

Υδραυλική & Υδραυλικά Έργα

Εισαγωγή στη μόνιμη ομοιόμορφη ροή Ροή σε αγωγούς υπό πίεση

Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αρχές μόνιμης ομοιόμορφης ροής

Ροή σε κλειστό αγωγό

Αρχή διατήρησης μάζας
(= συνέχεια)

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = V A$$

(όπου A το εμβαδό της διατομής)

Αρχή διατήρησης ορμής

$$\Sigma F = \rho Q (V_2 - V_1)$$

και λόγω συνέχειας και πρισματικού αγωγού:

$$\Sigma F = 0$$

Αρχή διατήρησης ενέργειας

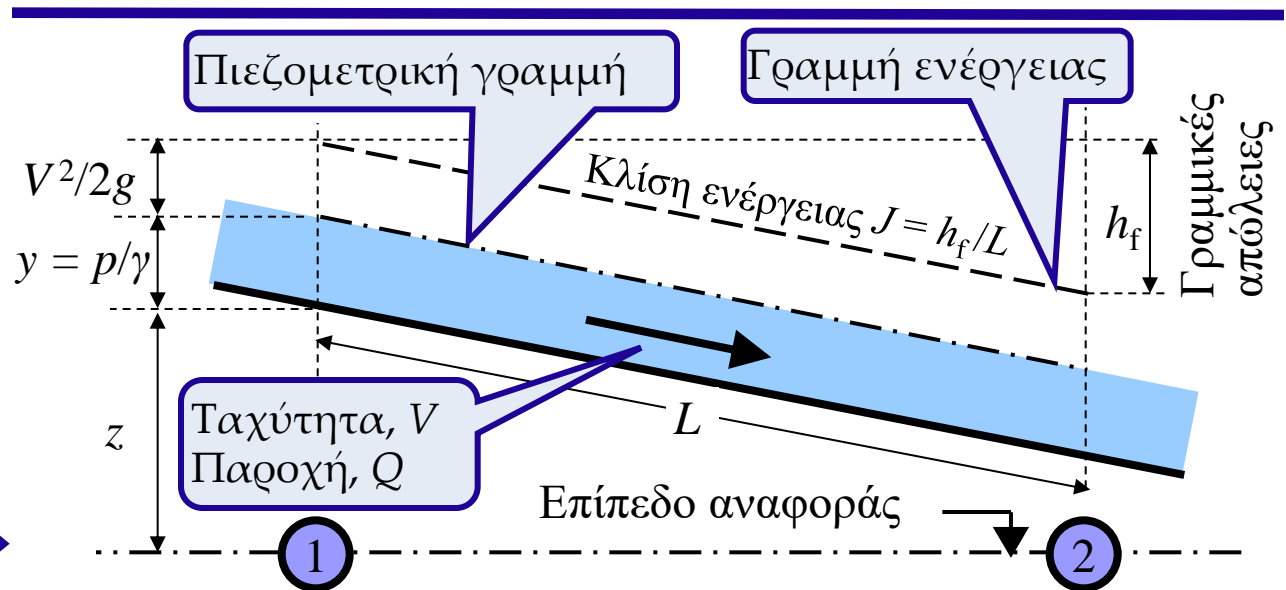
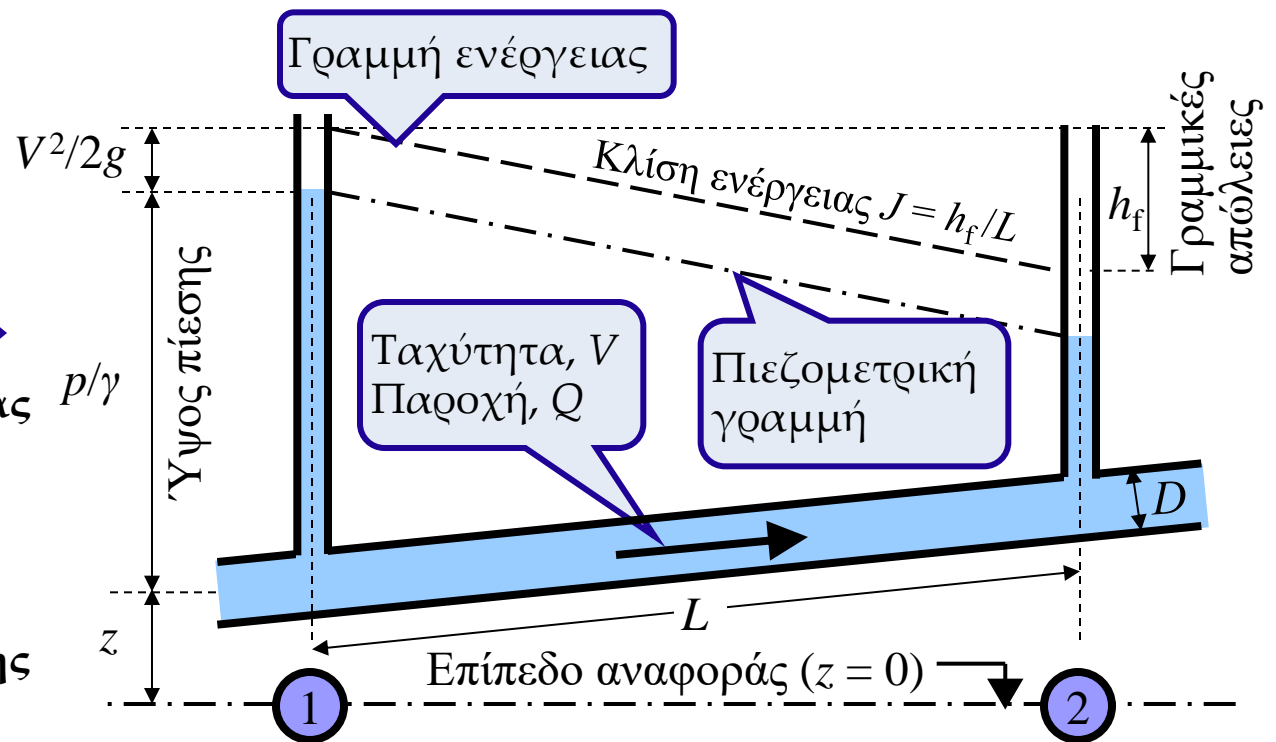
$$z_1 + p_1/\gamma + V_1^2/2g =$$

$$z_2 + p_2/\gamma + V_2^2/2g + h_f$$

και λόγω συνέχειας:

