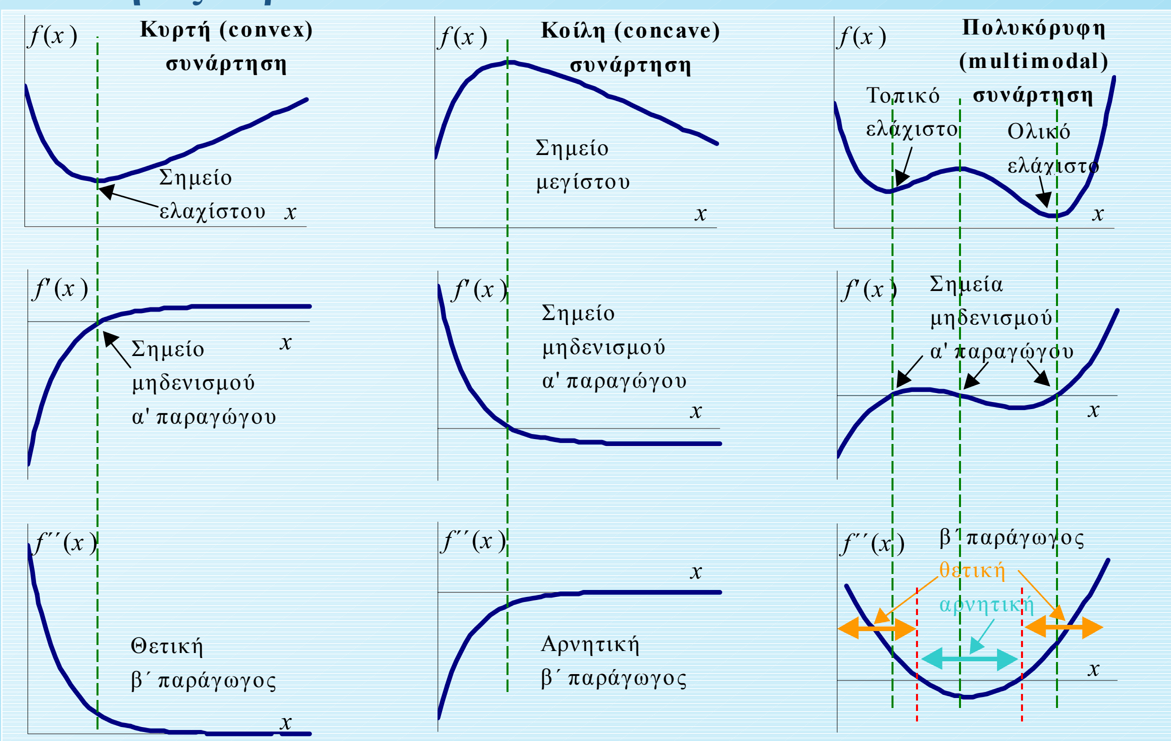
Ανασκόπηση εννοιών, μεθόδων βελτιστοποίησης και άλγεβρας μητρώων

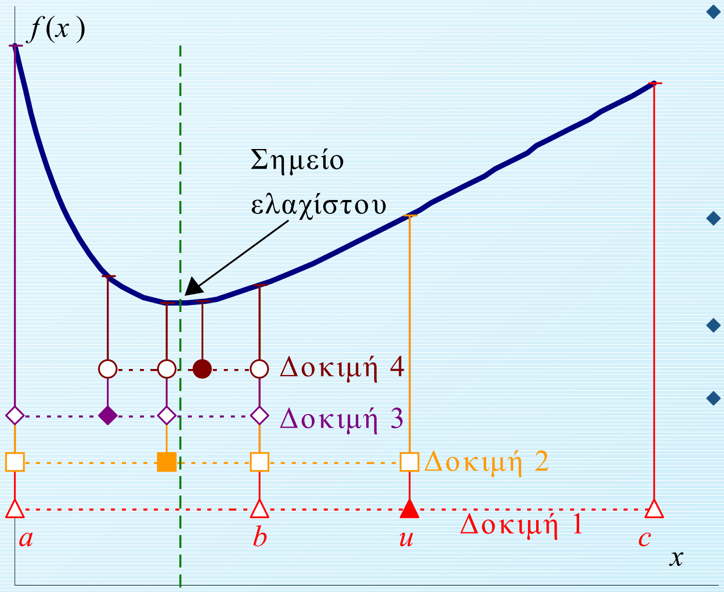
Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

1. Μονοδιάστατο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Συνθήκες ακροτάτου



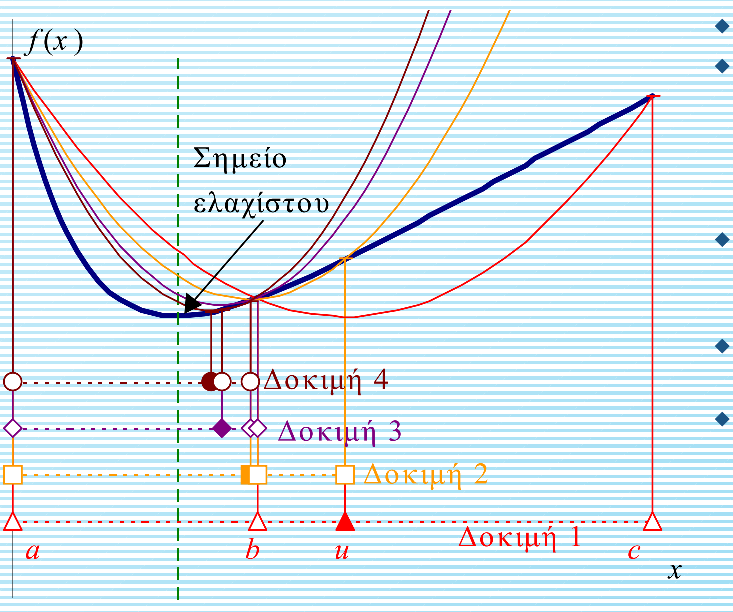
Αναζήτηση ακροτάτου: μέθοδος χρυσής τομής



- Ξεκινάμε από τρία σημεία (a, b, c).
- Πυκνώνουμε (σημείο u) από το ενδιάμεσο σημείο (b) προς την πλευρά του πιο απομακρυσμένου, ακολουθώντας την αναλογία της χρυσής τομής ($(3-\sqrt{5})/2 =$ 0.38197).
- Εξετάζουμε ποιο από τα δύο ενδιάμεσα σημεία αντιστοιχεί στη μικρότερη τεταγμένη.
- Κρατάμε αυτό το σημείο και δύο σημεία εναλλάξ.
- Σταματάμε όταν το διάστημα που ορίζουν τα δύο ακραία σημεία προς το άθροισμα των τετμημένων των δύο ενδιάμεσων σημείων (κατ’ απόλυτη τιμή) γίνει μικρότερο από μια τιμή ανοχής.
- Διαφορετικά επαναλαμβάνουμε.

