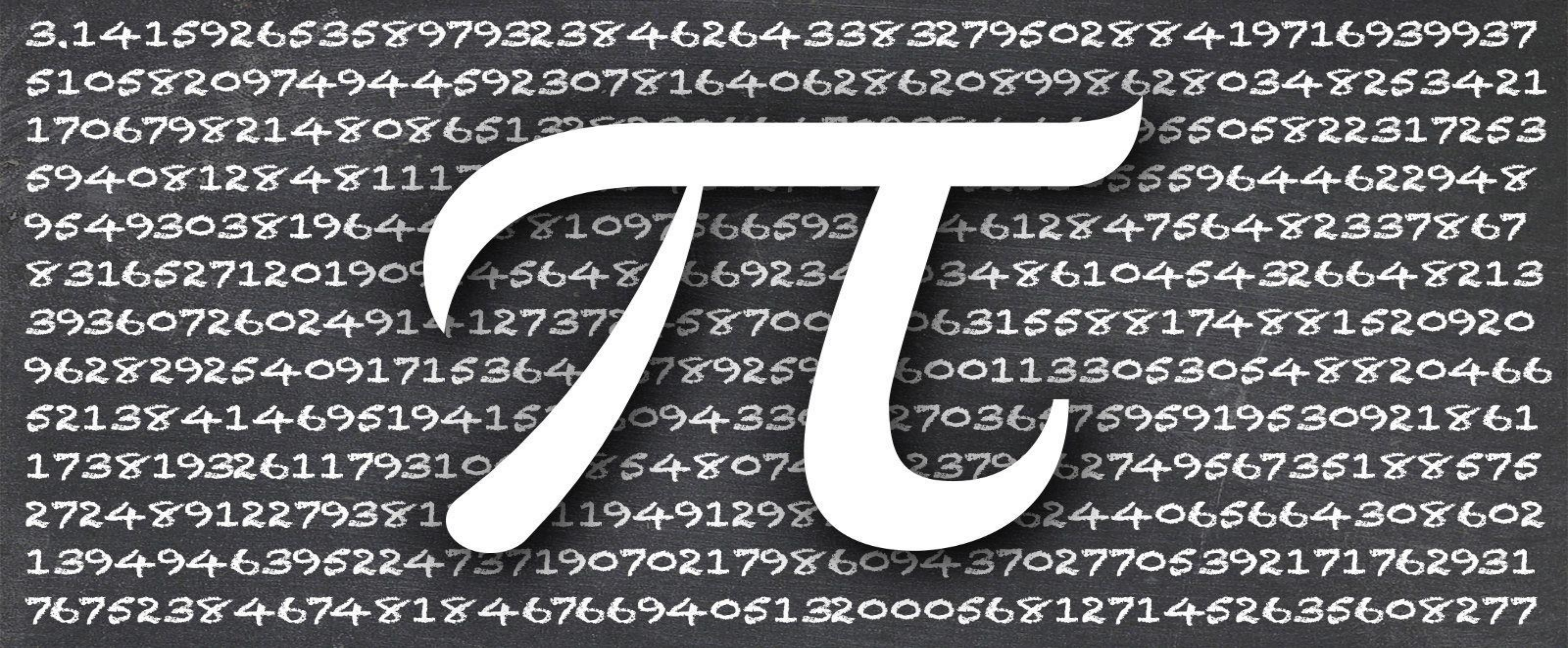
Ιστορική εξέλιξη υπολογισμού του αριθμού π

ΠΡΑΞΙΤΕΛΗΣ ΚΑΛΟΣΑΚΑΣ

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή: Ορισμός, Ιδιότητες, Χρήσεις και εφαρμογές
2. Ιστορική εξέλιξη υπολογισμού από τα αρχαία χρόνια μέχρι και σήμερα


3.14159265358979323846264338327950288419716939937
51058209749445923078164062862089986280348253421
13949463952247371907021798609437027705392171762931
767523846748184676694051320005681271452635608277

