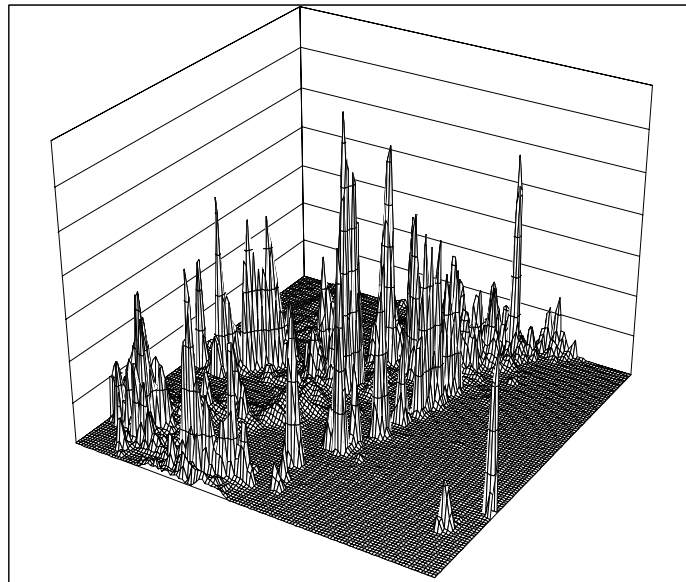




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:
«ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΠΕΔΙΩΝ
ΜΕ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΜΜΟΝΗΣ»



Νίκος Θεοδωράτος

Αθήνα, Ιούλιος 2004

Επιβλέπων: Δ. Κουτσογιάννης, Αν. Καθηγητής

Ευχαριστίες

Φτάνοντας στο τέλος της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά κάποιους ανθρώπους, που χωρίς τη συμβολή τους και τη βοήθειά τους θα ήταν δύσκολη η ολοκλήρωσή της.

Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ν. Μαμάση και τον κ. Α. Κουκουβίνο για την ανταπόκριση που έδειξαν όταν τους ζήτησα τη βοήθειά τους, την όποια έδωσαν με μεγάλη προθυμία. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή της ΑΣΟΕΕ κ. Χ. Παυλόπουλο για δεδομένα που μου παραχώρησε. Χωρίς αυτά η εκπόνηση της εργασίας θα ήταν αδύνατη. Ένα μεγάλο ευχαριστώ στον Α.Λαγγούση. Με τις συμβουλές του με βοήθησε στη συγγραφή αυτής της εργασίας, αλλά και πολλών άλλων κειμένων στο μέλλον. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τον άνθρωπο που μου έδωσε την ασύγκριτα περισσότερη βοήθεια, τον καθηγητή μου κ. Δ. Κουτσογιάννη, που με βοήθησε στην επιλογή ενός τόσο ενδιαφέροντος θέματος, μου έδωσε το απαραίτητο υλικό για την προσέγγιση του θέματος, αλλά και με στήριξε όσες φορές οι δυσκολίες του θέματος μου φαινόταναν ανυπέρβλητες. Κυρίως όμως θέλω να τον ευχαριστήσω που με έφερε σε επαφή με τη Στοχαστική Υδρολογία, μία επιστήμη που πιστεύω ότι είναι από τις πιο σημαντικές για την κοινωνία και τη ζωή του ανθρώπου.

Νίκος Θεοδωράτος
16/07/2004

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	i
Περιεχόμενα	ii
Περίληψη - Abstract	iii
1. Εισαγωγή	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Αντικείμενο της εργασίας	1
1.3 Διάρθρωση της εργασίας	2
2. Βασικές Έννοιες – Ορισμοί	3
2.1 Βιβλιογραφική Επισκόπηση	3
2.2 Ορισμοί	4
2.3 Στοιχεία Φασματικής Ανάλυσης Fourier	7
2.4 Η ανέλιξη FGN	9
2.5 Τυχαία Πεδία	10
3. Η περίπτωση της μονοδιάστατης ανέλιξης FGN	12
3.1 Το σχήμα SMA	12
3.2 Η χρήση του SMA για τη γέννηση ανερίξεων FGN	15
3.3 Εφαρμογή: Γέννηση ανέλιξης FGN με τη χρήση του SMA	16
4. Η περίπτωση των 2 διαστάσεων – Θεωρητική Επεξεργασία	24
4.1 Παραδοχές – Δομή μοντέλου	24
4.2 Σχέση Φάσματος Ισχύος – Φάσματος Συντελεστών Βάρους	24
4.3 Φάσμα Ισχύος	27
4.4 Συνάρτηση Αυτοσυνδιασποράς σε διακριτό Πεδίο	28
4.5 Υπολογισμός Ακολουθίας Συντελεστών Βάρους	34
4.6 Εκτίμηση Παραμέτρων	35
4.7 Εφαρμογή της μεθοδολογίας	36
5. Η περίπτωση των 2 διαστάσεων – Εφαρμογές	37
5.1 Μέτρηση βροχής με χρήση radar	37
5.2 Εφαρμογή A	38
5.3 Εφαρμογή B	47
6. Συμπεράσματα	55
Αναφορές	57
Παράρτημα A	59
Παράρτημα B	62
Παράρτημα Γ	64

Περίληψη

Κατά τις προσομοιώσεις που γίνονται στα πλαίσια του αντιπλομμηρικού σχεδιασμού, είναι σημαντικό να λαμβάνεται σοβαρά υπ' όψιν η χωρική κατανομή της βροχής. Γίνονται λοιπόν έρευνες στην κατεύθυνση δημιουργίας χωρικά συνεπών στοχαστικών μοντέλων βροχής.

Μία ιδιότητα που φαίνεται να είναι σημαντική για την κατανομή της βροχής στο χώρο είναι ύπαρξη εξάρτησης μακράς κλίμακας ή εμμονής, η οποία είναι αντίστοιχη με το φαινόμενο Hurst που εμφανίζεται στη μελέτη υδρολογικών χρονοσειρών. Ένα χωρικό λοιπόν μοντέλο βροχής θα πρέπει να μπορεί να αναπαριστά την εμμονή μακράς κλίμακας.

Ξεκινώντας από ένα υπάρχον μονοδιάστατο γραμμικό μοντέλο που συνήθως χρησιμοποιείται για την προσομοίωση χρονοσειρών που παρουσιάζουν εμμονή, επιδιώκουμε να το επεκτείνουμε στις δύο διαστάσεις, και να εξάγουμε τις βασικές σχέσεις που το περιγράφουν. Η κατασκευή αυτού του διδιάστατου μοντέλου απαιτεί θεωρητικές αναλύσεις για την αναλυτική εύρεση των συναρτησιακών σχέσεων που το περιγράφουν. Το μοντέλο ανήκει στην κατηγορία των μοντέλων σταθμισμένου συμμετρικού κινούμενου μέσου (SMA – Symmetric Moving Average). Μπορεί να συνθέσει διδιάστατα τυχαία πεδία επιτυγχάνοντας τη διατήρηση της μέσης τιμής, της διασποράς και της ασυμμετρίας του τυχαίου πεδίου αλλά ταυτόχρονα και της εμμονής του. Το μοντέλο δοκιμάστηκε στην αναπαραγωγή τυχαίων πεδίων βροχής με στατιστικά χαρακτηριστικά που προκύπτουν από δεδομένα ραντάρ και έδειξε καλή συμπεριφορά.

Abstract

For the rational design and management of flood-preventing works, it is important when simulating a storm to respect the spatial distribution of rainfall. Thus research is done in order to develop spatially consistent stochastic rain models.

A property that seems to have a significant effect on the spatial distribution of rain is the existence of large scale dependence or persistence, which corresponds to the Hurst effect, met at the study of hydrological time series. Therefore a spatial rain model should be able to simulate the large scale persistence.

Beginning from an existing one-dimensional linear model, which is usually used in simulating time series with long-term persistence, we try to expand it into two dimensions, and to find the basic formulas that describe it. The development of this two-dimensional model demands in many cases theoretical calculations in order to find the functional relationships that describe it. This model belongs to the category of Symmetric Moving Average (SMA) models. It can synthesize two-dimensional random fields, managing to preserve the average, the variance and the skewness and also the persistence of the random field. The model was tested in the reproduction of rainfall fields, with statistics obtained from radar data, and showed good performance.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή

Πολύ σημαντικός κλάδος της Τεχνολογίας Υδατικών Πόρων είναι η Αντιπλημμυρική Προστασία. Η σύγχρονη οικονομική ανάπτυξη δίνει στις πόλεις τέτοια μορφή, ώστε το πρόβλημα των πλημμυρών συνεχώς να οξύνεται. Κατά συνέπεια η αντιμετώπισή τους αποτελεί, από τη μία μεγάλη πρόκληση για τους μηχανικούς και από την άλλη επιτακτική ανάγκη για την κοινωνία.

Μία σύγχρονη τάση στο σχεδιασμό της Αντιπλημμυρικής Προστασίας και των συναφών έργων είναι η χωροχρονική προσομοίωση της πλημμύρας. Δεδομένου ότι η πρωτογενής πληροφορία μίας πλημμύρας είναι η βροχή, η προσομοίωση μπορεί να γίνει μέσω στοχαστικής προσομοίωσης της βροχής και διόδευσης των αποτελεσμάτων της μέσω κάποιου μοντέλου βροχής - απορροής.

Πρόσφατες έρευνες (Wheater *et al.*, 2000) αποδεικνύουν ότι η χωρική κατανομή της βροχής παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην προσομοίωση της απορροής και στην εκτίμηση των μεγεθών σχεδιασμού ενός αντιπλημμυρικού έργου. Γίνεται λοιπόν προσπάθεια από πολλούς ερευνητές να παραχθούν χωρικά συνεπή μοντέλα χρονικής προσομοίωσης της βροχής. Σε αυτή την προσπάθεια βοηθά σημαντικά η εξέλιξη των μετεωρολογικών radar.

1.2 Αντικείμενο της εργασίας

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η στοχαστική προσομοίωση πεδίου βροχής μέσω ανελίξεων απλής ομοιοθεσίας (simple-scaling) και συγκεκριμένα μέσω της δισδιάστατης ανελίξης FGN. Επιχειρείται να αναπτυχθεί γραμμικό μοντέλο σύνθεσης δισδιάστατων τυχαίων πεδίων που διατηρούν την εμμονή στο δισδιάστατο και επομένως μπορούν να προσομοιώσουν την ανελίξη FGN. Επισημαίνεται ότι η δισδιάστατη ανελίξη FGN δεν έχει μελετηθεί ως τώρα με πληρότητα, και για το λόγο αυτό στην εργασία έγιναν εκτεταμένες αναλύσεις προκειμένου να μελετηθούν οι ιδιότητές της και να δοθούν αναλυτικές ή προσεγγιστικές εκφράσεις διαφόρων χαρακτηριστικών της.

1.3 Διάρθρωση της εργασίας

Η εργασία περιλαμβάνει την παρούσα εισαγωγή που αποτελεί το 1ο Κεφάλαιο, πέντε επιπλέον κεφάλαια και τρία παραρτήματα.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μία σύντομη επισκόπηση της βιβλιογραφίας γύρω από το φαινόμενο Hurst και την ανέλιξη FGN σε μία ή περισσότερες διαστάσεις. Στη συνέχεια δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί των στατιστικών μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν και γίνεται σύμβαση για το συμβολισμό τους. Γίνεται παρουσίαση των βασικών ιδιοτήτων της ανέλιξης FGN και των τυχαίων πεδίων. Τέλος υπενθυμίζονται ορισμένα στοιχεία που αναφέρονται στο μαθηματικό υπόβαθρο της εργασίας

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται ένα υπάρχον γραμμικό μονοδιάστατο μοντέλο που διατηρεί την εμμονή, και το οποίο αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη του δισδιάστατου μοντέλου, το οποίο αποτελεί το κύριο θέμα της εργασίας. Επίσης παρουσιάζεται μία εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου.

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται η θεωρητική επεξεργασία του δισδιάστατου γραμμικού μοντέλου FGN. Γίνονται οι απαραίτητες παραδοχές, παρουσιάζεται η βασική δομή του και στη συνέχεια εξάγονται οι σχέσεις από τις οποίες εκτιμώνται οι παράμετροι του μοντέλου.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται δύο εφαρμογές που βοηθούν στη διερεύνηση των επιδόσεων του μοντέλου που αναπτύχθηκε.

Τέλος στο Κεφάλαιο 6 συνοψίζονται τα βασικά συμπεράσματα της εργασίας.

Στα Παραρτήματα Α και Β παρατίθενται πίνακες που προέκυψαν από τους υπολογισμούς που έγιναν στις τρεις εφαρμογές. Στο Παράρτημα Γ παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος γέννησης τυχαίων αριθμών.

Κεφάλαιο 2

Βασικές Έννοιες - Ορισμοί

2.1 Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Το 1951, στα πλαίσια της μελέτης του Μεγάλου Φράγματος του Ασουάν, ο Hurst μελετώντας μία υδρολογική χρονοσειρά πολύ μεγάλου μήκους παρατήρησε το φαινόμενο τα υγρά έτη να ομαδοποιούνται σε υγρές περιόδους, και αντίστοιχα τα ξηρά σε ξηρές περιόδους. Το φαινόμενο αυτό ονομάστηκε «φαινόμενο Hurst» και η ιδιότητα της ομαδοποίησης εμμονή (ή μακροπρόθεσμη «μνήμη»). Αργότερα, το 1977, ο Mandelbrot ονόμασε εναλλακτικά το φαινόμενο Hurst «φαινόμενο Ιωσήφ» εμπνεόμενος από το γνωστό μύθο των 7 παχιών και 7 ισχνών αγελάδων, που επισκέφτηκαν το Φαραώ στον ύπνο του.

Το φαινόμενο Hurst όμως δεν απαντάται μόνο σε υδρολογικές χρονοσειρές, αλλά σε πολλές ακόμη γεωφυσικές χρονοσειρές. Οι Haslett & Raftery (1989) διαπίστωσαν την ύπαρξή του σε χρονοσειρές έντασης του ανέμου, ο Bloomfield (1992) σε χρονοσειρές μέσης παγκόσμιας θερμοκρασίας, ο Eltahir (1996) σε χρονοσειρές παροχής του Νείλου, οι Radziejewski & Kundzewicz (1997) σε χρονοσειρές παροχής του ποταμού Warta στην Πολωνία, οι Montanari *et al.* (1997) σε χρονοσειρές μηνιαίων και ημερήσιων εισροών στην Ιταλική λίμνη Maggiore, οι Vogel *et al.* (1998) σε χρονοσειρές ετήσιας απορροής σε ποτάμια των ηπειρώτικων ΗΠΑ, οι Stephenson *et al.* (2000) κατά τη διερεύνηση της ταλάντωσης του Βορείου Ατλαντικού, ο Koutsoyiannis (2002) στα πάχη των ετήσιων δακτυλίων αιωνόβιων δέντρων της Utah.

Το 1965 εισήχθη από τον Mandelbrot η ανέλιξη FGN (Fractional Gaussian Noise – Κλασματικός Γκαουσιανός Θόρυβος) η οποία μπορεί να αναπαράγει το φαινόμενο Hurst. Έκτοτε η ανέλιξη FGN έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλά μοντέλα στοχαστικής υδρολογικής προσομοίωσης. Συνήθως η ανέλιξη FGN χρησιμοποιείται για την προσομοίωση χρονοσειρών σε μονοδιάστατες δηλαδή εφαρμογές, με μεταβλητή το χρόνο.

Το 1977 ο Mandelbrot παρουσίασε μία σειρά εφαρμογών της ανέλιξης FGN με μεταβλητή μία ή περισσότερες διαστάσεις στο χώρο. Αυτές οι εφαρμογές καλούνται προφίλ, τοπία ή σύννεφα Mandelbrot σε μία, δύο ή τρεις διαστάσεις αντίστοιχα. Έτσι ο Hewett (1986) μελετώντας διάφορες διεργασίες ροής σε πορώδες μέσο προσομοίωσε με την ανέλιξη FGN τη μεταβολή του πορώδους, επίσης οι Molz & Boman (1993) και ο Neumann (1994) προσομοίωσαν τη μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας υδροφορέων.

Τέλος να αναφερθεί ότι λόγω της ιδιότητας της αυτο-συγγένειας (self-affinity) της ανέλιξης FGN (Molz *et al.*, 1997) έχει συνδεθεί η ανέλιξη FGN με τη θεωρία των μορφοκλασματικών (fractals). Για παράδειγμα οι Gneiting & Schlather (2004) συνδέουν την μορφοκλασματική διάσταση ενός προφίλ, τοπίου ή συννέφου Mandelbrot με το συντελεστή Hurst του, μέσω γραμμικής σχέσης.

Στην εμμονή και το φαινόμενο Hurst έχουν δοθεί διάφορες ερμηνείες. Από κάποιους θεωρείται ότι η εμμονή έχει ντετερμινιστική προέλευση (πχ Bhattacharya *et al.*, 1983). Άλλοι (πχ Bak, 1996) θεωρούν ότι υπάρχει κάποια εγγενής ιδιότητα στα φυσικά συστήματα, που επιτρέπει ακόμη και σε πολύ απομακρυσμένα στοιχεία τους να συνεργάζονται. Σύμφωνα με το συγγραφέα Υπάρχει όμως μία πιο απλή και εύκολα κατανοητή, κατά το συγγραφέα, εξήγηση, οι διακυμάνσεις ενός γεωφυσικού τυχαίου μεγέθους συμβαίνουν σε περισσότερες από μία κλίμακες, συμβαίνουν σε όλες τις κλίμακες. Για παράδειγμα διακυμάνσεις της παροχής ενός ποταμού γίνονται σε κλίμακα λεπτού, ώρας, μήνα, έτους κλπ. Έτσι κάποια διακύμανση μεγάλης κλίμακας προκαλεί ομαδοποίηση των τιμών της παροχής στις μικρότερες κλίμακες. Κάτι τέτοιο έχει υποστηριχθεί από το Εθνικό Συμβούλιο Ερευνών των ΗΠΑ (National Research Council, 1991), το οποίο υποστηρίζει ότι το κλίμα «αλλάζει ακανόνιστα, για άγνωστο λόγο, σε όλες τις χρονικές κλίμακες», ενώ έχει αποδειχθεί από τον Koutsoyiannis (2002) ότι αρκούν τυχαίες διακυμάνσεις σε τρεις μόνο κλίμακες για να αναπαραχθούν το φαινόμενο Hurst και η μακροπρόθεσμη εμμονή.