(Για κωδικοποίηση αλγορίθμου βλ. Press et al., 1992)

Αναζήτηση ακροτάτου: μέθοδος παραβολικής παρεμβολής



Υπολογισμός κορυφής παραβολής

$$u = b - \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2[f(b)-f(c)]-(b-c)^2[f(b)-f(a)]}{(b-a)[f(b)-f(c)]-(b-c)[f(b)-f(a)]}$$

- Ξεκινάμε από τρία σημεία (a, b, c).
- Πυκνώνουμε με ένα ακόμη σημείο (u) προσαρμόζοντας παραβολή στα τρία γνωστά σημεία (a, b, c) και υπολογίζοντας τη θέση της κορυφής της παραβολής.
- Εξετάζουμε ποιο από τα δύο ενδιάμεσα σημεία αντιστοιχεί στη μικρότερη τεταγμένη.
- Κρατάμε αυτό το σημείο και δύο σημεία εναλλάξ.
- Σταματάμε όταν το διάστημα που ορίζουν τα δύο ακραία σημεία προς το άθροισμα των τετμημένων των δύο ενδιάμεσων σημείων (κατ’ απόλυτη τιμή) γίνει μικρότερο από μια τιμή ανοχής.
- Διαφορετικά επαναλαμβάνουμε.

Βελτιωμένη εκδοχή της μεθόδου έχει αναπτυχθεί από τον Brent (βλ. Press et al., 1992)

2. Πολυδιάστατα προβλήματα: Εισαγωγικές έννοιες

Διανύσματα και μητρώα

Διάνυσμα (μεγέθους n): $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Μητρώο (μεγέθους $n \times k$): $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$

Ανάστροφο* διάνυσμα: $\mathbf{x}^T = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n]$

Ανάστροφο μητρώο: $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$

Πρόσθεση: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2k}+b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nk}+b_{nk} \end{bmatrix}$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: $\lambda\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$

$\lambda\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1k} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nk} \end{bmatrix}$

---

* Συνάρτηση EXCEL: TRANSPOSE(**A**) όπου **A**: range (array formula)

Διανύσματα και μητρώα (2)

Πολλαπλασιασμός μητρώων ή/και διανυσμάτων*:

$$\mathbf{A}_{(n \times k)} \cdot \mathbf{B}_{(k \times l)} = \mathbf{C}_{(n \times l)}$$

$$\text{n γραμμές}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}}_{k \text{ στήλες}}\right. \cdot \text{k γραμμές}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} \end{bmatrix}}_{l \text{ στήλες}}\right. = \text{n γραμμές}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nl} \end{bmatrix}}_{l \text{ στήλες}}\right.$$

όπου $c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}\, b_{rj}$ (π.χ. $c_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + \cdots + a_{2k}\, b_{k1}$)

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων: $<\mathbf{x}, \mathbf{y}> := \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ (βαθμωτό μέγεθος)

Νόρμα διανύσματος: $\|\mathbf{x}\| = <\mathbf{x}, \mathbf{x}>^{1/2} := (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}$

Τετραγωνική μορφή: η συνάρτηση της μορφής $f(\mathbf{x}) = <\mathbf{x}, \mathbf{A}\,\mathbf{x}> = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$, όπου **A** τετραγωνικό συμμετρικό μητρώο και **x** διάνυσμα.

Θετικά ορισμένο μητρώο: Ένα τετραγωνικό συμμετρικό μητρώο **A** για το οποίο ισχύει $<\mathbf{x}, \mathbf{A}\,\mathbf{x}> > 0$ για κάθε $x \neq 0$. (Θετικά ημιορισμένο μητρώο: $<\mathbf{x}, \mathbf{A}\,\mathbf{x}> \geq 0$)

---

* Συνάρτηση EXCEL: MMULT(**A**, **B**), όπου **A**, **B**: ranges (array formula)

Διανύσματα και μητρώα (3)

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού μητρώων: $\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{C}$, $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\,\mathbf{A}^T$

Μοναδιαίο μητρώο (μεγέθους $n \times n$): $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Αντίστροφο μητρώο*: Ένα τετραγωνικό μητρώο **A** (μεγέθους $n \times n$) ονομάζεται ομαλός (non-singular) αν υπάρχει ένα *αντίστροφο μητρώο* (συμβολικά $\mathbf{A}^{-1}$) που να ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Σε αντίθετη περίπτωση το μητρώο A ονομάζεται ανώμαλο (singular).

Ιδιότητα αντιστροφής: $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}$

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων: Ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους, της μορφής

$$\begin{gathered} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{gathered}$$

γράφεται σε διανυσματική μορφή: $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ και η λύση του (για ομαλό **A**) είναι $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$.

---

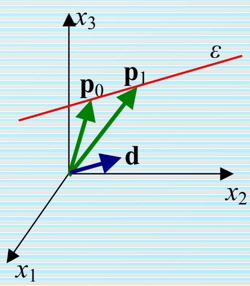
*Συνάρτηση EXCEL: MINVERSE(A) όπου A: range (array formula).

Ευθείες, επίπεδα και υπερεπίπεδα σε διανυσματικούς χώρους

Σημείο: Το διάνυσμα $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ στο χώρο n διαστάσεων παριστάνει (α) ένα σημείο (β) μία διεύθυνση.