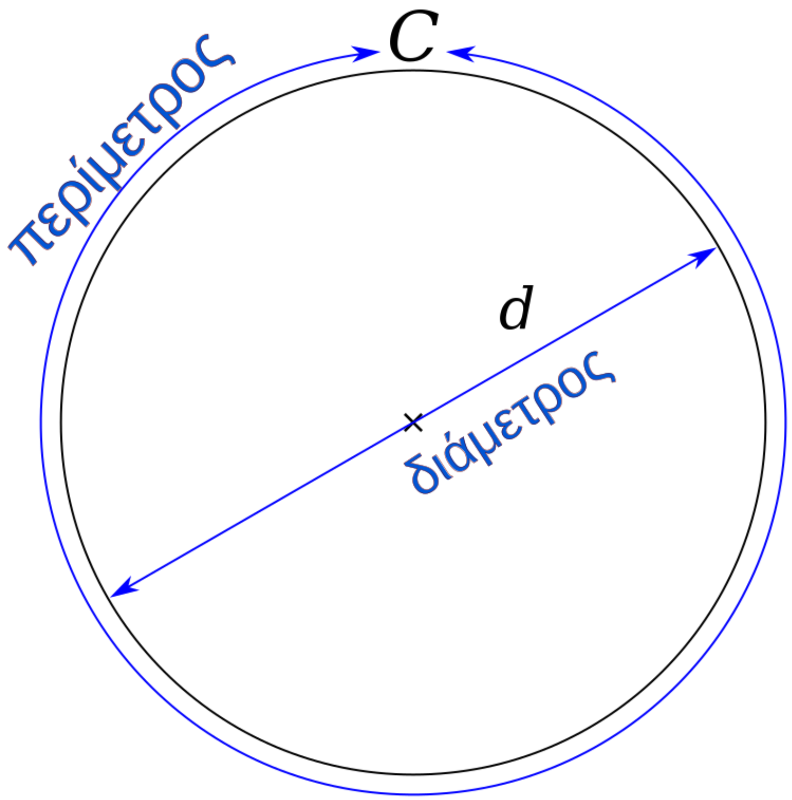
1. Εισαγωγή

Ορισμός

Το π είναι μια μαθηματική σταθερά που ορίζεται ως το πηλίκο της περιφέρειας C ενός κύκλου προς την διάμετρό του d: $\pi = C/d$

Ο λόγος είναι σταθερός και ανεξάρτητος από το μέγεθος του κύκλου.

Αυτός ο ορισμός του *π* είναι έγκυρος μόνο στην επίπεδη (Ευκλείδεια) Γεωμετρία, ενώ αν επεκταθεί σε κυρτές (Μη-Ευκλείδειες) Γεωμετρίες ο λόγος δεν παραμένει σταθερός.