2.2 Ορισμοί

Προκείμενου να γίνουν καλύτερα κατανοητές οι έννοιες τις οποίες πραγματεύεται η παρούσα εργασία, παρουσιάζονται εδώ οι ορισμοί ορισμένων μεγεθών και εννοιών. Επίσης γίνεται σύμβαση για τους συμβολισμούς τους.

Αν X μία τυχαία μεταβλητή και x μία τιμή της τότε ορίζονται οι παρακάτω συναρτήσεις της τιμής x (Κουτσογιάννης, 1996, Μιμίκου, 1994).

Συνάρτηση κατανομής της x είναι η συνάρτηση με εξίσωση

$$F_X(x) := P(\{X \leq x\}) \quad (2.1)$$

η οποία ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x , είναι αύξουσα και δίνει την πιθανότητα που έχει η τυχαία μεταβλητή X να είναι μικρότερη από τον αριθμό x . Η συνάρτηση κατανομής καλείται και *αθροιστική συνάρτηση κατανομής* ή *πιθανότητα μη υπέρβασης*.

Η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* και συμβολίζεται

$$f_X(x) := \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.2)$$

οι βασικές της ιδιότητες που προκύπτουν από τον ορισμό της είναι:

$$f_X(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi \quad (2.3)$$

Για δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y ορίζεται ως *από κοινού συνάρτηση κατανομής* η συνάρτηση με εξίσωση

$$F_{XY}(x,y) = P(\{X \leq x, Y \leq y\}) \quad (2.4)$$

και ως *από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* η συνάρτηση με εξίσωση

$$f_{XY}(x,y) := \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} \quad (2.5)$$

Προφανώς ισχύει
$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(\xi, \omega) d\xi d\omega \quad (2.6)$$

Έστω μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X . Ορίζονται τα παρακάτω μεγέθη. Αν $g(X)$ συνάρτηση της X , τότε ορίζεται ως *αναμενόμενη τιμή της $g(X)$* το μέγεθος

$$E[g(X)] := \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (2.7)$$

ενώ αν η X είναι διακριτή

$$E[g(X)] := \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(X=x_i) \quad (2.8)$$

Ειδικότερα:

Για $g(X) = X^r$, $r = 0, 1, 2, 3, \dots$ η αναμενόμενη τιμή της $g(X)$ συμβολίζεται

$$m_X^{(r)} := E[X^r] \quad (2.9)$$

και ονομάζεται *ροπή περί την αρχή τάξης r* .

Για $r = 1$, δηλαδή $g(X) = X$ η αναμενόμενη τιμή της $g(X)$ συμβολίζεται

$$\mu_X = m_X = E[X] \quad (2.10)$$

και ονομάζεται *αναμενόμενη ή μέση τιμή της X* .

Για $g(X) = (X - m_X)^r$, $r = 0, 1, 2, \dots$ η αναμενόμενη τιμή της $g(X)$ συμβολίζεται

$$\mu_X^{(r)} := E[(X - m_X)^r] \quad (2.11)$$

και ονομάζεται *κεντρική ροπή τάξης r*.

Για $r = 2$, δηλαδή $g(X) = (X - m_X)^2$ η αναμενόμενη τιμή της $g(X)$ συμβολίζεται

$$\gamma_{0X} = \sigma_X^2 = E[(X - m_X)^2] = \text{Var}[X] \quad (2.12)$$

και ονομάζεται *διασπορά* της X .

Από τις ροπές προκύπτουν και οι ακόλουθες παράμετροι:

Η *τυπική απόκλιση* της X

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad (2.13)$$

ο *συντελεστής μεταβλητότητας*

$$C_{vX} = \frac{\sigma_X}{m_X} \quad (2.14)$$

ο *συντελεστής ασυμμετρίας*

$$\zeta_X = C_{sX} = \frac{\mu_X^{(3)}}{\sigma_X^3} \quad (2.15)$$

Για δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y ορίζονται επίσης αναμενόμενες τιμές και ροπές. Αν λοιπόν $g(X, Y)$ συνάρτηση των δύο τυχαίων μεταβλητών, τότε η αναμενόμενη τιμή της δίνεται από την εξίσωση

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy \quad (2.16)$$

Το μέγεθος $E[X^p Y^q]$ ονομάζεται *από κοινού ροπή περί την αρχή τάξης $p+q$* των X και Y . Το μέγεθος $E[(X - m_X)^p (Y - m_Y)^q]$ ονομάζεται *από κοινού κεντρική ροπή τάξης $p+q$* των X και Y . Από τις κεντρικές ροπές συνήθως χρησιμοποιείται η

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}[X, Y] := E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = E[XY] - m_X m_Y \quad (2.17)$$

που ονομάζεται *συνδιασπορά* των X και Y . Από τη συνδιασπορά προκύπτει ο *συντελεστή συσχέτισης* των X και Y , που ορίζεται από τη σχέση

$$\rho_{XY} := \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.18)$$

Στοχαστική ανέλιξη καλείται μία απειροπληθής ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Μία στοχαστική ανέλιξη μπορεί να συμβολιστεί ως X_t όπου ο δείκτης t παίρνει τιμές από ένα κατάλληλο δεικτοσύνολο T το οποίο συνήθως παριστάνει το χρόνο. Όταν ισχύει $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ έχουμε μία ανέλιξη σε *διακριτό* χρόνο, ενώ όταν $T = [0, \infty)$ έχουμε μία ανέλιξη σε *συνεχή* χρόνο.

Χρονοσειρά καλείται μία, εκ των άπειρων δυνατών, υλοποίηση της στοχαστικής ανέλιξης.

Για μία στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ ορίζονται τα παρακάτω μεγέθη:

$$\text{Μέση τιμή: } \mu_X = E[X] \quad (2.19)$$

$$\text{Αυτοσυνδιασπορά: } \gamma_\tau = C(t, \tau) := \text{Cov}[X(t), X(t+\tau)] = E[(X(t)-\mu(t))(X(t+\tau)-\mu(t+\tau))] \quad (2.20)$$

$$\text{Διασπορά: } \gamma_0 = C(t, 0) = \text{Var}[X(t)] = \text{Cov}[X(t), X(t+\tau)] \quad (2.21)$$

$$\text{Συντελεστής αυτοσυσχέτισης: } \rho(t, \tau) := \frac{\text{Cov}[X(t), X(t+\tau)]}{\sqrt{\text{Var}[X(t)]\text{Var}[X(t+\tau)]}} = \frac{C(t, \tau)}{\sqrt{C(t, 0)C(t+\tau, 0)}} \quad (2.22)$$

Στις παραπάνω σχέσεις ο όρος τ καλείται *υστέρηση (lag)*.

Για δύο ανεξίτητες X και Y ορίζονται:

$$\text{Ετεροσυνδιασπορά: } C_{XY}(t, \tau) := \text{Cov}[X(t), Y(t+\tau)] \quad (2.23)$$

$$\text{Συντελεστής ετεροσυσχέτισης: } r_{XY}(t, \tau) := \frac{\text{Cov}[X(t), Y(t+\tau)]}{\sqrt{\text{Var}[X(t)]\text{Var}[Y(t+\tau)]}} \quad (2.24)$$

Μία στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ καλείται *στάσιμη με την αυστηρή έννοια* ή απλά *στάσιμη* όταν η συνάρτηση κατανομής της παραμένει σταθερή, ανεξάρτητα από την τιμή που παίρνει ο δείκτης t .

Μία στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ καλείται *στάσιμη με την ευρεία έννοια* όταν η μέση τιμή της παραμένει σταθερή, ανεξάρτητα από την τιμή του δείκτη t και η αυτοσυνδιασπορά της εξαρτάται μόνο από την υστέρηση. Δηλαδή όταν:

$$E[X(t)] = \mu = \text{σταθ} \quad \text{και} \quad E[(X(t)-\mu)(X(t+\tau)-\mu)] = C(\tau) \quad (2.25)$$

Μία στοχαστική ανέλιξη καλείται *λευκός θόρυβος* και συνήθως συμβολίζεται με V_i όταν κάθε τιμή της είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες και ισχύει ότι

$$\text{Cov}[V_i, V_j] = 0 \quad \text{για } i \neq j \quad \text{και} \quad \text{Cov}[V_i, V_j] = 1 \quad \text{για } i = j \quad (2.26)$$

Αν θεώρησουμε μία στοχαστική ανέλιξη X_i τότε ορίζουμε ως *συναθροισμένη ανέλιξη στην κλίμακα k* εκείνη την ανέλιξη που ορίζεται από τη σχέση

$$Z_j^{(k)} = \sum_{i=(j-1)k+1}^{jk} X_i \quad (2.27)$$

Για παράδειγμα για $k = 2$ ισχύει: $Z_1^{(2)} = X_1+X_2$, $Z_2^{(2)} = X_3+X_4$, ..., για $k = 3$ ισχύει: $Z_1^{(3)} = X_1+X_2+X_3$, $Z_2^{(3)} = X_4+X_5+X_6$, ... Η κλίμακα $k = 1$ ονομάζεται *βασική κλίμακα*.

2.3 Στοιχεία Φασματικής Ανάλυσης Fourier

Σε αυτή την παράγραφο υπενθυμίζονται πολύ συνοπτικά οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

Ο μετασχηματισμός Fourier ανήκει στην κατηγορία των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών και έχει πυρήνα $e^{-i2\pi\omega x}$. Ορίζεται από την εξίσωση (Bracewell, 2000)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\omega x} dx \quad (2.28)$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός από την εξίσωση

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i2\pi\omega x} dx \quad (2.29)$$

όπου $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ η μιγαδική μονάδα.

Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται αρχική και η $F(\omega)$ μετασχηματισμένη. Για το συμβολισμό του μετασχηματισμού Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο συναρτησιακός τελεστής Fourier, έτσι μπορούμε να γράφουμε

$$\mathbf{F}\{f(x)\} = F(\omega) \quad \text{και} \quad \mathbf{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) \quad (2.30)$$

Αποδεικνύεται (Bracewell, 2000, p. 13) ότι αν η αρχική συνάρτηση είναι πραγματική και άρτια τότε και η μετασχηματισμένη είναι πραγματική και άρτια.

Αν η αρχική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο 1 τότε απλοποιείται ο μετασχηματισμός Fourier και μπορεί (Κουτσογιάννης, 2003) να οριστεί ο πεπερασμένος μετασχηματισμός και ο αντίστροφός του ως

$$F_k = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^{-i2\pi kx} dx, \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i2\pi kx} \quad (2.31)$$

Αν η αρχική συνάρτηση είναι επιπλέον πραγματική και άρτια τότε ο μετασχηματισμός και ο αντίστροφός του απλοποιούνται ακόμη περισσότερο και ορίζονται ως

$$F_k = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\cos(2\pi kx) dx = 2 \int_0^{1/2} f(x)\cos(2\pi kx) dx \quad (2.32)$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cos(2\pi kx) = F_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos(2\pi kx) \quad (2.33)$$

Τέλος ορίζεται ο πεπερασμένος μετασχηματισμός συνημιτόνου F_k^c και ο αντίστροφός του για τον οποίο ισχύει ότι

$$f_k^c = 2F_0 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos(2\pi kx) \quad (2.34)$$

Ως φάσμα ισχύος $s_\gamma(\omega)$ μίας διακριτής στοχαστικής ανέλιξης X_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, ορίζουμε τον πεπερασμένο μετασχηματισμό συνημιτόνου της συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς της. Δηλαδή ισχύει η σχέση

$$s_\gamma(\omega) = 2\gamma_0 + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \cos(2\pi m\omega) = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m \cos(2\pi m\omega) \quad (2.35)$$

όπου $\gamma_m := \text{Cov}[X_i, X_{i+m}]$. Επίσης ισχύει η αντιστροφή

$$\gamma_m = \int_0^{1/2} s_\gamma(\omega) \cos(2\pi m\omega) d\omega \quad (2.36)$$

Στην περίπτωση των δύο διαστάσεων (Bracewell, 2000) ο μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφός του ορίζονται ως

$$F(\varphi, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(x\varphi + y\omega)} dx dy$$

και

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\varphi, \omega) e^{i2\pi(x\varphi + y\omega)} d\varphi d\omega$$

Σε περίπτωση που μία συνάρτηση παρουσιάζει κυκλική συμμετρία, δηλαδή όταν $f(x, y) = f(r)$ με $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ τότε μπορεί να χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Hankel (Bracewell, 2000) ο οποίος είναι ολοκληρωτικός μετασχηματισμός με πυρήνα τη συνάρτηση Bessel J_0 . Αν λοιπόν $F(q) = F(\varphi, \omega)$ με $q = \sqrt{\omega^2 + \varphi^2}$ τότε ο μετασχηματισμός Hankel ορίζεται ως

$$F(q) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi qr) r dr$$

και

$$f(r) = 2\pi \int_0^{\infty} F(q) J_0(2\pi qr) q dq$$

Η συνάρτηση Bessel J_n , με n ακέραιο, ορίζεται ως η λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - n^2)y = 0$$

2.4 Η ανέλιξη FGN

Όπως ειπώθηκε και παραπάνω, η ανέλιξη FGN εισήχθη από το Mandelbrot (1965) προκειμένου να προσομοιωθεί το φαινόμενο Hurst. Η ανέλιξη FGN μπορεί να οριστεί (βλ. Koutsoyiannis, 2002) ως η ανέλιξη εκείνη, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(Z_i^{(k)} - k\mu) \stackrel{d}{=} \left(\frac{k}{l}\right)^H (Z_i^{(l)} - l\mu) \quad (2.37)$$

όπου το σύμβολο $\stackrel{d}{=}$ συμβολίζει ισότητα στην πεπερασμένης διάστασης από κοινού κατανομή. Το H είναι θετική σταθερά στο διάστημα $(0,1)$, γνωστή ως εκθέτης (ή συντελεστής) *Hurst*. Με μ συμβολίζουμε την αναμενόμενη τιμή της ανέλιξης στη βασική κλίμακα. Η σχέση (2.37) ισχύει για οποιουσδήποτε ακέραιους i, j .

Αν θέσουμε στη σχέση (2.37) $l = 1$, υψώσουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο και υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή κάθε μέλους καταλήγουμε στη σχέση

$$\gamma_0^{(k)} = k^{2H}\gamma_0 \quad (2.38)$$

Με τη βοήθεια της πολύ απλής σχέσης (2.38) μπορεί να εκτιμηθεί ο συντελεστής H κάποιου δείγματος (Montanari *et al.*, 1997).

Επίσης αποδεικνύεται (Koutsoyiannis, 2002b) ότι για οποιαδήποτε κλίμακα συνάθροισης k , η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητη από την κλίμακα k , και δίνεται από την εξίσωση

$$\rho_j^{(k)} = \rho_j = (1/2)[(j+1)^{2H} + (j-1)^{2H}] - j^{2H} \quad (2.39)$$

Εκτός από τα μικρά j , η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να προσεγγιστεί πολύ καλά από τη σχέση

$$\rho_j^{(k)} = \rho_j = H(2H-1)j^{2H-2} \quad (2.40)$$

που δείχνει ότι η αυτοσυσχέτιση είναι συνάρτηση δύναμης της υστέρησης με εκθέτη $-b$, τέτοιο ώστε

$$b = 2(1-H) \quad (2.41)$$

Η σχέση (2.39) μπορεί να προκύψει (Koutsoyiannis, 2002) και από μια συνεχή ανέλιξη $\Xi(t)$ με αυτοσυνδιασπορά $\text{Cov}[\Xi(t), \Xi(t+\tau)] = a\tau^{2H-2}$ (όπου $a = H(2H-1)\gamma_0$), διακριτοποιώντας την ανέλιξη σε διαστήματα οποιουδήποτε μήκους δ και θεωρώντας το μέσο όρο της $\Xi(t)$ στο διάστημα $[(i-1)\delta, i\delta]$ ως το $X_i = Z_i^{(1)}$. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το φάσμα ισχύος της ανέλιξης (Koutsoyiannis, 2002) ως

$$s_\gamma^{(k)}(\omega) = 4(1-H)\gamma_0^{(k)}(2\omega)^{1-2H} \quad (2.42)$$

που είναι συνάρτηση δύναμης της συχνότητας.

2.5 Τυχαία Πεδία

Έστω ένα διάνυσμα $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ του n -διάστατου παραμετρικού χώρου (δεικτοσύνολου) $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{R}^n$. Τυχαίο πεδίο θα καλούμε μια απειροπληθή οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X(\mathbf{v})$, όπου το διάνυσμα \mathbf{v} παίρνει τιμές από το δεικτοσύνολο \mathbf{V} (Vanmarcke, 1988). Η τυχαία μεταβλητή X μπορεί να είναι βαθμωτή ($\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$) ή περισσότερων διαστάσεων ($\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$). Επίσης μπορεί να είναι συνάρτηση και του χρόνου, δηλαδή της μορφής $X(\mathbf{v}, t)$, όπου t ο δείκτης του χρόνου που παίρνει τιμές από το δεικτοσύνολο $T \subseteq \mathbf{R}$. Για την παρούσα εργασία ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα δισδιάστατα βαθμωτά πεδία της μορφής $X(\{x, y\})$ ή απλά $X(x, y)$. Ένα πεδίο μπορεί να είναι συνεχές ή διακριτό, ανάλογα με το αν ο παραμετρικός χώρος \mathbf{V} είναι συνεχής ή διακριτός. Υπάρχει περίπτωση ένα τυχαίο πεδίο να καλείται και στοχαστική ανελίξη, αλλά συνήθως αυτός ο όρος χρησιμοποιείται για την ειδική περίπτωση των τυχαίων πεδίων με μονοδιάστατο παραμετρικό χώρο, για τις γνωστές δηλαδή στοχαστικές ανελίξεις.