Ευθεία: Για να οριστεί μια ευθεία (ε) σε χώρο n διαστάσεων απαιτούνται δύο σημεία ($\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$) ή ένα σημείο ($\mathbf{p}_0$) και μια διεύθυνση ($\mathbf{d}$). Η εξίσωση της ευθείας δίνεται:

1. Με βάση τα δύο σημεία ($\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$): $\mathbf{x} = (1 - \beta)\,\mathbf{p}_0 + \beta\,\mathbf{p}_1$, όπου $\beta \in \mathcal{R}$ (για το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{p}_1$, $\beta \in [0, 1]$).
2. Με βάση το σημείο ($\mathbf{p}_0$) και τη διεύθυνση ($\mathbf{d}$) (παραμετρική μορφή): $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \beta\,\mathbf{d}$.
3. Με βάση τη σχέση $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου **A** μητρώο μεγέθους $(n - 1) \times n$ και **b** διάνυσμα μεγέθους $n - 1$.



Ευθεία σε χώρο 3 διαστάσεων

(Υπερ)επίπεδο: Στο χώρο n διαστάσεων μπορούν να οριστούν επίπεδα k διαστάσεων, όπου $1 \le k \le n - 1$ (για $k = 1$ έχουμε ευθεία). Ένα k-επίπεδο καθορίζεται με τρεις διαφορετικούς τρόπους και έχει τις αντίστοιχες εξισώσεις:

1. Με βάση $k + 1$ σημεία ($\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$): $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{w}$, όπου $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k]$ μητρώο μεγέθους $n \times (k + 1)$ και **w** διάνυσμα μεγέθους $k + 1$ με άθροισμα συνιστωσών ίσο με 1.
2. Παραμετρικά, από την εξίσωση $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{Q}\,\mathbf{t}$, όπου $\mathbf{p}_0$ διάνυσμα μεγέθους n (σημείο στο χώρο n διαστάσεων), **t** διάνυσμα μεγέθους k και **Q** μητρώο μεγέθους $n \times k$.
3. Ως τομή $n - k$ διαφορετικών $(n - 1)$-επιπέδων: $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου **A** μητρώο μεγέθους $(n - k) \times n$ και **b** διάνυσμα μεγέθους $n - k$.

Πραγματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής

Πραγματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής: $f\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$

Παράγωγος ως προς διάνυσμα (της $f(\mathbf{x})$ ως προς $\mathbf{x}$): $\dfrac{df}{d\mathbf{x}} := \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right]$

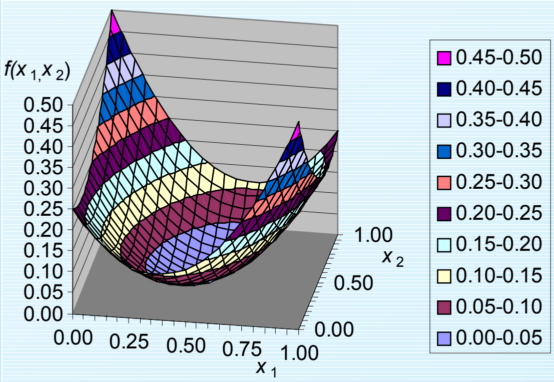
Τελεστής «ανάδελτα»: $\nabla := \left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right]^T.$

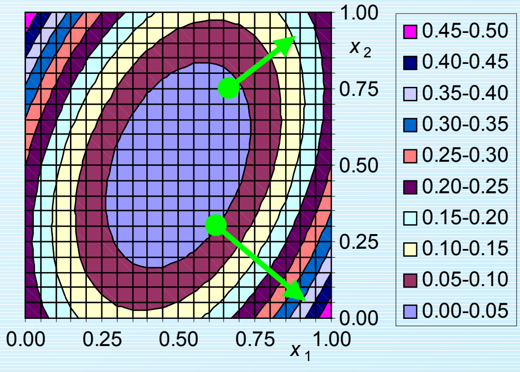
Κλίση ή **βαθμίδα** (gradient): $\mathrm{grad}(f) := \nabla f = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T = \left(\dfrac{df}{d\mathbf{x}}\right)^T$

Δεύτερη παράγωγος ως προς διάνυσμα: $\dfrac{d^2 f}{d\mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$

Η δεύτερη παράγωγος είναι συμμετρικό μητρώο, γνωστό ως *Εσσιανό* (Hessian)

Παράδειγμα πραγματικής συνάρτησης διανυσματικής μεταβλητής





Διανυσματική μεταβλητή: $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ (χώρος δύο διαστάσεων)

Πραγματική συνάρτηση:

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.5(x_2 - 0.5)^2 - 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

Το γράφημα της συνάρτησης στο πεδίο ($0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$) φαίνεται στα διπλανά σχήματα (πάνω τριδιάστατη προοπτική απεικόνιση, κάτω διδιάστατη απεικόνιση με μορφή ισοτιμικών καμπυλών).

Κλίση:

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = \left(\dfrac{df}{d\mathbf{x}}\right)^T = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right]^T =$$

$$[2(x_1 - 0.5) - 0.5\,(x_2 - 0.5), (x_2 - 0.5) - 0.5\,(x_1 - 0.5)]^T$$

Παραδείγματα τιμών κλίσης:

Για $\mathbf{x} = [0.6, 0.3]^T$, $\mathrm{grad}(f) = [0.3, -0.25]^T$

Για $\mathbf{x} = [0.65, 0.75]^T$, $\mathrm{grad}(f) = [0.175, 0.175]^T$

Τα διανύσματα των δύο παραδειγμάτων έχουν απεικονιστεί στο κάτω σχήμα (πράσινα βέλη).

Διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής

Διανυσματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής: **f**: $\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^k$

δηλαδή $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})]^T$ όπου οι $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})$ είναι πραγματικές συναρτήσεις της διανυσματικής μεταβλητής **x**. (Παράδειγμα: η κλίση grad(f(**x**)) της πραγματικής f(**x**) είναι διανυσματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής.)

Παράγωγος της **f**(**x**) ως προς **x**: $$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} := \left[\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}, \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}}\right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Η παράγωγος είναι γνωστή ως *Ιακωβιανό* (Jacobian) μητρώο.

