατάσταση E_1 στη κατάσταση E_2 θα δίνεται από τη σχέση:

$$p = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{\kappa T}\right) \quad (2-34)$$

όπου κ η σταθερά Boltzman. Εφόσον η μετάβαση γίνεται σε κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας, δηλαδή $E_2 < E_1$, η πιθανότητα μετάβασης γίνεται μεγαλύτερη της μονάδας και τίθεται ίση με 1. Δηλαδή είναι πάντοτε αποδεκτή η μετάβαση σε κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας. Ωστόσο, είναι δυνατή και η μετάβαση σε κατάσταση υψηλότερης ενέργειας με πιθανότητα p .

Οι Kirkpatrick et al. (1983) και ο Cerny (1985) διέκριναν ότι υπάρχει αναλογία μεταξύ των διαφόρων καταστάσεων στις οποίες μπορούν να βρεθούν τα θερμοδυναμικά συστήματα και των πιθανών καταστάσεων από τις οποίες μπορεί να περάσει η διαδικασία αναζήτησης έως τον εντοπισμό του ολικά βέλτιστου. Σε αυτά τα πλαίσια, η στοχαστική συνάρτηση θεωρείται το μαθηματικό αντίστοιχο της ενέργειας, με την θερμοκρασία να παίζει το ρόλο κάποιας παραμέτρου που ελέγχει την διαδικασία βελτιστοποίησης.

Η μέθοδος προσομοιωμένης ανόπτησης αναπτύχθηκε, στις αρχές της δεκαετίας του 1980, από τους Kirkpatrick et al. (1983), οι οποίοι διετύπωσαν μια γενική μεθοδολογία για την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης, στα οποία ο χώρος αναζήτησης είναι διακριτός. Η καινοτομία της μεθόδου έγκειται στο ότι κατά τη διάρκεια της αναζήτησης, εκτός από τα βήματα που βελτιώνουν τη τιμή της στοχαστικής συνάρτησης (κατάβαση), γίνονται δεκτά και ορισμένα βήματα ανάβασης, σύμφωνα με κάποια

συγκεκριμένη συνάρτηση πιθανότητας $p(T)$. Η μέθοδος προσπαθεί να εντοπίσει τη βέλτιστη τιμή της στοχικής συνάρτησης $f : S \rightarrow R$ από ένα σύνολο διακριτών λύσεων S , και περιγράφεται ως εξής: Στη γειτονιά της τρέχουσας λύσης \mathbf{x} παράγεται με την εφαρμογή μιας προσδιοριστικής ή τυχαίας μεθόδου ένα νέο σημείο \mathbf{y} και υπολογίζεται η μεταβολή στη τιμή της στοχικής συνάρτησης Δf . Αν η μεταβολή είναι αρνητική η λύση γίνεται αποδεκτή σε κάθε περίπτωση, ενώ αν $\Delta f > 0$ η λύση γίνεται αποδεκτή με βάση κάποιο πιθανοτικό κριτήριο $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, T)$. Η συνήθης επιλογή για τη πιθανότητα $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, T)$ είναι το πιθανοτικό κριτήριο των Metropolis et al. (1983), το οποίο για $T > 0$ δίνεται από τη σχέση:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, T) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{εάν } f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x}) \\ \exp\left(\frac{-(f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}))}{T}\right), \text{εάν } f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \quad (2-35)$$

Εκτός από την παραπάνω σχέση που απορρέει από τους νόμους της θερμοδυναμικής, κατά καιρούς έχουν χρησιμοποιηθεί και άλλα κριτήρια αποδοχής. Οι Johnson et al. (1989) προτείνουν την απλή σχέση (2-36) που προσεγγίζει την εκθετική των Metropolis, με μικρότερο υπολογιστικό φόρτο.

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, T) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{εάν } f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x}) \\ 1 + \left(\frac{-(f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}))}{T}\right), \text{εάν } f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \quad (2-36)$$

Παρόμοια είναι και το κριτήριο που υιοθετούν οι Brandimarte et al. (1987), ενώ οι Ogbu and Smith (1990) και οι Vakharia and Chang (1990) χρησιμοποιούν πιθανότητες που είναι ανεξάρτητες της μεταβολής της στοχικής συνάρτησης, $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$.

Στα πρώτα στάδια της αναζήτησης η θερμοκρασία του συστήματος είναι υψηλή και η πιθανότητα επιλογής μη βέλτιστων λύσεων μεγάλη. Ωστόσο όσο η διαδικασία προχωρά, η θερμοκρασία του συστήματος μειώνεται με αποτέλεσμα να γίνεται μικρότερη η πιθανότητα αποδοχής λύσεων που χειροτερεύουν τη τιμή της συνάρτησης. Τόσο η αρχική θερμοκρασία του συστήματος όσο και ο ρυθμός με τον οποίο αυτή μειώνεται παίζουν καθοριστικό ρόλο στην επιτυχή λειτουργία του αλγορίθμου.

Η συνάρτηση που χρησιμοποιείται συνήθως για τη ρύθμιση του χρονοδιαγράμματος ανόπτησης και της μείωσης της θερμοκρασίας είναι η:

$$T^{[k+1]} = \lambda T^{[k]} \quad (2-37)$$

όπου λ συντελεστής που λαμβάνει τιμές στο διάστημα $(0, 1)$. Οι τιμές του συντελεστή λ συνήθως κυμαίνονται στο διάστημα $[0.80, 0.99]$, ενώ τιμές κοντά στη μονάδα εξασφαλίζουν αργή μείωση της θερμοκρασίας και άρα μεγαλύτερη διερεύνηση του εφικτού χώρου και πιο αργή σύγκλιση του αλγορίθμου. Ο συντελεστής λ μπορεί να οριστεί, επίσης, συναρτήσει της μέγιστης και ελάχιστης θερμοκρασίας, T_{max} και T_{min} , και του μέγιστου πλήθους δοκιμών, M :

$$\lambda = \left(\frac{T_{min}}{T_{max}} \right)^{M-1} \quad (2-38)$$

Συχνά χρησιμοποιείται επίσης και η συνάρτηση μείωσης των Lundy and Mees (1986):

$$T^{[k+1]} = \frac{T^{[k]}}{1 + \beta T^{[k]}} \quad (2-39)$$

όπου β συντελεστής που λαμβάνει μικρές τιμές.

Για την βελτίωση του αλγορίθμου έχουν κατά καιρούς διατυπωθεί διαφορετικά σχήματα για τη ρύθμιση του χρονοδιαγράμματος ανόπτησης. Οι Press et al. (2007) προτείνουν τη σχέση:

$$T^{[k+1]} = T^{[0]}(1 - k / K)^a \quad (2-40)$$

όπου $T^{[0]}$ η αρχική θερμοκρασία, k η τρέχουσα επανάληψη και K ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός επαναλήψεων. Η παράμετρος a είναι μια σταθερά με τυπικές τιμές 1, 2 ή 4, η επιλογή της οποίας εξαρτάται από τη στατιστική κατανομή των λύσεων και τη γεωγραφία της εφικτής περιοχής.

Ο Dowsland (1993) προτείνει ένα πιο πολύπλοκο χρονοδιάγραμμα ανόπτησης με δυο σκέλη. Στην περίπτωση που η νέα λύση γίνεται δεκτή η θερμοκρασία μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση (2-40), ενώ όταν η λύση απορρίπτεται η θερμοκρασία αυξάνει σύμφωνα με τη σχέση:

$$T^{[k+1]} = \frac{T^{[k]}}{1 - \gamma T^{[k]}} \quad (2-41)$$

Ιδιαίτερα σημαντική παράμετρος για την επιτυχία της μεθόδου είναι το μήκος των κύκλων θερμικής ισορροπίας, δηλαδή ο αριθμός επαναλήψεων για τον οποίον η θερμοκρασία παραμένει αμετάβλητη. Η παράμετρος αυτή, συνήθως, εκφράζεται ως συνάρτηση του μεγέθους του εφικτού χώρου ή της θερμοκρασίας, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η αποτελεσματική διερεύνηση των εφικτών λύσεων. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη γεωμετρική ή αριθμητική αύξηση του μήκους με το πέρας των επαναλήψεων. Για τη γρήγορη

σύγκλιση του αλγορίθμου, στα πρώτα στάδια της διαδικασίας το μήκος των κύκλων είναι μικρό και ξοδεύεται μικρός υπολογιστικός φόρτος, ενώ όταν θα έχει εντοπιστεί κάποια περιοχή έλξης είναι σημαντική η λεπτομερέστερη εξερεύνησή της, ώστε να εντοπιστεί το ολικά βέλτιστο σημείο.

Παρά το γεγονός ότι ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτωσης χρησιμοποιείται κατά βάση για προβλήματα διακριτών τιμών, δεν είναι λίγες οι τροποποιήσεις που έχουν κατά καιρούς προταθεί για τη γενίκευση και εφαρμογή του σε προβλήματα συνεχών μεταβλητών. Αυτό προϋποθέτει την επιλογή κάποιας διεύθυνσης και κάποιου βήματος για την παραγωγή ενός νέου σημείου y από το ήδη υπάρχον x . Η επιλογή των παραπάνω μεγεθών γίνεται είτε μέσω προσδιοριστικών είτε μέσω στοχαστικών κανόνων αναζήτησης. Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχει πλήθος εργασιών με θέμα τη θεωρητική σύγκλιση του αλγορίθμου σε προβλήματα συνεχών μεταβλητών. Από αυτές αναφέρουμε χαρακτηριστικά τις εργασίες των Locatelli (1996), Yang (2000) και Belisle et al. (1993).

Η εφαρμογή του αλγορίθμου προσομοιωμένης ανόπτωσης σε προβλήματα βελτιστοποίησης υπό το καθεστώς θορύβου έχει απασχολήσει αρκετά τους ερευνητές. Η αβεβαιότητα μεταφέρεται τόσο στο μέγεθος της μεταβολής της στοχαστικής συνάρτησης, Δf , όσο και στη πιθανότητα αποδοχής ή απόρριψης μιας καινούργιας λύσης $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, T)$. Επιπλέον, επηρεάζεται έντονα η πορεία του χρονοδιαγράμματος ανόπτωσης και ο ρυθμός μείωσης της θερμοκρασίας. Η προφανής λύση για τη μείωση της επιρροής του θορύβου στα παραπάνω μεγέθη είναι η εκτέλεση δειγματοληψιών σε κάθε σημείο του εφικτού χώρου που εξετάζεται. Ωστόσο, μια τέτοια προσέγγιση αυξάνει κατά πολύ τον υπολογιστικό φόρτο της μεθόδου, καθώς θα απαιτούνταν πολλές επαναλήψεις για τη μείωση της αβεβαιότητας ιδιαίτερα στις περιοχές των ακρότατων όπου η επιφάνεια απόκρισης είναι επίπεδη. Αντί αυτού, είναι προτιμότερη η χρήση ενός τροποποιημένου κριτηρίου αποδοχής της λύσης. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, στη περίπτωση που επιτυγχάνεται βελτίωση της λύσης, δεν εξετάζεται αν $\Delta f < 0$ αλλά αν $\Delta f < \sigma\rho$, όπου σ η τυπική απόκλιση του θορύβου (ή κάποια εκτίμηση αυτής) και ρ κάποιος συντελεστής ανοχής. Με αυτό τον τρόπο μειώνεται η πιθανότητα να απορρίψουμε μια λύση που στη πραγματικότητα προκαλεί αρνητική μεταβολή του μεγέθους Δf .

Οι Gutjahr and Pflug (1995) μελέτησαν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες επιτυγχάνεται θεωρητική σύγκλιση του αλγορίθμου προσομοιωμένης ανόπτωσης σε προβλήματα διακριτού χώρου, υπό τη παρουσία θορύβου στις τιμές της στοχαστικής συνάρτησης. Όπως απέδειξαν, θεωρητική σύγκλιση του αλγορίθμου δεν γίνεται να επιτευχθεί αν ο θόρυβος δεν ακολουθεί

κανονική κατανομή με τη διασπορά να μειώνεται γρήγορα όσο προχωρά το χρονοδιάγραμμα ανόπτησης. Για τη μείωση της διασποράς προτείνουν τη λήψη δείγματος σε κάθε σημείο και τον υπολογισμό της στοχικής συνάρτησης από το μέσο όρο αυτού. Στα πρώτα στάδια, το δείγμα μπορεί να είναι μικρότερο καθώς γίνεται πιο αδρομερής εξερεύνηση του χώρου, ενώ όσο η θερμοκρασία μειώνεται λαμβάνονται μεγαλύτερα δείγματα για την μείωση της διασποράς του θορύβου. Σε παρόμοια αποτελέσματα καταλήγουν και οι Gelfand and Mitter, ακολουθώντας την ίδια τακτική δειγματοληψιών (1989).

Τροποποιημένες εκδόσεις του κλασικού αλγορίθμου προσομοιωμένης ανόπτησης, με επαναληπτικές δειγματοληψίες στη θέση της τρέχουσας, x , καθώς και της υποψήφιας νέας λύσης, y , προτείνουν και οι Alrefaei και Andradottir (1999) και οι Fox και Heine (1995). Στις εργασίες των μελετητών αυτών για την αποδοχή ή απόρριψη μιας καινούργιας λύσης ελέγχεται αποκλειστικά το πιθανοτικό κριτήριο (2-36) και όχι αν η μεταβολή Δf είναι θετική ή αρνητική. Επιπλέον, οι τιμές της στοχικής συνάρτησης στα δύο σημεία (αρχικό σημείο - καινούργια λύση) προκύπτει ως ο μέσος όρος ανεξάρτητων δειγματοληψιών, οι οποίες μπορούν να συνεχίζονται και σε επόμενες επαναλήψεις. Για παράδειγμα, αν η καινούργια λύση απορριφτεί, τότε στο επόμενο επαναληπτικό βήμα εκτελείται πάλι τυχαία δειγματοληψία στο αρχικό σημείο και η τιμή της στοχικής συνάρτησης προκύπτει ως ο μέσος όρος του συνολικού σημειακού δείγματος, όπως αυτό προέκυψε και από τα δυο επαναληπτικά βήματα. Στον αλγόριθμο των Alrefaei και Andradottir (1999) το μήκος του σημειακού δείγματος που λαμβάνεται υπόψη είναι σταθερό για όλα τα επαναληπτικά βήματα, ενώ στον αλγόριθμο των Fox και Heine (1995) το μήκος αυξάνει με το πέρας της διαδικασίας συναρτήσεως του τρέχοντος επαναληπτικού βήματος και του συνολικού δείγματος που έχει ληφθεί από προηγούμενα βήματα για ένα δεδομένο σημείο.

Κεφάλαιο 3^ο

3 Προσαρμογή του εξελικτικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου για τη βελτιστοποίηση στοχαστικών στοχικών συναρτήσεων

Ο εξελικτικός αλγόριθμος ανόπτησης-απλόκου αναπτύχθηκε από τον Ευστρατιάδη (2001) και αποτελεί μια ευρετική πιθανοτική μέθοδο ολικής βελτιστοποίησης, που συνδυάζει στοιχεία από ένα ευρύ φάσμα μεθοδολογιών και τεχνικών βελτιστοποίησης. Η λογική του αλγορίθμου στηρίζεται στην σύζευξη της στοχαστικής μεθόδου προσομοιωμένης ανόπτησης με την ντετερμινιστική μέθοδο άμεσης αναζήτησης Nelder-Mead, για την αποτελεσματικότερη και ταχύτερη διερεύνηση του εφικτού χώρου λύσεων. Όπως είδαμε σε προηγούμενες ενότητες, η πρώτη μέθοδος εγγυάται στατιστική σύγκλιση στο ολικό βέλτιστο με την ικανότητα απεγκλωβισμού από τοπικά ακρότατα, ενώ η δεύτερη εγγυάται τον εντοπισμό μιας περιοχής έλξης γρήγορα και με ακρίβεια. Ο συνδυασμός των δυο παραπάνω μεθόδων συνθέτει μια νέα τεχνική ολικής βελτιστοποίησης που εκμεταλλεύεται την προσομοιωμένη ανόπτηση για την αδρομερή διερεύνηση του εφικτού χώρου και το άπλοκο για την παραγωγή νέων σημείων.

Η πρώτη προσπάθεια σύζευξης των δυο παραπάνω αναγνωρισμένων μεθόδων αποδίδεται στους Press et al. (1992), οι οποίοι προσάρμοσαν μια στρατηγική ανόπτησης στον κλασικό αλγόριθμο Nelder-Mead, με σκοπό να προσδώσουν στον αλγόριθμο την ικανότητα να απεγκλωβίζεται από τοπικά ακρότατα. Σύμφωνα με τον προτεινόμενο αλγόριθμο, σε κάθε επανάληψη εκτελείται ένας τυπικός κύκλος Nelder-Mead, με τη κατάταξη των λύσεων, και άρα την επιλογή της επόμενης κίνησης, να γίνεται αφού προστεθεί στις τιμές της συνάρτησης μια λογαριθμικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή ανάλογη της θερμοκρασίας T . Ταυτόχρονα, κάθε νέο σημείο που παράγεται έχει αυξημένη πιθανότητα αποδοχής αφού στη τιμή της συνάρτησης αφαιρείται μια παρόμοια ποσότητα. Με αυτό τον τρόπο γίνονται πάντα αποδεκτά τα βήματα που βελτιώνουν την τιμή της συνάρτησης, ενώ γίνονται αποδεκτά και κάποια βήματα που την χειροτερεύουν.

Για την περαιτέρω βελτίωση του αλγορίθμου των Press et al (1992), οι Pan and Wu (1998) υιοθέτησαν την εκτέλεση δοκιμαστικών βημάτων επέκτασης του απλόκου προς την κατεύθυνση που χειροτερεύει την τιμή της συνάρτησης (ανάβαση), κάθε φορά που γίνεται

αποδεκτή μια μη βέλτιστη λύση με βάση το κριτήριο Metropolis. Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται ο γρήγορος απεγκλωβισμός του απλόκου από κάποιο τοπικό ακρότατο και η μετακίνησή του σε κάποια γειτονική περιοχή έλξης.

3.1 Γενικά χαρακτηριστικά του αλγορίθμου

Ο εξελικτικός αλγόριθμος ανόπτησης-απλόκου (Ευστρατιάδης, 2001; Efstratiadis & Koutsoyiannis, 2002) βασίζεται στη λογική σύζευξης που χαρακτηρίζει τις παραπάνω μεθοδολογίες, εισάγοντας ταυτόχρονα πολλά πρωτότυπα στοιχεία και καινοτομίες που έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας εύρωστης και αποτελεσματικής τεχνικής ολικής βελτιστοποίησης για πολύπλοκα προβλήματα. Οι βασικές αρχές του αλγορίθμου είναι (Ευστρατιάδης, 2001; 2008):

- Εισάγεται μια εξελικτική στρατηγική αναζήτησης η οποία έχει ως σκοπό την σταδιακή βελτίωση ενός αρχικού πληθυσμού εφικτών λύσεων που παράγεται με τυχαίο τρόπο εντός των ορίων του εφικτού χώρου. Ο αλγόριθμος επιτρέπει τον ορισμό δυο διαφορετικών πεδίων τιμών, ενός εσωτερικού και ενός εξωτερικού. Εντός των ορίων του εσωτερικού πεδίου, γίνεται η γέννηση του αρχικού πληθυσμού ενώ η παράγωγή λύσεων μπορεί να εκτελεστεί και εκτός αυτού (εξωτερικό πεδίο).
- Η διερεύνηση του εφικτού χώρου αναζήτησης, και άρα η εξέλιξη του πληθυσμού, γίνεται βάσει των στοχαστικών και ντετερμινιστικών κανόνων μετάβασης του απλόκου. Οι κινήσεις που εκτελεί το άπλοκο είναι αυτές τις μεθόδου Nelder-Mead, δηλαδή η ανάκλαση, η επέκταση, η συρρίκνωση και η συμπίεση (εξωτερική ή εσωτερική), με την προσθήκη τυχειότητας στο βήμα της μετακίνησης. Η εισαγωγή του τυχαίου όρου αφενός προσδίδει στοχαστικό χαρακτήρα στη διαδικασία εξέλιξης και αφετέρου αποτρέπει την ανακύκλωση λύσεων (γέννηση του ίδιου σημείου) κατά την ανάκλαση του απλόκου.
- Ο βαθμός τυχειότητας κατά τη διαδικασία αναζήτησης καθορίζεται μέσω ενός αυτορρυθμιζόμενου χρονοδιαγράμματος ανόπτησης, το οποίο προσαρμόζεται στα εκάστοτε χαρακτηριστικά του προβλήματος και επιτρέπει την αποδοχή λύσεων οι οποίες χειροτερεύουν αντί να βελτιώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Αρχικά η θερμοκρασία του συστήματος τίθεται ίση με τη διαφορά μεταξύ της μέγιστης και ελάχιστης τιμής της στοχαστικής συνάρτησης στον πληθυσμό (αυτορρύθμιση). Κατά τη διάρκεια εξέλιξης του πληθυσμού η μεγάλη απόκλιση μεταξύ των ακραίων λύσεων αμβλύνεται με αποτέλεσμα η διατήρηση υψηλής θερμοκρασίας και άρα μεγάλης τυχειότητας στο σύστημα να είναι άωφελη. Για τη ρύθμιση της θερμοκρασίας εισάγονται δυο παράμετροι, β και λ , που ορίζονται από το χρήστη. Σε κάθε επανάληψη

ελέγχεται αν η θερμοκρασία ξεπερνά την απόκλιση μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης τιμής της συνάρτησης κατά τον παράγοντα β , ο οποίος ρυθμίζει τη διαδικασία ψύξης κυρίως στα πρώτα στάδια του αλγορίθμου, όπου η απόκλιση μεταξύ των λύσεων είναι μεγάλη. Ο πολλαπλασιαστικός συντελεστής λ μειώνει τη θερμοκρασία κάθε φορά που εντοπίζεται μια περιοχή έλξης. Το γεγονός αυτό σηματοδοτείται από την εκτέλεση βημάτων είτε εσωτερικής συμπίεσης είτε συρρίκνωσης που έχουν ως αποτέλεσμα τη μείωση του όγκου του απλόκου.

- Η διαδικασία αξιολόγησης-κατάταξης των κορυφών του απλόκου γίνεται με τη προσθήκη στη τιμή της συνάρτησης ενός τυχαίου όρου ομοιόμορφα κατανομημένου και ανάλογου της τρέχουσας θερμοκρασίας του συστήματος.
- Η τρέχουσα καλύτερη λύση στο εκάστοτε άπλοκο, και άρα στον πληθυσμό, προστατεύεται, μέσω της απαγόρευσης αντικατάστασής του. Με αυτό τον τρόπο, ακόμα και αν η βέλτιστη λύση έχει εντοπιστεί από τα πρώτα στάδια αναζήτησης δεν κινδυνεύει να αντικατασταθεί λόγω των τυχαίων βημάτων.
- Για την επιτάχυνση της διαδικασίας βελτιστοποίησης, εκτελούνται διαδοχικά βήματα επέκτασης προς την κατεύθυνση που βελτιώνει την τιμή της συνάρτησης (κατάβαση). Η διαδικασία επαναλαμβάνεται όσο παράγονται εφικτές λύσεις που βελτιώνουν τη τιμή της συνάρτησης. Η τεχνική αυτή βελτιώνει ραγδαία την απόδοση του αλγορίθμου ιδιαίτερα σε προβλήματα πολλών διαστάσεων στα οποία ο εντοπισμός μιας διεύθυνσης που βελτιώνει τη τιμή της συνάρτησης είναι δύσκολος.
- Για τον απεγκλωβισμό του απλόκου από τοπικά ακρότατα και τον εντοπισμό κάποιας νέας περιοχής έλξης εκτελούνται διαδοχικά αναρρίχησης προς την κατεύθυνση που χειροτερεύει την τιμή της συνάρτησης. Η τεχνική αυτή παρουσιάζει ομοιότητες με αυτή των Pan and Wu (1998), με τη διαφορά ότι παράγεται ένα μικρό πλήθος νέων λύσεων και γίνεται αποδεκτό εκείνο το σημείο που είναι καλύτερο από το προηγούμενό του.
- Στην περίπτωση που δεν επιτευχθεί βελτίωση της λύσης μέσω των κινήσεων του απλόκου, ενεργοποιείται ο μηχανισμός μετάλλαξης. Η τελεστής στοχεύει στη γέννηση σημείων που βρίσκονται μακριά από τη περιοχή που ορίζεται από το μέσο όρο του τρέχοντος πληθυσμού. Έτσι, στα πρώτα στάδια του αλγορίθμου που τα σημεία είναι διασκορπισμένα, το νέο σημείο παράγεται κοντά στα όρια του εφικτού χώρου, ενώ στα τελικά στάδια ο τελεστής παράγει μικροδιαταραχές στη γειτονιά της τρέχουσας βέλτιστης λύσης.

Περισσότερα στοιχεία για τις υπολογιστικές διαδικασίες και τις τεχνικές που ενσωματώνει ο αλγόριθμος ανόπτησης-απλόκου παρουσιάζονται στις εργασίες του Ευστρατιάδη (2001, 2008).

3.2 Περιγραφή της υπολογιστικής διαδικασίας

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα βήματα που εκτελεί ο εξελικτικός αλγόριθμος ανόπτησης-απλόκου, όπως αυτά περιγράφονται από τον Ευστρατιάδη (2008). Κατά συνθήκη θεωρείται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας βαθμωτής συνάρτησης n μεταβλητών. Ως δεδομένα εισόδου ο αλγόριθμος δέχεται:

- Το μέγεθος του πληθυσμού, m , $m \geq n+1$.
- Τα διανύσματα $[\mathbf{x}^{\min}, \mathbf{x}^{\max}]$ και $[\mathbf{x}^{\text{low}}, \mathbf{x}^{\text{up}}]$ που περιγράφουν τα εσωτερικά και εξωτερικά όρια του πεδίου αναζήτησης, αντίστοιχα.
- Τις δυο παραμέτρους του χρονοδιαγράμματος ανόπτησης, λ και β .
- Την πιθανότητα μετάλλαξης p_m .
- Το μέγιστο πλήθος υπολογισμού της στοχικής συνάρτησης
- Μια τιμή για το κριτήριο σύγκλισης

Κατά την έναρξη του αλγορίθμου παράγεται ένας αρχικός πληθυσμός $P^{[0]}$ που αποτελείται από $m \geq n + 1$ σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα σε κάποιο εσωτερικό πεδίο του εφικτού χώρου $[\mathbf{x}^{\min}, \mathbf{x}^{\max}]$. Οι συντεταγμένες κάθε σημείου i γεννώνται ως τυχαίοι αριθμοί από μια ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$. Σε κάθε σημείο, υπολογίζεται η τιμή της στοχικής συνάρτησης και, στη συνέχεια, ορίζεται η αρχική θερμοκρασία ως η διαφορά μεταξύ της μέγιστης και ελάχιστης τιμής, δηλαδή:

$$T^{[0]} = \max\{f_1^{[0]}, \dots, f_P^{[0]}\} - \min\{f_1^{[0]}, \dots, f_P^{[0]}\} \quad (3-1)$$

Έστω $P^{[k]}$ ο πληθυσμός της k γενιάς, που αποτελείται από ένα σύνολο $\{\mathbf{x}_1^{[k]}, \dots, \mathbf{x}_m^{[k]}\}$. Σε κάθε επανάληψη k η υπολογιστική διαδικασία περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1^ο: Υπολογίζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού, δηλαδή η μέση τιμή, μ_x , και η τυπική απόκλιση, σ_x , των συντεταγμένων.

Βήμα 2^ο: Από τον πληθυσμό επιλέγονται με τυχαίο τρόπο $n + 1$ σημεία, τα οποία διαμορφώνουν ένα άπλοκο $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{n+1}\}$. Τα σημεία τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά, έτσι ώστε η κορυφή \mathbf{s}_1 να αντιστοιχεί στο σημείο με την καλύτερη τιμή στοχικής συνάρτησης και η κορυφή \mathbf{s}_{n+1} στο σημείο με τη χειρότερη.

Βήμα 3^ο: Από το υποσύνολο $\{s_2, \dots, s_{n+1}\}$ που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του απλόκου εκτός από την καλύτερη, επιλέγεται μια κορυφή \mathbf{w} προς αντικατάσταση, σύμφωνα με το κριτήριο Metropolis. Το σημείο \mathbf{w} θα ορίζεται ως η συμβατικά χειρότερη λύση και είναι αυτό που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση:

$$g(\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}) + uT \quad (3-2)$$

όπου u τυχαίος αριθμός από ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$, και T η τρέχουσα θερμοκρασία του συστήματος. Στα πρώτα στάδια των επαναλήψεων, η θερμοκρασία του συστήματος είναι υψηλή και η επίδραση του τυχαίου όρου uT στην επιλογή είναι σημαντική. Όσο η διαδικασία αναζήτησης προχωρά, η επίδραση του τυχαίου όρου μειώνεται και στην οριακή περίπτωση, $T \rightarrow 0$, η κορυφή που αντικαθίσταται είναι πάντα η πραγματικά χειρότερη, που σημαίνει ότι η διαδικασία ακολουθεί τη λογική του αλγορίθμου Nelder-Mead.

Βήμα 4^ο: Το άπλοκο ανακλάται ως προς την κορυφή \mathbf{w} , γεννώντας ένα νέο σημείο \mathbf{r}_0 σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{g} + (0.5 + u)(\mathbf{g} - \mathbf{w}) \quad (3-3)$$

όπου u τυχαίος αριθμός από ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$ και \mathbf{g} το κεντροειδές των n καλύτερων κορυφών του απλόκου:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} (\mathbf{s}_i - \mathbf{w}) \right) \quad (3-4)$$

Βήμα 5^ο: Αν ισχύει $f(\mathbf{r}_0) < f(\mathbf{w})$, το νέο σημείο \mathbf{r}_0 αντικαθιστά τη συμβατικά χειρότερη κορυφή \mathbf{w} . Στην περίπτωση που επιπλέον ισχύει η συνθήκη $f(\mathbf{r}_0) < f(\mathbf{x}_1)$, δηλαδή από την ανάκλαση προκύπτει λύση καλύτερη από την τρέχουσα βέλτιστη στο άπλοκο, δοκιμάζονται διαδοχικά βήματα επέκτασης. Τα βήματα επέκτασης εκτελούνται στη διεύθυνση ελαχιστοποίησης της συνάρτησης που έχει εντοπιστεί, δηλαδή στην κατεύθυνση της ανάκλασης $\mathbf{r}_0 - \mathbf{g}$, σύμφωνα με την αναδρομική σχέση:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{g} + \eta_s(\mathbf{r}_0 - \mathbf{g}) \quad (3-5)$$

Όπου $\eta_s = \eta_{s-1} + u$, με $\eta_0 = 1$. Η επέκταση συνεχίζεται όσο εντοπίζονται εφικτές λύσεις που βελτιώνουν τη τιμή της συνάρτησης.

Αντίθετα, στη περίπτωση που ισχύει η συνθήκη $f(\mathbf{r}_0) > f(\mathbf{x}_1)$, το αλγόριθμος εκτελεί εξωτερική συμπίεση του απλόκου σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{g} + (0.25 + 0.5u)(\mathbf{r}_0 - \mathbf{g}) \quad (3-6)$$

Εφόσον το νέο σημείο \mathbf{r}_1 είναι καλύτερο από το σημείο \mathbf{r}_0 , δηλαδή $f(\mathbf{r}_1) < f(\mathbf{r}_0)$, το αντικαθιστά.

Βήμα 6^ο: Αντίθετα, στην περίπτωση που η ανάκλαση δεν παράγει σημείο που να βελτιώνει την τιμή της συνάρτησης, δηλαδή $f(\mathbf{r}_0) > f(\mathbf{w})$, δοκιμάζεται μια άλλη πορεία που περιλαμβάνει είτε συμπίεση είτε συρρίκνωση είτε διαδοχικά βήματα επέκτασης προς την κατεύθυνση που χειροτερεύει τη συνάρτηση. Για την επιλογή της κίνησης που θα εκτελεστεί, ο αλγόριθμος ελέγχει το κριτήριο Metropolis για τα σημεία \mathbf{r}_0 και \mathbf{w} . Συγκεκριμένα ελέγχεται αν:

$$f(\mathbf{r}_0 - uT) > f(\mathbf{w} + uT) \quad (3-7)$$

Εφόσον το παραπάνω κριτήριο ισχύει, το σημείο από ανάκλαση απορρίπτεται για δεύτερη φορά και ο αλγόριθμος εκτελεί εσωτερική συμπίεση σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{g} - (0.25 + 0.5u)(\mathbf{g} - \mathbf{w}) \quad (3-8)$$

Αν το νέο σημείο είναι καλύτερο από την συμβατικά χειρότερη κορυφή του απλόκου, τότε την αντικαθιστά. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν $f(\mathbf{r}_1) > f(\mathbf{w})$ τότε εκτελείται συρρίκνωση του απλόκου γύρω από την καλύτερη κορυφή του \mathbf{x}_1 , ώστε $\mathbf{s}'_i = 0.5(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_i)$ για κάθε $i = 2, \dots, n + 1$. Ο αλγόριθμος μεταβαίνει στο βήμα 9.

Οι δυο τελευταίες κινήσεις προκαλούν μείωση του όγκου του απλόκου και σύγκλιση του πληθυσμού στη γειτονιά κάποιου τοπικού ακροτάτου. Αυτό ενεργοποιεί το μηχανισμό μείωσης της θερμοκρασίας κατά έναν συντελεστή λ , που είναι παράμετρος του χρονοδιαγράμματος ανόπτησης.

Βήμα 7^ο: Εφόσον το σημείο από ανάκλαση γίνεται αποδεκτό σύμφωνα με το κριτήριο (3-7), ο αλγόριθμος ενεργοποιεί το μηχανισμό διαφυγής από τοπικό ακρότατο. Ο μηχανισμός αυτός περιλαμβάνει διαδοχικά βήματα επέκτασης προς την κατεύθυνση μεγιστοποίησης της συνάρτησης, δηλαδή βήματα αναρρίχησης. Τα βήματα εκτελούνται βάσει της σχέσης (3-5) παράγοντας νέα σημεία. Εφόσον είτε κάποιο από αυτά τα σημεία είναι καλύτερο από το \mathbf{r}_0

είτε βρεθεί ένα τουλάχιστον ζεύγος σημείων για τα οποία ισχύει $f(\mathbf{x}_{s+1}) > f(\mathbf{x}_s)$, το \mathbf{r}_0 αντικαθίσταται στον πληθυσμό.

Η στρατηγική αυτή έχει στόχο τον απεγκλωβισμό του απλόκου από τη γειτονιά κάποιου τοπικού ακροτάτου και δίνει στον αλγόριθμο τη δυνατότητα να εξερευνήσει άλλες γειτονικές περιοχές.

Βήμα 8^ο: Στην περίπτωση που κατά το βήμα 7 δεν αντικατασταθεί το σημείο ανάκλασης \mathbf{r}_0 από κάποιο καλύτερο σημείο, εκτελείται μετάλλαξη. Ο τελεστής μετάλλαξης βασίζεται στη γέννηση ενός τυχαίου σημείου εκτός του εύρους μιας τυπικής απόκλισης γύρω από τη μέση τιμή του τρέχοντος πληθυσμού, δηλαδή εκτός του εύρους $[\mu_x - \sigma_x, \mu_x + \sigma_x]$. Η παραγωγή των συντεταγμένων γίνεται ως εξής:

$$x_i = \mu_i \pm (\sigma_i + u d_i) \quad (3-9)$$

όπου μ_i η μέση τιμή του πληθυσμού για τη συντεταγμένη i , όπου σ_i η τυπική απόκλιση του πληθυσμού για τη συντεταγμένη i , u τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$ και d_i η απόσταση που υπολείπεται μέχρι τα όρια του εφικτού χώρου. Το πρόσημο $+$ ή $-$ επιλέγεται τυχαία, με ίση πιθανότητα. Αν είναι θετικό τότε η συντεταγμένη γεννάται από μια ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\mu_i + \sigma_i, x_i^{\max}]$, διαφορετικά γεννάται στο διάστημα $[x_i^{\min}, \mu_i - \sigma_i]$. Η διαδικασία αυτή αποσκοπεί στη γέννηση απομακρυσμένων, σε σχέση με το μέσο όρο του πληθυσμού, σημείων και εξασφαλίζει μεγαλύτερη διασπορά των λύσεων για την αποτελεσματική διερεύνηση του εφικτού χώρου.

Αν το σημείο που παράγεται από μετάλλαξη υπερτερεί του σημείου ανάκλασης τότε γίνεται αποδεκτό, σε αντίθετη περίπτωση γίνεται αποδεκτό με πιθανότητα p_m .

Βήμα 9^ο: Στο τέλος κάθε επανάληψης εντοπίζεται η καλύτερη, f_{min} , και χειρότερη, f_{max} , λύση στον πληθυσμό και ελέγχεται αν η θερμοκρασία ξεπερνά την τιμή $\beta (f_{max} - f_{min})$, όπου $\beta \geq 1$ παράμετρος του χρονοδιαγράμματος απόπτωσης. Με αυτό τρόπο η θερμοκρασία εμποδίζεται να λάβει υπερβολικά υψηλές τιμές, κάτι που θα επιβράδυνε σημαντικά τον αλγόριθμο.

Η διαδικασία αναζήτησης ολοκληρώνεται με δυο τρόπους:

- Όταν η σχετική βελτίωση της τιμής της στοχικής συνάρτησης από γενιά σε γενιά γίνει μικρότερη από κάποια ανοχή (κριτήριο σύγκλισης)
- Όταν ξεπεραστεί ένας προβλεπόμενος αριθμός υπολογισμού της στοχικής συνάρτησης (κριτήριο τερματισμού).

3.3 Ανάλυση και προσαρμογή του αλγορίθμου σε στοχαστικά προβλήματα

Στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας επιχειρήθηκε ο εμπλουτισμός του κλασικού εξελικτικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου με νέα πρωτότυπα στοιχεία τα οποία έχουν σαν στόχο να βελτιώσουν την ήδη μεγάλη αποτελεσματικότητα και αποδοτικότητα της μεθόδου, τόσο σε κλασικά προβλήματα βελτιστοποίησης όσο και σε περιπτώσεις που η συνάρτηση, και συνεπώς η επιφάνεια απόκρισης, διαταράσσεται λόγω της παρουσίας θορύβου. Η ευρετική μέθοδος, ήδη από την αρχική της διατύπωση ενσωματώνει πλήθος τεχνικών και μεθοδολογιών που την προστατεύουν από πρόωρη σύγκλιση σε κάποιο μη βέλτιστο σημείο, εξαιτίας της επικράτησης του θορύβου στη διαδικασία αναζήτησης. Τα χαρακτηριστικά που προσδίδουν στον αλγόριθμο αυτή του την ικανότητα είναι:

- **Εξέλιξη της διαδικασίας αναζήτησης με βάση έναν πληθυσμό**

Εν αντιθέσει με τα υπόλοιπα ευρετικά σχήματα ανόπτησης-απλόκου και τις κλασικές τεχνικές άμεσης αναζήτησης, στον εξελικτικό αλγόριθμο η στρατηγική αναζήτησης υλοποιείται με βάση έναν πληθυσμό πολλών εφικτών λύσεων, από τον οποίο, σε κάθε επανάληψη, παράγεται, με τυχαίο τρόπο, ένα καινούργιο άπλοκο. Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται η εξερεύνηση ενός μεγάλου όγκου του χώρου αναζήτησης και η σταδιακή εξέλιξη του πληθυσμού, με περιορισμένο τον κίνδυνο πρόωρης σύγκλισης. Η ανάγκη για χρήση μεγάλου πληθυσμού γίνεται ακόμα πιο επιτακτική όταν οι αποκρίσεις χαρακτηρίζονται από τη παρουσία θορύβου, καθώς σε αυτή τη περίπτωση η πιθανότητα γρήγορου εκφυλισμού, ενός και μοναδικού, απλόκου είναι μεγάλη. Στα πρώτα στάδια της διαδικασίας, τα σημεία είναι αραιά διασκορπισμένα (μεγάλη διασπορά) στο χώρο με αποτέλεσμα το άπλοκο που παράγεται, σε κάθε κύκλο, να έχει μεγάλο μέγεθος και άρα μεγάλη ικανότητα να κινηθεί γρήγορα προς κάποια περιοχή έλξης. Από την άλλη, η εκτέλεση κάποιας κίνησης (εσωτερική συμπίεση ή συρρίκνωση) που προκαλεί μείωση του όγκου του απλόκου, λόγω της επικράτησης του θορύβου, ασκεί πολύ μικρότερη επιρροή στη διαδικασία αναζήτησης. Η χρήση μεγάλου πληθυσμού και η τυχαία επιλογή άπλοκων μέσα από αυτόν κρίνεται πολύ πιο αποτελεσματική από την τεχνική «υπερδιαστασιολόγησης» ενός και μοναδικού απλόκου που υιοθετείται από πολλούς ερευνητές.

- **Χρήση του απλόκου για την εξερεύνηση του εφικτού χώρου**

Το άπλοκο έχει την ικανότητα να προσαρμόζεται άμεσα στα χαρακτηριστικά της επιφάνειας απόκρισης, μεταβάλλοντας το σχήμα του και το μέγεθός του ανάλογα με τη

γεωμετρία και το ανάγλυφο της περιοχής στην οποία θα βρεθεί. Το γεγονός αυτό το καθιστά ως το πλέον κατάλληλο γεωμετρικό ανάλογο για την εξερεύνηση τραχιών και απότομων επιφανειών που χαρακτηρίζονται από έντονες και συχνές διακυμάνσεις της γεωμετρίας τους. Ωστόσο, το μεγάλο πλεονέκτημα του αλγορίθμου έγκειται στο ότι οι κανόνες διερεύνησης (κινήσεις απλόκου) δεν καθορίζονται με βάση τις απόλυτες τιμές της συνάρτησης στις κορυφές του απλόκου, αλλά από τη σχετική διάταξη αυτών. Κατά συνέπεια, οι διαταραχές που δεν προκαλούν αλλαγές στην κατάταξη των λύσεων, έχουν μικρή επίδραση στην πορεία αναζήτησης που θα ακολουθήσει ο αλγόριθμος.

- **Τεχνικές διαφυγής από τοπικά ακρότατα**

Για τη διαφυγή του απλόκου από τοπικά ακρότατα ο αλγόριθμος ενσωματώνει μια στρατηγική διαδοχικών βημάτων επέκτασης, σύμφωνα με την εξίσωση (3-5), προς την κατεύθυνση που χειροτερεύει την τιμή της συνάρτησης (ανάβαση). Στόχος της κίνησης αυτής είναι η υπερπήδηση της περιοχής έλξης του τοπικού ακροτάτου που έχει εγκλωβιστεί το άπλοκο και ο εντοπισμός μιας νέας γειτονικής περιοχής πιο προσοδοφόρας. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο εν λόγω μηχανισμός παίζει καθοριστικό ρόλο κατά τη βελτιστοποίηση στοχαστικών στοχικών συναρτήσεων στις οποίες η παρουσία θορύβου έχει ως αποτέλεσμα την έντονη διαταραχή της επιφάνειας απόκρισης και την εμφάνιση μεγάλου αριθμού περιοχών έλξης που θα πρέπει να υπερπηδηθούν.

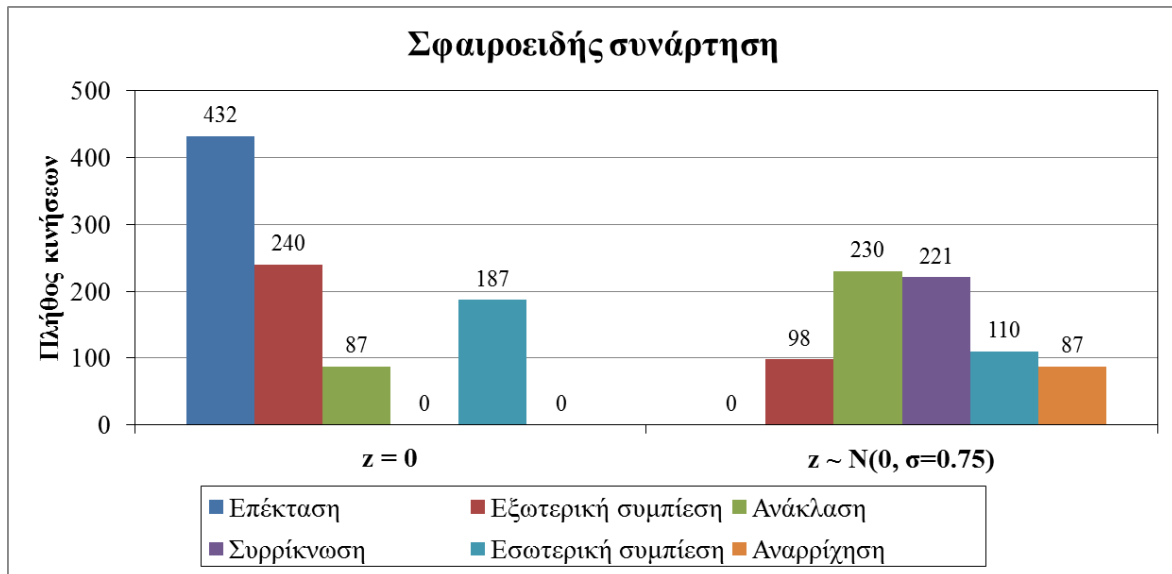
- **Χρονοδιάγραμμα ανόπτησης**

Σε συνδυασμό με τα παραπάνω, το χρονοδιάγραμμα ανόπτησης παίζει και αυτό με τη σειρά του σημαντικό ρόλο στη διαδικασία αναζήτησης, καθώς εξασφαλίζει την τυχαιότητα που απαιτείται για την αποδοχή μη βέλτιστων κινήσεων και κατά συνέπεια την υπερπήδηση των περιοχών έλξης των τοπικών ακροτάτων. Ταυτόχρονα, η διαδικασία αυτορρύθμισης της αρχικής θερμοκρασίας του συστήματος δεν επηρεάζεται ιδιαίτερα υπό τη παρουσία της στοχαστικής συνιστώσας, καθώς στα αρχικά στάδια της αναζήτησης η διαφορά στις τιμές της στοχικής συνάρτησης, στα διάφορα σημεία, οφείλεται κατά κύριο λόγο στη «χονδροειδή» γεωμετρία της επιφάνειας απόκρισης και όχι στο θόρυβο.

Στα πλαίσια της προκαταρκτικής έρευνας για την επίδοση του κλασικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου σε προβλήματα που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα ως προς την ακριβή τιμή της στοχικής συνάρτησης, μελετήθηκε η επίδραση που ασκεί η στοχαστική συνιστώσα του προβλήματος στη πορεία αναζήτησης. Όπως αποδείχτηκε, η επιβολή ακόμα και μικρών τιμών θορύβου στις τιμές της στοχικής συνάρτησης αλλάζει πλήρως την πορεία

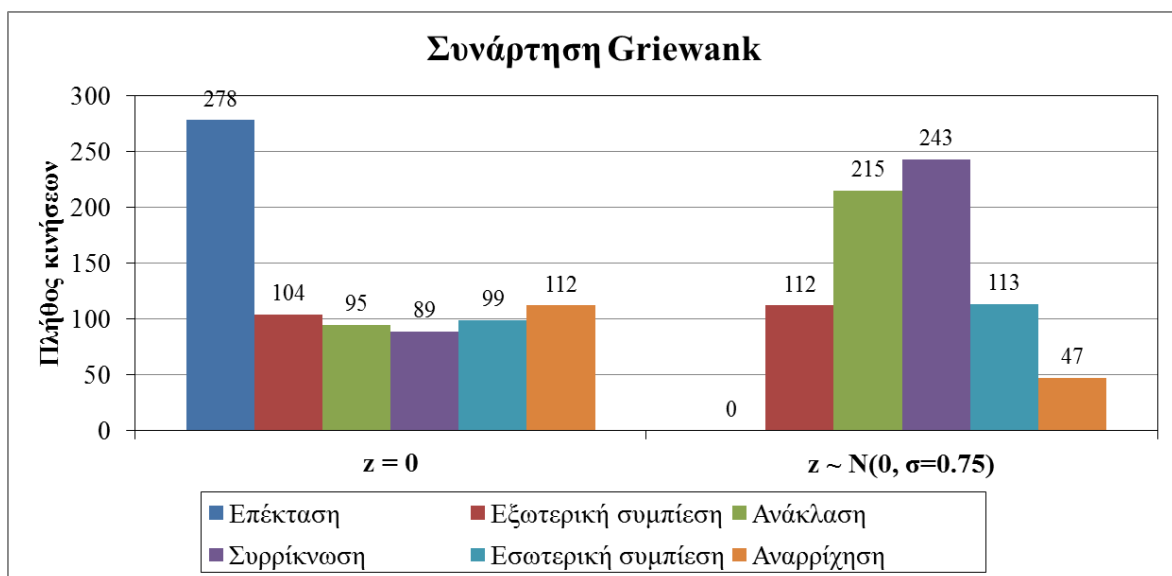
αναζήτησης που ακολουθεί ο αλγόριθμος για τον εντοπισμό του ολικά βέλτιστου σημείου, καθώς το άπλοκο προσπαθεί να προσαρμοστεί όσο το δυνατόν καλύτερα στα χαρακτηριστικά της διαταραγμένης επιφάνειας απόκρισης. Χαρακτηριστικά είναι τα δυο ακόλουθα γραφήματα που απεικονίζουν το πλήθος των διαφορετικών κινήσεων (επέκταση, ανάκλαση, εσωτερική συρρίκνωση, εξωτερική συρρίκνωση, συμπίεση) που εκτελεί το άπλοκο στις επιφάνειες απόκρισης δυο διαφορετικών μαθηματικών συναρτήσεων, με και χωρίς την παρουσία θορύβου. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η προσθήκη μιας τυχαίας μεταβλητής από κανονική κατανομή στις τιμές των συναρτήσεων προκαλεί την ραγδαία αύξηση των κινήσεων που προκαλούν μείωση του όγκου του απλόκου (εσωτερική συμπίεση και συρρίκνωση), περιορίζοντας ταυτόχρονα τις κινήσεις που αυξάνουν τον όγκο και επιταχύνουν την διαδικασία αναζήτησης (επέκταση και εξωτερική συμπίεση). Επιπλέον, ο μηχανισμός διαφυγής, δηλαδή η αναρρίχηση προς την κατεύθυνση που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση, ενεργοποιείται συχνότερα ώστε να απεγκλωβίζεται το άπλοκο από τη γειτονιά κάποιου τοπικού ακροτάτου.

Τα παραπάνω αποτελέσματα ήταν αναμενόμενα για τη σφαιροειδή συνάρτηση η οποία, με την επιβολή θορύβου, μετατρέπεται από μια εντελώς ομαλή και κυρτή συνάρτηση, σε μια συνάρτηση με τραχιά επιφάνεια και πλήθος τοπικών ακροτάτων. Στην ντετερμινιστική περίπτωση ($z = 0$) το άπλοκο ακολουθεί μια πορεία διαδοχικών επεκτάσεων και εξωτερικών συμπίεσεων μέχρι να προσεγγίσει τη περιοχή ολικού βέλτιστου, χωρίς να απαιτείται η διαφυγή από κάποιο ακρότατο μέσω αναρρίχησης ή συρρίκνωσης. Από την άλλη, στη περίπτωση με τη προσθήκη θορύβου ($z \sim N(0, \sigma = 0.75)$), το άπλοκο ακολουθεί μια εντελώς διαφορετική πορεία, με την εξέλιξη του πληθυσμού να είναι πολύ αργή (μηδενικές επεκτάσεις) και με τα βήματα που μειώνουν τον όγκο να παίζουν βασικό ρόλο.



Γράφημα 3.1: Πλήθος διαφορετικών κινήσεων που εκτελούνται κατά την βελτιστοποίηση της σφαιροειδούς συνάρτησης με (δεξιά ομάδα) και χωρίς (αριστερή ομάδα) την επιβολή θορύβου

Παρόμοια με αυτά της σφαιροειδούς είναι τα αποτελέσματα και για τη πολυκόρυφη συνάρτηση Griewank που χαρακτηρίζεται από πλήθος τοπικών ακροτάτων και μια ιδιαίτερα τραχιά και απότομη επιφάνεια. Η επιβολή θορύβου οξύνει ακόμα περισσότερο τα χαρακτηριστικά αυτά, επιβάλλοντας στο άπλοκο ακόμα μεγαλύτερο πλήθος διαδοχικών συρρικνώσεων και συμπίεσεων.



Γράφημα 3.2: Πλήθος διαφορετικών κινήσεων που εκτελούνται κατά την βελτιστοποίηση της σφαιροειδούς συνάρτησης με (δεξιά ομάδα) και χωρίς (αριστερή ομάδα) την επιβολή θορύβου

Οι διαδοχικές συρρικνώσεις και συμπίεσεις έχουν σαν άμεση συνέπεια τη γρήγορη μείωση του όγκου του απλόκου, που σταδιακά καταλήγει σε πλήρη εκφυλισμό. Το γεγονός αυτό καθιστά το άπλοκο ανάκανο να κινηθεί γρήγορα και αποτελεσματικά πάνω στην επιφάνεια

απόκρισης. Ταυτόχρονα, οι παραπάνω κινήσεις ενεργοποιούν συχνά τον μηχανισμό μείωσης της θερμοκρασίας του συστήματος με αποτέλεσμα το χρονοδιάγραμμα ψύξης, και άρα η τυχαιότητα που αυτό εξασφαλίζει, να φθίνει με πολύ γρήγορο ρυθμό. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η στοχαστική διαδικασία αναζήτησης να μετατρέπεται σε προσδιοριστική, χωρίς την απαιτούμενη τυχαιότητα για την υπερπήδηση των τοπικών ακροτάτων.

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω αδυναμιών που παρουσιάζει ο αλγόριθμος μελετήθηκαν και τελικά ενσωματώθηκαν, στην διαδικασία αναζήτησης, οι εξής μηχανισμοί:

- Η δυναμική προσαρμογή του συντελεστή συρρίκνωσης
- Ο επαναυπολογισμός της τρέχουσας καλύτερης λύσης
- Η επανανόπτηση του χρονοδιαγράμματος ανόπτησης
- Η προσθήκη ενός καινούργιου κριτηρίου σύγκλισης

Ακολουθεί η ανάλυση των παραπάνω καινοτόμων ιδεών.

Δυναμική προσαρμογή του συντελεστή συρρίκνωσης

Για την αποφυγή πρόωρης σύγκλισης και εκφυλισμού του απλόκου λόγω διαδοχικών συρρικνώσεων επιλέγεται η δυναμική προσαρμογή του συντελεστή συρρίκνωσης, έτσι ώστε η μείωση του όγκου του απλόκου να είναι μικρότερη όσο η διαδικασία αναζήτησης προχωρά. Για την επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης που θα δίνει το ποσοστό συρρίκνωσης των n χειρότερων κορυφών του απλόκου, \mathbf{x}_i , προς την καλύτερη κορυφή \mathbf{x}_1 πραγματοποιήθηκε εκτεταμένη έρευνα. Τελικά, το άπλοκο, σε κάθε επαναληπτικό βήμα, θα συρρικνώνεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{x}'_s = \delta \mathbf{x}_i + (1 - \delta) \mathbf{x}_1 \quad (3-10)$$

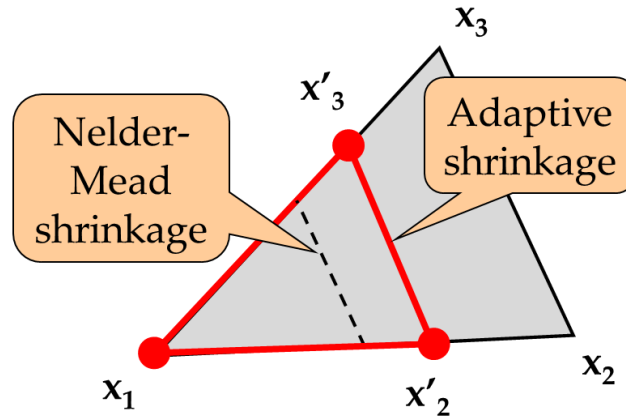
όπου δ ο συντελεστής συρρίκνωσης, που λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0.5, 1]$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\delta = 1 - 0.5 \frac{T^{[k]}}{T^{[0]}} \quad (3-11)$$

όπου $T^{[0]}$ η αρχική θερμοκρασία του συστήματος και $T^{[k]}$ η τρέχουσα θερμοκρασία στην επανάληψη k . Κατά συνέπεια, ο συντελεστής συρρίκνωσης θα ακολουθεί και αυτός το χρονοδιάγραμμα ανόπτησης.

Στα πρώτα επαναληπτικά βήματα, ο συντελεστής δ λαμβάνει τιμές κοντά στο 0.5, που είναι και η τιμή που υιοθετούν οι Nelder & Mead (1965). Όσο προχωρά η διαδικασία, η

θερμοκρασία του συστήματος μειώνεται με αποτέλεσμα ο συντελεστής συρρίκνωσης να λαμβάνει υψηλότερες τιμές, τείνοντας τελικά στη μονάδα. Αρχικά, οι κορυφές έχουν μεγάλη διασπορά στον εφικτό χώρο αναζήτησης και το άπλοκο βρίσκεται μακριά από τη περιοχή βέλτιστης λύσης. Σε αυτή τη περίπτωση, η πιθανότητα «εσφαλμένης» εκτέλεσης συρρίκνωσης λόγω θορύβου είναι πολύ μικρή καθώς η διαφορά των τιμών της συνάρτησης στις κορυφές του απλόκου οφείλεται κυρίως στην γεωγραφία της επιφάνειας απόκρισης και όχι στην στοχαστική συνιστώσα. Συνεπώς, η συρρίκνωση θα πραγματοποιηθεί για να τοποθετήσει το άπλοκο στη γειτονιά κάποιας περιοχής έλξης. Όσο η διαδικασία προχωρά το άπλοκο έχει εντοπίσει κάποια περιοχή έλξης της οποίας η επιφάνεια είναι συνήθως σχετικά ομαλή και επίπεδη. Αυτό επιτρέπει στον θόρυβο να επικρατήσει στη διαδικασία κατάταξης των κορυφών του απλόκου και στη διαδικασία αναζήτησης. Λόγω της επιρροής του θορύβου, η πιθανότητα διαδοχικών συρρικνώσεων είναι μεγαλύτερη και ο κίνδυνος άμεσου εκφυλισμού του απλόκου έντονος. Για να αποφευχθεί το τελευταίο γίνεται χρήση μεγαλύτερων συντελεστών συρρίκνωσης που εξασφαλίζουν στο άπλοκο μεγάλο όγκο και άρα ικανότητα κίνησης για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Στο σχήμα που ακολουθεί (Σχήμα 3.1) αναπαριστάται γραφικά η παραπάνω μεθοδολογία.



Σχήμα 3.1: Δυναμική προσαρμογή του συντελεστή συρρίκνωσης

Επανανόπτηση του χρονοδιαγράμματος ψύξης

Όπως έχει γίνει ήδη σαφές, το έντονο ανάγλυφο των διαταραγμένων, εξαιτίας της παρουσίας θορύβου, επιφανειών απόκρισης έχει σαν αποτέλεσμα την συχνότερη εκτέλεση διαδοχικών βημάτων συρρίκνωσης και εσωτερικής συμπίεσης, και την συχνή ενεργοποίηση του μηχανισμού μείωσης της θερμοκρασίας κατά έναν παράγοντα λ . Αυτό έχει ως συνέπεια το γρήγορο μηδενισμό της θερμοκρασίας προτού εντοπισθεί η περιοχή του ολικά βέλτιστου σημείου. Με την αφαίρεση της τυχαιότητας στη διαδικασία αναζήτησης, η εξερεύνηση του

εφικτού χώρου καταλήγει να γίνεται μέσω καθαρά προσδιοριστικών κανόνων μετάβασης που δεν επιτρέπουν την υπερπήδηση των τοπικών ακροτάτων, μέσω των ενσωματωμένων μηχανισμών διαφυγής.

Για να ξεπεραστεί το παραπάνω πρόβλημα απαιτείται η εξασφάλιση μιας ελάχιστης τυχειότητας στις διαδικασίες. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή μιας επιπλέον παραμέτρου στο χρονοδιάγραμμα ανόπτωσης, $T_{\min} < 1$, που αποτελεί την ελάχιστη εφικτή τιμή της θερμοκρασίας στο σύστημα και σηματοδοτεί την ενεργοποίηση του μηχανισμού επαναφοράς της θερμοκρασίας σε κάποια υψηλότερα επίπεδα (επανανόπτωση). Η τεχνική αυτή είναι ανάλογη με αυτή που υιοθετεί ο Ευστρατιάδης (2008) για τον πολυκριτηριακό αλγόριθμο ανόπτωσης-απλόκου. Η επαναφορά της θερμοκρασίας σε κάποια υψηλότερα επίπεδα επηρεάζει άμεσα και το συντελεστή συρρίκνωσης, αφού η νέα τιμή τίθεται ως αρχική στο σύστημα, $T^{[0]}$. Με αυτό τον τρόπο το άπλοκο εξασφαλίζει την ικανότητα να διερευνήσει αποτελεσματικότερα την επιφάνεια γύρω από κάποια περιοχή έλξης, σε επίπεδο μικροκλίμακας.

Επαναυπολογισμός της τρέχουσας καλύτερης λύσης

Από τη διατύπωσή του αλγόριθμος προστατεύει από αντικατάσταση την τρέχουσα καλύτερη κορυφή του απλόκου, και άρα του πληθυσμού. Με αυτό τον τρόπο, ακόμα και αν το πραγματικό ολικό βέλτιστο έχει εντοπιστεί από τα πρώτα στάδια της διαδικασίας αναζήτησης, δεν υπάρχει κίνδυνος να χαθεί εξαιτίας των τυχαίων κανόνων επιλογής νέων λύσεων. Κάτι τέτοιο έχει μεγάλη πιθανότητα να συμβεί στα αρχικά στάδια της διαδικασίας λόγω της υψηλής τυχειότητας που απορρέει από την υψηλή τιμή της θερμοκρασίας του συστήματος.

Ωστόσο, η παραπάνω στρατηγική μπορεί να αποβεί μοιραία κατά την επίλυση στοχαστικών προβλημάτων στα οποία σε κάθε σημείο δεν αντιστοιχεί μονοσήμαντα η ίδια μοναδική τιμή στοχικής συνάρτησης. Στα προβλήματα αυτά, υπάρχει μεγάλος κίνδυνος εσφαλμένης σύγκλισης του αλγορίθμου στη περιοχή κάποιου μη ολικά βέλτιστου ακροτάτου, εξαιτίας της επικράτησης κάποιου σημείου του οποίου η τιμή της συνάρτησης είναι μικρή λόγω της στοχαστικής συνιστώσας. Για την προστασία του αλγορίθμου από τέτοιες καταστάσεις ενσωματώνεται μια τακτική περιοδικού επαναυπολογισμού της τιμής της στοχικής συνάρτησης στο τρέχον καλύτερο σημείο του πληθυσμού όταν το τελευταίο δεν έχει αντικατασταθεί για συγκεκριμένο πλήθος επαναλήψεων. Το πλήθος επαναληπτικών κύκλων, μετά το πέρας του οποίου θα εκτελείται επαναυπολογισμός, δεν θα πρέπει να είναι ούτε

αρκετά μικρό, ώστε να προστατεύεται η τρέχουσα βέλτιστη λύση για κάποιο χρόνο, ούτε αρκετά μεγάλο, ώστε να αποφευχθεί η γρήγορη μετακίνηση του πληθυσμού προς κάποια περιοχή έλξης. Με βάση τα δυο παραπάνω αντικρουόμενα κριτήρια ως βέλτιστο πλήθος επαναλήψεων επιλέγεται το μέγεθος του πληθυσμού, m .

Ως μια επιπλέον δικλείδα ασφαλείας έναντι της πρόωρης σύγκλισης, εισάγεται ο επαναυπολογισμός της τιμής της συνάρτησης στο καλύτερο σημείο του πληθυσμού κάθε φορά που εκτελείται μια κίνηση η οποία μειώνει εγγυημένα τον όγκο του απλόκου. Οι κινήσεις αυτές είναι η εσωτερική συμπίεση και η συρρίκνωση, και σηματοδοτούν τη σύγκλιση του πληθυσμού σε κάποιο τοπικό ακρότατο. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι δυο παραπάνω κινήσεις παρουσιάζουν μεγάλη πιθανότητα εμφάνισης σε προβλήματα στοχαστικών στοχικών συναρτήσεων, ήδη από τα πρώτα στάδια της αναζήτησης, με αποτέλεσμα να μειώνεται ταχύτατα η διασπορά του πληθυσμού. Συνεπώς, είναι σημαντικό να εκτιμάται άμεσα αν το εντοπισθέν σημείο, προς το οποίο εκτελείται σύγκλιση του απλόκου, είναι όντως βέλτιστο, ή επικρατεί στη διαδικασία λόγω θορύβου. Από την άλλη, στα τελευταία στάδια της διαδικασίας όπου έχει επέλθει σύγκλιση εκτελούνται κατ' αποκλειστικότητα βήματα συρρίκνωσης και εσωτερικής συμπίεσης. Σε αυτή τη περίπτωση, ο επαναυπολογισμός, δίνει τη δυνατότητα και σε άλλα σημεία του πληθυσμού να αποκτήσουν χαρακτήρα βέλτιστου και να αποτελέσουν πόλο έλξης για τα υπόλοιπα. Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται σταδιακή σύγκλιση προς το πραγματικά ολικά βέλτιστο σημείο.