Για βαθμωτά πεδία οι συναρτήσεις κατανομής, οι ροπές, και οι απο κοινού και περιθώριες κατανομές, ορίζονται ακριβώς όπως και στην περίπτωση των στοχαστικών ανελίξεων.

Ένα τυχαίο πεδίο $X(\mathbf{v})$ θα καλείται *ομογενές* όταν οι συναρτήσεις κατανομής του παραμένουν αναλοίωτες για οποιαδήποτε μεταφορά (χωρίς στροφή) του διανύσματος \mathbf{v} μέσα στον παραμετρικό χώρο. Η έννοια της ομογένειας αντιστοιχεί στην έννοια της στασιμότητας μίας μονοδιάστατης ανελίξης. Το τυχαίο πεδίο θα λέγεται επιπλέον *ισότροπο* όταν οι συναρτήσεις κατανομής παραμένουν αναλοίωτες ακόμη και για στροφή του διανύσματος \mathbf{v} .

Κεφάλαιο 3

Η περίπτωση της μονοδιάστατης ανέλιξης FGN

Προκειμένου να γίνει καλύτερα κατανοητή η μεθοδολογία για την παραγωγή διδιάστατων τυχαίων πεδίων που να ακολουθούν την ανέλιξη FGN, θα παρουσιαστεί πρώτα μία μεθοδολογία παραγωγής της ανέλιξης FGN σε μία διάσταση που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση χρονοσειρών που εμφανίζουν το φαινόμενο του Hurst.

3.1 Το σχήμα SMA

Το σχήμα SMA (σχήμα Συμμετρικού Κυλιόμενου Μέσου - Symmetric Moving Average) (Koutsoyiannis, 2000) ανήκει στην κατηγορία των μοντέλων BFMA (Backward-Forward Moving Average) και μπορεί να αναπαράγει ανελιξεις με οποιαδήποτε συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Το SMA μετασχηματίζει μία ακολουθία λευκού θορύβου V_i σε ακολουθία X_i με αυτοσυσχέτιση, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$X_i = \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+j} = a_q V_{i-q} + \dots + a_1 V_{i-1} + a_0 V_i + a_1 V_{i+1} + \dots + a_q V_{i+q} \quad (3.1)$$

Οι συντελεστές a_j ονομάζονται συντελεστές βάρους (ή απλά βάρη) ή εσωτερικές παράμετροι.

Τα βάρη σχετίζονται με τη συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς γ_k της ανέλιξης X_i σύμφωνα με τη σχέση:

$$\gamma_k = \sum_{j=-q}^{q-k} a_{|j|} a_{|k+j|} \quad (3.2)$$

Με την προϋπόθεση ότι $\sigma_v^2 = \text{Var}[V_i] = 1$ (3.3)

και $\mu_X = 0$ (3.4)

η σχέση (3.2) προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \text{Cov}[X_i, X_{i+k}] = E[X_i \cdot X_{i+k}] = E\left[\sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+j} \cdot \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j}\right] = \\ &= E\left[a_q V_{i-q} \cdot \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} + \dots + a_1 V_{i-1} \cdot \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} + a_0 V_i \cdot \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} + \dots\right] = \\ &= E\left[a_q V_{i-q} \cdot \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j}\right] + \dots + E\left[a_1 V_{i-1} \cdot \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j}\right] + E\left[a_0 V_i \cdot \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j}\right] + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-q}^q E[a_{|n|}V_{i+n} \cdot \sum_{j=-q}^q a_{|j|}V_{i+k+j}] = \\
&= \sum_{n=-q}^q E[a_{|n|}V_{i+n} \cdot a_qV_{i+k-q} + \dots + a_{|n|}V_{i+n} \cdot a_1V_{i+k-1} + a_{|n|}V_{i+n} \cdot a_0V_{i+k} + \dots] = \\
&= \sum_{n=-q}^q (E[a_{|n|}V_{i+n} \cdot a_qV_{i+k-q}] + \dots + E[a_{|n|}V_{i+n} \cdot a_1V_{i+k-1}] + E[a_{|n|}V_{i+n} \cdot a_0V_{i+k}] + \dots) = \\
&= \sum_{n=-q}^q \sum_{m=-q}^q E[a_{|n|}V_{i+n} \cdot a_{|m|}V_{i+k+m}] = \sum_{n=-q}^q \sum_{m=-q}^q \text{Cov}[a_{|n|}V_{i+n}, a_{|m|}V_{i+k+m}] \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Για κάθε V_{i+n}, V_{i+k+m} με $i+n \neq i+k+m$ είναι

$$\text{Cov}[V_{i+n}, V_{i+k+m}] = 0 \quad (3.6)$$

και για $i+n = i+k+m$ ή $n = m+k$ είναι

$$\text{Cov}[V_{i+n}, V_{i+k+m}] = \text{Var}[V_i] = 1 \quad (3.7)$$

Άρα οι περισσότεροι όροι του τελευταίου αθροίσματος μηδενίζονται και το άθροισμα εκφυλίζεται ως

$$\sum_{n=-q}^q \sum_{m=-q}^q \text{Cov}[a_{|n|}V_{i+n}, a_{|m|}V_{i+k+m}] = \sum_{j=-q}^{q-k} a_{|j|}a_{|k+j|} \quad (3.8)$$

που αποδεικνύει τη σχέση (3.2). Αν όμως $E[X_i] = \mu_X \neq 0$, τότε η ίδια σχέση εξακολουθεί να ισχύει, μόνο που πρέπει να θεωρηθεί ότι η V_i έχει μέση τιμή $E[V_i] = \mu_V \neq 0$, η όποια προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned}
\mu_X = E[X_i] &= E\left[\sum_{j=-q}^q a_{|j|}V_{i+j}\right] = \sum_{j=-q}^q E[a_{|j|}V_{i+j}] = \sum_{j=-q}^q a_{|j|}E[V_{i+j}] = \sum_{j=-q}^q a_{|j|}\mu_V = \\
&= \left(\sum_{j=-q}^q a_{|j|}\right) \cdot \mu_V = (a_0 + 2\sum_{j=1}^q a_{|j|}) \cdot \mu_V \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Άρα

$$\mu_X = (a_0 + 2\sum_{j=1}^q a_{|j|}) \cdot \mu_V \quad (3.10)$$

Τέλος θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mu_X = 0$ ισχύει για το συντελεστή ασυμμετρίας της X_i :

$$\zeta_X = \frac{\mu_X^{(3)}}{\sigma_X^3} = \frac{\mu_X^{(3)}}{\gamma_0^{3/2}} \Leftrightarrow \mu_X^{(3)} = \zeta_X \gamma_0^{3/2} \quad (3.11)$$

Επίσης

$$\mu_X^{(3)} = E[(X-\mu_X)^3] = E[X^3] = E\left[\left(\sum_{i=-q}^q a_i V_i\right)^3\right] \quad (3.12)$$

Να υπενθυμιστεί εδώ η ταυτότητα:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_i a_j a_k \quad (3.13)$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \mu_X^{(3)} &= E\left[\sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q \sum_{k=-q}^q a_i V_i a_j V_j a_k V_k\right] = \sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q \sum_{k=-q}^q E[a_i V_i a_j V_j a_k V_k] = \\ &= \sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q \sum_{k=-q}^q a_i a_j a_k E[V_i V_j V_k] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Στο τελευταίο άθροισμα ισχύει

Αν $i = j = k$ τότε

$$E[V_i V_j V_k] = E[(V_i)^3] = \mu_V^{(3)} \quad (3.15)$$

αλλιώς

$$E[V_i V_j V_k] = 0 \quad (3.16)$$

Άρα οι περισσότεροι όροι μηδενίζονται και το άθροισμα εκφυλίζεται στο

$$\mu_X^{(3)} = \sum_{i=-q}^q (a_i^3 \cdot \mu_V^{(3)}) = \left(\sum_{i=-q}^q a_i^3\right) \cdot \mu_V^{(3)} = (a_0^3 + 2 \sum_{i=1}^q a_i^3) \cdot \mu_V^{(3)} \quad (3.17)$$

και αφού

$$\sigma_V = 1$$

ισχύει ότι

$$\mu_V^{(3)} = \zeta_V \quad (3.18)$$

άρα καταλήγουμε στο

$$\zeta_X \gamma_0^{3/2} = (a_0^3 + 2 \sum_{j=1}^q a_j^3) \cdot \zeta_V \quad (3.19)$$

Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα του σχήματος SMA είναι το γεγονός ότι τα βάρη a_j μπορούν να υπολογιστούν μέσω μίας κλειστής αναλυτικής σχέσης που περιλαμβάνει τους αντιστροφους μετασχηματισμούς Fourier της ακολουθίας των βαρών (Φάσμα Βαρών) και της συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς της ανέλιξης X_i (Φάσμα Ισχύος):

Το φάσμα ισχύος της ανέλιξης είναι σύμφωνα με τη σχέση (2.35)

$$s_\gamma(\omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{2i\pi j\omega} \quad (3.20)$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ η φανταστική μονάδα

Αντικαθιστώντας το γ_j από τη σχέση (3.2) έχουμε

$$s_\gamma(\omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l a_{l+j} e^{2i\pi j\omega} = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{l+j} e^{2i\pi j\omega} =$$

Θέτοντας $n = j+l$ προκύπτει

$$= 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2i\pi(n-l)\omega} = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{-2i\pi l\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2i\pi n\omega} \quad (3.21)$$

και καταλήγουμε στη σχέση

$$s_\gamma(\omega) = 2 \frac{s_a^*(\omega)}{2} \frac{s_a(\omega)}{2} = \frac{s_a^*(\omega) s_a(\omega)}{2} \quad (3.22)$$

όπου $s_a^*(\omega)$ ο συζυγής του $s_a(\omega)$

Δεδομένου όμως ότι η ακολουθία a_j είναι άρτια τα φανταστικά μέρη των όρων του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier μηδενίζονται.

Άρα
$$s_a^*(\omega) = s_a(\omega) \quad (3.23)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι:

$$s_\gamma(\omega) = \frac{[s_a(\omega)]^2}{2} \quad \text{ή} \quad s_a(\omega) = \sqrt{2s_\gamma(\omega)} \quad (3.24)$$

απ' όπου μπορεί να υπολογιστεί το $s_a(\omega)$ και στη συνέχεια με βάση το μετασχηματισμό Fourier του s_a υπολογίζεται η ακολουθία των a_j , ήτοι

$$a_j = \int_0^{1/2} s_a(\omega) \cos(2\pi j\omega) \quad (3.25)$$

Με τη βοήθεια λοιπόν των σχέσεων (3.24) και (3.25) μπορούμε να παράγουμε ανελίξεις με οποιαδήποτε συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς, αν και στις περισσότερες περιπτώσεις οι υπολογισμοί γίνονται μόνο αριθμητικά. Επίσης επιλέγοντας κατάλληλα το θόρυβο V_i σύμφωνα με τη σχέση (3.19) μπορούμε να διατηρήσουμε και την ασυμμετρία.

3.2 Η χρήση του SMA για τη γέννηση ανελίξεων FGN

Έχει αναπτυχθεί από τον Koutsoyiannis (2002) μία απλή μεθοδολογία για τη γέννηση ανελίξεων FGN με τη βοήθεια του σχήματος SMA.

Η σχέση (3.24) γίνεται με τη βοήθεια της σχέσης (2.42)

$$s_a(\omega) \approx 2\sqrt{(2-2H)\gamma_0} (2\omega)^{0.5-H} \quad (3.26)$$

Ας γράψουμε την τελευταία εξίσωση ως εξής

$$s_a(\omega) = 4(1-H')a_0(2\omega)^{1-2H'} \quad (3.27)$$

που για να ισχύει πρέπει να είναι

$$0.5-H = 1-2H' \quad \text{ή} \quad H' = \frac{H+0.5}{2} \quad (3.28)$$

και

$$4(1-H')a_0 = 2\sqrt{(2-2H)\gamma_0} \quad \text{ή} \quad a_0 = \frac{\sqrt{(2-2H)\gamma_0}}{1.5-H} \quad (3.29)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (3.27) με τη σχέση (2.42) παρατηρούμε ότι το $s_a(\omega)$ είναι ίσο με το φάσμα ισχύος κάποιας άλλης ανέλιξης FGN με συντελεστή Hurst H' και διασπορά a_0 . Επομένως με βάση τις σχέσεις (2.39) και (2.40) η ακολουθία των βαρών (συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς της ανέλιξης FGN) θα έχει την εξής μορφή

$$a_j = \frac{a_0}{2} [(j+1)^{2H'} + (j-1)^{2H'} - 2j^{2H'}] = \frac{a_0}{2} [(j+1)^{H+0.5} + (j-1)^{H+0.5} - 2j^{H+0.5}] \quad (3.30)$$

ή προσεγγιστικά

$$a_j = H'(2H'-1)j^{2H'-2} \quad (3.31)$$

δηλαδή συνάρτηση δύναμης της υστέρησης με εκθέτη

$$b' = 2H'-2. \quad (3.32)$$

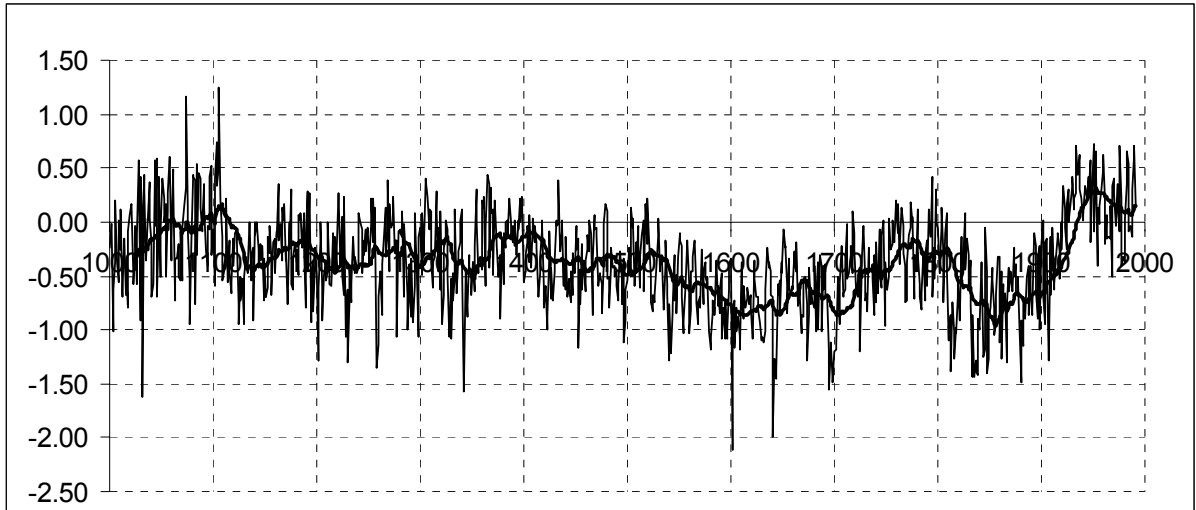
Η εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας είναι πολύ εύκολη και μπορεί να γίνει χωρίς τη χρήση κάποιου εξειδικευμένου λογισμικού. Αρκεί η βοήθεια ενός προγράμματος λογιστικού φύλλου (spreadsheet). Παρακάτω ακολουθεί μία απλή εφαρμογή της μεθόδου.

3.3 Εφαρμογή: Γέννηση ανέλιξης FGN με τη χρήση του SMA

Στην εφαρμογή αυτή θα επιχειρηθεί να προσομοιωθεί η χρονοσειρά της μέσης ετήσιας θερμοκρασίας του Βορείου Ημισφαιρίου για την περίοδο από το 1000 μΧ μέχρι το 1991 μΧ, όπως εκτιμήθηκε από τους Jones *et al.* (1998).

Οι Jones *et al.* χρησιμοποιώντας μία σειρά δεδομένων και αντίστοιχων μεθόδων, όπως πάχη των ετήσιων δακτυλίων των δέντρων, σύσταση φυσαλίδων αέρα παγιδευμένων σε πυρήνες πάγου, ανάπτυξη των κοραλιών, ιστορικά δεδομένα κλπ, εκτίμησαν την απόκλιση της μέσης ετήσιας θερμοκρασίας του Β. Ημισφαιρίου από ένα «κανονικό» επίπεδο αναφοράς, που επέλεξαν να είναι η μέση θερμοκρασία της περιόδου 1901-1950.

Με βάση λοιπόν τη μεθοδολογία τους κατέληξαν σε μία χρονοσειρά, τμήμα των δεδομένων της οποίας φαίνεται στον Πίνακα Α.1 και η οποία παρίσταται γραφικά στο Σχήμα 3.1, με την έντονη γραμμή να απεικονίζει τον κυλιόμενο μέσο όρο των 25 έτων.



Σχήμα 3.1: Χρονοσειρά μέσης ετήσιας θερμοκρασίας του Β Ημισφαιρίου

Η χρονοσειρά των θερμοκρασιών (η οποία θα συμβολίζεται με T_i) έχει τα εξής στατιστικά χαρακτηριστικά:

$$\mu_T = -0.37$$

$$\sigma^2_T = 0.19$$

$$\sigma_T = 0.44$$

$$\xi_T = -0.09$$

Για μεγαλύτερη ευκολία στην επεξεργασία και την αναπαραγωγή της χρονοσειράς T_i την τυποποιούμε. Αφαιρούμε δηλαδή από κάθε t_i τη μέση τιμή και στη συνέχεια διαιρούμε με την τυπική απόκλιση. Έτσι προκύπτει μία χρονοσειρά με μέση τιμή $\mu = 0$, τυπική απόκλιση $\sigma = 1$ και ασυμμετρία όσο η αρχική. Την τυποποιημένη χρονοσειρά την καλούμε T_{si} . Από την επεξεργασία προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα.