Στοιχειώδεις κανόνες παραγώγισης διανυσματικών συναρτήσεων

Συνάρτηση (**f**)	Παράγωγος (d**f** / d**x**)	Συνάρτηση (**f**)	Παράγωγος (d**f** / d**x**)
a ή $\mathbf{a}^T$	$\mathbf{O}_n$	**A x**	**A**
A ή **A**	$\mathbf{O}_{mn \times n}$	$\mathbf{x}^T \mathbf{B}$	$\mathbf{B}^T$
x ή $\mathbf{x}^T$	$\mathbf{I}_n$	$\mathbf{x}^T \mathbf{x}$	$2\,\mathbf{x}^T$
$\mathbf{a}^T \mathbf{x}$	$\mathbf{a}^T$	$\mathbf{x}^T \mathbf{C}\, \mathbf{x}$	$\mathbf{x}^T \mathbf{C} + \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T$

a, **x**: n-διανύσματα· **A**: $m \times n$ μητρώο· **B**: $n \times l$ μητρώο· **C**: $n \times n$ μητρώο· $\mathbf{O}_n$: μηδενικό n-διάνυσμα· $\mathbf{O}_{mn \times n}$: μηδενικό $mn \times n$ μητρώο· $\mathbf{I}_n$: μοναδιαίο $n \times n$ μητρώο· τα **a**, **A**, **B**, **C** είναι ανεξάρτητα του **x**.

3. Πολυδιάστατα προβλήματα βελτιστοποίησης

Συνθήκες ακροτάτου χωρίς περιορισμούς

Πρόβλημα: Να βρεθεί το σημείο $\mathbf{x}_*$ έτσι ώστε

$f(\mathbf{x}_*) = \min\,[f(\mathbf{x})]$

Αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου:

1. $\left(\frac{df(\mathbf{x}_*)}{d\mathbf{x}}\right) = \mathbf{O}^T$ ($\mathbf{x}_*$ στάσιμο – stationary – σημείο)
2. Εσσιανό μητρώο $\left(\frac{d^2 f(\mathbf{x}_*)}{d\mathbf{x}^2}\right)$ θετικά ορισμένο.

Παρατηρήσεις:

Οι παραπάνω συνθήκες είναι και ικανές αν η συνάρτηση είναι κυρτή, δηλαδή το Εσσιανό μητρώο είναι θετικά ορισμένο για κάθε **x**. Σε αυτή την περίπτωση η f(**x**) έχει μόνο ένα στάσιμο σημείο που είναι και *ολικό* (global) *ελάχιστο*.

Διαφορετικά μπορεί η f(**x**) να έχει περισσότερα στάσιμα σημεία, καθένα από τα οποία, ανάλογα με τις ιδιότητες του Εσσιανού, μπορεί να είναι *τοπικό* (local) *ελάχιστο* ή *τοπικό μέγιστο* ή τίποτε απ' τα δύο. Σε αυτή την περίπτωση η επίλυση του προβλήματος προϋποθέτει την εύρεση όλων των στάσιμων σημείων $\mathbf{x}_{*i}$ και τη σύγκριση των τιμών $f(\mathbf{x}_{*i})$.

Το πρόβλημα της αναζήτησης μεγίστου άμεσα μετατρέπεται σε πρόβλημα αναζήτησης ελαχίστου, δεδομένου ότι $\max[-f(\mathbf{x})] = -\min[-f(\mathbf{x})]$.

Παράδειγμα:

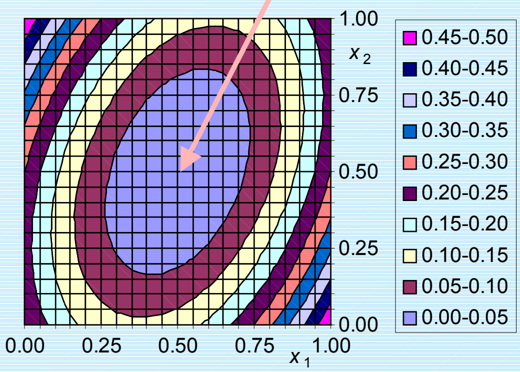
$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.5(x_2 - 0.5)^2 - 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} = [2(x_1 - 0.5) - 0.5\,(x_2 - 0.5),\ (x_2 - 0.5) - 0.5\,(x_2 - 0.5)]$$

$$\frac{d^2 f}{d\mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

(θετικά ορισμένο παντού – ορίζουσα θετική – άρα η συνάρτηση είναι κυρτή)

Στάσιμο σημείο: $\mathbf{x}_* = [0.5, 0.5]^T \Rightarrow$ ολικό ελάχιστο.



Εξισωτικοί περιορισμοί

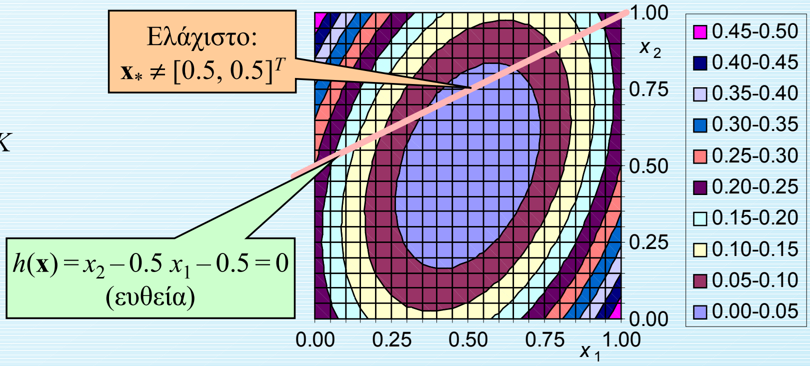
Πρόβλημα: Να βρεθεί το σημείο $\mathbf{x}_*$ έτσι ώστε

$$f(\mathbf{x}_*) = \min\,[f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K]$$

όπου το σύνολο περιορισμών K ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$$

για δεδομένη διανυσματική (ή πραγματική) συνάρτηση $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

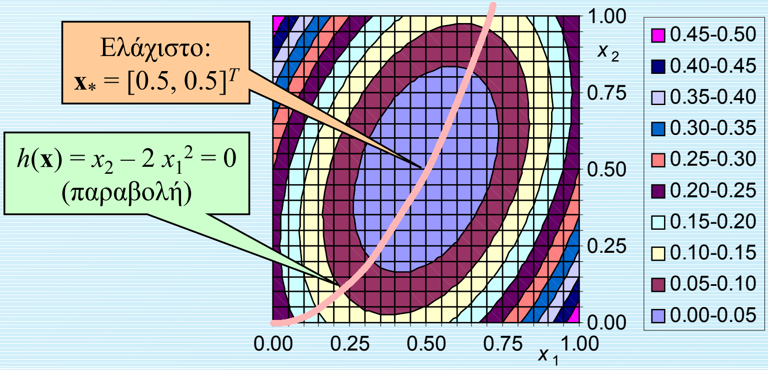


Παραδείγματα:

Στα παραδείγματα των σχημάτων εξετάζεται η συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.5(x_2 - 0.5)^2 - 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

με διάφορες μορφές εξισωτικών περιορισμών.