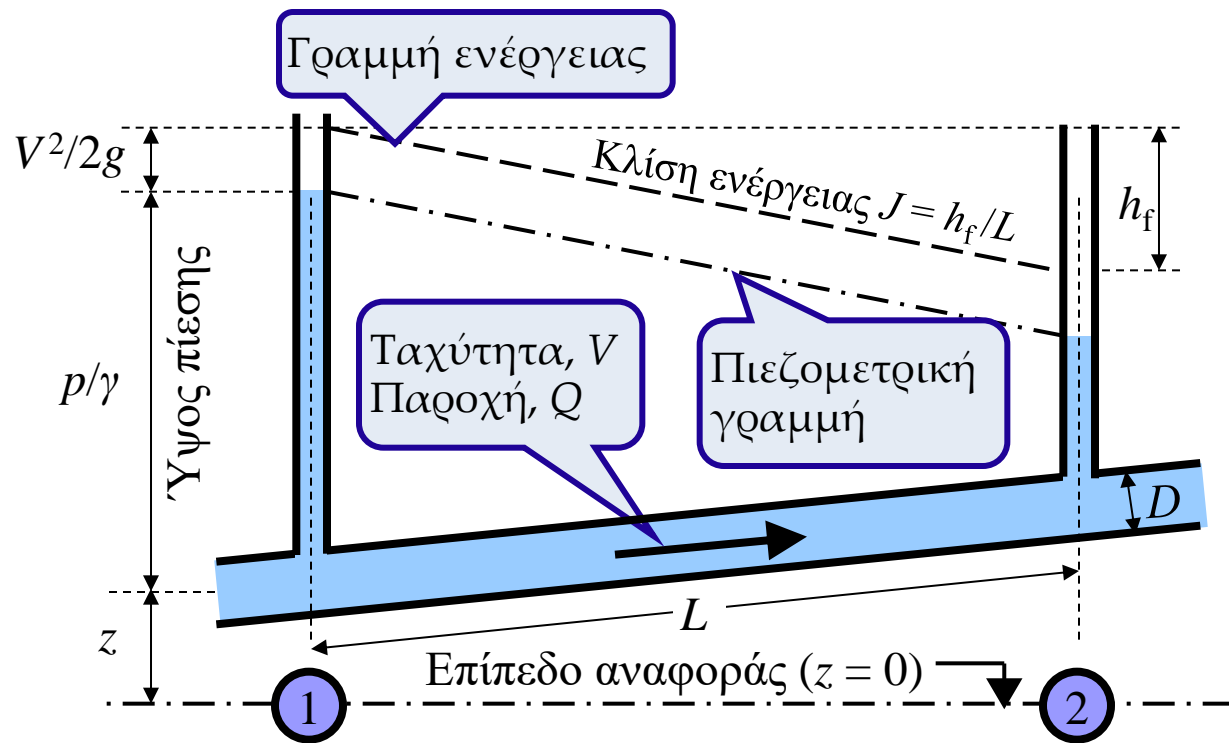
$$z_1 + p_1/\gamma = z_2 + p_2/\gamma + h_f$$

Ροή σε ανοιχτό αγωγό



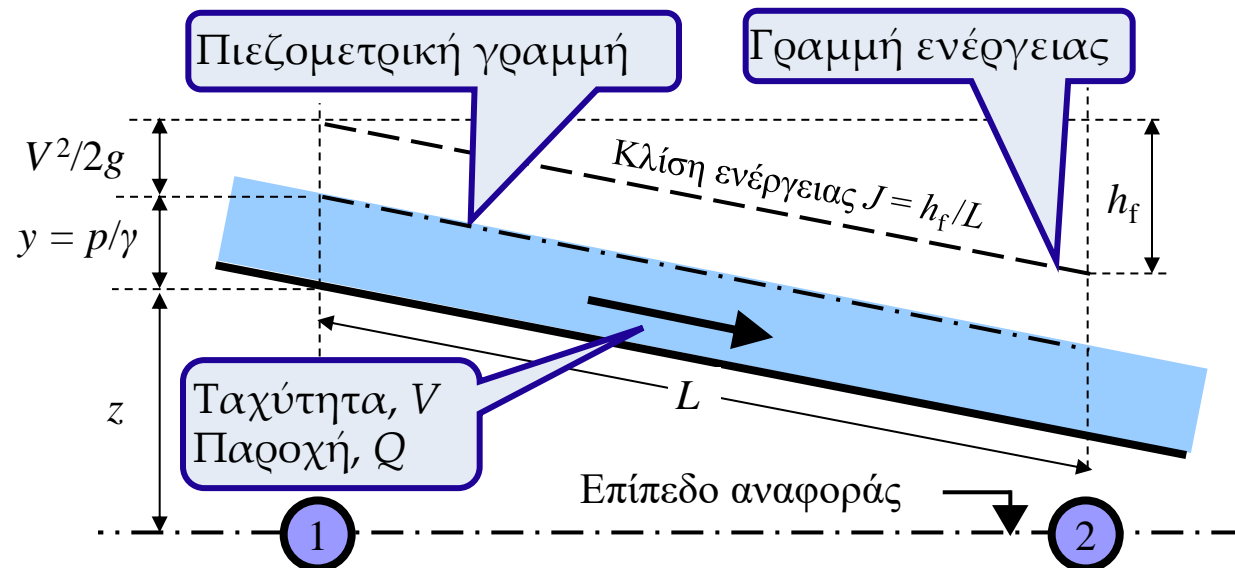
Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μόνιμης ομοιόμορφης ροής σε κλειστό αγωγό