Με τη βοήθεια της σχέσης (2.27) συναθροίζουμε τη φυσική χρονοσειρά σε διάφορες κλίμακες και υπολογίζουμε τη σχέση μεταξύ κλίμακας συνάθροισης και τυπικής αποκλισης σε κάθε κλίμακα. Αυτή η σχέση φαίνεται και στο σχήμα 3.2. Με τη βοήθεια δε αυτού του σχήματος και της σχέσης (2.38) προκύπτει ότι ο συντελεστής Hurst είναι

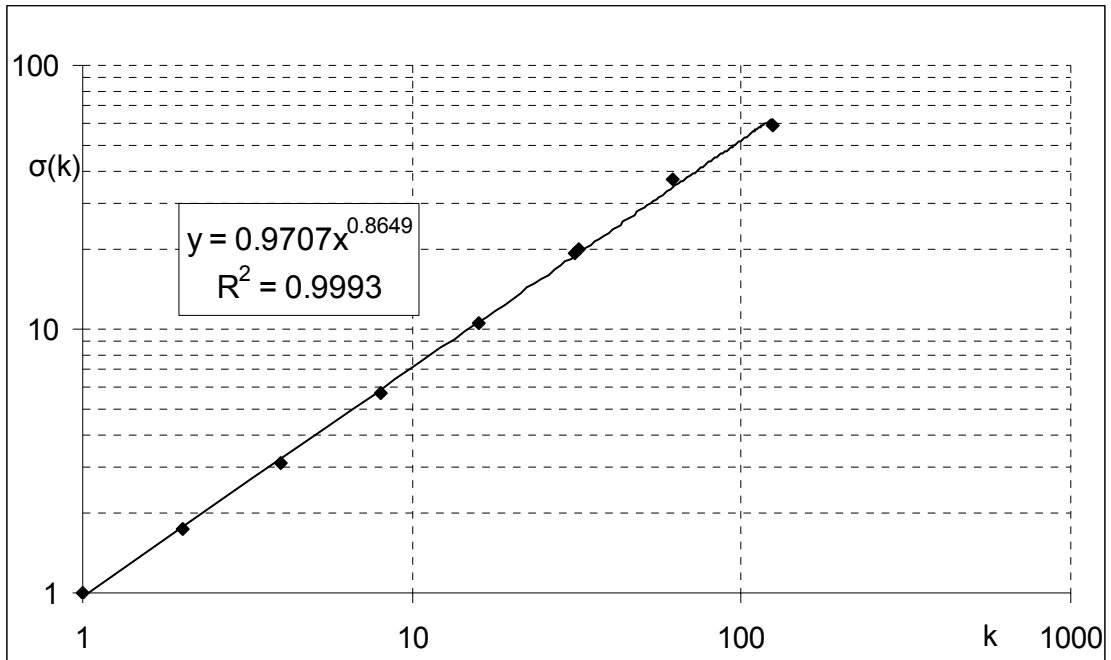
$$H = 0.86 \quad (3.33)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (2.41) υπολογίζουμε ότι για τέτοιο συντελεστή Hurst η αυτοσυσχέτιση είναι συνάρτηση δύναμης της υστέρησης με εκθέτη $-b$ με

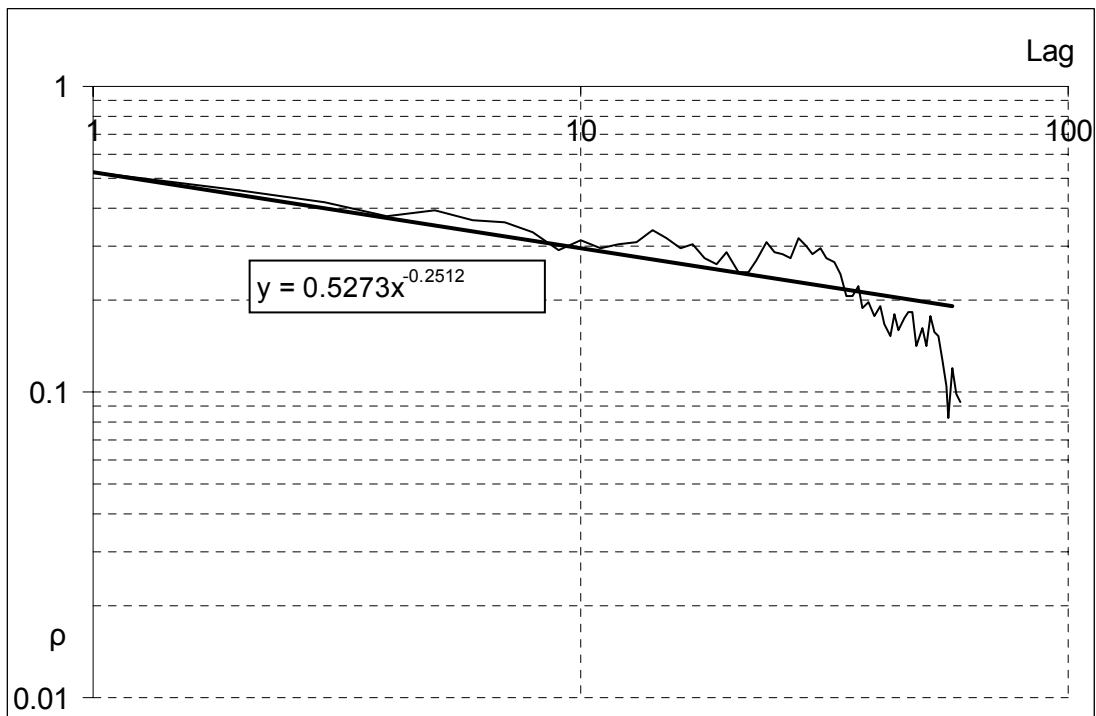
$$b = 0.28 \quad (3.34)$$

Στο σχήμα 3.3, όπου απεικονίζεται σε διπλή λογαριθμική κλίμακα το αυτοσυσχετόγραμμα της φυσικής χρονοσειράς, φαίνεται ότι ο εκθέτης b είναι 0.25, πολύ

κοντά δηλαδή σε αυτόν που υπολογίστηκε θεωρητικά. Επίσης φαίνεται η διατήρηση σημαντικής αυτοσυσχέτισης ακόμη και για υστέρηση 60.



Σχήμα 3.2: Σχέση Κλίμακας Συνάθροισης (k) – Τυπικής Απόκλισης (σ) (φυσική χρονοσειρά)



Σχήμα 3.3: Αυτοσυσχετόγραμμα της Tsi

Απ' όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η χρονοσειρά των μέσων ετήσιων θερμοκρασιών μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε ένα μοντέλο FGN. Θα επιχειρηθεί λοιπόν η προσομοίωσή της με τη βοήθεια του σχήματος SMA.

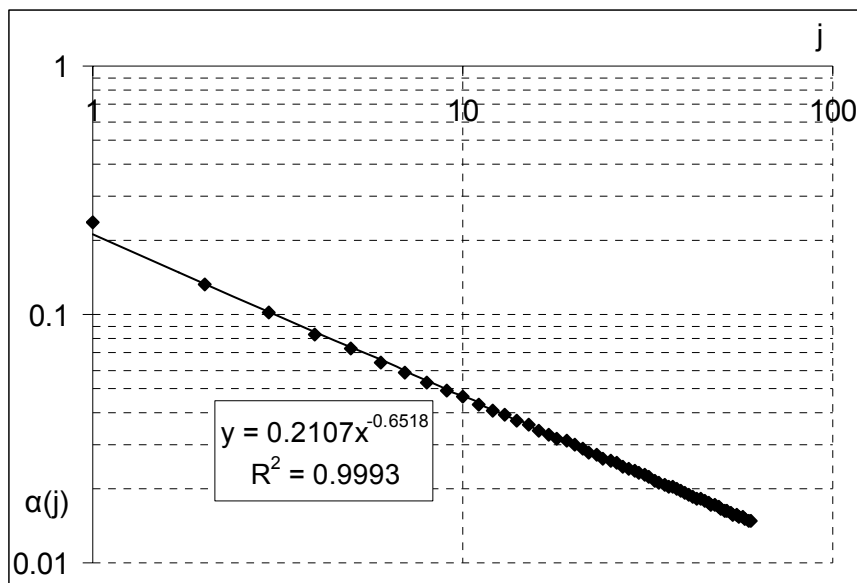
Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.10) (3.19) (3.28) (3.29) (3.30) και καταλήγουμε στα εξής:

$$H' = 0.68$$

$$b' = 0.64$$

$$a_0 = 0.83$$

Θα χρησιμοποιηθούν οι πρώτοι 61 όροι της ακολουθίας των συντελεστών βάρους, δηλαδή μέχρι και τον όρο a_{60} . Η ακολουθία φαίνεται στον Πίνακα Α.2 ενώ παρίσταται γραφικά στο Σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Ακολουθία Συντελεστών Βάρους

Φαίνεται ότι τα βάρη προσεγγίζονται από μία συνάρτηση δύναμης της υστέρησης με εκθέτη -0.65 που απέχει ελάχιστα από το -0.64 που υπολογίστηκε.

Επίσης υπολογίζουμε:

$$\mu_V = 0$$

$$\sigma_V^2 = 1$$

$$\sigma_V = 1$$

$$\zeta_V = -0.15$$

Επιλέγουμε ο λευκός θόρυβος V να ακολουθεί κατανομή γάμα 3 παραμέτρων (Pearson III) που είναι ασύμμετρη. Σύμφωνα με τον Κουτσογιάννη (1996) οι παράμετροι της κατανομής υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\kappa = \frac{4}{\xi_V^2} \quad (3.35)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sigma_V} \quad (3.36)$$

$$c = \mu_V - \frac{\kappa}{\lambda} \quad (3.37)$$

όπου κ η παράμετρος σχήματος, λ η παράμετρος κλίμακας και c η παράμετρος θέσης.

Στην προκειμένη περίπτωση είναι

$$\kappa = 184.6$$

$$\lambda = 13.59$$

$$c = -13.59$$

Ο λευκός θόρυβος V παράγεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο γέννησης τυχαίων αριθμών της κατανομής γάμμα 3 παραμέτρων που παρουσιάζεται στο Παράρτημα Γ.

Επειδή η κατανομή γάμμα 3 παραμέτρων είναι θετικά ασύμμετρη ενώ ο λευκός θόρυβος V πρέπει να είναι αρνητικά ασύμμετρος μετασχηματίζουμε το V που υπολογίζεται να ακολουθεί τη γάμμα σε V' σύμφωνα με το μετασχηματισμό

$$v' = \mu_V - (v - \mu_V) \quad (3.38)$$

οπότε προκύπτει θόρυβος με ασυμμετρία αντίθετη από αυτή του αρχικού θορύβου.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στη σχέση (3.1) τα βάρη που υπολογίστηκαν και το θόρυβο V' όποτε καταλήγουμε στη συνθετική χρονοσειρά X_i .

Έπειτα από στατιστική επεξεργασία της χρονοσειράς X_i καταλήγουμε στα

$$\mu_X = 0$$

$$\sigma_X^2 = 1.02$$

$$\sigma_X = 1.01$$

$$\xi_X = -0.13$$

Από το Σχήμα 3.5 προκύπτει ότι ο συντελεστής H της συνθετικής χρονοσειράς είναι $H = 0.86$

Με τη βοήθεια της σχέσης (2.40) μπορούμε να υπολογίσουμε θεωρητικά το αυτοσυσχετόγραμμα της X_i αν είναι γνωστός ο συντελεστής H .

Υπενθυμίζουμε τη σχέση (2.40)

$$\rho_j = H(2H-1)j^{2H-2}$$

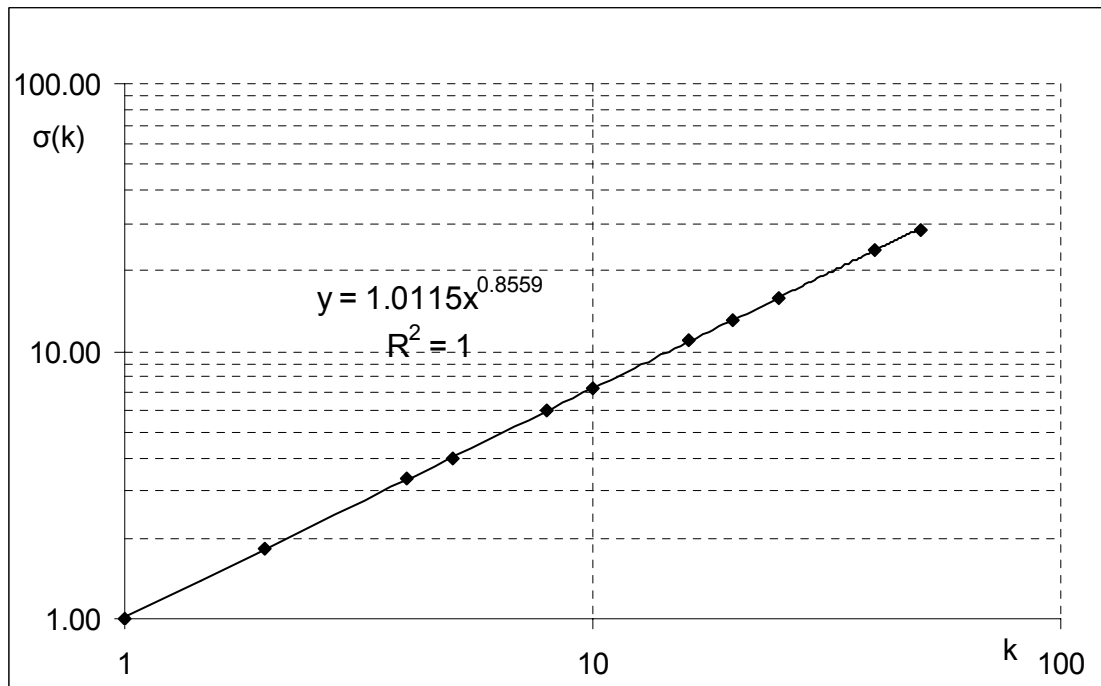
Η σχέση αυτή παρίσταται γραφικά στο Σχήμα 3.6 και συγκρίνεται με το αυτοσυσχετόγραμμα της συνθετικής χρονοσειράς. Όπως φαίνεται, τα δύο αυτοσυσχετογράμματα σχεδόν

ταυτίζονται για υστέρηση μέχρι 25. Επίσης στον Πίνακα Α.3 φαίνονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών της σχέσης (2.40) και η αυτοσυσχέτιση της συνθετικής χρονοσειράς για υστέρηση μέχρι 60. Ο συντελεστής συσχέτισης των δύο αυτοσυσχετογραμμάτων προκύπτει

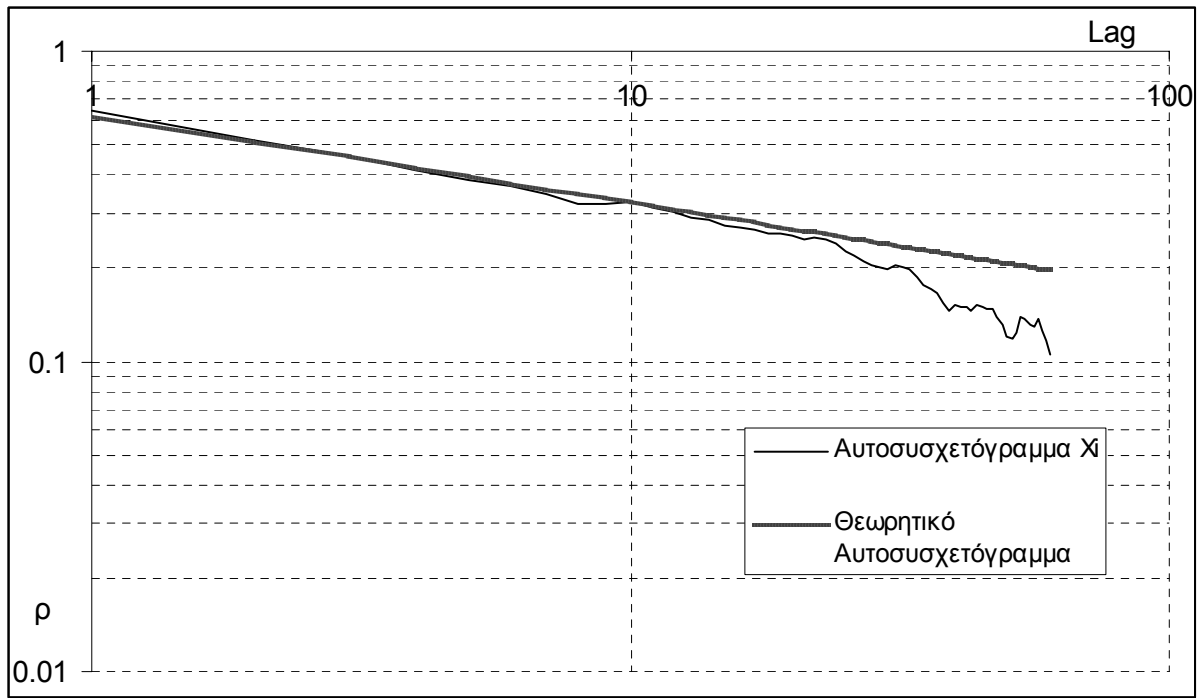
$$\text{υπολογίζεται από τη σχέση } \rho_{X,Y} = \frac{E[X \cdot Y] - \mu_X \mu_Y}{\sqrt{E[(X - \mu_X)^2]E[(Y - \mu_Y)^2]}} \quad (3.39)$$

$$\rho_{\theta,\sigma} = 0.987$$

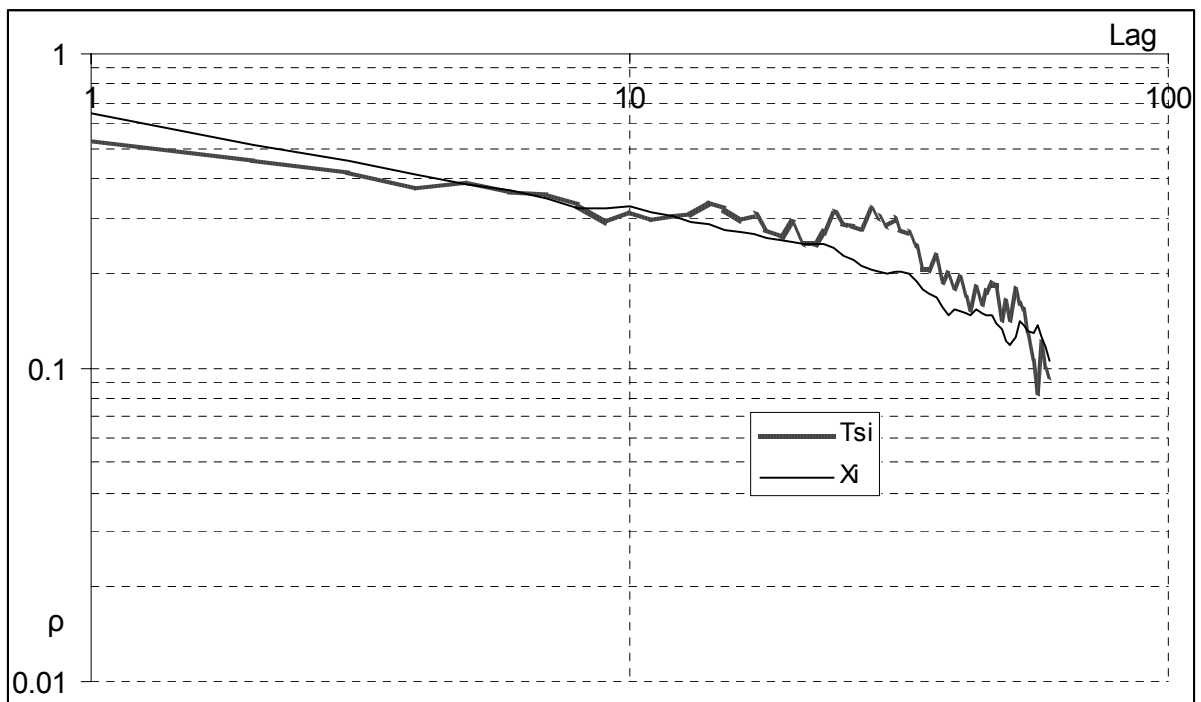
Από το Σχήμα 3.7 φαίνεται ότι το αυτοσυσχετόγραμμα της συνθετικής χρονοσειράς είναι πολύ κοντά σε αυτό της φυσικής.