Κριτήριο σύγκλισης του αλγορίθμου

Ως κριτήρια ολοκλήρωσης της διαδικασίας αναζήτησης, ο αλγόριθμος υιοθετεί ένα κριτήριο τερματισμού που ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός δοκιμών (πλήθος υπολογισμού της στοχικής συνάρτησης) και ένα κριτήριο σύγκλισης το οποίο ελέγχει αν μεταξύ διαδοχικών επαναληπτικών κύκλων (γενιών) επιτυγχάνεται κάποια σχετική βελτίωση στην καλύτερη τιμή της στοχικής συνάρτησης στα σημεία του πληθυσμού. Η αναζήτηση ολοκληρώνεται όταν ικανοποιηθεί κάποιο από τα παραπάνω κριτήρια. Το κριτήριο τερματισμού εκφράζει ένα μέγιστο υπολογιστικό χρόνο που δεσμεύεται για την επίλυση του προβλήματος. Ο Ευστρατιάδης (2001) ως κριτήριο σύγκλισης υιοθετεί τη συνάρτηση:

$$\frac{|f_{\max}^{[k]} - f_{\min}^{[k]}|}{|f_{\max}^{[k]}| + |f_{\min}^{[k]}|} < \varepsilon / 2 \quad (3-12)$$

όπου ε ένας μικρός θετικός αριθμός, ο οποίος εκφράζει τη μέγιστη επιτρεπόμενη ανοχή ως προς τη σχετική απόσταση μεταξύ των τιμών της συνάρτησης της καλύτερης και χειρότερης

λύσης στον τρέχοντα πληθυσμό $P^{[k]}$. Η ανοχή ε , εκφρασμένη ως ποσοστό, αποτελεί παράμετρο εισόδου του αλγορίθμου που εισάγεται από το χρήστη.

Από προκαταρκτική έρευνα, αποδείχτηκε πως το παραπάνω κριτήριο σύγκλισης παρουσιάζει σαφείς αδυναμίες. Η σημαντικότερη από όλες είναι τα προβλήματα αριθμητικής ευστάθειας που εμφανίζει το κριτήριο όταν ο πληθυσμός συγκλίνει στη περιοχή κάποιου βέλτιστου σημείου με τιμή που τείνει στο μηδέν. Σε αυτή τη περίπτωση, παρά το γεγονός ότι έχει επέλθει σύγκλιση σε κάποιο ολικό ακρότατο, το κριτήριο διατηρεί υψηλή τιμή, λόγω του ότι ο παρανομαστής τείνει στο μηδέν, με αποτέλεσμα η διαδικασία να μην τερματίζεται και να εξαντλείται ο μέγιστο αριθμός επαναλήψεων χωρίς να επιτυγχάνεται κάποια ουσιαστική βελτίωση της τρέχουσας βέλτιστης λύσης. Τα προβλήματα αστάθειας, είναι ακόμα πιο έντονα στη περίπτωση στοχαστικών στοχικών συναρτήσεων καθώς η επιρροή του θορύβου μεταφέρεται άμεσα στο παραπάνω κριτήριο σύγκλισης. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κατά τα τελικά στάδια της αναζήτησης, η διαφορά στις τιμές της συνάρτησης στο πληθυσμό οφείλεται κατά βάση στο θόρυβο καθώς όλα τα σημεία έχουν συγκλίνει στη γειτονιά κάποιου τοπικού ακροτάτου όπου η επιφάνεια απόκρισης έχει τη μορφή επίπεδης κοιλάδας. Κατά συνέπεια, η εξίσωση (3-12) δεν αποτυπώνει την πραγματική απόκλιση μεταξύ των σημείων του πληθυσμού αλλά τη διαφορά των στοχαστικών όρων αυτών.

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω αδυναμιών πραγματοποιήθηκε εκτενής έρευνα με στόχο τη διατύπωση ενός νέου γενικού κριτηρίου σύγκλισης το οποίο θα είναι απαλλαγμένο από την επιρροή που ασκεί η, συνήθως, διαταραγμένη τιμή της στοχικής συνάρτησης. Προς αυτή την κατεύθυνση, ως κριτήριο σύγκλισης ορίστηκε η σχετική διασπορά που παρουσιάζουν τα σημεία του πληθυσμού ως προς το κεντροειδές του. Η ευκλείδεια απόσταση (νόρμα) d_i μεταξύ του κεντροειδούς του πληθυσμού \mathbf{g} και των επιμέρους σημείων θα δίνεται από τη σχέση:

$$d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (g_j - x_{ij})^2} \quad (3-13)$$

Τελικά, το κριτήριο θα ελέγχει αν η μέση ευκλείδεια απόσταση των σημείων από το κεντροειδές ξεπερνά κάποια ανοχή ε :

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d_i < \varepsilon \quad (3-14)$$

όπου m το μέγεθος του πληθυσμού.

Κεφάλαιο 4^ο

4 Αξιολόγηση του νέου εξελικτικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου σε συναρτήσεις ελέγχου

Για την αξιολόγηση των νέων στοιχείων και τεχνικών που ενσωματώθηκαν στον κλασικό εξελικτικό αλγόριθμο ανόπτησης-απλόκου επιχειρήθηκε η βελτιστοποίηση έξι διαφορετικών μαθηματικών συναρτήσεων με γνωστή αναλυτική μορφή και θέση ολικού βέλτιστου. Στη βιβλιογραφία διατίθεται μεγάλος πλήθος τέτοιων συναρτήσεων ελέγχου, τόσο για μονοκριτηριακά όσο και για πολυκριτηριακά προβλήματα. Οι More et al. (1981) συγκεντρώνουν τα περισσότερα από αυτά, κατηγοριοποιώντας τα σε διαφορετικά επίπεδα δυσκολίας ανάλογα με το πλήθος μεταβλητών ελέγχου, τη γεωμετρία της επιφάνειας απόκρισης (τραχύτητα), το πλήθος τοπικών ακρότατων, την ύπαρξη ή μη μαθηματικών περιορισμών και την ύπαρξη ή μη ασυνεχειών στον εφικτό χώρο αναζήτησης.

Η χρήση μαθηματικών συναρτήσεων ελέγχου είναι συνήθης και στις περιπτώσεις που αξιολογείται η επίδοση κάποιου αλγορίθμου σε προβλήματα που η συνάρτηση διαταράσσεται από θόρυβο ή οι αποκρίσεις της είναι προϊόν τυχαίων δειγματοληψιών. Σε αυτές τις περιπτώσεις επιδιώκεται η βελτιστοποίηση των κλασικών ντετερμινιστικών συναρτήσεων ελέγχου με την προσθήκη ενός τυχαίου όρου, για τη προσομοίωση-μίμηση της αβεβαιότητας στις αποκρίσεις πραγματικών συστημάτων. Σε αυτά τα πλαίσια, ελέγχεται αν ο αλγόριθμος καταφέρνει να εντοπίσει το σημείο που βρίσκεται το ολικό βέλτιστο της ντετερμινιστικής μορφής της συνάρτησης, το οποίο είναι εκ των προτέρων γνωστό. Φυσικά, σε πραγματικά προβλήματα βελτιστοποίησης ένας τέτοιος έλεγχος δεν είναι ποτέ εφικτός καθώς δεν είναι εκ των προτέρων γνώστη ούτε η τιμή του ολικού βέλτιστου ούτε η ακριβής του θέση. Στις ενότητες που ακολουθούν περιγράφεται η μεθοδολογία που υιοθετήθηκε για τη σύγκριση των αλγορίθμων και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

4.1 Μαθηματικές συναρτήσεις ελέγχου

Για τον έλεγχο και την αντικειμενική σύγκριση των επιδόσεων του κλασικού και νέου εξελικτικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου, χρησιμοποιήθηκαν 6 ευρέως διαδεδομένες συναρτήσεις ελέγχου με διαφορετικό βαθμό δυσκολίας. Η επιλογή των παρακάτω συναρτήσεων έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε να αξιολογηθεί αντικειμενικά η διερευνητική ικανότητα και η προσαρμογή των αλγορίθμων σε επιφάνειες απόκρισης με διαφορετικά

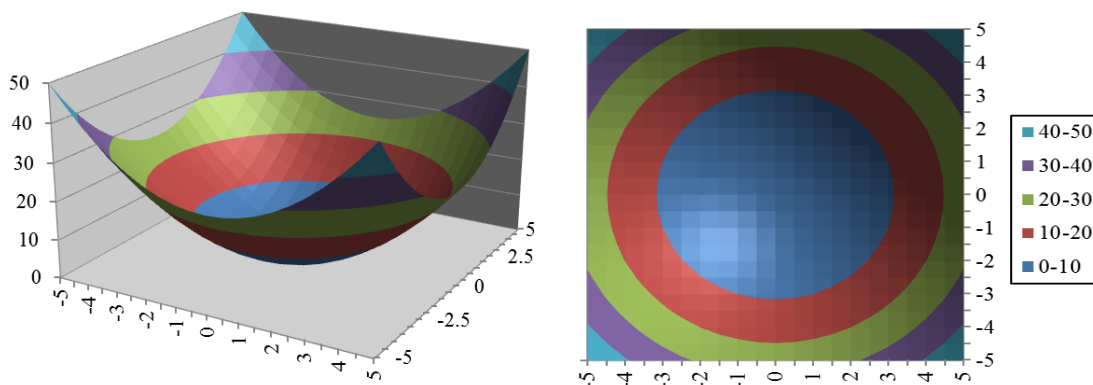
χαρακτηριστικά. Για το λόγο αυτό, η επιλογή περιλαμβάνει τόσο μονοκόρυφες όσο και πολυκόρυφες συναρτήσεις με τραχείς αλλά και λείες επιφάνειες απόκρισης. Ακολουθεί η αναλυτική περιγραφή των έξι συναρτήσεων ελέγχου.

Σφαιροειδής συνάρτηση

Η σφαιροειδής συνάρτηση, γνωστή και ως πρώτη συνάρτηση του De Jong, είναι μια από τις πιο απλές μαθηματικές συναρτήσεις ελέγχου. Η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, απολύτως συμμετρική και κυρτή. Ανήκει δε, στην κατηγορία τετραγωνικών συναρτήσεων και έχει ένα και μοναδικό ολικό ακρότατο, $f(x) = 0$, στο σημείο $x_i = 0$, για $i = 1, \dots, n$. Ο γενικός ορισμός της συνάρτησης δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (4-1)$$

Για τον έλεγχο της επίδοσης των αλγορίθμων τα όρια του εφικτού χώρου περιορίζονται συνήθως στον υπερκύβο $-5 \leq x_i \leq 5$, για $i = 1, \dots, n$.



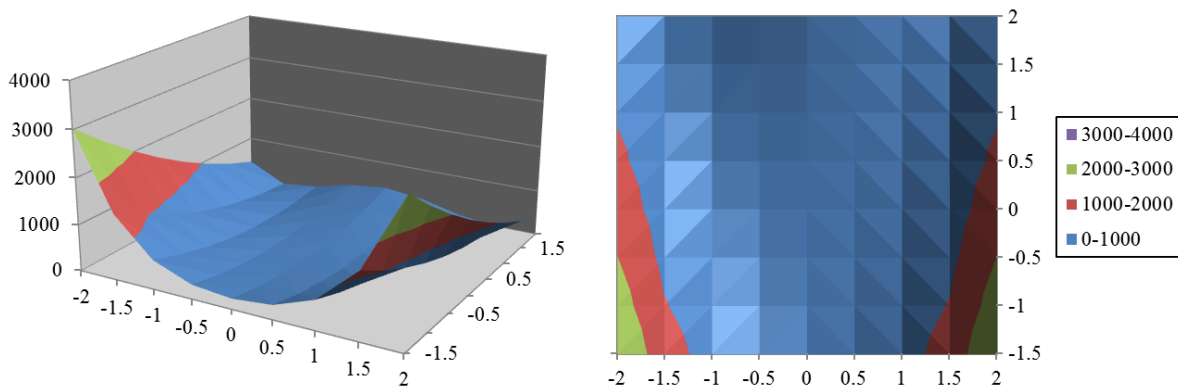
Σχήμα 4.1: Γραφικές παραστάσεις διδιάστατης σφαιροειδούς συνάρτησης

Συνάρτηση Rosenbrock

Η συνάρτηση - κοιλάδα (valley) Rosenbrock, ή δεύτερη συνάρτηση του De Jong, θεωρείται ένα από τα πιο δύσκολα προβλήματα βελτιστοποίησης καθώς έχει ένα και μοναδικό ακρότατο, $f(x) = 0$, στο σημείο $x_i = 1$, για $i = 1, \dots, n$, το οποίο βρίσκεται εντός μιας μακριάς και στενής χαράδρας παραβολοειδούς μορφής. Ο εντοπισμός της χαράδρας επιτυγχάνεται σχετικά εύκολα, ωστόσο οι περισσότεροι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης αδυνατούν να εντοπίσουν με ακρίβεια το ολικό βέλτιστο. Η γενική έκφραση της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2] \quad (4-2)$$

Για τον έλεγχο της επίδοσης των αλγορίθμων τα όρια του εφικτού χώρου περιορίζονται συνήθως στον υπερκύβο $-5.12 \leq x_i \leq 5.12$, για $i = 1, \dots, n$.



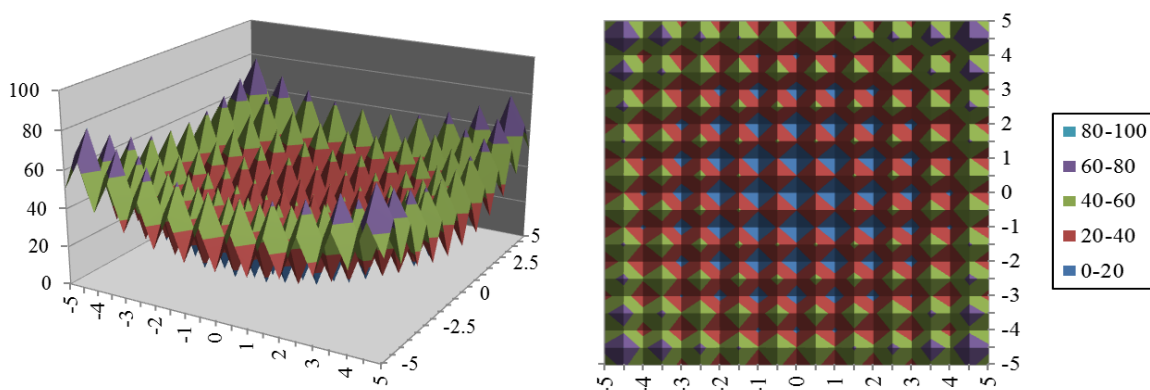
Σχήμα 4.2: Γραφικές παραστάσεις της διδιάστατης συνάρτησης Rosenbrock

Συνάρτηση Rastrigin

Η συνάρτηση Rastrigin προκύπτει από την *πρώτη συνάρτηση του De Jong*, με τη προσθήκη ενός συνημιτονοειδούς όρου για την παραγωγή, ομοιόμορφα καταναμημένων τοπικών ακρότατων. Συνεπώς, η συνάρτηση που προκύπτει είναι έντονα πολυκόρυφη. Η συνάρτηση Rastrigin θα δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = 10n + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)] \quad (4-3)$$

Για τον έλεγχο της επίδοσης των αλγορίθμων τα όρια του εφικτού χώρου αναζήτησης περιορίζονται συνήθως στον υπερκύβο $-5.12 \leq x_i \leq 5.12$, για $i = 1, \dots, n$. Η συνάρτηση έχει μοναδικό ολικό βέλτιστο, $f(x) = 0$, στο σημείο $x_i = 0$, για $i = 1, \dots, n$.



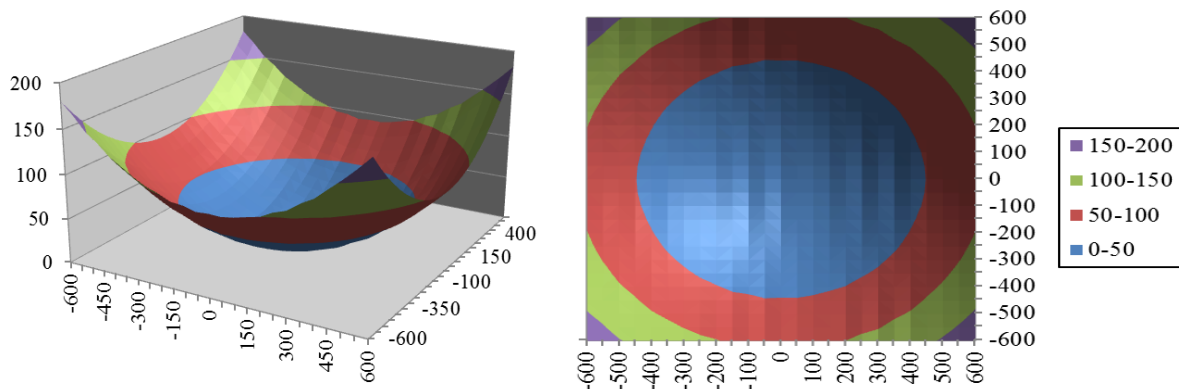
Σχήμα 4.3: Γραφικές παραστάσεις διδιάστατης συνάρτησης Rastrigin

Συνάρτηση Griewangk

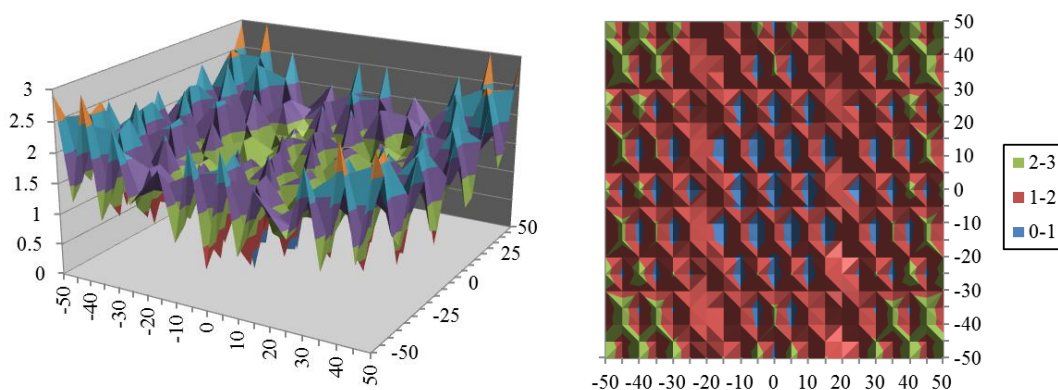
Η συνάρτηση Griewangk είναι παρόμοια με τη Rastrigin, παρουσιάζοντας μεγάλο πλήθος τοπικών ακρότατων, ομοιόμορφα κατανεμημένων στον εφικτό χώρο αναζήτησης. Σε μεγάλες κλίμακες η επιφάνεια απόκρισης της συνάρτησης μοιάζει με αυτή της σφαιροειδούς συνάρτησης. Ωστόσο, όσο προχωράμε σε μικρότερες κλίμακες γίνεται εμφανής ο μεγάλος αριθμός τοπικών ακρότατων που αυτή έχει. Η γενική έκφραση της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1 \quad (4-4)$$

Για τον έλεγχο της επίδοσης των αλγορίθμων τα όρια του εφικτού χώρου αναζήτησης περιορίζονται συνήθως στον υπερκύβο $-600 \leq x_i \leq 600$, για $i = 1, \dots, n$. Η συνάρτηση έχει μοναδικό ολικό βέλτιστο, $f(x) = 0$, στο σημείο $x_i = 0$, για $i = 1, \dots, n$.



Σχήμα 4.4: Γραφικές παραστάσεις διδιάστατης συνάρτησης Griewangk για όλο τον εφικτό χώρο αναζήτησης, $[-600, 600]$.



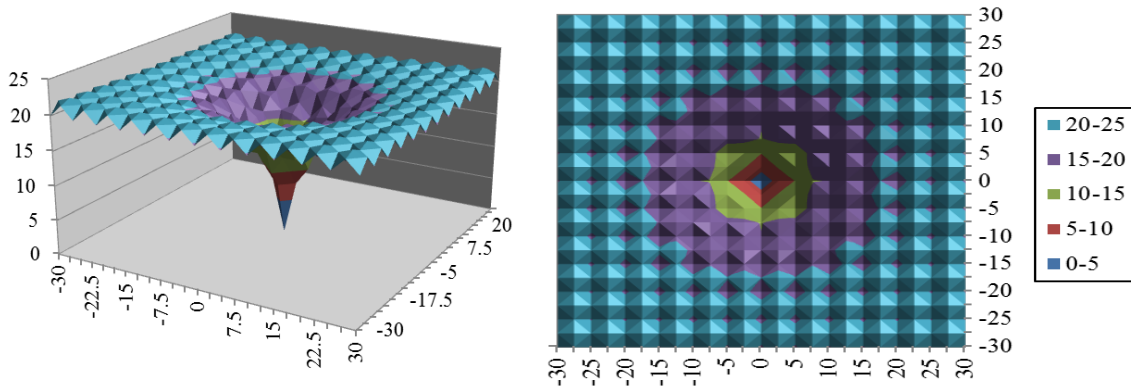
Σχήμα 4.5: Γραφικές παραστάσεις διδιάστατης συνάρτησης Griewangk για το διάστημα $[-50, 50]$

Συνάρτηση Ackley

Η συνάρτηση του Ackley χρησιμοποιείται ευρέως για τον έλεγχο της επίδοσης των αλγορίθμων σε τραχείς χώρους αναζήτησης, με μεγάλο πλήθος τοπικών ακρότατων. Η συνάρτηση ακολουθεί τον εξής γενικό τύπο:

$$f(\mathbf{x}) = -a \exp\left(-b \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(cx_i)\right) + a + \exp(1) \quad (4-5)$$

Συνήθως, οι παράμετροι λαμβάνουν τις εξής τιμές: $a = 20$, $b = 0.2$, $c = 2\pi$. Οι παράμετροι επίλυσης της συνάρτησης Ackley λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $[-32.768, 32.768]$. Η συνάρτηση έχει μεγάλο πλήθος τοπικών ακρότατων αλλά ένα και μοναδικό τοπικό ελάχιστο, $f(\mathbf{x}) = 0$, στο σημείο $x_i = 0$, για $i = 1, \dots, n$.



Σχήμα 4.6: Γραφικές παραστάσεις διδιάστατης συνάρτησης Ackley

Γραμμική συνάρτηση Brown

Η σχεδόν γραμμική συνάρτηση του Brown (Brown's almost linear function) είναι μια από τις πιο απαιτητικές συναρτήσεις ελέγχου που διατίθενται στη βιβλιογραφία. Η μαθηματική της έκφραση έχει ως εξής:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d [f_i(\mathbf{x})]^2 \quad (4-6)$$

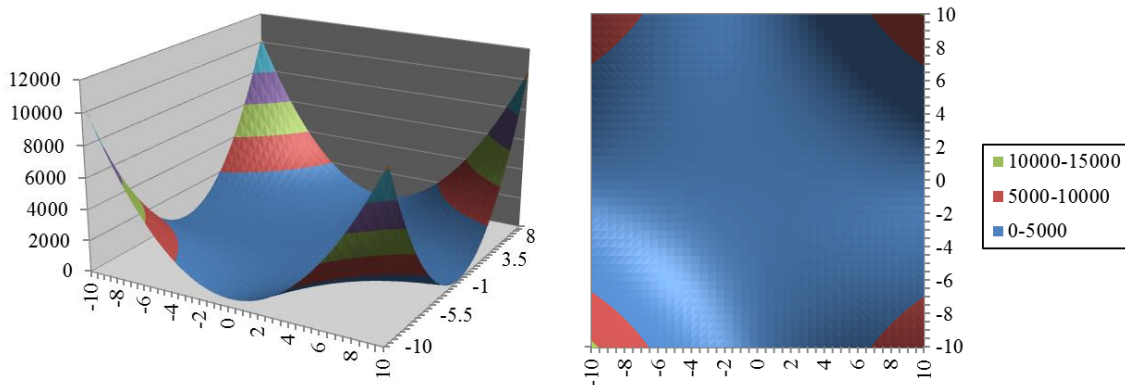
όπου:

$$f_i(\mathbf{x}) = x_i + \sum_{j=1}^d x_j - (d+1), \text{ για } i = 1, \dots, d-1 \quad (4-7)$$

και

$$f_d(\mathbf{x}) = \left(\prod_{j=1}^d x_j\right) - 1 \quad (4-8)$$

Σε χώρο δυο διαστάσεων ($n = 2$), η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, $f(x) = 0$, σε δυο σημεία, $\mathbf{x}_1 = [1, 1]$ και $\mathbf{x}_2 = [1/2, 2]$. Σε πρόβλημα 10 μεταβλητών ελέγχου ($n = 10$), τα ολικά ελάχιστα εμφανίζονται στα σημεία $\mathbf{x}_1 = [1, \dots, 1]$ και $\mathbf{x}_2 = [0.9794304, \dots, 0.9794304]$. Για το έλεγχο της επίδοσης των αλγορίθμων τα όρια των παραμέτρων τίθενται ίσα με $-10 \leq x_i \leq 10$, για $i = 1, \dots, n$.



Σχήμα 4.7: Γραφικές παραστάσεις της διδιάστατης γραμμικής συνάρτησης Brown

4.2 Μεθοδολογία αξιολόγησης αλγορίθμων

Οι παραπάνω έξι συναρτήσεις ελέγχου βελτιστοποιήθηκαν τόσο με τον κλασικό όσο και με το νέο εξελικτικό αλγόριθμο ανόπτησης-απλόκου. Αρχικά, κάθε πρόβλημα βελτιστοποιήθηκε στην κλασική ντετερμινιστική του μορφή, $f(x)$, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Οι ίδιες συναρτήσεις χρησιμοποιήθηκαν και για την αξιολόγηση των αλγορίθμων σε συνθήκες που η επιφάνεια απόκρισης διαταράσσεται λόγω της παρουσίας θορύβου. Για την προσομοίωση τέτοιων συνθηκών, στην αρχική $f(x)$ προστέθηκε ένας επιπλέον όρος ε οποίος λαμβάνει τιμές από κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση ή ένταση θορύβου σ , $N(0, \sigma)$. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση που βελτιστοποιείται κάθε φορά είναι $f'(x) = f(x) + \varepsilon$, όπου $f(x)$ μια από τις συναρτήσεις ελέγχου που περιγράφηκαν νωρίτερα. Η ενσωμάτωση του τυχαίου όρου γίνεται για να αναπαραχθεί η στοχαστική συμπεριφορά που έχουν οι αποκρίσεις των στοχαστικών μοντέλων προσομοίωσης και έχει ως αποτέλεσμα σε κάθε σημείο του χώρου αναζήτησης να μην αντιστοιχεί μονοσήμαντα η ίδια τιμή στοχαστικής συνάρτησης. Ως στόχος στις περιπτώσεις βελτιστοποίησης συναρτήσεων ελέγχου με θόρυβο τίθεται ο εντοπισμός του σημείου στο οποίο βρίσκεται το ολικό βέλτιστο της ντετερμινιστικής εκδοχής.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, τόσο το ντετερμινιστικό όσο και το στοχαστικό πρόβλημα για κάθε συνάρτηση επιλύθηκε για δυο διαφορετικές διαστάσεις, δηλαδή για δυο διαφορετικές τιμές παραμέτρων ελέγχου. Συγκεκριμένα, επιλέχτηκε μια μικρή διάσταση, $n = 2$, και μια μεγαλύτερη, $n = 10$, που αναπαριστά καλύτερα τα πραγματικά προβλήματα βελτιστοποίησης. Όπως έχει ήδη αναφερθεί η αύξηση της διάστασης του προβλήματος αυξάνει ραγδαία την δυσκολία του προβλήματος.

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή της παρούσας ενότητας, οι διαταραχές της επιφάνειας απόκρισης παράγονται μέσω μιας τυχαίας μεταβλητής που προστίθεται στην αρχική συνάρτηση και ακολουθεί την κανονική κατανομή. Για την μελέτη της επίδρασης που ασκεί η ένταση του θορύβου στη διαδικασία αναζήτησης και στην αποτελεσματικότητα των αλγορίθμων υιοθετήθηκαν τρία διαφορετικά επίπεδα θορύβου, σ . Έτσι, κάθε πρόβλημα επιλύθηκε για $\sigma = 0.75, 1.0$ και 1.25 . Όσο αυξάνει η ένταση του θορύβου τόσο μεγαλύτερη είναι η διαταραχή που υφίσταται η επιφάνεια απόκρισης, με αποτέλεσμα ο εντοπισμός του ολικού βέλτιστου να γίνεται όλο και πιο δύσκολος.

Τέλος, για κάθε ένα από τα προβλήματα που περιγράφηκαν μελετήθηκε η απόδοση του αλγορίθμου συναρτήσει του μεγέθους του πληθυσμού m που χρησιμοποιείται για την εξερεύνηση του εφικτού χώρου. Δοκιμάστηκαν τρία μεγέθη πληθυσμών που είναι συνάρτηση της διάστασης του προβλήματος n . Συγκεκριμένα, οι πληθυσμοί αυτοί είχαν μέγεθος $n + 1, 2n + 1$ και $8n + 1$.

4.2.1 Δείκτες επίδοσης αλγορίθμων βελτιστοποίησης σε προβλήματα με αβεβαιότητα

Για την αξιολόγηση της επίδοσης των αλγορίθμων βελτιστοποίησης σε συναρτήσεις ελέγχου με στοχαστική συνιστώσα έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί πολλά μέτρα και δείκτες επίδοσης. Κάποια από αυτά είναι: α) ο συνολικός αριθμός υπολογισμού της τιμής της στοχαστικής συνάρτησης μέχρι να επέλθει σύγκλιση και τερματισμός του αλγορίθμου (αποδοτικότητα); β) η απόλυτη τιμή της απόκλισης μεταξύ της πραγματικά βέλτιστης λύσης και της λύσης που έχει εντοπίσει ο αλγόριθμος; γ) η μέγιστη απόκλιση μεταξύ του σημείου που βρίσκεται το ολικό βέλτιστο της ντετερμινιστικής συνάρτησης και του σημείου στο σημείο έχει συγκλίνει ο αλγόριθμος.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, οι δυο αλγόριθμοι αξιολογήθηκαν με βάση δυο κριτήρια. Το πρώτο αφορά την ακρίβεια εντοπισμού του σημείου στο οποίο βρίσκεται το ολικό βέλτιστο σημείο της ντετερμινιστικής συνάρτησης και το δεύτερο το πλήθος

υπολογισμού της στοχικής συνάρτησης μέχρι να επέλθει σύγκλιση σε κάποιο σημείο. Για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων, για κάθε συνάρτηση ελέγχου και για κάθε έναν από τους συνδυασμούς διαστάσεων και επιπέδων θορύβου πραγματοποιήθηκαν 100 στοχαστικά ανεξάρτητες εκτελέσεις για κάθε αλγόριθμο. Στην ενότητα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα συγκριτικά αποτελέσματα των ανεξάρτητων δοκιμών.

4.3 Αξιολόγηση αλγορίθμων

Για την εκτέλεση των ανεξάρτητων δοκιμών τόσο οι αλγόριθμοι ανόπτησης-απλόκου όσο και οι συναρτήσεις ελέγχου υλοποιήθηκαν σε προγραμματιστική γλώσσα R.

Για να γίνει αντικειμενική σύγκριση, τόσο για τον κλασσικό όσο και για το νέο αλγόριθμο ως κριτήριο σύγκλισης χρησιμοποιήθηκε για όλες τις δοκιμές η σχέση (3-13) με $\varepsilon = 10^{-9}$. Ταυτόχρονα, ορίστηκαν για τις παραμέτρους εισόδου των δυο αλγορίθμων οι παρακάτω τιμές:

- παράμετροι χρονοδιαγράμματος ανόπτησης, $\beta = 2$ και $\lambda = 0.95$
- πιθανότητα μετάλλαξης, $p_{mut} = 0.10$

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, για την παράμετρο εισόδου του αλγορίθμου που ρυθμίζει το μέγεθος του πληθυσμού επιλέχθηκαν τρεις τιμές που είναι συνάρτηση της διάστασης του προβλήματος. Συγκεκριμένα, οι πληθυσμοί που χρησιμοποιήθηκαν έχουν μέγεθος $n + 1$, $2n + 1$ και $8n + 1$.

Για να εξασφαλίσουμε αντικειμενική σύγκριση των αλγορίθμων, για την παράμετρο εισόδου που ρυθμίζει το μέγιστο πλήθος υπολογισμού της στοχικής συνάρτησης σε κάθε δοκιμή, επιλέχθηκαν μεγάλα μεγέθη, ώστε η διαδικασία να τερματίζεται αποκλειστικά λόγω του κριτηρίου σύγκλισης. Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα (Ενότητα 3.3), το κριτήριο σύγκλισης, όπως δίνεται από τη σχέση , ποσοτικοποιεί τη διασπορά των λύσεων του πληθυσμού στο χώρο, και άρα τη σύγκλιση που έχει επέλθει.

Τόσο για τη ντετερμινιστική όσο και για τη στοχαστική μορφή των προβλημάτων, ως κριτήριο για τη σύγκριση της απόδοσης των δυο αλγορίθμων βελτιστοποίησης τέθηκε η ακρίβεια εντοπισμού του σημείου στο οποίο βρίσκεται το ολικό βέλτιστο της «πραγματικής» συνάρτησης ελέγχου. Συνεπώς, οι πίνακες και τα γραφήματα που ακολουθούν αναφέρονται πάντα στη τιμή που αποδίδει η ντετερμινιστική συνάρτηση ελέγχου (χωρίς τη στοχαστική συνιστώσα) για το βέλτιστο σημείο που έχει εντοπιστεί από την κάθε δοκιμή. Με αυτό τον τρόπο αποδίδεται η πραγματική ποιότητα των λύσεων που έχουν εντοπιστεί και καθίσταται

εφικτή η άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων της στοχαστικής περίπτωσης με αυτά της ντετερμινιστικής.

Τα αποτελέσματα των δοκιμών συνοψίζονται στους τέσσερις πίνακες που ακολουθούν. Οι πίνακες παρουσιάζουν, για κάθε συνδυασμό, τη μέση τιμή των βέλτιστων λύσεων όπως αυτές προέκυψαν από 100 στοχαστικά ανεξάρτητες δοκιμές.

	$m = n+1$				$m = 2n+1$				$m = 8n+1$			
	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$
OF1	0.000	0.303	0.324	0.596	0.000	0.129	0.217	0.228	0.000	0.092	0.097	0.108
OF2	0.003	1.506	1.238	1.240	0.001	0.389	0.578	0.597	0.000	0.096	0.137	0.115
OF3	0.641	2.560	2.600	3.520	0.060	0.488	0.637	0.686	0.000	0.134	0.228	0.197
OF4	0.025	0.957	0.801	1.293	0.011	0.335	0.398	0.451	0.000	0.531	0.664	0.610
OF5	0.495	4.341	8.226	5.872	0.000	0.896	0.474	0.708	0.000	0.183	0.240	0.320
OF6	0.000	0.370	0.635	0.758	0.000	0.079	0.080	0.114	0.000	0.052	0.070	0.082
Μέση τιμή	0.194	1.673	2.304	2.213	0.012	0.386	0.397	0.464	0.000	0.182	0.239	0.239

Πίνακας 4.1: Μέσες τιμές βέλτιστων λύσεων από 100 στοχαστικά ανεξάρτητες δοκιμές στα προβλήματα 2 διαστάσεων, με τον νέο αλγόριθμο απόκτησης-απλόκου. OF1: Σφαιροειδής συνάρτηση, OF2: Συνάρτηση Rosenbrock, OF3: Συνάρτηση Rastrigin, OF4: Συνάρτηση Griewank, OF5: Συνάρτηση Ackley, OF: Συνάρτηση Brown.

	$m = n+1$				$m = 2n+1$				$m = 8n+1$			
	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$
OF1	0.000	1.085	1.098	1.774	0.000	0.254	0.303	0.531	0.000	0.068	0.076	0.097
OF2	0.064	3.763	2.317	4.740	0.016	1.454	1.234	1.842	0.000	0.239	0.350	0.360
OF3	2.815	6.094	7.068	6.460	1.588	2.335	2.330	2.681	0.169	0.335	0.422	0.441
OF4	0.466	3.329	2.494	2.554	0.071	0.543	0.858	0.905	0.009	0.247	0.369	0.542
OF5	3.015	9.028	9.703	10.000	0.452	1.715	2.846	3.998	0.000	0.113	0.127	0.167
OF6	0.000	4.661	4.465	1.499	0.003	0.135	0.765	0.328	0.000	0.041	0.058	0.066
Μέση τιμή	1.060	4.660	4.524	4.505	0.355	1.073	1.390	1.714	0.030	0.174	0.234	0.279

Πίνακας 4.2: Μέσες τιμές βέλτιστων λύσεων από 100 στοχαστικά ανεξάρτητες δοκιμές στα προβλήματα 2 διαστάσεων, με τον κλασικό αλγόριθμο απόκτησης-απλόκου. OF1: Σφαιροειδής συνάρτηση, OF2: Συνάρτηση Rosenbrock, OF3: Συνάρτηση Rastrigin, OF4: Συνάρτηση Griewank, OF5: Συνάρτηση Ackley, OF: Συνάρτηση Brown.

	$m = n+1$				$m = 2n+1$				$m = 8n+1$			
	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$
OF1	0.000	1.731	1.943	2.140	0.001	0.494	0.389	0.430	0.002	0.052	0.059	0.091
OF2	5.974	121.292	138.207	162.009	5.845	9.415	10.299	9.683	0.633	8.722	8.789	8.817
OF3	11.367	31.595	33.390	34.226	6.264	9.476	9.924	10.477	0.965	1.731	2.678	3.269
OF4	0.462	6.196	6.276	8.071	0.234	1.690	1.855	1.821	0.082	1.031	1.084	1.092
OF5	5.582	10.351	11.717	13.137	2.417	5.696	5.871	6.614	0.000	0.400	0.845	1.371
OF6	1.790	13.021	16.028	15.860	0.349	3.052	3.381	3.707	0.000	0.131	0.206	0.251
Μέση τιμή	4.196	30.698	34.593	39.241	2.518	4.971	5.286	5.455	0.280	2.011	2.277	2.482

Πίνακας 4.3: Μέσες τιμές βέλτιστων λύσεων από 100 στοχαστικά ανεξάρτητες δοκιμές στα προβλήματα 10 διαστάσεων, με το νέο αλγόριθμο ανόπτησης-απλόκου. OF1: Σφαιροειδής συνάρτηση, OF2: Συνάρτηση Rosenbrock, OF3: Συνάρτηση Rastrigin, OF4: Συνάρτηση Griewank, OF5: Συνάρτηση Ackley, OF: Συνάρτηση Brown.

	$m = n+1$				$m = 2n+1$				$m = 8n+1$			
	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$	$z = 0$	$N(0, 0.75)$	$N(0, 1.00)$	$N(0, 1.25)$
OF1	0.312	2.930	2.937	3.461	0.002	0.898	1.047	1.044	0.000	0.118	0.123	0.157
OF2	49.166	121.804	143.555	121.159	8.684	26.831	27.185	25.600	4.573	9.039	9.093	9.096
OF3	19.940	36.223	35.239	37.636	8.666	19.961	20.507	22.964	2.797	4.375	5.226	4.961
OF4	2.459	8.597	9.778	9.804	0.382	3.073	2.978	2.973	0.021	1.129	1.160	1.227
OF5	7.733	12.466	12.351	13.449	4.018	7.382	8.041	8.643	0.000	1.845	2.640	3.260
OF6	13.241	49.450	35.771	37.777	0.806	6.719	9.391	7.820	0.000	0.408	0.510	0.696
Μέση τιμή	15.475	38.578	39.938	37.214	3.760	10.811	11.525	11.507	1.232	2.819	3.125	3.233

Πίνακας 4.4: Μέσες τιμές βέλτιστων λύσεων από 100 στοχαστικά ανεξάρτητες δοκιμές στα προβλήματα 10 διαστάσεων, με τον κλασικό αλγόριθμο ανόπτησης-απλόκου. OF1: Σφαιροειδής συνάρτηση, OF2: Συνάρτηση Rosenbrock, OF3: Συνάρτηση Rastrigin, OF4: Συνάρτηση Griewank, OF5: Συνάρτηση Ackley, OF: Συνάρτηση Brown.

Από τους παραπάνω πίνακες γίνεται άμεσα εμφανής η μεγάλη επιρροή που ασκεί η παρουσία της στοχαστικής συνιστώσας κατά τον υπολογισμό της στοχαστικής συνάρτησης στις επιδόσεις των δυο αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Όπως είναι λογικό, η επιρροή αυτή είναι διαφορετική ανάλογα με την αρχική μορφή της συνάρτησης, την ένταση του θορύβου, τη διάσταση του προβλήματος και το μέγεθος του πληθυσμού που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος. Η επίδραση που ασκεί η προσθήκη του στοχαστικού όρου στην ακρίβεια εντοπισμού του ολικού βέλτιστου σημείου αποτυπώνεται έντονα στα αποτελέσματα για τη σφαιροειδή συνάρτηση (OF1), η οποία στην ντετερμινιστική της μορφή αποτελεί ένα απλό πρόβλημα βελτιστοποίησης για κάθε αλγόριθμο. Και οι δυο αλγόριθμοι εντοπίζουν, με μεγάλη ευκολία,

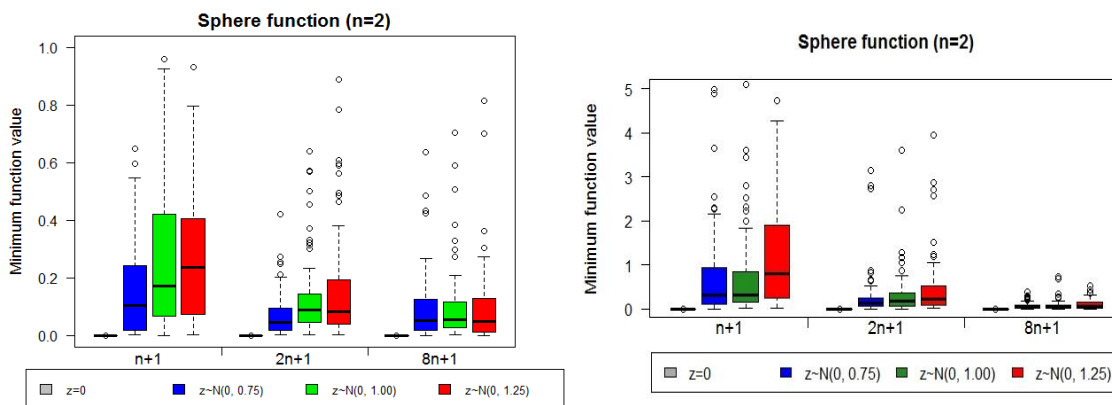
το ολικό βέλτιστο της ντετερμινιστικής σφαιροειδούς και για τις δυο διαστάσεις του προβλήματος, $n = 2$ και $n = 10$, ακόμα και με τον ελάχιστο δυνατό μέγεθος πληθυσμού ($n + 1$). Ωστόσο, η προσθήκη του τυχαίου όρου αυξάνει το βαθμό δυσκολίας του προβλήματος, προκαλώντας τη συχνή σύγκλιση του αλγορίθμου σε σημεία που βρίσκονται μακριά από το ολικό βέλτιστο. Η συχνότητα εσφαλμένων συγκλίσεων αυξάνει με την αύξηση της έντασης του θορύβου και είναι μεγαλύτερη για το δεκαδιάστατο πρόβλημα, ιδιαίτερα για μικρούς πληθυσμούς ($n + 1, 2n + 1$). Η παραπάνω τάση παρατηρείται σε όλες τις μαθηματικές συναρτήσεις ελέγχου που βελτιστοποιήθηκαν.

Από τους παραπάνω πίνακες και τα θηκογράμματα που ακολουθούν γίνεται φανερό πως η επίδοση και των δυο αλγορίθμων για τη ντετερμινιστική μορφή των συναρτήσεων ελέγχου είναι πολύ υψηλή, ιδιαίτερα όταν γίνεται χρήση μεγάλων πληθυσμών ($2n + 1, 8n + 1$). Ιδιαίτερες δυσκολίες αντιμετώπισαν οι δυο αλγόριθμοι στις συναρτήσεις Rosenbrock, Rastrigin και Ackley, με 10 μεταβλητές επίλυσης. Ωστόσο, ακόμα και σε αυτές τις πολύπλοκες συναρτήσεις ελέγχου η χρήση μεγάλου μεγέθους πληθυσμού ($8n + 1$) εξασφαλίζει τη σύγκλιση του αλγορίθμου στο ολικό βέλτιστο στη πλειονότητα των δοκιμών. Από την ανάλυση γίνεται φανερό πως οι τροποποιήσεις που προτάθηκαν έχουν θετική επίδραση στην γενικότερη επίδοση του αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου ακόμα και για προβλήματα που η συνάρτηση δεν διαταράσσεται από τη παρουσία θορύβου. Αυτό αποτυπώνεται έντονα μέσα από τις επιδόσεις των αλγορίθμων για τις έντονα μη γραμμικές και πολυκόρυφες συναρτήσεις Griewank, Ackley και Rastrigin (Γράφημα 4.5 -Γράφημα 4.10). Οι μηχανισμοί που ενσωματώθηκαν στον αλγόριθμο επιτρέπουν στο άπλοκο να διατηρεί το μέγεθος και το σχήμα του για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, με αποτέλεσμα να εξασφαλίζεται η αποτελεσματικότερη διερεύνηση του εφικτού χώρου, ακόμα και σε τραχείς επιφάνειες απόκρισης όπου η στρέβλωση που υφίσταται το άπλοκο είναι μεγάλη λόγω διαδοχικών συρρικνώσεων και εσωτερικών συμπίεσεων. Όπως αποδεικνύεται, οι επιδόσεις του νέου και κλασικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης ταυτίζονται όσο αυξάνει το μέγεθος του πληθυσμού που χρησιμοποιείται.

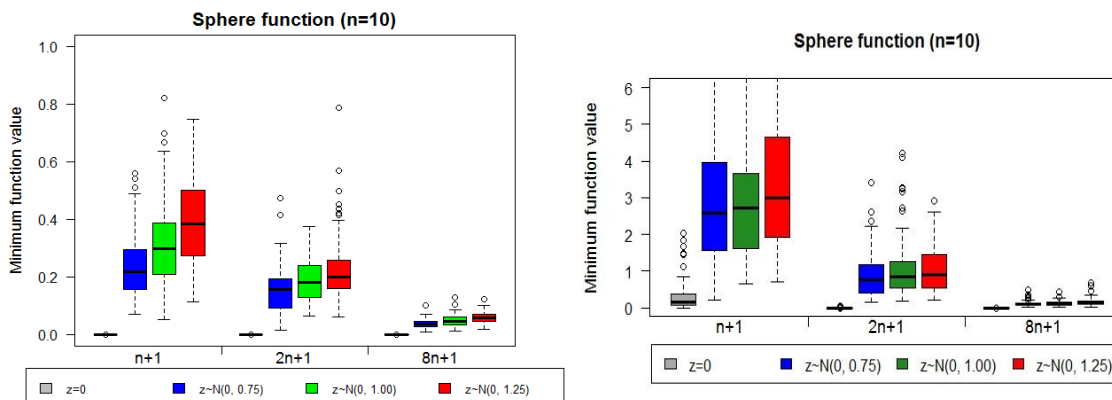
Η θετικές συνέπειες που έχει η ενσωμάτωση των νέων μηχανισμών στον κλασικό αλγόριθμο ανόπτησης-απλόκου αποτυπώνονται ακόμα πιο έντονα στις επιδόσεις των δυο αλγορίθμων στα στοχαστικά προβλήματα ελέγχου. Όπως αποδεικνύεται, για όλες τις συναρτήσεις ο βελτιωμένος αλγόριθμος εντοπίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια το ολικό βέλτιστο σημείο, μειώνοντας αισθητά τη μέση τιμή των τιμών συνάρτησης που προέκυψαν από τις 100 ανεξάρτητες επαναλήψεις. Γενικά, η βελτίωση που επιτυγχάνεται είναι μεγαλύτερη στα

προβλήματα για μικρό πλήθος μεταβλητών επίλυσης ($n = 2$). Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το γεγονός ότι βελτίωση διαπιστώνεται ακόμα και με το ελάχιστο δυνατό μέγεθος πληθυσμού, $n + 1$ σημείων, το οποίο ταυτίζεται στην πραγματικότητα με τη χρήση ενός και μοναδικού απλόκου για την εξερεύνηση του εφικτού χώρου. Η επιτυχία αυτή αποδίδεται στους καινούργιους μηχανισμούς που ενσωματώθηκαν στον αλγόριθμο και έχουν ως στόχο να προφυλάξουν το άπλοκο από πρόωρο εκφυλισμό και σύγκλιση σε λανθασμένο σημείο (Ενότητα 3.3).

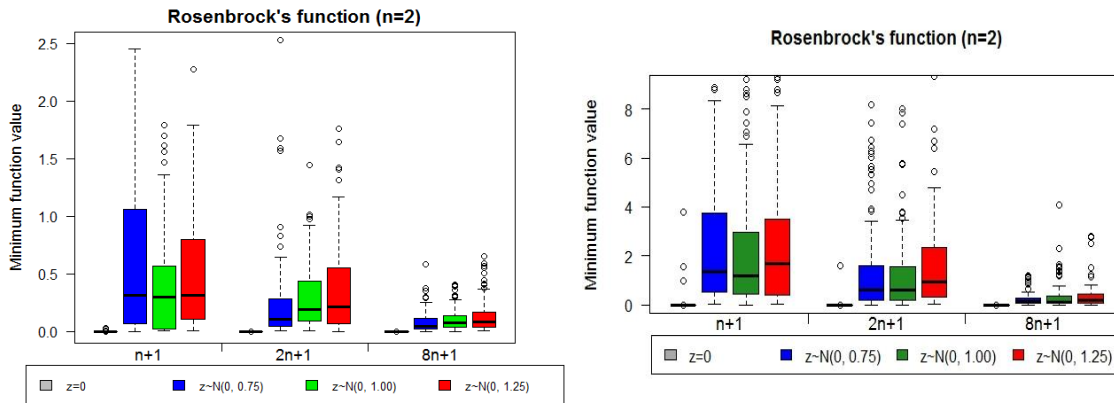
Για την αναλυτικότερη και πιο εποπτική σύγκριση των δυο αλγορίθμων, τα δείγματα με τις βέλτιστες λύσεις από τις 100 ανεξάρτητες δοκιμές παρουσιάστηκαν με τη βοήθεια θηκογραμμάτων (box plots). Κάθε ένα από τα γραφήματα που ακολουθούν περιέχει τρεις ομάδες θηκογραμμάτων, με την κάθε ομάδα να περιλαμβάνει τις λύσεις για δεδομένο μέγεθος πληθυσμού, $n + 1$, $2n + 1$ και $8n + 1$, αντίστοιχα. Τα θηκογράμματα με γκρι φόντο αντιστοιχούν στα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης της ντετερμινιστικής συνάρτησης, με μπλε φόντο στα αποτελέσματα με τη προσθήκη θορύβου έντασης 0.75, με πράσινο φόντο στα αποτελέσματα για ένταση 1.00 και με κόκκινο φόντο στα αποτελέσματα για ένταση 1.25.



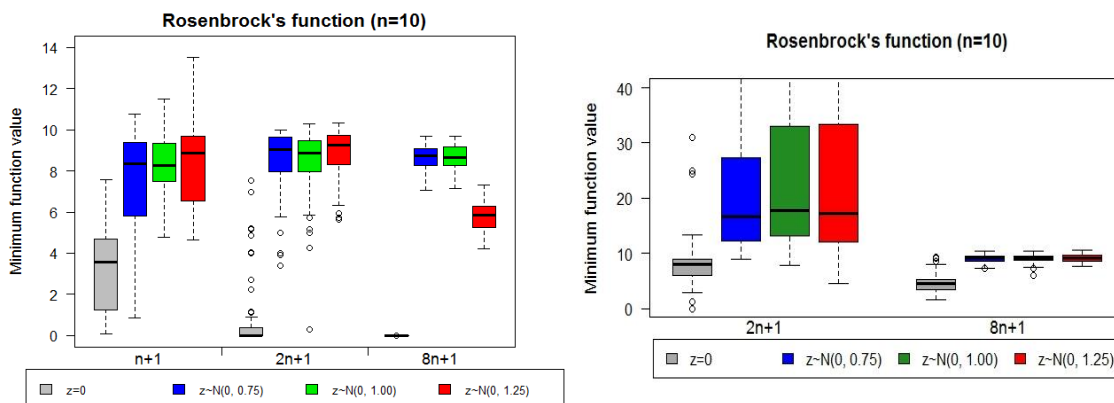
Γράφημα 4.1: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη σφαιροειδή συνάρτηση, 2 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξιά γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο απόκτησης-απλόκου.



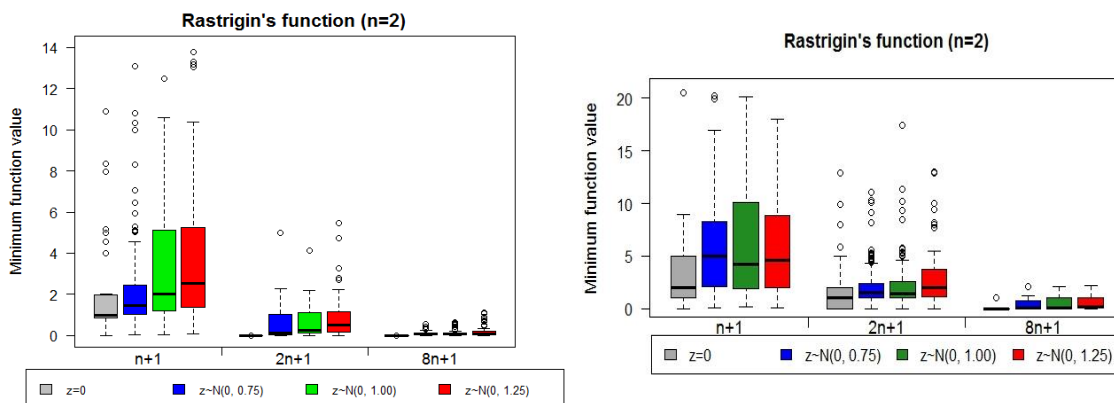
Γράφημα 4.2: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη σφαιροειδή συνάρτηση, 10 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξιά γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο απόπτωσης-απλόκου.



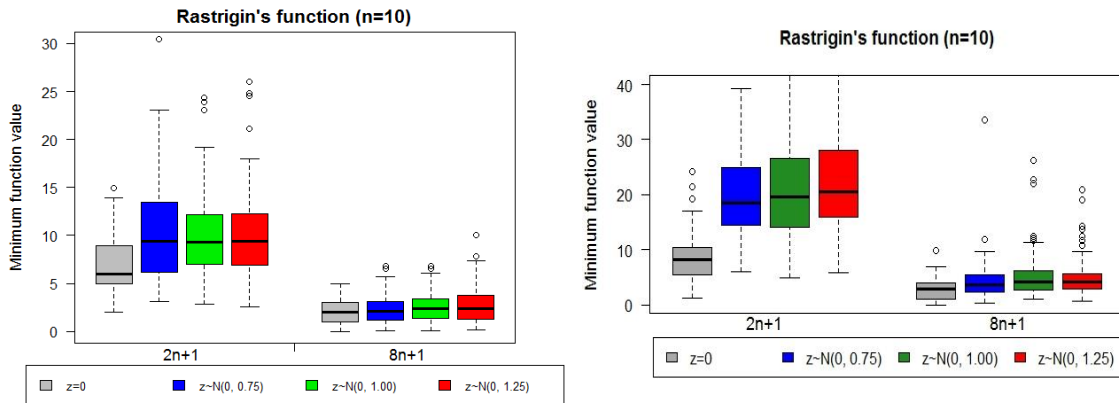
Γράφημα 4.3: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη συνάρτηση Rosenbrock, 2 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξιά γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο απόπτωσης-απλόκου.



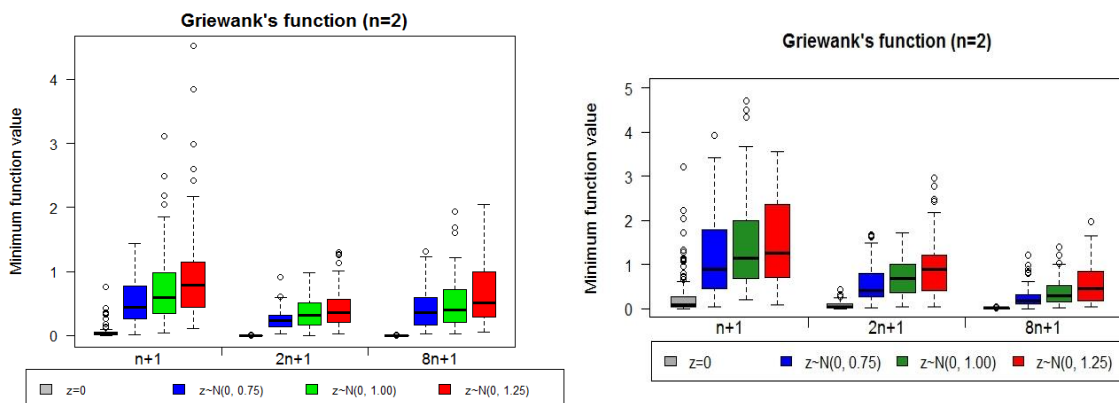
Γράφημα 4.4: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη συνάρτηση Rosenbrock, 10 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξιά γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο απόπτωσης-απλόκου.



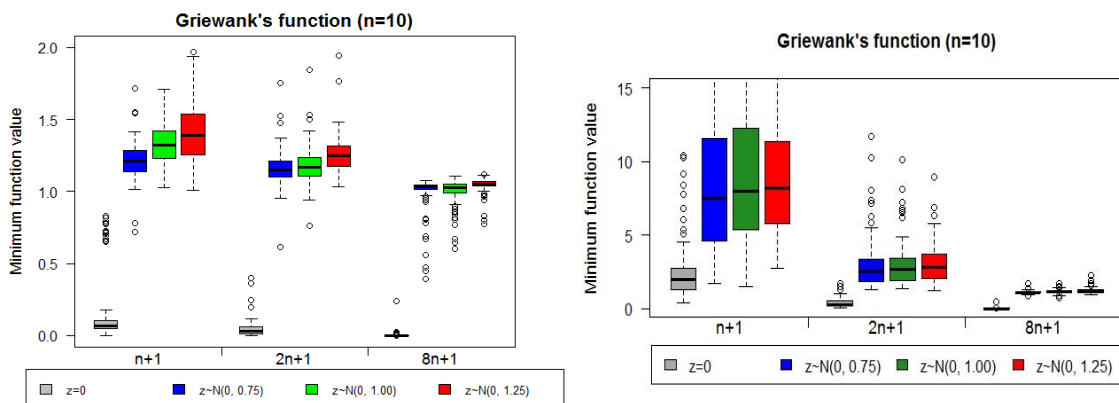
Γράφημα 4.5: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη συνάρτηση Rastrigin, 2 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξιά γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο απόπτωσης-απλόκου.



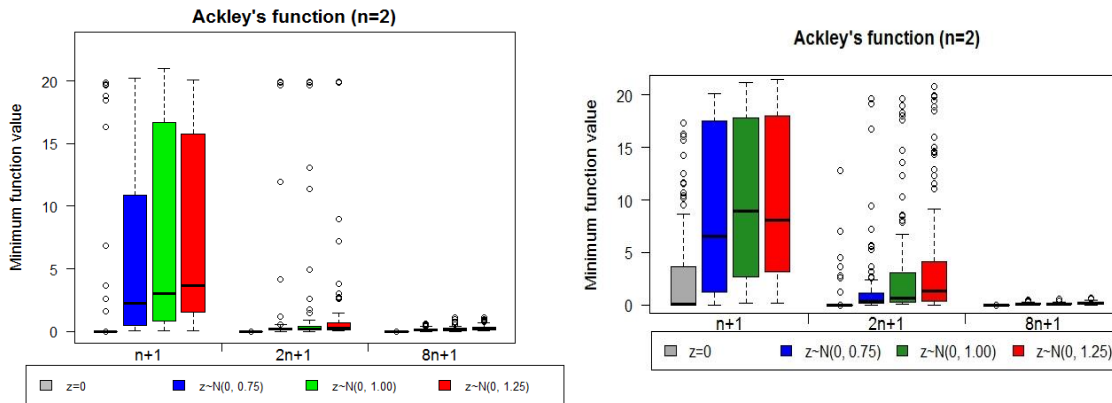
Γράφημα 4.6: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη συνάρτηση Rastrigin, 10 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξιά γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο απόπτωσης-απλόκου.



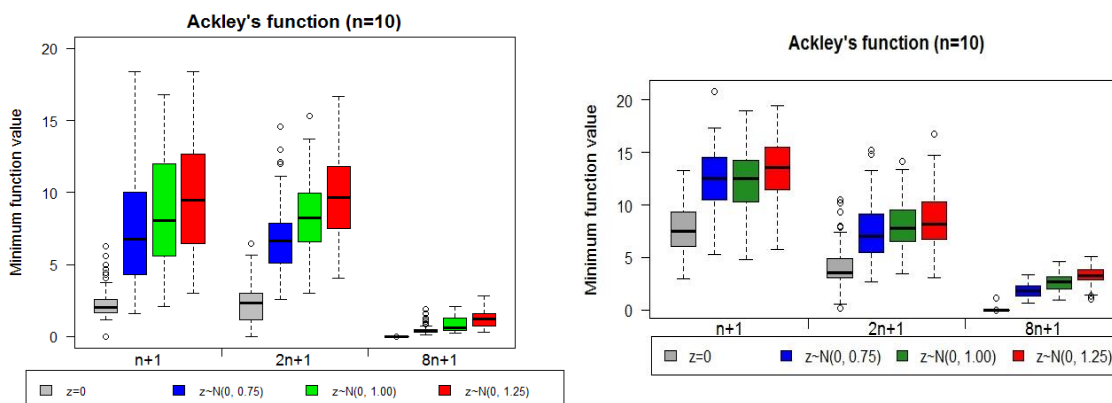
Γράφημα 4.7: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη συνάρτηση Griewank, 2 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξιά γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο απόπτωσης-απλόκου.



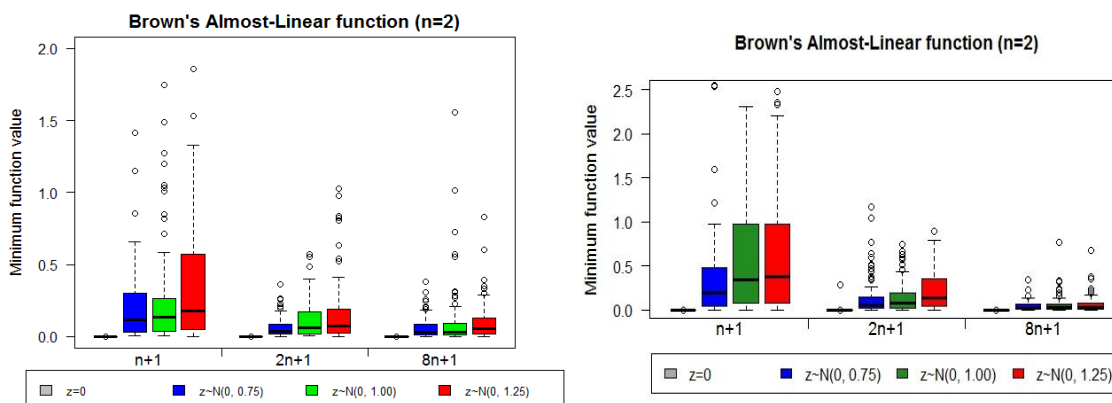
Γράφημα 4.8: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη συνάρτηση Griewank, 10 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξιά γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο απόπτωσης-απλόκου.



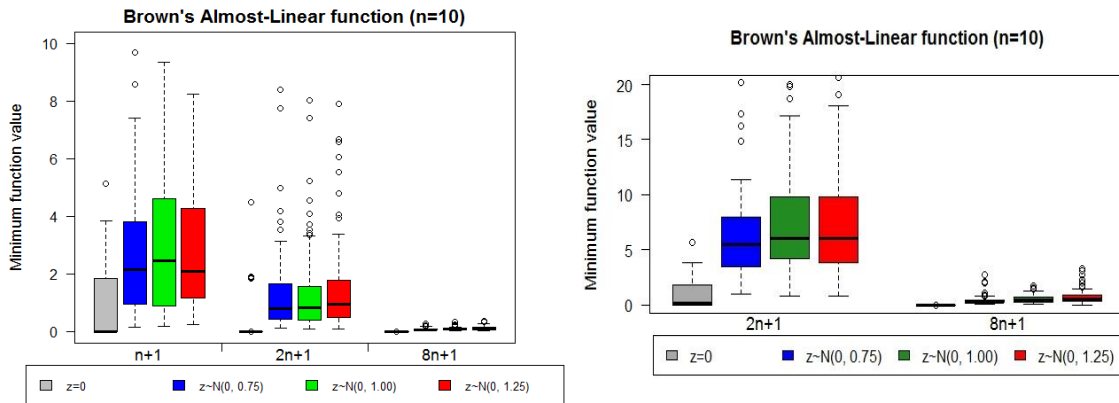
Γράφημα 4.9: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη συνάρτηση Ackley, 2 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξιά γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο απόπτωσης-απλόκου.



Γράφημα 4.10: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη συνάρτηση Ackley, 10 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξιά γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο απόπτωσης-απλόκου.



Γράφημα 4.11: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη συνάρτηση Brown, 2 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξή γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο ανόπτησης-απλόκου.



Γράφημα 4.12: Θηκογράμματα με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τη συνάρτηση Brown, 10 διαστάσεων, όπως προέκυψαν από 100 ανεξάρτητες δοκιμές με το νέο (αριστερό γράφημα) και τον κλασικό (δεξή γράφημα) εξελικτικό αλγόριθμο ανόπτησης-απλόκου.