- Η διατομή αποτελεί καθαρά γεωμετρικό μέγεθος – δεν εξαρτάται από τα υδραυλικά μεγέθη (παροχή, ταχύτητα).
- Αντίθετα η κλίση ενέργειας είναι υδραυλικό μέγεθος (μεταβάλλεται με την παροχή).
- Κατά κανόνα οι σωλήνες είναι κυκλικής διατομής (κυλινδρικοί), κάτι που εξασφαλίζει:
 - την απλούστερη δυνατή γεωμετρία ροής (πολλαπλές συμμετρίες), και
 - τη μαθηματική περιγραφή της γεωμετρίας ροής από ένα μέγεθος, την εσωτερική διάμετρο D .
- Η ομοιομορφία της ροής είναι δεδομένη (έστω κατά τμήματα).



Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μόνιμης ομοιόμορφης ροής σε ανοιχτό αγωγό

- Η κλίση ενέργειας αποτελεί καθαρά γεωμετρικό μέγεθος: είναι ίση με την κλίση πυθμένα και δεν εξαρτάται από τα υδραυλικά μεγέθη (παροχή, ταχύτητα).
- Αντίθετα η διατομή είναι υδραυλικό μέγεθος (μεταβάλλεται με την παροχή).
- Η γεωμετρία της διατομής είναι σαφώς πιο πολύπλοκη από τη γεωμετρία των κυκλικών αγωγών – χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη αποτελούν
 - η επιφάνεια, A ,
 - η βρεχόμενη περίμετρος P ,
 - η υδραυλική ακτίνα $R = A/P$.
- Η ομοιομορφία της ροής δεν είναι δεδομένη (χρειάζεται υδραυλικές προϋποθέσεις).



Γενικές αρχές για την εξίσωση μόνιμης ομοιόμορφης ροής

- Από την αρχή διατήρησης ορμής (εν προκειμένω, την ισορροπία δυνάμεων) στον όγκο αναφοράς ανάμεσα στις διατομές 1 και 2, σε διεύθυνση παράλληλη με τον πυθμένα του αγωγού, προκύπτει:

$$p_1 A = p_2 A + B \sin \theta + T$$

όπου A η διατομή του σωλήνα.

- Παίρνουμε υπόψη ότι $B = m g = \rho L A g = \gamma L A$, $\sin \theta = (z_2 - z_1)/L$, $T = \tau P L$, $J = h_f/L$ όπου m = μάζα, ρ = πυκνότητα, γ = και τ = μέση διατμητική τάση στο όριο.

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις παίρνουμε $(p_1 - p_2)/\gamma = (z_2 - z_1) + \tau P L/(\gamma A)$ και τελικά

$$\tau = \gamma R J$$

όπου $R = A/P$ η υδραυλική ακτίνα.

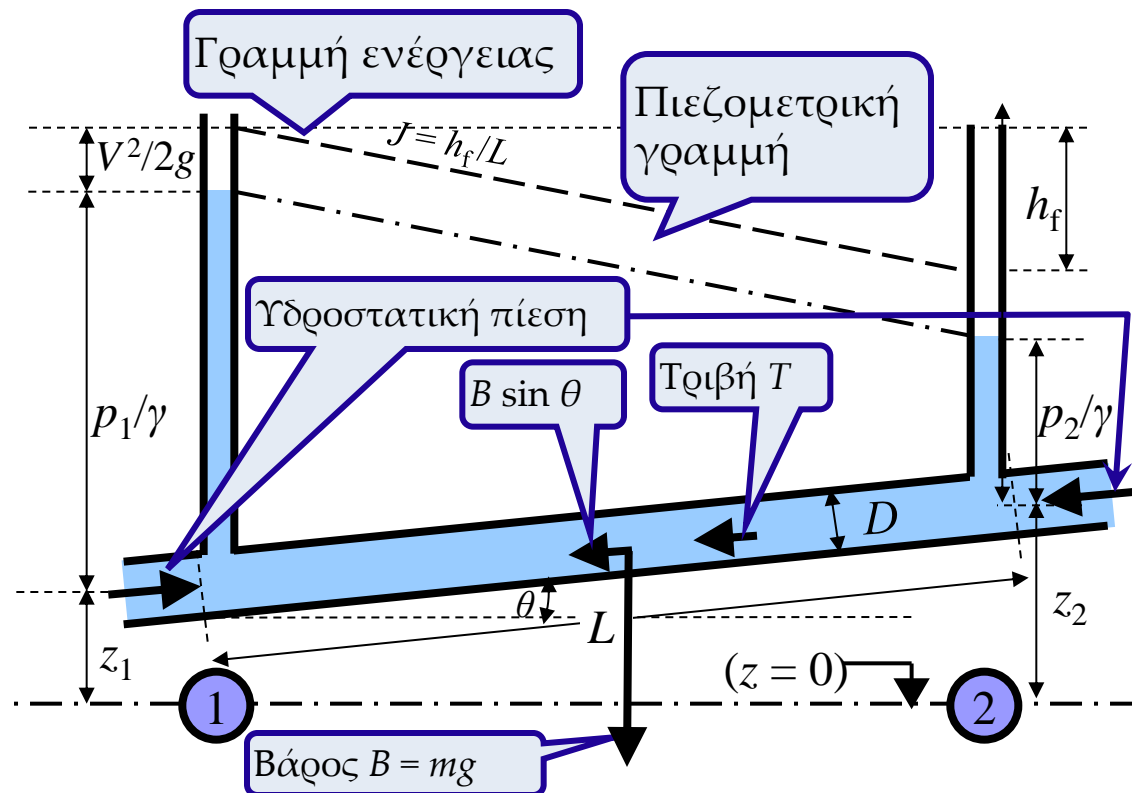
- Εξ άλλου με διαστατική ανάλυση υπολογίζουμε τη διατμητική τάση και ως συνάρτηση της ταχύτητας (εξίσωση σύρσης - drag equation):

$$\tau = C_f \rho V^2/2$$

όπου C_f αδιάστατος συντελεστής τριβής.