Σχήμα 3.5: Σχέση Κλίμακας Συνάθροισης (k) – Τυπικής Απόκλισης (σ) (συνθετική χρονοσειρά)



Σχήμα 3.6: Σύγκριση θεωρητικού και συνθετικού αυτοσυσχετογράμματος



Σχήμα 3.7: Σύγκριση αυτοσυσχετογράμματος των Tsi και χ_i

Με βάση όλα τα παραπάνω παρατηρούμε ότι ο συντελεστής H , η συνάρτηση αυτοσυσχετίσης, η μέση τιμή, η διασπορά και ο συντελεστής ασυμμετρίας προσομοιώνονται με μεγάλη επιτυχία. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το σχήμα SMA μπορεί να προσομοιώσει με μεγάλη αξιοπιστία μία ανέλιξη FGN. Να σημειωθεί ότι όλοι οι υπολογισμοί

έγιναν με τη χρήση προγράμματος spreadsheet με μεγάλη ταχύτητα και χωρίς να απαιτείται ιδιαίτερη υπολογιστική ισχύς. Χαρακτηριστικοί πίνακες που προέκυψαν κατά τους υπολογισμούς βρίσκονται στο ΠαράρτημαΑ στους πίνακες Α.1, Α.2 και Α.3.

Κεφάλαιο 4

Η περίπτωση των 2 διαστάσεων – Θεωρητική επεξεργασία

Στην συνέχεια επεκτείνουμε την μεθοδολογία του Κεφαλαίου 2 με στόχο την αναπαράγωγή ανεξίτητων FGN σε δύο διαστάσεις.

4.1 Παραδοχές – Δομή μοντέλου

Το πεδίο το οποίο θα παράγουμε είναι βαθμωτό σε δύο διαστάσεις και περιγράφεται από την τυχαία συνάρτηση $Z(x,y): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ όπου \mathbf{R} το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η Z παράγεται από ένα σχήμα SMA σε δύο διαστάσεις. Συγκεκριμένα:

Για συνεχή χώρο ισχύει

$$Z(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(u,v) \cdot V(x-u,y-v) du dv \quad (4.1)$$

ενώ για διακριτό χώρο και πεπερασμένο αριθμό q βαρών $a(m,n)$ ισχύει

$$Z(i,j) = \sum_{m=-q}^q \sum_{n=-q}^q a(m,n) \cdot V(i-m,j-n) \quad (4.2)$$

Όπου στη σχέση (4.1) οι συντεταγμένες (x,y) αναφέρονται στο σημείο (x,y) ενώ στη σχέση (4.2) οι συντεταγμένες (i,j) αναφέρονται στο στοιχείο (i,j) .

Η συνάρτηση V είναι λευκός θόρυβος με $E[V] = 0$ και $Var[V] = 1$

Θεωρητικά το q στη σχέση (4.2) είναι άπειρο, αλλά επειδή για μεγάλα n και m τα βάρη $a(n,m)$ είναι πολύ μικρά μπορούμε να τα παραλείψουμε θεωρώντας τα μηδενικά και έτσι το μέγιστο q να είναι πεπερασμένο.

Το πεδίο Z θεωρείται ομογενές και ισότροπο και μπορεί να δίδεται συναρτήση της απόστασης r από την αρχή των αξόνων, δηλαδή $Z(r)$, με $r = \sqrt{x^2+y^2}$ και σε διακριτό χώρο $Z(s)$, με $s = \sqrt{i^2+j^2}$.

Επίσης θεωρούμε ότι

$$\mu_Z = E[Z] = 0 \quad (4.3)$$

4.2 Σχέση Φάσματος Ισχύος – Φάσματος Συντελεστών Βάρους

Πρώτα πρέπει να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς του πεδίου Z . Προκειμένου να γίνουν πιο εύκολα οι υπολογισμοί θα θεωρήσουμε το πεδίο συνεχές.

Για κάποιο σημείο $\Sigma_1(x,y)$ θα ισχύει:

$$Z(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(u_1, v_1) \cdot V(x-u_1, y-v_1) du_1 dv_1 \quad (4.4)$$

Ενώ για κάποιο άλλο σημείο $\Sigma_2(x+\eta, y+\xi)$, που απέχει απόσταση $\sqrt{\eta^2 + \xi^2}$ από το Σ_1 , ισχύει:

$$Z(x+\eta, y+\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(u_2, v_2) \cdot V(x+\eta-u_2, y+\xi-v_2) du_2 dv_2 \quad (4.5)$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς ως

$$\begin{aligned} \gamma(\eta, \xi) &= \text{Cov}[Z(x,y), Z(x+\eta, y+\xi)] = E[Z(x,y) \cdot Z(x+\eta, y+\xi)] = \\ &= E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(u_1, v_1) \cdot V(x-u_1, y-v_1) du_1 dv_1\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(u_2, v_2) \cdot V(x+\eta-u_2, y+\xi-v_2) du_2 dv_2\right)\right] = \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(u_1, v_1) \cdot a(u_2, v_2) \cdot V(x-u_1, y-v_1) \cdot V(x+\eta-u_2, y+\xi-v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[V(x-u_1, y-v_1) \cdot V(x+\eta-u_2, y+\xi-v_2)] \cdot a(u_1, v_1) \cdot a(u_2, v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Cov}[V(x-u_1, y-v_1) \cdot V(x+\eta-u_2, y+\xi-v_2)] \cdot a(u_1, v_1) \cdot a(u_2, v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2 \quad (4.6) \end{aligned}$$

Επειδή όμως η ανέλιξη V είναι λευκός θόρυβος ισχύει

$$\text{Cov}[V(x,y), V(x',y')] = 0 \quad \text{για } x \neq x' \quad \text{ή } y \neq y' \quad (4.7)$$

και

$$\text{Cov}[V(x,y), V(x',y')] = I \quad \text{για } x = x' \quad \text{και } y = y' \quad (4.8)$$

άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\text{Cov}[V(x,y), V(x',y')] = \delta(x'-x) \cdot \delta(y'-y) \quad (4.9)$$

όπου δ είναι η συνάρτηση Dirac με ιδιότητες

$$\begin{cases} \delta(x) = 1 & \text{για } x = 0 \\ \delta(x) = 0 & \text{για } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (4.10)$$

Έχουμε

$$\gamma(\eta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u_1 + \eta - u_2) \cdot \delta(v_1 + \xi - v_2) \cdot a(u_1, v_1) \cdot a(u_2, v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2 \quad (4.11)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τιμές των u_2, v_2 για τις οποίες

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + \eta \\ v_2 = v_1 + \xi \end{cases} \quad (4.12)$$

Σε αυτές τις τιμές το τετραπλό ολοκλήρωμα εκφυλίζεται σε διπλό, ενώ σε όλες τις άλλες το τετραπλό ολοκλήρωμα μηδενίζεται.

Έτσι

$$\begin{aligned} \gamma(\eta, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u_1 + \eta - u_2) \cdot \delta(v_1 + \xi - v_2) \cdot a(u_1, v_1) \cdot a(u_2, v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(u_1, v_1) \cdot a(u_1 + \eta, v_1 + \xi) du_1 dv_1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

οπότε

$$\gamma(\eta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(u, v) \cdot a(u + \eta, v + \xi) du dv \quad (4.14)$$

και κατά συνέπεια και

$$\gamma_0 = \sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q (a(i, j))^2 \quad (4.15)$$

για

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ \xi = 0 \end{cases}$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το φάσμα ισχύος της ανελίξεως Z :

$$\begin{aligned}
s_\gamma(\varphi, \omega) &= \mathbf{F}^{-1}(\gamma(\eta, \zeta)) = \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \gamma(\eta, \zeta) \cdot e^{i2\pi(\eta\varphi + \zeta\omega)} d\eta d\zeta = \\
&= \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \left[\int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} a(u, v) \cdot a(u+\eta, v+\zeta) dudv \right] \cdot e^{i2\pi(\eta\varphi + \zeta\omega)} d\eta d\zeta = \\
&= \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} a(u, v) \cdot a(u+\eta, v+\zeta) \cdot e^{i2\pi(\eta\varphi + \zeta\omega)} dudvd\eta d\zeta = \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} a(u, v) \left[\int_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} a(u+\eta, v+\zeta) \cdot e^{i2\pi(\eta\varphi + \zeta\omega)} d\eta d\zeta \right] dudv \tag{4.16}
\end{aligned}$$

υιοθετούμε το μετασχηματισμό

$$\begin{cases} u + \eta = z \\ v + \zeta = w \end{cases} \tag{4.17}$$

με Ιακωβιανή ορίζουσα ίση με τη μονάδα.

Έτσι το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned}
&\int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} a(u, v) \left[\int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{w=-\infty}^{\infty} a(z, w) \cdot e^{i2\pi(z\varphi - u\varphi + w\omega - v\omega)} dzdw \right] dudv = \\
&= \left[\int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} a(u, v) \cdot e^{-i2\pi(u\varphi + v\omega)} dudv \right] \left[\int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} a(u, v) \cdot e^{i2\pi(z\varphi + w\omega)} dzd \right] = \\
&= s_a^*(\varphi, \omega) \cdot s_a(\varphi, \omega) \tag{4.18}
\end{aligned}$$

όπου $s_a^*(\varphi, \omega)$ ο συζυγής μιγαδικός του $s_a(\varphi, \omega)$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση των βαρών είναι άρτια, το φάσμα ισχύος της είναι πραγματική συνάρτηση. Έτσι

$$s_a^*(\varphi, \omega) = s_a(\varphi, \omega) \tag{4.19}$$

Και ως εκ τούτου

$$s_\gamma(\varphi, \omega) = [s_a(\varphi, \omega)]^2 \quad \text{ή} \quad s_a(\varphi, \omega) = \sqrt{s_\gamma(\varphi, \omega)} \tag{4.20}$$

Από τη σχέση (4.20), αν είναι γνωστή η συνάρτηση $\gamma(x, y)$ μπορεί να υπολογιστεί και η συνάρτηση $a(x, y)$ (την οποία παραπάνω έχουμε συμβολίσει με $a(u, v)$).

4.3 Φάσμα Ισχύος

Όπως ειπώθηκε παραπάνω, το πεδίο είναι ισότροπο. Κατά συνέπεια αρκεί να εκφράσουμε τη συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς ως προς την απόσταση r δύο σημείων και όχι κατ' ανάγκην ως προς τη διαφορά των συντεταγμένων τους. Για συνεχές πεδίο FGN η αυτοσυνδιασπορά μπορεί να εκφραστεί (όπως και στην περίπτωση της μίας διάστασης) ως συνάρτηση δύναμης της απόστασης r , δηλαδή

$$\gamma(r) = A \cdot r^{-b} \quad (4.21)$$

όπου A και b συντελεστές που εξαρτώνται από το συντελεστή Hurst. Ειδικότερα ο συντελεστής b συνδέεται με τον εκθέτη H του Hurst με τη σχέση

$$b = 4(1-H) \Leftrightarrow H = 1 - \frac{b}{4} \quad (4.22)$$

Παρατηρούμε ότι ο εκθέτης στην περίπτωση των δύο διαστάσεων είναι ο διπλάσιος από αυτόν της περίπτωσης της μίας διάστασης. Ο συντελεστής A θα συζητηθεί πιο κάτω.

Δεδομένου ότι το πεδίο είναι ισότροπο έχει και κυκλική συμμετρία. Οπότε το φάσμα θα το υπολογίσουμε με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Hankel (βλ. Κεφ 2).

$$s_\gamma(q) = 2\pi \int_0^\infty \gamma(r) J_0(2\pi qr) r dr = 2\pi \int_0^\infty r^{1-b} J_0(2\pi qr) dr \quad (4.23)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι με J_0 συμβολίζουμε τη συνάρτηση Bessel. Η παραπάνω ολοκλήρωση γίνεται με τη βοήθεια προγράμματος μαθηματικών και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$s_\gamma(q) = A \pi^{b-1} \frac{\Gamma(1-b/2)}{\Gamma(b/2)} q^{b-2} \quad (4.24)$$

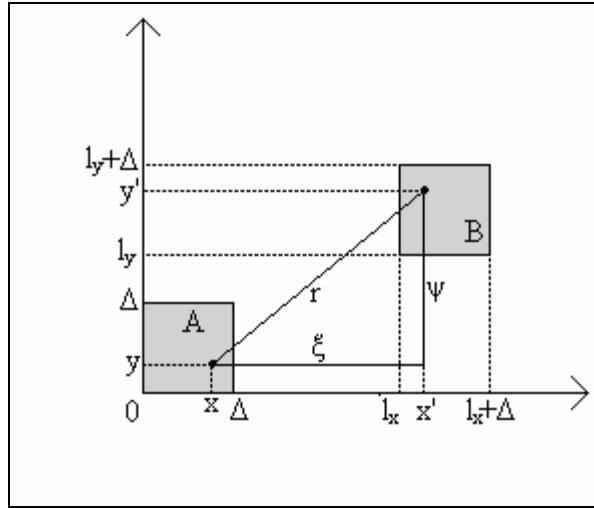
όπου $\Gamma(x)$ η συνάρτηση Γάμα, η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (4.25)$$

4.4 Συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς σε διακριτό πεδίο (Διακριτοποίηση της σχέσης (4.21))

Ξεκινώντας από την σχέση (4.21), μπορεί να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς σε διακριτό πεδίο. Αυτό μπορεί να γίνει με ολοκλήρωση της (4.21).

Έστω δύο σημεία (x, y) και (x', y') σε συνεχή χώρο, όπως στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Διακριτοποίηση της (4.21)

Τα δύο αυτά σημεία απέχουν απόσταση

$$r = \sqrt{\xi^2 + \psi^2} \quad \text{όπου} \quad \begin{cases} \xi = x - x' \\ \psi = y - y' \end{cases} \quad (4.26)$$

Το σημείο (x, y) ανήκει στο στοιχείο A και το σημείο (x', y') στο στοιχείο B. Τα A και B απέχουν κατά $\sqrt{l_x^2 + l_y^2}$ όπου $\begin{cases} l_x = k_x \Delta \\ l_y = k_y \Delta \end{cases}$ η υστέρηση στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα

Η αυτοσυνδιασπορά, $\gamma(l_x, l_y)$, των δύο στοιχείων A και B είναι το ολοκλήρωμα της σχέσης (4.21) πάνω στα στοιχεία A και B. Συγκεκριμένα ισχύει

$$\begin{aligned} \gamma(k_x, k_y) &= I = \int_{x=0}^{\Delta} \int_{y=0}^{\Delta} \int_{x'=lx}^{lx+\Delta} \int_{y'=ly}^{ly+\Delta} f(r^2) dx dy dx' dy' = \\ &= \int_{x=0}^{\Delta} \int_{y=0}^{\Delta} \int_{x'=kx\Delta}^{(kx+1)\Delta} \int_{y'=ky\Delta}^{(ky+1)\Delta} f((x-x')^2 + (y-y')^2) dx dy dx' dy' \end{aligned} \quad (4.27)$$

όπου $f(r^2)$ τέτοια ώστε

$$f(r^2) = \gamma(r) \quad (4.28)$$

Πραγματοποιούμε αλλαγή μεταβλητών σύμφωνα με το μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ \xi = x - x' \\ \psi = y - y' \end{cases} \quad (4.29)$$

με Ιακωβιανή ορίζουσα

$$|J| = \begin{vmatrix} x_x & x_y & x_\xi & x_\psi \\ y_x & y_y & y_\xi & y_\psi \\ x'_x & x'_y & x'_\xi & x'_\psi \\ y'_x & y'_y & y'_\xi & y'_\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Προκειμένου να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης στο μετασχηματισμένο χώρο κάνουμε τους παρακάτω συλλογισμούς:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \Delta \\ l_x \leq x' \leq l_x + \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \Delta \\ k_x \Delta \leq x' \leq (k_x + 1)\Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \Delta \\ k_x \Delta \leq x - \xi \leq (k_x + 1)\Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \Delta \\ -(k_x + 1)\Delta \leq \xi - x \leq -k_x \Delta \end{cases} \quad (4.30)$$

προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \Delta \\ -(k_x + 1)\Delta \leq \xi \leq -(k_x - 1)\Delta \end{cases} \quad (4.31)$$

Μελετούμε δύο περιπτώσεις:

i) $-(k_x + 1)\Delta \leq \xi \leq -k_x \Delta$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2, παριστούμε γραφικά τη συνάρτηση

$$\xi = x - x' \quad (4.32)$$

σε άξονες x και x' .