Κεφάλαιο 5^ο

5 Βαθμονόμηση υδρολογικών μοντέλων

5.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Ο όρος υδρολογικό μοντέλο αναφέρεται σε ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών μετασχηματισμών που χρησιμοποιούν δεδομένα πεδίου και εύλογες υποθέσεις σχετικά με τους φυσικούς μηχανισμούς, με στόχο την ποσοτική εκτίμηση υδρολογικών μεταβλητών που ενδιαφέρουν σε πρακτικές εφαρμογές. Τα μοντέλα αυτά περιγράφουν είτε μεμονωμένα γεγονότα, όπως ένα υδρογράφημα ή την αιχμή της πλημύρας, είτε τη διαχρονική εξέλιξη του υδρολογικού ισοζυγίου σε μια πεπερασμένη χωρική ενότητα, για παράδειγμα σε επίπεδο λεκάνης απορροής (Ευστρατιάδης κ.ά., 2009). Η πρώτη απόπειρα προσομοίωσης του υδρολογικού ισοζυγίου αποδίδεται στον Thornthwaite (1948) που ανέπτυξε ένα μονοπαραμετρικό μοντέλο μηνιαίου χρονικού βήματος για την εκτίμηση της πραγματικής εξατμοδιαπνοής απλών λεκανών, εφήμερης δίαιτας και χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η συνεισφορά των υπόγειων νερών (Κουτσογιάννης και Ξανθόπουλος, 1999, σελ.236-243). Στη βιβλιογραφία μπορεί να βρει κανείς πάνω από 70 καταξιωμένα υδρολογικά μοντέλα, τα οποία χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με το πεδίο εφαρμογής τους, τη χωρική τους κλίμακα, τη μαθηματική τους δομή και τη χρονική διακρίσιμότητα. Περισσότερα στοιχεία για τα υδρολογικά μοντέλα και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους δίνονται από τους Ευστρατιάδη κ.ά. (2009).

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, η μελέτη επικεντρώνεται στο εννοιολογικό συγκεντρωτικό μοντέλο «Ζυγός», το οποίο προσομοιώνει, σε συνεχή χρόνο, την εξέλιξη των σημαντικότερων επιφανειακών και υπόγειων υδρολογικών διεργασιών σε επίπεδο λεκάνης απορροής. Τα εννοιολογικά μοντέλα διατυπώνουν απλές παραμετρικές σχέσεις σε υδραυλικά ανάλογα που αναπαριστούν τις υδρολογικές διεργασίες σε κάποια δεδομένη χωρική ενότητα (λεκάνη, υπολεκάνη). Διακρίνονται δε από το σαφές πλεονέκτημα της απλότητας, που τους επιτρέπει την προσομοίωση πολύπλοκων φυσικών διεργασιών με έντονη χωρική ανομοιογένεια, μέσω ενός μικρού αριθμού παραμέτρων.

Οι παράμετροι των εννοιολογικών μοντέλων δεν είναι άμεσα μετρήσιμα μεγέθη αλλά εκτιμώνται έμμεσα, μέσω μιας συστηματικής διαδικασίας αξιολόγησης εναλλακτικών συνδυασμών που καλείται βαθμονόμηση (calibration). Με δεδομένες τις μεταβλητές εισόδου

(π.χ. βροχόπτωση, δυνητική εξατμοδιαπνοή, απολήψεις υπόγειου υδροφορέα), η βαθμονόμηση ενός μοντέλου πραγματοποιείται συγκρίνοντας τις προσομοιωμένες αποκρίσεις της λεκάνης με τις αντίστοιχες παρατηρημένες (π.χ. απορροή, πραγματική εξατμοδιαπνοή, εκφόρτιση υπόγειων νερών). Η σύγκριση γίνεται μέσω ενός ποσοτικού, ποιοτικού ή εμπειρικού κριτηρίου, γνωστό και ως κριτήριο καλής προσαρμογής, που τελικά ποσοτικοποιεί το σφάλμα μεταξύ των παρατηρημένων και προσομοιωμένων αποκρίσεων. Συνεπώς, σκοπός της όλης διαδικασίας είναι η εύρεση ενός συνόλου παραμέτρων για το οποίο το παραπάνω σφάλμα να ελαχιστοποιείται και οι προσομοιωμένες αποκρίσεις να προσεγγίζουν όσο το δυνατόν περισσότερο τις αντίστοιχες παρατηρημένες.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές πως κατά τη βαθμονόμηση δεν επιδιώκεται η βελτιστοποίηση του συστήματος ως προς κάποιο εξωτερικό μέγεθος (π.χ. κόστος), αλλά η βέλτιστη προσαρμογή της εσωτερικής μαθηματικής δομής του μοντέλου, έτσι ώστε να προσομοιώνονται αποτελεσματικά οι υπό μελέτη υδρολογικές διεργασίες (Ευστρατιάδης κ.ά., 2009). Οι Ευστρατιάδης κ.α. (2009) αναφέρουν τρεις διαφορετικούς τρόπους βαθμονόμησης ενός υδρολογικού μοντέλου: την *εμπειρική βαθμονόμηση*, την *αυτόματη* και την *ημιαυτόματη*. Κατά την *εμπειρική βαθμονόμηση*, η εύρεση του βέλτιστου συνόλου παραμέτρων δεν στηρίζεται σε κάποια αυστηρά συστηματική αναζήτηση, αλλά στην δοκιμή διαφόρων λύσεων που επιλέγονται με βάση την εμπειρία και κρίση του μελετητή. Η τελική επιλογή των παραμέτρων γίνεται ελέγχοντας «με το μάτι» την προσαρμογή του μοντέλου στα ιστορικά δεδομένα. Η *αυτόματη βαθμονόμηση* αντιμετωπίζει το πρόβλημα εύρεσης των παραμέτρων ως ένα πρόβλημα μη γραμμικής βελτιστοποίησης κατά το οποίο βελτιστοποιείται ένα ή περισσότερα κριτήρια καλής προσαρμογής. Με αυτό τον τρόπο, το σύνολο των παραμέτρων προκύπτει ως αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης. Παρά το γεγονός ότι η αυτόματη βαθμονόμηση είναι σαφώς πιο εύκολη και αντικειμενική από την εμπειρική, ενσωματώνει σημαντικές αδυναμίες και μειονεκτήματα, όπως είναι η εξάρτηση των αποτελεσμάτων από το μέτρο προσαρμογής, τα σφάλματα που μεταφέρονται στα δεδομένα και οι πηγές αβεβαιότητας. Η μέθοδος που συνδυάζει τα πλεονεκτήματα των δυο παραπάνω τεχνικών είναι η *ημιαυτόματη βαθμονόμηση*, κατά την οποία ο μελετητής παρακολουθεί τη πορεία βελτιστοποίησης και επεμβαίνει σε αυτή, ώστε να κατευθύνει την πορεία αναζήτησης προς την επιθυμητή κατεύθυνση. Η τελευταία μέθοδος θεωρείται ως η πλέον πρόσφορη, ιδιαίτερα στη περίπτωση σύνθετων σχημάτων, στα οποία είναι πιο έντονη η ύπαρξη αβεβαιότητας στην εκτίμηση των παραμέτρων.

Η τακτική της αυτόματης βαθμονόμησης μεταπίπτει σε ένα πρόβλημα μη γραμμικής βελτιστοποίησης της μορφής:

$$\text{minimize } f(\mathbf{x}), \mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\max}$$

όπου $f(\mathbf{x})$ ένα βαθμωτό μέτρο σφάλματος - καλής προσαρμογής (π.χ. ο συντελεστής Nash-Sutcliffe) που συνιστά την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος βελτιστοποίησης, \mathbf{x} το διάνυσμα των παραμέτρων (μεταβλητών ελέγχου) και \mathbf{x}^{\min} , \mathbf{x}^{\max} τα όρια διακύμανσης των παραμέτρων.

Στη βιβλιογραφία μπορεί αν βρει κανείς μεγάλο πλήθος κριτηρίων καλής προσαρμογής για τη βαθμονόμηση υδρολογικών μοντέλων. Το πλέον διαδεδομένο είναι ο συντελεστής προσδιορισμού (coefficient of determination) ή αποτελεσματικότητα (efficiency) ή συντελεστής Nash-Sutcliffe, που δίνεται από τον παρακάτω μαθηματικό τύπο (Nash and Sutcliffe, 1970):

$$R = 1 - \frac{\sum_{i=1}^T (Y_i - Y'_i)^2}{\sum_{i=1}^T (Y_i - \mu_Y)^2} \quad (5-1)$$

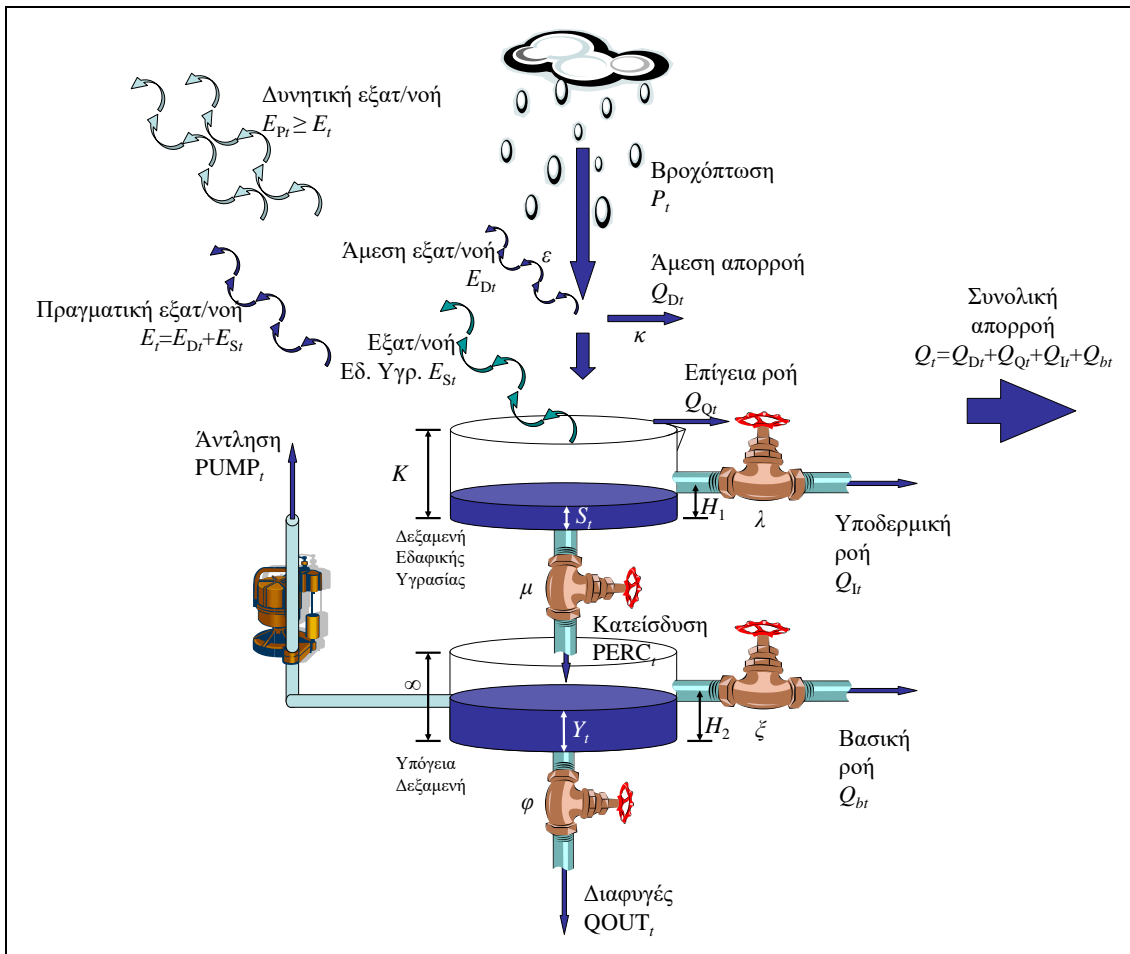
όπου Y_i η παρατηρημένη χρονοσειρά απορροής, μ_Y η μέση τιμή της και Y'_i η προσομοιωμένη χρονοσειρά για το χρονικό ορίζοντα της περιόδου ελέγχου, T . Από τον παραπάνω ορισμό γίνεται σαφές πως ο συντελεστής Nash-Sutcliffe συγκρίνει τη διασπορά των σφαλμάτων με τη διασπορά των παρατηρήσεων, εκφράζοντας έτσι το ποσοστό στατιστικής αβεβαιότητας που «εξηγείται» από το μοντέλο. Στην πράξη, ο εν λόγω δείκτης ελέγχει κατά πόσο η προσομοιωμένη χρονοσειρά είναι καλύτερη εκτιμήτρια σε σχέση με τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Ο συντελεστής προσδιορισμού είναι αδιάστατος και λαμβάνει τιμές από $-\infty$ έως 1. Αν $R = 1$ υπάρχει απόλυτη ταύτιση μεταξύ της παρατηρημένης και προσομοιωμένης χρονοσειράς. Η τιμή $R = 0$ υποδηλώνει ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, δηλαδή το στοιχειώδες μοντέλο $Y_i = \mu_Y$, είναι εξίσου καλή εκτιμήτρια με το μη γραμμικό μοντέλο, οπότε η αβεβαιότητα του μοντέλου ταυτίζεται με την υδρολογική αβεβαιότητα, όπως αυτή εκφράζεται από τη δειγματική τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. Τέλος, αν $R < 0$ η προσαρμογή του μοντέλου θεωρείται πολύ κακή, καθώς η προσομοιωμένη χρονοσειρά είναι χειρότερη εκτιμήτρια σε σχέση με τη μέση παρατηρημένη τιμή μ_Y .

Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων απαιτείται η επαλήθευση του υδρολογικού μοντέλου για το βέλτιστο σύνολο τιμών των παραμέτρων όπως αυτό έχει προκύψει από τη βαθμονόμηση. Συνήθως, η επαλήθευση γίνεται ελέγχοντας το ίδιο κριτήριο προσαρμογής για μια άλλη χρονική περίοδο δείγματος. Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως διαχωρισμός δεδομένων και για να έχει νόημα θα πρέπει τα χαρακτηριστικά του δείγματος να έχουν διατηρηθεί αμετάβλητα για το σύνολο του χρονικού ορίζοντα ελέγχου του μοντέλου. Αξίζει να σημειώσουμε πως επιτυχής βαθμονόμηση δεν συνεπάγεται απαραίτητα και την επιτυχή επαλήθευση του μοντέλου. Έτσι, ενώ πολλές φορές από τη διαδικασία βαθμονόμησης έχει εντοπιστεί ένα σύνολο παραμέτρων που φαίνεται ότι αναπαριστά πολύ καλά τις παρατηρημένες αποκρίσεις της περιόδου βαθμονόμησης, το μοντέλο δεν αναπαράγει τις ανεξάρτητες αποκρίσεις μιας άλλης χρονικής περιόδου. Παράλληλα, πολλές φορές αποδεικνύεται πως μια πολύ καλή βαθμονόμηση, που έχει προκύψει από ένα καθολικό κριτήριο επίδοσης, δεν εξασφαλίζει την ικανοποιητική αναπαραγωγή των μεγεθών που δεν συμμετέχουν στην στοχική συνάρτηση. Γενικά, για την εύρωστη βαθμονόμηση των μοντέλων είναι ουσιαστικό να λαμβάνονται υπόψη πολλαπλά κριτήρια προσαρμογής, τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές παρατηρημένες αποκρίσεις (Ευστρατιάδης κ.ά., 2009).

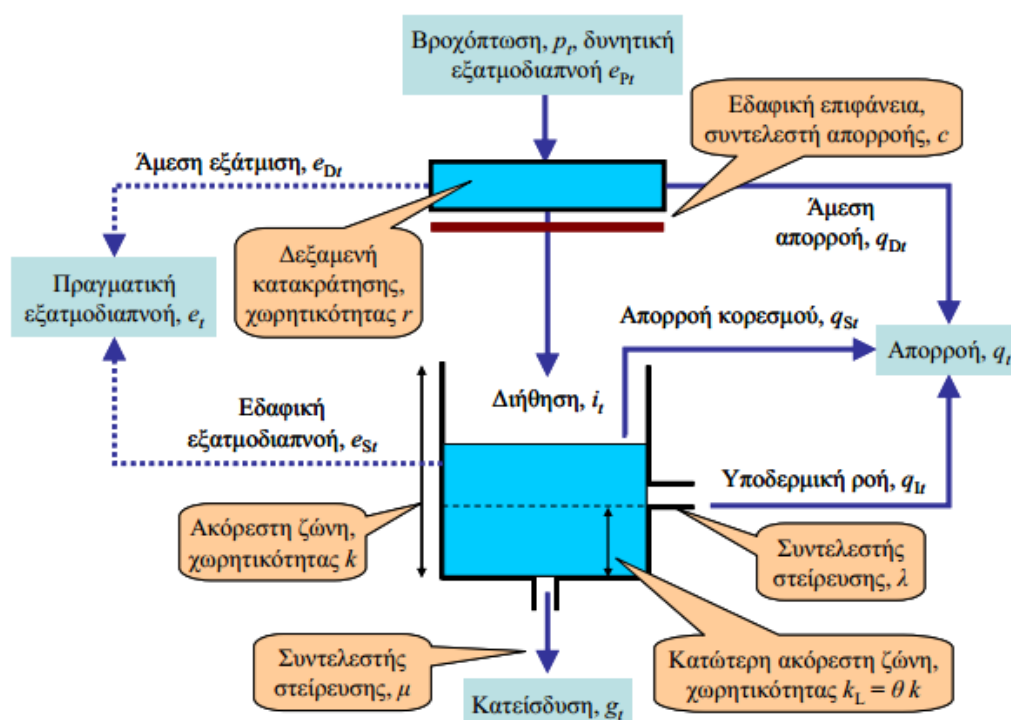
5.2 Περιγραφή του μοντέλου «Ζυγός»

Στην παρούσα εργασία επιχειρήθηκε η βαθμονόμηση του εννοιολογικού συγκεντρωτικού υδρολογικού μοντέλου «Ζυγός» (Σχήμα 5.1), το οποίο αναπαριστά, αδρομερώς, τις πολύπλοκες υδρολογικές διεργασίες της λεκάνης μέσω ενός συστήματος διασυνδεδεμένων δεξαμενών (Κοζάνης κ.ά., 2010). Το συγκεκριμένο μοντέλο αποτελεί μια απλοποιημένη εκδοχή ενός ημικαταμεμημένου σχήματος προσομοίωσης, το οποίο έχει αναπτυχθεί στο ΕΜΠ (Ευστρατιάδης κ.ά., 2004, 2005; Rozos et al., 2004).



Σχήμα 5.1: Σχηματική αναπαράσταση του αδρομερούς μοντέλου βροχής – απορροής «Ζυγός» (Κοζάνης κ.ά., 2010)

Το υδρολογικό μοντέλο, όπως περιγράφεται παρακάτω, αποτελεί μια ελαφρώς τροποποιημένη έκδοση του αρχικού μοντέλου «Ζυγός», και κάνει χρήση 9 μεταβλητών ελέγχου για τον επιμερισμό της βροχόπτωσης στις επιμέρους διεργασίες. Η διαφοροποίηση έγκειται στην αντικατάσταση της παραμέτρου, που ελέγχει το ποσοστό βροχόπτωσης που μετασχηματίζεται άμεσα σε εξατμοδιαπνοή, από μια επιπλέον θεωρητική δεξαμενή που προσομοιώνει αποτελεσματικότερα τις διεργασίες στην επιφάνεια του εδάφους (κατακράτηση της βροχής, επιφανειακή εξάτμιση και διήθηση). Επιπλέον, η δεξαμενή εδαφικής υγρασίας χωρίζεται σε δυο διακριτές ζώνες, την ανώτερη και την κατώτερη, που το όριό τους αντιπροσωπεύει το μέσο βάθος του ριζοστρώματος. Ο διαχωρισμός αυτός είχε ως στόχο την βελτίωση του μοντέλου όσον αφορά την αναπαραγωγή του μηχανισμού εξατμοδιαπνοής. Το εν λόγω σχήμα ενσωματώνεται από το μοντέλο «Υδρόγειος» (Σχήμα 5.2) για τη προσομοίωση των επιφανειακών υδρολογικών διεργασιών (Ευστρατιιάδης κ.ά., 2009).



Σχήμα 5.2: Σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου μηνιαίου υδατικού ισοζυγίου για τη προσομοίωση των επιφανειακών υδρολογικών διεργασιών στο μοντέλο «Υδρόγειος» (Ευστρατιάδης κ.ά., 2009)

Τα δεδομένα εισόδου του μοντέλου, ολοκληρωμένα σε επίπεδο λεκάνης απορροής και με τη μορφή ισοδύναμου ύψους νερού, είναι:

- οι χρονοσειρές βροχόπτωσης, p_t
- οι χρονοσειρές δυναμικής εξατμοδιαπνοής, e_{pt}
- οι χρονοσειρές απολήψεων υπόγειου νερού, PUM_t

Το μοντέλο, σε κάθε βήμα, εκτιμά:

- την συνολική απορροή στην έξοδο της λεκάνης, q_t και τις επιμέρους συνιστώσες της
- την πραγματική εξατμοδιαπνοή, e_t
- το απόθεμα εδαφικής υγρασίας, S_t
- το απόθεμα υπόγειας υγρασίας, Y_t
- τις διαφυγές εκτός λεκάνης, $q_{out t}$

Οι μεταβλητές ελέγχου (παράμετροι) του πλήρους μοντέλου είναι 9, ενώ ως μεταβλητές ελέγχου θα πρέπει να αντιμετωπιστούν και τα αρχικά αποθέματα εδαφικής και υπόγειας υγρασίας. Αναλυτικά, οι παράμετροι του μοντέλου είναι:

- Η χωρητικότητα κατακράτησης της βροχής, r , που έχει διαστάσεις ισοδύναμου ύψους νερού και εκφράζει την παρεμπόδιση τμήματος της βροχής να φτάσει στο υπέδαφος λόγω της χλωρίδας και της επιφανειακής κατακράτησης.
- Το ποσοστό της περίσσειας βροχόπτωσης που εμφανίζεται ως άμεση απορροή, c , που είναι αδιάστατο μέγεθος και εξαρτάται από τη κλίση του εδάφους, τη φυτοκάλυψη και το ποσοστό αδιαπέρατων σχηματισμών.
- Η χωρητικότητα της δεξαμενής εδαφικής υγρασίας, k , που έχει διαστάσεις ισοδύναμου ύψους νερού και εξαρτάται κυρίως από το τύπο τους εδάφους (πορώδες).
- Το αδιάστατο κατώφλι του αποθέματος της δεξαμενής εδαφικής υγρασίας για την παραγωγή υποερμικής ροής, θ , που ορίζεται ως ποσοστό της χωρητικότητας k , και οριοθετεί τις δυο ζώνες εδαφικής υγρασίας. Η συγκεκριμένη παράμετρος επηρεάζει έντονα το μηχανισμό παραγωγής της εδαφικής εξατμοδιαπνοής.
- Ο συντελεστής στέρησης, λ , που έχει μονάδες αντίστροφου χρόνου και επηρεάζει το ρυθμό εκφόρτισης της δεξαμενής εδαφικής υγρασίας για παραγωγή πλευρικής ροής.
- Ο συντελεστής στέρησης, μ , που έχει μονάδες αντίστροφου χρόνου και επηρεάζει το ρυθμό εκφόρτισης της δεξαμενής εδαφικής υγρασίας για παραγωγή κατείσδυσης.
- Το αδιάστατο κατώφλι αποθέματος της δεξαμενής υπόγειου νερού για την παραγωγή βασικής ροής, H_2 , που έχει μονάδες ισοδύναμου ύψους νερού και εξαρτάται από τα υδρογεωλογικά χαρακτηριστικά του υπόγειου υδροφορέα και την ύπαρξη πηγών.
- Ο συντελεστής εκφόρτισης, ξ , που είναι αδιάστατο μέγεθος και επηρεάζει την παραγωγή βασικής ροής.
- Ο συντελεστής εκφόρτισης, ϕ , που είναι αδιάστατο μέγεθος και επηρεάζει την παραγωγή υπόγειων διαφυγών νερού σε γειτονικές λεκάνες ή τη θάλασσα.
- Το αρχικό απόθεμα εδαφικής υγρασίας, S_0 , με μονάδες ισοδύναμου ύψους νερού. Στην αρχή του υδρολογικού έτους η τιμή της συγκεκριμένης παραμέτρου μπορεί να θεωρηθεί ίση με το μηδέν.
- Το αρχικό απόθεμα υπόγειας υγρασίας, Y_0 , με μονάδες ισοδύναμου ύψους νερού.

Η περιγραφή της υπολογιστικής διαδικασίας έχει ως εξής: Έστω ότι στην αρχή κάθε χρονικού βήματος (μήνα) t είναι γνωστά η βροχόπτωση, p_t , και η δυνητική εξατμοδιαπνοή (θεωρητική ζήτηση για εξατμοδιαπνοή), e_{p_t} .

Αρχικά, εκτιμάται η άμεση εξατμοδιαπνοή από τη σχέση:

$$e_{Dt} = \min(p_t, r, e_{p_t})$$

όπου r παράμετρος του μοντέλου που υποδηλώνει τη μέγιστη ποσότητα νερού που μπορεί να παγιδευτεί στις μικροκοιλότητες του εδάφους και στα φυλλώματα, με διαστάσεις ισοδύναμου ύψους νερού. Από τη ποσότητα νερού που απομένει, μετά την αφαίρεση της άμεσης εξατμοδιαπνοής, ένα ποσοστό, c , μετατρέπεται σε άμεση απορροή, q_{D_t} , σύμφωνα με τη σχέση:

$$q_{D_t} = c(p_t - e_{D_t})$$

όπου c αδιάστατη παράμετρος που σχετίζεται με τη διαπερατότητα της εδαφικής επιφάνειας.

Κατά συνέπεια, η ποσότητα νερού που διηθείται και τροφοδοτεί τη δεξαμενή εδαφικής υγρασίας, i_t , θα προκύπτει από τη σχέση:

$$i_t = p_t - e_{D_t} - q_{D_t}$$

Λόγω της διήθησης, το απόθεμα εδαφικής υγρασίας, s_t , της δεξαμενής αυξάνει σε:

$$s_t = s_{t-1} + i_t$$

όπου s_{t-1} το απόθεμα εδαφικής υγρασίας στο τέλος του προηγούμενου βήματος. Το απόθεμα κατανέμεται στις δυο ζώνες της εδαφικής δεξαμενής ως εξής:

$$s_{U_t} = \min(0, s_t - k_L), s_{L_t} = s_t - s_{U_t}$$

Οι εκροές νερού από την δεξαμενή εδαφικής υγρασίας οφείλονται στην εδαφική εξατμοδιαπνοή από την ανώτερη και κατώτερη ζώνη, την πλευρική αποστράγγιση (υποδερμική ροή) και την κατείδυση. Η εδαφική εξατμοδιαπνοή, e_{s_t} , αφορά στην ικανοποίηση του ελλείμματος της δυνητικής εξατμοδιαπνοής μέσω της διαθέσιμης εδαφικής υγρασίας, και πραγματοποιείται κατά προτεραιότητα από την ακόρεστη ζώνη, σύμφωνα με τη σχέση:

$$e_{s_{U_t}} = \min(S_{U_t}, e_{p_t} - e_{D_t})$$

Στη συνέχεια, ένα ποσοστό λ της ποσότητας νερού που απομένει στην ανώτερη ζώνη, διαφεύγει πλευρικά, παράγοντας υποδερμική ροή με βάση τη σχέση:

$$q_{H_t} = \lambda(s_{U_t} - e_{s_{U_t}})$$

Στη περίπτωση που η ζήτηση για εξατμοδιαπνοή δεν έχει καλυφθεί πλήρως από το νερό της ανώτερης ζώνης, μέρος του ελλείμματος καλύπτεται από την υγρασία που είναι αποθηκευμένη στην κατώτερη ζώνη, σύμφωνα με την ημιεμπειρική σχέση:

$$e_{SL_t} = (e_{Pt} - e_{Dt} - e_{SU_t})[1 - \exp(-s_{L_t} / k_H)]$$

Η ποσότητα νερού που απομένει συνολικά στη δεξαμενή εδαφικής υγρασίας, μετά την αφαίρεση της εδαφικής εξατμοδιαπνοής και της υποδερμικής ροής, κατεισδύει προς τον υπόγειο υδροφορέα σύμφωνα με ένα συντελεστή στείρευσης μ :

$$g_t = \mu(s_t - e_{SU_t} - e_{SL_t} - q_{It})$$

Τελικά, εκτιμάται η ροή λόγω κορεσμού του εδάφους, στη περίπτωση που πραγματοποιείται υπερχειλίσις της δεξαμενής, από τη σχέση:

$$q_{St} = \max(0, s_t - e_{SU_t} - e_{SL_t} - q_{It} - g_t - k)$$

Η ποσότητα νερού που μεταβαίνει στον υπόγειο υδροφορέα μέσω της κατείσδυσης, προστίθεται στο ήδη υπάρχον απόθεμα της υπόγειας δεξαμενής, Y_{t-1} . Οι εκροές από τον υπόγειο υδροφορέα οφείλονται είτε σε απολήψεις λόγω γεωτρήσεων, PUMP, είτε στην δημιουργία βασικής ροής, q_{Bt} , είτε στις διαφυγές ποσοτήτων νερού εκτός λεκάνης, q_{OUTt} .

Αμέσως μετά τη κατείσδυση, το απόθεμα της δεξαμενής διαμορφώνεται ως εξής:

$$Y_t = Y_{t-1} + g_t - PUMP_t$$

Στην περίπτωση που το απόθεμα, Y_t , υπερβαίνει κάποιο κατώφλι H_2 παράγεται βασική ροή σύμφωνα με τη σχέση:

$$q_{Bt} = \max(0, \xi(Y_t - H_2))$$

όπου H_2 το κατώφλι και ξ παράμετρος. Αυτό μειώνει περαιτέρω το διαθέσιμο απόθεμα υπόγειου νερού σε:

$$Y_t = Y_t - q_{Bt}$$

Ως τελευταία διεργασία θεωρούνται οι διαφυγές εκτός λεκάνης που προκύπτουν ως ένα ποσοστό φ της συνολικής διαθέσιμης υπόγειας υγρασίας, σύμφωνα με τη σχέση:

$$Q_{outt} = \varphi Y_t$$

Μετά τις διαφυγές, το απόθεμα υπόγειας υγρασίας μειώνεται περαιτέρω σύμφωνα με τη σχέση:

$$Y_t = Y_t - Q_{outt}$$

Στο τέλος κάθε χρονικού βήματος, η συνολική απορροή θα προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους εκροών ως εξής:

$$q_t = q_{Dt} + q_{It} + q_{St} + q_{Bt}$$

Ενώ η συνολική πραγματική εξατμοδιαπνοή θα προκύπτει ως άθροισμα της άμεσης και αυτής που πραγματοποιείται από την δεξαμενή εδαφικής υγρασίας, ως εξής:

$$e_t = q_{Dt} + e_{St}$$

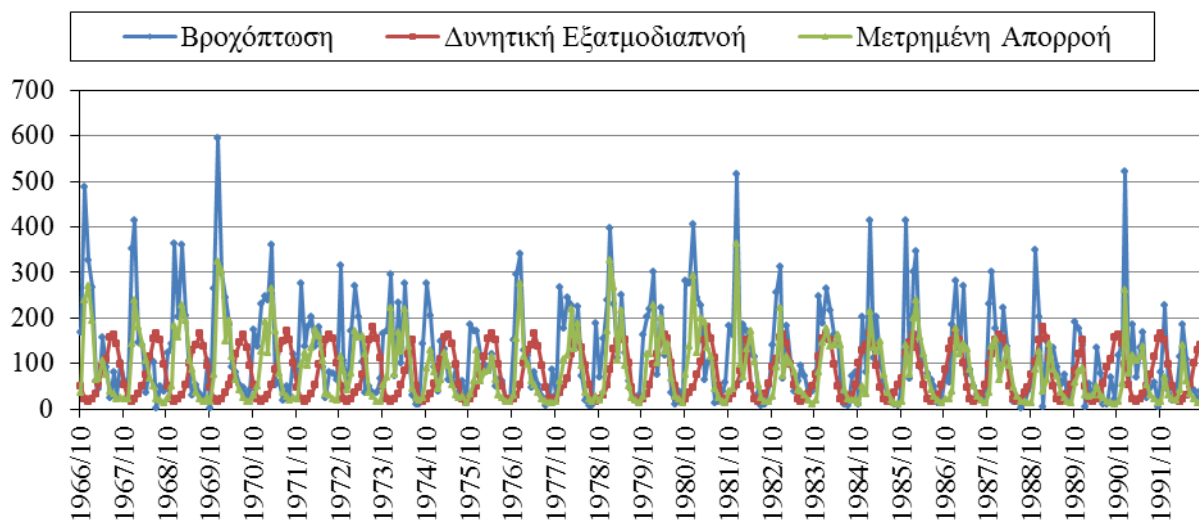
5.3 Στοχαστική βαθμονόμηση μοντέλου «Ζυγός»

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας επιχειρήθηκε η βαθμονόμηση και εν συνεχεία εφαρμογή του μοντέλου «Ζυγός» σε τρεις λεκάνες απορροής της Ελλάδας με διαφορετικά υδρολογικά χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα, μελετήθηκε η εφαρμογή του μοντέλου στη λεκάνη των Κρεμαστών (Αχελώος), του Βοιωτικού Κηφισού και του Αλιάκμονα.

5.3.1 Περιγραφή λεκανών μελέτης

Λεκάνη Κρεμαστών

Η λεκάνη των Κρεμαστών του ποταμού Αχελώου χαρακτηρίζεται ως ορεινή (μέσο υψόμετρο τα 1377m), με έντονο ανάγλυφο, πολλές βροχοπτώσεις και χιονοπτώσεις, και χαμηλές θερμοκρασίες. Η έκταση της λεκάνης είναι 3424 km² και έχει μέσο υψόμετρο τα 1377 m. Για τη βαθμονόμηση του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν μηνιαίες χρονοσειρές κατακρήμνισης, η οποία περιελάμβανε λειωμένο χιόνι και βροχόπτωση, δυναμικής εξατμοδιαπνοής, υπολογισμένη με τη μέθοδο Penman, και μετρημένης απορροής στην έξοδο της λεκάνης, εκτιμημένη από το ισοζύγιο εισροών-εκροών του ταμιευτήρα Κρεμαστών. Τα δεδομένα εισόδου του μοντέλου παρουσιάζονται στο γράφημα που ακολουθεί (Γράφημα 5.1) και καλύπτουν μια περίοδο 26 χρόνων, από τον Οκτώβριο του 1966 έως το Σεπτέμβριο του 1992.

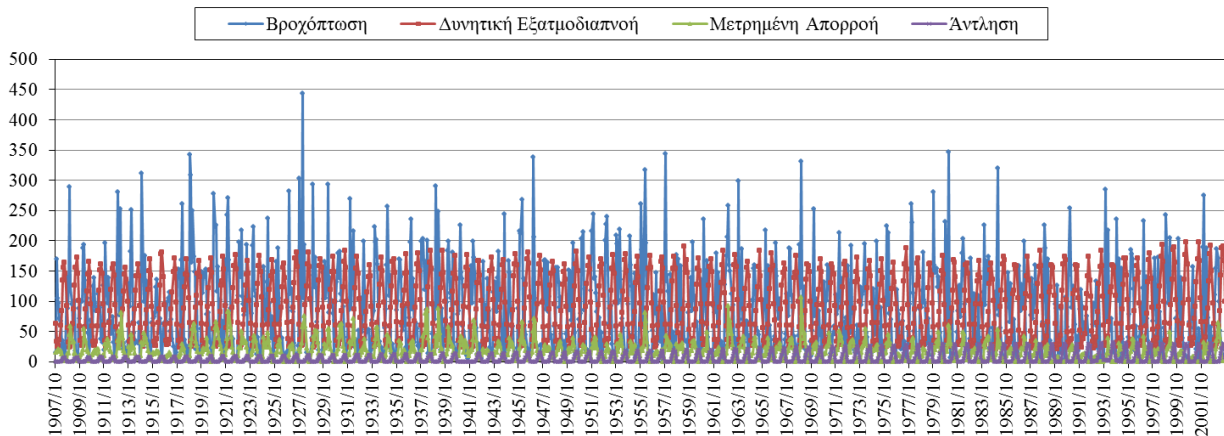


Γράφημα 5.1: Χρονοσειρές βροχόπτωσης, δυνητικής εξατμοδιαπνοής και μετρημένης απορροής στην λεκάνη των Κρεμαστών

Λεκάνη Βοιωτικού Κηφισού

Η λεκάνη απορροής του Βοιωτικού Κηφισού έχει έκταση 1955.6 km² και είναι η μεγαλύτερη και σημαντικότερη, από πλευράς υδατικού δυναμικού, της Ανατολικής Στερεάς Ελλάδας. Το μέσο υψόμετρο της λεκάνης ανέρχεται σε 481.4 km². Στην πραγματικότητα είναι μια κλειστή λεκάνη, οι απορροές της οποίας τροφοδοτούσαν τη ρηχή λίμνη της Κωπαΐδας. Τα νερά αυτά με τη σειρά τους, αποστραγγίζονταν προς γειτονικές λεκάνες και τη θάλασσα, μέσω ενός πολύπλοκου συστήματος καρστικών καταβοθρών. Λόγω της ιδιόμορφης γεωλογικής και υδρογεωλογικής της δομής, που οφείλεται στην κυριαρχία των ασβεστολιθικών πετρωμάτων, η λεκάνη του Βοιωτικού Κηφισού διαθέτει πολύ αξιόλογο υπόγειο και πηγαίο υδατικό δυναμικό. Η συνεισφορά της βασικής απορροής στο συνολικό επιφανειακό δυναμικό της λεκάνης ξεπερνά το 50%, ενώ σημαντικό μέρος του υπόγειου δυναμικού εκφορτίζεται εκτός λεκάνης είτε επιφανειακά είτε υποθαλάσσια. Ταυτόχρονα, το ξηρό υδροκλιματικό καθεστώς που επικρατεί στην περιοχή έχει σαν αποτέλεσμα υψηλές απώλειες λόγω εξατμοδιαπνοής. Ένα άλλο ιδιαίτερα σημαντικό χαρακτηριστικό της λεκάνης, που επηρεάζει άμεσα το υδατικό δυναμικό της, είναι τα μεγάλα μεγέθη των αρδευτικών απολήψεων για την κάλυψη των αναγκών της περιοχής. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά συνθέτουν μια αρκετά πολύπλοκη λεκάνη, στην οποία συντελούνται μια σειρά από πολύπλοκες επιφανειακές και υπόγειες διεργασίες. Για τη βαθμονόμηση του μοντέλου στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της λεκάνης του Βοιωτικού Κηφισού χρησιμοποιήθηκαν μηνιαίες χρονοσειρές βροχόπτωσης, δυνητικής εξατμοδιαπνοής και μετρημένης απορροής στην έξοδο της λεκάνης, όπως αυτά ελήφθησαν από τον Ευστρατιάδη (2008). Εκτός από τις παραπάνω χρονοσειρές, χρησιμοποιήθηκαν

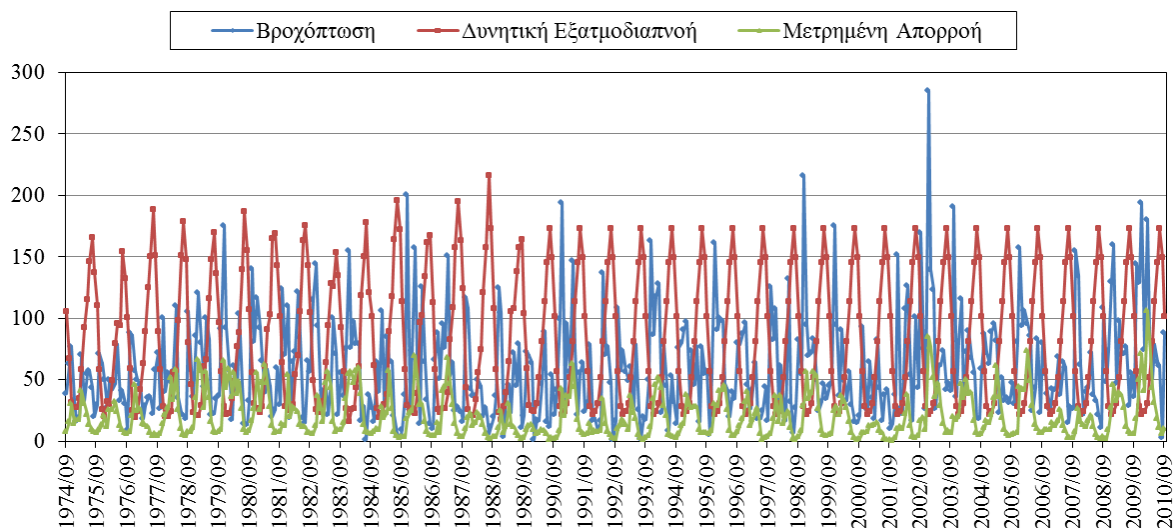
επίσης ως δεδομένα εισόδου οι μηνιαίες απολήψεις επιφανειακού και υπόγειου νερού. Οι χρονοσειρές παρουσιάζονται στο γράφημα που ακολουθεί (Γράφημα 5.2) και καλύπτουν μια περίοδο 96 χρόνων, από τον Οκτώβριο του 1907 έως το Σεπτέμβρη του 1996.



Γράφημα 5.2: Χρονοσειρές βροχόπτωσης, δυνητικής εξατμοδιαπνοής, μετρημένης απορροής και απολήψεων στην λεκάνη του Βοιωτικού Κηφισού.

Λεκάνη Αλιάκμονα

Η λεκάνη απορροής του ποταμού Αλιάκμονα είναι η σημαντικότερη και μεγαλύτερη σε έκταση λεκάνη του Υδατικού Διαμερίσματος Δυτικής Μακεδονίας καθώς από τον Αλιάκμονα υδροδοτούνται ευρύτερες αρδευόμενες περιοχές και η πόλη της Θεσσαλονίκης. Η έκταση της λεκάνης είναι 6.537 km² και έχει μέση ετήσια βροχόπτωση 754.9 mm. Για τη βαθμονόμηση του μοντέλου «Ζυγός» στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της λεκάνης του Αλιάκμονα χρησιμοποιήθηκαν μηνιαίες χρονοσειρές βροχόπτωσης, δυνητικής εξατμοδιαπνοής και μετρημένης απορροής στην έξοδο της λεκάνης. Οι χρονοσειρές παρουσιάζονται στο γράφημα που ακολουθεί (Γράφημα 5.3) και καλύπτουν μια περίοδο 36 χρόνων, από τον Σεπτέμβριο του 1974 έως τον Οκτώβριο του 2009.



Γράφημα 5.3: Χρονοσειρές βροχόπτωσης, δυνητικής εξατμοδιαπνοής, μετρημένης απορροής και απολήψεων στην λεκάνη του Αλιάκμονα

5.3.2 Βαθμονόμηση και εφαρμογή του μοντέλου

Για κάθε μια από τις παραπάνω λεκάνες απορροής, έγινε βαθμονόμηση του μοντέλου με χρήση του βελτιωμένου εξελικτικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου. Σε κάθε περίπτωση, ως κριτήριο καλής προσαρμογής χρησιμοποιήθηκε ο δείκτης Nash-Sutcliffe. Για τη λεκάνη του Αλιάκμονα επιλέχθηκαν για βελτιστοποίηση και οι 9 παράμετροι του μοντέλου, συμπεριλαμβανομένων και των αρχικών συνθηκών εδαφικής και υπόγειας υγρασίας, S_0 και Y_0 , αντίστοιχα. Αντίθετα, για τη λεκάνη του Βοιωτικού Κηφισού οι αρχικές συνθήκες έλαβαν σταθερή μηδενική τιμή καθώς το μεγάλο μέγεθος του δείγματος (97 χρόνια) μας επιτρέπει να θεωρήσουμε πως δεν ασκούν μεγάλη επίδραση στη διαδικασία. Η ίδια υπόθεση έγινε και για τη λεκάνη των Κρεμαστών, θεωρώντας επίσης μηδενικές τιμές για την παράμετρο που ελέγχει τις διαφυγές εκτός λεκάνης, ϕ , και τη παράμετρο που ελέγχει την παραγωγή πλευρικής ροής, λ .

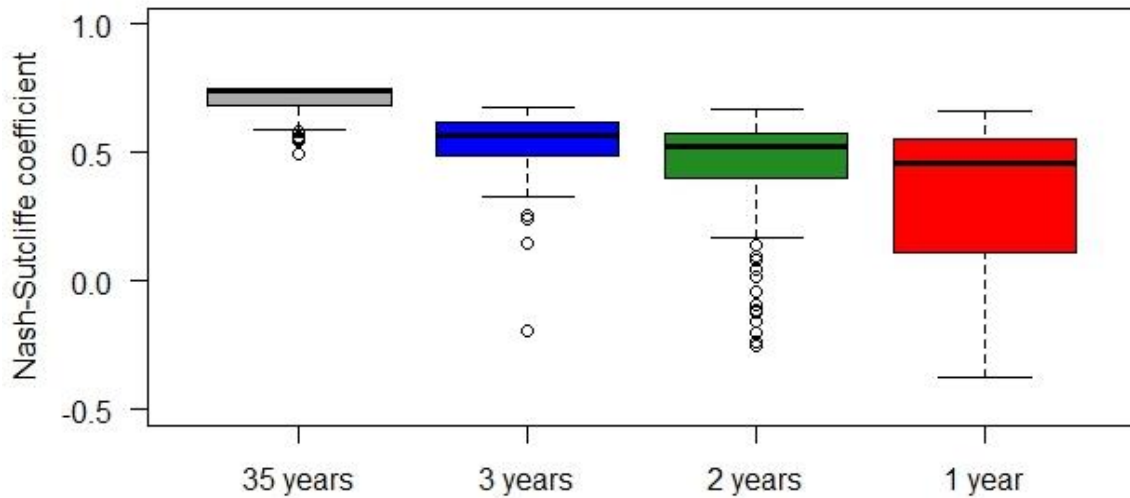
Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας επιχειρήθηκε η εύρεση των παραμέτρων του υδρολογικού μοντέλου «Ζυγός» ακολουθώντας δυο διαφορετικές τακτικές βαθμονόμησης. Πέρα από την κλασική τακτική επίλυσης του προβλήματος, όπου στον υπολογισμό του μέτρου προσαρμογής συμμετέχει το συνολικό δείγμα μετρημένης και προσομοιωμένης απορροής, επιχειρήθηκε η βαθμονόμηση του μοντέλου μέσω της λήψης μικρότερων τυχαίων δειγμάτων από το σύνολο της χρονοσειράς. Αναλυτικότερα, κάθε φορά που ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης «καλούσε» το μοντέλο προσομοίωσης, ο δείκτης καλής προσαρμογής υπολογιζόταν για ένα τυχαίο χρονικό παράθυρο, δεδομένου μήκους, και όχι για το σύνολο του δείγματος. Συνεπώς, για ένα δεδομένο σύνολο παραμέτρων, η στοχαστική συνάρτηση

λαμβάνει διαφορετικές τιμές ανάλογα με το χρονικό παράθυρο το οποίο έχει επιλεγεί, με τυχαίο πάντα τρόπο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, η διαδικασία αναζήτησης να πραγματοποιείται σε ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο, αλλά πραγματικό, περιβάλλον όπου η αβεβαιότητα από το διαθέσιμο δείγμα μεταφέρεται άμεσα στη τιμή του μέτρου επίδοσης.

Η παραπάνω τακτική, «στοχαστικής» βαθμονόμησης με τη χρήση τυχαία κινούμενων παραθύρων, μας επιτρέπει να ελέγξουμε τόσο την αξιοπιστία της διαδικασίας βαθμονόμησης όσο και την προγνωστική ικανότητα του μοντέλου, δηλαδή την αναπαραγωγή όλου του φάσματος αποκρίσεων της λεκάνης, όταν τα διαθέσιμα δεδομένα εισόδου είναι περιορισμένα. Η περίπτωση αυτή είναι συνήθης ιδιαίτερα στον Ελλαδικό χώρο. Ταυτόχρονα, γίνεται άμεση εκτίμηση και διαχείριση της αβεβαιότητας που πηγάζει από τις απλοποιητικές παραδοχές του μαθηματικού μοντέλου και το περιορισμένο δείγμα χρονοσειρών εισόδου.

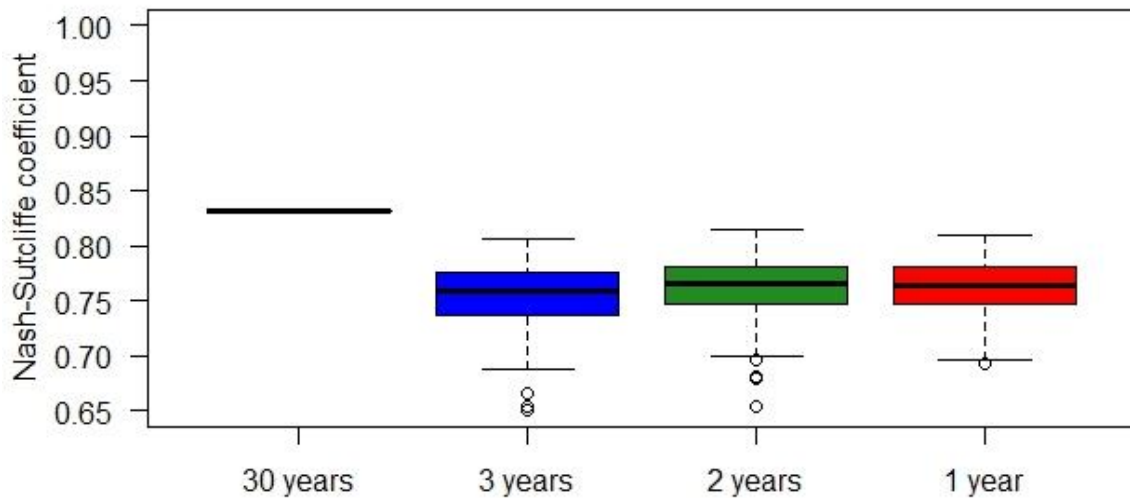
Για την δημιουργία αβεβαιότητας διαφορετικής έντασης, η παραπάνω τακτική εκτελέστηκε για τρία διαφορετικά μήκη χρονικών παραθύρων. Όπως είναι λογικό, όσο μικρότερο είναι το δείγμα μας τόσο μεγαλύτερη αβεβαιότητα υπάρχει ως προς την εκτίμηση των πραγματικών παραμέτρων του μοντέλου. Έτσι, για τη λεκάνη των Κρεμαστών και του Αλιάκμονα χρησιμοποιήθηκαν χρονικές περίοδοι μήκους ενός, δύο και τριών χρόνων, ενώ για τον Βοιωτικό Κηφισό μήκη πέντε, δέκα και είκοσι ετών. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από 100 στοχαστικά ανεξάρτητες επιλύσεις του προβλήματος για κάθε λεκάνη και κάθε επίπεδο αβεβαιότητας φαίνονται στα Γράφημα 5.4 -Γράφημα 5.6, που ακολουθούν. Για είναι αντικειμενική η σύγκριση, σε όλες τις περιπτώσεις ο δείκτης Nash-Sutcliffe έχει προκύψει από όλο το δείγμα, ανεξάρτητα του τρόπου βελτιστοποίησης.

Aliakmonas Basin



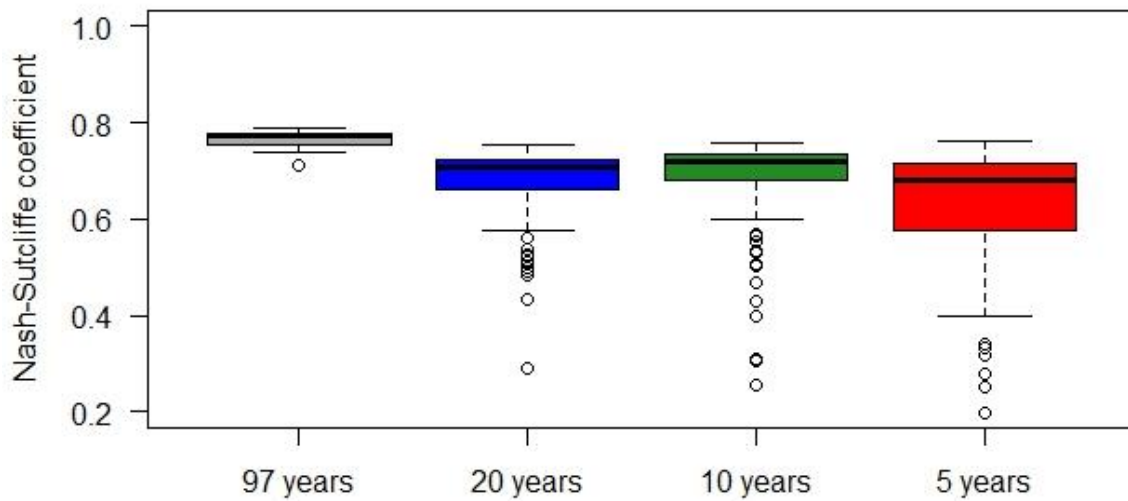
Γράφημα 5.4: Αποτελέσματα βαθμονόμησης για 100 ανεξάρτητες δοκιμές. Με γκρι φόντο (35 έτη), ο δείκτης Nash-Sutcliffe από βαθμονόμηση με όλο το δείγμα, με μπλε φόντο (3 χρόνια) ο δείκτης για όλο το δείγμα με χρήση τυχαίων δειγμάτων μήκους 3 χρόνων, με πράσινο για 2 χρόνια και κόκκινο για 1 χρόνο.

Achelous Basin



Γράφημα 5.5: Αποτελέσματα βαθμονόμησης για 100 ανεξάρτητες δοκιμές. Με γκρι φόντο (35 έτη), ο δείκτης Nash-Sutcliffe από βαθμονόμηση με όλο το δείγμα, με μπλε φόντο (3 χρόνια) ο δείκτης για όλο το δείγμα με χρήση τυχαίων δειγμάτων μήκους 3 χρόνων, με πράσινο για 2 χρόνια και κόκκινο για 1 χρόνο.

Boeotikos Kephisos Basin



Γράφημα 5.6: Αποτελέσματα βαθμονόμησης για 100 ανεξάρτητες δοκιμές. Με γκρι φόντο (35 έτη), ο δείκτης Nash-Sutcliffe από βαθμονόμηση με όλο το δείγμα, με μπλε φόντο (3 χρόνια) ο δείκτης για όλο το δείγμα με χρήση τυχαίων δειγμάτων μήκους 3 χρόνων, με πράσινο για 2 χρόνια και κόκκινο για 1 χρόνο.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα παραπάνω γραφήματα, ο νέος αλγόριθμος ανόπτησης-απλόκου έχει πολύ καλή επίδοση, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που χρησιμοποιείται το σύνολο του δείγματος κατά τη βαθμονόμηση. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι για τη λεκάνη του Αχελώου, ο αλγόριθμος συνέκλινε στην ίδια λύση, βρίσκοντας το ίδιο σύνολο παραμέτρων, σε όλες τις δοκιμές. Για το Βοιωτικό Κηφισό η μέση επίδοση είναι 0.76 και θεωρείται ιδιαίτερα επιτυχής, δεδομένης της μεγάλης χρονοσειράς που χρησιμοποιείται και της πολυπλοκότητας που παρουσιάζει η συγκεκριμένη λεκάνη. Ταυτόχρονα, παρατηρήθηκε το φαινόμενο διαφορετικά σύνολα παραμέτρων να αποδίδουν τον ίδιο συντελεστή Nash-Sutcliffe. Το φαινόμενο αυτό είναι συνηθισμένο στα μοντέλα βροχής-απορροής και σχετίζεται με την έννοια της ισοδυναμίας (equifinality) των λύσεων. Πιο περιορισμένη ήταν η επίδοση του αλγορίθμου για τη λεκάνη του Αλιάκμονα (μέση επίδοση ίση με 0.70), ωστόσο και σε αυτή τη περίπτωση εντοπίστηκαν λύσεις που παράγουν αποκρίσεις πολύ κοντά στις παρατηρημένες.

Όσον αφορά τα αποτελέσματα της στοχαστικής βαθμονόμησης, παρατηρούμε πως η επίδοση του αλγορίθμου προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό αυτή που προέκυψε από την κλασσική τακτική επίλυσης. Όπως είναι λογικό, οι λύσεις που παράγονται διακρίνονται από μεγαλύτερη διασπορά λόγω της αβεβαιότητας που υπεισέρχεται στη διαδικασία βαθμονόμησης. Η διασπορά των λύσεων αυξάνει με την μείωση του μήκους του χρονικού παραθύρου που λαμβάνεται κατά τη βαθμονόμηση. Όπως φαίνεται, εξαίρεση από αυτή τη τάση αποτελεί η

λεκάνη των Κρεμαστών. Αξίζει πάντως να αναφερθεί πως ακόμα και στην περίπτωση που γίνεται χρήση δείγματος μόνο ενός έτος, ο αλγόριθμος εντόπισε λύσεις που αποδίδουν εξίσου αποδεκτές αποκρίσεις και αναπαράγουν ικανοποιητικά την υδρολογική δίαιτα της λεκάνης.

Για την οπτικοποίηση της ποιότητας των βέλτιστων λύσεων που προέκυψαν για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις, παρατίθενται τα γραφήματα που απεικονίζουν τις χρονοσειρές μετρημένης και υπολογισμένης απορροής στην έξοδο των τριών λεκανών. Οι λύσεις είναι ενδεικτικές και οι τιμές των παραμέτρων δίνονται στους Πίνακας 5.1 -Πίνακας 5.3 που ακολουθούν. Από τα Γράφημα 5.7Γράφημα 5.9 γίνεται εμφανές πως η προσαρμογή του μοντέλου στα μετρημένα δεδομένα είναι πολύ ικανοποιητική για όλες τις περιπτώσεις.

	Αλιάκμονας											
	R	c	K	l	t	m	j	H2	f	S0	Y0	NS
Λύση 1	10.000	0.079	183.451	0.056	0.769	0.288	0.384	461.763	0.010	0.00	0.00	0.752
Λύση 2	18.984	0.052	614.532	0.401	0.583	0.222	0.731	8.561	0.631	0.00	0.00	0.677
Λύση 3	13.597	0.117	455.272	0.199	0.816	0.285	0.493	113.807	0.125	0.00	0.00	0.672
Λύση 4	30.064	0.052	317.138	0.792	0.85	0.265	0.700	36.82	0.062	0.00	0.00	0.666

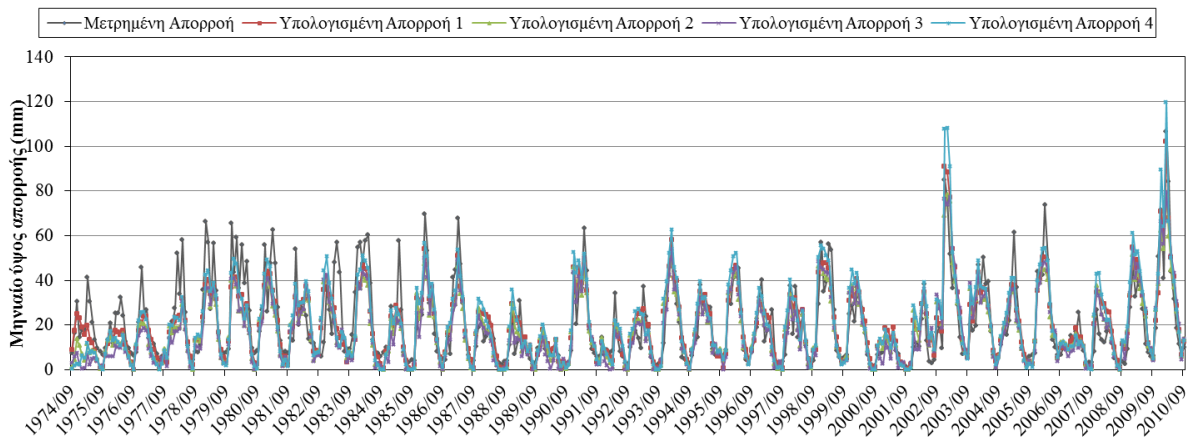
Πίνακας 5.1: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Ζυγός για τη λεκάνη του Αλιάκμονα. Η Λύση 1 έχει προκύψει από βαθμονόμηση με όλο το δείγμα, η Λύση 2 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 3 ετών, η Λύση 3 με μήκος 2 ετών, η Λύση 4 με μήκος 1 έτους.

	Κρεμαστά											
	R	c	K	l	t	m	j	H2	f	S0	Y0	NS
Λύση 1	37.699	0.237	699.999	0.00	0.99	0.642	0.452	55.886	0.00	0.00	0.00	0.831
Λύση 2	45.647	0.353	591.733	0.00	0.717	0.592	0.437	180.92	0.00	0.00	0.00	0.807
Λύση 3	41.215	0.205	601.512	0.00	0.741	0.549	0.56	82.249	0.00	0.00	0.00	0.815
Λύση 4	33.225	0.295	571.702	0.00	0.749	0.381	0.611	151.308	0.00	0.00	0.00	0.809

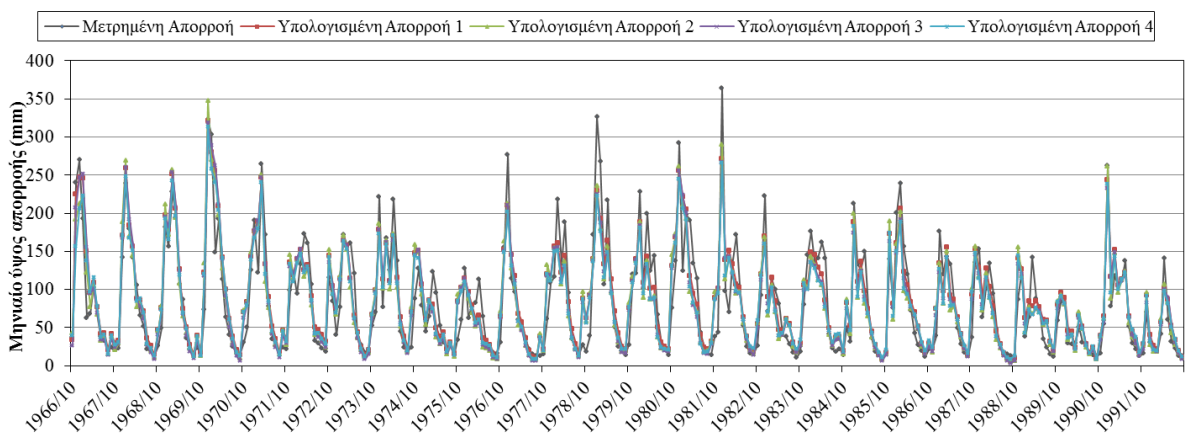
Πίνακας 5.2: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Ζυγός για τη λεκάνη των Κρεμαστών. Η Λύση 1 έχει προκύψει από βαθμονόμηση με όλο το δείγμα, η Λύση 2 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 3 ετών, η Λύση 3 με μήκος 2 ετών, η Λύση 4 με μήκος 1 έτους.

	Βοιωτικός Κηφισός											
	R	c	K	l	t	m	j	H2	f	S0	Y0	NS
Λύση 1	10.000	0.05	699.989	0.07	0.529	0.09	0.433	5.00	0.57	0.00	0.00	0.790
Λύση 2	22.988	0.079	545.634	0.68	0.814	0.697	0.137	216.518	0.14	0.00	0.00	0.755
Λύση 3	14.114	0.05	237.013	0.07	0.687	0.672	0.141	164.363	0.14	0.00	0.00	0.758
Λύση 4	22.093	0.094	582.677	0.27	0.888	0.317	0.233	77.447	0.32	0.00	0.00	0.761

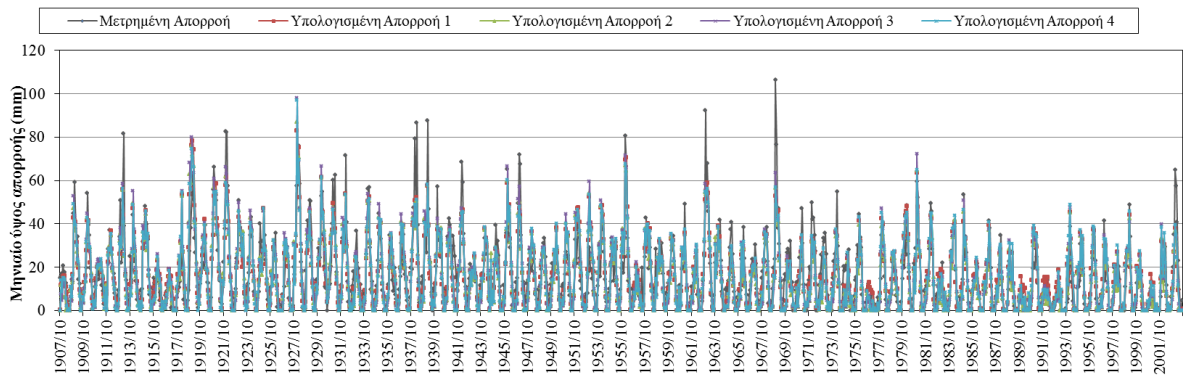
Πίνακας 5.3: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Ζυγός για τη λεκάνη του Βοιωτικού Κηφισού. Η Λύση 1 έχει προκύψει από βαθμονόμηση με όλο το δείγμα, η Λύση 2 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 20 ετών, η Λύση 3 με μήκος 10 ετών, η Λύση 4 με μήκος 1 έτους.



Γράφημα 5.7: Μετρημένη και υπολογισμένη απορροή στην έξοδο της λεκάνης του Αλιάκμονα. Η υπολογισμένη απορροή 1 έχει προκύψει από κλασική βαθμονόμηση, η υπολογισμένη απορροή 2 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 3 έτη, η υπολογισμένη απορροή 3 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 2 έτη και η υπολογισμένη απορροή 4 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 1 έτος.

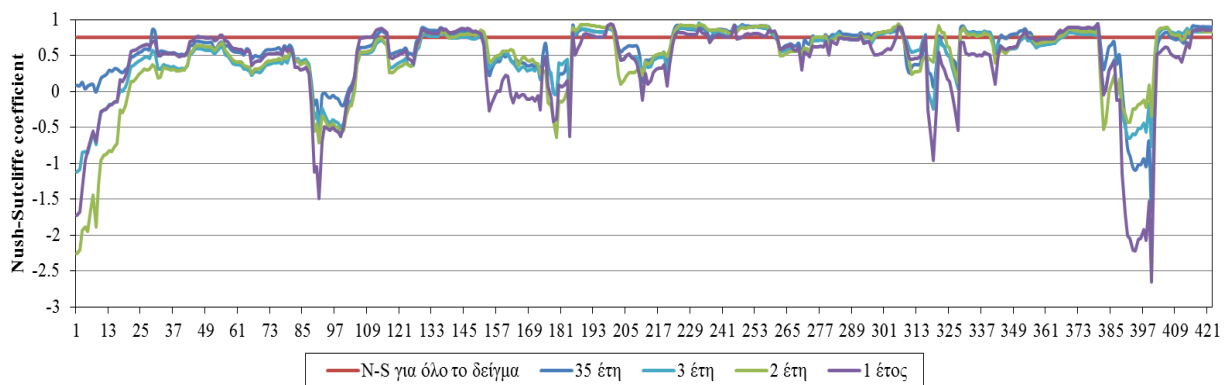


Γράφημα 5.8: Μετρημένη και υπολογισμένη απορροή στην έξοδο της λεκάνης των Κρεμαστών. Η υπολογισμένη απορροή 1 έχει προκύψει από κλασική βαθμονόμηση, η υπολογισμένη απορροή 2 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 3 έτη, η υπολογισμένη απορροή 3 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 2 έτη και η υπολογισμένη απορροή 4 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 1 έτος.