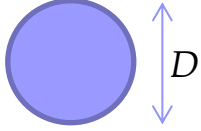

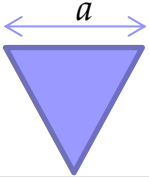
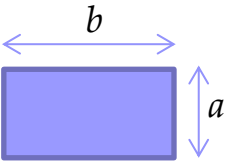
- Απαλείφοντας το τ παίρνουμε $R J = C_f V^2/2g$ (γενικευμένη εξίσωση Chezy).

- Η ίδια εξίσωση ισχύει και σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια.



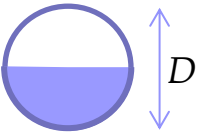
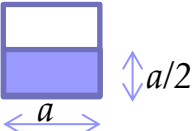
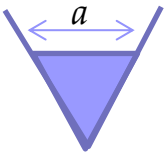
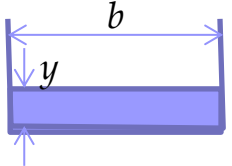
Η υδραυλική ακτίνα και η σημασία της

- Από τη γενικευμένη εξίσωση Chezy, $R J = C_f V^2/2g$, προκύπτει ότι όσο μεγαλώνει η υδραυλική ακτίνα R ή/και η κλίση J , τόσο μεγαλώνει η ταχύτητα V , άρα και η παροχή Q για δεδομένη διατομή A . Συνεπώς μεγάλες διατμητικές τάσεις συνδυάζονται με μεγάλες παροχές.
- Από τις διαφορετικές διατομές ο κύκλος είναι το υδραυλικά βέλτιστο σχήμα γιατί για δεδομένο εμβαδό διατομής A έχει τη μικρότερη περίμετρο P και τη μεγαλύτερη υδραυλική ακτίνα R . Είναι ακόμη οικονομικά και στατικά βέλτιστο.

Σχήμα	A	P	$R = A/P$	$R = f(A)$
	$\frac{\pi D^2}{4}$	πD	$\frac{D}{4}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{A} = 0.282\sqrt{A}$
	a^2	$4a$	$\frac{a}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{A} = 0.25\sqrt{A}$
	$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$3a$	$\frac{\sqrt{3}a}{12}$	$\frac{3^{1/4}}{6}\sqrt{A} = 0.219\sqrt{A}$
	ba	$2b + 2a$	$\frac{a}{2 + 2a/b}$	$\frac{\sqrt{a/b}}{2 + 2a/b}\sqrt{A}$ $\max\left(\frac{\sqrt{a/b}}{2+2a/b}\right) = 0.25$ για $a/b = 1$ (τετράγωνο)

Η υδραυλική ακτίνα σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια

- Στη ροή με ελεύθερη επιφάνεια η βρεχόμενη περίμετρος, υπεύθυνη για τις τριβές, είναι μικρότερη (δεν υπολογίζεται η ελεύθερη επιφάνεια) και άρα η υδραυλική ακτίνα μεγαλύτερη.
- Από τις διαφορετικές διατομές το ημικύκλιο είναι το υδραυλικά βέλτιστο σχήμα γιατί για δεδομένο εμβαδό διατομής A έχει τη μικρότερη περίμετρο P και τη μεγαλύτερη υδραυλική ακτίνα R .

Σχήμα	A	P	$R = A/P$	$R = f(A)$
	$\frac{\pi D^2}{8}$	$\frac{\pi D}{2}$	$\frac{D}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{A} = 0.399\sqrt{A}$
	$\frac{a^2}{2}$	$2a$	$\frac{a}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{A} = 0.353\sqrt{A}$
	$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$2a$	$\frac{\sqrt{3}a}{8}$	$\frac{3^{1/4}}{4}\sqrt{A} = 0.329\sqrt{A}$
	by	$b + 2y$	$\frac{y}{1 + 2y/b} \approx y$ Για $y/b \ll 1$: $R \approx y$	$\frac{\sqrt{y/b}}{1 + 2y/b}\sqrt{A}$ $\max\left(\frac{\sqrt{y/b}}{1+2y/b}\right) = 0.353$ για $y/b = 1/2$ (μισό τετράγωνο)

Υπολογισμός γραμμικών ενεργειακών απωλειών σε αγωγούς υπό πίεση κυκλικής διατομής (μόνιμη ροή)

- Αν στη γενικευμένη εξίσωση Chézy θέσουμε $f := 4 C_f$ και με δεδομένο ότι σε κυκλική διατομή $R = A/P = (\pi D^2/4) / (\pi D) = D/4$, παίρνουμε