Ανισωτικοί περιορισμοί

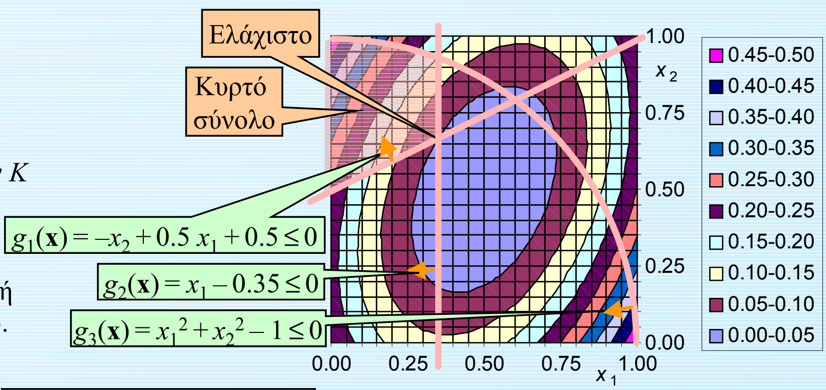
Πρόβλημα: Να βρεθεί το σημείο $\mathbf{x}_*$ έτσι ώστε

$$f(\mathbf{x}_*) = \min\,[f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K]$$

όπου το σύνολο περιορισμών K ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_*) \leq \mathbf{0}$$

για δεδομένη διανυσματική (ή πραγματική) συνάρτηση $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

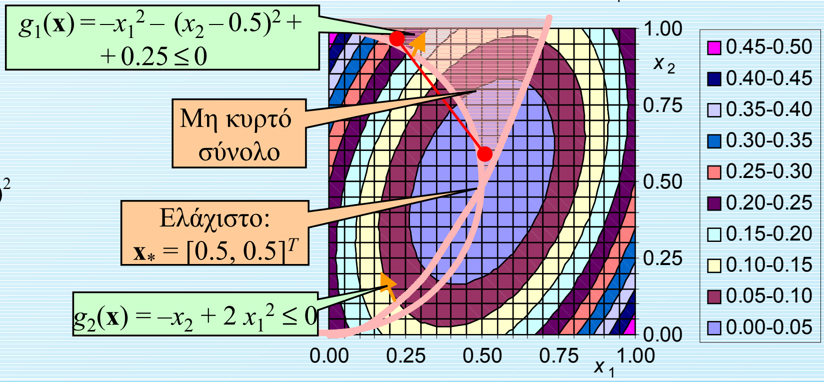


Παραδείγματα:

Στα παραδείγματα των σχημάτων εξετάζεται η συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.5(x_2 - 0.5)^2 - 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

με διάφορες μορφές ανισωτικών περιορισμών.



Μαθηματικός χειρισμός περιορισμών

Αρχικό πρόβλημα με εξισωτικούς περιορισμούς:

min $f(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

s.t. $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ όπου $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \ldots, h_k(\mathbf{x})]^T$

Μετασχηματισμένο πρόβλημα:

max $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$

όπου $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k]^T$ διάνυσμα παραμέτρων που είναι γνωστές ως πολλαπλασιαστές Langrange.

Με τον τρόπο αυτό το αρχικό πρόβλημα με περιορισμούς μετατράπηκε σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς, με περισσότερες όμως μεταβλητές ($n + k$ έναντι n).

Αρχικό πρόβλημα με ανισωτικούς περιορισμούς:

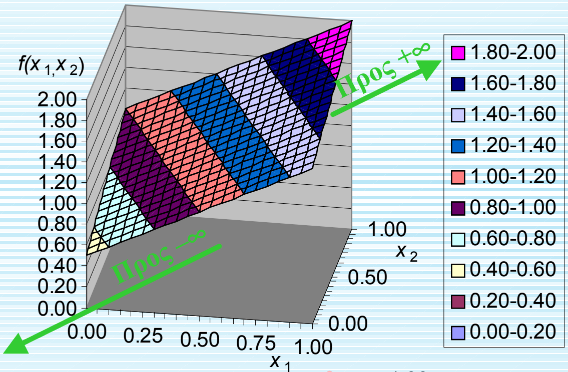
min $f(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

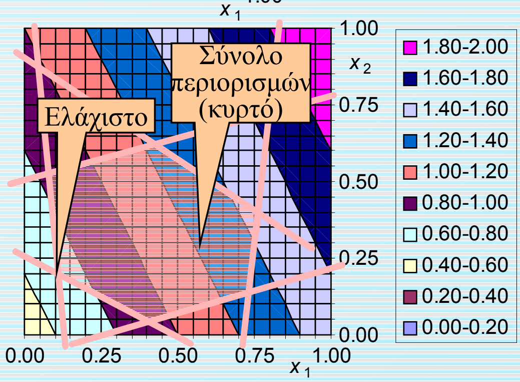
s.t. $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ όπου $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_k(\mathbf{x})]^T$

Μετασχηματισμένο πρόβλημα:

1. Εισάγουμε τις «αδιάφορες» (slack) μεταβλητές $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \ldots, r_k]^T$ και τη διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = [r_1^2, r_2^2, \ldots, r_k^2]^T$ για να μετατρέψουμε τους ανισωτικούς σε εξισωτικούς: $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$
2. Εισάγουμε πολλαπλασιαστές Lagrange $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k]^T$ και μετατρέπουμε έτσι το αρχικό πρόβλημα σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς:
   max $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r})$

Ειδική περίπτωση: γραμμικός προγραμματισμός





Γραμμικός προγραμματισμός: Πρόβλημα προσδιορισμού ακροτάτου στο οποίο τόσο η αντικειμενική συνάρτηση $f(\mathbf{x})$, όσο και οι περιορισμοί (εξισωτικοί $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ και ανισωτικοί $\mathbf{g}(\mathbf{x})$) είναι γραμμικές συναρτήσεις.

Παρατήρηση 1: Αν δεν υπάρχουν περιορισμοί το πρόβλημα δεν έχει λύση (η $f(\mathbf{x})$ απειρίζεται – βλ. διπλανό σχήμα που παριστάνει τη συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = x_1 + 0.5\, x_2 + 0.5$).