Για τα x και x' ισχύει

$$x \in [0, \Delta] \quad (4.33)$$

και

$$x \in [k_x \Delta, (k_x + 1)\Delta] \quad (4.34)$$

Για να ανήκει το ξ στο διάστημα

$$[-(k_x + 1)\Delta, -k_x \Delta]$$

θα πρέπει τα σημεία (x, x') να ανήκουν στο γραμμοσκιασμένο χωρίο.

Επίσης θα πρέπει να είναι

$$x + k_x \Delta \leq x' \quad (4.35)$$

Από το σχήμα 4.2 προκύπτει ότι για να είναι

$$\xi = -k_x \Delta - \alpha \Leftrightarrow \alpha = -k_x \Delta - \xi \quad (4.36)$$

με

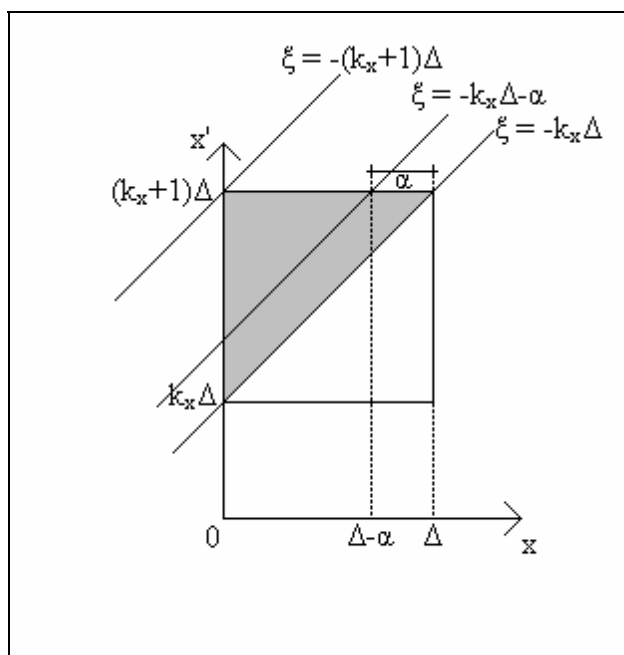
$$0 \leq \alpha \leq \Delta \quad (4.37)$$

πρέπει

$$0 \leq x \leq \Delta - \alpha \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \Delta + k_x \Delta + \xi \Leftrightarrow 0 \leq x \leq (k_x + 1)\Delta + \xi \quad (4.38)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι

$$-(k_x + 1)\Delta \leq \xi \leq -k_x \Delta \Leftrightarrow 0 \leq x \leq (k_x + 1)\Delta + \xi \quad (4.39)$$



Σχήμα 4.2: $-(k_x+1)\Delta \leq \xi \leq -k_x\Delta$

ii) $-k_x\Delta \leq \xi \leq -(k_x-1)\Delta$

Κάνοντας παρόμοιους συλλογισμούς και με τη βοήθεια του σχήματος 4.3 έχουμε:

Για να είναι

$$\xi = -k_x\Delta + \beta \Leftrightarrow \beta = k_x\Delta + \xi \quad (4.40)$$

με

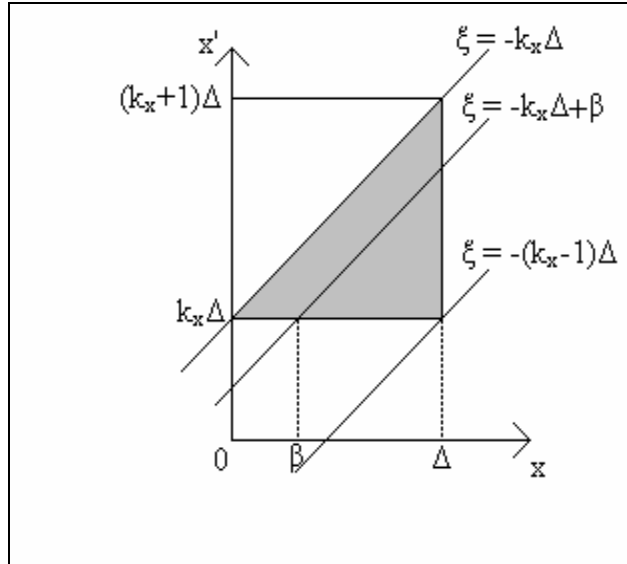
$$0 \leq \beta \leq \Delta \quad (4.41)$$

πρέπει

$$\beta \leq x \leq \Delta \Leftrightarrow k_x\Delta + \xi \leq x \leq \Delta \quad (4.42)$$

Άρα

$$-k_x\Delta \leq \xi \leq -(k_x-1)\Delta \Leftrightarrow k_x\Delta + \xi \leq x \leq \Delta \quad (4.43)$$

Σχήμα 4.3: $-k_x \Delta \leq \xi \leq -(k_x-1)\Delta$

Ομοίως έχουμε

$$\begin{cases} -(k_y+1)\Delta \leq \psi \leq -k_y\Delta & \Leftrightarrow 0 \leq y \leq (k_y+1)\Delta + \psi \\ -k_y\Delta \leq \psi \leq -(k_y-1)\Delta & \Leftrightarrow k_y\Delta + \psi \leq y \leq \Delta \end{cases} \quad (4.44)$$

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν τα όρια ολοκλήρωσης μετά την αλλαγή μεταβλητών.

Καταλήγουμε λοιπόν στις 4 περιπτώσεις που φαίνονται στον Πίνακα 4.1:

Πίνακας 4.1: Οι 4 περιπτώσεις ολοκλήρωσης

	$-(k_x+1)\Delta \leq \xi \leq -k_x\Delta$	$-k_x\Delta \leq \xi \leq -(k_x-1)\Delta$
$-(k_y+1)\Delta \leq \psi \leq -k_y\Delta$	$0 \leq x \leq (k_x+1)\Delta + \xi$ $0 \leq y \leq (k_y+1)\Delta + \psi$ (1)	$k_x\Delta + \xi \leq x \leq \Delta$ $0 \leq y \leq (k_y+1)\Delta + \psi$ (2)
$-k_y\Delta \leq \psi \leq -(k_y-1)\Delta$	$0 \leq x \leq (k_x+1)\Delta + \xi$ $k_y\Delta + \psi \leq y \leq \Delta$ (3)	$k_x\Delta + \xi \leq x \leq \Delta$ $k_y\Delta + \psi \leq y \leq \Delta$ (4)

Στη συνέχεια διασπούμε το ολοκλήρωμα σε άθροισμα τεσσάρων όρων, έναν για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\xi=-(k_x+1)\Delta}^{-k_x\Delta} \int_{\psi=-(k_y+1)\Delta}^{-k_y\Delta} \int_{x=0}^{(k_x+1)\Delta+\xi} \int_{y=0}^{(k_y+1)\Delta+\psi} f(\xi^2 + \psi^2) dx dy d\xi d\psi = \\ &= \int_{\xi=-(k_x+1)\Delta}^{-k_x\Delta} \int_{\psi=-(k_y+1)\Delta}^{-k_y\Delta} f(\xi^2 + \psi^2) ((k_x+1)\Delta + \xi) ((k_y+1)\Delta + \psi) d\xi d\psi \end{aligned} \quad (4.45)$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$\begin{cases} \xi' = k_x \Delta + \xi \\ \psi' = k_y \Delta + \psi \end{cases} \quad (4.46)$$

Για τα όρια ολοκλήρωσης ισχύει:

$$\begin{cases} \xi' - k_x \Delta = -(k_x + 1) \Delta \\ \xi' - k_x \Delta = -k_x \Delta \\ \psi' - k_y \Delta = -(k_y + 1) \Delta \\ \psi' - k_y \Delta = -k_y \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi' = -\Delta \\ \xi' = 0 \\ \psi' = -\Delta \\ \psi' = 0 \end{cases} \quad (4.47)$$

Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I_1 = \int_{\xi'=-\Delta}^0 \int_{\psi'=-\Delta}^0 f[(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta + \xi') (\Delta + \psi') d\xi' d\psi' \quad (4.48)$$

Αφού είναι $\begin{cases} \xi' \leq 0 \\ \psi' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\xi| = -\xi \\ |\psi| = -\psi \end{cases}$ μπορούμε να γράψουμε το I_1 ως

$$I_1 = \int_{\xi'=-\Delta}^0 \int_{\psi'=-\Delta}^0 f[(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta - |\xi'|) (\Delta - |\psi'|) d\xi' d\psi' \quad (4.49)$$

Παρομοίως

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\xi=-k_x \Delta}^{-(k_x-1)\Delta} \int_{\psi=-(k_y+1)\Delta}^{-k_y \Delta} \int_{y=0}^{\Delta} \int_{x=k_x \Delta + \xi}^{(k_y+1)\Delta + \psi} f(\xi^2 + \psi^2) dx dy d\xi d\psi = \\ &= \int_{\xi=-k_x \Delta}^{-(k_x-1)\Delta} \int_{\psi=-(k_y+1)\Delta}^{-k_y \Delta} f(\xi^2 + \psi^2) (-(k_x-1)\Delta - \xi) ((k_y+1)\Delta + \psi) d\xi d\psi \end{aligned} \quad (4.50)$$

και με αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\xi'=0}^{\Delta} \int_{\psi'=-\Delta}^0 f[(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta - \xi') (\Delta + \psi') d\xi' d\psi' \\ I_2 &= \int_{\xi'=0}^{\Delta} \int_{\psi'=-\Delta}^0 f[(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta - |\xi'|) (\Delta - |\psi'|) d\xi' d\psi' \end{aligned} \quad (4.51)$$

Εξ άλλου

$$I_3 = \int_{\xi=-(k_x+1)\Delta}^{-k_x \Delta} \int_{\psi=-k_y \Delta}^{-(k_y-1)\Delta} \int_{x=0}^{(k_x+1)\Delta + \xi} \int_{y=k_y \Delta + \psi}^{\Delta} f(\xi^2 + \psi^2) dx dy d\xi d\psi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\xi=-(k_x+1)\Delta}^{-k_x\Delta} \int_{\psi=-k_y\Delta}^{-(k_y-1)\Delta} f(\xi^2+\psi^2)((k_x+1)\Delta+\xi)(-(k_y-1)\Delta-\psi)d\xi d\psi = \\
&= \int_{\xi'=-\Delta}^0 \int_{\psi'=0}^{\Delta} f[(\xi'-k_x\Delta)^2+(\psi'-k_y\Delta)^2](\Delta+\xi')(\Delta-\psi')d\xi' d\psi' \\
I_3 &= \int_{\xi'=-\Delta}^0 \int_{\psi'=0}^{\Delta} f[(\xi'-k_x\Delta)^2+(\psi'-k_y\Delta)^2](\Delta-|\xi'|)(\Delta-|\psi'|)d\xi' d\psi' \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Τέλος

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{\xi=-k_x\Delta}^{-(k_x-1)\Delta} \int_{\psi=-k_y\Delta}^{-(k_y-1)\Delta} \int_{x=k_x\Delta+\xi}^{\Delta} \int_{y=k_y\Delta+\psi}^{\Delta} f(\xi^2+\psi^2)dx dy d\xi d\psi \\
I_4 &= \int_{\xi'=0}^{\Delta} \int_{\psi'=0}^{\Delta} f[(\xi'-k_x\Delta)^2+(\psi'-k_y\Delta)^2](\Delta-|\xi'|)(\Delta-|\psi'|)d\xi' d\psi' \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και το γεγονός ότι

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \tag{4.54}$$

έχουμε

$$I = 2 \int_{\xi'=-\Delta}^{\Delta} \int_{\psi'=-\Delta}^{\Delta} f[(\xi'-k_x\Delta)^2+(\psi'-k_y\Delta)^2](\Delta-|\xi'|)(\Delta-|\psi'|)d\xi' d\psi' \tag{4.55}$$

ή

$$I = 2 \int_{\xi=-\Delta}^{\Delta} \int_{\psi=-\Delta}^{\Delta} f[(\xi-k_x\Delta)^2+(\psi-k_y\Delta)^2](\Delta-|\xi|)(\Delta-|\psi|)d\xi d\psi \tag{4.56}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί μόνο αριθμητικά. Θέτοντας $\Delta = 1$ και δίνοντας διάφορες τιμές στα k_x , k_y και b μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες τιμές του ολοκληρώματος I . Με αριθμητική επίλυση και βελτιστοποίηση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το ολοκλήρωμα I της σχέσης (4.56) προσεγγίζεται πολύ καλά από την παρακάτω σχέση:

$$\gamma(s) = A(b) \cdot \left(s - \frac{0.1 \cdot b^{1.4}}{s} \right)^{-b} \tag{4.57}$$

όπου αρχικά προσεγγίζεται και βελτιστοποιείται η σχέση

$$A(b) = \frac{\gamma_0}{\frac{2\pi}{2-b} - \frac{7\pi-6}{2(3-b)} + \frac{2\pi}{3(4-b)}} \tag{4.58}$$

ή

$$A(b) = \gamma_0 \cdot c(b) \quad \text{με} \quad c(b) = \frac{I}{\frac{2\pi}{2-b} - \frac{7\pi-6}{2(3-b)} + \frac{2\pi}{3(4-b)}} \quad (4.59)$$

και στη συνέχεια βελτιστοποιείται ο όρος $(s - \frac{0.1 \cdot b^{1.4}}{s})^{-b}$ της σχέσης (4.57).

Στην ειδική περίπτωση όπου $s = k_x = k_y = 0$ το παραπάνω ολοκλήρωμα παριστάνει τη διασπορά γ_0 .

Αν στη σχέση (4.57) διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με τη διασπορά γ_0 τότε με δεδομένη τη σχέση (4.59) προκύπτει

$$\rho(s) = c(b) \cdot (s - \frac{0.1 \cdot b^{1.4}}{s})^{-b} \quad (4.60)$$

Η βελτιστοποίηση γίνεται με χρήση προγράμματος spreadsheet. Παριστούμε γραφικά τις διάφορες τιμές του I της σχέσης (4.56) και με διαδοχικές προσεγγίσεις καταλήγουμε στο ζεύγος των σχέσεων (4.57) και (4.58).

4.5 Υπολογισμός ακολουθίας συντελεστών βάρους

Σύμφωνα με τη σχέση (4.24) ισχύει

$$s_\gamma(q) = A \cdot \pi^{b-1} \frac{\Gamma(1-b/2)}{\Gamma(b/2)} q^{b-2}$$

Η σχέση (4.24) γράφεται και ως

$$s_\gamma(q) = \gamma_0 \cdot c(b) \cdot d(b) \cdot q^{b-2} \quad (4.61)$$

με $c(b)$ σύμφωνα με την (4.59) και

$$d(b) = \pi^{b-1} \frac{\Gamma(1-b/2)}{\Gamma(b/2)} \quad (4.62)$$

Σύμφωνα με την (4.20) ισχύει

$$s_a(\varphi, \omega) = \sqrt{s_\gamma(\varphi, \omega)} \quad \text{ή} \quad s_a(q) = \sqrt{s_\gamma(q)}$$

Και δεδομένης της σχέσης (4.61) έχουμε

$$s_a(q) = \sqrt{\gamma_0 \cdot c(b) \cdot d(b)} q^{b/2-1}$$

Γράφουμε την τελευταία σχέση στη μορφή

$$s_a(q) = a_0 \cdot c(b') \cdot d(b') \cdot q^{b'-2} \quad (4.63)$$

με

$$b'-2 = b/2-1 \Leftrightarrow b' = b/2+1 \Leftrightarrow b = 2b'-2 \quad (4.64)$$

και

$$\sqrt{\gamma_0 \cdot c(b) \cdot d(b)} = a_0 \cdot c(b') \cdot d(b') \Leftrightarrow$$

$$a_0 = \sqrt{\gamma_0} \cdot \frac{\sqrt{c(b)} \cdot \sqrt{d(b)}}{c(b) \cdot d(b)} \quad (4.65)$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (4.63) είναι το Φάσμα Ισχύος κάποιου άλλου πεδίου FGN με εκθέτη b' όπως στην (4.64) και διασπορά a_0 όπως στη σχέση (4.65).

Άρα η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς αυτού του πεδίου θα είναι (βλ. σχέση (4.57))

$$a(s) = a_0 \cdot c(b') \cdot \left(s - \frac{0.1 \cdot b'^{1.4}}{s} \right)^{-b'} \quad (4.66)$$

με

$$s = \sqrt{i^2 + j^2}$$

4.6 Εκτίμηση Παραμέτρων

Βασικό ζητούμενο της παραπάνω μεθοδολογίας είναι η παραγωγή συνθετικών πεδίων FGN που έχουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά κάποιου πραγματικού πεδίου που έχει μετρηθεί και το οποίο καλούμε δείγμα.

Έστω τυχαίο πεδίο FGN, $Z(i,j)$ με αναμενόμενη τιμή $\mu_Z = E[Z]$. Θα συμβολίζουμε με $Z^{(k)}(m,n)$ το συναθροισμένο πεδίο στην κλίμακα k για το οποίο ισχύει

$$Z^{(k)}(m,n) = \sum_{i=(m-1)k+1}^{mk} \sum_{j=(n-1)k+1}^{nk} Z(i,j) \quad (4.67)$$

Το πεδίο στη βασική κλίμακα $k = 1$ συμβολίζεται $Z^{(1)}(i,j)$ ή απλά $Z(i,j)$.