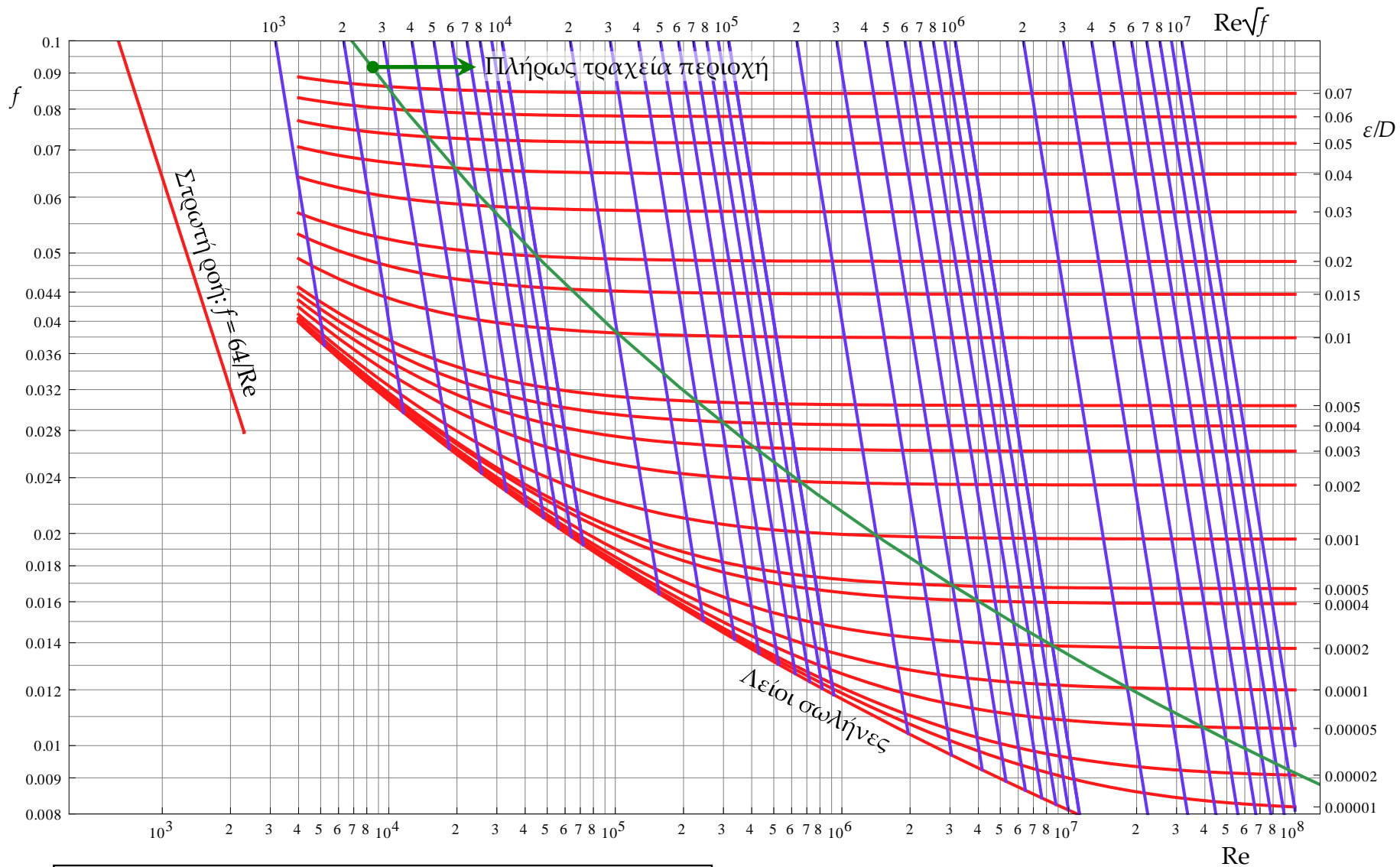
$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{ή } J = f \frac{1}{D} \frac{V^2}{2g})$$

που είναι γνωστή ως εξίσωση Darcy-Weisbach.

- Για μεγάλες τιμές του αριθμού Reynolds της ροής ($Re := VD/\nu$, όπου ν η κινηματική συνεκτικότητα του νερού, ίση με $1.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, για θερμοκρασία 16°C), ο συντελεστής τριβής f είναι σταθερός για δεδομένο υλικό και διάμετρο σωλήνα.
- Ακριβέστερα, στις συνθήκες αυτές ο συντελεστής f είναι συνάρτηση της σχετικής τραχύτητας ε/D , όπου ε η απόλυτη επιφανειακή τραχύτητα του τοιχώματος του αγωγού, μέγεθος με διάταξη μήκους.
- Για μικρότερους αριθμούς Reynolds, ο συντελεστής f είναι συνάρτηση και του Re , που δίνεται από τον (πεπλεγμένο) τύπο Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$$

ή γραφικά από το διάγραμμα Moody.