Παρατήρηση 2: Το σύνολο των γραμμικών περιορισμών (εξισωτικών και ανισωτικών) είναι πάντα ένα κυρτό σύνολο που ονομάζεται πολύεδρο (στις δύο διαστάσεις πολύγωνο – βλ. διπλανό σχήμα).

Παρατήρηση 3: Η λύση του προβλήματος (το ελάχιστο της συνάρτησης) είναι μια κορυφή του πολυέδρου. Κατά συνέπεια το πρόβλημα ανάγεται στη συστηματική πορεία προς αυτή την κορυφή.

Εφαρμογή στη λύση ελάχιστων τετραγώνων γραμμικών συστημάτων – Το γενικευμένο αντίστροφο μητρώο

Πρόβλημα: Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει τη μοναδική λύση $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$ αν ο αριθμός των εξισώσεων είναι ίσος με τον αριθμό των αγνώστων (δηλαδή το **A** είναι τετραγωνικό, $n \times n$) και επιπλέον το **A** είναι ομαλό. Πως μπορεί να βρεθεί μια «λύση», όταν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις αυτές;

Περίπτωση 1: Αριθμός εξισώσεων (n) μικρότερος του αριθμού αγνώστων (m)
(Εδώ υπάγεται και η περίπτωση που το **A** δεν είναι ομαλό, γιατί αυτό σημαίνει ότι μια ή περισσότερες από τις εξισώσεις αποτελούν γραμμικό συνδυασμό άλλων εξισώσεων).

Συνθήκες: Το **A** έχει μέγεθος $n \times m$, όπου $m > n$. Υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Στόχος: Αναζητούμε τη «μικρότερη» δυνατή λύση, δηλαδή αυτή που ελαχιστοποιεί τη νόρμα $||\mathbf{x}|| = (\mathbf{x}^T\,\mathbf{x})^{1/2}$

Διατύπωση: $\min \mathbf{x}^T\,\mathbf{x}$ s.t. $\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0$

Αναδιατύπωση χωρίς περιορισμούς: $\min \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{x}^T\,\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^T\,(\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b})$

Παράγωγος (βλ. στοιχειώδεις κανόνες παραγώγισης): $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}} = 2\,\mathbf{x}^T + \boldsymbol{\lambda}^T\,\mathbf{A}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b}$

Στάσιμο σημείο: $\{2\,\mathbf{x}^T = -\boldsymbol{\lambda}^T\,\mathbf{A},\ \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$

Επίλυση: $\{\mathbf{x} = (-1/2)\,\mathbf{A}^T\,\boldsymbol{\lambda},\ \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \Rightarrow \{\mathbf{x} = (-1/2)\,\mathbf{A}^T\,\boldsymbol{\lambda},\ (-1/2)\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T\,\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}\}$. Το $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T$ έχει μέγεθος $n \times n$ και είναι ομαλό, άρα αντιστρέψιμο. Έτσι η δεύτερη εξίσωση δίνει $\boldsymbol{\lambda} = -2\,(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T)^{-1}\,\mathbf{b}$ και η πρώτη $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\,(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T)^{-1}\,\mathbf{b}$. Αποδεικνύεται (βλ. π.χ. Marlow, 1993, σ. 263) ότι το Εσσιανό στο σημείο της λύσης είναι **I** και άρα θετικά ορισμένο.

Τελική λύση: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\,(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T)^{-1}\,\mathbf{b}$ (μοναδικό ελάχιστο στο πρόβλημα).

Εφαρμογή στη λύση ελάχιστων τετραγώνων γραμμικών συστημάτων – Το γενικευμένο αντίστροφο μητρώο (2)

Περίπτωση 2: Αριθμός εξισώσεων (n) μεγαλύτερος του αριθμού αγνώστων (m)

Συνθήκες: Το **A** έχει μέγεθος $n \times m$, όπου $m < n$. Δεν υπάρχει καμιά (ακριβής) λύση

Στόχος: Αναζητούμε μια προσεγγιστική λύση και συγκεκριμένα αυτή που δίνει το μικρότερο δυνατό σφάλμα $||\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b}|| = [(\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b})^T\,(\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b})]^{1/2} = (\mathbf{x}^T\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{b} - \mathbf{b}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\,\mathbf{b})^{1/2}$

Διατύπωση: $\min f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{b} - \mathbf{b}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\,\mathbf{b}$

Παράγωγος (βλ. στοιχειώδεις κανόνες παραγώγισης): $\dfrac{df}{d\mathbf{x}} = 2\,\mathbf{x}^T\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{A} - 2\,\mathbf{b}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}$

Στάσιμο σημείο: $\mathbf{x}^T\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{A} = \mathbf{b}^\mathrm{T}\,\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\,\mathbf{b}$

Επίλυση: Το $\mathbf{A}^T\,\mathbf{A}$ έχει μέγεθος $m \times m$ και είναι ομαλό, άρα αντιστρέψιμο. Άρα $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\,\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{b}$. Αποδεικνύεται (βλ. π.χ. Marlow, 1993, σ. 255) ότι το Εσσιανό στο σημείο της λύσης είναι $2\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{A}$ και άρα θετικά ορισμένο.

Τελική λύση: $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\,\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{b}$ (μοναδικό ελάχιστο στο πρόβλημα).

Κωδικοποίηση της λύσης του συστήματος $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Σχέση m, n	Ομαλό μητρώο	Μητρώο C της λύσης $\mathbf{x} = \mathbf{C}\,\mathbf{b}$
$m = n$	$\mathbf{B} = \mathbf{A}$	$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$ ($m \times n$) [Κανονικό αντίστροφο]
$m > n$	$\mathbf{B} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^T$ ($n \times n$)	$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T\,\mathbf{B}^{-1}$ ($m \times n$) [Δεξιό αντίστροφο ή αντίστροφο ελάχιστης νόρμας]
$m < n$	$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T\,\mathbf{A}$ ($m \times m$)	$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^T$ ($m \times n$) [Αριστερό αντίστροφο ή αντίστροφο ελάχιστων τετραγώνων]

Παρατήρηση: Το δεξιό και το αριστερό αντίστροφο ταυτίζονται με το κανονικό όταν $m = n$.