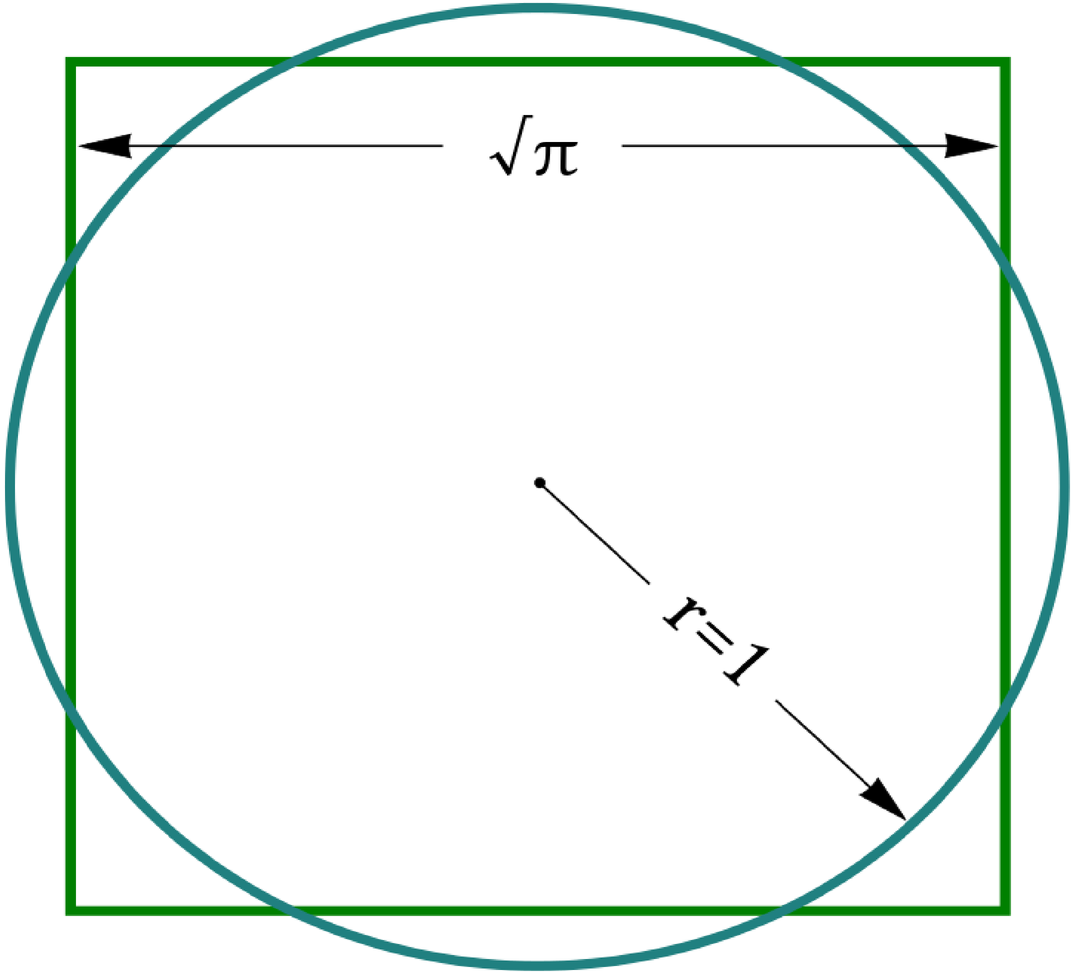
Ιδιότητες

1. Αρρητότητα:

Το *π* έχει την ιδιότητα του άρρητου αριθμού, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να γραφεί ως πηλίκο δύο ακεραίων. Αυτό επίσης σημαίνει ότι έχει έναν άπειρο αριθμό ψηφίων στην δεκαδική του αναπαράσταση, η οποία δεν τελειώνει με μια απείρως επαναλαμβανόμενη σειρά ψηφίων.

2. Υπερβατικότητα:

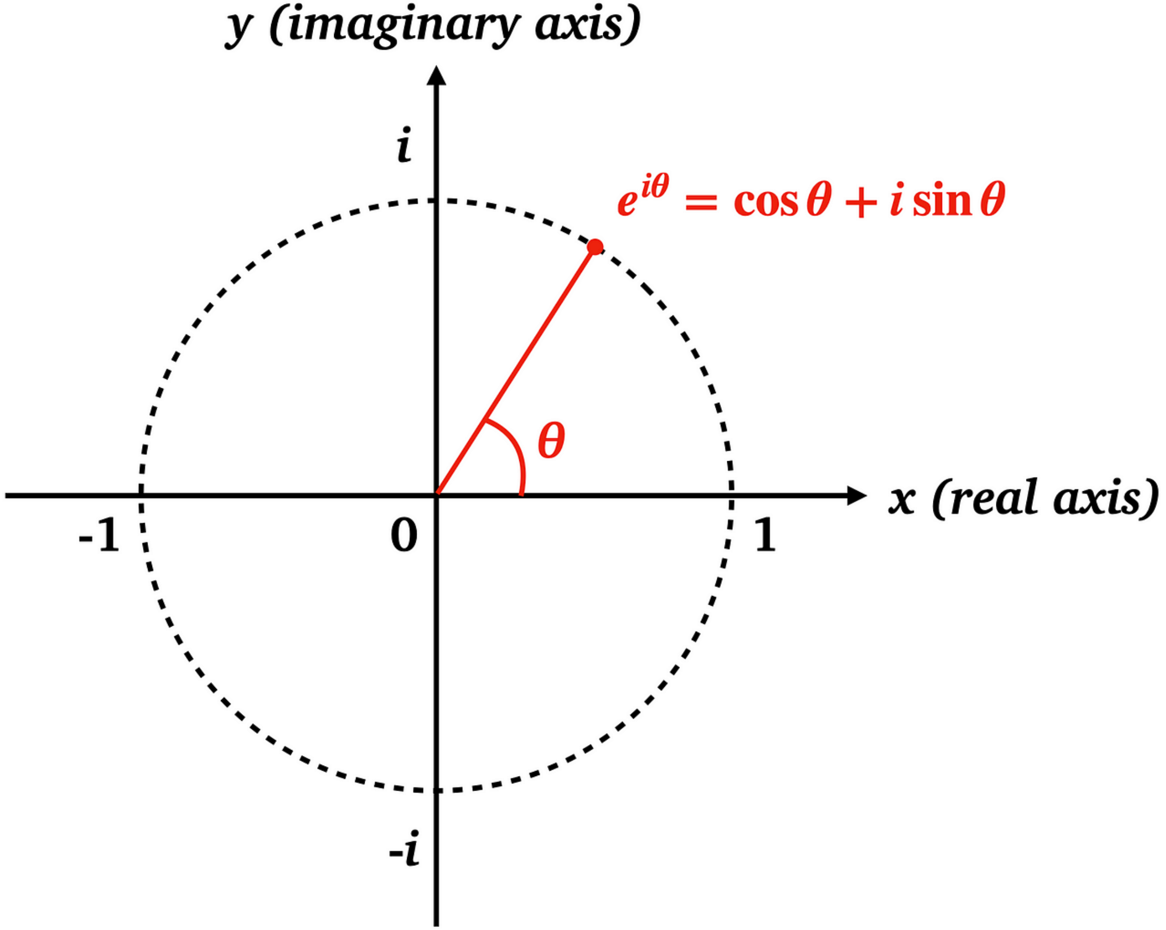
Το π έχει και την ιδιότητα του υπερβατικού αριθμού, που το καθιστά αριθμό που δεν αποτελεί ποτέ λύση μη σταθερού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές, γεγονός με σημαντικές επιπτώσεις στα μαθηματικά, όπως η μη-τετραγωνισιμότητα του κύκλου.