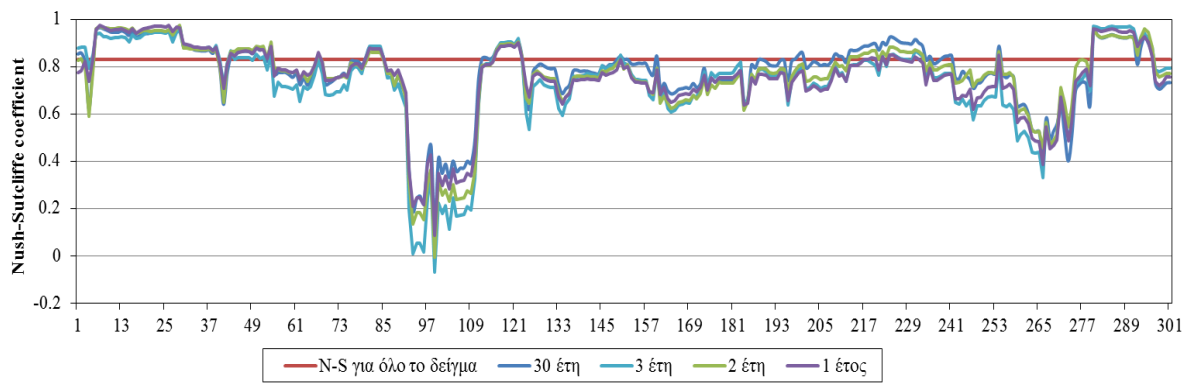


Γράφημα 5.9: Μετρημένη και υπολογισμένη απορροή στην έξοδο της λεκάνης του Βοιωτικού Κηφισού. Η υπολογισμένη απορροή 1 έχει προκύψει από κλασική βαθμονόμηση, η υπολογισμένη απορροή 2 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 3 έτη, η υπολογισμένη απορροή 3 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 2 έτη και η υπολογισμένη απορροή 4 από βαθμονόμηση με μήκος δείγματος 1 έτος.

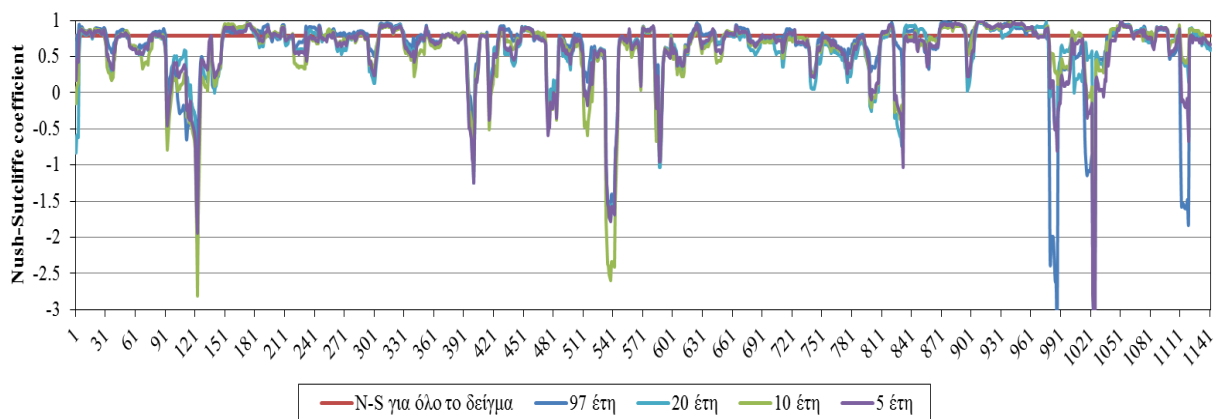
Για την πιο εποπτική σύγκριση της παρατηρημένης και προσομοιωμένης απορροής κατασκευάστηκε μια σειρά γραφημάτων (Γράφημα 5.10 -Γράφημα 5.12) που αναπαριστούν την τάση που παρουσιάζει ο δείκτης Nash-Sutcliffe κατά μήκος του δείγματος. Ο κυλιόμενος δείκτης Nash-Sutcliffe μας δείχνει σε περιοχές του δείγματος το μοντέλο παράγει αποκρίσεις που δεν συμβαδίζουν με τις παρατηρημένες. Για την κατασκευή των διαγραμμάτων αυτών χρησιμοποιήθηκαν οι λύσεις που δίνονται στους Πίνακες 5.1 έως 5.3.



Γράφημα 5.10: Κυλιόμενος συντελεστής Nash-Sutcliffe 12 μηνών για τη λεκάνη του Αλιάκμονα



Γράφημα 5.11: Κυλιόμενος συντελεστής Nash-Sutcliffe 12 μηνών για τη λεκάνη των Κρεμαστών



Γράφημα 5.12: Κυλιόμενος συντελεστής Nash-Sutcliffe 12 μηνών για τη λεκάνη του Βοιωτικού Κηφισού

Από τα παραπάνω γραφήματα επιβεβαιώνεται η ευρωστία των λύσεων που προέκυψαν κατά τη στοχαστική βελτιστοποίηση με τυχαία επιλογή δειγμάτων. Οι κυλιόμενοι δείκτες Nash-Sutcliffe ακολουθούν μέσα στο δείγμα την ίδια τάση γεγονός που υποδηλώνει πως σε όλες τις περιπτώσεις η βελτιστοποίηση έδωσε λύσεις που παράγουν αποκρίσεις της ίδιας μορφής.

Κεφάλαιο 6^ο

6 Βαθμονόμηση του μοντέλου Bartlett – Lewis

Στο παρόν κεφάλαιο μελετάται το πρόβλημα βαθμονόμησης των παραμέτρων του μοντέλου ορθογωνικών παλμών Bartlett-Lewis, το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως για τη προσομοίωση του φαινομένου της βροχόπτωσης σε μικρές χρονικές κλίμακες. Αρχικά παρουσιάζονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του φαινομένου, όταν αυτό μελετάται σε μικρές χρονικές κλίμακες (μικρότερες της μηνιαίας), και εν συνεχεία επιχειρείται μια σύντομη ανασκόπηση των κυριότερων μοντέλων σημειακών ανελίξεων, που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί για την μαθηματική περιγραφή του φαινομένου. Ιδιαίτερο βάρος δίνεται στην ανάλυση του μοντέλου Bartlett-Lewis και στις μεθόδους που εφαρμόζονται για την εύρεση των παραμέτρων του. Τέλος, επιχειρείται η προσαρμογή του μοντέλου στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της βροχής της Αθήνας.

6.1 Εισαγωγή - Η μελέτη της βροχής στις «μικρές» χρονικές κλίμακες

Η βροχόπτωση είναι ίσως η πιο κρίσιμη συνιστώσα του υδρολογικού κύκλου, καθώς επηρεάζει άμεσα μια σειρά από άλλες υδρολογικές μεταβλητές. Ωστόσο, η μελέτη, και κατ' επέκταση η μαθηματική περιγραφή-προσομοίωση, του φαινομένου της βροχής παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες λόγω της έντονης τυχαιότητας και πολυπλοκότητας του μηχανισμού γένεσης της κατακρήμνισης. Ο βαθμός δυσκολίας γίνεται ακόμα μεγαλύτερος όταν η έρευνα αναφέρεται σε χρονικές κλίμακες μικρότερες της μηνιαίας, που το φαινόμενο εμφανίζεται ως διαλείπον με έντονη χωροχρονική μεταβλητότητα και στοχαστική εξάρτηση των μεγεθών του (Κουτσογιάννη 1988, σελ.94, 101). Οι δυσκολίες που παρουσιάζει η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου επιβεβαιώνονται και από την επίδραση που ασκεί η χρονική κλίμακα μελέτης στην επιτυχία ενός μοντέλου προσομοίωσης, καθώς, όπως αναφέρει ο Κουτσογιάννης (1988, σελ.93), “ένα μοντέλο μπορεί να είναι καλή αντιπροσώπευση της πραγματικότητας σε μια χρονική κλίμακα, αλλά φτωχή αντιπροσώπευση σε μια άλλη χρονική κλίμακα”.

Η ανάλυση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της βροχής στηρίζεται, ως επί το πλείστον, σε ιστορικές χρονοσειρές βροχομετρικών δεδομένων, που παρουσιάζουν τη συνεχή διαδικασία της βροχόπτωσης σε διακριτά χρονικά διαστήματα (χρονοσειρές υψών βροχής). Στις χρονοσειρές βροχομετρικών δεδομένων μικρής χρονικής κλίμακας η διαλείπουσα φύση του

φαινομένου της βροχής αποτυπώνεται μέσω της εμφάνισης μεμονωμένων ή ομαδοποιημένων μηδενικών τιμών ύψους βροχόπτωσης. Το γεγονός αυτό καθιστά αδύνατη τη μοντελοποίηση της ασυνεχούς δομής των χρονοσειρών μέσω γραμμικών στοχαστικών μοντέλων τα οποία εφαρμόζονται για την παραγωγή δομικά συνεχών χρονοσειρών, όπως είναι αυτές που αναφέρονται στην ετήσια και μηνιαία κλίμακα. Όπως τονίζουν οι Waymire and Gupta (1981a, σελ.1262) “τα σχετικά γραμμικά, στοχαστικά, μοντέλα δεύτερης τάξεως, επικεντρώνονται στην προσομοίωση της δομής αυτοσυνδιασποράς κάποιας στοχαστικής διαδικασίας, αδυνατώντας να συλλάβουν τη συνολική δομή εξάρτησης που η τελευταία παρουσιάζει. Συνεπώς, όσον αφορά στη διαδικασία βροχόπτωσης, χαρακτηριστικά όπως το μέγιστο ύψος βροχής ανά καταιγίδα ή η ακολουθία στεγνών-βροχερών ημερών, δεν γίνεται να διερευνηθούν από μοντέλα δευτέρας τάξης”.

Ο Onof (2000, σελ. 385) κατατάσσει τα μοντέλα προσομοίωσης της βροχής σε τέσσερις μεγάλες κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τα μετεωρολογικά μοντέλα που ενσωματώνουν πολύπλοκα συστήματα διαφορικών εξισώσεων για την αναπαράσταση της φυσικής διαδικασίας κατακρήμνισης. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει στοχαστικά μοντέλα που περιγράφουν την χωρική εξέλιξη της βροχόπτωσης, χωρίς όμως να λαμβάνουν υπόψη τους την χρονική κλίμακα μελέτης (π.χ. multifractal models), ενώ η τρίτη περιλαμβάνει στατιστικά μοντέλα που αναπαράγουν τις χωροχρονικές ιδιότητες της βροχής. Στην τέταρτη και τελευταία κατηγορία κατατάσσονται τα συνεχή στοχαστικά μοντέλα διαδικασιών που ενσωματώνουν απλές μαθηματικές παραδοχές (τυχαίες μεταβλητές) για την προσομοίωση των φυσικών διεργασιών.

Τα στοχαστικά μοντέλα προσομοίωσης σε συνεχή χρόνο παρουσιάζουν σαφή πλεονεκτήματα σε σχέση με τα προαναφερθέντα. Το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι η ικανότητα που επιδεικνύουν να προσομοιώνουν τη διαδικασία της βροχής σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες ταυτόχρονα, για ένα μικρό πλήθος τυχαίων μεταβλητών, και άρα παραμέτρων. Δηλαδή, διακρίνονται αφενός για τη φειδωλή χρήση των παραμέτρων τους και αφετέρου για τη μικρή επίδραση που έχει η χρονική κλίμακα μελέτης στην απόδοσή τους. Αυτά τους τα χαρακτηριστικά τα καθιστούν κατάλληλα για την παραγωγή, μεγάλου μήκους, συνθετικών χρονοσειρών σε ένα ευρύ φάσμα χρονικών κλιμάκων (Onof and Wheeler, 1994a; 1993), ενώ παράλληλα οι διαθέσιμες αναλυτικές τους εξισώσεις επιτρέπουν τον υπολογισμό των βασικών στατιστικών μεγεθών, της διαδικασίας που προσομοιώνουν, για δεδομένες τιμές των παραμέτρων τους.

6.2 Μοντέλα συστάδων ορθογωνικών παλμών

Τις τελευταίες δεκαετίες, η έρευνα για τη στοχαστική μαθηματική προσομοίωση του φαινομένου της βροχής έχει στραφεί προς τα μοντέλα συστάδων ορθογωνικών παλμών. Τα μοντέλα αυτής της κατηγορίας, προσομοιώνουν τα βροχερά γεγονότα μέσω ομαδοποιημένων ορθογωνικών παλμών, που τοποθετούνται στον άξονα του χρόνου μέσω κάποιας συνεχούς σημειακής ανέλιξης (π.χ. Poisson). Η ομαδοποίηση των παλμών οδηγεί, μεν, σε αύξηση του αριθμού των παραμέτρων των μοντέλων, αλλά προσφέρει μεγαλύτερη ευελιξία στην αναπαραγωγή της δομής της βροχής σε περισσότερες από μια χρονικές κλίμακες για ένα και μόνο σύνολο παραμέτρων (Rodriguez-Iturbe et al., 1987a, σελ. 277).

Όπως πληροφορούμαστε από τον Onof (1994a, σελ. 666), οι Kanvas και Delleur (1975) ήταν οι πρώτοι που παρατήρησαν το φαινόμενο της ομαδοποίησης στα βροχομετρικά δεδομένα της Indiana, αναπτύσσοντας ένα μοντέλο συστάδων Poisson, το οποίο και αποτέλεσε τη βάση για περαιτέρω έρευνα. Οι Rodriguez-Iturbe et al. (1987a), ορμώμενοι από την σχετική επιτυχία του μοντέλου λευκού θορύβου Neyman-Scott, διατύπωσαν δυο νέα πλήρη μοντέλα προσομοίωσης της βροχής, που έχουν στη βάση τους τις στοχαστικές διαδικασίες Neyman-Scott και Bartlett-Lewis, αντίστοιχα. Τα δυο μοντέλα έλαβαν τις ονομασίες μοντέλο ορθογωνικών παλμών Neyman-Scott (NSRPM) και μοντέλο ορθογωνικών παλμών Bartlett - Lewis (BLRPM) και έδειξαν μεγάλη ικανότητα στο να αναπαράγουν τα βασικά χαρακτηριστικά της βροχής σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες, ταυτόχρονα, για ένα σχετικά μικρό πλήθος παραμέτρων.

Η βασική διαφοροποίηση των δύο μοντέλων, NSRPM και BLRPM, έγκειται στον τρόπο που κατανέμονται οι παλμοί στη διάσταση του χρόνου. Στο NSRPM ως σημείο αναφοράς για το χρόνο εμφάνισης κάθε παλμού λαμβάνεται ο χρόνος έναρξης της καταιγίδας στην οποία ανήκει ο παλμός. Ενώ στο μοντέλο Bartlett - Lewis ως σημείο αναφοράς για τη χρονική αφετηρία κάθε παλμού λαμβάνεται το σημείο έναρξης του προηγούμενου παλμού. Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, τα δυο μοντέλα επιτρέπουν τόσο τις αλληλοεπικαλύψεις μεταξύ διαδοχικών παλμών, όσο και τις αλληλοεπικαλύψεις μεταξύ διαδοχικών επεισοδίων (καταιγίδων). Άλλωστε, όπως έχουμε ήδη τονίσει, στα μοντέλα σημειακών ανελίκσεων η έννοια του επεισοδίου βροχής αποκτά ένα περισσότερο μαθηματικό παρά φυσικό χαρακτήρα.

Και για τα δύο νέα μοντέλα οι Rodriguez-Iturbe et al. παρέχουν ένα πλήρες μαθηματικό μοντέλο εξισώσεων, που αποδίδουν τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά (μέση τιμή,

διασπορά, αυτοσυνδιασπορά κ-τάξης) τόσο της συνεχούς όσο και της διακριτής διαδικασίας προσομοίωσης, συναρτήσει των παραμέτρων των μοντέλων.

Οι Rodriguez-Iturbe et al. (1987a, σελ. 276), χρησιμοποιώντας τα ωριαία βροχομετρικά δεδομένα του Denver, συνέκριναν τα δυο μοντέλα συστάδων ορθογωνικών παλμών (NSRPM και BLRPM) με ένα απλό μοντέλο ορθογωνικών παλμών Poisson (με εκθετική αλλά και με Pareto κατανομή για την τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στις διάρκειες των παλμών), ως προς την ικανότητά τους να διατηρήσουν τα ιστορικά στατιστικά χαρακτηριστικά από την ωριαία έως την ημερήσια χρονική κλίμακα για ένα μοναδικό σύνολο παραμέτρων. Συγκεκριμένα, εξέτασαν τη μέση τιμή, τη διασπορά, την ασυμμετρία, τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} τάξης, καθώς και την πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης για κλίμακες συνάθροισης 1, 6, 12 και 24 ωρών. Σε κάθε περίπτωση αποδείχτηκε ξεκάθαρα η αδυναμία του απλού μοντέλου ορθογωνικών παλμών να αποδώσει πιστά τα ιστορικά στατιστικά χαρακτηριστικά σε όλες τις κλίμακες συνάθροισης για ένα μοναδικό σύνολο τιμών των παραμέτρων. Ιδιαίτερη αδυναμία έδειξε στη διατήρηση της δομής αυτοσυσχέτισης των ιστορικών βροχομετρικών δεδομένων. Τα δύο μοντέλα συστάδων ορθογωνικών παλμών, NSRPM και BLRPM, αποδείχτηκαν ικανά να διατηρήσουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά όλων των κλιμάκων συνάθροισης (από την ωριαία μέχρι την ημερήσια) για ένα και μοναδικό σύνολο τιμών των παραμέτρων. Έτσι και τα δύο μοντέλα φαίνονται, εκ πρώτης όψεως, το ίδιο αποτελεσματικά. Οι Rodriguez-Iturbe et al. (1987a, σελ. 277) επισημαίνουν πως η επιλογή ενός εκ των δυο μοντέλων ως πιο κατάλληλου, είναι μάλλον δύσκολο να στηριχθεί στα ιστορικά δεδομένα. Ωστόσο, οι μελετητές θεωρούν το μοντέλο Bartlett-Lewis καταλληλότερο, λόγω της μεγαλύτερης ευκολίας που παρουσιάζει ως προς τη μαθηματική του επεξεργασία.

Στις ενότητες που ακολουθούν επιδιώκεται η πλήρης παρουσίαση και ανάλυση του μοντέλου Bartlett-Lewis, ενώ για λόγους πληρότητας της εργασίας γίνεται αναφορά και στο μοντέλο Neyman-Scott.

6.2.1 Το μοντέλο ορθογωνικών παλμών Neyman-Scott (NSRPM)

Το μοντέλο NSRPM περιγράφεται πλήρως από (Rodriguez-Iturbe et al., 1987a, σελ. 278):

- Μια ανέλιξη Poisson, με παράμετρο λ , η οποία καθορίζει τα χρονικά σημεία έναρξης των καταιγίδων (βροχερών γεγονότων).
- Μια τυχαία μεταβλητή για τον προσδιορισμό του αριθμού των παλμών, C , με $C \geq 1$, για κάθε καταιγίδα.

- Μια ομάδα τυχαίων και ανεξάρτητων μεταβλητών για την τοποθέτηση των ορθογωνικών παλμών στον άξονα του χρόνου. Στο αρχικό μοντέλο οι τυχαίες αυτές μεταβλητές ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο β και αναπαριστούν την χρονική απόσταση του παλμού από το σημείο έναρξης της καταιγίδας. Στο μοντέλο Bartlett – Lewis η χρονική αφετηρία του κάθε ορθογωνικού παλμού προσδιορίζεται σε σχέση με το σημείο έναρξης του αμέσως προηγούμενου και όχι σε σχέση με την αφετηρία της καταιγίδας.
- Μια τυχαία μεταβλητή που αποδίδει τη διάρκεια του κάθε παλμού και ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο η .
- Μια τυχαία μεταβλητή για την προσομοίωση του εντατικού μεγέθους (ένταση, ύψος) του κάθε παλμού, X .

Οι Rodriguez-Iturbe et al. αρχικά δεν προέβησαν σε καμία υπόθεση για την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών που αντιστοιχούν στον αριθμό των παλμών ανά καταιγίδα και στην ένταση των παλμών. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα στο αρχικό μαθηματικό μοντέλο να εμπεριέχονται τα εξής επτά άγνωστα μεγέθη:

$$\lambda, \eta, \beta, E[C], E[C^2 - C], E[X], E[X^2]$$

Με σκοπό την απλοποίηση του μαθηματικού μοντέλου και τη μείωση των ανεξάρτητων παραμέτρων του στον ελάχιστο δυνατό αριθμό οι ερευνητές προχώρησαν στις εξής παραδοχές:

- Όσον αφορά στην τυχαία μεταβλητή X (ένταση του παλμού), προτείνουν τη χρήση της εκθετικής κατανομής. Συνεπώς θα ισχύει η σχέση:

$$E[X^2] = 2E^2[X] \quad (6-1)$$

- Για την παραγωγή του αριθμού των ορθογωνικών παλμών ανά καταιγίδα, C , προτείνουν τη χρήση της γεωμετρικής κατανομής ή, εναλλακτικά, της κατανομής Poisson. Αναλόγως με το ποια από τις δύο παραπάνω κατανομές υιοθετείται, το μοντέλο NSRPM αποκαλείται γεωμετρικό ή Poisson αντίστοιχα. Η τελική επιλογή αποτελεί καθαρά θέμα παραδοχής και έχει να κάνει με το αν το χρονικό σημείο έναρξης του πρώτου ορθογωνικού παλμού κάθε καταιγίδας ταυτίζεται με το σημείο έναρξης της καταιγίδας, και δεν επηρεάζει τη γενική μορφή της συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς. Αυτό έχει ως συνέπεια την ισχύ των παρακάτω εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
E[C^2 - C] &= 2E[C]\{E[C]-1\} - \text{Γεωμετρική Κατανομή} \\
E[C^2 - C] &= E[C]\{E[C]+2\} - \text{Κατανομή Poisson}
\end{aligned}
\tag{6-2}$$

Οι δύο παραπάνω παραδοχές οδηγούν στη μείωση του αριθμού των ανεξάρτητων μεταβλητών επίλυσης του μοντέλου σε πέντε:

$$\lambda, \eta, \beta, E[C], E[X]$$

Το μαθηματικό μοντέλο προέκυψε από τη διακριτοποίηση της συνεχούς διαδικασίας και αποτελείται από τρεις αναλυτικές εξισώσεις οι οποίες αποδίδουν τη θεωρητική μέση τιμή $E[Y_i^{(h)}]$, τη διασπορά $\text{Var}[Y_i^{(h)}]$ και τη συνδιασπορά $\text{Cov}[Y_i^{(h)}, Y_{i+k}^{(h)}]$, για δεδομένη χρονική κλίμακα συνάθροισης h , και δεδομένη υστέρηση k (Rodriguez-Iturbe et al., 1987a, σελ. 279).

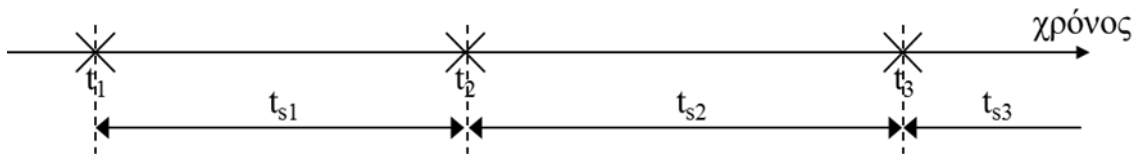
Για την προσαρμογή του μοντέλου στα χαρακτηριστικά της υπό εξέταση βροχής, απαιτείται ο προσδιορισμός των πέντε ανεξάρτητων μεταβλητών επίλυσης για δεδομένες τιμές των τριών στατιστικών μεγεθών. Ωστόσο, για μια δεδομένη στάθμη συνάθροισης, h , και υστέρηση, k , το σχετικό σύστημα είναι αόριστο, αφού ο αριθμός των διαθέσιμων εξισώσεων περιορίζεται σε τρεις, ενώ ο αριθμός των ανεξάρτητων αγνώστων παραμέτρων είναι πέντε. Η εύρεση των πέντε παραμέτρων του μοντέλου NSRPM γίνεται είτε μέσω της επίλυσης ενός μη γραμμικού συστήματος 5x5 με χρήση στατιστικών χαρακτηριστικών από δύο διαφορετικές στάθμες συνάθροισης, h_1 και h_2 , είτε μέσω μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης με χρήση περισσότερων στατιστικών μεγεθών, με απώτερο στόχο τη βέλτιστη προσέγγιση των πέντε παραμέτρων.

6.3 Το μοντέλο ορθογωνικών παλμών Bartlett – Lewis (BLRPM)

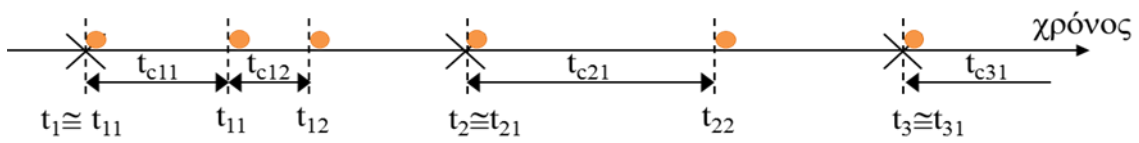
Στην ίδια εργασία, οι Rodriguez-Iturbe et al. διατυπώνουν ένα ακόμα μοντέλο προσομοίωσης της βροχής σε συνεχή χρόνο, το οποίο διαφοροποιείται από το NSRPM ως προς τον τρόπο που οριοθετούνται χρονικά τα σημεία έναρξης των παλμών εντός της καταιγίδας. Όπως επισημαίνουν οι ίδιοι, η επιλογή ενός εκ των δύο μοντέλων είναι δύσκολο να στηριχθεί σε εμπειρικές αναλύσεις, καθώς τα δυο μοντέλα δείχνουν το ίδιο ικανά να αναπαραγάγουν τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά των ιστορικών χρονοσειρών βροχής. Τονίζουν, ωστόσο, πως το μοντέλο BLRPM υπερτερεί λόγω της μεγαλύτερης ευχέρειας που παρουσιάζει κατά την μαθηματική επεξεργασία και ανάλυση (Rodriguez-Iturbe et al., 1987b, σελ.9652).

Τα βασικά χαρακτηριστικά του BLRPM περιγράφονται πλήρως από τις εξής προτάσεις (Rodriguez-Iturbe et al., 1987a, σελ. 279):

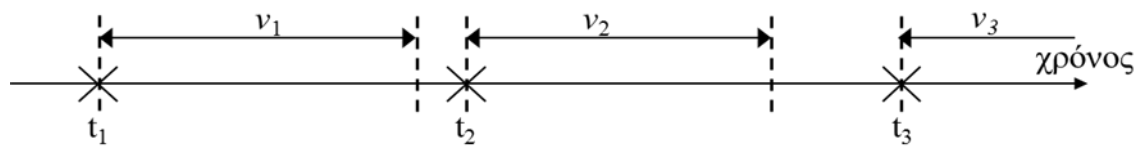
1. Μια αρχική ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ , η οποία καθορίζει τα χρονικά σημεία έναρξης των καταιγίδων, t_i . Εξ ορισμού τα χρονικά διαστήματα t_s είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική συνάρτηση κατανομής με κοινή παράμετρο λ .



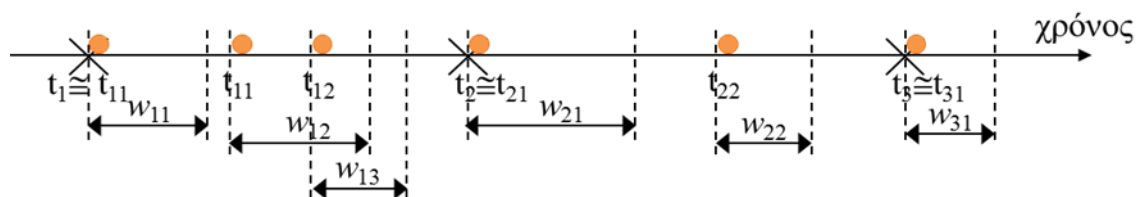
2. Μια δεύτερη ανέλιξη Poisson, ανεξάρτητη της πρώτης, με παράμετρο β , η οποία καθορίζει τα χρονικά σημεία έναρξης των ορθογωνικών παλμών, t_{ij} , κατά τη διάρκεια κάθε καταιγίδας, i . Όπως προκύπτει από τον ορισμό της Poisson ανέλιξης, ως χρονικό σημείο αναφοράς για την έναρξη κάθε παλμού λαμβάνεται το σημείο έναρξης του αμέσως προηγούμενου του. Τα χρονικά διαστήματα, t_{cij} , που μεσολαβούν μεταξύ των αφίξεων των παλμών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο β .



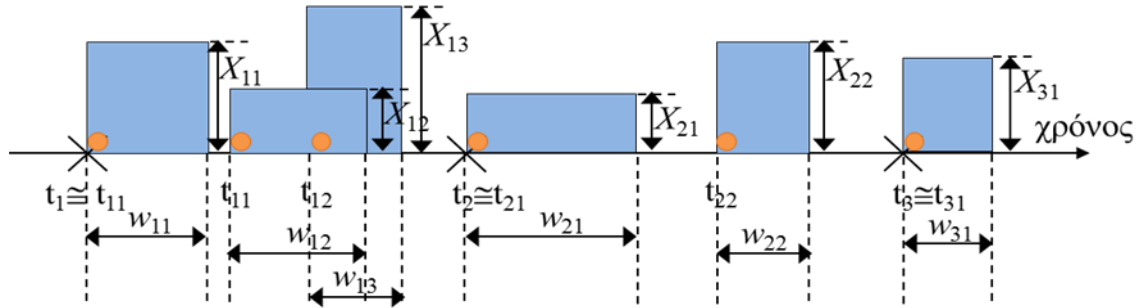
3. Ο συνολικός χρόνος παραγωγής ορθογωνικών παλμών σε κάθε καταιγίδα, v_i , δηλαδή το χρονικό «παράθυρο» μέσα στο οποίο βρίσκονται οι χρονικές αφετηρίες των παλμών κάθε καταιγίδας, i , αποτελεί ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή, που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο γ .



4. Οι διάρκειες των παλμών, w_{ij} , είναι τυχαίες μεταβλητές, και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο η .



5. Τα εντατικά μεγέθη των παλμών, X_{ij} , είναι τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής. Οι δυο εισηγητές προτείνουν τη χρήση της εκθετικής κατανομής για λόγους απλότητας.



Συνεπώς, η προσομοίωση της βροχής σύμφωνα με το μοντέλο Bartlett-Lewis γίνεται μέσω πέντε, ανεξάρτητων μεταξύ τους, τυχαίων μεταβλητών.

$$\lambda, \eta, \beta, \gamma, X$$

Η παραπάνω προτάσεις περιγράφουν τη διαδικασία προσομοίωσης της βροχής σε συνεχή χρόνο. Για να λάβουμε τα αθροιστικά ύψη βροχής, $Y_i^{(h)}$, απαιτείται η χρονική ολοκλήρωση των εντάσεων των παλμών σε διακριτά, σταθερά χρονικά διαστήματα, h :

$$Y_i^{(h)} = \int_{(i-1)h}^{ih} Y(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6-3)$$

Οι αναλυτικές μαθηματικές σχέσεις του μοντέλου BLRPM που δίνουν τη μέση τιμή, διασπορά και αυτοσυνδιασπορά $\kappa -$ τάξης της αθροιστικής διαδικασίας, $Y_i^{(h)}$, για δεδομένη **διακριτή** χρονική κλίμακα h (Rodriguez-Iturbe et al., 1987a, σελ.285) είναι οι εξής:

$$E\left[Y_i^{(h)}\right] = h\rho\mu_c\mu_x \quad (6-4)$$

$$\begin{aligned} Var\left[Y_i^{(h)}\right] &= 2\rho\mu_c \left\{ E\left[X^2\right] + \frac{\beta}{\gamma} \mu_x^2 \right\} \frac{h}{\eta} + 2\rho\mu_c\mu_x^2 \frac{\beta\eta}{(\gamma^2 - \eta^2)\gamma^2} (1 - e^{-\gamma h}) \\ &\quad - 2\rho\mu_c \left\{ E\left[X^2\right] + \frac{\beta\gamma\mu_x^2}{\gamma^2 - \eta^2} \right\} \frac{(1 - e^{-\eta h})}{\eta^2} \end{aligned} \quad (6-5)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y_i^{(h)}, Y_{i+k}^{(h)}] &= \rho \mu_c \left\{ E[X^2] + \frac{\beta \gamma \mu_x^2}{\gamma^2 - \eta^2} \right\} (1 - e^{-\eta h})^2 \frac{e^{-\eta(k-1)h}}{\eta^2} \\ &\quad - \rho \mu_c \mu_x^2 \frac{\beta \eta}{\gamma^2 (\gamma^2 - \eta^2)} (1 - e^{-\gamma h})^2 (e^{-\gamma(k-1)h}) \end{aligned} \quad (6-6)$$

$$E[X^2] = 2E^2[X], \quad \mu_c = 1 + \frac{\beta}{\gamma}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\eta} \quad (6-7)$$

Οι εξισώσεις (5.4 - 5.6) συνιστούν το γενικό μαθηματικό μοντέλο Bartlett-Lewis, ενώ οι υπόλοιπες εκφράζουν απλοποιητικές παραδοχές για την διευκόλυνση της μαθηματικής εξεργασίας του μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, για το μέγεθος της έντασης των παλμών, X , υιοθετείται η εκθετική κατανομή και συνεπώς θα ισχύει:

$$E[X^2] = 2E^2[X] \quad (6-8)$$

Ο αριθμός παλμών ανά καταιγίδα, C , με $C \geq 1$, αποδεικνύεται πως ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή, με μέση τιμή:

$$\mu_c = E[C] = 1 + \frac{\beta}{\gamma} \quad (6-9)$$

λόγω του ότι ο χρόνος άφιξης του πρώτου παλμού κάθε καταιγίδας ταυτίζεται πάντα με τον χρόνο άφιξης της καταιγίδας. Όπως φαίνεται το μέγεθος μ_c είναι εξαρτημένο από τις παραμέτρους β και γ και άρα δεν αποτελεί ανεξάρτητη παράμετρο επίλυσης του μοντέλου. Τέλος, η αδιάστατη παράμετρος, ρ , εισάγεται για την απλούστευση της μαθηματικής διατύπωσης του μοντέλου.

Οι παραπάνω παραδοχές έχουν ως αποτέλεσμα τη μείωση του αριθμού των ανεξάρτητων άγνωστων παραμέτρων σε πέντε, που είναι και ο ελάχιστος δυνατός δεδομένου ότι από τη διατύπωση του θεωρητικού μοντέλου εισάγονται πέντε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τις αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής τους.

Ο πίνακας που ακολουθεί (Πίνακας 6.1) παρουσιάζει συνοπτικά τα βασικά μαθηματικά μεγέθη του μοντέλου Bartlett-Lewis, όπως εμφανίζονται στις μαθηματικές εξισώσεις (5.4 – 5.9).

ΜΕΓΕΘΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΜΕΓΕΘΩΝ
λ	h^{-1}	Ανεξάρτητες παράμετροι του μοντέλου
β	h^{-1}	
γ	h^{-1}	
η	h^{-1}	
$\mu_x = E[X]$	mm/h	
$E[X^2]$	mm ²	-
$\mu_c = E[C]$	N ^o	Αναμενόμενη τιμή αριθμού παλμών ανά καταιγίδα
$\rho = \lambda / \eta$	-	Μαθηματική βοηθητική σταθερά
h	h	Χρονική κλίμακα συνάθροισης διακριτής διαδικασίας
k	N ^o	Υστέρηση
Y_i	mm	Ύψος βροχής
$E[Y_i^{(h)}]$	mm	Μέση τιμή υψών βροχής διακριτής διαδικασίας
$Var[Y_i^{(h)}]$	mm ²	Διασπορά υψών βροχής διακριτής διαδικασίας
$Cov[Y_i^{(h)}, Y_{i+k}^{(h)}]$	-	Αυτοσυνδιασπορά υψών βροχής διακριτής διαδικασίας

Πίνακας 6.1: Χαρακτηριστικά μεγέθη, ανεξάρτητες παράμετροι και μεταβλητές του μοντέλου BLRPM

Εκτός από τις στατιστικές ιδιότητες (ροπές 1^{ης} και 2^{ης} τάξης) της ανέλιξης ύψους βροχής, $Y(t)$, οι Rodriguez-Iturbe et al. μελέτησαν την χρονική κατανομή των βροχερών γεγονότων και πιο συγκεκριμένα τις ιδιότητες των στεγνών περιόδων (μηδενικό ύψος βροχής), όπως αυτές προκύπτουν από το μοντέλο, σε συνεχή χρόνο. Η ανάλυση στηρίχτηκε στο μέγεθος μ_τ , που αντιστοιχεί στη μέση αναμενόμενη διάρκεια μιας καταιγίδας. Όπως θα δούμε αναλυτικότερα και στην επόμενη ενότητα, το εν λόγω μέγεθος είναι γνωστό και ως μέση

διάρκεια “ενεργούς” καταιγίδας και, για μικρές τιμές των μεγεθών $\kappa = \beta/\eta$ και $\varphi = \gamma/\eta$, υπολογίζεται προσεγγιστικά από τη σχέση (Rodriguez-Iturbe et al., 1987b, σελ. 9653):

$$\mu_r \cong (\varphi\eta)^{-1} \left\{ 1 + \varphi(\kappa + \varphi) - \frac{1}{4} \varphi(\kappa + \varphi)(\kappa + 4\varphi) + \frac{1}{72} \varphi(\kappa + \varphi)(4\kappa^2 + 27\kappa\varphi + 72\varphi^2) \right\} \quad (6-10)$$

Η πιθανότητα μηδενικού ύψους βροχής, για το χρονικό διάστημα $[0, h]$, σε **συνεχή χρόνο** δίνεται από τη σχέση (Rodriguez-Iturbe et al., 1987b, σελ. 9653):

$$\omega_h = \exp \left\{ -\lambda(h + \mu_r) + \lambda G_p^*(0,0) \left[\frac{\gamma + \beta e^{-(\beta+\gamma)h}}{\beta + \gamma} \right] \right\} \quad (6-11)$$

όπου:

$$G_p^*(0,0) \cong \frac{1}{\eta\varphi} \left\{ 1 - \kappa - \varphi + \frac{3}{2} \kappa\varphi + \varphi^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \right\} \quad (6-12)$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η Εξίσωση 5-12 αποτελεί ιδιότητα της συνεχούς ανέλιξης και συνεπώς δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσομοιώσει τη διακριτή διαδικασία. Το γεγονός αυτό καθιστά αδύνατη τη χρήση του μεγέθους ω_h στην διαδικασία ανεύρεσης των παραμέτρων του μοντέλου.

Για την προσαρμογή του μοντέλου στα χαρακτηριστικά της υπό εξέταση βροχόπτωσης απαιτείται η εύρεση των πέντε ανεξάρτητων μεταβλητών επίλυσης του ($\lambda, \eta, \gamma, \beta, E[X]$). Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της επίλυσης ενός μαθηματικού συστήματος αποτελούμενο από τις μαθηματικές εξισώσεις του μοντέλου (Εξισώσεις 5.4 – 5.6) που δίνουν τη μέση τιμή, τη διασπορά και την αυτοσυνδιασπορά κ -τάξης, της διακριτής ανέλιξης, $Y_i^{(h)}$. Ωστόσο, για δεδομένη στάθμη συνάθροισης h και υστέρηση k , των υπό εξέταση μετρήσεων, $Y_i^{(h)}$, το σύστημα εξισώσεων είναι αόριστο, με βαθμό ελευθερίας 2, αφού οι διαθέσιμες εξισώσεις είναι τρεις και οι μεταβλητές επίλυσης πέντε. Για να αποκτήσει το μαθηματικό σύστημα χαρακτήρα ορισμένου απαιτείται η προσθήκη δυο ακόμα εξισώσεων, από διαφορετικές χρονικές κλίμακες h . Οι μεθοδολογίες καθώς και οι συνδυασμοί των στατιστικών μεγεθών που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί για την εύρεση των παραμέτρων του μοντέλου Bartlett-Lewis παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον και καταγράφονται αναλυτικά σε επόμενη ενότητα (Ενότητα 5.4).

6.3.1 Το τυχαίο μοντέλο Bartlett-Lewis (RBLRPM)

Οι Rodriguez-Iturbe et al. διαπίστωσαν, βασιζόμενοι σε ωριαία βροχομετρικά δεδομένα από το σταθμό του Denver (Colorado), πως τα μοντέλα NSRPM και BLRPM αναπαράγουν με μεγάλη επιτυχία τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά των ιστορικών χρονοσειρών (μέση τιμή, διασπορά, συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξης), σε όλες τις χρονικές κλίμακες συνάθροισης, για ένα και μόνο σύνολο τιμών των παραμέτρων τους. Ωστόσο, παρατηρήθηκε η αδυναμία των δυο μοντέλων να προσομοιώσουν τις χρονικές ιδιότητες και κατανομές της βροχόπτωσης. Συγκεκριμένα το ποσοστό στεγνών περιόδων, και συνεπώς η πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης, πρόεκυψαν υπερεκτιμημένες από την ωριαία έως και την ημερήσια χρονική κλίμακα (Rodriguez-Iturbe et al., 1987b, σελ.9652).

Για να αντιμετωπίσουν το παραπάνω πρόβλημα, οι Rodriguez-Iturbe et al. εισήγαγαν περισσότερους βαθμούς ελευθερίας στο μοντέλο τους, επιτρέποντας στη παράμετρο η , που καθορίζει τις διάρκειες των ορθογωνικών παλμών, να μεταβάλλεται τυχαία από καταιγίδα σε καταιγίδα. Με την τροποποίηση αυτή το μοντέλο αποκτά την ικανότητα να παράγει καταιγίδες αποτελούμενες από παλμούς των οποίων οι διάρκειες προέρχονται από πληθυσμούς με διαφορετικά στατιστικά χαρακτηριστικά.

Συνεπώς, στο τυχαίο μοντέλο Bartlett-Lewis, η παράμετρος της εκθετικής κατανομής, $\eta^{(i)}$, αποκτά χαρακτήρα ανεξάρτητης τυχαίας μεταβλητής και η προτεινόμενη συνάρτηση κατανομής της είναι η διπαραμετρική γάμα με παράμετρο σχήματος a και παράμετρο κλίμακας ν , έτσι ώστε (Rodriguez-Iturbe et al., 1988, σελ.284):

$$E[\eta] = \frac{\alpha}{\nu}, \quad Var[\eta] = \frac{\alpha}{\nu^2}, \quad a > 1 \quad (6-13)$$

Προκύπτει δε ότι η αναμενόμενη διάρκεια των παλμών, $1 / \eta$, θα είναι:

$$E\left[\frac{1}{\eta}\right] = \frac{\nu}{a-1} \quad (6-14)$$

Η επιλογή της κατανομής γάμα για την παράμετρο $\eta^{(i)}$, στηρίζεται στην ευελιξία που έχει η συγκεκριμένη κατανομή στο να προσεγγίζει ικανοποιητικά ένα μεγάλο πλήθος άλλων κατανομών, ανάλογα με την τιμή που θα λάβει η παράμετρος σχήματός της, a . Ο περιορισμός, που υπαγορεύει παράμετρο σχήματος πάντα μεγαλύτερο της μονάδος, $a > 1$, τίθεται για να εξασφαλίσει πεπερασμένες τιμές διαρκειών στους παλμούς.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η κατανομή γάμα είναι μια από τις πιο χρήσιμες και ευρέως διαδεδομένες κατανομές στον τομέα της υδρολογίας. Το γεγονός ότι είναι θετικά ασύμμετρη και ότι ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής, την καθιστούν κατάλληλη για τη περιγραφή πολλών υδρολογικών μεταβλητών, όπως οι μηνιαίες και ετήσιες παροχές και βροχές και οι εντάσεις των βροχερών επεισοδίων. Για παράμετρο σχήματος $\alpha = 1$, η κατανομή γάμα ταυτίζεται με την εκθετική. Για $\alpha > 1$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής εμφανίζει κωδωνοειδές σχήμα, ενώ για $\alpha < 1$ το σχήμα της κατανομής λαμβάνει τη μορφή ανεστραμμένου J . Αποδεικνύεται, δε, πως για μεγάλες τιμές της παραμέτρου σχήματος α (πάνω από 15-30) η κατανομή γάμα πλησιάζει την κανονική κατανομή, με τον συντελεστή ασυμμετρίας της να τείνει στο μηδέν (Κουτσογιάννης, 1996, σελ. 143).

Η μετατροπή της παραμέτρου η σε τυχαία μεταβλητή δεν προκαλεί μεταβολές μόνο στις διάρκειες των παλμών ανά καταιγίδα αλλά και στον τρόπο που αυτοί παράγονται εντός της καταιγίδας. Οι Rodriguez-Iturbe et al. συσχέτισαν την παράμετρο η με τις παραμέτρους β και γ , που συνδέονται με τη χρονική απόσταση μεταξύ των σημείων άφιξης των παλμών και το χρονικό ορίζοντα παραγωγής παλμών αντίστοιχα, εισάγοντας τις αδιαστατοποιημένες παραμέτρους:

$$\kappa = \frac{\beta_i}{\eta_i}, \quad \varphi = \frac{\gamma_i}{\eta_i} \quad (6-15)$$

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι παράμετροι των δύο εκθετικών κατανομών, β_i και γ_i να μην διατηρούνται σταθερές αλλά να μεταβάλλονται ανά καταιγίδα, i , εξαρτώμενες από την εκάστοτε τιμή της παραμέτρου η_i . Συνεπώς, τα μεγέθη $\beta = \kappa \times \eta$ και $\gamma = \varphi \times \eta$ θα ακολουθούν και αυτά την κατανομή γάμα με κοινή παράμετρο σχήματος α και παραμέτρους κλίμακας ν / κ και ν / φ αντίστοιχα. Οι αναμενόμενες τιμές των δυο μεγεθών, για όλες τις καταιγίδες, θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$E[\beta] = \frac{\alpha \kappa}{\nu}, \quad E[\gamma] = \frac{\alpha \varphi}{\nu} \quad (6-16)$$

Οι δυο μελετητές θέλησαν να προσδώσουν φυσικό νόημα στην παραπάνω τροποποίηση κάνοντας την υπόθεση ότι μεγάλης διάρκειας καταιγίδες αποτελούνται από μεγάλης διάρκειας παλμούς, των οποίων οι χρονικές αφητηρίες απέχουν περισσότερο (Rodriguez-Iturbe et al., 1988, σελ. 285).

Η παραπάνω παραδοχές προκαλούν αλλαγές τόσο στη δομή του μοντέλου όσο και στις αναλυτικές του εξισώσεις καθώς ως ανεξάρτητες παράμετροι επίλυσης επιλέγονται πλέον οι παράμετροι κ και φ , αντικαθιστώντας τις παραμέτρους β και γ .

Όσον αφορά τα υπόλοιπα μεγέθη του μοντέλου, υποθέτουμε πως η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το εντατικό μέγεθος (ύψος, ένταση), X , κάθε παλμού ακολουθεί την εκθετική συνάρτηση κατανομής, με μέση τιμή μ_X , ενώ, για τη τυχαία μεταβλητή, C , που περιγράφει τον αριθμό παλμών ανά καταιγίδα υιοθετείται η γεωμετρική κατανομή με μέση τιμή :

$$\mu_C = 1 + \frac{\kappa}{\varphi} \quad (6-17)$$

Συνεπώς, η παράμετρος μ_C είναι εξαρτημένο μέγεθος και αποτελεί συνάρτηση των αδιάστατων μεγεθών κ και φ .

Οι παραπάνω παραδοχές έχουν σαν αποτέλεσμα τον περιορισμό του πλήθους των ανεξάρτητων μεταβλητών επίλυσης στο ελάχιστο δυνατό. Οι έξι ανεξάρτητες μεταβλητές επίλυσης του μοντέλου RBLRPM είναι οι εξής:

$$\lambda, \alpha, \nu, \kappa, \varphi, \mu_X$$

Το μοντέλο RBLRPM περιγράφεται μαθηματικά από ένα σύνολο αναλυτικών εξισώσεων που συνδέουν τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά της διακριτής διαδικασίας με τις παραπάνω παραμέτρους. Οι εξισώσεις που δίνουν τις ροπές 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της διακριτής ανέλιξης υψών βροχής, $Y_i^{(h)}$, για μια δεδομένη χρονική κλίμακα h και δεδομένη υστέρηση k , διαμορφώνονται ως εξής (Rodriguez-Iturbe et al., 1988, σελ. 285):

$$E[Y_i^{(h)}] = \lambda h \mu_X \nu \frac{1 + (\kappa / \varphi)}{\alpha - 1} \quad (6-18)$$

$$\begin{aligned} Var[Y_i^{(h)}] = & 2A_1 \left\{ (a-3)h\nu^{2-\alpha} - \nu^{3-\alpha} + (\nu+h)^{3-a} \right\} \\ & - 2A_2 \left\{ \varphi(\alpha-3)h\nu^{2-\alpha} - \nu^{3-\alpha} + (\nu+\varphi h)^{3-a} \right\} \end{aligned} \quad (6-19)$$

$$\begin{aligned} Cov[Y_i^{(h)}, Y_{i+k}^{(h)}] = & A_1 \left\{ [\nu + (k+1)h]^{3-\alpha} - 2(\nu+kh)^{3-a} + [\nu + (k-1)h]^{3-a} \right\} \\ & - A_2 \left\{ [\nu + (k+1)\varphi h]^{3-\alpha} - 2(\nu+hk\varphi)^{3-a} + [\nu + (k-1)h\varphi]^{3-a} \right\} \end{aligned} \quad (6-20)$$

όπου

$$A_1 = \frac{\lambda \mu_c v^\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)} \left[E(X^2) + \frac{\kappa \varphi \mu_x^2}{\varphi^2 - 1} \right] \quad (6-21)$$

$$A_2 = \frac{\lambda \mu_c \kappa \mu_x^2 v^\alpha}{\varphi^2 (\varphi^2 - 1) (\alpha-1) (\alpha-2) (\alpha-3)} \quad (6-22)$$

και

$$\kappa = \frac{\beta_i}{\eta_i}, \quad \varphi = \frac{\gamma_i}{\eta_i}, \quad \mu_c = E[C] = 1 + \frac{\kappa}{\varphi}, \quad E[X^2] = 2E[X] = 2\mu_x^2 \quad (6-23)$$

Επιπλέον, η πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης στο χρονικό διάστημα h , θα δίνεται από τη σχέση:

$$P(Y_i^{(h)} = 0) = \exp \left\{ -\lambda h - \lambda \mu_\tau + \lambda G_p^*(0,0) \left[\frac{\varphi + \kappa \left(\frac{v}{v + (\kappa + \varphi)h} \right)^{\alpha-1}}{\varphi + \kappa} \right] \right\} \quad (6-24)$$

όπου τα μεγέθη μ_τ και $G_p^*(0,0)$ υπολογίζονται προσεγγίσιμα (για μικρές τιμές των κ και φ) από τις σχέσεις:

$$\mu_\tau \cong E \left[\frac{1}{\eta} \right] \frac{1}{\varphi} \left\{ 1 + \varphi(\kappa + \varphi) - \frac{1}{4} \varphi(\kappa + \varphi)(\kappa + 4\varphi) + \frac{1}{72} \varphi(\kappa + \varphi)(4\kappa^2 + 27\kappa\varphi + 72\varphi^2) \right\} \quad (6-25)$$

$$G_p^*(0,0) \cong E \left[\frac{1}{\eta} \right] \frac{1}{\varphi} \left\{ 1 - \kappa - \varphi + \frac{3}{2} \kappa\varphi + \varphi^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \right\} \quad (6-26)$$

Το μέγεθος μ_τ ονομάζεται μέση διάρκεια “ενεργούς” καταιγίδας και αποτελεί προσέγγιση, σε διακριτό χρόνο, της μέσης αναμενόμενης διάρκειας για την οποία κάποια η καταιγίδα είναι ενεργή, δηλαδή παράγει ύψη βροχής. Από την άλλη, ο όρος μέση διάρκεια “ζωντανής” καταιγίδας ορίζει τον θεωρητικό μέσο χρόνο μέσα στον οποίο παράγονται παλμοί σε κάθε καταιγίδα. Η διαφορά στα δυο μεγέθη έγκειται στο ότι το χρονικό σημείο τερματισμού των τελευταίων παλμών μπορεί να υπερβαίνει το θεωρητικά ορισμένο τέλος της καταιγίδας, όπως αυτό ορίζεται από το πηλίκο $1 / \gamma_i$.

Εκτενής έρευνα πάνω στις χρονικές ιδιότητες των βροχερών γεγονότων και των στεγνών διαστημάτων που μεσολαβούν μεταξύ αυτών, έχει γίνει από τους Onof και Wheater. Οι δύο ερευνητές, μελετώντας τις θεωρητικές κατανομές των χρονικών μεταβλητών της συνεχούς και διακριτής διαδικασίας του μοντέλου, κατέληξαν σε ακριβείς αναλυτικές εξισώσεις τόσο

για τη κατανομή των διαστημάτων που μεσολαβούν μεταξύ καταιγίδων, όσο και για τον αριθμό και τις διάρκειες των βροχερών γεγονότων (Onof and Wheater, 1993; Onof et al., 1994c). Συγκεκριμένα, για διακριτή χρονική κλίμακα h , η πιθανότητα μια στεγνή περίοδος να έχει μήκος μικρότερο του $k \times h$, θα δίνεται από:

$$P\{N < k\} = \frac{P(Y_i^{(kh)} = 0) - P(Y_i^{(kh+h)} = 0)}{P(Y_i^{(h)} = 0) - P(Y_i^{(2h)} = 0)} \quad (6-27)$$

όπου $P(Y_i^{(h)} = 0)$ η πιθανότητα απουσίας βροχοπτώσης στο χρονικό διάστημα h (Εξίσωση 5-24). Προκύπτει ότι η μέση χρονική απόσταση μεταξύ βροχερών γεγονότων στην χρονική κλίμακα h θα δίνεται από:

$$m_d = \frac{P(Y_i^{(h)} = 0)}{P(Y_i^{(h)} = 0) - P(Y_i^{(2h)} = 0)} \times h \quad (6-28)$$

Η διασπορά του ίδιου μεγέθους θα δίνεται από:

$$s_d = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(Y_i^{(kh)} = 0)}{P(Y_i^{(h)} = 0) - P(Y_i^{(2h)} = 0)} - \frac{P(Y_i^{(h)} = 0)}{P(Y_i^{(h)} = 0) - P(Y_i^{(2h)} = 0)} - \left[\frac{P(Y_i^{(h)} = 0)}{P(Y_i^{(h)} = 0) - P(Y_i^{(2h)} = 0)} \right]^2 \quad (6-29)$$

)

Με χρήση των δύο μεγεθών προκύπτει και το μέσο πλήθος βροχερών γεγονότων ανά μήνα ως:

$$m_n = \frac{P(Y_i^{(h)} = 0) \times 24 \times NM}{m_d \times h} \quad (6-30)$$

όπου NM οι ημέρες του μήνα. Η μέση διάρκεια των βροχερών γεγονότων θα δίνεται από τη σχέση:

$$m_w = \frac{1 - P(Y_i^{(h)} = 0)}{P(Y_i^{(h)} = 0)} \times m_d \quad (6-31)$$

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει συγκεντρωτικά τα χαρακτηριστικά μεγέθη του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis για μια καταιγίδα i .

ΜΕΓΕΘΟΣ	ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	ΕΡΜΗΝΕΙΑ
λ	N°/h	Μέση τιμή αριθμού αφίξεων καταιγίδων ανά ώρα
$1/\lambda$	h	Μέση χρονική απόσταση άφιξης καταιγίδων
β_i	N°/h	Μέση τιμή αριθμού αφίξεων παλμών ανά ώρα
$1/\beta_i$	h	Μέση χρονική απόσταση άφιξης παλμών
$1/\gamma_i$	h	Μέση διάρκεια «ζωντανής» καταιγίδας
$1/\eta_i$	h	Μέση διάρκεια παλμού
$\mu_x = 1/\lambda_x$	mm/h	Μέση ένταση παλμών
μ_τ	h	Μέση διάρκεια “ενεργούς” καταιγίδας
$\mu_C = 1 + \frac{\beta_i}{\gamma_i} = 1 + \frac{\kappa}{\varphi}$	N°	Μέση τιμή αριθμού παλμών ανά καταιγίδα
$\sum Y^{storm} = \left(1 + \frac{\beta_i}{\gamma_i}\right) \left(\frac{1}{\eta_i}\right) (\mu_x)$	mm	Μέσο ύψος βροχόπτωσης, ΣΥ, ανά καταιγίδα
$\frac{\sum Y^{storm}}{\mu_\tau}$	mm/h	Μέση ένταση καταιγίδας

Πίνακας 6.2: Χαρακτηριστικά μεγέθη του μοντέλου RBLRPM για μια δεδομένη καταιγίδα i

Όπως και στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου Bartlett-Lewis, έτσι και εδώ, η εύρεση των παραμέτρων του μοντέλου γίνεται μέσω της επίλυσης ενός μαθηματικού συστήματος που

περιλαμβάνει τις αναλυτικές εξισώσεις που αποδίδουν τα βασικά στατιστικά μεγέθη της διακριτής ανάλυσης, $Y_i^{(h)}$. Εκτός από τη μέση τιμή, $E(Y_i^{(h)})$, την διασπορά, $\text{Var}(Y_i^{(h)})$, και την αυτοσυνδιασπορά κ-τάξης, $\text{Cov}(Y_i^{(h)}, Y_i^{(h+k)})$, στο μαθηματικό μοντέλο έχει προστεθεί μια ακόμα εξίσωση που δίνει τη πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης για χρονικό διάστημα h , $P(Y_i^{(h)}=0)$. Ωστόσο, για μια δεδομένη στάθμη συνάθροισης h , το μαθηματικό σύστημα είναι αόριστο αφού οι διαθέσιμες εξισώσεις είναι τέσσερις και οι ανεξάρτητες παράμετροι επίλυσης έξι. Το σύστημα αποκτά χαρακτήρα ορισμένου με χρήση στατιστικών μεγεθών από άλλες χρονικές κλίμακες. Αναλυτική βιβλιογραφική ανασκόπηση των τεχνικών που έχουν κατά καιρούς ακολουθηθεί για την εύρεση των παραμέτρων του μοντέλου γίνεται στην Ενότητα (6.3.4).

Για λόγους πληρότητας της εργασίας, αξίζει να αναφέρουμε πως αντίστοιχες τροποποιήσεις με στόχο την περαιτέρω βελτίωση του μοντέλου Neyman-Scott έχουν γίνει από τους Entekhabi et al. (1989).

6.3.2 Το τυχαίο μοντέλο γάμμα Bartlett-Lewis (RPBLGM)

Εκτεταμένη έρευνα πάνω στα μοντέλα συστάδων ορθογωνικών παλμών, με σκοπό την περαιτέρω βελτίωσή τους, έχει γίνει από τους Onof και Wheeler. Οι δυο μελετητές εξέτασαν την καταλληλότητα τόσο του κλασικού, όσο και του τυχαίου μοντέλου Bartlett - Lewis (Onof και Wheeler et al., 1993; 1994a) για τη προσομοίωση της βροχής της Αγγλίας, βασιζόμενοι στην ωριαία χρονοσειρά του σταθμού Elmdon (Birmingham). Όπως αποδείχτηκε, για όλους τους μήνες το μοντέλο RBLRPM προσομοιώνει ικανοποιητικά τη μέση τιμή, τη διασπορά, τη δομή αυτοσυσχέτισης της βροχής καθώς και την πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης, από την ωριαία έως και την ημερήσια χρονική κλίμακα. Ωστόσο, για κάποιους μήνες οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης, για τις χρονικές κλίμακες των 12 και 24 ωρών, προέκυψαν υπερεκτιμημένοι συγκρινόμενοι με αυτούς των ιστορικών βροχομετρικών δεδομένων. Παράλληλα, παρατήρησαν την μεγάλη απόκλιση που παρουσιάζει η κατανομή ακραίων τιμών των συνθετικών υψών βροχής από αυτή των ιστορικών, για μεγάλες περιόδους επαναφοράς (Onof and Wheeler, 1993, σελ.81; 1994b, σελ. 178).

Για την επίλυση του προβλήματος των ακραίων τιμών οι Onof και Wheeler προτείνουν τη χρήση κάποιας άλλης συνάρτησης κατανομής, εκτός της εκθετικής, για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} , που περιγράφει το εντατικό μέγεθος των ορθογωνικών παλμών. Ως η πλέον κατάλληλη κρίνεται η διπαραμετρική κατανομή γάμμα (Onof and Wheeler, 1994b, σελ. 188).

Η υιοθέτηση της γάμα κατανομής με παράμετρο σχήματος, p , και παράμετρο κλίμακας, δ , έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του αριθμού των ανεξάρτητων παραμέτρων επίλυσης του μοντέλου, από έξι σε εφτά:

$$\lambda, \alpha, \nu, \kappa, \varphi, p, \delta$$

Όπως είναι αναμενόμενο, η αλλαγή αυτή διατηρεί αμετάβλητες τις χρονικές ιδιότητες του μοντέλου Bartlett-Lewis, επηρεάζοντας μόνο την ένταση των παλμών και άρα το ύψος βροχής. Οι αναλυτικές μαθηματικές σχέσεις του μοντέλου RPBLGM, που δίνουν τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης, καθώς και την πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης, $P(Y_i^{(h)} = 0)$, της διακριτής ανέλιξης, $Y_i^{(h)}$, είναι όμοιες με αυτές του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis, με τις ισότητες A_1 και A_2 να λαμβάνουν την μορφή (Onof and Wheater 1994b, σελ. 189):

$$A_1 = \frac{\lambda \mu_c \nu^\alpha}{\delta^2 (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)} \left[p(p+1) + \frac{\kappa \varphi p^2}{\varphi^2 - 1} \right] \quad (6-32)$$

$$A_2 = \frac{\lambda \mu_c \kappa \mu_x^2 \nu^\alpha}{\varphi^2 (\varphi^2 - 1)(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)} \quad (6-33)$$

$$\kappa = \frac{\beta_i}{\eta_i}, \quad \varphi = \frac{\gamma_i}{\eta_i}, \quad \mu_c = E[C] = 1 + \frac{\kappa}{\varphi}, \quad \mu_x = \frac{p}{\delta}, \quad \sigma_x^2 = \frac{p}{\delta^2} \quad (6-34)$$

Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του μοντέλου RPBLGM στα βροχομετρικά δεδομένα του Elmdon, επιβεβαίωσαν την ανάγκη αντικατάστασης της εκθετικής από τη γάμα κατανομή για την περιγραφή της έντασης των ορθογωνικών παλμών. Το μοντέλο RPBLGM αναπαράγει με μεγάλη επιτυχία τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης, την πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης, αλλά και την κατανομή ακραίων τιμών των ωριαίων και ημερήσιων βροχομετρικών δεδομένων.

6.3.3 Άλλες εκδοχές μοντέλων Bartlett-Lewis

Για την πιστότερη προσομοίωση του φαινομένου της βροχόπτωσης και της τυχαιότητας που αυτό παρουσιάζει, οι Onof and Wheater (1994b) τροποποίησαν το τυχαίο μοντέλο Bartlett-Lewis, εφαρμόζοντας μικρές τυχαίες διαταραχές (jitter process) στο εντατικό μέγεθος των παλμών. Έτσι το ορθογωνικό σχήμα των παλμών παραμορφώνεται, στη κλίμακα του χρόνου, σύμφωνα με μια Gaussian στοχαστική διαδικασία. Οι διαταραχές εφαρμόστηκαν τόσο στη συνεχή ανέλιξη υψών βροχής (μοντέλο RPBLJM1), όσο και σε κάθε παλμό ξεχωριστά (μοντέλο RPBLJM2) και όπως αποδείχτηκε οδηγούν στη βελτίωση της συμπεριφοράς του

μοντέλου όσον αφορά την αναπαραγωγή των δομών αυτοσυσχέτισης χρονικών κλιμάκων μεγαλύτερων των 12hr.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τροποποιημένες εκδοχές του μοντέλου Bartlett-Lewis για την πιστότερη προσομοίωση της βροχής σε χρονικές κλίμακες μικρότερες της ωριαίας. Προς αυτή την κατεύθυνση, οι Cowpertwait et al. (2007) αντικατέστησαν την σταθερή, ορθογωνικού σχήματος, ένταση των παλμών με πολλούς σημειακούς, που εμφανίζονται, σε επίπεδο παλμού, μέσω μιας επιπλέον ανέλιξης Poisson, παραμέτρου ξ . Συνεπώς, το νέο μοντέλο, υπό την ονομασία Bartlett-Lewis Instantaneous Pulse model (BLIPM), ενσωματώνει τρεις ανελιξεις Poisson, που περιγράφουν αντίστοιχα, τους χρόνους άφιξης των καταιγίδων, τους χρόνους άφιξης των παλμών και τους χρόνους άφιξης των εντατικών μεγεθών εντός των παλμών. Από τη διατύπωση του μοντέλου προκύπτει πως τα εντατικά μεγέθη, X_{ij} , των σημειακών παλμών είναι ανεξάρτητα σε επίπεδο καταιγίδας αλλά εξαρτημένα σε επίπεδο παλμού. Αυτή η τροποποίηση επιτρέπει στο μοντέλο να προσομοιώνει τη βροχόπτωση σε χρονικές κλίμακες μικρότερες της ωριαίας, στις οποίες η “χονδροειδής” υπόθεση ορθογωνικών παλμών δεν μπορεί να αποδώσει τις έντονες διακυμάνσεις του φαινομένου. Ο Kaczmarzka (2011, υπό δημοσίευση) εξέλιξε περαιτέρω το μοντέλο BLIPM, μετατρέποντας τη παράμετρο, η , που περιγράφει τη διάρκεια των παλμών σε τυχαία μεταβλητή, έτσι ώστε το πηλίκο ξ / η να παραμένει σταθερό.