Αποδεικνύεται αμέσως παρακάτω ότι ισχύει:

$$Var[Z^{(k)}] = k^{4H} Var[Z] \quad (4.68)$$

Αν στο ολοκλήρωμα της σχέσης (4.56) κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $\begin{cases} \xi' = \xi/\Delta \\ \psi' = \psi/\Delta \end{cases}$ τότε καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{\xi=-\Delta}^{\Delta} \int_{\psi=-\Delta}^{\Delta} f[(\xi'-k_x)\Delta^2 + (\psi'-k_y)\Delta^2] \Delta^2 (1-|\xi|)(1-|\psi|) \Delta d\xi' \Delta d\psi' = \\ &= 2\Delta^4 \int_{\xi=-\Delta}^{\Delta} \int_{\psi=-\Delta}^{\Delta} f[\Delta^2[(\xi'-k_x) + (\psi'-k_y)]] (1-|\xi|)(1-|\psi|) d\xi' d\psi' \end{aligned}$$

Από τη σχέση (4.28) προκύπτει ότι αν $f(r^2) = Ar^{-b}$ τότε $f(\Delta^2 r^2) = \Delta^{-b} Ar^{-b}$, άρα το τελευταίο ολοκλήρωμα με δεδομένη και τη σχέση (4.22) που συνδέει το b με το H γίνεται

$$I(\Delta) = 2\Delta^{4H} \int_{\xi=-\Delta}^{\Delta} \int_{\psi=-\Delta}^{\Delta} f[\Delta^2[(\xi'-k_x) + (\psi'-k_y)]] (1-|\xi|)(1-|\psi|) d\xi' d\psi' \quad (4.69)$$

Το Δ στη σχέση (4.69) παίζει το ρόλο της κλίμακας συνάθροισης k . Για $k_x = k_y = 0$ ισχύει λοιπόν ότι $I(1) = \gamma_0$ και $I(k) = \gamma_0^{(k)}$. Με τη βοήθεια λοιπόν των δύο τελευταίων σχέσεων καθώς και της (4.69) αποδεικνύεται η (4.68). Από τη σχέση (4.68) μπορεί να εκτιμηθεί πολύ εύκολα ο συντελεστής H του πεδίου.

Σημαντική παράμετρος προς διατήρηση είναι ο συντελεστής ασυμμετρίας του δείγματος, για να διατηρηθεί ο οποίος, πρέπει να γίνει κατάλληλη επιλογή του συντελεστή ασυμμετρίας του λευκού θορύβου V .

Παρομοίως με την περίπτωση της μίας διάστασης αποδεικνύεται ότι:

$$\xi_Z \cdot \gamma_0^{(3/2)} = \left(\sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q a^3(i,j) \right) \cdot \xi_V \quad (4.70)$$

4.7 Εφαρμογή της μεθοδολογίας

Για την εφαρμογή της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε ακολουθούμε τα εξής βήματα.

- 1) Από το δείγμα υπολογίζεται η διασπορά γ_0 .
- 2) Στη συνέχεια με τη βοήθεια της σχέσης (4.68) υπολογίζεται ο συντελεστής H του δείγματος.
- 3) Με τις σχέσεις (4.22) και (4.64) υπολογίζονται οι εκθέτες b και b' .
- 4) Με τις σχέσεις (4.59), (4.62), (4.65) και (4.66) υπολογίζεται η ακολουθία των βαρών $a(s)$ και μετατρέπεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες σε $a(i,j)$.
- 5) Παράγεται θόρυβος V με $\mu_V = 0$, $Var[V] = 1$ και συντελεστή ασυμμετρίας σύμφωνα με τη σχέση (4.70).
- 6) Παράγεται τελικά το συνθετικό πεδίο με τη βοήθεια τη σχέσης (4.2).

Τα παραπάνω θα φανούν καλύτερα με τη βοήθεια των δύο εφαρμογών που ακολουθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 5

Η περίπτωση των 2 διαστάσεων – Εφαρμογές

Στις ακόλουθες εφαρμογές επιχειρείται να προσομοιωθούν δύο πεδία στιγμιαίας σημειακής έντασης βροχής. Τα δεδομένα προέρχονται από μετρήσεις radar. Κατ' αρχάς ελέγχεται αν το πεδίο που μετρήθηκε (φυσικό πεδίο) μπορεί να προσομοιωθεί από συνθετικό πεδίο FGN. Στη συνέχεια εκτιμώνται οι απαιτούμενες για την προσομοίωση παράμετροι και γίνεται η παραγωγή του συνθετικού πεδίου. Στο τέλος γίνεται σύγκριση του παραχθέντος πεδίου με το φυσικό.

5.1 Μέτρηση βροχής με χρήση radar

Κρίνεται σκόπιμο, πριν γίνει η παρουσίαση των εφαρμογών, να γίνει μία σύντομη αναφορά στη μεθοδολογία μέτρησης της βροχής με χρήση radar.

Η λειτουργία των radar στηρίζεται στη μέτρηση της ανακλώμενης ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας πάνω στα υδροσταγονίδια (Μιμίκου 1994, Μιμίκου και Μπαλτάς 2001). Από έναν πομπό εκπέμπονται ραδιοκύματα, τα οποία αφού διαδοθούν στην ατμόσφαιρα, ανακλώνται στα υδροσταγονίδια. Η ανακλώμενη ενέργεια επιστρέφει στο radar και προσλαμβάνεται από μία κεραία. Μετρώντας την ενέργεια που επιστρέφει στην κεραία μπορεί να εκτιμηθεί η ένταση της βροχής.

Τα ραδιοκύματα εκπέμπονται με τη μορφή περιστρεφόμενης δέσμης η οποία σαρώνει την περιοχή ενδιαφέροντος. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να μετρηθεί η αντανακλαστικότητα Z σε κάθε σημείο της περιοχής. Η ένταση της βροχής συνδέεται με την αντανακλαστικότητα με συναρτησιακή σχέση που εξαρτάται από παράγοντες όπως η κλιματολογία, ο τύπος της βροχής κλπ.

Στις εφαρμογές που παρουσιάζονται χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από το πείραμα TOGA-COARE (Tropical Ocean Global Atmosphere-Coupled Ocean-Atmosphere Response Experiment). Σε αυτό το πείραμα χρησιμοποιήθηκε radar βροχής Doppler μεταφερόμενο με πλοίο (Pavlopoulos & Gupta, 2003). Κάθε σάρωση καλύπτει μία περιοχή $240 \times 240 \text{ km}^2$ χωρισμένη σε 120×120 στοιχεία διαστάσεων $2 \times 2 \text{ km}^2$. Στα πλαίσια του πειράματος γινόταν μία σάρωση κάθε 20 λεπτά. Στις εφαρμογές της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκαν δύο σαρώσεις που έγιναν στις 10 Νοεμβρίου 1992. Περισσότερες πληροφορίες για το πείραμα TOGA-COARE και τα δεδομένα του, δίνονται στην εργασία των Short *et al.* (1997).

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στις παρακάτω εφαρμογές φαίνονται στον Πίνακα Β.1 του παραρτήματος Β. Τα δεδομένα αφορούν στη στιγμιαία ένταση (mm/h) της βροχής κάθε στοιχείου. Η μετατροπή από τη μετρηθείσα αντανακλαστικότητα σε ένταση έγινε με βάση τη σχέση

$$i = \left(\frac{Z}{230}\right)^{1/1.25} \quad (5.1)$$

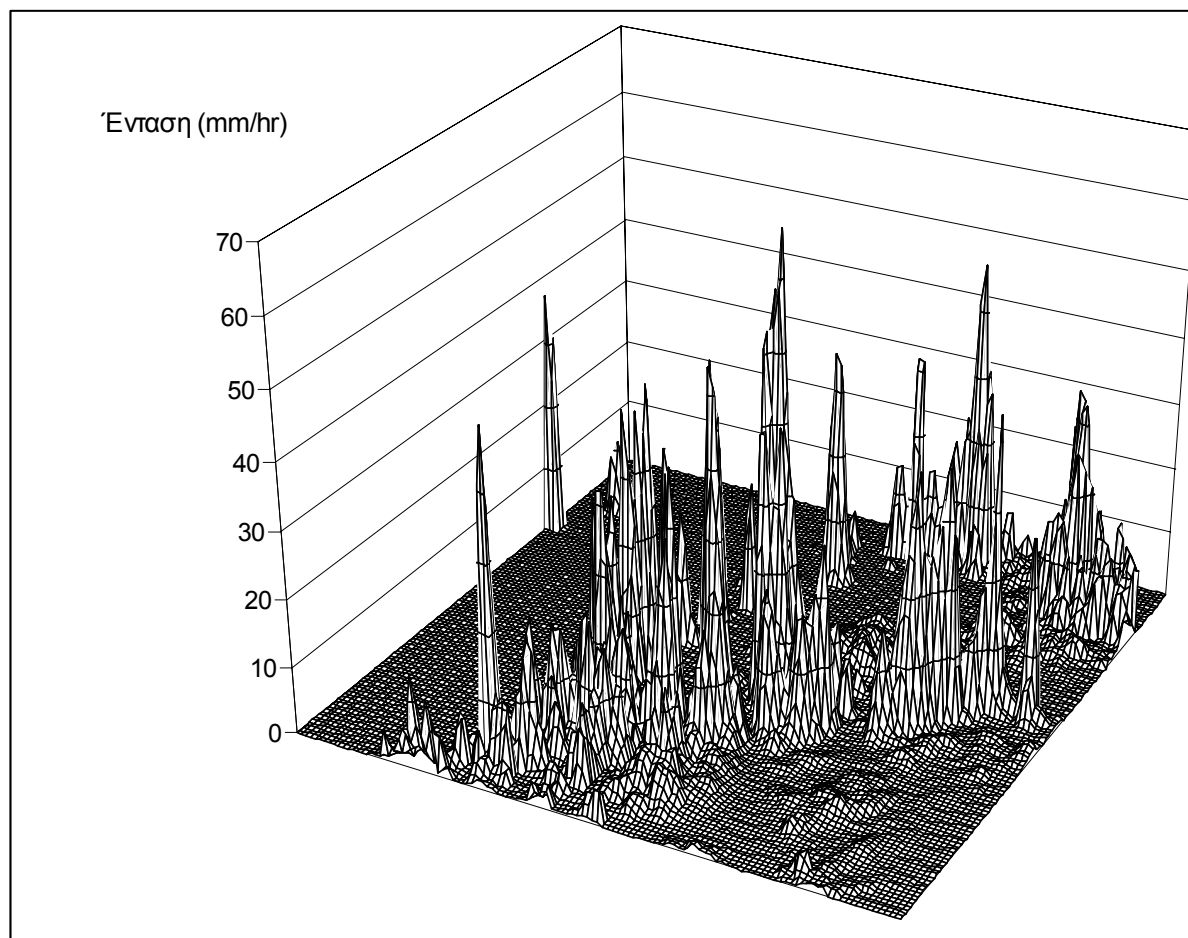
όπου i η ένταση και Z η αντανακλαστικότητα (Pavlopoulos & Gupta, 2003).

5.2 Εφαρμογή Α

Σε αυτή την εφαρμογή χρησιμοποιήθηκε το δείγμα με κωδικό MIT_921110_2321_2km.

Το δείγμα έχει διαστάσεις 120 x 120, ενώ το συνθετικό πεδίο θα έχει διαστάσεις 100 x 100.

Στο σχήμα 5.1 φαίνεται σε προοπτική άποψη το φυσικό πεδίο που επιχειρείται να προσομοιωθεί.



Σχήμα 5.1: Το φυσικό πεδίο

Το φυσικό πεδίο θα συμβολίζεται ως Z_φ . Το Z_φ έχει τα ακόλουθα στατιστικά χαρακτηριστικά

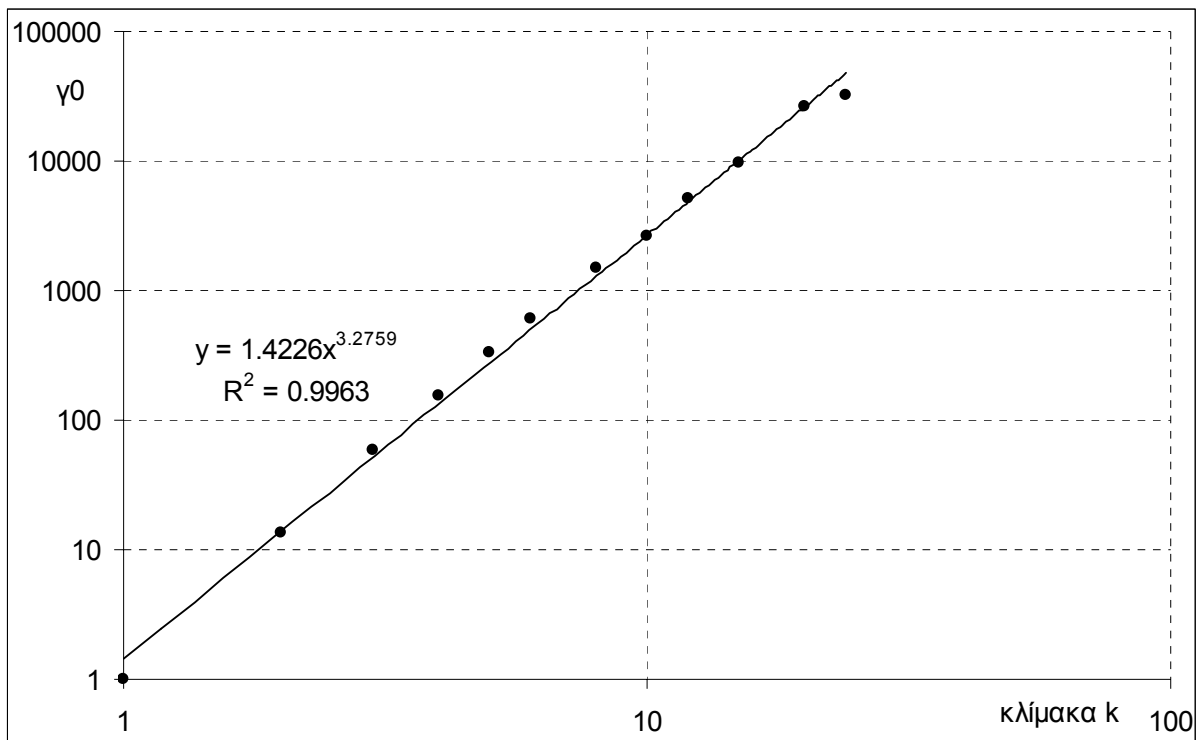
Πίνακας 5.1: Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του Z_φ

$\mu_{Z_\varphi} = 1.45$
$\sigma^2_{Z_\varphi} = 18.85$
$\sigma_{Z_\varphi} = 4.34$
$\xi_{Z_\varphi} = 5.77$

Προχωρούμε σε τυποποίηση του φυσικού πεδίου. Το τυποποιημένο πεδίο συμβολίζεται ως $Z_{T\varphi}$.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε αν το πεδίο μπορεί να προσομοιωθεί με ένα πεδίο FGN ελέγχουμε δύο στοιχεία. Πρώτον συναθροίζουμε το πεδίο $Z_{T\varphi}$ σε διάφορες κλίμακες, και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη σχέση μεταξύ της διασποράς σε κάθε κλίμακα με την κλίμακα. Δεύτερον σχεδιάζουμε το αυτοσυσχετόγραμμα του πεδίου $Z_{T\varphi}$ και μελετούμε τη μορφή του. Αυτοί οι δύο έλεγχοι γίνονται με τη βοήθεια των σχημάτων 5.2, 5.3 και 5.4.