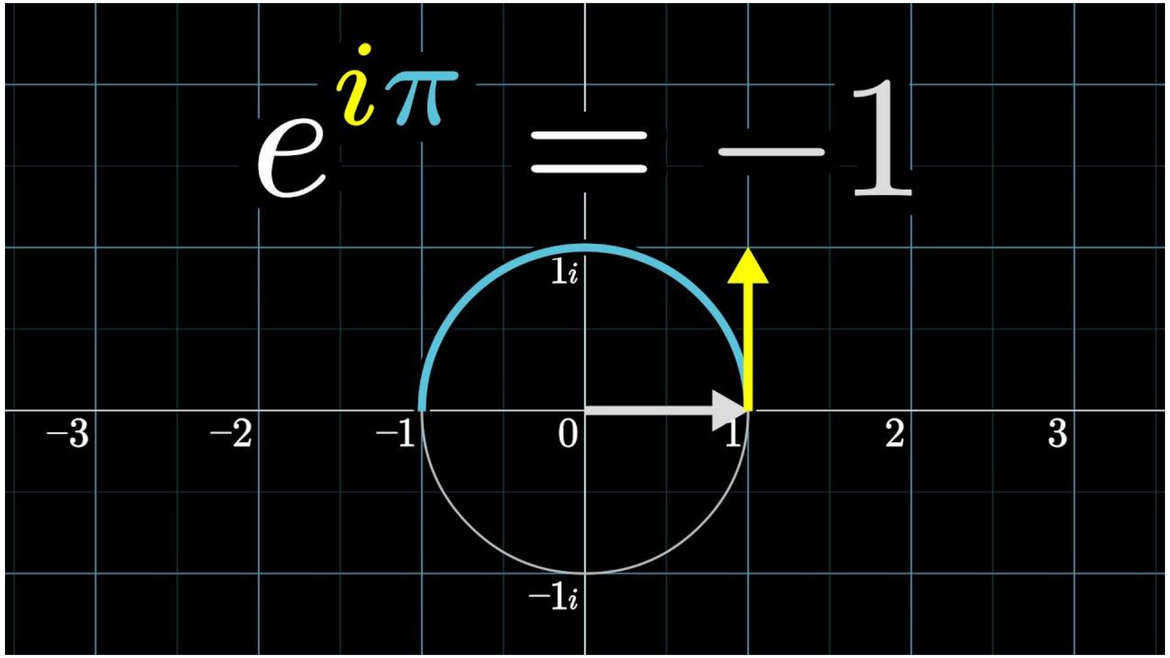


Λόγω της υπερβατικότητάς του π, ο τετραγωνισμός του κύκλου, δηλαδή η δημιουργία τετραγώνου με ίσο εμβαδόν με αυτό ενός δεδομένου κύκλου, είναι αδύνατη χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη

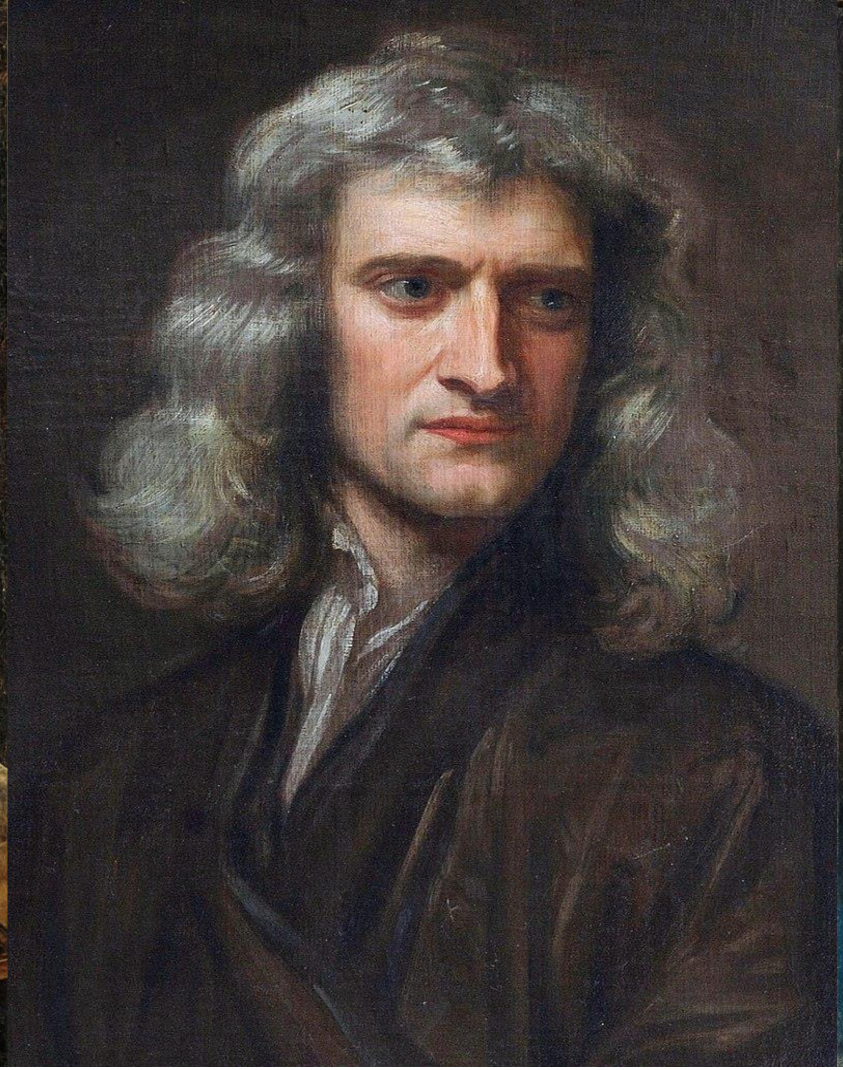
Χρήσεις και εφαρμογές

- Λόγω της συσχέτισής του με τον κύκλο, ο αριθμός π εμφανίζεται σε πολλούς τομείς των μαθηματικών όπως είναι η τριγωνομετρία και η γεωμετρία. Χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν τα μήκη τόξων ή άλλων καμπυλών, τις περιοχές των ελλείψεων, των τομέων και άλλων καμπύλων επιφανειών και τους όγκους πολλών στερεών.
- Βοηθάει τους επιστήμονες να κατανοήσουν αντικείμενα και φαινόμενα στη φύση: η τροχιά των πλανητών, τα ομόκεντρα κύματα που δημιουργούνται από μια πέτρα που πέφτει σε μια λίμνη, ο τρόπος με τον οποίο ο ήχος διαδίδεται, περιγραφή της κίνησης των εκκρεμών, της δόνησης των χορδών, των εναλλασσόμενων ηλεκτρικών ρευμάτων κλπ.
- Εμφανίζεται ακόμα και σε υπολογισμούς όπου οι κύκλοι δεν φαίνεται να υπάρχουν, όπως είναι η ταυτότητα του Euler $e^{i\pi}+1=0$, που αφορά τον κλάδο των μιγαδικών αριθμών.





Εξίσωση του Euler και αναπαράσταση


2. Ιστορική εξέλιξη υπολογισμού του π

1. Προ-μαθηματική περίοδος
Η πυραμίδα της Γκίζας

Η μεγάλη πυραμίδα στην Γκίζα, η οποία χρονολογείται περίπου από το 3000 π.Χ., έχει περίμετρο 1760 πήχεις και ύψος 280 πήχεις. Η αναλογία αυτών των διαστάσεων δίνει περίπου 6.2857, τιμή περίπου ίση με 2π, δηλαδή 6.2832.

Για αυτό το λόγο, μερικοί Αιγυπτιολόγοι θεωρούν ότι οι οικοδόμοι της εποχής είχαν επίγνωση του π, και γι’ αυτό το ενσωμάτωσαν στην κατασκευή. Άλλοι το αμφισβητούν, ισχυριζόμενοι ότι πρόκειται για σύμπτωση, διότι δεν υπάρχει κάποια άλλη ένδειξη όσον αφορά την γνώση του π εκείνη την εποχή.

2. Προ-ελληνική περίοδος Βαβυλώνιοι, Αιγύπτιοι, Ινδοί

Οι πρώτες γνωστές καταγραφές του π εμφανίζονται περίπου το 2000 π.Χ. από τους Βαβυλώνιους, οι οποίοι απέδωσαν την τιμή 3 στο π.