Ωστόσο, αξίζει να αναφέρουμε πως παρά το ότι τα παραπάνω μοντέλα προσομοιώνουν με μεγάλη επιτυχία τα χαρακτηριστικά της βροχής σε μικρές χρονικές κλίμακες, η διαδικασία βαθμονόμησής τους χαρακτηρίζεται από μεγάλες δυσκολίες καθώς εισάγεται, από τον ορισμό τους, μεγάλο πλήθος παραμέτρων και άρα μεταβλητών επίλυσης.

Στις παραλλαγές του μοντέλου Bartlett – Lewis που παρουσιάστηκαν νωρίτερα η ένταση της καταιγίδας θεωρείται ανεξάρτητη από τη διάρκειά της. Ο Κουτσογιάννης επισημαίνει πως αυτό αποτελεί μια «φυσικού» χαρακτήρα αστοχία του μοντέλου Bartlett – Lewis και έχει διερευνήσει την τροποποίησή του, έτσι ώστε η μέση διάρκεια της καταιγίδας να συσχετίζεται είτε θετικά είτε αρνητικά με τη μέση έντασή της (Derzekos, 2005).

Στο τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο Bartlett-Lewis (Modified / Quadratic Random Bartlett – Lewis Model), ο Κουτσογιάννης προτείνει τη συσχέτιση της παραμέτρου β_i , που καθορίζει τους χρόνους άφιξης των παλμών για μια καταιγίδα i , με τη παράμετρο η_i , που καθορίζει τη διάρκεια των παλμών, σύμφωνα με την παρακάτω μη γραμμική εξίσωση:

$$\beta_i = \kappa_1 \eta_i + \kappa_2 \eta_i^2 \quad (6-35)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση (5.12) στη μεταβλητή επίλυσης $\kappa = \beta_i / \gamma_i$, λαμβάνομαι το μέγεθος κ_i :

$$\kappa_i = \kappa_1 + \kappa_2 \eta_i \quad (6-36)$$

Από την σχέση 5.36 συμπεραίνουμε πως η μεταβλητή επίλυσης κ παύει να είναι σταθερή για όλες τις καταιγίδες και μεταβάλλεται συναρτήσει των τιμών των παραμέτρων κ_1 και κ_2 . Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.35) και (5.36) στην εξίσωση που δίνει τη μέση ένταση της “ενεργούς” καταιγίδας (Πίνακας 6.2), αλλά λαμβάνοντας (για λόγους απλοποίησης) ως διάρκεια αυτή της “ζωντανής” καταιγίδας ($1/\gamma_i$), προκύπτει η εξίσωση:

$$\Sigma Y^{storm} / \mu_\tau \cong \Sigma Y^{storm} / (1/\gamma_i) = \mu_x(\varphi + \kappa_i) = \mu_x(\varphi + \kappa_1 + \kappa_2 \eta_i) \quad (6-37)$$

Η εξίσωση (5.12) δείχνει πως, για δεδομένη μέση ένταση παλμών μ_x , η αύξηση της μέσης διάρκειας των παλμών, $1/\eta_i$, προκαλεί από τη μια αύξηση στη μέση διάρκεια της ζωντανής καταιγίδας και από την άλλη, μείωση στη μέση ένταση. Έτσι για $\kappa_2 > 0$ υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ της διάρκειας και της έντασης της καταιγίδας, για $\kappa_2 < 0$ θετική συσχέτιση, ενώ για $\kappa_2 = 0$ το τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis ταυτίζεται με το τυχαίο μοντέλο.

Το μοντέλο MRBLM έχει επτά ανεξάρτητες μεταβλητές επίλυσης, εν αντιθέσει με το τυχαίο μοντέλο Bartlett-Lewis που ο αριθμός των μεταβλητών επίλυσης ισούται με έξι. Η διαφορά έγκειται στην αντικατάσταση της μεταβλητής, κ , από τις μεταβλητές επίλυσης κ_1 και κ_2 . Οι επτά μεταβλητές επίλυσης του μοντέλου είναι:

$$\varphi, \nu, \alpha, \lambda, \mu_x, \kappa_1, \kappa_2$$

Η διατύπωση του μοντέλου MRBLM περιλαμβάνει και αναλυτικές εξισώσεις που αποδίδουν τη μέση τιμή, διασπορά, αυτοσυνδιασπορά κ-τάξης καθώς και την πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης της διακριτής ανέλιξης, $Y_i^{(h)}$, και παρουσιάζονται αναλυτικά από τον Δερζέκο (2005).

Η αξιολόγηση του τροποποιημένου μοντέλου Bartlett-Lewis στηρίχθηκε στα βροχομετρικά δεδομένα του Denver και της Αθήνας. Παρά το γεγονός ότι τα αναλυτικά στατιστικά μεγέθη του μοντέλου προσεγγίζουν τα ιστορικά και για τις δυο περιπτώσεις, οι αρνητικές τιμές που

λαμβάνει η παράμετρος κ_2 δημιουργεί σοβαρά προβλήματα στη προσομοίωση καθώς παράγεται μεγάλος αριθμός αρνητικών παραμέτρων β_i , που θα πρέπει να απορριφτούν.

6.3.4 Βιβλιογραφικά συμπεράσματα από την εφαρμογή του μοντέλου

Κατά τις τελευταίες δεκαετίες, τα στοχαστικά μοντέλα συστάδων ορθογωνικών παλμών Bartlett-Lewis και Neyman-Scott έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως, από πλήθος ερευνητών, για τη προσομοίωση της βροχής σε χρονικές κλίμακες που κυμαίνονται από τα 5 λεπτά έως και τις 48 ώρες (Rodriguez-Iturbe et al., 1987a, 1987b, 1988; Onof and Wheater, 1993, 1994a, 1994b; Onof et al., 1994; Bo et al., 1994; Velghe et al., 1994; Khaliq and Cunnane, 1996; Verhoest et al., 1997; Smithers et al., 2002; Islam et al., 1990; Cowpertwait et al., 2007). Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται βασικά συμπεράσματα και στοιχεία, όπως αυτά προέκυψαν από την εφαρμογή του μοντέλου Bartlett-Lewis για τη προσομοίωση διαφορετικών τύπων βροχής.

Οι Rodriguez-Iturbe et al. (1987a,b), ως εισηγητές των δυο μοντέλων, ήταν και οι πρώτοι που έλεγξαν την επίδοση του μοντέλου ορθογωνικών παλμών Bartlett-Lewis, στις θερινές μεταγωγικές βροχοπτώσεις του Denver (Colorado). Αρχικά, αποδείχτηκε το σαφές πλεονέκτημα που έχουν τα μοντέλα συστάδων, έναντι των απλών μοντέλων βροχής Poisson, στο να προσομοιώνουν βροχές διαφορετικών χρονικών κλιμάκων για ένα και μόνο σύνολο τιμών των παραμέτρων τους. Συγκεκριμένα, το μοντέλο Bartlett-Lewis, καθώς και το μοντέλο Neyman-Scott, καταφέρνει να αναπαράξει τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά της βροχής (μέση τιμή, διασπορά και δομή αυτοσυσχέτισης) από την ωριαία έως και ημερήσια χρονική κλίμακα, ανεξάρτητα της κλίμακας και των στατιστικών μεγεθών που έχουν επιλεγεί για τη προσαρμογή-βαθμονόμησή του. Η σχετική ανεξαρτησία που επιδεικνύουν τα δυο μοντέλα από τη χρονική κλίμακα μελέτης επιβεβαιώνεται και από τη μικρή διακύμανση που είχαν οι τιμές των παραμέτρων για διαφορετικές επιλύσεις του μαθηματικού συστήματος (διαφορετικά στατιστικά μεγέθη από διαφορετικές κλίμακες). Όπως έχει ήδη τονιστεί, η διακύμανση αυτή είναι ιδιαίτερα έντονη στα μοντέλα βροχής Poisson. Επιπλέον, ως αρκετά ικανοποιητική κρίνεται η προσέγγιση της ασυμμετρίας και της χρονικής κατανομής της βροχόπτωσης (ποσοστό κατακρημιζόμενης ποσότητας σε ποσοστό χρόνου), όπως αυτές προέκυψαν από προσομοίωση. Ωστόσο, ως μεγάλη αδυναμία του κλασσικού μοντέλου Bartlett-Lewis (BLRPM) κρίνεται η υπερεκτίμηση των χρονικών περιόδων ανομβρίας (πιθανότητα μηδενικού ύψους βροχής), για στάθμες συνάθροισης, μεγαλύτερες της ωριαίας.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουν οι Onof και Wheater (1994a) καθώς και οι Velghe et al. (1994).

Οι Onof και Wheater (1994a) διερεύνησαν τις επιδόσεις του μοντέλου BLRPM στα βροχομετρικά δεδομένα Elmdon (Birmingham, Αγγλία), περιλαμβάνοντας στην ανάλυσή τους τόσο μετωπικές (Νοέμβριος-Απρίλιος) όσο και μεταγωγικές (Ιούνιος-Σεπτέμβριος) βροχές. Οι δυο μελετητές έδωσαν ιδιαίτερο βάρος στις χρονικές κατανομές και ιδιότητες της ωριαίας βροχόπτωσης, μελετώντας τα στατιστικά χαρακτηριστικά μεγεθών, όπως η μέση διάρκεια καταιγίδας, m_w , η μέση τιμή, m_d , και διασπορά, s_d , του χρονικού διαστήματος που μεσολαβεί μεταξύ δυο καταιγίδων, το πλήθος βροχερών γεγονότων ανά μήνα, m_n , και η αναλογία βροχερών-στεγνών διαστημάτων, ω_h . Όπως και για τη περίπτωση του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis, έτσι και για τη περίπτωση του κλασικού οι δυο μελετητές διατύπωσαν αναλυτικές μαθηματικές εξισώσεις που αποδίδουν τα παραπάνω μεγέθη, συναρτήσκει των πέντε ανεξάρτητων παραμέτρων του μοντέλου. Όπως αποδείχτηκε, το μοντέλο καταφέρνει να αναπαράξει με μεγάλη επιτυχία τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη δομή αυτοσυσχέτισης της ανέλιξης υψών βροχής, σε όλες τις χρονικές κλίμακες και για όλους τους μήνες. Ωστόσο, για τα μεγέθη m_w , m_d , s_d , m_n και ω_h , η απόδοση του μοντέλου ήταν απογοητευτική. Συγκεκριμένα, τόσο από τη προσομοίωση όσο και από τις αναλυτικές εξισώσεις προέκυψε πως το μοντέλο παράγει μικρό πλήθος επεισοδίων βροχής, m_n , που χαρακτηρίζονται από μεγάλη διάρκεια, m_w . Επιπλέον, μεταξύ διαδοχικών επεισοδίων βροχής μεσολαβούν διαστήματα πολύ μεγάλης διάρκειας, που οδηγούν σε υπερεκτίμηση της πιθανότητας μηδενικού ύψους βροχής. Οι Onof και Wheater (1994a) αποδίδουν τις παραπάνω αδυναμίες στο μεγάλο πλήθος επικαλύψεων των παλμών εντός της καταιγίδας και για την επίλυση αυτού του ζητήματος θεωρούν ως κρίσιμες τις παραμέτρους β και η . Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα, οι δυο ερευνητές προσπάθησαν να βελτιώσουν την απόδοση του μοντέλου χρησιμοποιώντας ένα πρωτότυπο σχήμα βελτιστοποίησης στο οποίο συμμετέχουν, εκτός από τα βασικά στατιστικά μεγέθη του ύψους βροχής, και οι χρονικές κατανομές των γεγονότων.

Οι αδυναμίες του κλασικού μοντέλου Bartlett-Lewis ως προς το να αναπαράγει τις χρονικές ιδιότητες των γεγονότων και την πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης έστρεψε το ενδιαφέρον των μελετητών στο τυχαίο μοντέλο Bartlett-Lewis (RBLRPM), που χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη ευελιξία όσον αφορά τις χρονικές ιδιότητες των παλμών και καταιγίδων. Η επιτυχία του νέου μοντέλου, να διατηρεί και τελικά να αναπαράγει τη πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης από την ωριαία έως και την ημερήσια χρονική κλίμακα, διαπιστώθηκε αρχικά

από τους εισηγητές του μοντέλου (Rodriguez-Iturbe et al., 1988) και επιβεβαιώθηκε, εν συνεχεία, από την εφαρμογή του μοντέλου σε βροχές διαφορετικών τύπων. Οι Velghe et al. (1994), χρησιμοποιώντας τα ίδια βροχομετρικά δεδομένα, από το σταθμό του Denver, παρατήρησαν πως η βελτίωση του μοντέλου δεν περιορίζεται μόνο στο μέγεθος της πιθανότητας απουσίας βροχόπτωσης, αλλά αφορά και τη δομή αυτοσυσχέτισης των χρονικών κλιμάκων 6 και 12 ωρών. Για το μοντέλο RBLRPM, οι Onof και Wheeler (1993) παραδέχονται, μεν, την βελτίωσή του ως προς την αναπαραγωγή της πιθανότητας απουσίας βροχόπτωσης, αλλά επισημαίνουν τις έντονες αποκλίσεις που εξακολουθούν να παρουσιάζουν τα προσομοιωμένα μεγέθη m_w , m_d , s_d , m_n , από τα αντίστοιχα ιστορικά. Επίσης, για τα βροχομετρικά δεδομένα του Elmdon, κάποιοι συντελεστές αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξης βρέθηκαν υπερεκτιμημένοι, για τις χρονικές κλίμακες των 12 και 24 ωρών.

Όσον αφορά τη κατανομή των ακραίων τιμών των βροχοπτώσεων, όλες οι αναλύσεις δείχνουν πως τόσο το κλασικό (BLRPM) όσο και το τυχαίο (RBLRPM) μοντέλο Bartlett-Lewis επιδεικνύουν καλή επίδοση για μικρές περιόδους επαναφοράς, αλλά παρατηρούνται μεγάλες αποκλίσεις από την κατανομή των ιστορικών χρονοσειρών, στα ακραία γεγονότα (Rodriguez-Iturbe et al., 1987b, 1988; Velghe et al., 1994; Onof and Wheeler, 1993). Οι Rodriguez-Iturbe et al. (1987b, 1988) και οι Velghe et al., 1994 παρατήρησαν πως τα δυο μοντέλα υποεκτιμούν τα ωριαία και ημερήσια ακραία ύψη βροχής για περιόδους επαναφοράς μεγαλύτερες του μήκους της ιστορική χρονοσειράς. Αντίθετα, οι Onof και Wheeler (1993) παρατήρησαν πως οι ακραίες τιμές προκύπτουν υπερεκτιμημένες, για την ιστορική χρονοσειρά του Elmdon. Η ικανότητα του μοντέλου να όσον αφορά τις ακραίες τιμές μπορεί να βελτιωθεί με την υιοθέτηση άλλων κατανομών, όπως η διπαραμετρική γάμα ή η κάποια Pareto, για την περιγραφή της έντασης των παλμών Rodriguez-Iturbe et al. (1987b). Προς αυτή τη κατεύθυνση, οι Onof και Wheeler (1994b), χρησιμοποιώντας την κατανομή γάμα για τις εντάσεις των παλμών, διατύπωσαν το τυχαίο μοντέλο γάμα Bartlett-Lewis (RPBLGM), όπως αυτό περιγράφεται στην Ενότητα 6.3.2. Το μοντέλο επτά παραμέτρων εφαρμόστηκε στα βροχομετρικά δεδομένα του Elmdon για τον μήνα Ιανουάριο, και όπως αποδείχτηκε οι κατανομές ακραίων τιμών, των συνθετικών ωριαίων και ημερήσιων υψών βροχής προσεγγίζουν με μεγάλη επιτυχία αυτές των ιστορικών χρονοσειρών. Ωστόσο, η εφαρμογή του μοντέλου RPBLGM δεν είχε τα ίδια επιτυχή αποτελέσματα για τη προσομοίωση της κατανομής ακραίων τιμών της 10λεπτης βροχόπτωσης του σταθμού Uccle, στο Βέλγιο (Verhoest et al., 1997). Όπως αποδείχτηκε, και τα τρία μοντέλα Bartlett-Lewis είχαν

παρόμοια συμπεριφορά, υποεκτιμώντας την ένταση της βροχών μεγάλης περιόδου επαναφοράς και μικρής διάρκειας.

Περισσότερα στοιχεία και περιπτώσεις που το μοντέλο RBLRPM έχει εφαρμοστεί με επιτυχία για τη προσομοίωση των χαρακτηριστικών της βροχής μπορεί να βρει κανείς στις εργασίες των Bo et al. (1994), Khaliq and Cunnane (1996), Verhoest et al. (1997), Smithers et al. (2002) και Islam et al. (1990).

6.4 Εκτίμηση παραμέτρων μοντέλων Bartlett – Lewis

6.4.1 Τοποθέτηση του προβλήματος στα πλαίσια της βελτιστοποίησης

Η προσαρμογή του μοντέλου Bartlett-Lewis στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της υπό εξέταση βροχόπτωσης γίνεται μέσω της εύρεσης των ανεξάρτητων παραμέτρων επίλυσής του. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή δεν μπορεί να στηριχθεί σε κλασικές στατιστικές μεθόδους, όπως η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας, λόγω της δυσκολίας που παρουσιάζει η εύρεση της συνάρτησης πιθανοφάνειας, τόσο για τη συνεχή όσο και για τη διακριτή διαδικασία του μοντέλου (Rodríguez-Iturbe et al., 1988). Η μέθοδος που χρησιμοποιείται συχνότερα για τη βαθμονόμηση των στοχαστικών μοντέλων ορθογωνικών παλμών είναι η μέθοδος των ροπών, σύμφωνα με την οποία τα στατιστικά μεγέθη του δείγματος (χρονοσειρά υψών βροχής) εξισώνονται με τα στατιστικά μεγέθη του μοντέλου, όπως αυτά προκύπτουν από τις αναλυτικές μαθηματικές του εξισώσεις (Rodríguez-Iturbe et al., 1987b, Onof and Wheeler, 1993, 1994b; Bo et al., 1994; Velghe et al., 1994; Verhoest et al., 1997; Smithers et al., 2002). Με αυτό τον τρόπο διαμορφώνεται ένα μαθηματικό σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων, από την επίλυση του οποίου θα προκύψουν οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου.

Η έντονη μη γραμμική μορφή των εξισώσεων των στοχαστικών μοντέλων ορθογωνικών παλμών καθιστά αδύνατη την επίλυση του μαθηματικού συστήματος με αναλυτικό τρόπο και συνεπώς η εύρεση των παραμέτρων μεταπίπτει σε πρόβλημα βελτιστοποίησης. Η στοχική συνάρτηση που συνήθως χρησιμοποιείται για την εύρεση των παραμέτρων του μοντέλου Bartlett-Lewis δίνεται από την εξίσωση:

$$Z = \min \left[\sum_{i=1}^N W_i \left(\frac{F_i(X)}{F_i'} - 1 \right)^2 \right] \quad (6-38)$$

όπου $F_i(X)$ το στατιστικό μέγεθος i όπως προκύπτει από την εξίσωση του μοντέλου για δεδομένη τιμές του διανύσματος παραμέτρων X , και F_i' το αντίστοιχο μέγεθος όπως

προκύπτει από την ιστορική χρονοσειρά. Όπου N ορίζεται το πλήθος των στατιστικών μεγεθών που συμμετέχουν στη διαμόρφωση του συστήματος και W_i κάποιος συντελεστής βάρους για το στατιστικό μέγεθος i . Όπως παρατηρούμε, τα αναλυτικά στατιστικά μεγέθη της εξίσωσης είναι κανονικοποιημένα ως προς τα αντίστοιχα ιστορικά, έτσι ώστε να αποφεύγεται η επικράτηση των μεγάλων τιμών κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης. Οι Velghe et al. (1994), Bo et al. (1994) και Verhoest et al. (1997) εφαρμόζουν την παραπάνω εξίσωση με συντελεστή βάρους $W_i = 1$ για όλα τα στατιστικά μεγέθη, ενώ ο Cowpertwait (1991) θέτει $W_i = 100$ για το μέγεθος της μέσης τιμής (Smithers et al, 2002).

Οι Cowpertwait et al. (2007) θέλοντας να αποφύγουν την ύπαρξη μεροληψία, λόγω της επικράτησης είτε του ιστορικού είτε του αναλυτικού μεγέθους, κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης, προτείνουν, για την εύρεση των παραμέτρων του μοντέλου BLRPM, τη χρήση της παρακάτω στοχικής συνάρτησης:

$$Z = \min \left[\sum_{i=1}^N W_i \left[\left(\frac{F_i(X)}{F_i'} - 1 \right)^2 + \left(\frac{F_i'}{F_i(X)} - 1 \right)^2 \right] \right] \quad (6-39)$$

Τέλος, οι Vanhaute et al. (2012) έδωσαν βάρος στα στατιστικά μεγέθη της στοχικής συνάρτησης, σύμφωνα με τη σχέση $W_i = 1/\text{Var}(F_i')$, βασιζόμενοι στην υπόθεση ότι σε προβλήματα ελαχιστοποίησης τετραγώνων, τα μεγέθη θα πρέπει να σταθμίζονται αντιστρόφως ανάλογα με την διασπορά τους. Η στοχική συνάρτηση που προέκυψε είναι:

$$Z = \min \left[\sum_{i=1}^N \frac{(F_i(X) - F_i')^2}{\text{Var}(F_i')} \right] \quad (6-40)$$

6.4.2 Κριτήρια επιλογής στατιστικών μεγεθών

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι ανεξάρτητες παράμετροι του κλασικού μοντέλου Bartlett-Lewis (BLRPM) είναι πέντε ($\lambda, \eta, \gamma, \mu_x, \beta$), του τυχαίου μοντέλου (RBLRPM) είναι έξι ($\lambda, \nu, \kappa, \mu_x, \alpha, \varphi$), ενώ του τυχαίου μοντέλου RPBLGM, με κατανομή γάμα για τις εντάσεις των παλμών, επτά ($\lambda, \nu, \kappa, \alpha, \varphi, p, \delta$). Από την άλλη μεριά, οι διαθέσιμες αναλυτικές εξισώσεις για το μοντέλο BLRPM είναι τρεις, ενώ για τα μοντέλα RBLRPM και RPBLGM τέσσερις. Συνεπώς, για δεδομένη στάθμη συνάθροισης, h , και υστέρηση, k , των υπό εξέταση μετρήσεων, $Y_i^{(h)}$, το σύστημα εξισώσεων που σχηματίζεται θα είναι αόριστο, με βαθμό ελευθερίας 2 για τα δυο πρώτα μοντέλα και με βαθμό ελευθερίας 3 για το μοντέλο RPBLGM. Για να αποκτήσει το σύστημα χαρακτήρα ορισμένου απαιτείται η προσθήκη, τουλάχιστον,

δυο επιπλέον αναλυτικών εξισώσεων, και άρα των αντίστοιχων ιστορικών στατιστικών μεγεθών, από διαφορετικές χρονικές κλίμακες, h . Η επιλογή των στατιστικών μεγεθών και άρα των εξισώσεων που θα χρησιμοποιηθούν επηρεάζουν άμεσα τόσο τη διαδικασία βελτιστοποίησης, όσο και την απόδοση του μοντέλου ως προς την διατήρηση και αναπαραγωγή των επιθυμητών στατιστικών μεγεθών.

Σαν γενική αρχή, οι Rodriguez-Iturbe et al. (1988) επισημαίνουν πως τα στατιστικά μεγέθη, που θα χρησιμοποιηθούν για την εύρεση των παραμέτρων του μοντέλου, θα πρέπει να χαρακτηρίζονται από μικρό δειγματοληπτικό σφάλμα και να έχουν μικρή μεταξύ τους συσχέτιση, ώστε να εξασφαλιστεί η αμεροληψία της διαδικασίας. Επιπλέον, είναι αναγκαία η επιλογή στατιστικών μεγεθών από διαφορετικές χρονικές κλίμακες ώστε να επιτευχθεί η βέλτιστη προσαρμογή των στοχαστικών διαδικασιών των παλμών και των καταιγίδων του μοντέλου στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της υπό εξέταση βροχόπτωσης.

Βασιζόμενοι στα παραπάνω, για την εκτίμηση των πέντε παραμέτρων του κλασικού μοντέλου Bartlett-Lewis, οι Rodriguez-Iturbe et al. (1987b) δοκίμασαν, και τελικά συνέκριναν, τέσσερις εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης του συστήματος, στο οποίο συμμετέχουν στατιστικά μεγέθη από τις χρονοσειρές χρονικών κλιμάκων 1h, 6h, 12h και 24h. Τα στατιστικά μεγέθη που χρησιμοποιήθηκαν είναι η μέση τιμή, E^h , η διασπορά, Var^h , και η αυτοσυσχέτιση k -τάξης, $Corr^h(k)$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για το μοντέλο BLRPM δεν υπάρχει διαθέσιμη αναλυτική εξίσωση που να δίνει τη πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης, $PDR(h)$, για διακριτή χρονική κλίμακα h . Οι τέσσερις συνδυασμοί των στατιστικών μεγεθών φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

	Στάθμες συνάθροισης, ώρες (h)			
	$h=1$	$h=6$	$h=12$	$h=24$
1	$E, Var, Corr(1)$	$Var, Corr(1)$		
2	$E, Var, Corr(1)$		$Var, Corr(1)$	
3	$E, Var, Corr(1)$			$Var, Corr(1)$
4		$E, Var, Corr(1)$	$Var, Corr(1)$	

Πίνακας 6.3: Τακτικές επίλυσης για την εύρεση των παραμέτρων του μοντέλου BLRPM (Rodriguez-Iturbe et al., 1987b, σελ. 9651)

Από τις επιλύσεις των συστημάτων, για τους τέσσερις συνδυασμούς που απεικονίζονται στον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 6.1), προέκυψαν διαφορετικές, αλλά παραπλήσιες, τιμές για τις

πέντε ανεξάρτητες παραμέτρους επίλυσης. Οι Rodriguez-Iturbe et al. (1987b) δεν ποσοτικοποιούν την ποιότητα των λύσεων που προκύπτουν, αλλά επισημαίνουν πως για όλες τις περιπτώσεις το μοντέλο καταφέρνει να διατηρήσει ακόμα και τα στατιστικά μεγέθη που δεν χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διαδικασία βαθμονόμησης.

Σε ανάλογα συμπεράσματα για την ανεξαρτησία των παραμέτρων από τη χρονική κλίμακα μελέτης και από το συνδυασμό στατιστικών μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν, κατά την προσαρμογή του μοντέλου BLRPM, κατέληξαν και οι Velghe et al. (1994). Στην εργασία τους χρησιμοποίησαν τους ίδιους συνδυασμούς στατιστικών μεγεθών με τους Rodriguez-Iturbe et al., αντικαθιστώντας, ωστόσο, την αυτοσυσχέτιση, $Corr^h(k)$, με την αυτοσυνδιασπορά, $Covar^h(k)$. Η αλλαγή αυτή οδηγεί σε ένα πιο ευσταθές, από μαθηματικής πλευράς, αριθμητικό σχήμα καθώς αποφεύγεται η χρήση ενός μεγέθους, που εκφράζεται ως πηλίκο δυο αναλυτικών θεωρητικών εξισώσεων ($Corr(1) = Covar(1)/Var$).

Οι Onof και Wheeler (1994a), για τη προσαρμογή του μοντέλου BLRPM στην βροχή της Αγγλίας χρησιμοποίησαν δυο συνδυασμούς στατιστικών μεγεθών, χωρίς ωστόσο να αιτιολογούν την επιλογή τους. Ο πρώτος περιελάμβανε τα μεγέθη E^l , Var^l , Var^{δ} , $Covar^l(1)$, $Covar^{\delta}(1)$ και ο δεύτερος τα μεγέθη E^l , Var^l , Var^{δ} , $Covar^l(1)$, $Covar^{l2}(1)$. Και για τα δυο σύνολα παραμέτρων που προέκυψαν, το μοντέλο αναπαράγει επιτυχώς τα στατιστικά χαρακτηριστικά υψών βροχής σε όλες τις χρονικές κλίμακες. Ωστόσο, σε αντίθεση με τα προαναφερθέντα, οι δυο μελετητές παρατήρησαν πως οι τιμές των παραμέτρων η και β παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές, μεταξύ των δυο τακτικών επίλυσης. Όπως αποδείχτηκε οι διαφορές αυτές μπορεί να μην αποτυπώνονται στις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης, της ανέλιξης υψών βροχής, αλλά αποτυπώνονται στις χρονικές κατανομές των γεγονότων που παράγει το μοντέλο (π.χ. πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης). Αυτό είναι απολύτως λογικό καθώς οι παράμετροι η και β καθορίζουν τους χρόνους άφιξης των παλμών και τη διάρκειά τους, αντίστοιχα. Περισσότερα στοιχεία για τον τρόπο με τον οποίο οι Onof και Wheeler (1994a) αντιμετώπισαν το πρόβλημα της αστάθειας των παραμέτρων η και β δίνονται στην επόμενη Ενότητα (6.4.3).

Για το τυχαίο μοντέλο Bartlett-Lewis, εκτός από τη μέση τιμή, τη διασπορά και την αυτοσυνδιασπορά κ-τάξης, είναι διαθέσιμη και η αναλυτική εξίσωση που δίνει την πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης σε κάποια διακριτή χρονική κλίμακα, h . Συνήθως, η διαδικασία στηρίζεται στην επιλογή έξι στατιστικών μεγεθών, ενώ υπάρχουν περιπτώσεις που εισάγονται στην στοχαστική συνάρτηση περισσότερα μεγέθη, σε σκοπό καλύτερη προσαρμογή

του μοντέλου. Ο πίνακας που ακολουθεί συγκεντρώνει όλους τους συνδυασμούς στατιστικών μεγεθών, που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί από διάφορους μελετητές για την εύρεση των παραμέτρων του μοντέλου RBLRPM.

	Στάθμες συνάθροισης, ώρες (h)						
	$h = 1/6 h$	$h = 1 h$	$h = 2 h$	$h = 6 h$	$h = 12 h$	$h = 24 h$	$h = 48 h$
Rodriguez-Iturbe et al. (1988)	-	E, Var, Corr(1), PDR	-	-	-	Var, PDR	-
	-	E, Var, Corr(1), PDR	-	-	-	Corr(1), PDR	-
Bo et al. (1994)	-	E, Var, Corr(1), PDR	Var, PDR	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	E, Var, Corr(1), PDR	Var, PDR
Velghe et al (1994)	-	E, Var, Covar(1), PDR	-	-	-	Var, PDR	-
	-	E, Var, Covar(1), PDR	-	-	-	Covar(1), PDR	-
	-	-	-	E, Var, Covar(1), PDR	-	Var, Covar(1)	-
	-	E, Var, Covar(1)	-	-	PDR	Var, Covar(1)	-
	-	E, Var, Covar(1)	-	-	Covar(1)	Var, Covar(1)	-
Onof (1993)	-	E, Var, Covar(1), PDR	-	Covar(1)	-	PDR	-
	-	E, Var, Covar(1), PDR	-	Var	-	PDR	-
Verhoest (1997)	E, Var, Covar(1), PDR	-	-	-	-	Covar(1), PDR	-
Khaliq et al. (1996)	-	E, Var, Corr(1), PDR	-	Var	-	PDR	-
	-	E, Var, Corr(1), PDR	-	-	-	Var, PDR	-
	-	E, Var, Corr(1), PDR	-	Corr(1)	-	PDR	-
	-	E, Var, Corr(1), PDR	-	-	-	Corr(1), PDR	-
	-	E, Var, Corr(1), PDR	E, Var, Corr(1), PDR	E, Var, Corr(1), PDR	E, Var, Corr(1), PDR	E, Var, Corr(1), PDR	-
Smithers et al. (2002)	-	E, Var	-	Var	Var, Covar(1), PDR	Var, Covar(1), PDR	Var, PDR
	-	-	-	Var	Var	E, Var, Covar(1), PDR	Var, PDR
	-	-	-	-	-	E, Var, Covar(1), PDR	Var, Covar(1), PDR

Πίνακας 6.4: Συγκεντρωτικός πίνακας με τα στατιστικά μεγέθη που έχουν χρησιμοποιηθεί για την βαθμονόμηση του μοντέλου Bartlett-Lewis

Από τον παραπάνω πίνακα, μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε πως σχεδόν σε όλους τους συνδυασμούς, η μέση τιμή, E , εμφανίζεται στο μαθηματικό σύστημα για μια και μόνο χρονική κλίμακα, h . Εκ πρώτης όψεως, αυτό φαίνεται εντελώς παράλογο δεδομένης της ιδιαίτερης βαρύτητας που έχει το συγκεκριμένο μέγεθος. Ωστόσο, από την μαθηματική εξίσωση των μοντέλων για τη μέση τιμή, προκύπτει πως το συγκεκριμένο μέγεθος είναι γραμμική συνάρτηση της κλίμακας συνάθροισης, h (Bo et al., 1994). Συνεπώς, η βέλτιστη

προσέγγιση της μέσης τιμής σε μια χρονική κλίμακα συνεπάγεται τη βέλτιστη προσέγγιση του μεγέθους για όλες τις κλίμακες συνάθροισης.

Επιπλέον, όπως παρατηρούμε, το μέγεθος PDR συμμετέχει σε όλα τα μαθηματικά συστήματα τουλάχιστον δυο φορές. Τη μια φορά αναφερόμενο στη μικρότερη χρονική κλίμακα (1h) και την άλλη αναφερόμενο σε κάποια μεγαλύτερη (συνήθως στην ημερήσια). Το γεγονός αυτό δικαιολογείται αφενός από την σπουδαιότητα που παρουσιάζει το συγκεκριμένο μέγεθος και αφετέρου από την απαίτηση για βέλτιστη προσαρμογή των διαδικασιών του μοντέλου σε περισσότερες από μια χρονικές κλίμακες. Ο Δερζέκος (2004) απέδειξε την ύπαρξη αρνητικής γραμμικής συσχέτισης μεταξύ του φυσικού λογάριθμου του μεγέθους PDR και της στάθμης συνάθροισης h , τονίζοντας πως απαιτείται η χρήση δυο τιμών του μεγέθους PDR έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η βέλτιστη προσέγγιση και των υπολοίπων τιμών που δεν συμμετέχουν άμεσα στο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Προτείνει δε, τη χρήση τιμών PDR για στάθμες συνάθροισης 1h και 6h.

Η επιλογή των μεγεθών της διασποράς, Var , και αυτοσυνδιασποράς, $Covar$, δεν στηρίζεται σε κάποια θεωρητική τεκμηρίωση αλλά προκύπτει από την κρίση του μελετητή. Γενικά, στα μαθηματικά συστήματα συμμετέχουν δυο τιμές Var και μια τιμή $Covar$, δεδομένης της αυξημένης βαρύτητας που έχει το πρώτο μέγεθος. Αξίζει, πάντως να παρατηρήσουμε πως στους συνδυασμούς που το μέγεθος PDR συμμετέχει μια φορά, το μέγεθος $Covar$ συμμετέχει δυο, ως υποκατάστατό του.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, παρουσιάζουν οι δυο συνδυασμοί στατιστικών μεγεθών που έχουν επιλεγεί από του *Bo et al.* (1994). Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 6.4, η πρώτη τακτική επίλυσης περιλαμβάνει μεγέθη αποκλειστικά από μικρές χρονικές κλίμακες (1h και 2h), ενώ ο δεύτερος μεγέθη από δυο μεγαλύτερες χρονικές κλίμακες (24h και 48h). Η επιλογή αυτή έγινε για να διαπιστωθεί κατά πόσο το μοντέλο RBLRPM, είναι ικανό να διατηρήσει τα χαρακτηριστικά της βροχής μικρών χρονικών κλιμάκων όταν η προσαρμογή του στηρίζεται σε στατιστικά μεγάλων κλιμάκων, και το αντίστροφο. Όπως αποδείχτηκε το μοντέλο καταφέρνει με μεγάλη επιτυχία να αναπαραγάγει τα στατιστικά χαρακτηριστικά όλων των χρονικών κλιμάκων και για τα δυο σύνολα παραμέτρων. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς είναι δυνατή η προσομοίωση της βροχής μικρών χρονικών κλιμάκων, με προσαρμογή του μοντέλου σε χρονικές κλίμακες όπως η ημερήσια, που τα βροχομετρικά δεδομένα είναι συνήθως διαθέσιμα.

Αξιοσημείωτη είναι, επίσης, και η τακτική που ακολούθησαν οι Khaliq και Cunnane (1996) ενσωματώνοντας δεκαέξι στατιστικά μεγέθη στη στοχική συνάρτηση για την εύρεση των παραμέτρων των έξι παραμέτρων του μοντέλου RBLRPM. Όπως αποδείχτηκε, η επίδοση του μοντέλου είναι τουλάχιστον ισάξια με την επίδοση όταν χρησιμοποιούνται έξι στατιστικά μεγέθη για την βαθμονόμησή του.

Για την εύρεση των παραμέτρων του επτά-παραμετρικού μοντέλου RPBLGM οι Onof και Wheater (1994b), επιλύουν ένα σύστημα 6 εξισώσεων με 6 άγνωστες παραμέτρους, αποδίδοντας στη παράμετρο κλίμακας δ σταθερή τιμή κάθε φορά. Αυτή η τακτική οδηγεί στην διευκόλυνση της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Αντίθετα, οι Verhoest et al. (1997), συμπεριέλαβαν και τις επτά παραμέτρους επίλυσης σε ένα σύστημα 7×7 επιτυγχάνοντας πολύ καλή προσαρμογή του μοντέλου στα χαρακτηριστικά της βροχής του Βελγίου.

6.4.3 Ευαισθησία παραμέτρων στην κλίμακα μελέτης

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές πως τα μοντέλα Bartlett-Lewis έχουν μεγάλη ικανότητα στο να προσομοιώνουν τα χαρακτηριστικά της βροχής πολλών χρονικών κλιμάκων, ταυτόχρονα, ακόμα και όταν τα στατιστικά μεγέθη που χρησιμοποιούνται για τη προσαρμογή του δεν αναφέρονται στην υπό εξέταση κλίμακα. Ένα θέμα που έχει απασχολήσει, και συνεχίζει να απασχολεί, τους ερευνητές είναι η διακύμανση (άλλες φορές μεγάλη και άλλες φορές μικρή) που παρουσιάζουν οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου ανάλογα με το ποια τακτική επίλυσης (σύνολο στατιστικών μεγεθών) θα χρησιμοποιηθεί για την προσαρμογή του μοντέλου. Για την διερεύνηση του ζητήματος αυτού οι Islam et al. (1990) και οι Khaliq και Cunnane (1996) εξέτασαν την ευαισθησία των μαθηματικών εξισώσεων του μοντέλου RBLRPM, και συνεπώς των αναλυτικών στατιστικών μεγεθών, ως προς τις τιμές των παραμέτρων. Σε δεύτερο επίπεδο, οι Onof και Wheater (1993) εξέτασαν την διακύμανση που παρουσιάζουν οι τιμές των παραμέτρων μέσα στο έτος, θέλοντας να προσδώσουν σε αυτές φυσικό νόημα.

Οι Rodriguez-Iturbe et al. (1988) ήταν οι πρώτοι που παρατήρησαν πως για δυο διαφορετικά σύνολα στατιστικών μεγεθών, οι τιμές των παραμέτρων που προκύπτουν είναι διαφορετικές. Ιδιαίτερη διαφοροποίηση εντόπισαν στις τιμές των παραμέτρων α και ν . Στην ίδια διαπίστωση καταλήγουν και οι Onof και Wheater (1993), τονίζοντας πως παραπλήσιες τιμές προκύπτουν μόνο για τις παραμέτρους λ και μ , με τις παραμέτρους α και ν να χαρακτηρίζονται από μεγάλη διακύμανση των τιμών τους. Η διακύμανση στις τιμές των παραμέτρων μπορεί να μην γίνεται εμφανής μέσα από τις τιμές των ροπών $1^{ηs}$ και $2^{ηs}$ τάξης

του μοντέλου, αλλά αποτυπώνεται ξεκάθαρα στις χρονικές ιδιότητες των γεγονότων, που παράγει το μοντέλο. Συγκεκριμένα, διαφορετικές τιμές για τις παραμέτρους α και ν έδωσαν παραπλήσιες τιμές για τα στατιστικά μεγέθη E , Var , $Covar(1)$ και PDR , αλλά εντελώς διαφορετικές τιμές για τα μεγέθη m_d , s_d , m_n και m_w .

Για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα της αστάθειας των παραμέτρων, οι Onof και Wheeler (1993) εφάρμοσαν ένα πρωτότυπο σχήμα βελτιστοποίησης, στο οποίο ελέγχονται δυο στοχαστικές συναρτήσεις ταυτόχρονα. Αρχικά, επιλύεται ένα σύστημα πέντε εξισώσεων (αντί για έξι) στο οποίο η ασταθής παράμετρος (α ή ν) δεν συμμετέχει ως μεταβλητή επίλυσης, αλλά λαμβάνει τιμή από ένα συγκεκριμένο σύνολο τιμών. Για τις τιμές των παραμέτρων που προκύπτουν ελέγχεται η παρακάτω στοχαστική συνάρτηση:

$$d_i = \sqrt{\frac{(m_{d,hist} - m_{d,i})^2}{m_{d,hist}^2} + \frac{(m_{n,hist} - m_{n,i})^2}{m_{n,hist}^2}} \quad (6-41)$$

όπου m_d ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών καταιγίδων στην ωριαία χρονική κλίμακα και m_n το μέσο πλήθος βροχερών γεγονότων ανά μήνα.

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για διαφορετικές τιμές της ασταθούς παραμέτρου και ολοκληρώνεται όταν επιτευχθεί ελάχιστη τιμή για την εξίσωση d_i . Αξίζει να αναφέρουμε πως οι Onof και Wheeler εφάρμοσαν την παραπάνω μεθοδολογία υπολογίζοντας τα μεγέθη m_d και m_n της παραπάνω εξίσωσης τόσο μέσω προσομοίωσης όσο και μέσω αναλυτικών εξισώσεων. Όπως αποδείχτηκε, η παραπάνω τακτική βελτιστοποίησης οδηγεί αφενός στην βελτίωση του μοντέλου, όσον αφορά την αναπαραγωγή των χρονικών ιδιοτήτων της βροχής, και αφετέρου στον υπολογισμό τιμών για τις παραμέτρους, που επιδέχονται φυσικής ερμηνείας. Την ίδια μεθοδολογία ακολούθησαν οι δυο μελετητές και για τη περίπτωση του μοντέλου BLRPM, διατηρώντας σταθερές μια εκ των ασταθών παραμέτρων η και β (Onof and Wheeler, 1994a). Οι Khaliq και Cunnane (1996) αντιμετώπισαν το πρόβλημα της αστάθειας των παραμέτρων α και ν με την ενσωμάτωση όλων των στατιστικών μεγεθών, από τις τέσσερις χρονικές κλίμακες, στη στοχαστική συνάρτηση του προβλήματος.

Εκτενή μελέτη πάνω στο θέμα της ευαισθησίας που παρουσιάζουν οι ροπές 1^{ης} και 2^{ης} τάξης και η πιθανότητας μηδενικής βροχόπτωσης στις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου έχει γίνει από τους Islam et al. (1990). Ιδιαίτερο βάρος δόθηκε στην εξάρτηση που παρουσιάζει ο

συντελεστής αυτοσυσχέτισης και η πιθανότητα ανομβρίας, δεδομένου ότι η βέλτιστη προσέγγιση της μέσης τιμής εξασφαλίζεται από μια και μόνο χρονική κλίμακα.

Όπως αποδείχτηκε, η παράμετρος που ασκεί μεγαλύτερη επιρροή στη δομή αυτοσυσχέτισης που παράγει το μοντέλο είναι η παράμετρος σχήματος της διάρκειας των παλμών, α . Η επιρροή αυτή γίνεται ακόμα πιο έντονη για μικρές τιμές της παραμέτρου ($\alpha < 2$), που η δομή αυτοσυσχέτισης που παράγει το μοντέλο είναι ισχυρή και φθίνει αργά. Εκτός από τη παράμετρο α , η αυτοσυσχέτιση δείχνει ιδιαίτερη ευαισθησία και στη παράμετρο κλίμακας της διάρκειας των παλμών ν . Συνεπώς, η μέση διάρκεια των παλμών είναι στενά συνδεδεμένη με τη δομή αυτοσυσχέτισης του μοντέλου. Όσον αφορά τις υπόλοιπες παραμέτρους του μοντέλου, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης προκύπτει ανεξάρτητη των παραμέτρων λ και μ_x και ελαφρά εξαρτημένη από τις παραμέτρους κ και φ .

Η πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης, PDR , έχει μηδενική εξάρτηση από την παράμετρο μ_x και για τις μικρές χρονικές κλίμακες επηρεάζεται έντονα από τις τιμές των παραμέτρων α , ν και φ . Όπως είναι λογικό, στις μεγαλύτερες χρονικές κλίμακες (π.χ. ημερήσια) κρίσιμη παράμετρος είναι η λ , που καθορίζει τους χρόνους έναρξης των καταιγίδων.

6.5 Εφαρμογή των μοντέλων Bartlett-Lewis για την προσομοίωση της βροχής της Αθήνας

6.5.1 Περιγραφή των δεδομένων και το κλίμα της Αθήνας

Το κλίμα της Αθήνας χαρακτηρίζεται ως Μεσογειακό, με εξαίρεση τα ορεινά σημεία, όπου το κλίμα είναι Ορεινό. Σύμφωνα με την κλιματική κατάταξη Köppen, το κλίμα της Αθήνας ανήκει στην κατηγορία Csa, που περιλαμβάνει περιοχές με ήπιους αλλά βροχερούς χειμώνες και θερμά αλλά βροχερά καλοκαίρια. Το μέσο ετήσιο ύψος βροχής κυμαίνεται από 350 mm στο λεκανοπέδιο Αττικής μέχρι 1000 mm στα ορεινά τμήματα (Πάρνηθα), ενώ η μέση ετήσια θερμοκρασία κυμαίνεται από 16° C έως μέχρι 18° C, ανάλογα με το υψόμετρο και την απόσταση από τη θάλασσα. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται ενδεικτικά οι μέσες ετήσιες τιμές των μετεωρολογικών μεταβλητών στη θέση του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών (Λόφος των Νυμφών, Θησείο).

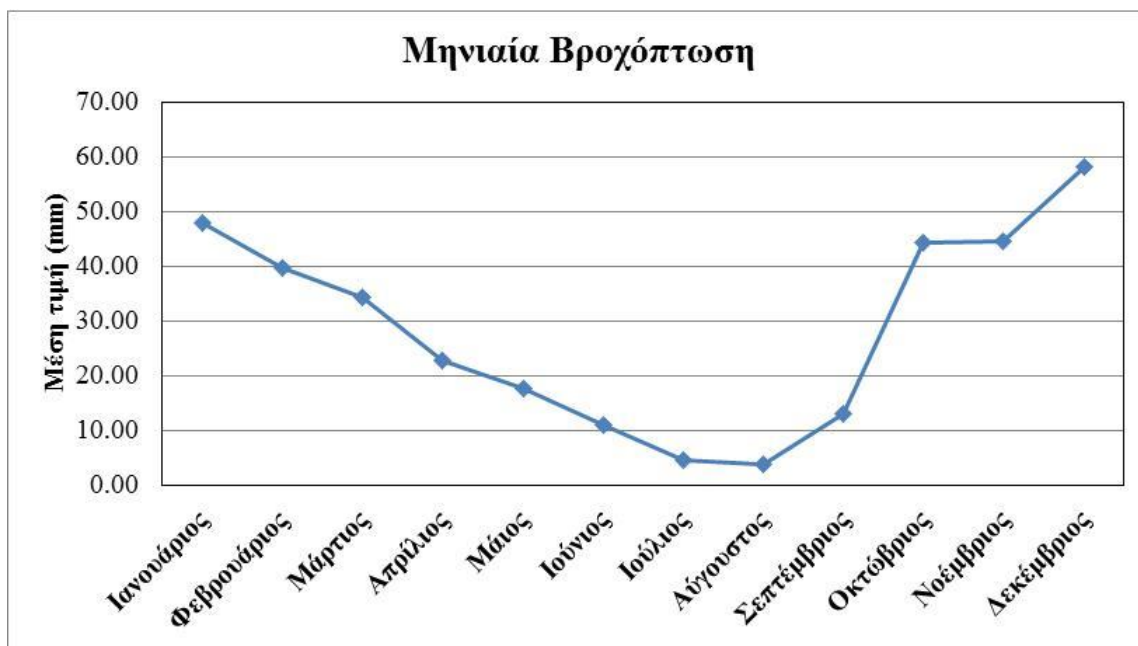
Θερμοκρασία (°C)	17.70
Βροχόπτωση (mm)	402
Ηλιοφάνεια (hr)	2.899
Σχετική υγρασία	62%
Ημέρες με βροχή	60
Ημέρες με νέφωση	68
Ημέρες με χιόνι	3.3
Ημέρες με χαλάζι	2.8

Πίνακας 6.5: Μέσες ετήσιες τιμές μετεωρολογικών μεταβλητών (Κουτσογιάννης κ.α., 2008)

Η μελέτη, και εν συνεχεία προσομοίωση, της βροχής της Αθήνας στηρίχτηκε στην ωριαία χρονοσειρά υψών βροχής από το βροχομετρικό σταθμό του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών (Λόφος των Νυμφών, Θησείο), που βρίσκεται σε μέσο σταθμικό υψόμετρο 107 m. Η χρονοσειρά, στο σύνολό της, εκτείνεται από το 1927 έως το 1996, αλλά περιέχει μεγάλο αριθμό ελλειπουσών τιμών. Συγκεκριμένα, ο σταθμός δεν κατέγραψε καθόλου τιμές για τους περισσότερους μήνες των ετών 1927, 1931, 1932, 1933, 1990 και 1991. Η σποραδικά εμφανιζόμενες ελλειπείς τιμές αντιμετωπίστηκαν κατά περίπτωση. Για παράδειγμα, οι ομάδες βροχερών ημερών με πολλές ελλειπείς ωριαίες τιμές αφαιρέθηκαν στο σύνολό τους, ενώ οι χρονιές με πολλές τέτοιες ομάδες αφαιρέθηκαν και αυτές με τη σειρά τους. Στους καλοκαιρινούς μήνες, που οι ομάδες βροχερών ημερών είναι μικρές σε μήκος και η πιθανότητα πολλών διαδοχικών βροχερών ωρών μικρή, οι ελλειπείς τιμές αντικαταστάθηκαν είτε με μηδενικές είτε με τη μέση τιμή της προηγούμενης και επόμενης ώρας.

Τα ατμοσφαιρικά χαρακτηριστικά της Αθήνας επηρεάζονται αφενός από την ιδιαίτερη τοπογραφία της περιοχής και αφετέρου από τη συμπεριφορά της ατμόσφαιρας πάνω από τη Μεσόγειο Θάλασσα. Όπως φαίνεται και στο Γράφημα 6.1, η βροχή της Αθήνας εμφανίζει σαφή διακριτή συμπεριφορά ανάλογα με την εποχή του έτους. Αυτό είναι και το βασικό χαρακτηριστικό των περιοχών με Μεσογειακό Κλίμα, όπου η βροχόπτωση ακολουθεί

αντίστροφη πορεία από αυτή της θερμοκρασίας, με το μεγαλύτερο ποσοστό βροχόπτωσης να συγκεντρώνεται στους ψυχρότερους μήνες (Οκτώβριος-Μάρτιος). Κατά το ψυχρότερο εξάμηνο, ψυχρές αέριες μάζες ταξιδεύουν από τα βορειότερα γεωγραφικά πλάτη προς τα νοτιότερα δημιουργώντας έντονες υφέσεις πάνω από τη θερμή Μεσόγειο Θάλασσα. Αντίθετα, κατά τους θερμούς μήνες (Απρίλιος-Σεπτέμβριος) η βροχή της Αθήνας οφείλεται σε στάσιμες ψυχρές αέριες μάζες (γνωστές και ως και “ψυχρές λίμνες”) που προκαλούν σύντομες αλλά έντονες αστάθειες στην ατμόσφαιρα, και επομένως καταιγίδες μικρής διάρκειας αλλά μεγάλης έντασης.



Γράφημα 6.1: Μέση μηνιαία βροχόπτωση Αθήνας (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)

Περισσότερα στοιχεία για τα ιδιαίτερα στατιστικά χαρακτηριστικά της βροχής της Αθήνας δίνονται στους Πίνακες 6.6-6.9 και, οπτικοποιημένα, στα Γραφήματα 6.2-6.12 που ακολουθούν. Η ανάλυση και η κατ' επέκταση η προσομοίωση της βροχής έγινε για κάθε μήνα ξεχωριστά, με την υπόθεση ότι οι ωριαίες χρονοσειρές υψών βροχής του κάθε μήνα συνθέτουν μια στάσιμη χρονοσειρά. Τα στατιστικά χαρακτηριστικά των χρονικών κλιμάκων 6, 12 και 24 hr έχουν προκύψει από συνάθροιση της ωριαίας χρονοσειράς υψών βροχής και τα μεγέθη που μελετώνται στη συνέχεια είναι:

- το μέσο ύψος βροχής, μ (mm)
- η τυπική απόκλιση του ύψους βροχής, σ (mm)
- ο συντελεστής μεταβλητότητας του ύψους βροχής, C_v
- ο συντελεστής ασυμμετρίας του ύψους βροχής, γ
- ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης του ύψους βροχής, κ -τάξης, ρ (κ)

- η πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης, pdr
- η μέση τιμή, m_w , και η τυπική απόκλιση, s_w , της διάρκειας του βροχερού γεγονός
- η μέση διάρκεια, m_d , και η τυπική απόκλιση, s_d , του χρόνου που μεσολαβεί μεταξύ βροχερών γεγονότων
- το μέσο πλήθος βροχερών γεγονότων ανά μήνα, m_n

Ως βροχερό γεγονός ορίζεται η ακολουθία μη μηδενικών υψών βροχής, που έπονται και ακολουθούνται από τουλάχιστον ένα μηδενικό ύψος βροχής.

	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)								Βροχερές ώρες	
	μ (mm)	σ (mm)	C_v	γ	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\rho(3)$	pdr	μ (mm)	σ (mm)
Ιανουάριος	0.065	0.458	7.070	16.957	0.454	0.263	0.197	0.890	0.589	1.265
Φεβρουάριος	0.052	0.428	8.190	21.129	0.478	0.270	0.192	0.913	0.603	1.335
Μάρτιος	0.046	0.400	8.614	18.953	0.504	0.255	0.156	0.919	0.576	1.296
Απρίλιος	0.032	0.321	10.091	21.587	0.504	0.326	0.204	0.942	0.547	1.222
Μάιος	0.024	0.364	15.048	32.881	0.246	0.088	0.066	0.963	0.660	1.788
Ιούνιος	0.015	0.370	24.306	50.578	0.298	0.117	0.085	0.986	1.065	2.911
Ιούλιος	0.006	0.194	32.030	56.107	0.202	0.062	0.036	0.992	0.725	1.999
Αύγουστος	0.005	0.170	32.923	50.336	0.254	0.039	0.015	0.994	0.911	2.073
Σεπτέμβριος	0.018	0.451	24.953	69.091	0.501	0.287	0.206	0.983	1.067	3.303
Οκτώβριος	0.060	0.642	10.624	21.920	0.398	0.173	0.090	0.940	1.009	2.434
Νοέμβριος	0.063	0.561	8.924	19.942	0.398	0.225	0.147	0.914	0.735	1.785
Δεκέμβριος	0.079	0.559	7.041	15.104	0.475	0.257	0.185	0.894	0.752	1.567

Πίνακας 6.6: Στατιστικά χαρακτηριστικά ωριαίας βροχόπτωσης Αθήνας (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)

	Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)							Βροχερές ημέρες	
	μ (mm)	σ (mm)	C_v	γ	$\rho(1)$	$\rho(2)$	pdr	μ (mm)	σ (mm)
Ιανουάριος	1.555	4.532	2.915	5.301	0.117	0.010	0.626	4.161	6.646
Φεβρουάριος	1.254	4.068	3.244	6.013	0.119	-0.015	0.672	3.827	6.378
Μάρτιος	1.115	3.648	3.272	5.572	0.082	0.004	0.713	3.883	5.969
Απρίλιος	0.764	3.212	4.202	10.862	0.082	0.048	0.765	3.258	5.993
Μάιος	0.580	2.580	4.446	7.131	0.087	0.022	0.834	3.489	5.472
Ιούνιος	0.365	2.694	7.374	11.881	0.084	0.058	0.918	4.439	8.396
Ιούλιος	0.145	1.300	8.936	13.591	0.061	-0.007	0.956	3.333	5.328
Αύγουστος	0.124	1.143	9.206	14.165	0.115	0.016	0.966	3.620	5.076
Σεπτέμβριος	0.434	3.952	9.108	26.608	0.041	0.023	0.912	4.931	12.495
Οκτώβριος	1.450	5.565	3.837	5.769	0.234	0.084	0.783	6.681	10.387
Νοέμβριος	1.509	5.017	3.325	5.815	0.126	0.030	0.704	5.092	8.171
Δεκέμβριος	1.905	5.288	2.775	4.239	0.118	-0.002	0.629	5.130	7.667

Πίνακας 6.7: Στατιστικά χαρακτηριστικά ημερήσιας βροχόπτωσης Αθήνας (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)

	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)					Ημερήσια Βροχόπτωση			
	m_w (h)	s_w (h)	m_d (h)	s_d (h)	m_n	m_w (d)	s_w (d)	m_d (d)	s_d (d)
Ιανουάριος	5.180	5.629	41.907	72.904	15.424	2.371	1.629	3.987	3.868
Φεβρουάριος	5.018	5.604	52.934	87.149	11.561	2.225	1.482	4.565	4.427
Μάρτιος	5.305	5.442	60.363	109.590	11.227	2.184	1.335	5.419	5.896
Απρίλιος	4.865	5.674	78.596	135.091	8.507	2.067	1.340	6.712	6.925
Μάιος	4.100	4.369	107.554	187.288	6.522	1.856	1.027	9.303	9.435
Ιούνιος	3.606	4.396	247.423	381.989	2.838	1.590	0.851	17.566	17.802
Ιούλιος	4.107	5.101	482.394	717.486	1.515	1.559	0.726	33.600	32.508
Αύγουστος	3.213	3.492	556.822	790.649	1.309	1.385	0.690	38.264	34.942
Σεπτέμβριος	3.781	4.005	218.458	422.727	3.209	1.660	0.935	17.047	21.641
Οκτώβριος	5.027	6.002	78.932	152.749	8.806	2.164	1.524	7.807	8.290
Νοέμβριος	5.292	5.480	56.527	95.418	11.463	2.211	1.470	5.253	4.844
Δεκέμβριος	5.307	5.561	44.901	76.208	14.313	2.343	1.654	3.965	4.019

Πίνακας 6.8: Στατιστικά χαρακτηριστικά ωριαίας και ημερήσιας βροχόπτωσης Αθήνας (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)

	Κλίμακα συνάθροισης: 6h					Κλίμακα συνάθροισης: 12h				
	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	ρ (2)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	ρ (2)	pdr
Ιανουάριος	0.3887	1.7766	0.2828	0.1125	0.8033	0.7774	2.9002	0.1958	0.0559	0.7394
Φεβρουάριος	0.3135	1.6854	0.2701	0.0997	0.8397	0.6270	2.6884	0.2005	0.0170	0.7818
Μάρτιος	0.2788	1.4663	0.2317	0.0803	0.8548	0.5575	2.3961	0.1579	0.0609	0.8064
Απρίλιος	0.1911	1.3146	0.2317	0.0864	0.8871	0.3822	2.0752	0.1579	0.0369	0.8451
Μάιος	0.1451	1.1574	0.1256	0.0281	0.9256	0.2902	1.7106	0.1055	0.0693	0.8935
Ιούνιος	0.0913	1.1883	0.1425	0.0283	0.9672	0.1827	1.7853	0.1094	0.0586	0.9517
Ιούλιος	0.0364	0.5847	0.1239	0.0086	0.9827	0.0727	0.9111	0.0244	0.0467	0.9751
Αύγουστος	0.0310	0.5136	0.1247	0.0308	0.9865	0.0621	0.7938	0.0565	0.0788	0.9788
Σεπτέμβριος	0.1085	1.6516	0.2335	0.0252	0.9620	0.2170	2.7551	0.0516	0.0074	0.9460
Οκτώβριος	0.3625	2.2662	0.2523	0.1272	0.8917	0.7250	3.5512	0.2465	0.1314	0.8530
Νοέμβριος	0.3772	2.0601	0.2118	0.0868	0.8449	0.7543	3.2503	0.1542	0.0752	0.7947
Δεκέμβριος	0.4763	2.1105	0.3040	0.1013	0.8092	0.9527	3.3266	0.2447	0.0287	0.7400

Πίνακας 6.9: Στατιστικά χαρακτηριστικά βροχόπτωσης Αθήνας για τις κλίμακες συνάθροισης 6 και 12 hr (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)



Γράφημα 6.2: Μέση ωριαία βροχόπτωση Αθήνας (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)



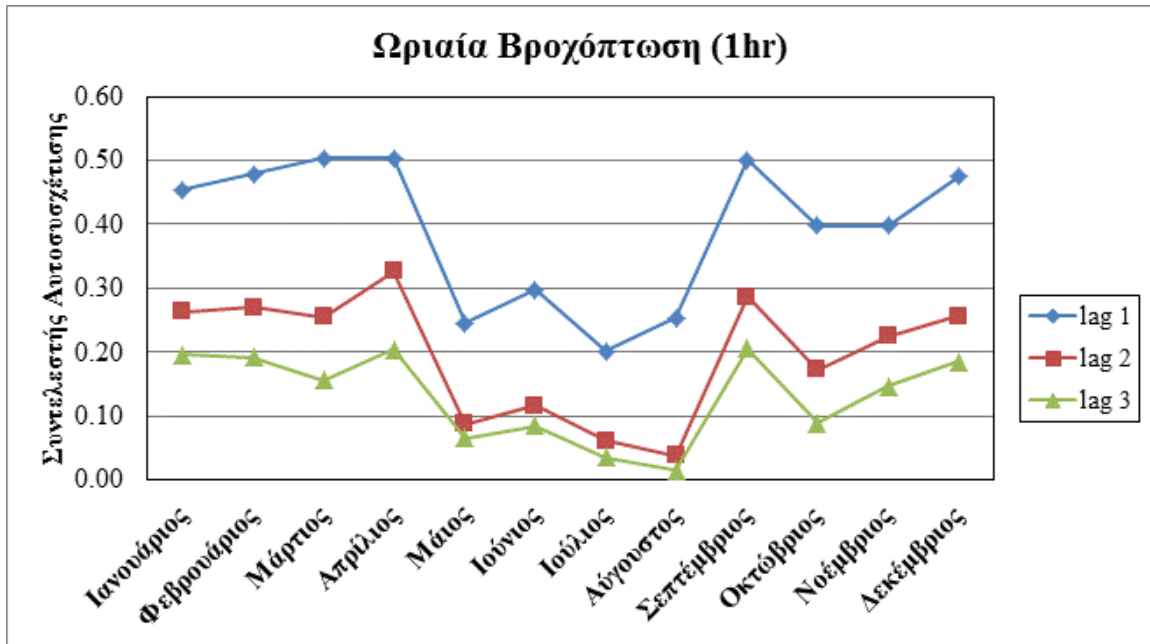
Γράφημα 6.3: Τυπική απόκλιση ωριαίας βροχόπτωσης Αθήνας (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)



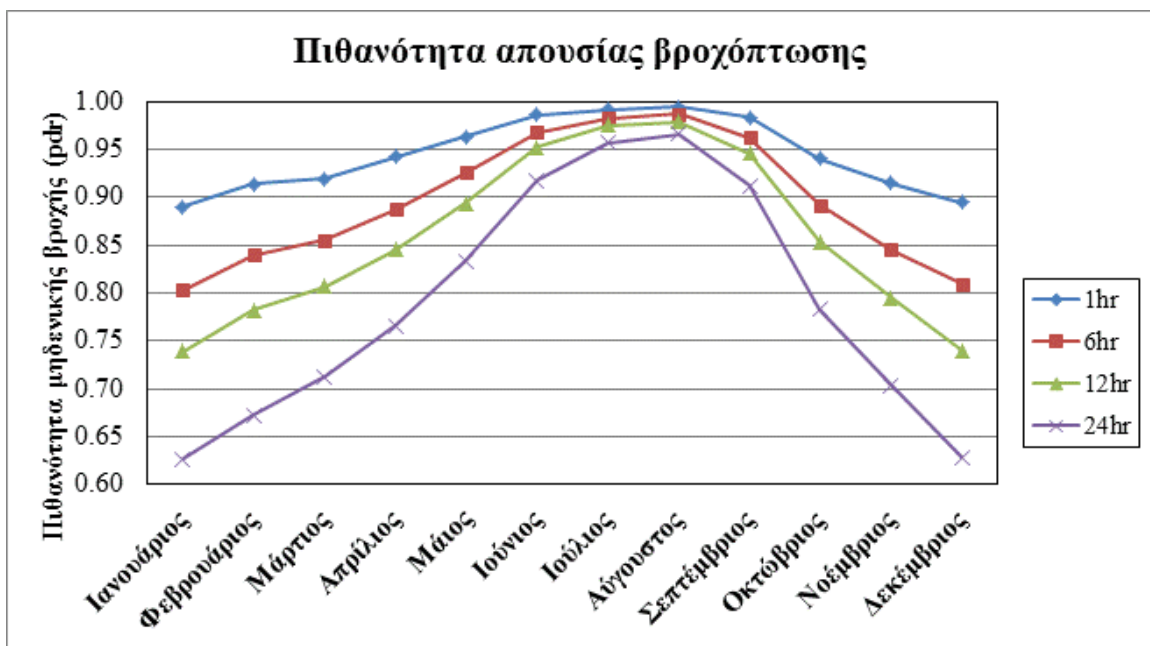
Γράφημα 6.4: Συντελεστής μεταβλητότητας ωριαίας βροχόπτωσης Αθήνας (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)



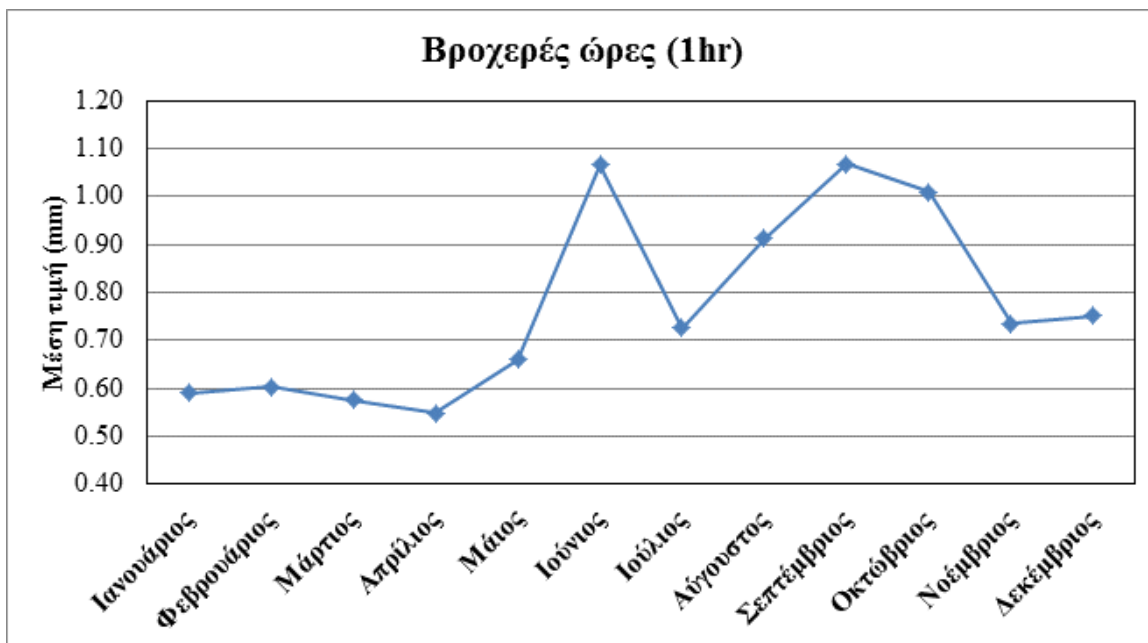
Γράφημα 6.5: Συντελεστής ασυμμετρίας ωριαίας βροχόπτωσης Αθήνας (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)



Γράφημα 6.6: Συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξης, ωριαίας βροχόπτωσης Αθήνας (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)



Γράφημα 6.7: Πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης στην ωριαία χρονική κλίμακα (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)



Γράφημα 6.8: Μέση τιμή βροχερών ωρών (Σταθμός Αστεροσκοπείου Αθηνών)



Γράφημα 6.9: Τυπική απόκλιση βροχερών ωρών



Γράφημα 6.10: Μέση διάρκεια βροχερού γεγονότος για την Αθήνα



Γράφημα 6.11: Μέση διάρκεια στεγνών περιόδων για τη βροχή της Αθήνας



Γράφημα 6.12: Μέσος αριθμός βροχερών γεγονότων ανά μήνα

Η έντονη διακύμανση και μεταβλητότητα που παρουσιάζει η δομή της βροχόπτωσης της Αθήνας κατά τη διάρκεια του έτους γίνεται εμφανής στα παραπάνω γραφήματα. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, κατά τους θερμότερους μήνες (Ιούνιος-Σεπτέμβριος) τα βροχερά γεγονότα που εμφανίζονται είναι μεν λίγα και αραιά, αλλά χαρακτηρίζονται από μικρή μέση διάρκεια και μεγάλη ένταση. Επιπλέον, η ωριαία βροχόπτωση τους μήνες αυτούς εμφανίζει πολύ υψηλούς συντελεστές μεταβλητότητας ($C_v > 24.00$) και ασυμμετρίας ($\gamma > 50.00$), με τη δομή αυτοσυσχέτισης να είναι ασθενής και να φθίνει γρήγορα ($\rho(1) < 0.30$). Αξίζει να αναφερθεί πως ο Σεπτέμβριος είναι ο μήνας που η βροχή παρουσιάζει την υψηλότερη ασυμμετρία ($\gamma = 69.00$) και την ισχυρότερη δομή αυτοσυσχέτισης ($\rho(1) = 0.50$). Αντίθετα, οι μήνες με υψηλότερη μέση μηνιαία βροχόπτωση (Οκτώβριος-Απρίλιος) χαρακτηρίζονται από την εμφάνιση πολλών βροχερών γεγονότων μεγαλύτερης διάρκειας και μικρότερης έντασης. Οι συντελεστές μεταβλητότητας και ασυμμετρίας κυμαίνονται σε υψηλά επίπεδα, αλλά είναι αισθητά μικρότεροι από αυτούς των θερινών μηνών. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο Οκτώβριος, ως μεταβατικός μήνας, καθώς η βροχή συνδυάζει τα χαρακτηριστικά διαφορετικών τύπων καταιγίδων. Οι καταιγίδες έχουν μεγάλη διάρκεια και ένταση, και εμφανίζονται με μεγάλη συχνότητα. Από την άλλη, ο Μάιος όντας και αυτός μεταβατικός μήνας, χαρακτηρίζεται από την εμφάνιση βροχερών γεγονότων που έχουν μεγάλη διάρκεια και πολύ μικρή ένταση. Η δε δομή αυτοσυσχέτισης είναι ιδιαίτερα ασθενής.