Διάγραμμα Moody-Rouse - Έκδοση Κουτσογιάννη Παπαλεξίου

Αβεβαιότητα για την εξίσωση Colebrook-White

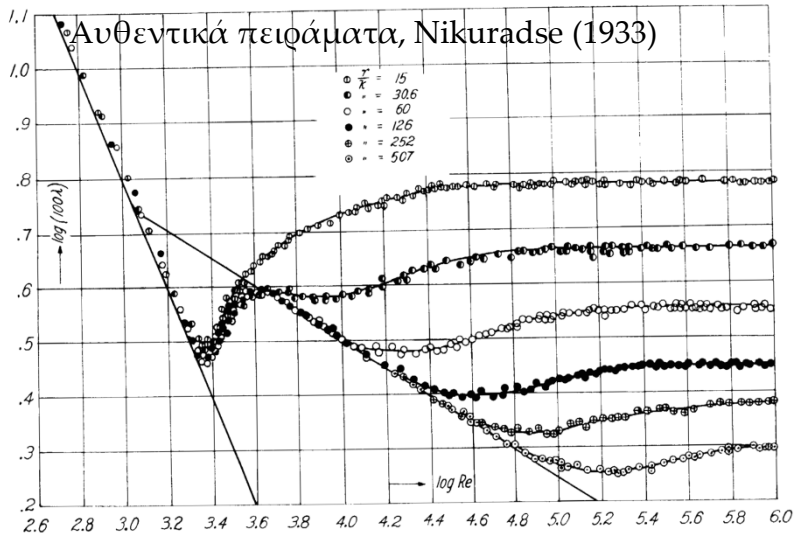
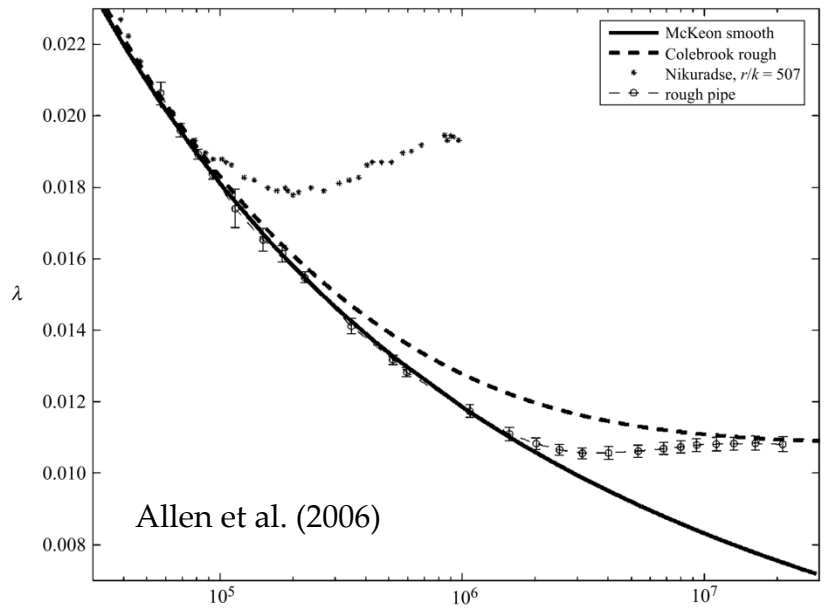
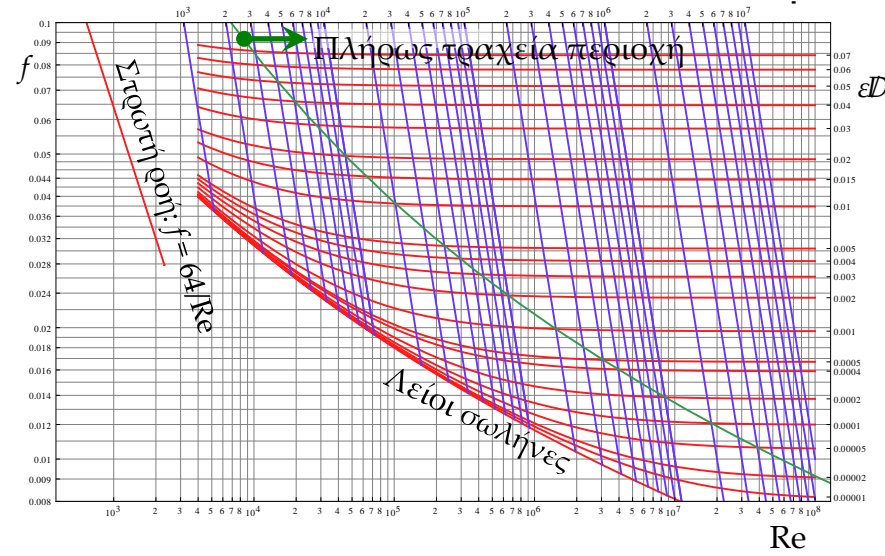


Figure 9.- Relation between $\log(100\lambda)$ and $\log Re$.



Allen et al. (2006)

The friction factor behaviour of a honed surface in the transitional regime does not follow the Colebrook relationship (Colebrook & White 1937; Colebrook 1939) and instead exhibits behaviour more typical of Nikuradse's sand-grain for roughness (Nikuradse 1932, 1933).



ϵ/D

Νεότερες πειραματικές έρευνες στο Princeton και θεωρητικές στο Illinois δεν επιβεβαιώνουν την εξίσωση της εξίσωσης Colebrook-White αλλά δείχνουν συμπεριφορά ανάλογη αυτής που παρατηρήθηκε αρχικά από τον Nikuradse (1933). Βλ.:

J. J. Allen, M. A. Shockling, G. J. Kunkel & A. J. Smits (2006), Turbulent flow in smooth and rough pipes, doi:10.1098/rsta.2006.1939.

G. Gioia and P. Chakraborty (2006), Turbulent friction in rough pipes and the energy spectrum of the phenomenological theory, 10.1103/PhysRevLett.96.044502

Τιμές της τραχύτητας σχεδιασμού

- Δεδομένου ότι τα υδραυλικά έργα σχεδιάζονται με ορίζοντα 40 ετών, οι τιμές εφαρμογής των συντελεστών τραχύτητας πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τη γήρανση των αγωγών.
- Κατά κανόνα οι τιμές εφαρμογής λαμβάνονται προσαυξημένες (ισοδύναμη τραχύτητα) προκειμένου να συμπεριληφθούν και τοπικές απώλειες (βλ. επόμενη σελίδα).
- Η ελάχιστη αποδεκτή ισοδύναμη τραχύτητα, με την προϋπόθεση νερού που δεν προκαλεί διάβρωση ή επικαθήσεις αλάτων, λαμβάνεται $\varepsilon = 0.1 \text{ mm}$.
- Στη συνήθη περίπτωση πλαστικών αγωγών, με την υπόθεση ότι αναμένονται φαινόμενα διάβρωσης ή επικαθήσεων αλάτων, συστήνεται $\varepsilon = 1.0-2.0 \text{ mm}$.