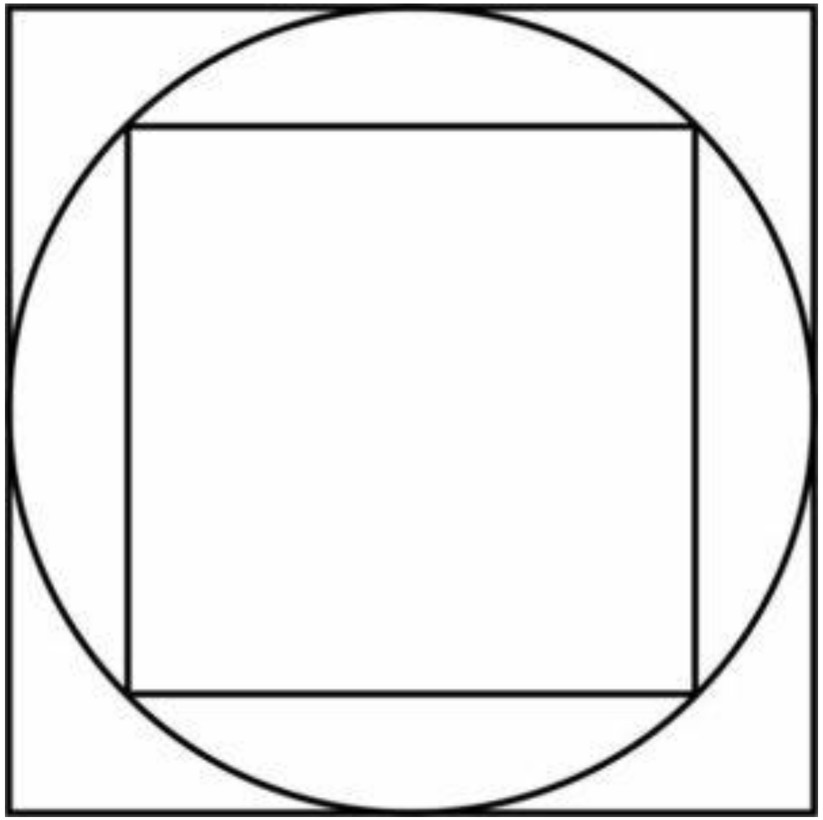
Αργότερα, γύρω στα 1900 με 1680 π.Χ., οι Βαβυλώνιοι επιχειρούν ξανά να αποδώσουν τιμή στο π, προσεγγίζοντάς το με το 3.125, ενώ οι Αιγύπτιοι γύρω στο 1650 π.Χ. εκτιμούν το π ως 3.1605.

Στην Ινδία, περίπου το 600 π.Χ., αποδίδεται η τιμή 3.088, ενώ από το 150 π.Χ. και μετά οι Ινδοί θεωρούν το π ίσο με $\sqrt{10}$, δηλαδή περίπου 3.1622.

3. Ελληνικός πολιτισμός Αρχιμήδης ο Συρακούσιος

Γύρω στο 250 π.Χ., ο Έλληνας μαθηματικός Αρχιμήδης έδωσε τον πρώτο καταγεγραμμένο αλγόριθμο για τον ακριβή προσδιορισμό του π, χρησιμοποιώντας απλή γεωμετρία.

Ο Αρχιμήδης έκανε την σκέψη πως, αν δημιουργηθεί ένας κύκλος, ένα εγγεγραμμένο τετράγωνο (στο εσωτερικό του κύκλου) και ένα περιγεγραμμένο τετράγωνο (στο εξωτερικό του κύκλου), μπορεί κανείς να βρει κάποια όρια μέσα στα οποία υπάρχει το π.