6.5.2 Εφαρμογή του κλασικού μοντέλου Bartlett - Lewis (BLRPM) στη βροχή της Αθήνας

6.5.2.1 Παράμετροι βαθμονόμησης του μοντέλου

Όπως έχουμε ήδη δει σε προηγούμενες ενότητες, το πρόβλημα της εύρεσης των παραμέτρων του μοντέλου Bartlett-Lewis μεταπίπτει σε πρόβλημα βελτιστοποίησης, στο οποίο επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση κάποιας στοχικής συνάρτησης που περιλαμβάνει τις θεωρητικές εξισώσεις του μοντέλου και τα ιστορικά στατιστικά μεγέθη που μας ενδιαφέρουν. Η προσαρμογή του μοντέλου στη βροχή της Αθήνας έγινε μέσω του βελτιωμένου εξελικτικού αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου (Ενότητα 3) και η στοχική συνάρτηση που ελαχιστοποιείται κάθε φορά είναι αυτή που δίνεται από την εξίσωση 5-31, με μοναδιαίο συντελεστή βαρύτητας για όλα τα στατιστικά μεγέθη.

Για την επίλυση του προβλήματος ολικής βελτιστοποίησης απαιτείται ο ορισμός του εφικτού χώρου αναζήτησης και κατ' επέκταση ο ορισμός του άνω και κάτω ορίου των πεδίων τιμών των παραμέτρων. Θεωρητικά, όλες οι παράμετροι λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $[0, +\infty)$. Ωστόσο, η χρήση ενός τόσο μεγάλου διαστήματος θα μπορούσε να οδηγήσει αφενός σε μη ρεαλιστικές λύσεις και αφετέρου θα δυσκόλευε αρκετά τη γρήγορη σύγκλιση του αλγορίθμου σε κάποιο βέλτιστο σημείο. Τα όρια των πεδίων τιμών που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη βελτιστοποίηση του συστήματος για τη βροχή της Αθήνας δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 6.10), και προέκυψαν ύστερα από προκαταρκτική έρευνα.

Παράμετροι	λ (h^{-1})	β (h^{-1})	γ (h^{-1})	η (h^{-1})	μ_X (mm h^{-1})
Κάτω όριο	0.0001	0.001	0.001	0.001	0.001
Άνω όριο	0.1000	10.00	0.990	60	20

Πίνακας 6.10: Όρια τιμών των παραμέτρων για τη βαθμονόμηση του κλασικού μοντέλου Bartlett-Lewis

Οι εξισώσεις του μοντέλου επιβάλλουν τη εισαγωγή των μαθηματικών περιορισμών $\eta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ και $\gamma \neq \eta$. Επιπλέον, από την διατύπωση του μοντέλου προκύπτουν οι περιορισμοί $\lambda < \beta$ και $\gamma < \beta$, καθώς είναι λογικό οι καταιγίδες να εμφανίζονται με μικρότερη συχνότητα από τους παλμούς ($1/\lambda > 1/\beta$), και το πλήθος των παλμών εντός των καταιγίδων να είναι μεγαλύτερο του ένα ($\beta/\gamma > 1$). Στην περίπτωση που κάποιος από τους παραπάνω περιορισμούς δεν ικανοποιούνταν, η τιμή της στοχικής συνάρτησης έπαιρνε κάποια πολύ

μεγάλη τιμή (10^8), έτσι ώστε η συγκεκριμένη λύση να μην κυριαρχήσει στην προσπάθεια εύρεσης του ολικού βέλτιστου.

Για την προσαρμογή του μοντέλου στα χαρακτηριστικά της βροχής της Αθήνας δοκιμάστηκαν και αξιολογήθηκαν τέσσερις διαφορετικές τακτικές επίλυσης που ενσωματώνουν διαφορετικά στατιστικά μεγέθη. Η επιλογή των στατιστικών μεγεθών έγινε με βάση τα κριτήρια που αναλύθηκαν στην ενότητα 6.4.3 και όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε περιλαμβάνουν μεγέθη από κάποια μικρή αλλά και κάποια μεγαλύτερη χρονική κλίμακα. Οι τρεις πρώτες τακτικές επιλύσεις χρησιμοποιούν το ελάχιστο δυνατό πλήθος στατιστικών μεγεθών ενώ η 4^η λύση περιλαμβάνει όλα τα στατιστικά μεγέθη και από τις τέσσερις στάθμες συνάθροισης. Οι τέσσερις διαφορετικές τακτικές επίλυσης φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 6.11).

	Στάθμες συνάθροισης, ώρες (h)			
	<i>h</i> =1	<i>h</i> =6	<i>h</i> =12	<i>h</i> =24
Λύση 1^η	<i>E, Var, Cov</i> (1)	<i>Var, Cov</i> (1)		
Λύση 2^η	<i>E, Var, Cov</i> (1)			<i>Var, Cov</i> (1)
Λύση 3^η	<i>E, Var, Cov</i> (1)		<i>Var, Cov</i> (1)	
Λύση 4^η	<i>E, Var, Cov</i> (1)	<i>E, Var, Cov</i> (1)	<i>E, Var, Cov</i> (1)	<i>E, Var, Cov</i> (1)

Πίνακας 6.11: Τακτικές επίλυσης για την βαθμονόμηση του κλασικού μοντέλου Bartlett-Lewis

6.5.2.2 Παράμετροι βαθμονόμησης του μοντέλου

Για τους τέσσερις διαφορετικούς συνδυασμούς λύσεων, εκτελέστηκαν 100 στοχαστικά ανεξάρτητες επιλύσεις του προβλήματος, αφενός για να αποφευχθεί κάποια πιθανή επιρροή του αρχικού πληθυσμού στον εντοπισμό του ολικού βέλτιστου και αφετέρου για να αξιολογηθεί αντικειμενικά η επίδοση του αλγορίθμου στο πρόβλημα εύρεσης των παραμέτρων του μοντέλου Bartlett-Lewis. Οι δυο πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζουν συνοπτικά την επίδοση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης, μέσω της μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης, ελάχιστης και μέγιστης τιμής της βέλτιστης τιμής της στοχικής συνάρτησης, Z_{min} , για τις 100 ανεξάρτητες δοκιμές που εκτελέστηκαν. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η απόδοση του αλγορίθμου είναι εξαιρετική καθώς για τις τρεις πρώτες τακτικές επίλυσης (Λύση 1^η, 2^η και 3^η), η μέση τιμή και η μέγιστη τιμή της Z_{min} κυμαίνονται σε τάξεις μεγέθους από 10^{-5} έως 10^{-14} , για όλους τους μήνες. Υψηλότερες τιμές στοχικής συνάρτησης υπολογίστηκαν για τον μήνα Σεπτέμβριο, ωστόσο και σε αυτή τη περίπτωση επιτυγχάνεται

εύρεση λύσης που είναι της τάξης μεγέθους του 10^{-5} . Όσον αφορά την 4^η τακτική επίλυσης, οι βέλτιστες τιμές που ευρέθησαν είναι υψηλότερες συγκριτικά με αυτές των λύσεων 1, 2 και 3, λόγω της αυξημένης δυσκολίας που εισάγεται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης, με την ενσωμάτωση όλων των στατιστικών μεγεθών, από όλες τις κλίμακες συνάθροισης, στην στοχική συνάρτηση. Ωστόσο, όπως θα δούμε και στη συνέχεια μια τέτοια προσέγγιση οδηγεί σε πιο ισορροπημένες λύσεις που καταφέρνουν να αναπαράγουν τα χαρακτηριστικά περισσότερων από μιας χρονικών κλιμάκων ταυτόχρονα.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι σχεδόν για όλους τους μήνες, οι 100 στοχαστικά ανεξάρτητες δοκιμές που εκτελέστηκαν κατέληξαν στον εντοπισμό του ίδιου βέλτιστου σημείου και άρα στην εύρεση του ίδιου συνόλου παραμέτρων. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει αφενός την ικανότητα του αλγορίθμου ανόπτησης-απλόκου να συγκλίνει στο ίδιο ακρότατο ανεξάρτητα από τα χαρακτηριστικά του αρχικού πληθυσμού και αφετέρου δίνει μια πρώτη εικόνα για την ευρωστία των παραγόμενων λύσεων. Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 6.12), η διαφοροποίηση μεταξύ της μέγιστης και ελάχιστης τιμής της Z_{min} που παρατηρείται, αποδίδεται στο τέταρτο ή πέμπτο ψηφίου κάποιας παραμέτρου και δεν είναι άξια λόγου καθώς μια λύση της τάξης 10^{-7} είναι πρακτικά ισοδύναμη με μια της τάξης 10^{-14} , όταν έχει εντοπιστεί το ίδιο σημείο.

	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή
	Ιανουάριος				Ιούλιος			
Λύση 1 ^η	2.5E-11	4.8E-11	3.6E-14	2.8E-10	3.5E-11	7.9E-11	4.6E-14	4.3E-10
Λύση 2 ^η	3.8E-11	6.5E-11	1.8E-12	3.1E-10	3.8E-11	7.4E-11	1.2E-13	5.3E-10
Λύση 3 ^η	6.0E-09	5.2E-08	9.0E-14	5.2E-07	1.6E-02	4.6E-11	1.6E-02	1.6E-02
Λύση 4 ^η	1.5E-02	2.5E-10	1.5E-02	1.5E-02	8.1E-01	4.2E-11	8.1E-01	8.1E-01
	Φεβρουάριος				Αύγουστος			
Λύση 1 ^η	7.3E-07	3.7E-06	4.2E-14	2.3E-05	5.8E-05	2.7E-05	3.4E-05	2.3E-04
Λύση 2 ^η	2.6E-10	8.0E-10	2.8E-13	5.5E-09	9.4E-11	1.8E-10	1.3E-13	1.0E-09
Λύση 3 ^η	2.9E-08	2.9E-07	4.3E-13	2.9E-06	3.8E-11	9.8E-11	1.6E-13	7.2E-10
Λύση 4 ^η	6.7E-03	2.6E-10	6.7E-03	6.7E-03	3.7E-01	6.0E-10	3.7E-01	3.7E-01
	Μάρτιος				Σεπτέμβριος			
Λύση 1 ^η	4.0E-05	2.6E-04	1.5E-07	2.6E-03	3.7E-04	1.2E-03	6.2E-05	1.1E-02
Λύση 2 ^η	4.1E-10	1.7E-09	9.9E-13	1.5E-08	5.5E-04	5.4E-03	8.3E-14	5.4E-02
Λύση 3 ^η	1.5E-07	1.5E-06	1.0E-12	1.5E-05	1.9E-02	1.1E-10	1.9E-02	1.9E-02
Λύση 4 ^η	3.7E-02	6.1E-10	3.7E-02	3.7E-02	2.1E-01	1.9E-12	2.1E-01	2.1E-01
	Απρίλιος				Οκτώβριος			
Λύση 1 ^η	1.7E-03	3.0E-11	1.7E-03	1.7E-03	1.0E-05	1.0E-04	4.9E-13	1.0E-03
Λύση 2 ^η	1.4E-07	1.1E-06	1.8E-13	1.1E-05	7.9E-11	1.9E-10	5.8E-13	1.5E-09
Λύση 3 ^η	1.3E-05	6.3E-05	5.6E-13	4.6E-04	8.6E-11	1.8E-10	5.9E-13	1.3E-09
Λύση 4 ^η	2.7E-02	3.1E-10	2.7E-02	2.7E-02	6.2E-03	7.5E-10	6.2E-03	6.2E-03
	Μάιος				Νοέμβριος			
Λύση 1 ^η	2.3E-10	2.2E-09	1.4E-14	2.2E-08	8.0E-07	4.5E-06	3.2E-13	4.1E-05
Λύση 2 ^η	6.4E-11	1.2E-10	2.5E-13	7.9E-10	1.2E-10	6.7E-10	4.0E-13	6.7E-09
Λύση 3 ^η	4.7E-11	8.8E-11	4.0E-13	5.8E-10	3.4E-11	5.9E-11	1.9E-13	3.6E-10
Λύση 4 ^η	2.3E-02	3.1E-10	2.3E-02	2.3E-02	4.7E-02	3.4E-10	4.7E-02	4.7E-02
	Ιούνιος				Δεκέμβριος			
Λύση 1 ^η	1.5E-09	1.4E-08	2.7E-12	1.4E-07	2.0E-08	1.4E-07	2.6E-12	1.2E-06
Λύση 2 ^η	4.7E-11	8.7E-11	2.1E-13	5.3E-10	1.5E-10	3.2E-10	5.1E-13	2.1E-09
Λύση 3 ^η	8.1E-11	1.7E-10	1.6E-13	1.0E-09	1.4E-08	1.4E-07	5.4E-13	1.4E-06
Λύση 4 ^η	1.6E-02	1.2E-10	1.6E-02	1.6E-02	7.1E-03	1.6E-10	7.1E-03	7.1E-03

Πίνακας 6.12: Αποτελέσματα 100 ανεξάρτητων δοκιμών για τη βαθμονόμηση του κλασικού μοντέλου Bartlett-Lewis

Οι τιμές των παραμέτρων που προέκυψαν από τη βελτιστοποίηση δίνονται στους πίνακες που ακολουθούν (Πίνακας 6.13 -Πίνακας 6.24), ενώ η εποχιακή διακύμανση των παραμέτρων φαίνεται στα Γράφημα 6.13 Γράφημα 6.18.

	Ιανουάριος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0103	0.2860	2.9627	4.8822	2.7060	11.3587	3.56E-14
Λύση 2 ^η	0.0088	0.1745	1.3948	2.8462	2.3271	8.9934	1.78E-12
Λύση 3 ^η	0.0092	0.2186	2.0639	3.6618	2.4614	10.4403	8.96E-14
Λύση 4 ^η	0.0097	0.1519	0.7611	2.1219	2.3479	6.0116	1.54E-02

Πίνακας 6.13: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Ιανουάριο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Φεβρουάριος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0076	0.3216	4.0008	5.7014	2.9172	13.4403	4.21E-14
Λύση 2 ^η	0.0075	0.1502	0.6975	1.8874	2.3319	5.6447	2.83E-13
Λύση 3 ^η	0.0071	0.1961	1.3302	2.4415	2.3102	7.7817	4.31E-13
Λύση 4 ^η	0.0075	0.1523	0.6786	1.8508	2.3775	5.4554	6.73E-03

Πίνακας 6.14: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Φεβρουάριο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Μάρτιος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0020	0.0163	0.2261	1.5349	2.4287	14.8826	1.48E-07
Λύση 2 ^η	0.0073	0.1070	0.3590	1.6365	2.3857	4.3566	9.90E-13
Λύση 3 ^η	0.0077	0.1873	0.7887	1.9925	2.3114	5.2119	1.01E-12
Λύση 4 ^η	0.0074	0.1178	0.3884	1.5898	2.3088	4.2963	3.69E-02

Πίνακας 6.15: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Μάρτιο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Απρίλιος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0050	0.3976	8.2605	60.0000	17.5980	21.7767	1.72E-03
Λύση 2 ^η	0.0044	0.2538	2.8517	3.5513	2.1090	12.2382	1.82E-13
Λύση 3 ^η	0.0046	0.2860	3.4779	4.1448	2.1873	13.1596	5.60E-13
Λύση 4 ^η	0.0053	0.1932	0.7312	1.6631	2.1027	4.7851	2.66E-02

Πίνακας 6.16: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Απρίλιο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Μάιος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0052	0.4634	1.3706	7.6010	8.9686	3.9579	1.45E-14
Λύση 2 ^η	0.0048	0.1270	0.2292	3.3655	6.0047	2.8039	2.47E-13
Λύση 3 ^η	0.0054	0.1925	0.3143	3.5744	6.1136	2.6329	4.05E-13
Λύση 4 ^η	0.0053	0.0992	0.1304	3.1349	6.2203	2.3152	2.28E-02

Πίνακας 6.17: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Μάιο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Ιούνιος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0020	0.2406	0.3730	2.9250	8.6582	2.5503	2.72E-12
Λύση 2 ^η	0.0018	0.1255	0.2039	2.6498	8.5476	2.6248	2.13E-13
Λύση 3 ^η	0.0020	0.1667	0.2405	2.7046	8.5620	2.4431	1.63E-13
Λύση 4 ^η	0.0019	0.1103	0.1469	2.5206	8.6288	2.3325	1.61E-02

Πίνακας 6.18: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Ιούνιο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Ιούλιος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0014	0.2615	0.3835	4.7558	8.4201	2.4664	4.64E-14
Λύση 2 ^η	0.0013	0.1636	0.2368	4.1957	7.9489	2.4473	1.22E-13
Λύση 3 ^η	0.0015	0.8956	2.0951	16.2070	20.0000	3.3394	1.63E-02
Λύση 4 ^η	0.0014	0.7347	1.8450	16.0644	20.0000	3.5110	8.14E-01

Πίνακας 6.19: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Ιούλιο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Αύγουστος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0006	0.0215	0.0766	2.8454	5.7832	4.5704	3.40E-05
Λύση 2 ^η	0.0011	0.0533	0.0737	2.8317	5.7876	2.3835	1.30E-13
Λύση 3 ^η	0.0012	0.4251	0.7464	4.3518	6.5505	2.7560	1.56E-13
Λύση 4 ^η	0.0013	0.0576	0.0500	2.7316	5.7908	1.8673	3.72E-01

Πίνακας 6.20: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Αύγουστο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Σεπτέμβριος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0003	0.0151	0.1336	1.2997	7.7123	9.8525	6.21E-05
Λύση 2 ^η	0.0010	0.4818	5.4929	4.8158	6.9966	12.4004	8.34E-14
Λύση 3 ^η	0.0011	0.6970	10.0000	6.0290	6.3388	15.3477	1.90E-02
Λύση 4 ^η	0.0010	0.5952	10.0000	8.5251	8.2716	17.7997	2.09E-01

Πίνακας 6.21: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Σεπτέμβριο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Οκτώβριος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0056	0.1328	0.4633	2.2050	5.3397	4.4886	4.90E-13
Λύση 2 ^η	0.0041	0.0534	0.2298	1.9255	5.3641	5.3047	5.84E-13
Λύση 3 ^η	0.0047	0.0788	0.3056	2.0220	5.3543	4.8803	5.91E-13
Λύση 4 ^η	0.0042	0.0585	0.2474	1.9225	5.3479	5.2313	6.23E-03

Πίνακας 6.22: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Οκτώβριο, για κάθε τακτική επίλυσης

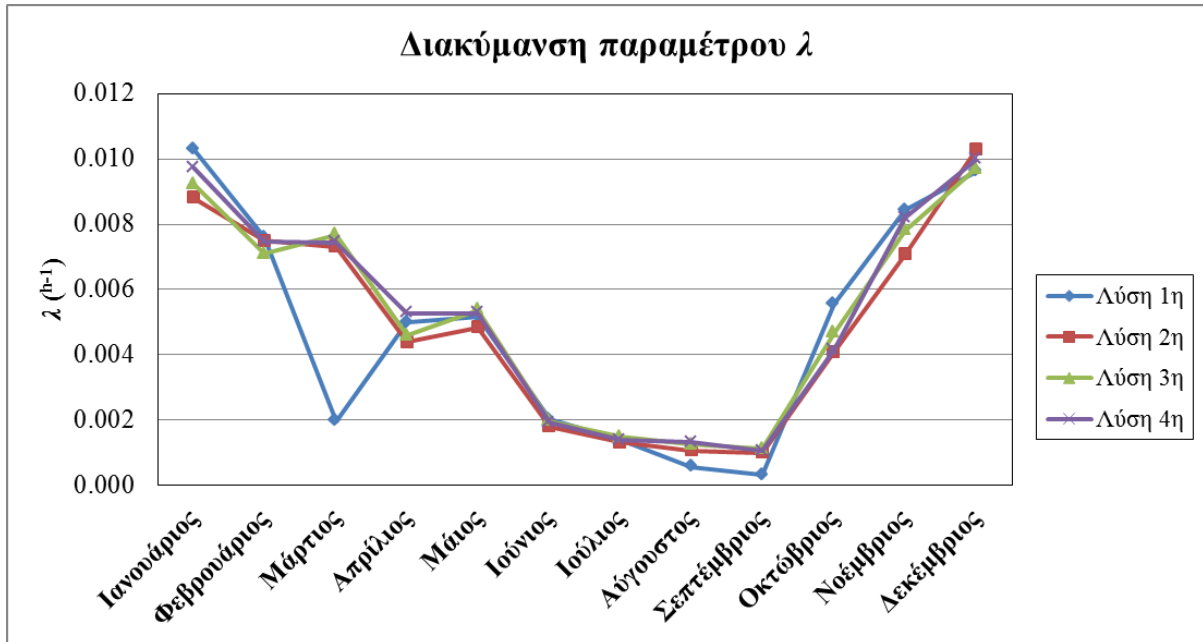
	Νοέμβριος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0084	0.3851	3.2005	7.2522	5.8154	9.3099	3.17E-13
Λύση 2 ^η	0.0071	0.1374	0.6060	2.4078	3.9500	5.4114	3.96E-13
Λύση 3 ^η	0.0078	0.2431	1.3357	3.3358	4.1311	6.4953	1.94E-13
Λύση 4 ^η	0.0082	0.1040	0.2672	1.9098	4.1033	3.5696	4.73E-02

Πίνακας 6.23: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Νοέμβριο, για κάθε τακτική επίλυσης

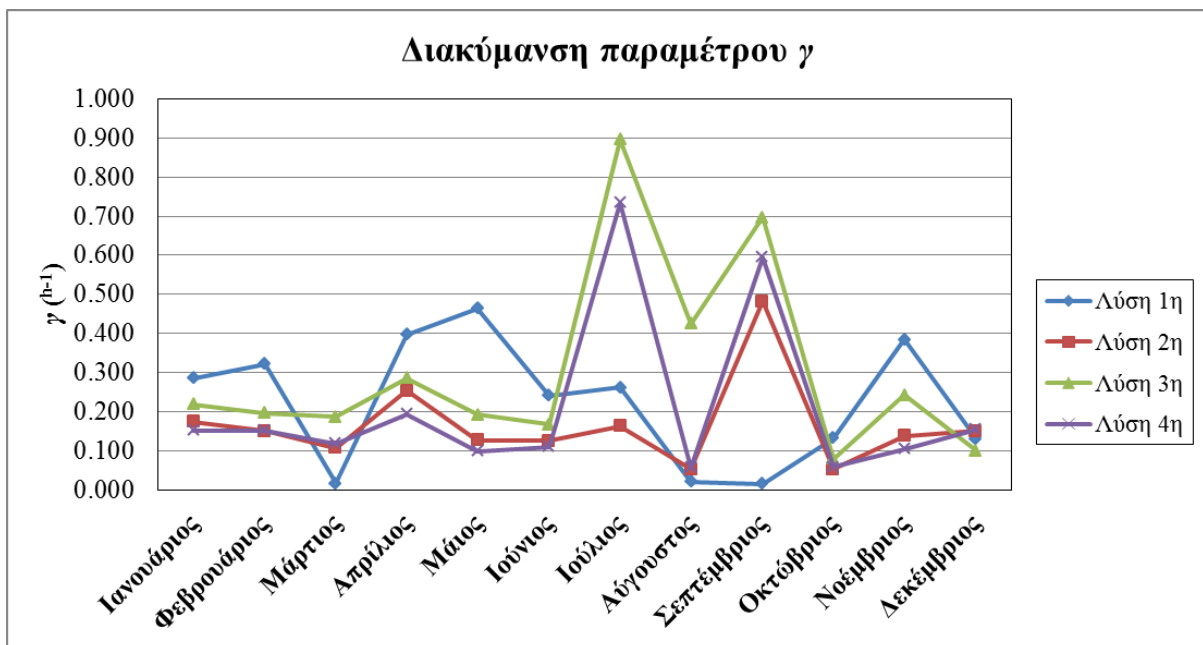
	Δεκέμβριος						
	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_x (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Λύση 1 ^η	0.0096	0.1312	0.6299	1.8611	2.6495	5.8020	2.56E-12
Λύση 2 ^η	0.0103	0.1510	0.6899	1.9009	2.6358	5.5695	5.13E-13
Λύση 3 ^η	0.0097	0.0996	0.4024	1.6575	2.6932	5.0399	5.39E-13
Λύση 4 ^η	0.0100	0.1542	0.7971	2.0182	2.6010	6.1702	7.14E-03

Πίνακας 6.24: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Δεκέμβριο, για κάθε τακτική επίλυσης

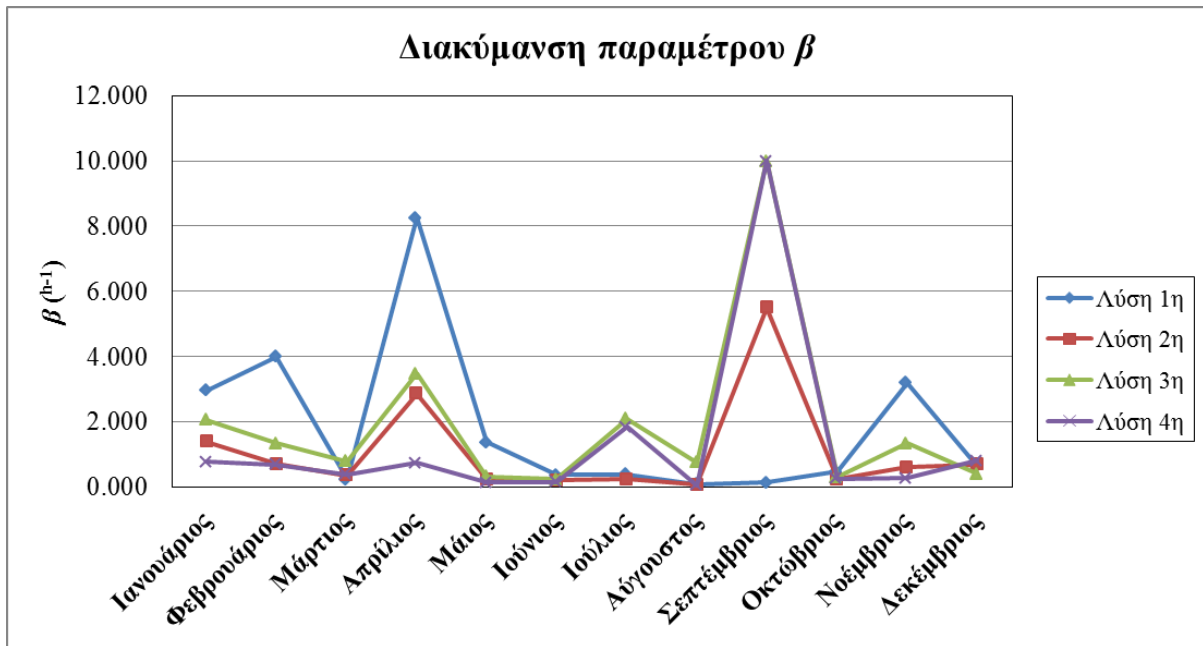
Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα Γράφημα 6.13 Γράφημα 6.18, στα οποία απεικονίζεται τόσο η ετήσια διακύμανση των τιμών των παραμέτρων όσο και η διαφορά στις τιμές των παραμέτρων ανάλογα με την τακτική επίλυσης που ακολουθήθηκε.



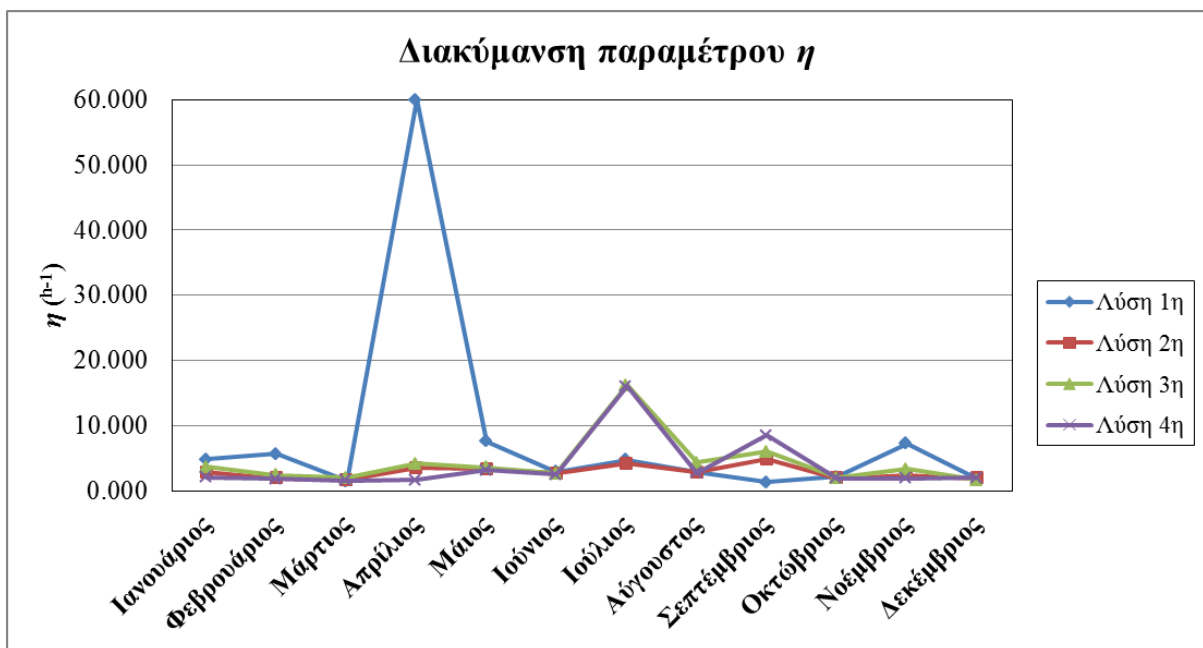
Γράφημα 6.13: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου λ



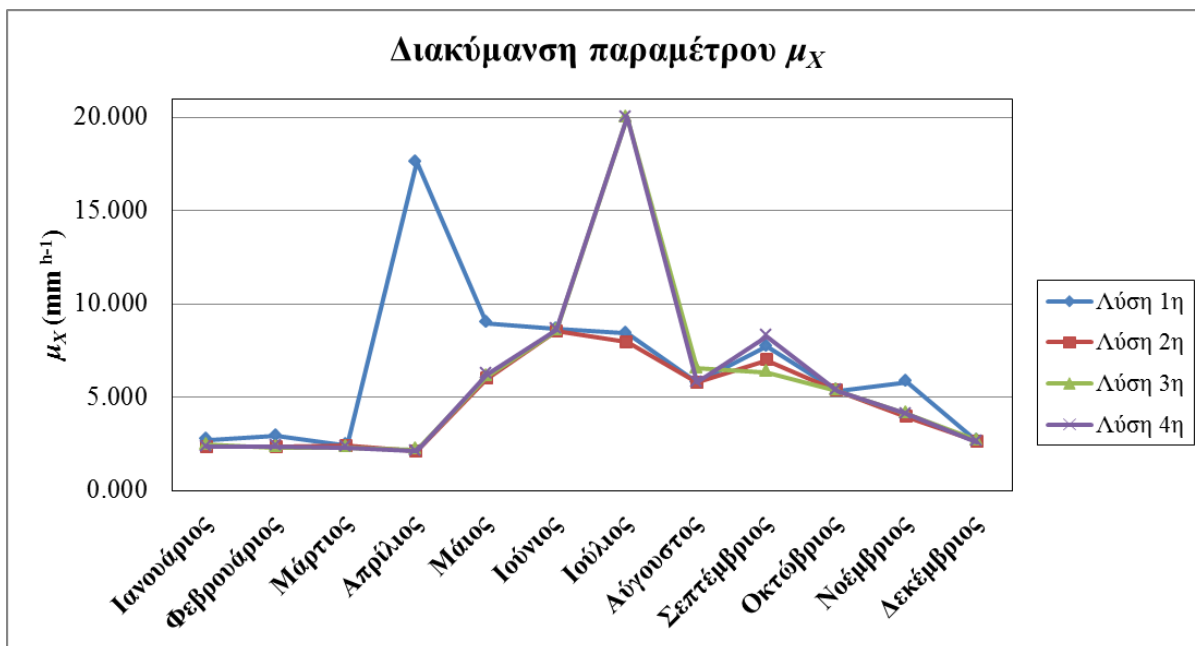
Γράφημα 6.14: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου γ



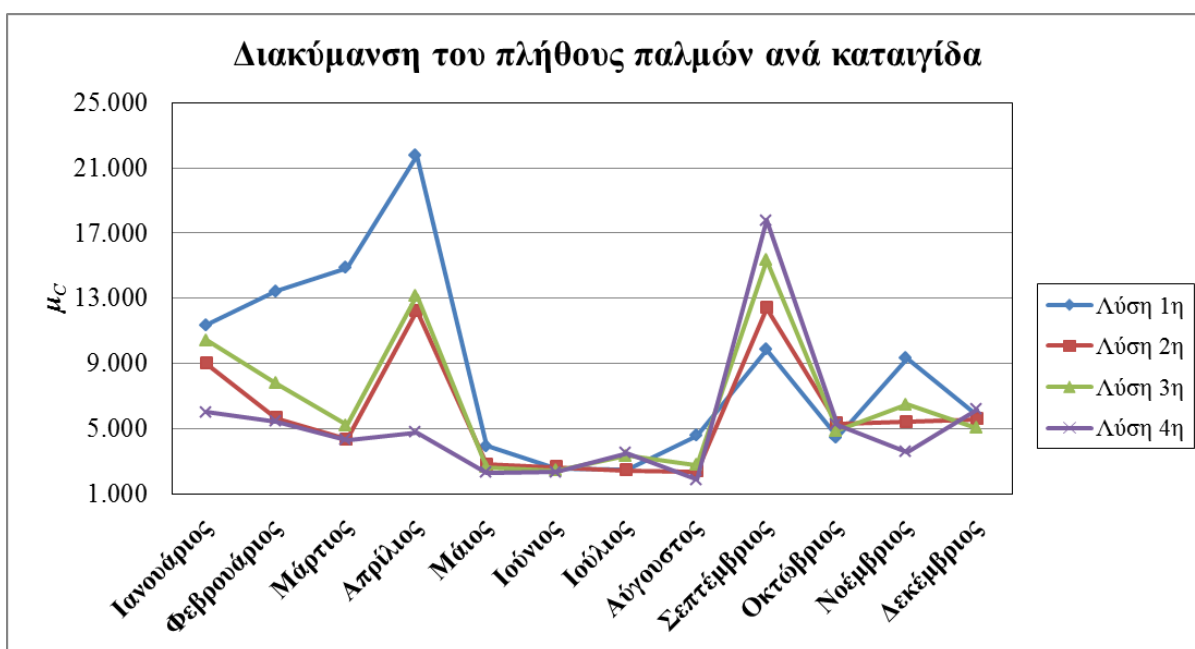
Γράφημα 6.15: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου β



Γράφημα 6.16: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου η



Γράφημα 6.17: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου μ_{χ}



Γράφημα 6.18: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου μ_c

Όσον αφορά την εποχιακή διακύμανση των παραμέτρων εντός του έτους, ασφαλή συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν μόνο για τις παραμέτρους λ και μ_{χ} . Όπως παρατηρούμε από το Γράφημα 6.13, για τους μήνες με πολλές και συχνές καταιγίδες (Νοέμβριος-Φεβρουάριος) προέκυψαν μεγαλύτερες τιμές για τη παράμετρο λ , που συνεπάγεται μικρές μέσες χρονικές αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών καταιγίδων. Αντίθετα, για τους μήνες με

αραιότερες καταιγίδες (Μάρτιος-Οκτώβριος) οι τιμές της εν λόγω παραμέτρου είναι μικρότερες. Επιπλέον, κατά τους μήνες αυτούς οι τιμές της παραμέτρου $\mu\chi$ είναι μεγαλύτερες, γεγονός που υποδηλώνει την εμφάνιση καταιγίδων μεγαλύτερης έντασης (Γράφημα 6.17). Οι καταιγίδες κατά τους μήνες αυτούς είναι γενικά μικρής διάρκειας και θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτό αποτυπώνεται στην εποχιακή διακύμανση της παραμέτρου γ για κάποιες τακτικές επίλυσης (Γράφημα 6.14). Όσον αφορά τις παραμέτρους η και β δεν μπορεί να εξαχθεί σαφές συμπέρασμα που να συνδέεται άμεσα με κάποια φυσική ερμηνεία ή μέγεθος. Στην ίδια παρατήρηση κατέληξαν και οι Onof και Wheeler (1994a), μελετώντας την εποχιακή διακύμανση των παραμέτρων για τη βροχή της Αγγλίας. Εκτός από την μεταβολή των πέντε ανεξάρτητων μεταβλητών επίλυσης του μοντέλου BLRPM εντός του έτους, παρατίθεται και η διακύμανση της εξαρτημένης μεταβλητής, $\mu\sigma$, που δίνει τον μέσο αριθμό παλμών ανά παραγόμενη καταιγίδα. Όπως φαίνεται και από το Γράφημα 6.18 για τους μήνες με τη μικρότερη βροχόπτωση (Μάιος-Αύγουστος) το μοντέλο χρειάζεται μικρότερο πλήθος παλμών για να προσομοιώσει τη βροχή. Αυτό φαίνεται λογικό γιατί κατά τους μήνες αυτούς τα βροχερά γεγονότα έχουν πολύ μικρότερη διάρκεια και χαρακτηρίζονται από μικρότερη εσωτερική διακύμανση.

Εκτός από την εποχιακή διακύμανση των τιμών των παραμέτρων, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μεταβολή στις τιμές των βέλτιστων παραμέτρων ανάλογα με την τακτική επίλυσης, δηλαδή το σύνολο στατιστικών μεγεθών, που εφαρμόζεται. Όπως παρατηρούμε, μικρότερη μεταβολή σημειώνεται στις τιμές της παραμέτρου λ , καθώς για όλους τους μήνες οι τιμές που προκύπτουν είναι πολύ κοντά. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει και η παράμετρος $\mu\chi$ με απόκλιση να παρατηρείται στους μήνες Ιούλιο, για τις Λύσεις 3 και 4, και Απρίλιο για τη Λύση 1. Μικρή μεταβολή παρουσιάζει και η παράμετρος η , με εξαίρεση τη Λύση 1 που δίνει τιμή ακριβώς πάνω στα όρια του εφικτού χώρου, για το μήνα Απρίλιο. Τη μεγαλύτερη διακύμανση, μεταξύ των τεσσάρων διαφορετικών λύσεων, παρουσιάζουν οι παράμετροι γ και β , με τις τιμές τους ωστόσο να ακολουθούν την ίδια εποχιακή διακύμανση και να βρίσκονται εντός των ανεχτών ορίων. Οι συνδυασμοί παραμέτρων που έχουν προκύψει από διαφορετικές τακτικές επίλυσης, και αποδίδουν παρόμοιες ή ίδιες τιμές στοχικών συναρτήσεων, μπορεί να φαίνονται εκ πρώτης όψης ισοδύναμοι αλλά, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, διαφέρουν έντονα ως προς την ικανότητά τους να διατηρούν και τελικά να αναπαράγουν τα βασικά χαρακτηριστικά της βροχής, σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες.

6.5.2.3 Αξιολόγηση των λύσεων και συμπεράσματα

Η ποιότητα των λύσεων που προέκυψαν από κάθε διαφορετική τακτική επίλυσης για κάθε μήνα, κρίνεται από την ικανότητά τους να διατηρούν τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά της βροχής σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες. Για την ποσοτικοποίηση της ποιότητας συγκρίνεται η απόλυτη τιμή των εκατοστιαίων αποκλίσεων των ιστορικών στατιστικών μεγεθών από τα αντίστοιχα θεωρητικά μεγέθη, που προκύπτουν από τις εξισώσεις του μοντέλου. Το μέτρο καλής προσαρμογής που υιοθετείται δίνεται από την παρακάτω εξίσωση και χρησιμοποιήθηκε από τους Velghe et al. (1994).

$$S = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \left| 1 - \frac{X_i}{X_{hist,i}} \right| \right) \times 100\%$$

όπου X_i το θεωρητικό στατιστικό μέγεθος, $X_{hist,i}$ το αντίστοιχο ιστορικό και n το πλήθος στατιστικών μεγεθών που χρησιμοποιούνται.

Τα θεωρητικά στατιστικά μεγέθη, όπως προκύπτουν με εφαρμογή των παραπάνω παραμέτρων στις θεωρητικές εξισώσεις του μοντέλου δίνονται στους πίνακες που ακολουθούν. Ταυτόχρονα δίνονται οι εκατοστιαίες αποκλίσεις S_{1h} , S_{6h} , S_{12h} , S_{24h} για τις υπό μελέτη χρονικές κλίμακες καθώς και μια μέση απόκλιση, S , στην οποία συνυπολογίζονται και τα 12 στατιστικά μεγέθη. Με κόκκινο χρώμα τονίζονται τα στατιστικά μεγέθη στα οποία αποδίδεται η μεγάλη απόκλιση που παρατηρείται.

	Ωραία Βροχόπτωση (1h)						Κλίμακα συνθροιστής: 6h						Κλίμακα συνθροιστής: 12h						Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)					
	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	ρ (2)	ρ (3)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr		
Ιανουάριος	0.0648	0.4580	0.4536	0.2634	0.1966	0.890	0.3887	1.7766	0.2828	0.8033	0.7774	2.9002	0.1958	0.7394	1.5547	4.5324	0.1168	0.626						
Φεβρουάριος	0.0523	0.4280	0.4782	0.2697	0.1917	0.913	0.3135	1.6854	0.2701	0.8397	0.6270	2.6884	0.2005	0.7818	1.2541	4.0677	0.1190	0.672						
Μάρτιος	0.0465	0.4002	0.5040	0.2546	0.1559	0.919	0.2788	1.4663	0.2317	0.8548	0.5575	2.3961	0.1579	0.8064	1.1150	3.6481	0.0822	0.713						
Απρίλιος	0.0318	0.3214	0.5040	0.3261	0.2041	0.942	0.1911	1.3146	0.2317	0.8871	0.3822	2.0752	0.1579	0.8451	0.7644	3.2122	0.0822	0.765						
Μάιος	0.0242	0.3639	0.2462	0.0877	0.0661	0.963	0.1451	1.1574	0.1256	0.9256	0.2902	1.7106	0.1055	0.8935	0.5803	2.5802	0.0875	0.834						
Ιούνιος	0.0152	0.3701	0.2981	0.1171	0.0845	0.986	0.0913	1.1883	0.1425	0.9672	0.1827	1.7853	0.1094	0.9517	0.3654	2.6943	0.0845	0.918						
Ιούλιος	0.0061	0.1942	0.2022	0.0616	0.0358	0.992	0.0364	0.5847	0.1239	0.9827	0.0727	0.9111	0.0244	0.9751	0.1455	1.2999	0.0611	0.956						
Αύγουστος	0.0052	0.1703	0.2535	0.0388	0.0153	0.994	0.0310	0.5136	0.1247	0.9865	0.0621	0.7938	0.0565	0.9788	0.1241	1.1426	0.1152	0.966						
Σεπτέμβριος	0.0181	0.4511	0.5006	0.2873	0.2058	0.983	0.1085	1.6516	0.2335	0.9620	0.2170	2.7551	0.0516	0.9460	0.4339	3.9521	0.0409	0.912						
Οκτώβριος	0.0604	0.6419	0.3982	0.1731	0.0897	0.940	0.3625	2.2662	0.2523	0.8917	0.7250	3.5512	0.2465	0.8530	1.4501	5.5646	0.2345	0.783						
Νοεμβριος	0.0629	0.5610	0.3977	0.2251	0.1468	0.914	0.3772	2.0601	0.2118	0.8449	0.7543	3.2503	0.1542	0.7947	1.5087	5.0167	0.1258	0.704						
Δεκέμβριος	0.0794	0.5590	0.4750	0.2571	0.1850	0.894	0.4763	2.1105	0.3040	0.8092	0.9527	3.3266	0.2447	0.7400	1.9054	5.2876	0.1177	0.629						

Λύση 1 ^η	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)					Κλίμακα συνάθροισης: 6h			Κλίμακα συνάθροισης: 12h			Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)			S _{1h}	S _{6h}	S _{12h}	S _{24h}	S
	μ (mm)	σ (mm)	ρ(1)	ρ(2)	ρ(3)	μ (mm)	σ (mm)	ρ(1)	μ (mm)	σ (mm)	ρ(1)	μ (mm)	σ (mm)	ρ(1)					
Ιανουάριος	0.0648	0.4579	0.4530	0.2898	0.2174	0.3888	1.7766	0.2828	0.7776	2.8457	0.1527	1.5552	4.3208	0.0705	0.058	0.015	7.973	14.767	5.703
Φεβρουάριος	0.0523	0.4280	0.4782	0.3107	0.2252	0.3135	1.6854	0.2701	0.6270	2.6863	0.1391	1.2541	4.0545	0.0636	0.000	0.000	10.237	15.622	6.465
Μάρτιος	0.0465	0.4002	0.4699	0.1797	0.1159	0.2787	1.4665	0.2970	0.5574	2.3620	0.3711	1.1149	3.9114	0.4350	2.260	9.413	45.472	145.395	50.635
Απρίλιος	0.0318	0.3234	0.5052	0.3375	0.2268	0.1911	1.2908	0.2417	0.3822	2.0341	0.1161	0.7644	3.0391	0.0529	0.297	2.053	9.497	13.695	6.386
Μάιος	0.0242	0.3639	0.2462	0.1195	0.0752	0.1451	1.1574	0.1256	0.2902	1.7366	0.0626	0.5803	2.5317	0.0297	0.000	0.000	14.045	22.646	9.173
Ιούνιος	0.0152	0.3701	0.2981	0.0875	0.0609	0.0913	1.1883	0.1425	0.1827	1.7963	0.0903	0.3654	2.6525	0.0457	0.000	0.000	6.029	15.835	5.466
Ιούλιος	0.0061	0.1942	0.2022	0.0663	0.0503	0.0364	0.5847	0.1239	0.0727	0.8765	0.0778	0.1455	1.2869	0.0390	0.000	0.000	74.158	12.373	21.633
Αύγουστος	0.0052	0.1700	0.2538	0.0398	0.0269	0.0310	0.5149	0.1241	0.0620	0.7720	0.1635	0.1241	1.1777	0.2095	0.095	0.273	64.017	28.309	23.174
Σεπτέμβριος	0.0181	0.4508	0.4993	0.1856	0.0994	0.1085	1.6569	0.2319	0.2171	2.6008	0.2798	0.4341	4.1609	0.3453	0.129	0.351	149.249	250.165	99.974
Οκτώβριος	0.0604	0.6419	0.3982	0.1547	0.1141	0.3625	2.2662	0.2523	0.7250	3.5864	0.2007	1.4501	5.5576	0.1191	0.000	0.000	6.527	16.451	5.745
Νοέμβριος	0.0629	0.5610	0.3977	0.2410	0.1639	0.3772	2.0601	0.2118	0.7543	3.2071	0.1053	1.5087	4.7683	0.0486	0.000	0.000	11.014	22.116	8.283
Δεκέμβριος	0.0794	0.5590	0.4750	0.2190	0.1613	0.4763	2.1105	0.3040	0.9527	3.4084	0.2353	1.9054	5.3574	0.1369	0.000	0.000	2.103	5.876	1.995

Πίνακας 6.25: Θεωρητικά στατιστικά μεγέθη (1^η τακτική επίλυσης)

Λύση 2 ^η	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)					Κλίμακα συνάθροισης: 6h			Κλίμακα συνάθροισης: 12h			Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)			S _{1h}	S _{6h}	S _{12h}	S _{24h}	S
	μ (mm)	σ (mm)	ρ(1)	ρ(2)	ρ(3)	μ (mm)	σ (mm)	ρ(1)	μ (mm)	σ (mm)	ρ(1)	μ (mm)	σ (mm)	ρ(1)					
Ιανουάριος	0.0648	0.4579	0.4530	0.2592	0.2106	0.3888	1.7658	0.3408	0.7776	2.8917	0.2284	1.5552	4.5324	0.1168	0.057	7.047	5.649	0.011	3.191
Φεβρουάριος	0.0523	0.4280	0.4782	0.2237	0.1640	0.3135	1.6206	0.2955	0.6270	2.6085	0.2158	1.2541	4.0677	0.1190	0.000	4.419	3.544	0.000	1.991
Μάρτιος	0.0465	0.4002	0.4699	0.1880	0.1233	0.2788	1.4721	0.2589	0.5575	2.3359	0.2195	1.1150	3.6481	0.1429	2.255	4.047	13.833	24.585	11.180
Απρίλιος	0.0318	0.3214	0.5040	0.3204	0.2466	0.1911	1.2913	0.3149	0.3822	2.0940	0.1765	0.7644	3.2122	0.0822	0.000	12.562	4.226	0.000	4.197
Μάιος	0.0242	0.3639	0.2462	0.0643	0.0514	0.1451	1.1241	0.1584	0.2902	1.7110	0.1370	0.5803	2.5802	0.0875	0.000	9.645	9.971	0.000	4.904
Ιούνιος	0.0152	0.3701	0.2981	0.0736	0.0515	0.0913	1.1781	0.1552	0.1827	1.7907	0.1319	0.3654	2.6942	0.0845	0.000	3.237	6.952	0.000	2.547
Ιούλιος	0.0061	0.1941	0.2022	0.0543	0.0444	0.0364	0.5804	0.1343	0.0727	0.8742	0.1055	0.1455	1.2999	0.0611	0.002	3.056	112.179	0.002	28.810
Αύγουστος	0.0052	0.1703	0.2535	0.0376	0.0237	0.0310	0.5138	0.1062	0.0621	0.7642	0.1177	0.1241	1.1426	0.1152	0.000	4.974	37.308	0.000	10.571
Σεπτέμβριος	0.0181	0.4511	0.5006	0.2789	0.1720	0.1085	1.7370	0.1890	0.2169	2.6787	0.0884	0.4339	3.9521	0.0409	0.002	8.081	24.682	0.002	8.191
Οκτώβριος	0.0604	0.6419	0.3982	0.1295	0.0866	0.3625	2.2225	0.2419	0.7250	3.5027	0.2619	1.4501	5.5646	0.2345	0.000	2.016	2.545	0.000	1.140
Νοέμβριος	0.0629	0.5610	0.3977	0.1718	0.1340	0.3772	2.0083	0.2807	0.7543	3.2142	0.2180	1.5087	5.0167	0.1258	0.000	11.687	14.161	0.000	6.462
Δεκέμβριος	0.0794	0.5590	0.4750	0.2207	0.1617	0.4763	2.1106	0.2928	0.9527	3.3938	0.2137	1.9053	5.2875	0.1177	0.000	1.228	4.904	0.000	1.533

Πίνακας 6.26: Θεωρητικά στατιστικά μεγέθη (2^η τακτική επίλυσης)

Λύση 3 ^η	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)					Κλίμακα συνάθροισης: 6h			Κλίμακα συνάθροισης: 12h			Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)			S _{1h}	S _{6h}	S _{12h}	S _{24h}	S
	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	ρ (2)	ρ (3)	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)					
Ιανουάριος	0.0648	0.4579	0.4530	0.2817	0.2242	0.3888	1.7818	0.3248	0.7776	2.9002	0.1958	1.5552	4.4852	0.0940	0.058	5.048	0.013	6.863	2.995
Φεβρουάριος	0.0523	0.4280	0.4782	0.2606	0.2027	0.3135	1.6585	0.3137	0.6270	2.6884	0.2005	1.2541	4.1656	0.0997	0.000	5.918	0.000	6.219	3.034
Μάρτιος	0.0465	0.4002	0.4699	0.2183	0.1577	0.2788	1.5035	0.2699	0.5575	2.3961	0.1796	1.1150	3.6804	0.0922	2.255	6.348	4.573	4.335	4.378
Απρίλιος	0.0318	0.3214	0.5040	0.3243	0.2428	0.1911	1.2893	0.2953	0.3822	2.0752	0.1579	0.7644	3.1580	0.0726	0.000	9.800	0.000	4.457	3.564
Μάιος	0.0242	0.3639	0.2462	0.0718	0.0556	0.1451	1.1291	0.1476	0.2902	1.7106	0.1055	0.5803	2.5435	0.0569	0.000	6.640	0.000	12.124	4.691
Ιούνιος	0.0152	0.3701	0.2981	0.0761	0.0527	0.0913	1.1793	0.1459	0.1827	1.7853	0.1094	0.3654	2.6593	0.0621	0.000	1.042	0.000	9.259	2.575
Ιούλιος	0.0061	0.1998	0.1950	0.0702	0.0287	0.0364	0.5906	0.0583	0.0728	0.8593	0.0278	0.1456	1.2320	0.0135	2.166	17.996	6.564	27.714	13.610
Αύγουστος	0.0052	0.1703	0.2535	0.0893	0.0574	0.0310	0.5328	0.1097	0.0621	0.7938	0.0565	0.1241	1.1538	0.0270	0.000	5.262	0.000	25.837	7.775
Σεπτέμβριος	0.0181	0.4605	0.4980	0.2348	0.1169	0.1085	1.7136	0.1329	0.2170	2.5794	0.0604	0.4339	3.7565	0.0285	0.866	15.614	7.827	11.721	9.007
Οκτώβριος	0.0604	0.6419	0.3982	0.1398	0.0989	0.3625	2.2423	0.2541	0.7250	3.5512	0.2465	1.4501	5.6070	0.1860	0.000	0.587	0.000	7.148	1.934
Νοέμβριος	0.0629	0.5610	0.3977	0.2101	0.1612	0.3772	2.0480	0.2594	0.7543	3.2503	0.1542	1.5087	4.9383	0.0740	0.000	7.688	0.000	14.243	5.483
Δεκέμβριος	0.0794	0.5590	0.4750	0.1985	0.1355	0.4763	2.0775	0.2821	0.9527	3.3266	0.2447	1.9054	5.2488	0.1629	0.000	2.930	0.000	13.047	3.994

Πίνακας 6.27: Θεωρητικά στατιστικά μεγέθη (3^η τακτική επίλυσης)

Λύση 4 ^η	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)					Κλίμακα συνάθροισης: 6h			Κλίμακα συνάθροισης: 12h			Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)			S _{1h}	S _{6h}	S _{12h}	S _{24h}	S
	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	ρ (2)	ρ (3)	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)					
Ιανουάριος	0.0648	0.4667	0.4540	0.2146	0.1634	0.3887	1.7478	0.3002	0.7774	2.8184	0.2188	1.5549	4.4003	0.1199	0.666	2.586	4.858	1.866	2.494
Φεβρουάριος	0.0523	0.4331	0.4808	0.2231	0.1618	0.3135	1.6397	0.2904	0.6270	2.6341	0.2110	1.2541	4.0994	0.1159	0.582	3.416	2.419	1.130	1.887
Μάρτιος	0.0465	0.3986	0.4831	0.1996	0.1306	0.2788	1.4818	0.2603	0.5575	2.3527	0.2116	1.1150	3.6623	0.1315	1.519	4.480	11.927	20.113	9.510
Απρίλιος	0.0318	0.3293	0.5132	0.2417	0.1649	0.1911	1.2663	0.2643	0.3822	2.0135	0.1720	0.7644	3.0827	0.0875	1.437	5.921	3.950	3.478	3.697
Μάιος	0.0242	0.3733	0.2416	0.0456	0.0338	0.1451	1.1297	0.1243	0.2902	1.6941	0.1181	0.5803	2.5333	0.0865	1.486	1.144	4.317	0.976	1.981
Ιούνιος	0.0152	0.3737	0.2994	0.0642	0.0411	0.0913	1.1794	0.1360	0.1827	1.7776	0.1206	0.3654	2.6612	0.0827	0.472	1.787	3.544	1.090	1.723
Ιούλιος	0.0061	0.1983	0.2019	0.0854	0.0410	0.0364	0.5965	0.0736	0.0728	0.8741	0.0351	0.1456	1.2576	0.0169	0.803	14.238	15.954	25.197	14.048
Αύγουστος	0.0052	0.1714	0.2564	0.0322	0.0167	0.0310	0.5144	0.0836	0.0621	0.7573	0.0857	0.1241	1.1160	0.0808	0.597	11.036	18.739	10.726	10.275
Σεπτέμβριος	0.0181	0.4531	0.5068	0.2688	0.1482	0.1085	1.7270	0.1589	0.2170	2.6292	0.0724	0.4339	3.8505	0.0338	0.556	12.175	14.971	6.593	8.574
Οκτώβριος	0.0604	0.6433	0.4023	0.1345	0.0910	0.3625	2.2393	0.2474	0.7250	3.5369	0.2614	1.4501	5.6177	0.2250	0.415	1.043	2.149	1.672	1.320
Νοέμβριος	0.0629	0.5771	0.4050	0.1338	0.0864	0.3772	2.0042	0.2146	0.7543	3.1238	0.1888	1.5087	4.8166	0.1275	1.571	1.349	8.768	1.789	3.369
Δεκέμβριος	0.0794	0.5549	0.4727	0.2286	0.1724	0.4763	2.1067	0.3057	0.9527	3.4044	0.2201	1.9054	5.3181	0.1196	0.405	0.247	4.130	0.735	1.379

Πίνακας 6.28: Θεωρητικά στατιστικά μεγέθη (4^η τακτική επίλυσης)

Όπως ήταν λογικό και γίνεται εμφανές από τους παραπάνω πίνακες, το κλασικό μοντέλο Bartlett-Lewis διατηρεί με μεγάλη πιστότητα τα στατιστικά μεγέθη που έχουν χρησιμοποιηθεί για την εύρεση των παραμέτρων του. Γενικά, τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ωριαίας χρονικής κλίμακας διατηρούνται για όλους τους μήνες και από τις τέσσερις τακτικές επίλυσης, ενώ για τα στατιστικά μεγέθη των υπόλοιπων χρονικών κλιμάκων αυτό ισχύει κατά περίπτωση. Η λύση με τις χειρότερες επιδόσεις μπορεί να θεωρηθεί η 1^η (Πίνακας 6.25) καθώς το μοντέλο δεν καταφέρνει να διατηρήσει τη δομή αυτοσυσχέτισης των κλιμάκων συνάθροισης 12h και 24h, κανενός μήνα και ιδιαίτερα των μηνών Μαρτίου και Σεπτεμβρίου. Γενικότερα, οι μεγάλες αποκλίσεις που παρατηρούνται αποδίδονται εξολοκλήρου στο μέγεθος της αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξης και όχι στη μέση τιμή ή τη διασπορά. Όσον αφορά τις υπόλοιπες τρεις επιλύσεις, αυτές μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες, με τη Λύση 2 να υπερτερεί δεδομένου ότι διατηρεί τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ωριαίας και ημερήσιας βροχόπτωσης. Επιπλέον, η ίδια λύση προσεγγίζει με σχετική επιτυχία τα μεγέθη και των ενδιάμεσων κλιμάκων. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει για μια ακόμα φορά την ανάγκη να χρησιμοποιούνται, κατά τη βαθμονόμηση, στατιστικά μεγέθη κάποιας μεγαλύτερης χρονικής κλίμακας, έτσι ώστε να ενσωματωθούν στο μοντέλο οι δομές των μεγαλύτερων χρονικών κλιμάκων. Τέλος, αξίζει να σχολιαστούν τα πιο ισορροπημένα αποτελέσματα που αποδίδει η Λύση 4. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τον Πίνακα 6.28, για όλους τους μήνες, σε όλες τις χρονικές κλίμακες οι εκατοστιαίες αποκλίσεις είναι μικρές, χωρίς να παρατηρούνται ακραίες τιμές. Ταυτόχρονα, στους περισσότερους μήνες οι μικρότερες αποκλίσεις παρατηρούνται στην ωριαία και ημερήσια κλίμακα γεγονός που καθιστά ιδιαίτερα επιτυχημένη τη συγκεκριμένη τακτική επίλυσης.