Ενδεικτικός πίνακας εργαστηριακών τιμών ισοδύναμης τραχύτητας τυπικών υλικών (Δεν συστήνεται η χρήση τους σε μελέτες υδραυλικών έργων)

Υλικό	ε (mm)
Ορείχαλκος, χαλκός	0.0015
Χάλυβας εμπορίου ή σφυρήλατος σίδηρος	0.045
Χυτοσίδηρος με ασφαλτική επάλειψη	0.12
Γαλβανισμένος σίδηρος	0.15
Χυτοσίδηρος χωρίς επάλειψη	0.26
Σκυρόδεμα	0.3 – 3.0
Πλαστικό (λείοι σωλήνες εργοστασίου)	< 0.01
Πλαστικό, μετά από χρήση	> 0.10

Τυποποίηση εξισώσεων για την επίλυση των συνήθων υδραυλικών προβλημάτων σε κλειστούς αγωγούς

- Πρόβλημα 1: Γνωστά ε, D, Q – άγνωστο J

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} \bullet f = f(\text{Re}, \varepsilon/D) \bullet J = f \frac{1}{D} \frac{V^2}{2g} = f \frac{8Q^2}{g \pi^2 D^5}$$

- Πρόβλημα 2: Γνωστά ε, D, J – άγνωστο Q

$$\text{Re}\sqrt{f} = \frac{(2gJ)^{1/2} D^{3/2}}{\nu} \bullet f = f'(\text{Re}\sqrt{f}, \varepsilon/D) \bullet Q = \sqrt{\frac{g \pi^2 J D^5}{8f}}$$

- Πρόβλημα 3: Γνωστά ε, Q, J – άγνωστο D

$$A = \left(\frac{8Q^2}{g \pi^2 J} \right)^{1/5} \bullet B = \frac{4Q}{\pi \nu}$$

$$\text{υποθετικό } f \bullet D = A f^{1/5} \bullet \text{Re} = \frac{B}{D} \bullet f = f(\text{Re}, \varepsilon/D)$$



Η διαδικασία αυτοματοποιείται εύκολα σε υπολογιστές. Οι σχετικές υπολογιστικές συναρτήσεις σε γλώσσα Visual Basic με εφαρμογή στο πρόγραμμα Excel περιέχονται στο: <http://www.itia.ntua.gr/en/softinfo/32/>

Λεπτομερής ανάλυση της ροής σε κυκλικούς αγωγούς – Στρωτή ροή

- Γράφουμε τη βασική μακροσκοπική εξίσωση για ένα υποθετικό κύλινδρο εσωτερικό του σωλήνα με γεωμετρική ακτίνα $r < D/2$ αντικαθιστώντας $R \rightarrow r/2$ [υπενθύμιση $J = -d(p/\gamma + z)/dx$]

$$\tau = \rho g J r/2$$

- Στη στρωτή ροή η ταχύτητα u συνδέεται με τη διατμητική τάση με την εξίσωση

$$\tau = -\mu du/dr$$

- Άρα

$$-\mu du/dr = \rho g J r/2 \rightarrow du = -(g/2\nu) J r dr$$

- Ολοκληρώνοντας με δεδομένο ότι $u(r = D/2) = 0$ βρίσκουμε

$$u(r) = (g/4\nu) J (D^2/4 - r^2) = (gD^2/16\nu) J [1 - (2r/D)^2]$$

- Αποδεικνύεται ότι η μέση ταχύτητα είναι

$$V = u(0)/2 = (gD^2/32\nu) J$$

- Αντικαθιστώντας στην παραπάνω την κλίση από το νόμο Darcy-Weisbach:

$$V = (gD^2/32\nu) (f V^2/2gD) \rightarrow f = 64 / Re$$

Λεπτομερής ανάλυση της ροής σε κυκλικούς αγωγούς – Τυρβώδης ροή

- Η κατανομή διατμητικών τάσεων είναι ίδια όπως στη στρωτή ροή

$$\tau = \rho g J r/2$$

- Όμως η σχέση διατμητικής τάσης και ταχύτητας είναι πιο πολύπλοκη (δεν ισχύει η εξίσωση $\tau = -\mu du/dr$), ενώ ο ρόλος της συνεκτικότητας είναι δευτερεύων (κυριαρχούν οι τυρβώδεις τάσεις που αντιστοιχούν στην τυρβώδη μεταφορά ορμής).

- Αποτέλεσμα των τυρβωδών τάσεων είναι η σχετική ομοιομόρφιση της κατανομής της ταχύτητας.

- Η κατανομή της ταχύτητας εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds και την τραχύτητα των τοιχωμάτων ϵ .

- Η εξίσωση της κατανομής της ταχύτητας και τελικώς η σχέση $f(Re, \epsilon/D)$ έχουν προκύψει από πειραματικά δεδομένα και είναι:

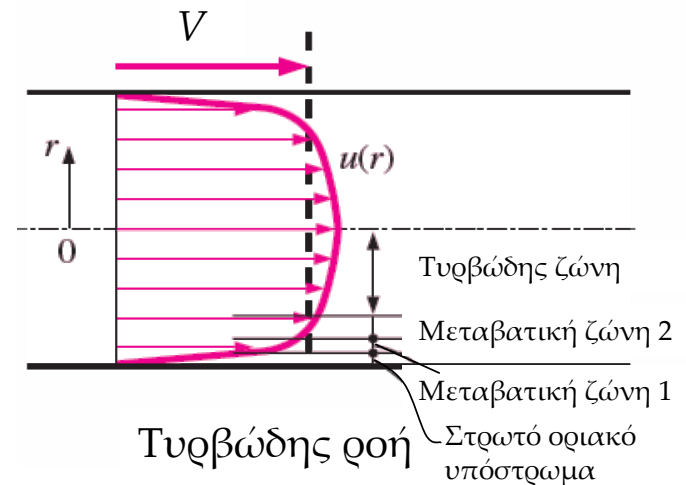
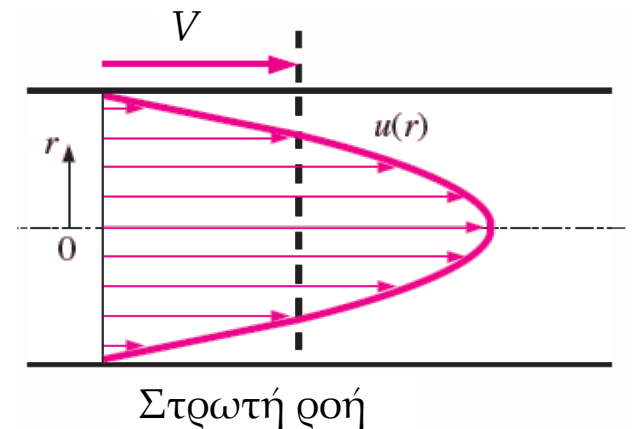
$u/u_* = y u_*/\nu$ για το στρωτό οριακό υπόστρωμα (συγκεκριμένα για $u/u_* < 5$),

$u/u_* = (1/\kappa) \ln(y/a) + b$ για το υπόλοιπο τμήμα,

όπου $y = D/2 - r$, $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ (ταχύτητα τριβής), $\kappa = 0.41$ (σταθερά von Karman) και

$a = \epsilon$, $b = 8.5$ για τυρβώδη ζώνη σε τραχείς σωλήνες,

$a = \nu/u_*$, $b = 5.5$ για τυρβώδη ζώνη σε λείους σωλήνες.