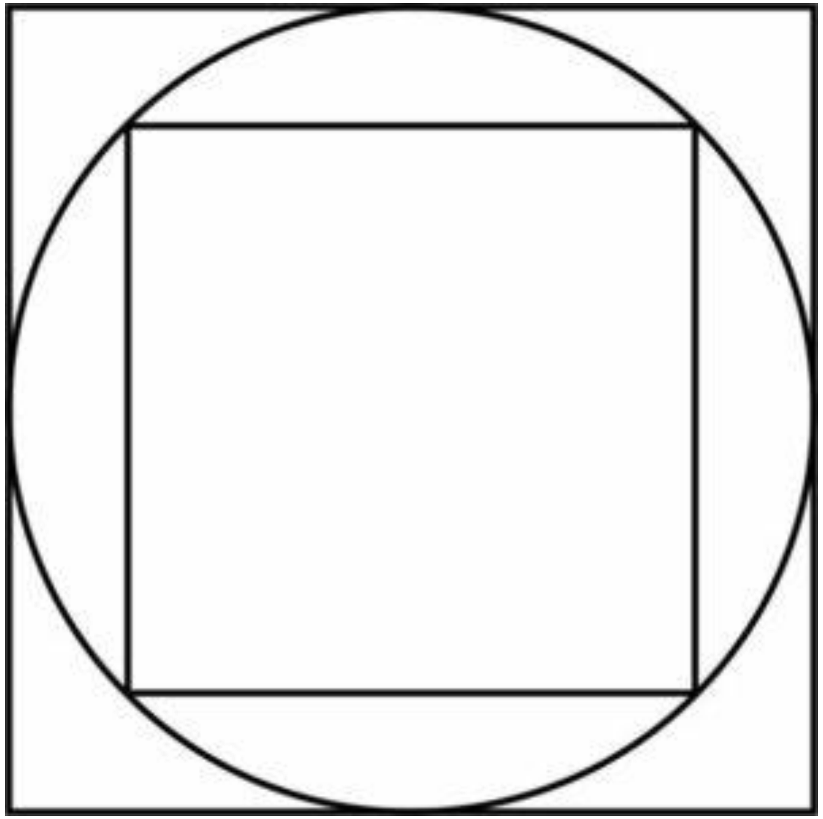


3. Ελληνικός πολιτισμός Αρχιμήδης ο Συρακούσιος

Περίμετρος περιγεγραμμένου τετραγώνου / διάμετρο κύκλου = 4

Περίμετρος εγγεγραμμένου τετραγώνου / διάμετρο κύκλου = 2.82

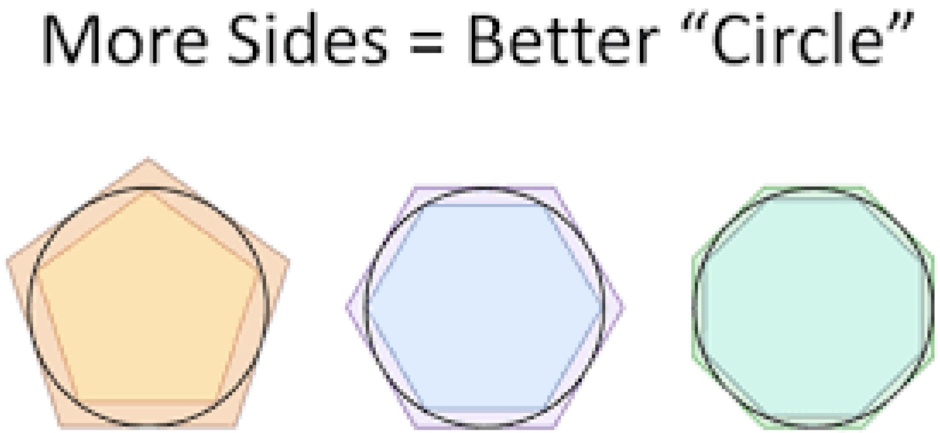
Άρα 4>π>2.82



3. Ελληνικός πολιτισμός Αρχιμήδης ο Συρακούσιος

Στην συνέχεια επέκτεινε την λογική αυτή παρατηρώντας ότι ένα κανονικό πεντάγωνο μοιάζει περισσότερο με τον κύκλο και ένα κανονικό εξάγωνο ακόμα περισσότερο κλπ.

Κατάφερε τελικά να σχεδιάσει δύο κανονικά πολύγωνα 96 πλευρών, κάνοντάς έτσι την τελική του εκτίμηση: 3.1408 < π < 3.1429



4. 250 π.Χ. – 1600 μ.Χ.
Κίνα, Ινδία, Περσία

Οι Ευρωπαίοι σταμάτησαν να ασχολούνται ιδιαίτερα με την εξιχνίαση του μυστηρίου του π, και τη σκυτάλη πήραν μαθηματικοί κυρίως από την Κίνα, την Ινδία και την Περσία.

Οι Κινέζοι γύρω στο 480 μ.Χ. εκτιμούν ότι το π είναι ίσο με 355/113, πάλι χρησιμοποιώντας (διαφορετικό) πολυγωνικό αλγόριθμο σε πολύγωνο 12288 πλευρών, με ακρίβεια 7 δεκαδικών.

Παρόμοιες τεχνικές χρησιμοποίησαν και οι Πέρσες και οι Ινδοί.

Το τέλος της αξιοποίησης των πολυγωνικών αλγορίθμων αποτελεί η εκτίμηση ενός Αυστριακού μαθηματικού, ο οποίος βρήκε τα πρώτα 38 ψηφία του π το 1630.

5. 17ος αιώνας – 20ος αιώνας Μέθοδος απειροσειρών

Η ανάπτυξη των τεχνικών των απειροσειρών έφεραν επανάσταση στον υπολογισμό του *π*, τον 16ο και τον 17ο αιώνα.

Η πρώτη άπειρη ακολουθία που ανακαλύφθηκε στην Ευρώπη ήταν ένα άπειρο γινόμενο και βρέθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Φρανσουά Βιετά το 1593:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

5. 17ος αιώνας – 20ος αιώνας Μέθοδος απειροσειρών

Άλλες ακολουθίες για την προσέγγιση του π:

1. James Gregory (1671)

- Wilhelm Leibniz (1674)

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots$$

(Αργή σύγκλιση)

2. John Machin (1706)

(100 πρώτα ψηφία)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

(Γρήγορη σύγκλιση)

5. 17^{ος} αιώνας – 20^{ος} αιώνας Χρήση του ελληνικού γράμματος π

Η πρώτη φορά που χρησιμοποιήθηκε το ελληνικό γράμμα π για να αντιπροσωπεύεται ο εν λόγω αριθμός, ήταν από τον μαθηματικό Γουίλιαμ Τζόουνς το 1706.