6.5.3 Εφαρμογή του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis (BLRPM) στη βροχή της Αθήνας

6.5.3.1 Παράμετροι βαθμονόμησης του μοντέλου

Για την προσαρμογή του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis στα βροχομετρικά δεδομένα του αστεροσκοπείου ακολουθήθηκε παρόμοια διαδικασία με αυτή του κλασικού. Οι παράμετροι του τυχαίου μοντέλου είναι έξι και συνεπώς για την εύρεσή τους απαιτείται η χρήση τουλάχιστον έξι στατιστικών μεγεθών από διαφορετικές χρονικές κλίμακες. Όπως είδαμε στην Ενότητα 6.3.1, το μαθηματικό μοντέλο Bartlett-Lewis περιλαμβάνει μια ακόμα εξίσωση που δίνει τη πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης για μια δεδομένη κλίμακα συνάθροισης. Τα

όρια των πεδίων τιμών που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 6.29):

Παράμετροι	α (-)	λ (h⁻¹)	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h⁻¹)
Κάτω όριο	1.0001	0.0001	0.001	0.001	0.001	0.001
Άνω όριο	15.000	0.1000	20.000	20.000	0.999	20

Πίνακας 6.29: Όρια παραμέτρων για τη βελτιστοποίηση του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis

Η μορφή των εξισώσεων του μοντέλου επιβάλλουν την εισαγωγή των μαθηματικών περιορισμών $\alpha \geq 1$, $\alpha \neq 2$ και $\alpha \neq 3$. Επιπλέον, η απαίτηση για αριθμό παλμών ανά καταιγίδα μεγαλύτερο της μονάδος επιβάλλει τη χρήση του περιορισμού $\kappa/\varphi \geq 1$. Στην περίπτωση που κάποιος από τους παραπάνω περιορισμούς δεν ικανοποιούνται, η τιμή της στοχικής συνάρτησης έπαιρνε κάποια πολύ μεγάλη τιμή (10^8), έτσι ώστε η συγκεκριμένη λύση να μην κυριαρχήσει στην προσπάθεια εύρεσης του ολικού βέλτιστου. Η στοχική συνάρτηση που βελτιστοποιείται κάθε φορά είναι αυτή που δίνεται από την Εξίσωση 5-31.

Για την προσαρμογή του τυχαίου μοντέλου στα χαρακτηριστικά της βροχής της Αθήνας δοκιμάστηκαν και αξιολογήθηκαν πέντε διαφορετικές τακτικές επίλυσης που ενσωματώνουν διαφορετικά στατιστικά μεγέθη. Η επιλογή των στατιστικών μεγεθών έγινε με βάση τα κριτήρια που αναλύθηκαν στην Ενότητα 6.4.2 και όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε περιλαμβάνουν μεγέθη από κάποια μικρή αλλά και κάποια μεγαλύτερη χρονική κλίμακα. Οι τέσσερις πρώτες τακτικές επιλύσεις χρησιμοποιούν το ελάχιστο δυνατό πλήθος στατιστικών μεγεθών ενώ η 5^η λύση περιλαμβάνει όλα τα στατιστικά μεγέθη και από τις τέσσερις στάθμες συνάθροισης. Οι πέντε διαφορετικές τακτικές επίλυσης φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 6.30).

	Στάθμες συνάθροισης, ώρες (h)			
	$h=1$	$h=6$	$h=12$	$h=24$
Λύση 1 ^η	E,Var, Cov(1), PDR			Var,PDR
Λύση 2 ^η	E,Var, Cov(1), PDR			Cov(1),PDR
Λύση 3 ^η	E,Var, Cov(1), PDR	Var		PDR
Λύση 4 ^η	E,Var, Cov(1), PDR	Cov(1)		PDR
Λύση 5 ^η	E,Var, Cov(1), PDR	E,Var, Cov(1), PDR	E,Var, Cov(1), PDR	E,Var, Cov(1), PDR

Πίνακας 6.30: Τακτικές επίλυσης για τη βαθμονόμηση του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis

6.5.3.2 Αξιολόγηση του αλγορίθμου

Όπως και στη περίπτωση του κλασικού μοντέλου έτσι και στο τυχαίο, για να γίνει αντικειμενική αξιολόγηση του αλγορίθμου και των αποτελεσμάτων που αποδίδει, για κάθε μήνα και τακτική επίλυσης εκτελέστηκαν 100 στοχαστικά ανεξάρτητες δοκιμές. Η επίδοση του αλγορίθμου παρουσιάζεται συνοπτικά στον Πίνακα 6.31, που περιλαμβάνει τα στατιστικά χαρακτηριστικά των βέλτιστων τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης, Z_{min} , όπως προέκυψαν από τις ανεξάρτητες επαναλήψεις. Όπως γίνεται εμφανές, ο αλγόριθμος για όλους τους μήνες και όλες τακτικές επίλυσης καταφέρνει να εντοπίσει λύσεις με τιμές στοχικής συνάρτησης που κυμαίνονται σε τάξεις μεγέθους μικρότερες του 10^{-2} . Γενικά, οι μέσες τιμές της Z_{min} είναι υψηλότερες συγκριτικά με αυτές που προέκυψαν για το πρόβλημα του κλασικού μοντέλου (Πίνακας 6.12), ωστόσο αυτό ήταν αναμενόμενο λόγω του ότι το στο πρόβλημα βελτιστοποίησης, πλέον έχει εισαχθεί μια επιπλέον παράμετρος επίλυσης και μια επιπλέον εξίσωση, με ιδιαίτερα πολύπλοκη μαθηματική δομή. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως και στην περίπτωση του τυχαίου μοντέλου, ο αλγόριθμος εντοπίζει σε όλες τις ανεξάρτητες επαναλήψεις το ίδιο βέλτιστο σημείο, όταν η διαδικασία δεν τερματίζεται λόγω του κριτηρίου μέγιστου πλήθους υπολογισμού της στοχικής συνάρτησης.

	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή
	Ιανουάριος				Ιούλιος			
Λύση 1 ⁿ	5.19E-04	7.89E-06	5.17E-04	5.64E-04	2.26E-03	5.38E-03	1.49E-05	3.73E-02
Λύση 2 ⁿ	2.80E-03	1.86E-06	2.80E-03	2.81E-03	9.47E-04	1.14E-03	2.03E-05	2.34E-03
Λύση 3 ⁿ	1.31E-06	9.27E-06	1.61E-13	6.56E-05	1.05E-03	1.17E-03	8.78E-04	9.15E-03
Λύση 4 ⁿ	7.12E-04	2.68E-05	7.08E-04	8.97E-04	7.61E-04	4.51E-05	7.51E-04	1.06E-03
Λύση 5 ⁿ	2.62E-02	2.17E-10	2.62E-02	2.62E-02	3.91E-02	3.51E-11	3.91E-02	3.91E-02
	Φεβρουάριος				Αύγουστος			
Λύση 1 ⁿ	1.08E-03	1.82E-04	1.00E-03	2.16E-03	1.33E-04	2.24E-04	7.22E-06	5.89E-04
Λύση 2 ⁿ	1.85E-03	1.94E-04	1.80E-03	2.90E-03	3.60E-02	2.48E-01	4.29E-06	1.75E+00
Λύση 3 ⁿ	9.94E-08	1.45E-07	7.58E-08	1.09E-06	9.54E-05	5.62E-04	1.16E-05	3.99E-03
Λύση 4 ⁿ	8.66E-04	1.73E-04	8.11E-04	1.80E-03	3.12E-04	4.46E-04	6.51E-06	1.07E-03
Λύση 5 ⁿ	3.43E-02	6.44E-02	2.52E-02	4.80E-01	3.31E-01	8.76E-02	2.19E-01	6.67E-01
	Μάρτιος				Σεπτέμβριος			
Λύση 1 ⁿ	1.26E-03	1.52E-04	1.19E-03	2.16E-03	1.34E-04	2.39E-05	1.28E-04	2.28E-04
Λύση 2 ⁿ	1.70E-03	1.76E-04	1.64E-03	2.59E-03	2.57E-04	2.43E-05	2.50E-04	4.22E-04
Λύση 3 ⁿ	1.52E-03	3.88E-04	1.36E-03	2.94E-03	3.44E-04	2.57E-05	3.34E-04	4.43E-04
Λύση 4 ⁿ	9.14E-04	1.86E-04	8.36E-04	1.67E-03	1.25E-04	9.98E-07	1.23E-04	1.27E-04
Λύση 5 ⁿ	1.98E-02	4.34E-04	1.97E-02	2.17E-02	2.32E-01	9.75E-03	2.10E-01	2.41E-01
	Απρίλιος				Οκτώβριος			
Λύση 1 ⁿ	4.82E-04	1.07E-04	4.24E-04	1.04E-03	6.22E-04	1.53E-04	5.59E-04	1.61E-03
Λύση 2 ⁿ	9.26E-04	1.49E-04	8.72E-04	1.63E-03	8.03E-04	4.84E-04	6.82E-04	4.03E-03
Λύση 3 ⁿ	4.45E-11	2.05E-10	5.88E-14	1.42E-09	6.27E-04	1.66E-04	5.40E-04	1.40E-03
Λύση 4 ⁿ	6.32E-04	1.55E-04	5.70E-04	1.52E-03	5.83E-04	2.81E-04	4.34E-04	1.52E-03
Λύση 5 ⁿ	3.42E-02	1.40E-03	3.39E-02	4.39E-02	1.29E-02	2.01E-02	2.43E-03	6.36E-02
	Μάιος				Νοέμβριος			
Λύση 1 ⁿ	1.17E-03	3.39E-03	2.38E-04	1.76E-02	9.18E-04	6.07E-05	8.92E-04	1.21E-03
Λύση 2 ⁿ	7.02E-03	1.08E-02	3.95E-04	2.52E-02	2.16E-03	1.93E-04	2.13E-03	3.50E-03
Λύση 3 ⁿ	9.43E-04	2.44E-03	2.44E-05	8.31E-03	3.54E-05	1.08E-07	3.54E-05	3.61E-05
Λύση 4 ⁿ	1.64E-03	4.31E-03	2.60E-04	2.00E-02	1.42E-03	4.32E-04	1.21E-03	3.68E-03
Λύση 5 ⁿ	2.19E-02	1.07E-02	8.40E-03	3.04E-02	2.50E-02	2.31E-03	2.34E-02	3.32E-02
	Ιούνιος				Δεκέμβριος			
Λύση 1 ⁿ	1.76E-04	2.10E-04	3.93E-05	6.47E-04	1.20E-03	1.81E-05	1.19E-03	1.26E-03
Λύση 2 ⁿ	1.55E-04	2.21E-04	5.23E-05	7.64E-04	2.43E-03	9.15E-06	2.43E-03	2.49E-03
Λύση 3 ⁿ	6.49E-05	3.19E-05	4.01E-05	1.69E-04	8.80E-04	8.80E-06	8.78E-04	9.30E-04
Λύση 4 ⁿ	1.77E-04	2.17E-04	3.82E-05	6.30E-04	7.57E-04	1.73E-05	7.51E-04	8.37E-04
Λύση 5 ⁿ	5.41E-03	2.53E-02	1.51E-03	1.81E-01	3.91E-02	6.71E-12	3.91E-02	3.91E-02

Πίνακας 6.31: Αποτελέσματα 100 ανεξάρτητων δοκιμών για τη βαθμονόμηση του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis

Οι παράμετροι του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis, όπως προέκυψαν από τη διαδικασία βελτιστοποίησης, δίνονται στους Πίνακες 6.32 έως 6.43 που ακολουθούν για κάθε μήνα ξεχωριστά.

	Ιανουάριος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	2.0224	0.0024	0.2210	0.0375	0.0010	3.2781	38.4808	5.17E-04
Λύση 2 ^η	4.7380	0.0155	1.7442	0.1518	0.0579	2.4817	3.6208	2.80E-03
Λύση 3 ^η	1.7422	0.0085	0.0674	0.0457	0.0025	4.3027	19.6207	1.06E-13
Λύση 4 ^η	2.1037	0.0022	0.2679	0.0382	0.0010	3.1678	39.1950	7.08E-04
Λύση 5 ^η	3.2086	0.0175	0.2764	0.5463	0.0565	2.9458	10.6689	2.62E-02

Πίνακας 6.32: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Ιανουάριο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Φεβρουάριος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	2.3384	0.0014	0.4912	0.0335	0.0010	3.0049	34.5194	1.00E-03
Λύση 2 ^η	3.9033	0.0133	1.4798	0.1180	0.0617	2.6439	2.9134	1.80E-03
Λύση 3 ^η	1.7088	0.0033	0.0875	0.0303	0.0010	4.0983	31.2938	7.60E-08
Λύση 4 ^η	2.2189	0.0049	0.4002	0.0401	0.0042	3.0793	10.5916	8.89E-04
Λύση 5 ^η	3.2290	0.0138	0.5448	0.6204	0.1037	2.3637	6.9828	2.52E-02

Πίνακας 6.33: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Φεβρουάριο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Μάρτιος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	2.7529	0.0010	0.7509	0.0377	0.0010	2.8500	37.9479	1.19E-03
Λύση 2 ^η	3.9258	0.0112	1.4138	0.1266	0.0558	2.6368	3.2694	1.64E-03
Λύση 3 ^η	3.2178	0.0028	1.0772	0.0425	0.0037	2.7485	12.5462	1.38E-03
Λύση 4 ^η	2.2671	0.0016	0.4159	0.0369	0.0013	3.0544	29.7234	8.45E-04
Λύση 5 ^η	2.8947	0.0138	0.5521	0.3492	0.1035	2.6318	4.3740	1.97E-02

Πίνακας 6.34: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Μάρτιο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Απρίλιος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	2.1575	0.0015	0.4318	0.0334	0.0017	2.7226	20.2778	4.29E-04
Λύση 2 ^η	4.6916	0.0093	2.2832	0.1211	0.0873	2.3117	2.3875	8.72E-04
Λύση 3 ^η	1.5879	0.0069	0.0369	0.0552	0.0036	4.4663	16.5100	5.88E-14
Λύση 4 ^η	2.4831	0.0019	0.6842	0.0348	0.0027	2.5837	13.9918	5.70E-04
Λύση 5 ^η	3.7543	0.0079	0.4138	1.0287	0.0859	2.1811	12.9819	3.40E-02

Πίνακας 6.35: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Απρίλιο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Μάιος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	2.9615	0.0014	0.2696	0.0136	0.0010	8.3875	14.6085	2.38E-04
Λύση 2 ^η	4.1414	0.0068	0.4848	0.0691	0.0359	7.9133	2.9218	3.95E-04
Λύση 3 ^η	2.1455	0.0031	0.0477	0.0116	0.0010	14.7756	12.6179	2.44E-05
Λύση 4 ^η	3.1271	0.0016	0.3193	0.0144	0.0013	8.0765	12.1149	2.60E-04
Λύση 5 ^η	3.4483	0.0080	0.3732	0.0329	0.0252	8.4402	2.3047	8.40E-03

Πίνακας 6.36: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Μάιο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Ιούνιος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	3.0460	0.0026	0.4044	0.0215	0.0133	11.0962	2.6242	4.56E-05
Λύση 2 ^η	3.2401	0.0032	0.4326	0.0501	0.0414	11.0592	2.2096	5.23E-05
Λύση 3 ^η	2.8303	0.0018	0.3337	0.0143	0.0049	11.4731	3.9371	4.01E-05
Λύση 4 ^η	2.7768	0.0035	0.0802	0.3392	0.0752	17.3942	5.5077	8.24E-05
Λύση 5 ^η	2.9353	0.0038	0.3510	0.0334	0.0348	11.3774	1.9611	1.51E-03

Πίνακας 6.37: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Ιούνιο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Ιούλιος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	3.6918	0.0010	0.3677	0.0150	0.0045	10.2223	4.3410	1.49E-05
Λύση 2 ^η	5.1937	0.0017	0.5889	0.0559	0.0370	10.1461	2.5094	2.04E-05
Λύση 3 ^η	2.1832	0.0018	0.3628	0.0408	0.0010	3.5253	41.8012	8.78E-04
Λύση 4 ^η	2.1801	0.0022	0.3625	0.0417	0.0013	3.5260	33.0582	7.68E-04
Λύση 5 ^η	8.3817	0.0140	3.1767	0.4163	0.0815	2.3794	6.1076	3.91E-02

Πίνακας 6.38: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Ιούλιο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Αύγουστος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	10.2134	0.0014	1.4465	0.2137	0.1008	7.6051	3.1209	7.78E-06
Λύση 2 ^η	4.1647	0.0013	0.4937	0.0762	0.0340	7.9806	3.2439	4.29E-06
Λύση 3 ^η	13.1121	0.0014	1.0390	0.6177	0.1411	7.8326	5.3785	1.18E-05
Λύση 4 ^η	14.5116	0.0014	3.1371	0.1281	0.0855	6.5832	2.4983	6.51E-06
Λύση 5 ^η	3.5161	0.0010	0.5300	0.0055	0.0020	6.8297	3.6963	2.19E-01

Πίνακας 6.39: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Αύγουστο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Σεπτέμβριος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	2.7143	0.0038	0.9096	0.0069	0.2931	8.8534	1.0236	1.31E-04
Λύση 2 ^η	3.6477	0.0033	1.6956	0.0010	1.0000	8.5062	1.0010	2.50E-04
Λύση 3 ^η	4.0483	0.0032	2.0297	0.0010	1.0000	8.4263	1.0010	3.34E-04
Λύση 4 ^η	2.4992	0.0038	0.7068	0.1000	0.6366	8.7939	1.1570	1.33E-04
Λύση 5 ^η	15.0000	0.0010	16.6304	0.0023	0.0018	6.7794	2.2622	2.10E-01

Πίνακας 6.40: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Σεπτέμβριο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Οκτώβριος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	2.5166	0.0011	0.3943	0.0302	0.0010	6.8932	31.1692	5.59E-04
Λύση 2 ^η	2.6702	0.0062	0.4377	0.0582	0.0131	6.7830	5.4453	6.82E-04
Λύση 3 ^η	2.4838	0.0018	0.3739	0.0320	0.0017	6.9464	19.5712	5.54E-04
Λύση 4 ^η	2.3014	0.0013	0.2824	0.0293	0.0010	7.3099	30.2821	4.34E-04
Λύση 5 ^η	2.6855	0.0066	0.4322	0.0673	0.0153	6.6858	5.3936	2.43E-03

Πίνακας 6.41: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Οκτώβριο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Νοέμβριος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	2.2367	0.0019	0.2486	0.0285	0.0010	5.4992	29.4758	8.92E-04
Λύση 2 ^η	3.8670	0.0119	0.9716	0.1136	0.0456	4.4604	3.4900	2.13E-03
Λύση 3 ^η	1.8196	0.0041	0.0616	0.0255	0.0010	7.7951	26.4624	3.54E-05
Λύση 4 ^η	2.8759	0.0096	0.5348	0.0616	0.0164	4.8516	4.7575	1.69E-03
Λύση 5 ^η	3.0374	0.0142	0.5527	0.1235	0.0564	5.0398	3.1912	2.34E-02

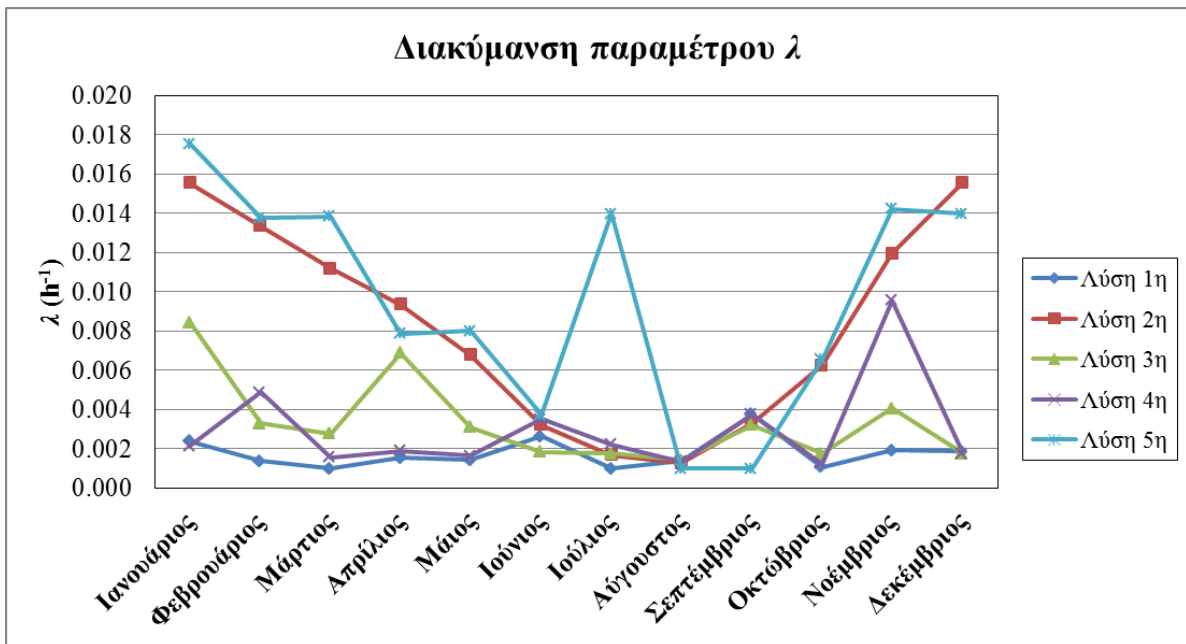
Πίνακας 6.42: Τιμές παραμέτρων μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Νοέμβριο, για κάθε τακτική επίλυσης

	Δεκέμβριος							
	α (-)	λ (h^{-1})	ν (h)	κ (-)	φ (-)	μ_X (mm h^{-1})	μ_c (N°)	Zmin
Λύση 1 ^η	2.4936	0.0019	0.5782	0.0431	0.0013	3.3116	33.2246	1.20E-03
Λύση 2 ^η	5.4087	0.0156	2.3627	0.1615	0.0692	2.8681	3.3346	2.43E-03
Λύση 3 ^η	2.1830	0.0018	0.3627	0.0408	0.0010	3.5256	41.7986	8.78E-04
Λύση 4 ^η	2.1729	0.0018	0.3574	0.0405	0.0010	3.5425	41.5063	7.51E-04
Λύση 5 ^η	8.3814	0.0140	3.1765	0.4163	0.0815	2.3794	6.1076	3.91E-02

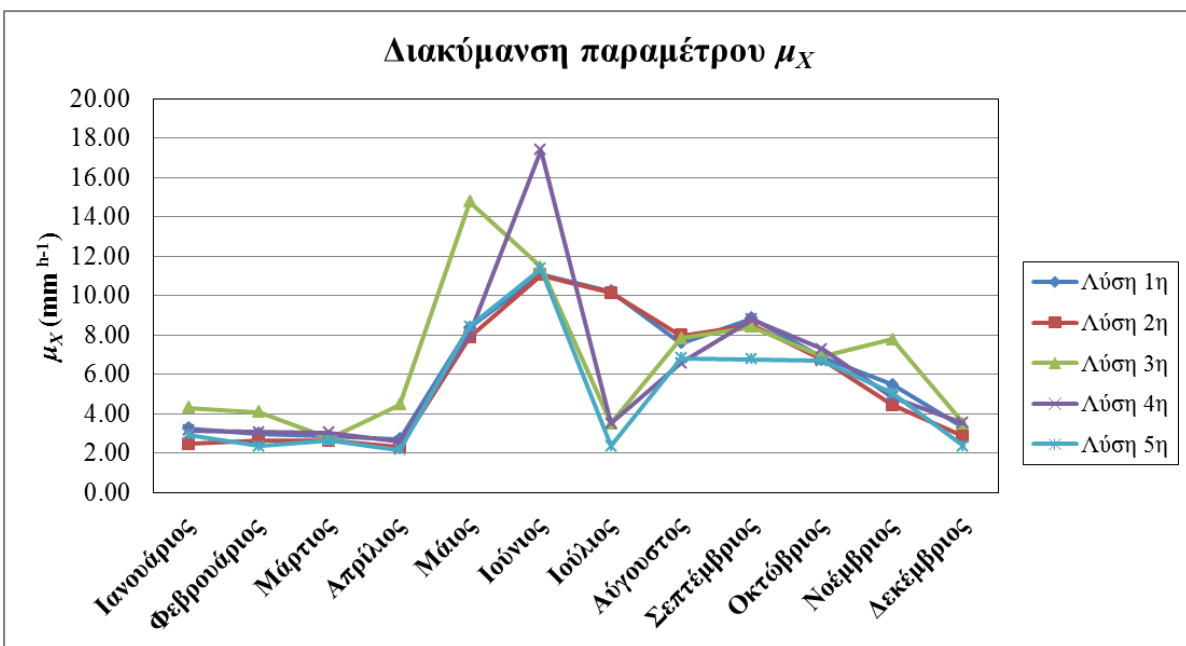
Πίνακας 6.43: Τιμές παραμέτρων τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis για τον μήνα Δεκέμβριο, για κάθε τακτική επίλυσης

Η διακύμανση που παρουσιάζουν οι τιμές των παραμέτρων ανάλογα με την τακτική επίλυσης που ακολουθείται κάθε φορά φαίνεται μέσα από τα διαγράμματα που ακολουθούν. Κατά αρχήν γίνεται φανερή η μικρότερη διακύμανση που παρουσιάζουν οι παράμετροι του τυχαίου μοντέλου, μεταξύ των διαφορετικών τακτικών επίλυσης, συγκρινόμενοι με αυτές του κλασικού. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς φανερώνει το πιο σταθερό χαρακτήρα του τυχαίου μοντέλου και την μικρή επιρροή που έχει στις τιμές των παραμέτρων του η επιλογή των στατιστικών μεγεθών που χρησιμοποιούνται κατά τη βαθμονόμησή του.

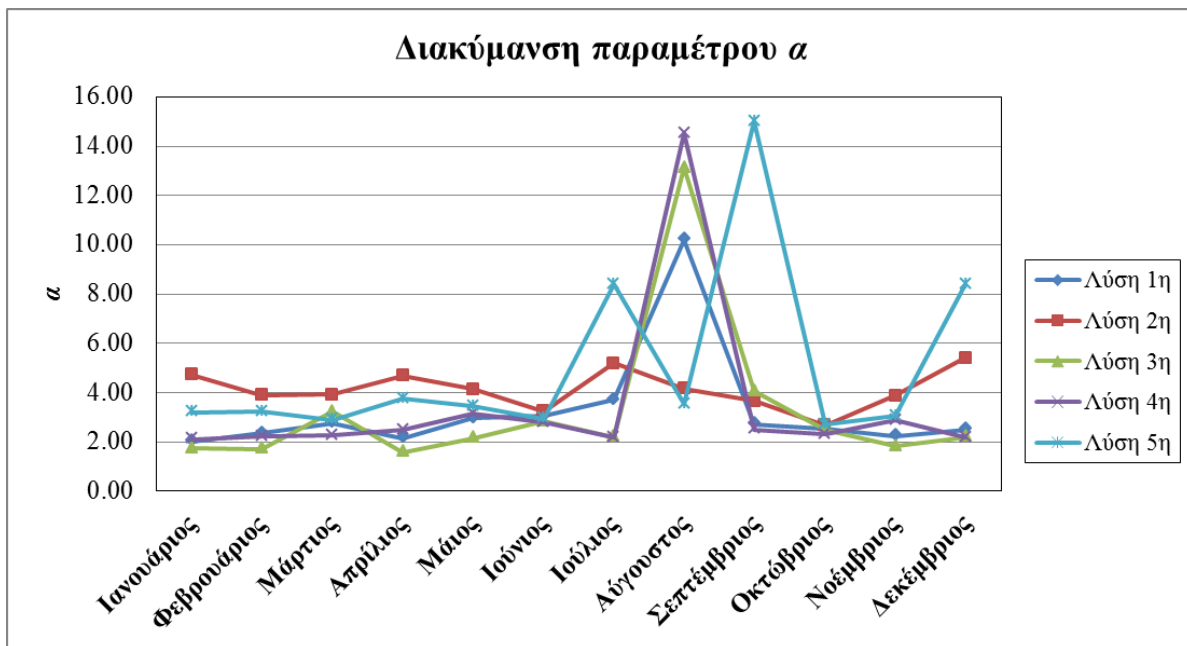
Επιπλέον, η σταθερότητα του μοντέλου αποδεικνύεται και από το γεγονός ότι οι διαφορετικές τακτικές επίλυσης έδωσαν διαφορετικές αλλά παραπλήσιες τιμές για όλες τις παραμέτρους. Η μεγαλύτερη διακύμανση παρατηρείται στις τιμές της παραμέτρου λ , που η Λύση 2 και 5 έδωσαν τιμές αρκετά μεγαλύτερες σε σχέση με αυτές των υπολοίπων λύσεων που είναι παραπλήσιες. Ο μήνας για τον οποίον το μοντέλο δείχνει τη μεγαλύτερη ευαισθησία στην τακτική επίλυσης που θα ακολουθηθεί είναι ο Σεπτέμβριος.



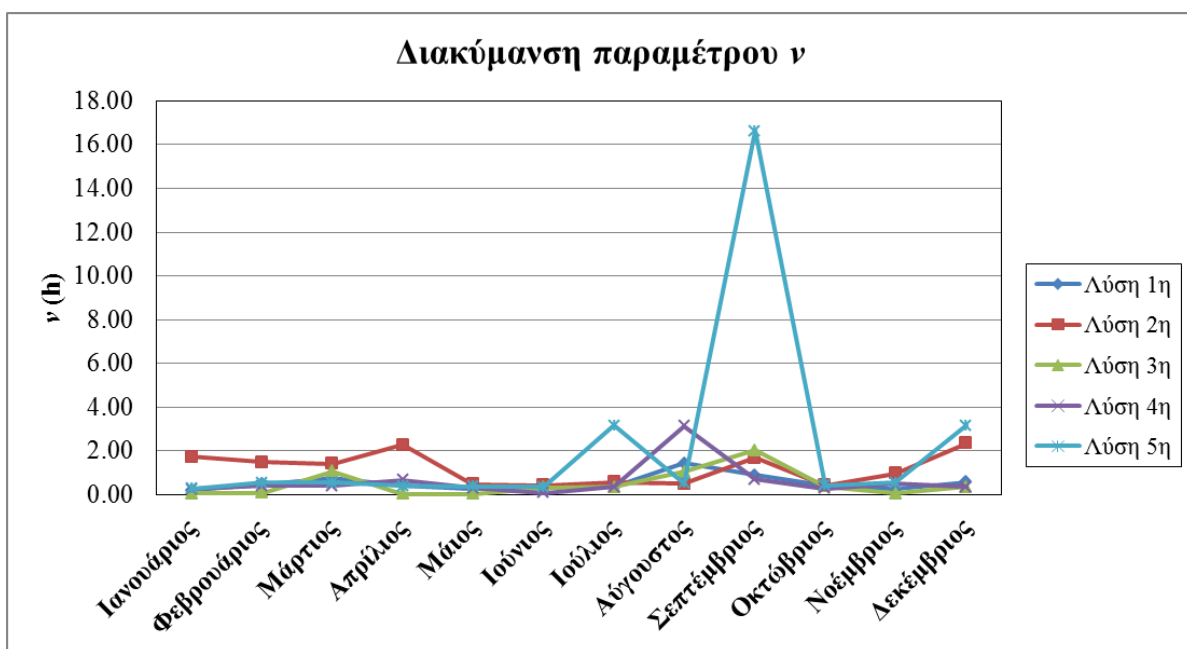
Γράφημα 6.19: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου λ



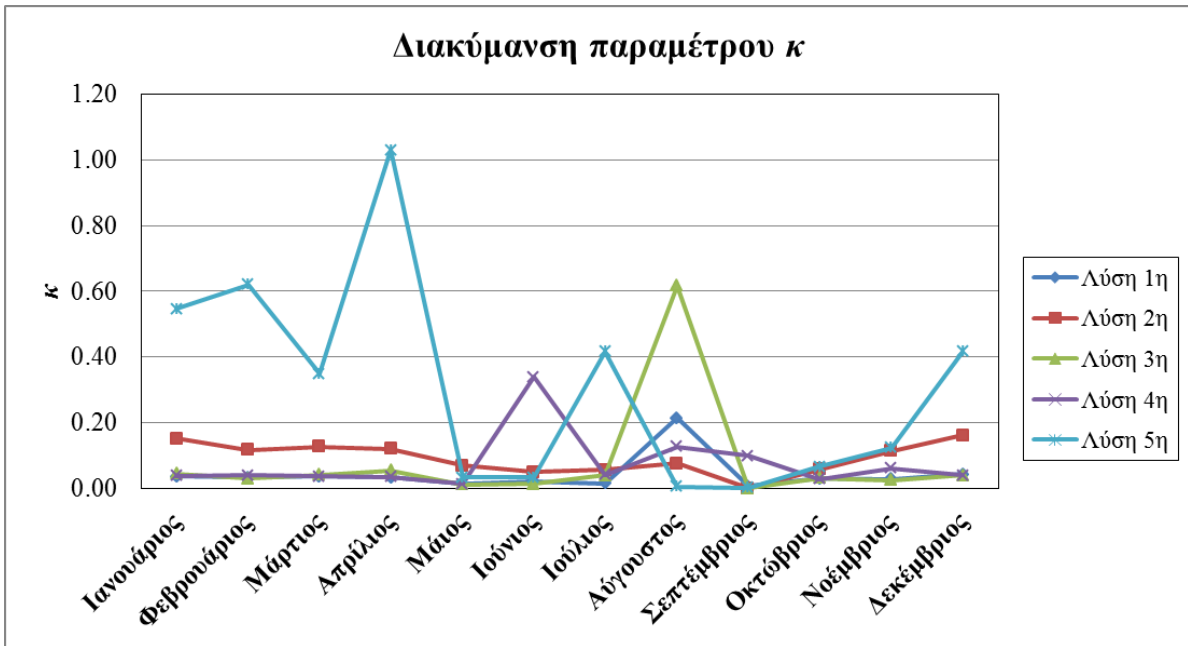
Γράφημα 6.20: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου μ_x



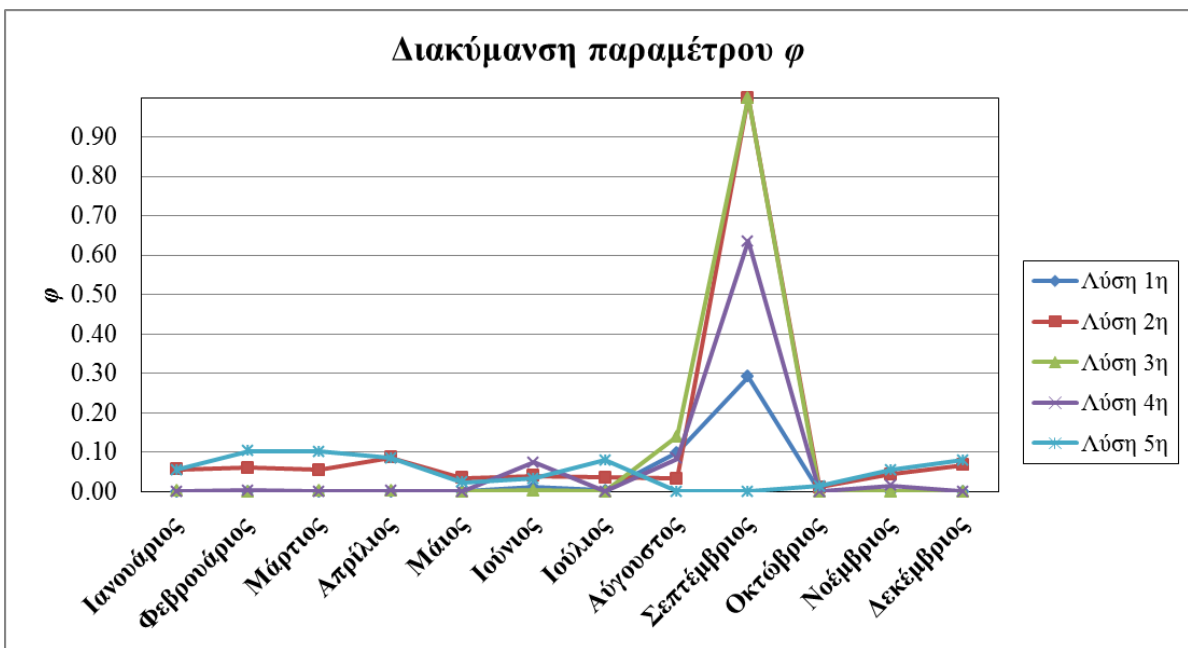
Γράφημα 6.21: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου α



Γράφημα 6.22: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου ν



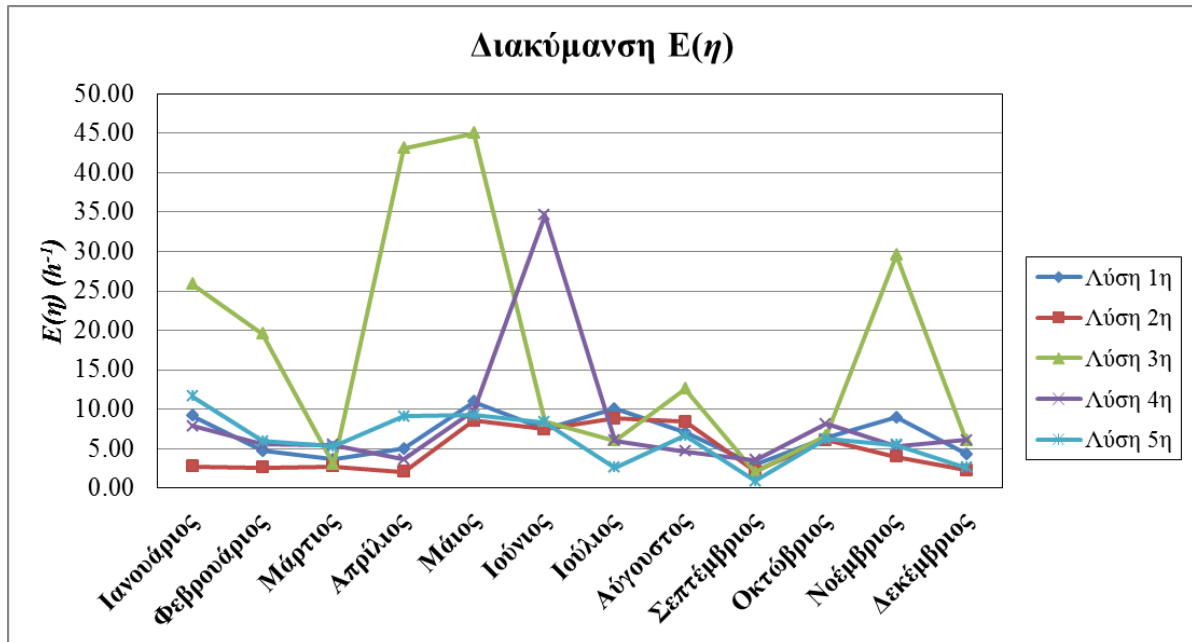
Γράφημα 6.23: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου κ



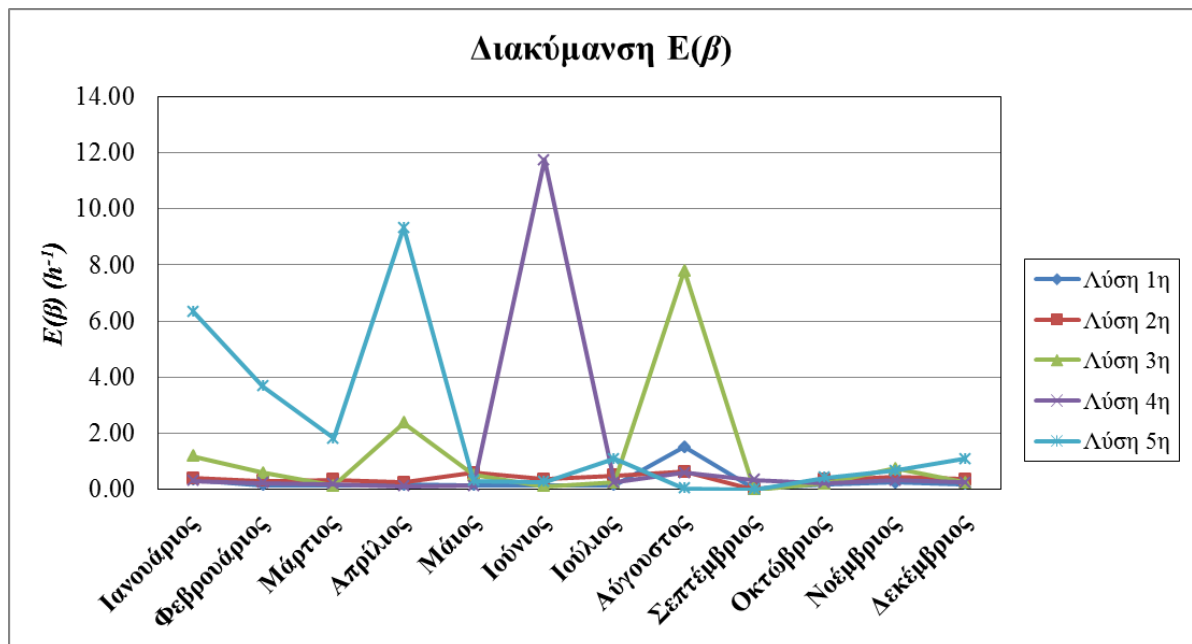
Γράφημα 6.24: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου φ

Επιπλέον, από τα παραπάνω γραφήματα γίνεται φανερό πως κατά τους θερινούς μήνες οι τιμές της παραμέτρου λ είναι μικρότερες (μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα μεταξύ των βροχερών γεγονότων) και οι τιμές της παραμέτρου $\mu\chi$ μεγαλύτερες (μεγαλύτερη μέση ένταση παλμών). Εκτός από τις παραμέτρους λ και $\mu\chi$, οι υπόλοιπες δεν επιδέχονται κάποιας φυσικής ερμηνείας. Προς την κατεύθυνση αυτή συνηγορεί και το γεγονός ότι δεν μπορεί να εξαχθεί κάποιο εποχιακό πρότυπο από τα Γράφημα 6.25 Γράφημα 6.28, στα οποία απεικονίζονται οι

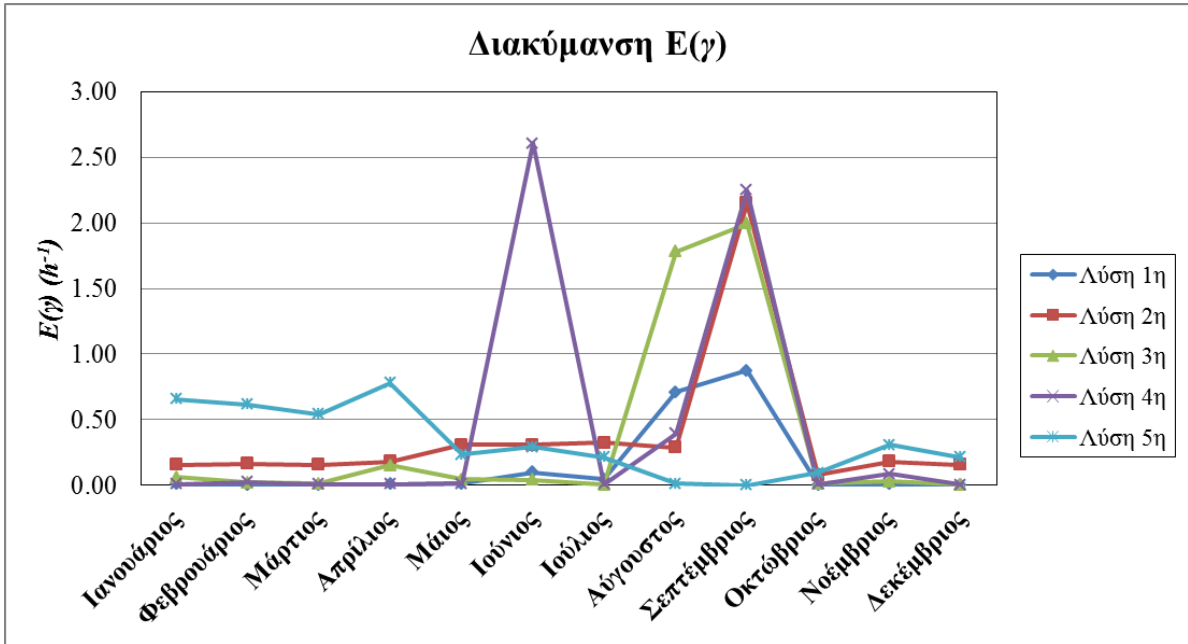
μέσες τιμές των μεγεθών η , β και γ καθώς και το μέσο πλήθος παλμών, που ελέγχουν τις διαδικασίες γένεσης των παλμών εντός των καταιγίδων. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει την διαπίστωση πως τα στοχαστικά μοντέλα παλμών είναι καθαρά μαθηματικά μοντέλα και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη φυσική περιγραφή ή ερμηνεία του φαινομένου.



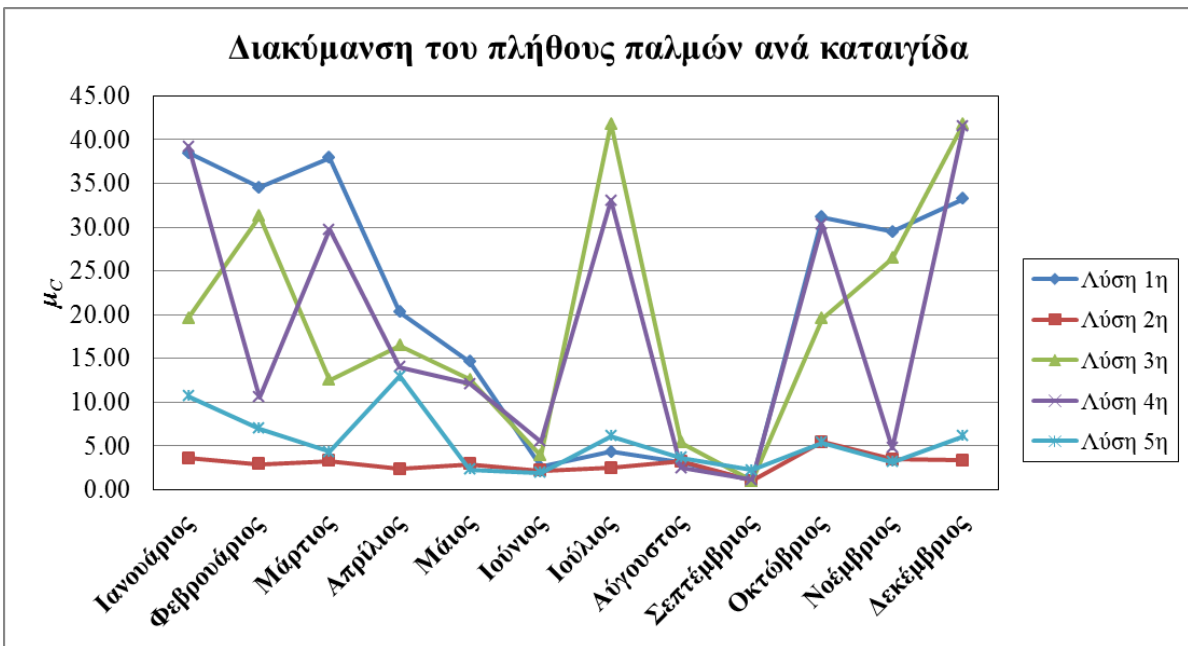
Γράφημα 6.25: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου $E(\eta)$



Γράφημα 6.26: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου $E(\beta)$



Γράφημα 6.27: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου $E(\gamma)$



Γράφημα 6.28: Εποχιακή διακύμανση παραμέτρου μ_c

6.5.3.3 Σύγκριση μεταξύ ιστορικών και θεωρητικών στατιστικών μεγεθών

Για την αξιολόγηση της ικανότητας του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis να αναπαράγει τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά της βροχόπτωσης υπολογίστηκαν τα θεωρητικά στατιστικά μεγέθη (μέση τιμή, τυπική απόκλιση, αυτοσυσχέτιση και πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης) από τις εξισώσεις του μοντέλου, για δεδομένο σύνολο τιμών των παραμέτρων. Εν συνεχεία υπολογίστηκαν οι εκατοστιαίες αποκλίσεις των μεγεθών αυτών από τα αντίστοιχα ιστορικά. Έτσι, για κάθε μήνα και τακτική επίλυσης υπολογίστηκε η μέση εκατοστιαία απόκλιση των μεγεθών για τις χρονικές κλίμακες 1h, 6h, 12h και 24h καθώς και η συνολική απόκλιση που περιλαμβάνει όλες τις κλίμακες συνάθροισης. Συγκεντρωτικά, τα αποτελέσματα φαίνονται στους Πίνακες 6.44 Πίνακας 6.48, όπου με κόκκινο χρώμα έχουν τονιστεί οι ιδιαίτερα υψηλές αποκλίσεις, καθώς και τα στατιστικά μεγέθη στα οποία οφείλεται η απόκλιση αυτή.

Γενικά, το μοντέλο καταφέρνει να διατηρήσει με επιτυχία τα στατιστικά μεγέθη που έχουν χρησιμοποιηθεί για την εύρεση των παραμέτρων του. Ωστόσο, μεταξύ των διαφόρων τακτικών επίλυσης η επίδοση του μοντέλου, όσον αφορά τη διατήρηση των υπολοίπων μεγεθών, παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις. Για παράδειγμα, στη πρώτη τακτική επίλυσης, στην οποία συμμετέχουν στατιστικά μεγέθη από τις δυο μικρότερες χρονικές κλίμακες, το μοντέλο αποτυγχάνει σε όλους τους μήνες να διατηρήσει τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ημερήσιας βροχόπτωσης και συγκεκριμένα τη δομή αυτοσυσχέτισης που αυτή παρουσιάζει. Παρόμοια συμπεριφορά έδειξαν και οι λύσεις 3 και 4. Αντίθετα, η δεύτερη λύση (Πίνακας 6.45) στην οποία συμμετέχουν τα στατιστικά μεγέθη της ωριαίας και ημερήσιας βροχόπτωσης αποδίδει εμφανώς καλύτερα αποτελέσματα, με τις ενδιάμεσες κλίμακες να έχουν και αυτές πολύ καλή προσαρμογή. Εξαιρεση αποτελούν οι μήνες Ιούλιος και Αύγουστος για τους οποίους το μοντέλο υπερεκτιμά το συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξης στη κλίμακα των 12h. Την καλύτερη επίδοση, συνολικά για όλους τους μήνες (εξαιρουμένου του Ιουλίου), είχε η λύση 5 στην οποία συμμετέχουν κατά τη βαθμονόμηση τα στατιστικά μεγέθη όλων των χρονικών κλιμάκων. Ως ο μήνας με τη μεγαλύτερη δυσκολία κατά τη βαθμονόμηση μπορεί αν θεωρηθεί ο Ιούλιος, καθώς όπως παρατηρούμε, σε 4 από τις 5 τακτικές επίλυσης οι μέσες εκατοστιαίες αποκλίσεις των στατιστικών μεγεθών σε όλες τις χρονικές κλίμακες ξεπερνάν το 100%. Παρόμοια δυσκολία συναντάμε και για τον μήνα Σεπτέμβρη, για τον οποίο οι λύσεις 2 και 3 έδωσαν τιμή ίση με 0.9999 για τη παράμετρο φ, δηλαδή ακριβώς πάνω στα όρια του εφικτού χώρου. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην είναι

δυνατός ο υπολογισμός των θεωρητικών μεγεθών της διασποράς και της συνδιασποράς (ΝΑ στον πίνακες).

Λύση 1 ^η	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)						Κλίμακα συνάθροισης: 6h				Κλίμακα συνάθροισης: 12h				Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)								
	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	ρ (2)	ρ (3)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	S _{1h}	S _{6h}	S _{12h}	S _{24h}	S
Ιανουάριος	0.0650	0.4579	0.4510	0.2369	0.1710	0.9094	0.3898	1.7267	0.3162	0.7526	0.7797	2.8016	0.3127	0.6849	1.5593	4.5395	0.3351	0.6253	0.7652	5.3024	17.6935	46.8767	17.6595
Φεβρουάριος	0.0524	0.4280	0.4772	0.2333	0.1559	0.9420	0.3144	1.6151	0.2703	0.8160	0.6288	2.5743	0.2510	0.7419	1.2577	4.0720	0.2682	0.6718	0.9138	1.8439	8.7142	31.4619	10.7335
Μάρτιος	0.0466	0.4002	0.4689	0.2112	0.1328	0.9508	0.2795	1.4823	0.2375	0.8428	0.5590	2.3319	0.2257	0.7760	1.1180	3.6510	0.2611	0.7122	2.6692	1.3182	12.3990	54.4855	17.7180
Απρίλιος	0.0319	0.3214	0.5031	0.2638	0.1831	0.9612	0.1914	1.2467	0.3021	0.8748	0.3827	2.0119	0.2757	0.8210	0.7655	3.2136	0.2778	0.7653	0.5938	9.2769	20.1530	59.5049	22.3821
Μάιος	0.0242	0.3638	0.2462	0.0726	0.0445	0.9781	0.1451	1.1216	0.1385	0.9154	0.2902	1.6925	0.1630	0.8750	0.5805	2.5812	0.2214	0.8326	0.3980	3.6204	14.4282	38.3234	14.1925
Ιούνιος	0.0152	0.3701	0.2981	0.0942	0.0550	0.9924	0.0913	1.1870	0.1410	0.9697	0.1827	1.7931	0.1289	0.9501	0.3654	2.6943	0.1214	0.9175	0.1706	0.3576	4.6124	10.9312	4.0179
Ιούλιος	0.0061	0.1941	0.2022	0.0488	0.0315	0.9954	0.0364	0.5744	0.1192	0.9815	0.0727	0.8594	0.1441	0.9710	0.1455	1.3000	0.1734	0.9560	0.0972	1.4036	124.1842	45.9855	42.9176
Αύγουστος	0.0052	0.1703	0.2536	0.0925	0.0525	0.9971	0.0310	0.5317	0.0987	0.9900	0.0621	0.7882	0.0508	0.9818	0.1241	1.1426	0.0247	0.9656	0.0710	6.1948	2.7824	19.6480	7.1741
Σεπτέμβριος	0.0181	0.4511	0.5006	0.2272	0.1343	0.9943	0.1085	1.6952	0.1996	0.9757	0.2170	2.6258	0.1327	0.9539	0.4339	3.9521	0.0871	0.9119	0.2891	4.6531	40.6606	28.2818	18.4712
Οκτώβριος	0.0605	0.6418	0.3978	0.1697	0.1098	0.9622	0.3630	2.2658	0.2274	0.8757	0.7260	3.5500	0.2299	0.8272	1.4519	5.5678	0.2720	0.7818	0.6501	2.9506	2.4767	4.0813	2.5397
Νοέμβριος	0.0630	0.5608	0.3967	0.1830	0.1248	0.9414	0.3780	2.0010	0.2548	0.8188	0.7560	3.1699	0.2557	0.7580	1.5120	5.0235	0.2877	0.7023	0.8639	6.6161	18.2888	32.3098	14.5196
Δεκέμβριος	0.0797	0.5587	0.4741	0.2267	0.1500	0.9249	0.4781	2.0976	0.2667	0.7771	0.9563	3.3387	0.2572	0.6982	1.9125	5.2941	0.2893	0.6277	1.0066	4.3060	2.8712	36.6183	11.2005

Πίνακας 6.44: Θεωρητικά στατιστικά μεγέθη (1^η τακτική επίλυσης)

Λύση 2 ^η	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)						Κλίμακα συνάθροισης: 6h				Κλίμακα συνάθροισης: 12h				Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)								
	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	ρ (2)	ρ (3)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	S _{1h}	S _{6h}	S _{12h}	S _{24h}	S
Ιανουάριος	0.0651	0.4575	0.4533	0.1912	0.1216	0.9368	0.3907	1.6695	0.2327	0.8339	0.7813	2.6214	0.1955	0.7543	1.5627	4.0534	0.1461	0.6247	1.4803	7.0152	3.0824	9.1079	5.1715
Φεβρουάριος	0.0524	0.4278	0.4783	0.2080	0.1273	0.9520	0.3145	1.5848	0.2222	0.8631	0.6289	2.4778	0.1787	0.7904	1.2578	3.8043	0.1361	0.6712	1.1476	6.7004	5.0268	5.3257	4.5501
Μάρτιος	0.0466	0.4001	0.4699	0.2045	0.1278	0.9565	0.2795	1.4771	0.2304	0.8786	0.5589	2.3172	0.1912	0.8159	1.1178	3.5766	0.1487	0.7115	2.7712	1.0814	6.4519	20.8016	7.7765
Απρίλιος	0.0319	0.3213	0.5040	0.2175	0.1261	0.9696	0.1914	1.2029	0.2049	0.9101	0.3827	1.8674	0.1518	0.8568	0.7654	2.8343	0.1056	0.7647	0.7791	5.6880	3.8550	10.1131	5.1088
Μάιος	0.0242	0.3638	0.2462	0.0857	0.0599	0.9825	0.1451	1.1375	0.1553	0.9421	0.2903	1.7290	0.1252	0.9037	0.5805	2.5938	0.0865	0.8329	0.5117	6.7970	5.2572	0.4260	3.2480
Ιούνιος	0.0152	0.3701	0.2981	0.0992	0.0602	0.9928	0.0914	1.1922	0.1439	0.9733	0.1827	1.8033	0.1140	0.9540	0.3654	2.6916	0.0846	0.9174	0.1826	0.4854	1.3548	0.0815	0.5261
Ιούλιος	0.0061	0.1941	0.2022	0.0647	0.0464	0.9961	0.0364	0.5832	0.1275	0.9860	0.0727	0.8757	0.0971	0.9759	0.1455	1.2972	0.0614	0.9562	0.1145	0.8779	75.4876	0.1625	19.1606
Αύγουστος	0.0052	0.1703	0.2535	0.0930	0.0666	0.9964	0.0310	0.5379	0.1702	0.9884	0.0621	0.8228	0.1396	0.9806	0.1241	1.2423	0.0975	0.9656	0.0529	10.3461	37.7000	6.0354	13.5336
Σεπτέμβριος	0.0181	NA	NA	NA	NA	0.9946	0.1087	NA	NA	0.9782	0.2174	NA	NA	0.9589	0.4347	NA	NA	0.9214	NA	NA	NA	NA	NA
Οκτώβριος	0.0605	0.6418	0.3981	0.1736	0.1161	0.9646	0.3628	2.2762	0.2421	0.8952	0.7256	3.5876	0.2342	0.8495	1.4512	5.6365	0.2286	0.7812	0.6796	1.2394	1.6257	1.0237	1.1421
Νοέμβριος	0.0630	0.5607	0.3979	0.1597	0.1033	0.9566	0.3781	1.9684	0.2155	0.8767	0.7563	3.0691	0.1839	0.8118	1.5126	4.7226	0.1420	0.7021	1.2393	2.5587	6.8107	4.8106	3.8548
Δεκέμβριος	0.0798	0.5585	0.4752	0.2014	0.1244	0.9382	0.4785	2.0622	0.2278	0.8372	0.9570	3.2314	0.1851	0.7575	1.9140	4.9748	0.1330	0.6273	1.3747	7.8226	7.5156	4.8967	5.4024

Πίνακας 6.45: Θεωρητικά στατιστικά μεγέθη (2^η τακτική επίλυσης)

Λύση 3 ^η	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)						Κλίμακα συνάθροισης: 6h				Κλίμακα συνάθροισης: 12h				Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)				S _{1h}	S _{6h}	S _{12h}	S _{24h}	S
	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	ρ (2)	ρ (3)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr					
Ιανουάριος	0.0648	0.4579	0.4530	0.2728	0.2143	0.8900	0.3888	1.7766	0.3944	0.7662	0.7776	2.9669	0.3932	0.7072	1.5552	4.9525	0.3929	0.6263	0.0456	11.0230	26.8759	61.4165	24.8403
Φεβρουάριος	0.0523	0.4280	0.4782	0.2878	0.2236	0.9136	0.3135	1.6856	0.3933	0.7827	0.6271	2.8137	0.3874	0.7282	1.2541	4.6870	0.3919	0.6723	0.0085	13.1021	26.1965	61.1481	25.1138
Μάρτιος	0.0466	0.3999	0.4694	0.2003	0.1201	0.9531	0.2796	1.4691	0.2184	0.8507	0.5593	2.2933	0.2095	0.7834	1.1186	3.5669	0.2454	0.7126	2.7309	1.6834	10.0299	50.2377	16.1705
Απρίλιος	0.0318	0.3214	0.5040	0.3342	0.2732	0.9418	0.1911	1.3146	0.4611	0.8791	0.3822	2.2472	0.4519	0.8363	0.7644	3.8294	0.4403	0.7654	0.0000	24.9907	48.8628	113.6484	46.8755
Μάιος	0.0242	0.3638	0.2463	0.1067	0.0765	0.9680	0.1451	1.1579	0.2088	0.9061	0.2902	1.8004	0.2286	0.8746	0.5804	2.8222	0.2558	0.8333	0.1357	17.0891	31.0321	50.4867	24.6859
Ιούνιος	0.0152	0.3700	0.2981	0.0963	0.0562	0.9919	0.0914	1.1884	0.1427	0.9669	0.1827	1.7966	0.1366	0.9466	0.3655	2.7088	0.1471	0.9175	0.1660	0.0446	6.5038	18.6803	6.3487
Ιούλιος	0.0797	0.5583	0.4723	0.2411	0.1683	0.9183	0.4781	2.1196	0.2993	0.7656	0.9562	3.4168	0.2899	0.6919	1.9124	5.4881	0.3140	0.6280	385.7799	410.2035	651.7368	496.2642	485.9961
Αύγουστος	0.0052	0.1703	0.2535	0.0559	0.0159	0.9977	0.0310	0.5136	0.0493	0.9906	0.0621	0.7441	0.0236	0.9821	0.1241	1.0646	0.0115	0.9654	0.0861	15.2211	16.2137	24.2118	13.9332
Σεπτέμβριος	0.0181	NA	NA	NA	NA	0.9946	0.1087	NA	NA	0.9787	0.2174	NA	NA	0.9600	0.4349	NA	NA	0.9235	NA	NA	NA	NA	NA
Οκτώβριος	0.0605	0.6415	0.3976	0.1718	0.1124	0.9619	0.3632	2.2691	0.2328	0.8768	0.7265	3.5631	0.2352	0.8295	1.4529	5.6003	0.2719	0.7826	0.6796	2.4247	1.9653	4.2085	2.3195
Νοέμβριος	0.0629	0.5607	0.3974	0.2199	0.1669	0.9189	0.3773	2.0628	0.3359	0.8045	0.7547	3.3717	0.3411	0.7574	1.5094	5.5220	0.3552	0.7034	0.1686	15.8877	32.4152	48.1321	24.1509
Δεκέμβριος	0.0797	0.5583	0.4723	0.2411	0.1683	0.9183	0.4781	2.1196	0.2993	0.7656	0.9562	3.4168	0.2900	0.6919	1.9124	5.4882	0.3140	0.6280	0.9326	1.9367	7.0175	42.7703	13.1643

Πίνακας 6.46: Θεωρητικά στατιστικά μεγέθη (3^η τακτική επίλυσης)

Λύση 4 ^η	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)						Κλίμακα συνάθροισης: 6h				Κλίμακα συνάθροισης: 12h				Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)				S _{1h}	S _{6h}	S _{12h}	S _{24h}	S
	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	ρ (2)	ρ (3)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr					
Ιανουάριος	0.0650	0.4581	0.4508	0.2306	0.1635	0.9131	0.3901	1.7187	0.3028	0.7566	0.7802	2.7742	0.2987	0.6863	1.5604	4.4711	0.3242	0.6253	0.8972	4.1191	16.1117	44.8536	16.4954
Φεβρουάριος	0.0524	0.4279	0.4770	0.2417	0.1667	0.9403	0.3147	1.6260	0.2905	0.8186	0.6294	2.6122	0.2709	0.7485	1.2588	4.1647	0.2745	0.6712	0.8953	3.4866	10.6528	33.3935	12.1071
Μάρτιος	0.0466	0.4002	0.4692	0.2324	0.1584	0.9458	0.2797	1.5078	0.2811	0.8328	0.5593	2.4135	0.2674	0.7707	1.1187	3.8426	0.2878	0.7123	2.5273	6.7650	18.7021	63.9197	22.9785
Απρίλιος	0.0319	0.3214	0.5035	0.2473	0.1618	0.9642	0.1914	1.2306	0.2646	0.8826	0.3828	1.9570	0.2353	0.8267	0.7657	3.0761	0.2415	0.7652	0.6620	5.3234	14.2583	49.5174	17.4403
Μάιος	0.0242	0.3639	0.2461	0.0694	0.0420	0.9789	0.1452	1.1190	0.1344	0.9177	0.2904	1.6855	0.1600	0.8772	0.5807	2.5672	0.2180	0.8333	0.4297	2.8069	13.7565	37.4666	13.6149
Ιούνιος	0.0152	0.3700	0.2981	0.1187	0.0688	0.9946	0.0914	1.2043	0.1388	0.9772	0.1827	1.8174	0.0944	0.9568	0.3655	2.6887	0.0623	0.9172	0.2345	1.2599	4.0261	6.6331	3.0384
Ιούλιος	0.0797	0.5589	0.4734	0.2424	0.1694	0.9186	0.4783	2.1246	0.3008	0.7673	0.9565	3.4268	0.2910	0.6939	1.9130	5.5065	0.3132	0.6285	386.0949	410.7798	653.1941	496.3831	486.6130
Αύγουστος	0.0052	0.1703	0.2535	0.0804	0.0534	0.9969	0.0310	0.5304	0.1170	0.9894	0.0621	0.7927	0.0679	0.9814	0.1241	1.1585	0.0339	0.9656	0.0648	2.4422	5.1195	18.0060	6.4081
Σεπτέμβριος	0.0181	0.4511	0.5006	0.2356	0.1450	0.9944	0.1085	1.7069	0.2186	0.9758	0.2170	2.6648	0.1538	0.9539	0.4339	4.0479	0.1078	0.9117	0.2907	2.7897	50.5230	41.5926	23.7990
Οκτώβριος	0.0605	0.6419	0.3977	0.1801	0.1213	0.9596	0.3629	2.2856	0.2482	0.8713	0.7259	3.6111	0.2496	0.8251	1.4518	5.7088	0.2844	0.7820	0.5807	1.2223	1.5831	6.0261	2.3530
Νοέμβριος	0.0629	0.5611	0.3960	0.1663	0.1089	0.9517	0.3776	1.9775	0.2300	0.8572	0.7552	3.1017	0.2204	0.7940	1.5104	4.8457	0.2109	0.7002	1.1579	3.5456	11.9191	17.9120	8.6337
Δεκέμβριος	0.0797	0.5592	0.4728	0.2420	0.1692	0.9184	0.4780	2.1246	0.3005	0.7656	0.9560	3.4265	0.2908	0.6919	1.9119	5.5055	0.3141	0.6278	0.8764	1.8922	7.1710	42.8732	13.2032

Πίνακας 6.47: Θεωρητικά στατιστικά μεγέθη (4^η τακτική επίλυσης)

Λύση 5 ^η	Ωριαία Βροχόπτωση (1h)						Κλίμακα συνάθροισης: 6h				Κλίμακα συνάθροισης: 12h				Ημερήσια Βροχόπτωση (24h)								
	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	ρ (2)	ρ (3)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	μ (mm)	σ (mm)	ρ (1)	pdr	S _{1h}	S _{6h}	S _{12h}	S _{24h}	S
Ιανουάριος	0.0690	0.4624	0.4597	0.2677	0.1914	0.9477	0.4140	1.7724	0.2844	0.8668	0.8281	2.8407	0.1987	0.7801	1.6562	4.3984	0.1280	0.6320	3.8275	3.8007	3.8893	4.9981	4.1289
Φεβρουάριος	0.0555	0.4286	0.4943	0.2701	0.1876	0.9579	0.3333	1.6605	0.2741	0.8921	0.6666	2.6506	0.1912	0.8212	1.3331	4.0912	0.1235	0.6961	3.6683	3.8728	4.3464	3.5450	3.8581
Μάρτιος	0.0465	0.3953	0.4752	0.2434	0.1662	0.9590	0.2787	1.4999	0.2626	0.8897	0.5574	2.3834	0.1946	0.8183	1.1149	3.6840	0.1359	0.6929	2.8142	4.9312	6.3026	17.2680	7.8290
Απρίλιος	0.0334	0.3279	0.5086	0.2873	0.1923	0.9784	0.2007	1.2820	0.2536	0.9405	0.4013	2.0299	0.1586	0.8972	0.8027	3.0900	0.0915	0.8164	2.9609	5.7427	3.4492	6.6740	4.7067
Μάιος	0.0238	0.3699	0.2431	0.0717	0.0450	0.9817	0.1426	1.1380	0.1278	0.9309	0.2852	1.7092	0.1106	0.8844	0.5703	2.5473	0.0879	0.8022	1.6357	1.4134	1.9240	1.8100	1.6958
Ιούνιος	0.0152	0.3694	0.2996	0.0999	0.0592	0.9924	0.0911	1.1903	0.1397	0.9697	0.1821	1.7971	0.1105	0.9470	0.3643	2.6782	0.0847	0.9048	0.4199	0.6803	0.6065	0.6490	0.5889
Ιούλιος	0.0875	0.5515	0.4814	0.2435	0.1779	0.9334	0.5250	2.1103	0.2958	0.8588	1.0501	3.3973	0.2124	0.7894	2.1002	5.2901	0.1232	0.6674	417.9073	438.9969	601.4591	445.6026	475.9915
Αύγουστος	0.0053	0.1703	0.2667	0.0623	0.0293	0.9956	0.0319	0.5233	0.0866	0.9795	0.0638	0.7715	0.0760	0.9635	0.1276	1.1318	0.0892	0.9382	2.0502	9.0053	10.4322	7.3079	7.1989
Σεπτέμβριος	0.0182	0.4371	0.6055	0.2788	0.1342	0.9951	0.1093	1.7169	0.1448	0.9840	0.2186	2.5980	0.0706	0.9710	0.4372	3.8017	0.0412	0.9460	6.5099	11.2464	11.4906	2.2826	7.8824
Οκτώβριος	0.0606	0.6373	0.3980	0.1761	0.1195	0.9643	0.3639	2.2658	0.2494	0.8978	0.7278	3.5816	0.2401	0.8532	1.4556	5.6406	0.2287	0.7835	0.9303	0.5588	0.9649	1.0717	0.8814
Νοέμβριος	0.0621	0.5734	0.3986	0.1726	0.1134	0.9579	0.3727	2.0294	0.2180	0.8762	0.7454	3.1674	0.1741	0.8022	1.4909	4.8537	0.1302	0.6755	2.0894	2.3255	4.3874	2.9852	2.9469
Δεκέμβριος	0.0875	0.5515	0.4814	0.2435	0.1779	0.9334	0.5250	2.1103	0.2958	0.8588	1.0501	3.3973	0.2124	0.7894	2.1001	5.2900	0.1232	0.6674	4.3219	4.7647	8.0618	5.2768	5.6063

Πίνακας 6.48: Θεωρητικά στατιστικά μεγέθη (5^η τακτική επίλυσης)

6.5.3.4 Σύγκριση μεταξύ ιστορικών και συνθετικών στατιστικών μεγεθών

Για την περαιτέρω αξιολόγηση του μοντέλου επιχειρήθηκε η σύγκριση των θεωρητικών και ιστορικών στατιστικών μεγεθών με τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από προσομοίωση. Η παραγωγή των συνθετικών χρονοσειρών τόσο για το κλασικό όσο και για το τυχαίο μοντέλο έγινε μέσω του ελεύθερου λογισμικού HyetosR (Kossieris et al., 2011) και για την ανάλυση επιλέχθηκαν οι μήνες Ιανουάριος και Ιούνιος ως αντιπροσωπευτικοί της χειμερινής και θερινής περιόδου, αντίστοιχα. Για να εξασφαλιστεί η αμερόληπτη σύγκριση της απόδοσης των δυο μοντέλων, οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν προέρχονται από την ίδια τακτική επίλυσης και συγκεκριμένα από την επίλυση που χρησιμοποιεί τα στατιστικά μεγέθη της ωριαίας και ημερήσιας χρονικής κλίμακας (Λύση 2^η). Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στους πίνακες που ακολουθούν.