Σχέση κατανομής ταχύτητας και συντελεστή τριβής

- Η μεταβολή της ταχύτητας u κατά τη διαμήκη έννοια (παράλληλα στη ροή), ως προς τη συντεταγμένη y , κάθετη στη ροή, δίνεται από τη γενική σχέση

$$u(y) = (u_*/\kappa) \ln(y/y_0)$$

Προφανώς η σχέση δεν ισχύει κοντά στο όριο (π.χ. για y/y_0 θα έδινε $u < 0$).

- Η μέση ταχύτητα δίνεται από τη σχέση $V = \frac{4}{\pi D^2} \int_0^{D/2} 2\pi r u(D/2 - r) dr$. Ακριβέστερα, το κάτω όριο του ολοκληρώματος θα έπρεπε να είναι το y_0 θεωρώντας έτσι μηδενική ταχύτητα για $y < y_0$. Ακόμη ακριβέστερα, για $y/y_0 < \alpha$ όπου το α ορίζεται παρακάτω, η ταχύτητα θα έπρεπε να ληφθεί γραμμικά ανάλογη του y/y_0 . Όμως επειδή στην πράξη $y_0 \ll D$, η συμβολή στο ολοκλήρωμα από την περιοχή $y < \alpha y_0$ είναι αμελητέα, οπότε πρακτικώς δεν αλλάζει το αποτέλεσμα θεωρώντας κάτω όριο 0.

- Ολοκληρώνοντας με τις πιο πάνω παρατηρήσεις βρίσκουμε

$$V = V(D) = \left(\frac{u_*}{\kappa}\right) \ln\left(\frac{D}{2e^{3/2}y_0}\right)$$

- Από την εξίσωση σύρσης, $\tau = (f/4) \rho V^2/2$, και τον ορισμό της ταχύτητας τριβής, $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$, προκύπτει $V/u_* = \sqrt{8}/\sqrt{f}$

- Εξάλλου η εξίσωση Colebrook-White γράφεται συνεπέστερα:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -\frac{1}{\sqrt{8}\kappa} \ln\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{8}\kappa} \ln\left(\frac{\varepsilon/3.7}{D} + \frac{(2.51/\sqrt{8})(v/u_*)}{D}\right) = \frac{1}{\sqrt{8}\kappa} \ln\left(\frac{D}{\varepsilon/3.7 + (2.51/\sqrt{8})(v/u_*)}\right)$$

- Συνδυάζοντας την παραπάνω με τη $V(D)$ παίρνουμε $2e^{3/2}y_0 = \varepsilon/3.7 + (2.51/\sqrt{8})(v/u_*)$, ή $y_0 = 0.03\varepsilon + 0.1(v/u_*)$

- Η τιμή α (μετάβαση στον γραμμικό νόμο) προκύπτει για $(u_*/\kappa) \ln(\alpha/y_0) = u_* \alpha/(v/u_*)$, οπότε $\alpha = -(1/\kappa)W_{-1}(\kappa(-0.03\varepsilon/(v/u_*) - 0.1))$, όπου W η συνάρτηση Lambert-W. Για $\varepsilon = 0$, $\alpha = 11.6$, ενώ $\alpha_{\min} = 1/\kappa = 2.44$ για $\varepsilon/(v/u_*) = 26.6$.

Τοπικές απώλειες

- ❑ Πέραν των γραμμικών απωλειών, στις σωληνώσεις δημιουργούνται και τοπικές απώλειες, στις συνδέσεις των αγωγών και τις στροφές (**τυπικές τοπικές απώλειες**), καθώς και στις θέσεις των ειδικών συσκευών και διατάξεων (**ειδικές τοπικές απώλειες**).
- ❑ Οι τοπικές απώλειες οφείλονται κυρίως στην ανάπτυξη στροβίλων αποκόλλησης της ροής και εκφράζονται με όρους **ύψους κινητικής ενέργειας**, ήτοι:

$$h_L = K_t V^2 / 2g \quad \text{ή} \quad h_L = K_t \Delta(V^2) / 2g$$

όπου K_t συντελεστής που εξαρτάται από τη γεωμετρία της τοπικής μεταβολής διατομής και κατεύθυνσης και τα χαρακτηριστικά της ροής (αριθμός Reynolds).

- ❑ Για να ληφθούν υπόψη οι τυπικές τοπικές απώλειες χωρίς αναλυτικό υπολογισμό, προσαυξάνονται οι τιμές της τραχύτητας ϵ (**ισοδύναμη τραχύτητα**).
- ❑ Ειδικά για τις **δικλίδες**, οι τοπικές απώλειες πρέπει να λαμβάνονται ξεχωριστά υπόψη, ιδίως όταν αυτές περιορίζουν σημαντικά τη ροή. Στην περίπτωση αυτή, ανάλογα και με το άνοιγμα της δικλίδας, ο συντελεστής K_t μπορεί να αποκτήσει πολύ υψηλές τιμές (π.χ. > 100-1000).

Η εκτίμηση της ισοδύναμης τραχύτητας αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους παράγοντες αβεβαιότητας στην προσομοίωση της λειτουργίας υδραυλικών δικτύων.