4. Εφαρμογή στην προσαρμογή υδρολογικού μοντέλου
Γραμμικά συστήματα και μοναδιαίο υδρογράφημα

Γραμμικό σύστημα: Ένα σύστημα, του οποίου η είσοδος $I(t)$ και η έξοδος $Q(t)$, όπου t ο χρόνος, συνδέονται με γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, δηλ. της μορφής

$$a_n \frac{d^n Q}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} Q}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dQ}{dt} + a_1 Q = I$$

όπου a_i συντελεστές. Αποδεικνύεται η λύση της εξίσωσης είναι μια συνελικτική σχέση της μορφής

$$Q(t) = \int_0^t I(\tau)\, U(t-\tau)\, d\tau$$

όπου $U(t)$ είναι η λεγόμενη *συνάρτηση απόκρισης (response function)* του συστήματος.

Γραμμική λεκάνη απορροής: Μια λεκάνη απορροής για την οποία υποτίθεται βάσιμα ότι μπορεί να θεωρηθεί γραμμικό σύστημα ως προς το μετασχηματισμό της ενεργού βροχής σε απορροή. Εν προκειμένω η είσοδος $I(t)$ είναι η καθαρή βροχόπτωση στη λεκάνη (= ολική βροχόπτωση − απώλειες κατακράτησης και διήθησης) και $Q(t)$ είναι η πλημμυρική παροχή σε δεδομένη διατομή του υδατορεύματος.

Στιγμιαίο μοναδιαίο υδρογράφημα (ΣΜΥ): Εξ ορισμού είναι η συνάρτηση απόκρισης $U(t)$. Το ΣΜΥ αποτελεί την χρονική εξέλιξη της παροχής αν ως εισροή $I(t)$ θεωρηθεί ένας στιγμιαίος παλμός συνολικού ύψους βροχής H_0 (κατά σύμβαση H_0 = 1 cm = 10 mm) που πραγματοποιείται στο χρόνο $t = 0$.

Βασικές ιδιότητες του μοναδιαίου υδρογραφήματος

Μοναδιαίο υδρογράφημα διάρκειας d: Εξ ορισμού είναι η χρονική εξέλιξη της παροχής $U_d(t)$ αν η εισροή $I(t)$ θεωρηθεί ένας τετραγωνικός παλμός διάρκειας d και συνολικού ύψους βροχής H_0 (έντασης H_0 / d).

Καμπύλη S (κατασκευασμένη από το μοναδιαίο υδρογράφημα διάρκειας d): Εξ ορισμού είναι η χρονική εξέλιξη της παροχής $S_d(t)$ αν η εισροή $I(t)$ θεωρηθεί ότι έχει σταθερή ένταση H_0 / d για άπειρη διάρκεια, ξεκινώντας από το χρόνο $t = 0$ (αποτελεί επαλληλία άπειρων μοναδιαίων υδρογραφημάτων διάρκειας d).

Εμβαδό μοναδιαίου υδρογραφήματος (όγκος απορροής)

$$V_0 = \int_0^{T_d} U_d(t)\, dt = \int_0^{T_0} U(t)\, dt = H_0\, A$$

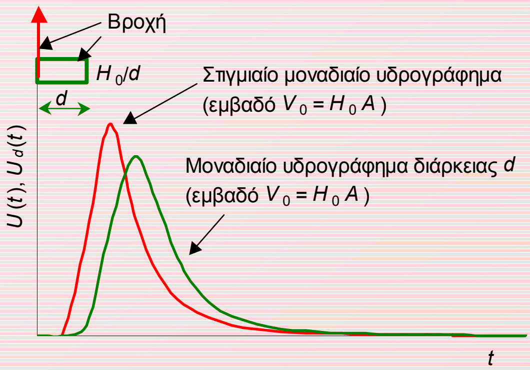
όπου A το εμβαδό της λεκάνης, και T_d και T_0 οι διάρκειες πλημμύρας για το μοναδιαίο και το στιγμιαίο μοναδιαίο υδρογράφημα, αντίστοιχα.

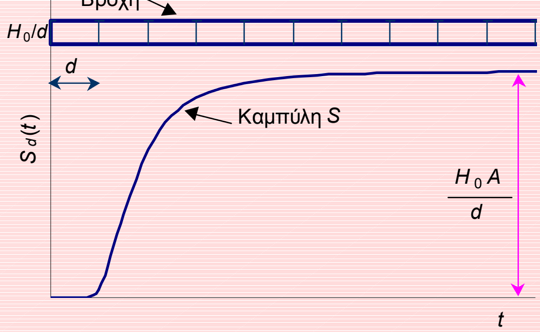
Σχέση στιγμιαίου μοναδιαίου υδρογραφήματος και καμπύλης S:

$$S_d(t) = \frac{1}{d} \int_0^t U(\tau)\, d\tau$$

Σχέση μοναδιαίου υδρογραφήματος και καμπύλης S:

$$U_d(t) = S_d(t) - S_d(t-d)$$





Πλημμυρικό υδρογράφημα μετά από τυχούσα βροχόπτωση

Εναλλακτική λύση 1, με βάση το στιγμιαίο μοναδιαίο υδρογράφημα (από συνελικτική εξίσωση – μειονέκτημα: απαίτηση ολοκλήρωσης).

Εναλλακτική λύση 2, με βάση το μοναδιαίο υδρογράφημα διάρκειας d:

Διακριτοποιούμε το χρόνο σε διαστήματα $\Delta t_j = (t_{j-1}, t_j)$, όπου $t_j - t_{j-1} = d$, και προσεγγίζουμε το ωφέλιμο υετογράφημα $I(t)$ με μια αλληλουχία σταθερών ανά χρονικό βήμα εντάσεων I_j (και υψών $H_j = d\, I_j$), οπότε

$$Q(t_j) = \sum_{k=p}^{q} U_d(t_{j+1-k}) \frac{H_k}{H_0} = \sum_{k=p'}^{q'} U_d(t_k) \frac{H_{j+1-k}}{H_0}$$

όπου

$p = \max(1, j+1-n)$, $q = \min(j, m)$, $p' = \max(1, j+1-m)$, $q' = \min(j, n)$, $j = 1, 2, ..., n+m-1$

ενώ $n = T_d / d - 1$ είναι ο αριθμός των τεταγμένων του μοναδιαίου υδρογραφήματος ανά χρονικά διαστήματα μήκους d, $m = T_H / d$ είναι ο αριθμός χρονικών διαστημάτων μήκους d στο καθαρό υετογράφημα, T_d είναι η διάρκεια του μοναδιαίου υδρογραφήματος διάρκειας d και T_H η διάρκεια της καθαρής βροχόπτωσης.