	α (-)	λ (h ⁻¹)	ν (h)	κ (-)	ϕ (-)	μ_X (mm h ⁻¹)	μ_c (No)	Zmin
Ιανουάριος	4.7380	0.0155	1.7442	0.1518	0.0579	2.4817	3.6208	2.80E-03
Ιούνιος	3.2401	0.0032	0.4326	0.0501	0.0414	11.0592	2.2096	5.23E-05

Πίνακας 6.49: Τιμές παραμέτρων κλασικού μοντέλου Bartlett-Lewis

	λ (h ⁻¹)	γ (h ⁻¹)	β (h ⁻¹)	η (h ⁻¹)	μ_X (mm h ⁻¹)	μ_c (N ^o)	Zmin
Ιανουάριος	0.0088	0.1745	1.3948	2.8462	2.3271	8.9934	1.78E-12
Ιούνιος	0.0018	0.1255	0.2039	2.6498	8.5476	2.6248	2.13E-13

Πίνακας 6.50: Τιμές παραμέτρων τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω παραμέτρους στο λογισμικό HyetosR (Παράρτημα Β) εκτελέστηκε η παραγωγή ωριαίων χρονοσειρών μήκους, 1000 χρόνων, ενώ τα στατιστικά χαρακτηριστικά για τις χρονικές κλίμακες 6h, 12h και 24h υπολογίστηκαν ύστερα από συνάθροιση των ωριαίων υψών βροχής. Για κάθε μήνα και μοντέλο εκτελέστηκαν 30 στοχαστικά ανεξάρτητες προσομοιώσεις (δηλαδή παρήχθησαν 30 χρονοσειρές) έτσι ώστε να διερευνηθεί η ευρωστία των λύσεων και η αβεβαιότητα που εισάγεται από την χρήση τυχαίων αριθμών κατά τη προσομοίωση.

Όπως γίνεται εμφανές από τα γραφήματα και τους δυο πίνακες που ακολουθούν, τα δυο μοντέλα αποδίδουν ικανοποιητικά τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά της βροχόπτωσης του Ιανουαρίου και Ιουνίου για όλες τις στάθμες συνάθροισης. Πιο συγκεκριμένα, και τα δυο

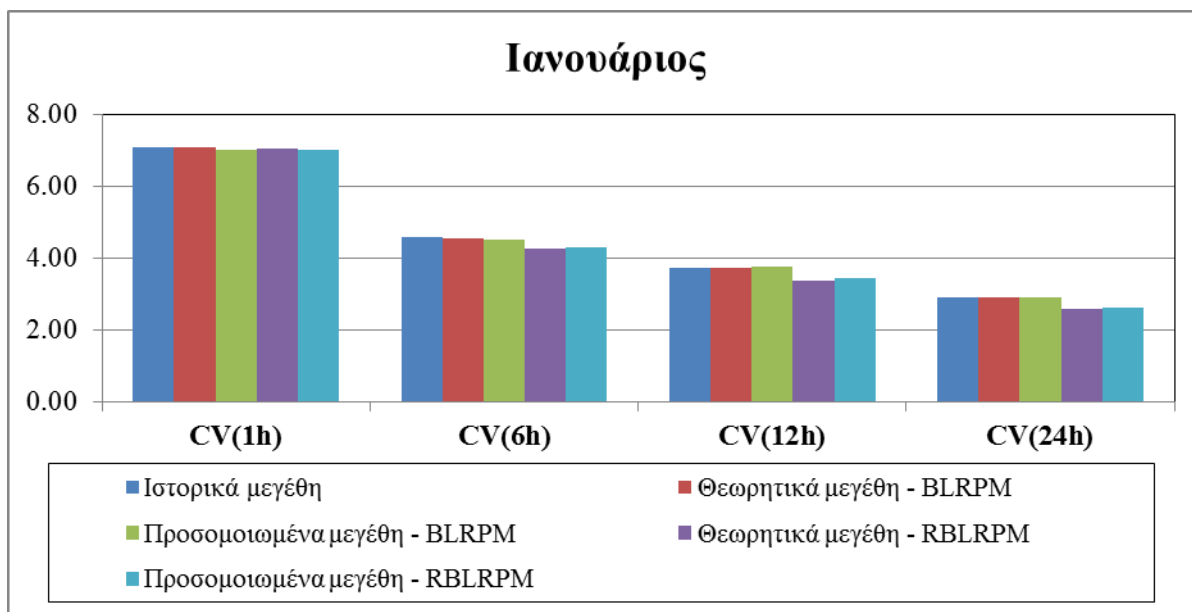
μοντέλα διατηρούν με μεγάλη ακρίβεια τόσο τη μέση τιμή όσο και τη τυπική απόκλιση της βροχόπτωσης σε όλες τις χρονικές κλίμακες και για τους δυο μήνες (Γράφημα 6.29 - Γράφημα 6.30). Την ίδια απόδοση έχουν τα μοντέλα και όσον αφορά τη πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης, pdr , με το τυχαίο μοντέλο (RBLRPM) να υπερτερεί αισθητά στις χρονικές κλίμακες που είναι μεγαλύτερες της ωριαίας. Αξίζει πάντως να σημειωθεί πως για την περίπτωση της βροχής της Αθήνας δεν παρατηρήθηκε κάποια βελτίωση του τυχαίου μοντέλου έναντι του κλασικού, όσον αφορά τον εν λόγω μέγεθος, για την ωριαία χρονική κλίμακα. Περισσότερα στοιχεία για τις χρονικές ιδιότητες των βροχερών γεγονότων και στεγνών περιόδων δίδονται στους Πίνακας 6.53: Χρονικές ιδιότητες βροχόπτωσης για τον Ιανουάριο και Πίνακας 6.54: Χρονικές ιδιότητες βροχόπτωσης για τον Ιούνιο, και αναπαριστώνται γραφικά στα Γράφημα 6.33 Γράφημα 6.34. Όπως αποδεικνύεται, και για τους δυο μήνες, τα δυο μοντέλα παράγουν συνθετικά βροχερά γεγονότα με μικρότερη μέση διάρκεια, m_w , και τυπική απόκλιση, s_w , από αυτή των ιστορικών. Από την άλλη, οι μέσοι χρόνοι διακοπής, m_d , και οι τυπικές τους αποκλίσεις, s_d , για το μεν κλασικό μοντέλο προκύπτουν υπερεκτιμημένοι, για το δε τυχαίο υποεκτιμημένοι. Η απόκλιση αυτή εξομαλύνεται στην ημερήσια χρονική κλίμακα καθώς τα στατιστικά μεγέθη από προσομοίωση προσεγγίζουν σαφώς καλύτερα τα αντίστοιχα ιστορικά. Όσον αφορά στη δομή αυτοσυσχέτισης, στο τυχαίο μοντέλο παρατηρείται μια ιδιαίτερα γρήγορη πτώση, στην ωριαία χρονική κλίμακα για το μήνα Ιανουάριο, ενώ για τις υπόλοιπες χρονικές κλίμακες η αναπαραγωγή της δομής κρίνεται ως ικανοποιητική. Για τον Ιούνιο, στον οποίο η δομή αυτοσυσχέτισης φθίνει αρκετά γρήγορα και τα δυο μοντέλα έχουν καλή απόδοση. Τέλος, έγινε σύγκριση μεταξύ των συντελεστών ασυμμετρίας των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών. Όπως παρατηρούμε, οι συντελεστές ασυμμετρίας των συνθετικών ωριαίων και ημερήσιων χρονοσειρών είναι πολύ κοντά σε αυτούς των ιστορικών και για τους δυο υπό εξέταση μήνες. Μην ξεχνάμε πως για τα μοντέλα Bartlett-Lewis δεν υπάρχει διαθέσιμη αναλυτική σχέση για τις ροπές τρίτης τάξης.

Ιανουάριος	Ιστορικά μεγέθη	Θεωρητικά μεγέθη - BLRPM	Προσομοιωμένα μεγέθη - BLRPM	Θεωρητικά μεγέθη - RBLRPM	Προσομοιωμένα μεγέθη - RBLRPM	
Μέση τιμή (mm)	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065	1h
Τυπική Απόκλιση (mm)	0.458	0.458	0.458	0.458	0.457	
Ασυμμετρία	16.957	-	11.884	-	12.663	
Πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης	0.890	-	0.949	0.937	0.937	
Μέση τιμή (mm)	0.389	0.389	0.390	0.391	0.388	6h
Τυπική Απόκλιση (mm)	1.777	1.766	1.765	1.669	1.663	
Πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης	0.803	-	0.903	0.834	0.835	
Μέση τιμή (mm)	0.777	0.778	0.776	0.781	0.809	12h
Τυπική Απόκλιση (mm)	2.900	2.892	2.907	2.621	2.798	
Πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης	0.739	-	0.858	0.754	0.752	
Μέση τιμή (mm)	1.555	1.555	1.557	1.563	1.563	24h
Τυπική Απόκλιση (mm)	4.532	4.532	4.535	4.053	4.083	
Ασυμμετρία	5.301	-	4.235	-	5.289	
Πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης	0.626	-	0.772	0.625	0.628	

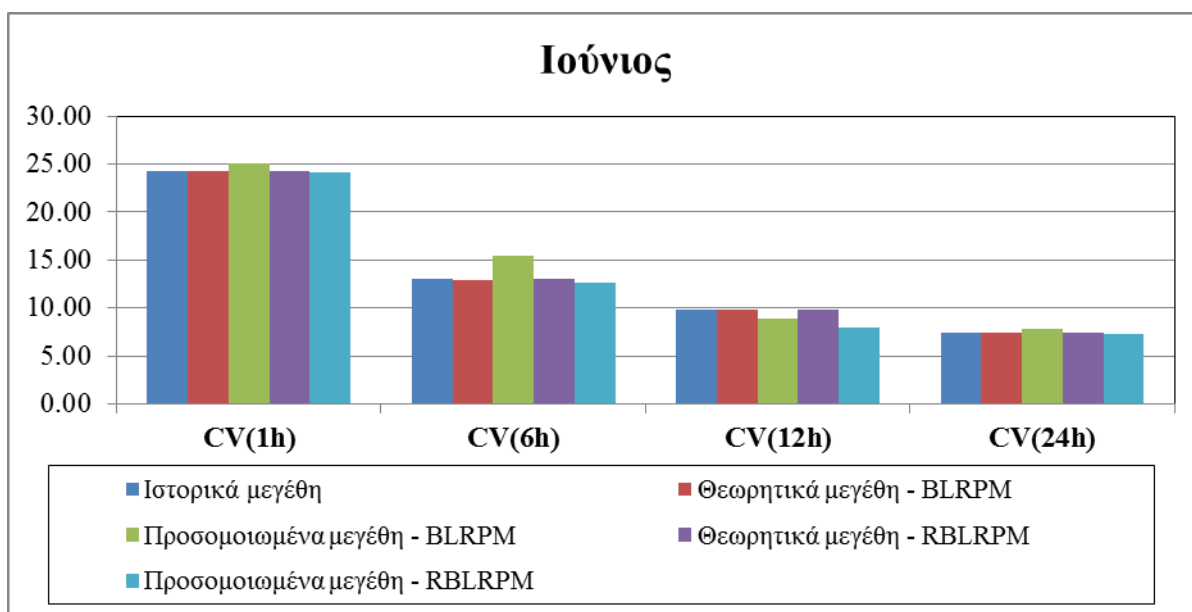
Πίνακας 6.51: Συγκεντρωτικός πίνακας στατιστικών μεγεθών για τον Ιανουάριο

Ιούνιος	Ιστορικά μεγέθη	Θεωρητικά μεγέθη - BLRPM	Προσομοιωμένα μεγέθη - BLRPM	Θεωρητικά μεγέθη - RBLRPM	Προσομοιωμένα μεγέθη - RBLRPM	
Μέση τιμή (mm)	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	1h
Τυπική Απόκλιση (mm)	0.370	0.370	0.375	0.370	0.374	
Ασυμμετρία	50.578	-	47.684	-	49.428	
Πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης	0.986	-	0.995	0.993	0.993	
Μέση τιμή (mm)	0.091	0.091	0.099	0.091	0.092	6h
Τυπική Απόκλιση (mm)	1.188	1.178	1.533	1.192	1.165	
Πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης	0.967	-	0.984	0.973	0.976	
Μέση τιμή (mm)	0.183	0.183	0.184	0.183	0.185	12h
Τυπική Απόκλιση (mm)	1.785	1.791	1.636	1.803	1.464	
Πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης	0.952	-	0.973	0.954	0.960	
Μέση τιμή (mm)	0.365	0.365	0.360	0.365	0.365	24h
Τυπική Απόκλιση (mm)	2.694	2.694	2.822	2.692	2.638	
Ασυμμετρία	11.881	-	13.807	-	22.757	
Πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης	0.918	-	0.952	0.917	0.917	

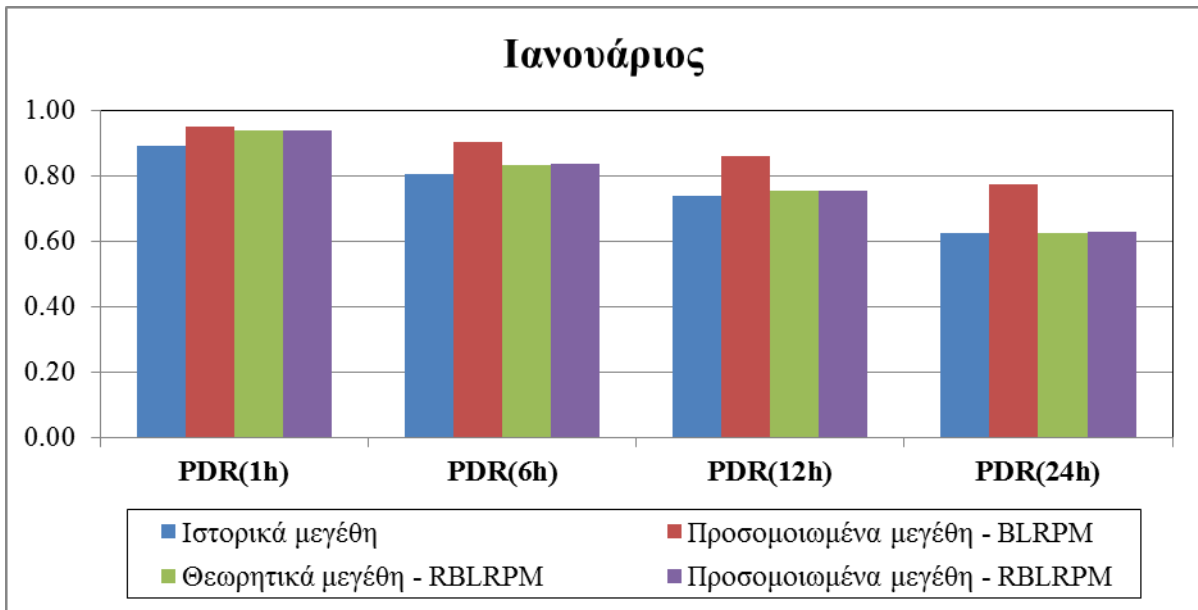
Πίνακας 6.52: Συγκεντρωτικός πίνακας στατιστικών μεγεθών για τον Ιούνιο



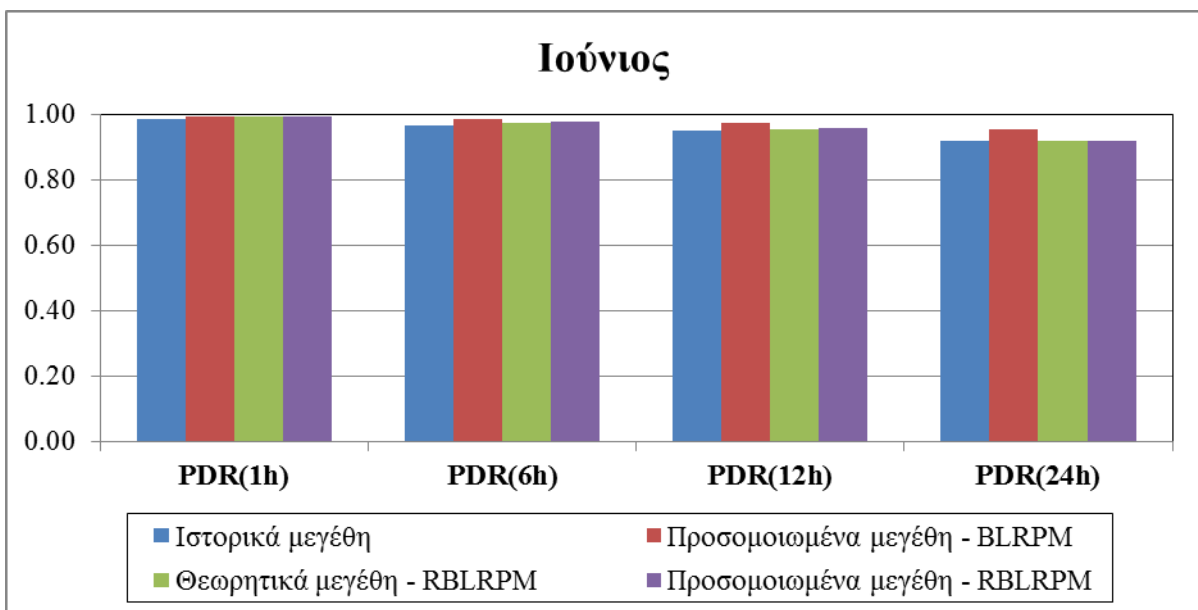
Γράφημα 6.29: Συντελεστές μεταβλητότητας για τον Ιανουάριο



Γράφημα 6.30: Συντελεστές μεταβλητότητας για τον Ιούνιο



Γράφημα 6.31: Πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης για τον Ιανουάριο



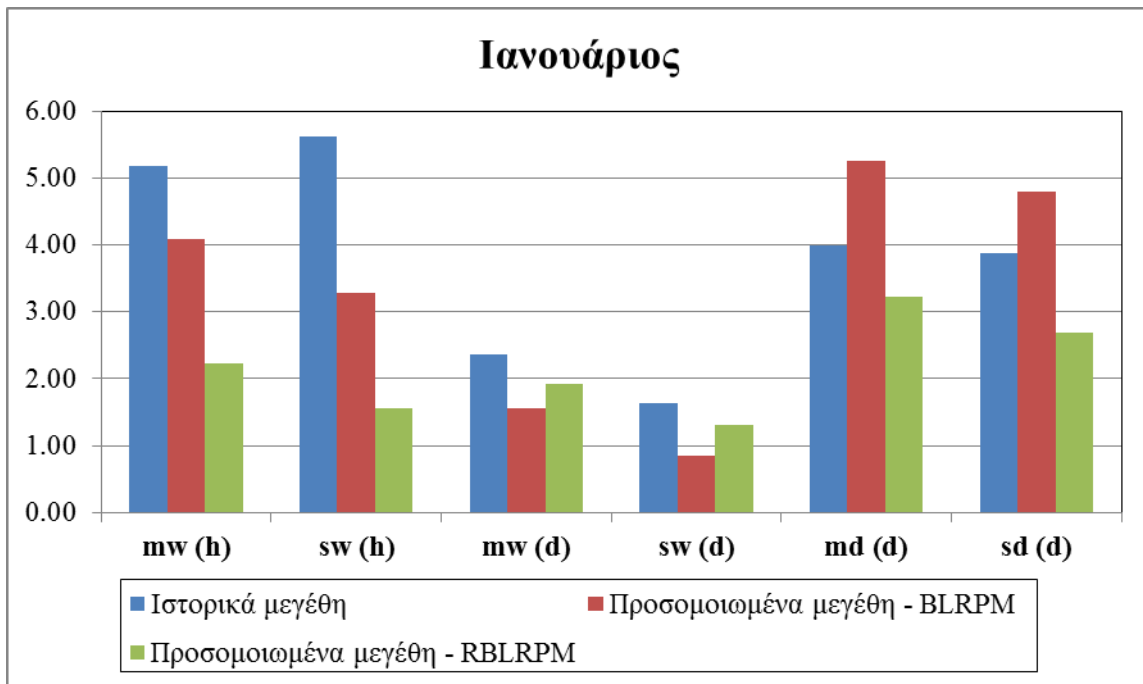
Γράφημα 6.32: Πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης για τον Ιούνιο

Ιανουάριος	Ιστορικά μεγέθη	Προσομοιωμένα μεγέθη - BLRPM	Προσομοιωμένα μεγέθη - RBLRPM
m_w (h)	5.180	4.080	2.231
s_w (h)	5.629	3.286	1.561
m_d (h)	41.907	76.562	33.429
s_d (h)	72.904	107.943	54.996
m_w (d)	2.371	1.563	1.917
s_w (d)	1.629	0.853	1.310
m_d (d)	3.987	5.256	3.234
s_d (d)	3.868	4.795	2.681

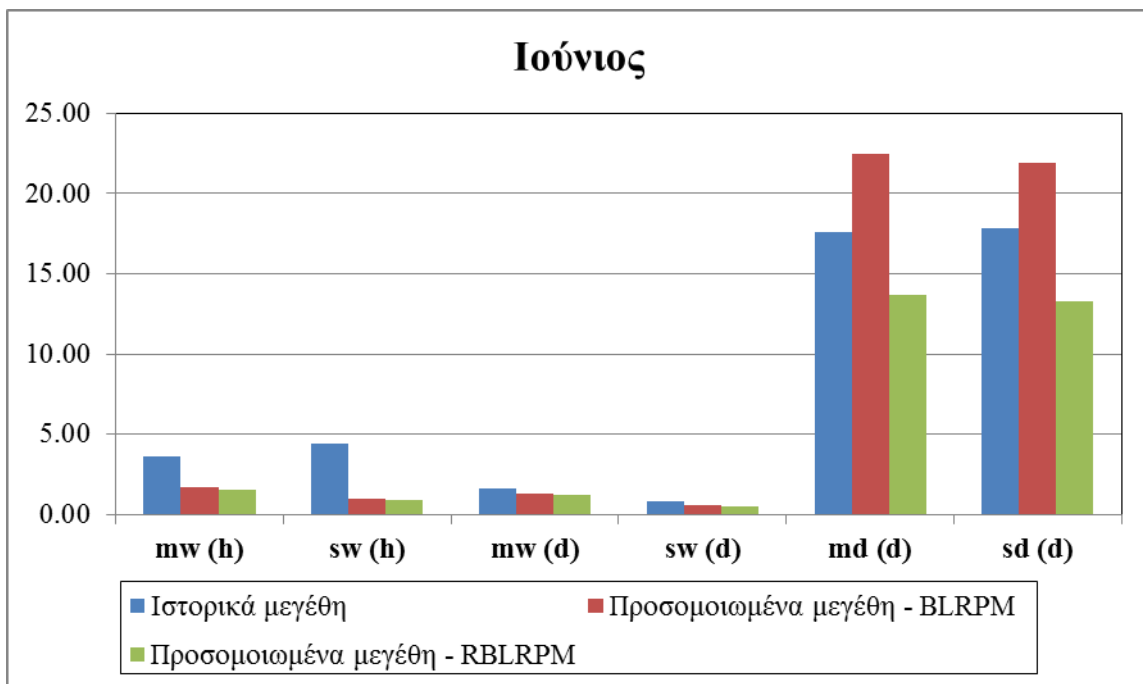
Πίνακας 6.53: Χρονικές ιδιότητες βροχόπτωσης για τον Ιανουάριο

Ιούνιος	Ιστορικά μεγέθη	Προσομοιωμένα μεγέθη - BLRPM	Προσομοιωμένα μεγέθη - RBLRPM
m_w (h)	3.606	1.695	1.550
s_w (h)	4.396	0.950	0.863
m_d (h)	247.423	281.951	212.922
s_d (h)	381.989	464.404	299.090
m_w (d)	1.590	1.288	1.218
s_w (d)	0.851	0.543	0.516
m_d (d)	17.566	22.467	13.658
s_d (d)	17.802	21.928	13.263

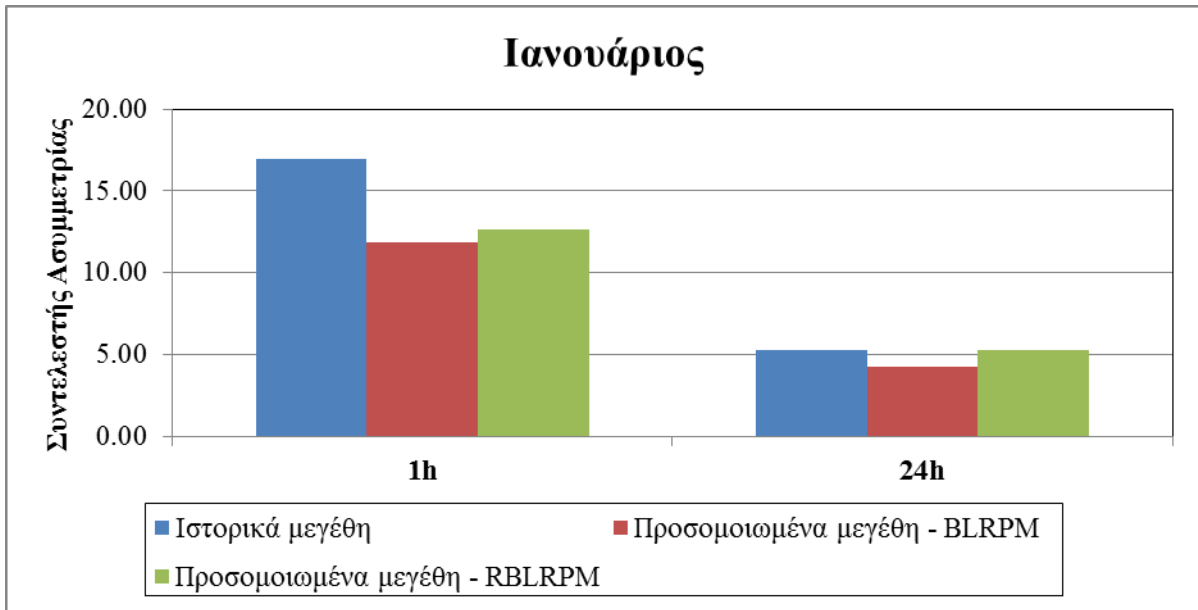
Πίνακας 6.54: Χρονικές ιδιότητες βροχόπτωσης για τον Ιούνιο



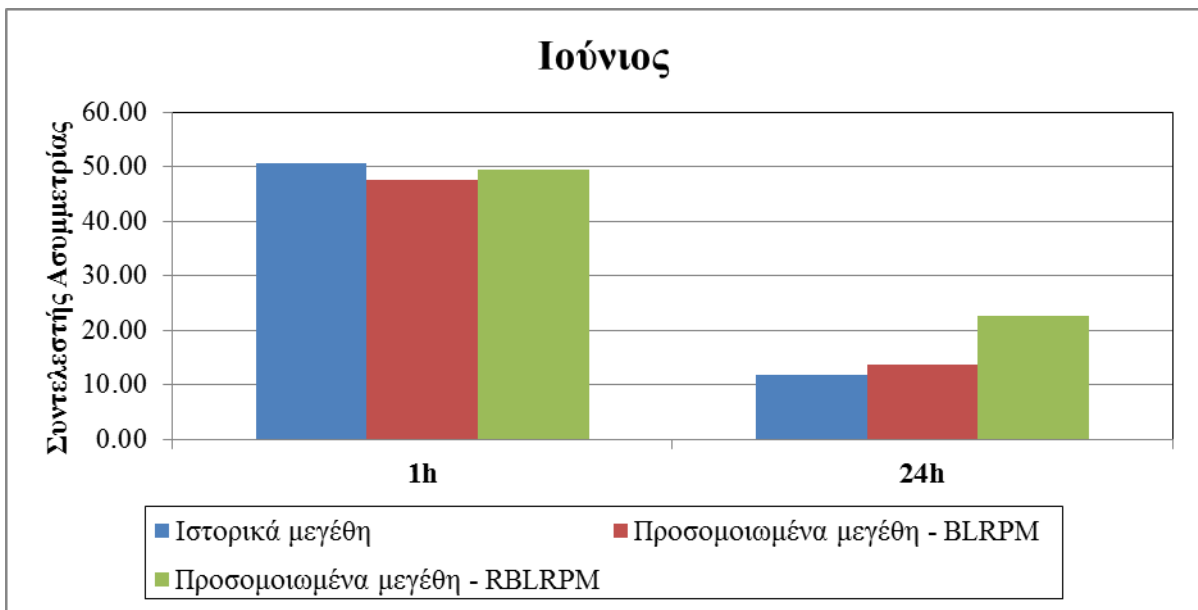
Γράφημα 6.33: Χρονικές ιδιότητες βροχόπτωσης για τον Ιανουάριο



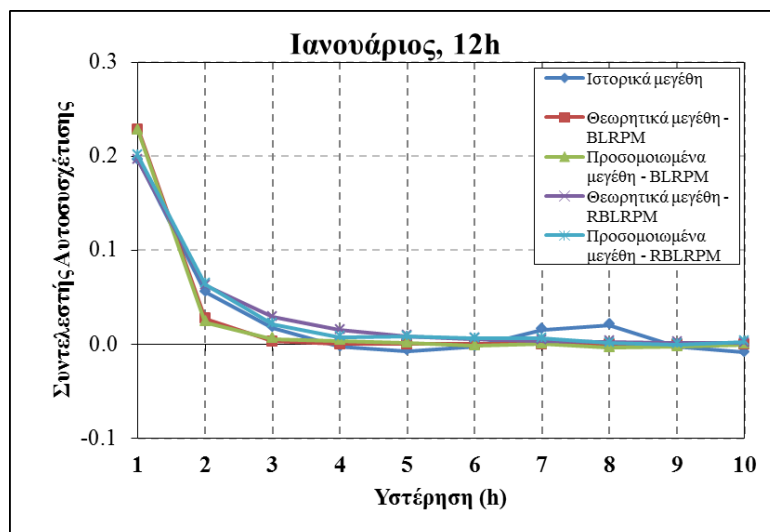
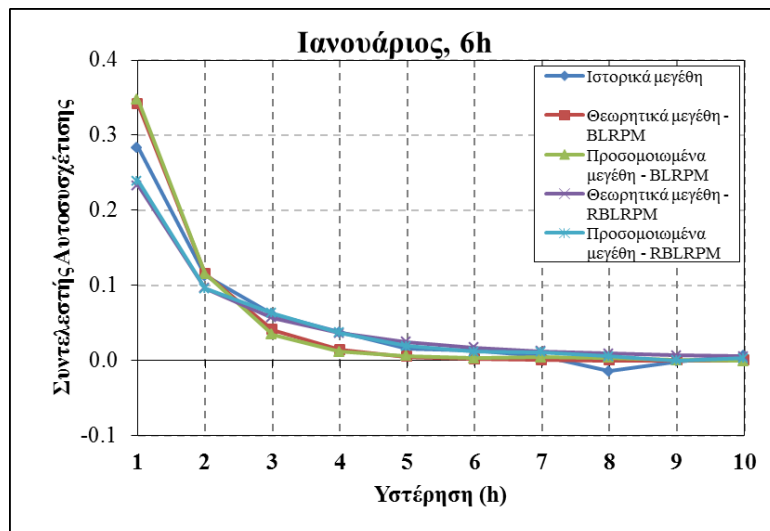
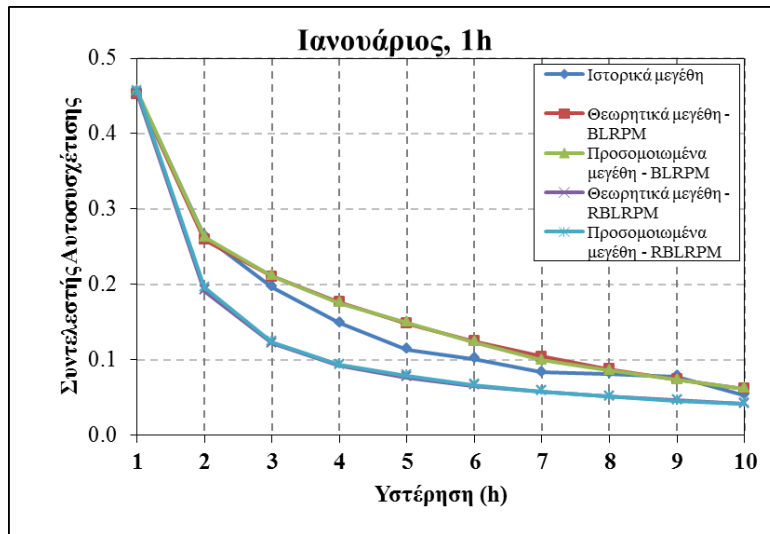
Γράφημα 6.34: Χρονικές ιδιότητες βροχόπτωσης για τον Ιούνιο

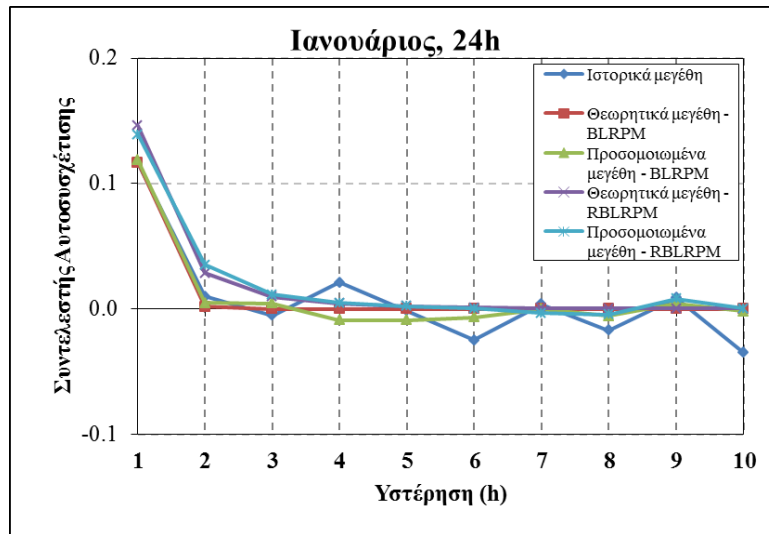


Γράφημα 6.35: Συντελεστής ασυμμετρίας για τον Ιανουάριο

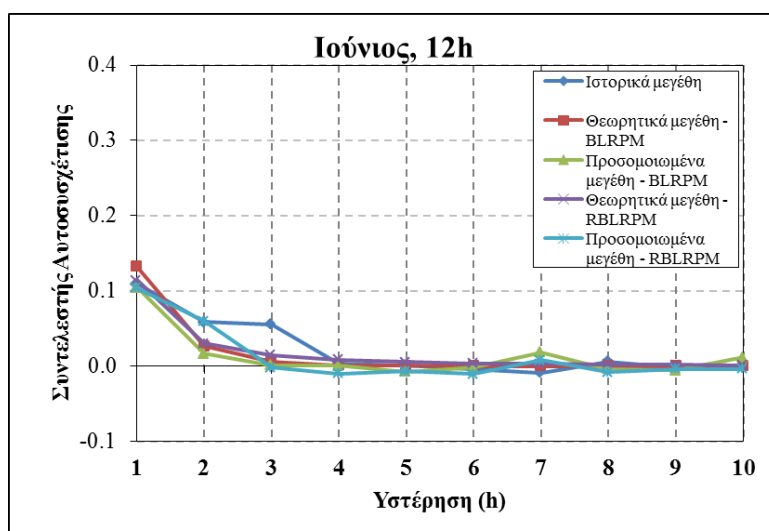
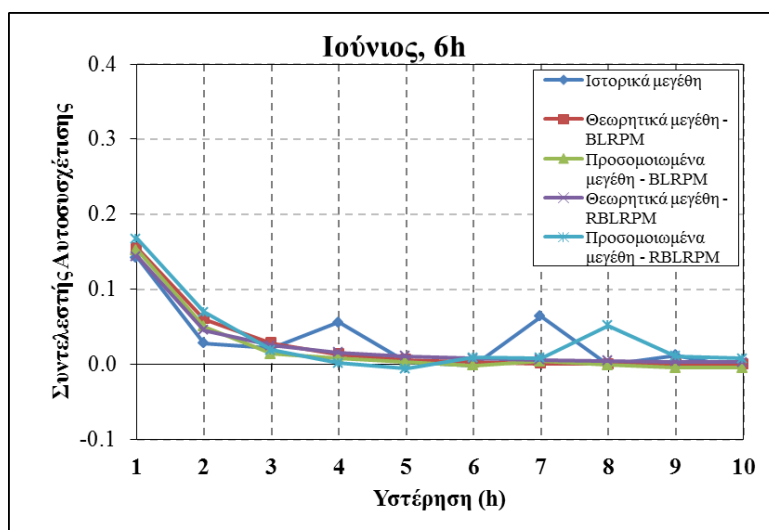
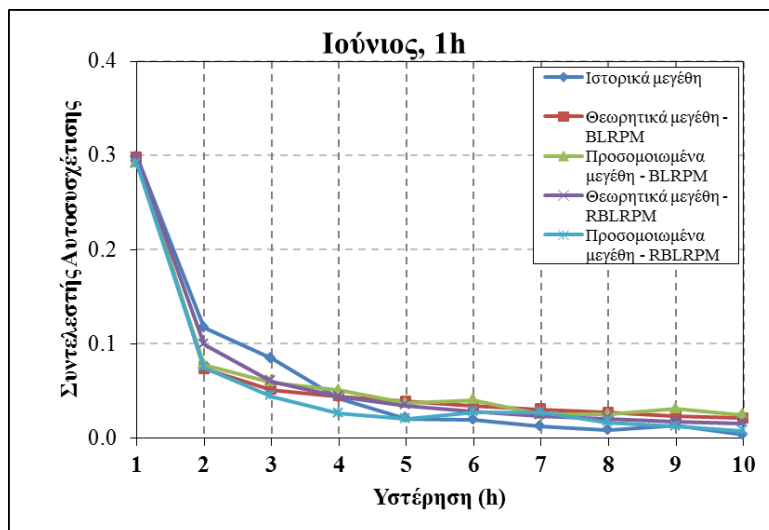


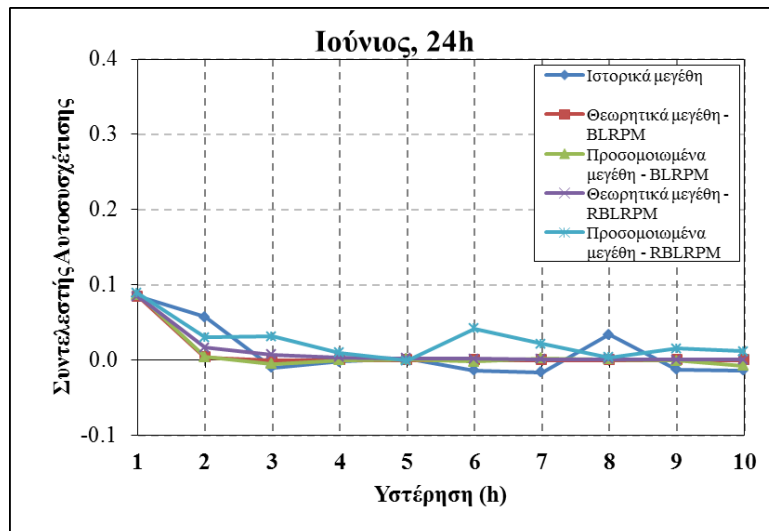
Γράφημα 6.36: Συντελεστής ασυμμετρίας για τον Ιούνιο





Γράφημα 6.37: Αυτοσυσχετογράμματα βροχής για τις χρονικές κλίμακες 1h, 6h, 12h και 24h, για τον μήνα Ιανουάριο





Γράφημα 6.38: Αυτοσυσχετογράμματα βροχής για τις χρονικές κλίμακες 1h, 6h, 12h και 24h, για τον μήνα Ιούνιο

Κεφάλαιο 7^ο

7 Συμπεράσματα - Προτάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό συγκεντρώνονται τα κύρια συμπεράσματα που προέκυψαν κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Επιπλέον, παρουσιάζονται κάποιες γενικές προτάσεις και κατευθυντήριες γραμμές στις οποίες θα μπορούσε να στηριχτεί η περαιτέρω έρευνα.

- Οι διάφορες πηγές αβεβαιοτήτων που υπεισέρχονται είτε άμεσα είτε έμμεσα στα πραγματικά προβλήματα βελτιστοποίησης συστημάτων δυσχεραίνουν ιδιαίτερα τη διαδικασία αναζήτησης βέλτιστων λύσεων και, συνακόλουθα, τη λήψη αποφάσεων. Οι αβεβαιότητες μεταφέρονται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης δημιουργώντας επιφάνειες απόκρισης που είναι έντονα διαταραγμένες, τραχείες και μη κυρτές.
- Από την εκτενή βιβλιογραφική επισκόπηση φάνηκε πως για την επίλυση προβλήματα που οι αποκρίσεις της συνάρτησης έχουν στοχαστικό χαρακτήρα η ερευνητική κοινότητα προσπαθεί να προσαρμόσει τις ήδη υπάρχουσες τεχνικές και μεθόδους. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων οι τροποποιήσεις αφορούν σε τεχνικές μείωσης της επίδρασης του θορύβου μέσω στατιστικών ελέγχων και επαναλαμβανόμενων δειγματοληψιών. Αυτή η στρατηγική ωστόσο επιβαρύνει δραματικά τον υπολογιστικό φόρτο, καθιστώντας τον ακόμα και απαγορευτικό.
- Ο εξελικτικός αλγόριθμος ανόπτησης-απλόκου δοκιμάστηκε σε μια σειρά από μαθηματικές συναρτήσεις ελέγχου, των οποίων η επιφάνεια απόκρισης διαταράσσεται λόγω της προσθήκης ενός στοχαστικού όρου από κανονική κατανομή. Όπως είναι αναμενόμενο, με την αύξηση της έντασης του θορύβου, που ελέγχεται μέσα από τη τυπική απόκλιση της κατανομής, η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου μειώνεται. Ωστόσο, φάνηκε πως η χρήση μεγάλων πληθυσμών για την αποτελεσματικότερη εξερεύνηση του εφικτού χώρου αναζήτησης λύσεων επιτρέπει την προσέγγιση του ολικά βέλτιστου σημείου με σχετικά μεγάλη ακρίβεια. Η διαπίστωση αυτή συμβαδίζει με τη βιβλιογραφία όπου επισημαίνεται πως οι αλγόριθμοι που κάνουν χρήση μεγάλων πληθυσμών (π.χ. γενετικοί αλγόριθμοι) υπερέρχονται αυτών που βασίζονται σε μικρό πλήθος σημείων για τον εντοπισμό κάποιας περιοχής έλξης.
- Η ύπαρξη θορύβου στις τιμές της στοχαστικής συνάρτησης αλλάζει πλήρως την πορεία αναζήτησης που ακολουθεί ο αλγόριθμος για ντετερμινιστικά προβλήματα.

Συγκεκριμένα, σε κάθε επανάληψη η πιθανότητα να εκτελεστεί κίνηση που μειώνει τον όγκο του απλόκου είναι διπλασία από την πιθανότητα για κίνηση που την αυξάνει. Αυτό επιφέρει την έντονη διαταραχή του σχήματος και μεγέθους του απλόκου και τη γρήγορη σύγκλιση του αλγορίθμου σε μη βέλτιστα σημεία.

- Όπως αποδείχτηκε, η ενσωμάτωση στον κλασικό αλγόριθμο ανόπτησης-απλόκου νέων τεχνικών και μηχανισμών είχε θετική επίδραση στην γενικότερη απόδοσή του. Οι τεχνικές αυτές στοχεύουν στην προφύλαξη του απλόκου από πρόωρο εκφυλισμό και εσφαλμένη σύγκλιση σε κάποιο μη βέλτιστο σημείο. Η βελτίωση της απόδοσης ήταν εντονότερη στη χρήση μικρότερων πληθυσμών, ενώ η απόδοση των δυο αλγορίθμων σχεδόν ταυτίζεται για μεγάλους πληθυσμούς.
- Από τη στοχαστική βαθμονόμηση του εννοιολογικού υδρολογικού μοντέλου Ζυγός αποδείχτηκε τόσο η ευρωστία των λύσεων που εντοπίζει ο αλγόριθμος ανόπτησης-απλόκου του όσο και η επαρκή προγνωστική ικανότητα του μοντέλου. Ακόμα και με χρήση πολύ μικρούς μήκους δειγμάτων το μοντέλο καταφέρνει να αποδώσει επαρκώς μεγάλο εύρος αποκρίσεων που παράγουν τρεις λεκάνες με πολύ διαφορετικά χαρακτηριστικά.
- Ταυτόχρονα αποδείχτηκε η καταλληλότητα του αλγορίθμου για τη βαθμονόμηση στοχαστικών μοντέλων ορθογωνικών παλμών. Συγκεκριμένα μελετήθηκαν δυο διαφορετικές εκδόσεις του μοντέλου Bartlett-Lewis στην προσομοίωση της ωριαίας βροχόπτωσης του σταθμού του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών. Ο αλγόριθμος εντόπισε την βέλτιστη λύση για κάθε διαφορετικό σύνολο στατιστικών μεγεθών που συμμετείχε στη διαδικασία βελτιστοποίησης.
- Το μοντέλο Bartlett-Lewis αναπαράγει με μεγάλη ακρίβεια τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά της βροχόπτωσης σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες για ένα και μόνο σύνολο τιμών των παραμέτρων του. Ωστόσο, το μοντέλο δεν καταφέρνει να διατηρήσει τις χρονικές ιδιότητες των βροχερών επεισοδίων και στεγνών περιόδων με αποτέλεσμα η χρήση του να είναι περιορισμένη στο πεδίο της μελέτης των πλημμυρών.

Βιβλιογραφία

Alrefaei, M. H., and S. Andradóttir. 1999. A simulated annealing algorithm with constant temperature for discrete stochastic optimization. *Management Science* 45 (5): 748–764.

Andradottir, S. 1998. A review of simulation optimization techniques. *Proceedings of 1998 Winter Simulation Conference*, D.J.Medeiros, E.F Watson, J.S. Carson, and M.S., Manivannan, 151-158.

Azadivar, F. and J.J Talavage. 1980. Optimization of stochastic simulation models. *Mathematics and Computers in Simulation*, 22:231-241.

Azadivar, F. and Y. H. Lee. 1988. Optimization of Discrete Variable Stochastic Systems by Computer Simulation, *Mathematics and Computers in Simulation*, 30, 331-345.

Azadivar, F., *Simulation Optimization Methodologies*, Proc. Of the 1999 Winter Simulation Conference, Phoenix, AZ, 1999, 93-100.

Barton, R.R., and Ivey, J.S, “Nelder-Mead simplex modifications for simulation optimization,” *Management Science*, vol. 42, no. 7, pp. 954–973, 1996.

Barton, R.R., J.S. Ivey. 1991. Modifications of the Nelder-Mead Simplex Method for Stochastic Simulation Response Optimization. B.L., Nelson, W.D. Kelton, G.M. Clark, eds. *Proceedings of the 1991 Winter Simulation Conference*. IEEE Press, Piscataway, NJ. 945-953.

Belisle, C.J.P, Romeijn, H.E. and Smith, R.L. (1993) Hit-and-run algorithms for generating multivariate distributions. *Mathematics of Operations Research*, 18, 255–266.

Bell, M., and M.C. Pike, “Remark on Algorithm 178,” *Communications of the ACM*, vol. 9, pp. 684–685, 1966.

Bo, Z., Islam, S., Eltahir, E.A.B, 1994. Aggregation-Disaggregation properties of a stochastic rainfall model, *Water Resources Research*, 30 (12), 3423-3435.

Cerny, V., A Thermodynamical Approach to the Travelling Salesman Problem: An Efficient Simulation Algorithm, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 45, pp. 41-51, 1985.

Chen, H. and B.W. Schmeiser. 1994, Retrospective optimization algorithms for stochastic root finding, Proceedings of 1994 Winter Simulation Conference, ed. J.D. Tew, S. Manivannan, D.A. Sadowski, and A.F. Seila, 255-261.

Cowpertwait, P., Isham, V., Onof, C., 2007, Point process models of rainfall: Developments for fine-scale structure, *Proc. R. Soc. Lond. A* 463.

Derzekos, C., Koutsoyiannis, D., Onof, C., 2005, A new randomised Poisson cluster model for rainfall in time, *European Geosciences Union General Assembly 2005, Geophysical Research Abstracts, Vol. 7*, Vienna, 07236, European Geosciences Union.

Entekhabi, D., Rodríguez-Iturbe, I., Eagleson, P.S., 1989, Probabilistic representation of the temporal rainfall process by the modified Neyman-Scott rectangular pulses model: Parameter estimation and validation, *Water Resources Research*, 25 (2), 295-302.

Fox, B. L., and G. W. Heine. 1995. Probabilistic search with overrides. *The Annals of Applied Probability* 5 (4): 1087–1094.

Fu, M. C. 2008. What you should know about simulation and derivatives. *Naval Research Logistics* 55:723–736.

Fu, M., and K. Healy. 1997. Techniques for optimization via simulation: an experimental study on an (s, S) inventory system. *IIE Transactions* 29:191-199.

Fu, M.C., F. W. Glover, and J. April., Simulation Optimization: A Review, New Developments, and Applications, Proc. Of the 2005 Winter Simulation Conference, Orlando, FL, 2005, 83-95.

Gelfand, S. B., and S. K. Mitter. 1989. Simulated annealing with noisy or imprecise energy measurements. *Journal of Optimization Theory and Applications* 62 (1): 49–62.

Gutjahr, W. J., and G. C. Pflug. 1996. Simulated annealing for noisy cost functions. *Journal of Global Optimization* 8 (1): 1–13.

Heller, B., and G.E. Staats. 1973, "Response surface optimization when experimental factors are subject to costs and constraints", *Technometrics* 15, 113-123.

Ho, Y. C., and X. R. Cao. 1991. Perturbation analysis of discrete event dynamic systems, Kluwer Academic Publishers.

Ho, Y. C., and X.-R. Cao. 1983. Optimization and perturbation analysis of queueing networks. *Journal of Optimization Theory and Applications* 40:559–582.

Hooke, R., and T.A. Jeeves, “Direct search’solution of numerical and statistical problems,” *Journal of the ACM*, vol. 8, pp. 212–229, 1961.

Islam, S., Entekhabi, D., Bras, R. L, 1990. Parameter estimation and sensitivity analysis for the modified Bartlett-Lewis rectangular pulse model of rainfall, *Journal of Geophysical Research*, 95, 2093-2100.

Kelley, C.T., “Detection and remediation of stagnation in the Nelder-Mead algorithm using a sufficient decrease condition,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 10, no. 1, pp. 43–55, 1999.

Khaliq, M.N, Cunnane, C., 1996. Modelling point rainfall occurrences with the modified Bartlett-Lewis rectangular pulses model, *Journal of Hydrology*, 180, 109-138.

Kiefer, J., and J. Wolfowitz. 1952. Stochastic estimation of the maximum of a regression function. *Annals of Mathematical Statistics* 23:462-466.

Kirkpatrick, S., C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi, Optimization by simulated annealing, *Science*, 220, 671-680, 1983.

Kossieris, P., D. Koutsoyiannis, C. Onof, H. Tyralis, and A. Efstratiadis, HyetosR: An R package for temporal stochastic simulation of rainfall at fine time scales, *European Geosciences Union General Assembly 2012, Geophysical Research Abstracts, Vol. 14*, Vienna, 11718, European Geosciences Union, 2012.

Lagarias, J.C., J.A. Reeds, M.H.Wright, and P.E.Wright, Convergence behavior of the Nelder-Mead simplex algorithm in low dimensions, Submitted to SIOPT, (1996).

Lewis, R. M., V. Torczon, and M. W. Trosset, Direct search methods: then and now, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124, 191-207, 2000.

- Locatelli, M. (2000) Simulated annealing algorithms for continuous global optimization: convergence conditions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 104, 121–133.
- Mays, L. W., and Y.-K Tung, Systems analysis, in: *Water Resources Handbook*, L. W. Mays (editor), McGraw-Hill, New York, 1996.
- McKinnon, K. I. M., Convergence of the Nelder-Mead simplex method to a non-stationary point, *SIAM Journal on Optimization*, 9 (1998), pp. 148-158.
- Metropolis, M., A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller, Equation of state calculations by fast computing machines, *Journal of Chemical Physics*, 21, 1087-1092, 1953.
- Nelder, J.A. and R. Mead, “A simplex method for function minimization,” *Computer Journal*, vol. 7, pp. 308 – 313, 1965.
- Onof, C., Wheater, H. S., 1993. Modelling of British rainfall using a random parameter Bartlett-Lewis rectangular pulse model, *Journal of Hydrology*, 149, 67-95.
- Onof, C., Wheater, H. S., 1994a. Improved fitting of the Bartlett-Lewis rectangular pulse model for hourly rainfall, *Hydrological Sciences Journal*, 39, 663-680.
- Onof, C., Wheater, H. S., 1994b. Improvements to the modeling of British rainfall using a modified Random Parameter Bartlett-Lewis Rectangular Pulse Model, *Journal of Hydrology*, 157, 177-195.
- Onof, C., Wheater, H. S., Isham, V., 1994c. Note on the analytical expression of the inter-event time characteristics for Bartlett-Lewis type rainfall models, *Journal of Hydrology*, 157, 197-210.
- Pan, L., and L. Wu, A hybrid global optimization method for inverse estimation of hydraulic parameters: annealing-simplex method, *Water Resources Research*, 34(9), 2261-2269, 1998.
- Papoulis A. and S. Unnikrishna Pillai, Πιθανότητες, τυχαίες μεταβλητές & στοχαστικές διαδικασίες, *Εκδόσεις Τζιόλα*, Θεσσαλονίκη, 2007.
- Pierre, D. A., *Optimization Theory with Applications*, Dover Publications, New York, 1986.

Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, Numerical Recipes in C, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1992.

Robbins, H., and Monro, S., 1951. A stochastic approximation method. *Annals of Mathematical Statistics* 22:400-407.

Robinson, S. M. 1996. Analysis of sample-path optimization. *Mathematics of Operations Research* 21 :5 13-528.

Rodríguez-Iturbe, I., Cox, D. R., F.R.S., Isham, V., 1987a. Some models for rainfall based on stochastic point processes, *Proc. R. Soc. Lond. A* 417, 269 – 288.

Rodríguez-Iturbe, I., Cox, D. R., F.R.S., Isham, V., 1988. A point process model for rainfall: further developments, *Proc. R. Soc. Lond. A* 417, 283 – 298.

Rodríguez-Iturbe, I., Febres De Power, B., Valdes, J.B., 1987b. Rectangular pulses point process models for rainfall: analysis of empirical data, *Journal of Geophysical Research*, 92, 9645 – 9656.

Rozos, E., A. Efstratiadis, I. Nalbantis, and D. Koutsoyiannis, Calibration of a semi-distributed model for conjunctive simulation of surface and groundwater flows, *Hydrological Sciences Journal*, 49(5), 819-842, 2004.

Shapiro, A., (1996), Simulation based optimization, Proceedings of the 1996 Winter Simulation Conference, ed. J.M. Charnes, D.J. Morrice, D.T. Brunner, and J.J.Swain, 332-336.

Smithers, J.C., Pegram, G.G.S, Schulze, R.E., 2002, Design rainfall estimation in South Africa using Bartlett-Lewis rectangular pulse rainfall models, *Journal of Hydrology*, 258, 83-99.

Spall, J. C. 1992. Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation. *IEEE Transactions on Automatic Control*

Spall, J. C. 1992. Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation. *IEEE Transactions on Automatic Control* 37:332–341.

Spall, J.C., An Overview of the Simultaneous Perturbation Method for Efficient Optimization, John Hopkins APL Technical Digest, 19(4), 1998, 482-492.

Spendley, W., G.R., Hext, and F.R. Himsworth, "Sequential application of simplex designs in optimisation and evolutionary operation," *Technometrics*, vol. 4, pp. 441–461, 1962.

Tomick, J.J., S.F. Arnold, R.R. Barton. 1995. Sample Size Selection for Improved Nelder-Mead Performance. C. Alexopoulos, K. Kang, W.R. Lilegdon, D. Goldsman, eds. Proceedings of the 1995 Winter Simulation Conference. ACM, Baltimore. 341-345.

Torczon, V., On the convergence of the multidirectional search algorithm, *SIAM Journal on Optimization*, 1, 123-145, 1991.

Velghe, T., Troch, P.A., De Troch, F.P., Van de Velde, J., 1994. Evaluation of cluster-based rectangular pulses point process models for rainfall, *Water Resources Research*, 30 (10), 2847-2857.

Verhoest, N., Troch, P.E., De Troch, F.P., 1997. On the applicability of Bartlett-Lewis rectangular pulses models in the modeling of design storms at a point, *Journal of Hydrology*, 202, 108-120.

Waymire, E., Gupta, V. K., 1981a. The Mathematical Structure of Rainfall Representations: 1.A review of the Stochastic Rainfall Models, *Water Resources Research*, 17, 1261-1272.

Waymire, E., Gupta, V. K., 1981b. The Mathematical Structure of Rainfall Representations: 2.A review of the Theory of Point Processes, *Water Resources Research*, 17, 1273-1285.

Yang, R.L. (2000) Convergence of the simulated annealing algorithm for continuous global optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 104, 691–716.

Ευστρατιάδης, Α., Διερεύνηση μεθόδων αναζήτησης ολικού βελτίστου σε προβλήματα υδατικών πόρων, MSc thesis, 139 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Μάιος 2001.

Ευστρατιάδης, Α., Ε. Ρόζος, και Α. Κουκουβίνος, Υδρόγειος: Μοντέλο υδρολογικής και υδρογεωλογικής προσομοίωσης - Θεωρητική τεκμηρίωση, *Ανάπτυξη βάσης δεδομένων και εφαρμογών λογισμικού σε διαδικτυακό περιβάλλον για την «Εθνική Τράπεζα Υδρολογικής και*

Μετεωρολογικής Πληροφορίας», 139 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Νοέμβριος 2009.

Ευστρατιάδης, Α., Ι. Ναλμπάντης, και Ε. Ρόζος, Μοντέλο προσομοίωσης του υδρολογικού κύκλου στη λεκάνη Βοιωτικού Κηφισού - Υλίκης, Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας, Τεύχος 21, 196 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Ιανουάριος 2004.

Ευστρατιάδης, Α., κ.α., Θεωρητική τεκμηρίωση μοντέλου προσομοίωσης υδρολογικών-υδρογεωλογικών διεργασιών λεκάνης απορροής, Ολοκληρωμένη Διαχείριση Υδατικών Συστημάτων σε Σύζευξη με Εξελιγμένο Υπολογιστικό Σύστημα, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2005

Ευστρατιάδης, Α., Μη γραμμικές μέθοδοι σε πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης υδατικών πόρων, με έμφαση στη βαθμονόμηση υδρολογικών μοντέλων, Διδακτορική διατριβή, 391 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Φεβρουάριος 2008.

Κοζάνης, Σ., Α. Χριστοφίδης, και Α. Ευστρατιάδης, Θεωρητική τεκμηρίωση για το λογισμικό Υδρογνώμων (έκδοση 4), *Ανάπτυξη βάσης δεδομένων και εφαρμογών λογισμικού σε διαδικτυακό περιβάλλον για την «Εθνική Τράπεζα Υδρολογικής και Μετεωρολογικής Πληροφορίας», Ανάδοχος: Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 173 σελίδες, Αθήνα, Ιούνιος 2010.*

Κοτσιέρης, Π., *Ανάπτυξη υπολογιστικού συστήματος για τον μονοδιάστατο στοχαστικό επιμερισμό ημερήσιων βροχοπτώσεων σε ωριαίες, σε περιβάλλον R*, Διπλωματική εργασία, 224 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Οκτώβριος 2011.

Κουτσογιάννης Δ., Στατιστική υδρολογία, Έκδοση 3, Τυπογραφείο Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, Αθήνα, 1996.

Κουτσογιάννης, Δ., Α. Ανδρεαδάκης, Ρ. Μαυροδήμου, Α. Χριστοφίδης, Ν. Μαμάσης, Α. Ευστρατιάδης, Α. Κουκουβίνος, Γ. Καραβοκυρός, Σ. Κοζάνης, Δ. Μαμάης, και Κ. Νουτσόπουλος, Εθνικό Πρόγραμμα Διαχείρισης και Προστασίας των Υδατικών Πόρων, *Υποστήριξη της κατάρτισης Εθνικού Προγράμματος Διαχείρισης και Προστασίας των*

Υδατικών Πόρων, 748 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Φεβρουάριος 2008.

Κουτσογιάννης, Δ., και Θ. Ξανθόπουλος, *Τεχνική Υδρολογία*, Έκδοση 3, 418 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1999.

Κουτσογιάννης, Δ., *Μοντέλο Επιμερισμού Σημειακής Βροχόπτωσης*, Διδακτορική διατριβή, 310 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1988.