Αρχικά, δεν υιοθετήθηκε αυτό το σύμβολο από την υπόλοιπη μαθηματική κοινότητα αμέσως μετά το έργο του Τζόουνς, μέχρις ότου άρχισε να το χρησιμοποιεί ο Ελβετός μαθηματικός Λέοναρντ Όιλερ, εμφανίζοντάς το στο έργο του «Μηχανική» το 1736.

Ο Όιλερ ήταν σπουδαίος μαθηματικός και είχε επαφές με πολλούς άλλους μαθηματικούς της Ευρώπης με αποτέλεσμα η χρήση του «π» να εξαπλωθεί γρήγορα.

5. 17ος αιώνας – 20ος αιώνας Μέθοδος απειροσειρών

Ο τύπος του Machin βελτιωνόταν συνεχώς και παρέμεινε μέχρι και την εποχή των υπολογιστών ο πιο εύχρηστος και αποτελεσματικός αλγόριθμος για την παραγωγή ψηφίων του π, με αποκορύφωμα την προσέγγιση των πρώτων 620-ψηφίων του π, που έγινε το 1946 από τον Daniel Ferguson.

6. Εποχή των υπολογιστών (1941-1973) Επαναληπτικοί αλγόριθμοι

Η εφεύρεση των υπολογιστών στα μέσα του 20ού αιώνα έκανε το εγχείρημα της εύρεσης πολλαπλών ψηφίων πιο δελεαστικό, αφού δημιούργησε νέες, πιο γρήγορες οδούς για τον τρόπο εξαγωγής ψηφίων.

Αρχικά οι μαθηματικοί συνδύασαν την νέα υπολογιστική ισχύ που ήταν διαθέσιμη με τις υπάρχουσες απειροσειρές, φτάνοντας τα ένα εκατομμύριο πρώτα ψηφία του π, το 1973.

6. Εποχή των υπολογιστών - Επαναληπτικοί αλγόριθμοι

Γύρω στο 1980 ανακαλύφθηκαν οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του π, που ήταν πιο γρήγοροι από τις μέχρι τότε γνωστές αναλυτικές σχέσεις των απειροσειρών.

Το πλεονέκτημα, όμως, της ταχείας σύγκλισης, περιοριζόταν από το μειονέκτημα της αυξημένης ανάγκης για περισσότερη μνήμη.

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος Γκάους–Λεζάντρ:

Προετοιμασία

$$a_0=1 \qquad b_0=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad t_0=\frac{1}{4} \qquad p_0=1$$

Εύρεση

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \qquad b_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$$

$$t_{n+1}=t_n-p_n(a_n-a_{n+1})^2 \qquad p_{n+1}=2p_n$$

Στη συνέχεια μια εκτίμηση για το π δίνεται από

$$\pi\approx\frac{(a_n+b_n)^2}{4t_n}$$

6. Εποχή των υπολογιστών (σήμερα) Γρήγορα συγκλίνουσες σειρές

Από τη δεκαετία του 1990 ανακαλύφθηκαν νέες άπειρες σειρές που είναι τόσο γρήγορες όσο και οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι, αλλά απαιτούν και λιγότερη μνήμη.

Έτσι, η εξαγωγή ψηφίων έγινε ακόμη πιο γρήγορη.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

Ρεκόρ και παγκόσμια ημέρα της σταθεράς π

Σήμερα, είναι γνωστά σε μας τα πρώτα 100 τρισεκατομμύρια ψηφία του π (Emma Haruka Iwao, 2022).

Η μέρα του χρόνου αφιερωμένη στον αριθμό π είναι η 14ις Μαρτίου, λόγω της αναγραφής της ημερομηνίας ως 3/14, σύμφωνα με τον Αμερικανικό τρόπο γραφής.

Βιβλιογραφία

Αρώνη Π., Η Ιστορία του π, Διπλωματική εργασία, Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών», ΕΚΠΑ, Αθήνα 2008. Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο: http://me.math.uoa.gr/dipl/dipl_aroni.pdf (ανάκτηση 8.12.2023)

Μερτσανίδης Θ. Ο αριθμός π από την γέννησή του έως και σήμερα. Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο: https://e-noesis.gr/o-arithmos-p-apo-tin-gennisi-toy-eos-kai-simera/ (ανάκτηση 8.12.2023)