Βασική αναλλοίωτη πλημμυρογραφήματος – χρόνος υστέρησης:

Ο χρόνος υστέρησης ορίζεται t_L ως η χρονική απόσταση από το κέντρο βάρους του υετογραφήματος μέχρι το κέντρο βάρους του πλημμυρογραφήματος.

Αποδεικνύεται ότι ο χρόνος υστέρησης t_L είναι σταθερός για κάθε πλημμυρογράφημα (με την προϋπόθεση της γραμμικότητας του συστήματος/λεκάνης).

Παραμετρική έκφραση του μοναδιαίου υδρογραφήματος

Τυποποιημένο στιγμιαίο μοναδιαίο υδρογράφημα: $u(t) = U(t) / V_0$ (Εμβαδό: $\int_0^{T_0} u(t)\, dt = 1$)

Τυποποιημένη καμπύλη S: $s(t) = S_d(t)\, (d / V_0)$ (Ιδιότητες: $s(t) = \int_0^t u(t)\, dt$, $s(0) = 0$, $s(T_0) = 1$)

Αναλυτικές– παραμετρικές εκφράσεις τυποποιημένου στιγμιαίου μοναδιαίου υδρογραφήματος:

Παρόμοιες με αυτές των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας κωδωνοειδούς μορφής (Nash, 1959, Koutsoyiannis, 1989).

Παράδειγμα 1 (συνηθέστερη έκφραση): $u(t) = \dfrac{1}{\alpha\, \Gamma(\beta)} \left(\dfrac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)\right]$, $s(t) = \int_0^t u(t)\, dt$, $t_L = \alpha\, \beta$

Παράδειγμα 2 (απλούστερη έκφραση): $u(t) = \dfrac{\beta}{\alpha} \left(\dfrac{\alpha}{t}\right)^{\beta+1} \exp\left[-\left(\dfrac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]$, $s(t) = \exp\left[-\left(\dfrac{\alpha}{t}\right)^{\beta}\right]$, $t_L = \alpha\; \Gamma(1 - 1/\beta)$

Έκφραση μοναδιαίου υδρογραφήματος συναρτήσει του τυποποιημένου στιγμιαίου μοναδιαίου υδρογραφήματος: $U_d(t) = S_d(t) - S_d(t - d)$, όπου $S_d(t) = s(t)\, (V_0 / d)$

Συνάρτηση EXCEL για τον υπολογισμό της $\Gamma(x)$: EXP(GAMMALN(x))

Εκτίμηση μοναδιαίου υδρογραφήματος και σφάλμα εκτίμησης

Σφάλμα εκτίμησης

Η σχέση πλημμυρογραφήματος-υετογραφήματος μπορεί να γραφεί υπό μορφή διανυσμάτων-μητρώων με τον ακόλουθο τρόπο

$$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

όπου $\mathbf{x}$ διάνυσμα μεγέθους n με $x_i = U_d(t_i)$ (μοναδιαίο υδρογράφημα), $\mathbf{b}$ διάνυσμα μεγέθους $n + m - 1$ με $b_i = Q(t_i)$ (πλημμυρογράφημα), και $\mathbf{A}$ μητρώο μεγέθους $(n + m - 1) \times n$ με

$$a_{ij} = \frac{H_{i+1-j}}{H_0} \text{ για } i + 1 - m \le j \le i, \qquad a_{ij} = 0 \qquad \text{διαφορετικά}$$

όπου n ο αριθμός των τεταγμένων του μοναδιαίου υδρογραφήματος, και m ο αριθμός χρονικών διαστημάτων στο καθαρό υετογράφημα.

Εφόσον το πλημμυρογράφημα $\mathbf{b}$ έχει μετρηθεί, η σχέση $\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ δεν μπορεί να ισχύει επακριβώς (υπάρχουν $n + m - 1$ εξισώσεις με n αγνώστους – αν το $\mathbf{x}$ είναι άγνωστο – ή με m αγνώστους – αν το $\mathbf{A}$ είναι άγνωστο). Επομένως το μέγεθος $\|\mathbf{A}\ \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ παριστάνει το τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης.

Εκτίμηση μοναδιαίου υδρογραφήματος (εκτίμηση του $\mathbf{x}$ για γνωστά $\mathbf{A}$ και $\mathbf{b}$)

1. Παραμετρική έκφραση μοναδιαίου υδρογραφήματος $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ όπου $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, παράμετροι. Αντικειμενική συνάρτηση:

   $\min f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) := \|\mathbf{A}\ \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$

2. Μη παραμετρική έκφραση μοναδιαίου υδρογραφήματος $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, όπου όλα τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αποτελούν αγνώστους. Αντικειμενική συνάρτηση:

   $\min f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{A}\ \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$

Βασική βιβλιογραφία – Αναφορές

Βασική βιβλιογραφία

- Loucks, D. P., Stedinger, J. R., and Haith, D. A., *Water Resource System Planning and Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1981.
- Mays, L. W., and Y.-K. Tung, *Hydrosystems Engineering and Management* McGraw-Hill, New York, 1992.
- Mays, L. W., and Y.-K. Tung, Systems analysis, in *Water Resources Handbook*, edited by L. W. Mays, McGraw-Hill, New York, 1996.
- Marlow, W. H., *Mathematics for Operations Research*, Dover Publications, New York, 1993.
- Pierre, D. P., *Optimization Theory With Applications*, Dover, New York, 1986.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- Searle, S. R., *Matrix Algebra Useful for Statistics*, Wiley, 1982.

Αναφορές

- O'Donnell, T., Deterministic catchment modelling, in *River flow modelling and forecasting*, edited by D. A. Kraijenhoff, and J. R. Moll, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986.
- Koutsoyiannis, D., and Th. Xanthopoulos, On the parametric approach to unit hydrograph identification, *Water Resources Management*, 3(2), 107-128, 1989.
- Nash, J. E., Systematic determination of unit hydrograph parameters, *Journal of Geophysical Research*, 64(1), 111-115, 1959.