Η συνάθροιση γίνεται με τη βοήθεια της σχέσης (4.67)



Σχήμα 5.2: Σχέση Κλίμακας Συνάθροισης – Διασποράς του τυποποιημένου φυσικού πεδίου

Σύμφωνα με τη σχέση (4.68) ισχύει

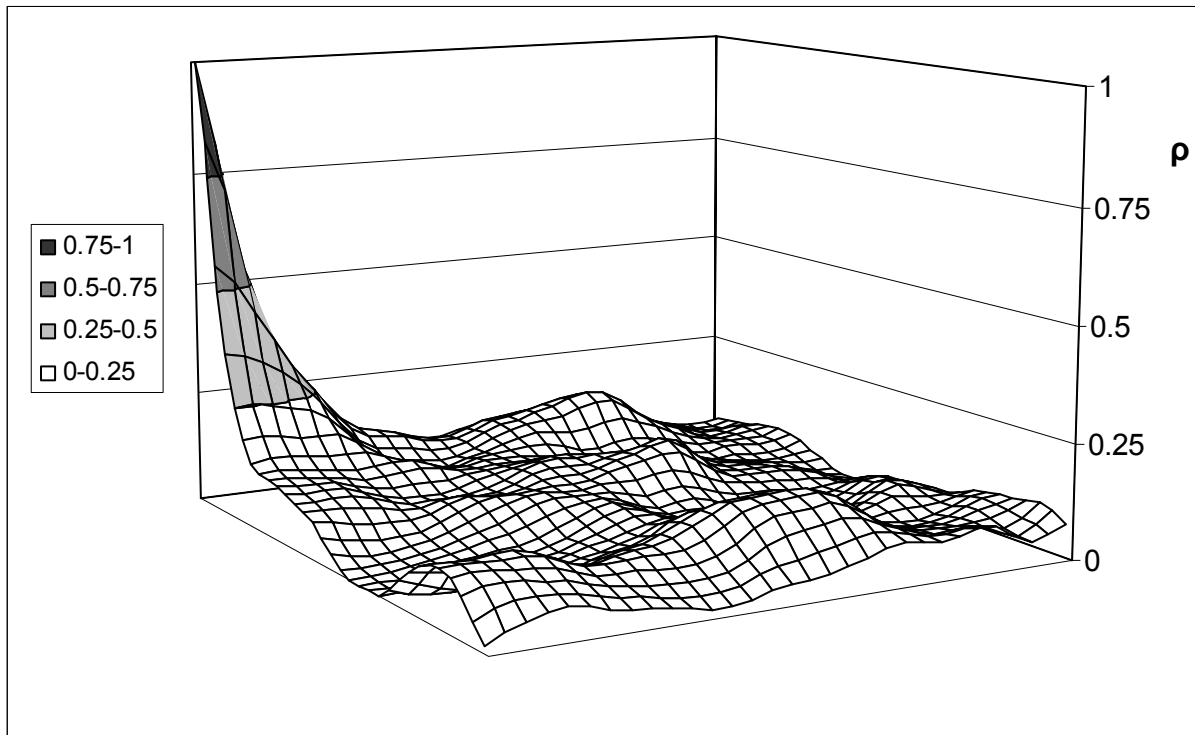
$$\text{Var}[Z^{(k)}] = k^{4H} \text{Var}[Z]$$

Η σχέση αυτή φαίνεται να επαληθεύεται στο σχήμα 5.2 δεδομένου ότι παρατηρείται ευθεία διάταξη σημείων στο διπλό λογαριθμικό διάγραμμα, με κλίση 3.2759. Άρα

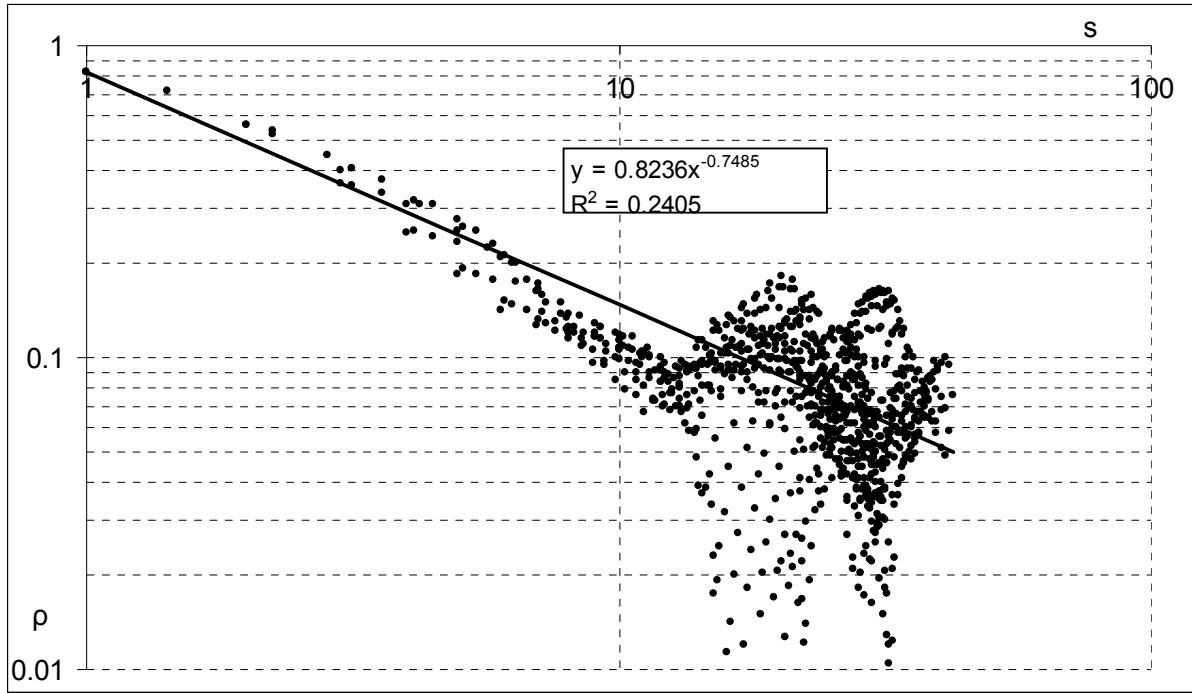
$$4H = 3.2759 \Leftrightarrow H = 0.82 \quad (5.2)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (4.22) και δεδομένης της τιμής του H θα ισχύει για τον εκθέτη b της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

$$b = 4(1 - H) = 0.72$$



Σχήμα 5.3: Προοπτική άποψη του αυτοσυσχετογράμματος του φυσικού πεδίου



Σχήμα 5.4: Συντελεστής αυτοσυσχέτισης του φυσικού πεδίου ως προς την υστέρηση s

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4 ο συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του φυσικού πεδίου προσεγγίζεται καλά με μια συνάρτηση δύναμης της υστέρησης, με εκθέτη 0.75, πολύ κοντά στον εκθέτη $b = 0.72$ που υπολογίστηκε προηγουμένως.

Με βάση τους δύο παραπάνω έλεγχοι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το φυσικό πεδίο μπορεί να προσομοιωθεί από ένα πεδίο FGN, η σύνθεση του οποίου θα γίνει με τη βοήθεια της μεθοδολογίας που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3.

Καταρχάς θα υπολογίσουμε την ακολουθία των συντελεστών βάρους. Υπενθυμίζονται παρακάτω οι σχέσεις που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της ακολουθίας.

$$c(b) = \frac{1}{\frac{2\pi}{2-b} - \frac{7\pi-6}{2(3-b)} + \frac{2\pi}{3(4-b)}} \quad (4.59)$$

$$d(b) = \pi^{b-1} \frac{\Gamma(1-b/2)}{\Gamma(b/2)} \quad (4.62)$$

$$b' = b/2 + 1 \quad (4.64)$$

$$a_0 = B \cdot \sqrt{\gamma_0} \cdot \frac{\sqrt{c(b)} \cdot \sqrt{d(b)}}{c(b') \cdot d(b')} \quad (4.65)$$

$$a(s) = a_0 \cdot c(b') \cdot \left(s - \frac{0.1 \cdot b'^{1.4}}{s} \right)^{-b'} \quad (4.66)$$

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή είναι

$$b = 0.72 \quad (\text{από τη σχέση (4.22)})$$

$$b' = 1.36$$

$$c(b) = 0.49$$

$$c(b') = 0.17$$

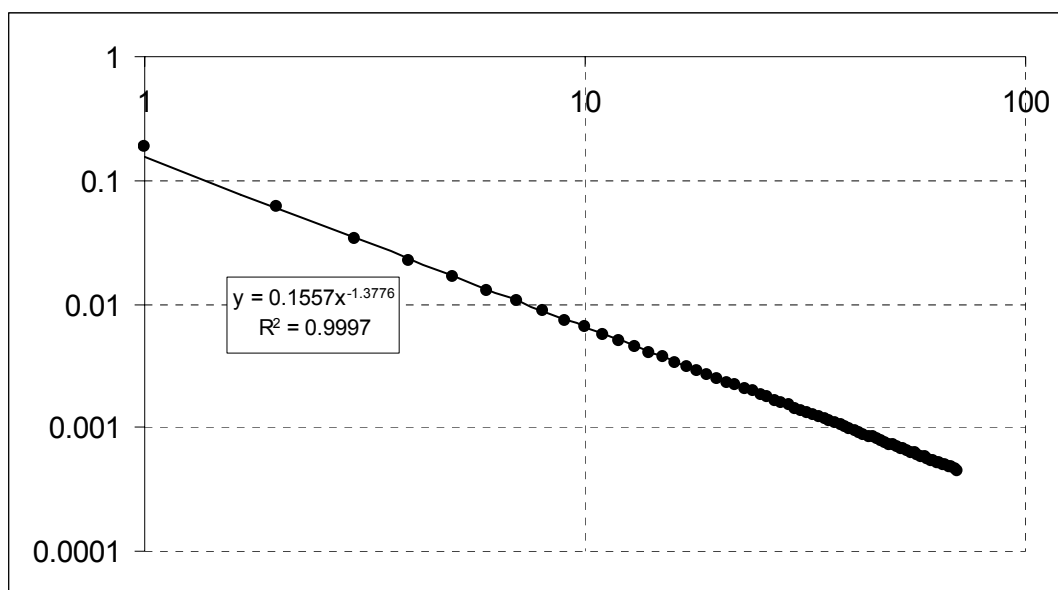
$$d(b) = 0.41$$

$$d(b') = 3.17$$

$$B = 1.03$$

$$a_0 = 0.838$$

Με εφαρμογή της σχέσης (4.66) υπολογίζεται η ακολουθία των συντελεστών βάρους. Για τη σύνθεση θα χρησιμοποιήσουμε τους συντελεστές βάρους $a(s)$ με s μέχρι 70. Η ακολουθία που υπολογίστηκε φαίνεται στον Πίνακα Β.2 και παρίσταται γραφικά στο Σχήμα 5.5.



Σχήμα 5.5: Η ακολουθία $a(s)$ των συντελεστών βάρους

Με τη βοήθεια της σχέσης (4.70), και με δεδομένη την ακολουθία $a(s)$ και το συντελεστή ασυμμετρίας του Z_φ (βλ. Πίνακα 5.1), υπολογίζουμε το συντελεστή ασυμμετρίας που θα πρέπει να έχει ο λευκός θόρυβος $V(i,j)$.

Προκύπτει ότι

$$\xi_V = 9.29$$

Ο λευκός θόρυβος $V(i,j)$ υποτίθεται ότι ακολουθεί την κατανομή γάμμα 3 παραμέτρων.

Υπενθυμίζουμε ότι πρέπει να ισχύει

$$\mu_V = 0$$

και

$$\sigma_V^2 = 1$$

Οι τρεις παράμετροι (κ σχήματος, λ κλίμακας και c θέσης) υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (3.35), (3.36) και (3.37) και προκύπτει

$$\kappa = 0.046$$

$$\lambda = 0.215$$

$$c = -0.215$$

Ο λευκός θόρυβος $V(i,j)$ παράγεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο γέννησης τυχαίων αριθμών της κατανομής γάμμα 3 παραμέτρων που παρουσιάζεται στο Παράρτημα Γ.

Ο παραχθείς λευκός θόρυβος έχει τα εξής στατιστικά χαρακτηριστικά

Πίνακας 5.2: Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του V

$\mu_V = -0.003$
$\sigma^2_V = 0.995$
$\sigma_V = 0.997$
$\xi_V = 9.371$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα βάρη $a(i,j)$ από την ακολουθία των βαρών $a(s)$ αφού ισχύει ότι

$$a(s) = a(i,j)$$

για

$$s = \sqrt{i^2 + j^2}$$

Προχωράμε τώρα στην εφαρμογή της σχέσης (4.2) η οποία έχει ως αποτέλεσμα τη σύνθεση του πεδίου. Το συνθετικό πεδίο συμβολίζεται Z_σ .

Το Z_σ έχει τα ακόλουθα στατιστικά χαρακτηριστικά

Πίνακας 5.3: Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του Z_σ

$\mu_{Z_\sigma} = 0.11$
$\sigma^2_{Z_\sigma} = 0.92$
$\sigma_{Z_\sigma} = 0.96$
$\xi_{Z_\sigma} = 5.30$

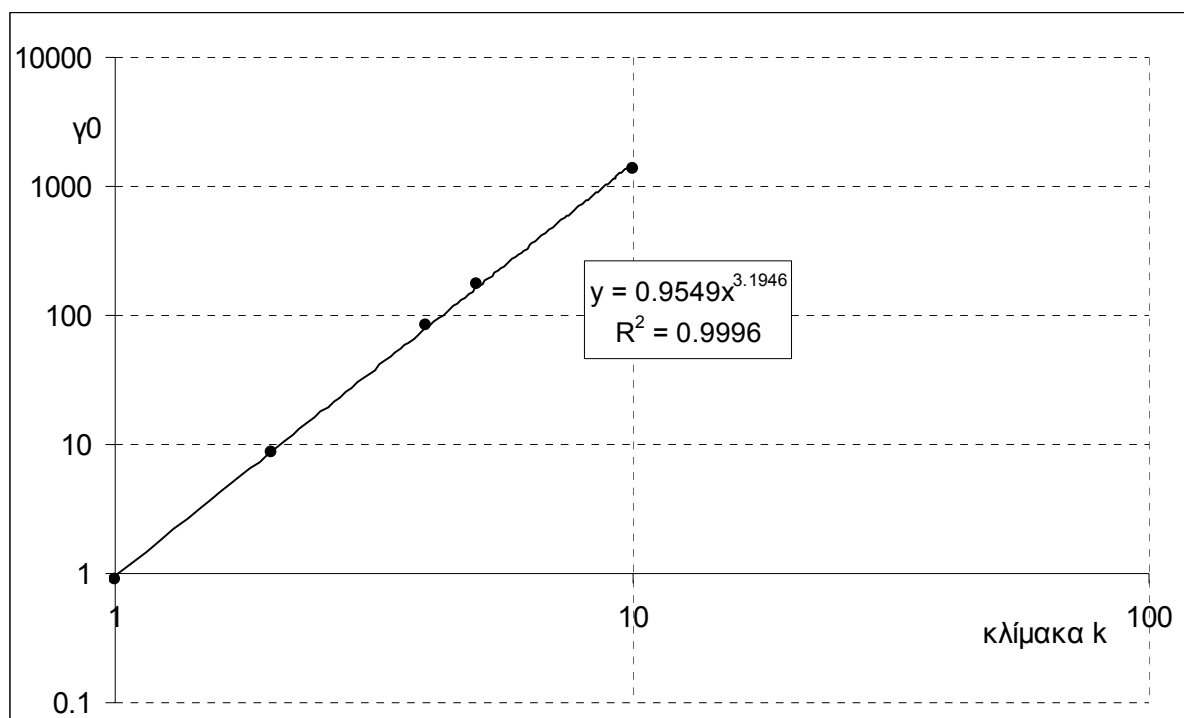
Προχωρούμε σε τυποποίηση του Z_σ και καταλήγουμε στο τυποποιημένο πεδίο $Z_{T\sigma}$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε μία διαδικασία ανόρθωσης του $Z_{T\sigma}$ με τη βοήθεια των στατιστικών χαρακτηριστικών του φυσικού πεδίου, με σκοπό τη μετατροπή των αρνητικών τιμών σε μηδενικές με διατήρηση των στατιστικών χαρακτηριστικών του φυσικού πεδίου. Το ανορθωμένο πεδίο συμβολίζεται ως Z'_σ

Το Z'_σ έχει τα ακόλουθα στατιστικά χαρακτηριστικά

Πίνακας 5.4: Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του Z'_σ

$\mu_{Z'_\sigma} = 1.46$
$\sigma^2_{Z'_\sigma} = 18.85$
$\sigma_{Z'_\sigma} = 4.34$
$\xi_{Z'_\sigma} = 7.05$

Στη συνέχεια συναθροίζουμε το Z σε διάφορες κλίμακες με τη βοήθεια της σχέσης (4.67) και ελέγχουμε τη σχέση μεταξύ της κλίμακας συνάθροισης και της διασποράς. Η σχέση κλίμακας – διασποράς ελέγχεται με τη βοήθεια του σχήματος 5.6



Σχήμα 5.6: Σχέση Κλίμακας Συνάθροισης – Διασποράς του συνθετικού πεδίου

Όπως προκύπτει από το σχήμα 5.6 και με βάση τη σχέση (4.68) είναι

$$4H = 3.195$$

Άρα

$$H = 0.80 \quad (5.3)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.2) και (5.3) παρατηρούμε ότι το συνθετικό πεδίο διατηρεί το συντελεστή Hurst του φυσικού σε πολύ καλό βαθμό.

Με τη βοήθεια της σχέσης (4.60) υπολογίζουμε το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα του πεδίου.

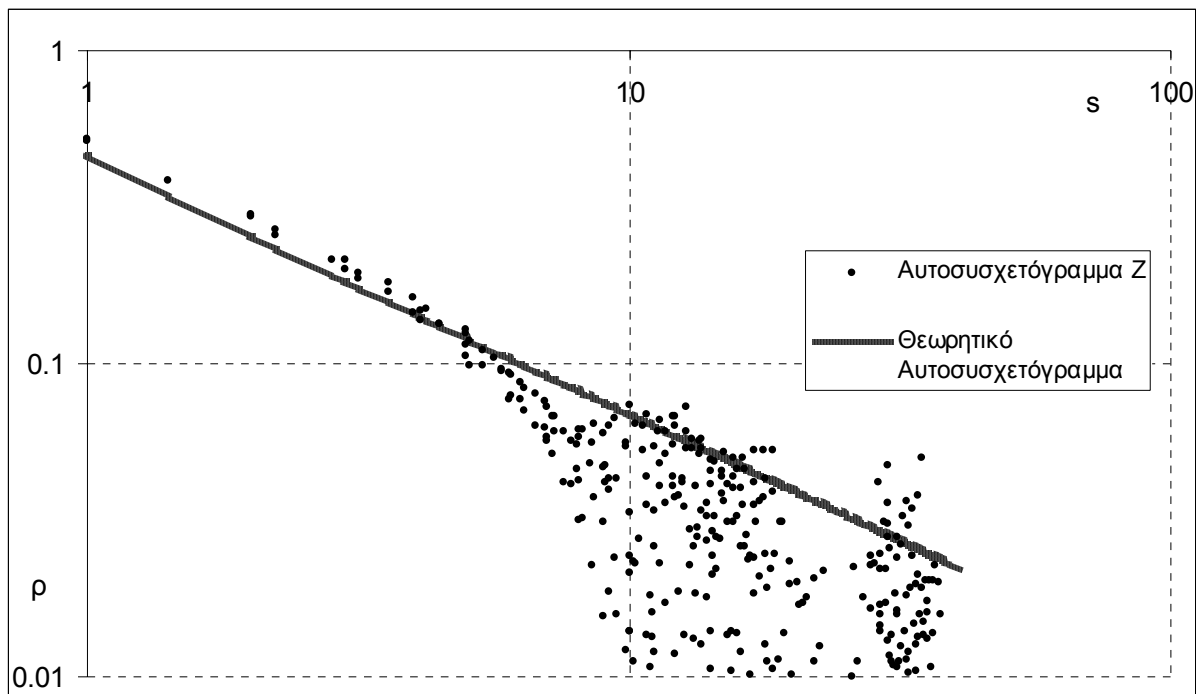
Για το συντελεστή συσχέτισης των δύο αυτοσυσχετογραμμάτων προκύπτει

$$\rho_{\theta,\sigma} = 0.972 \quad (5.4)$$

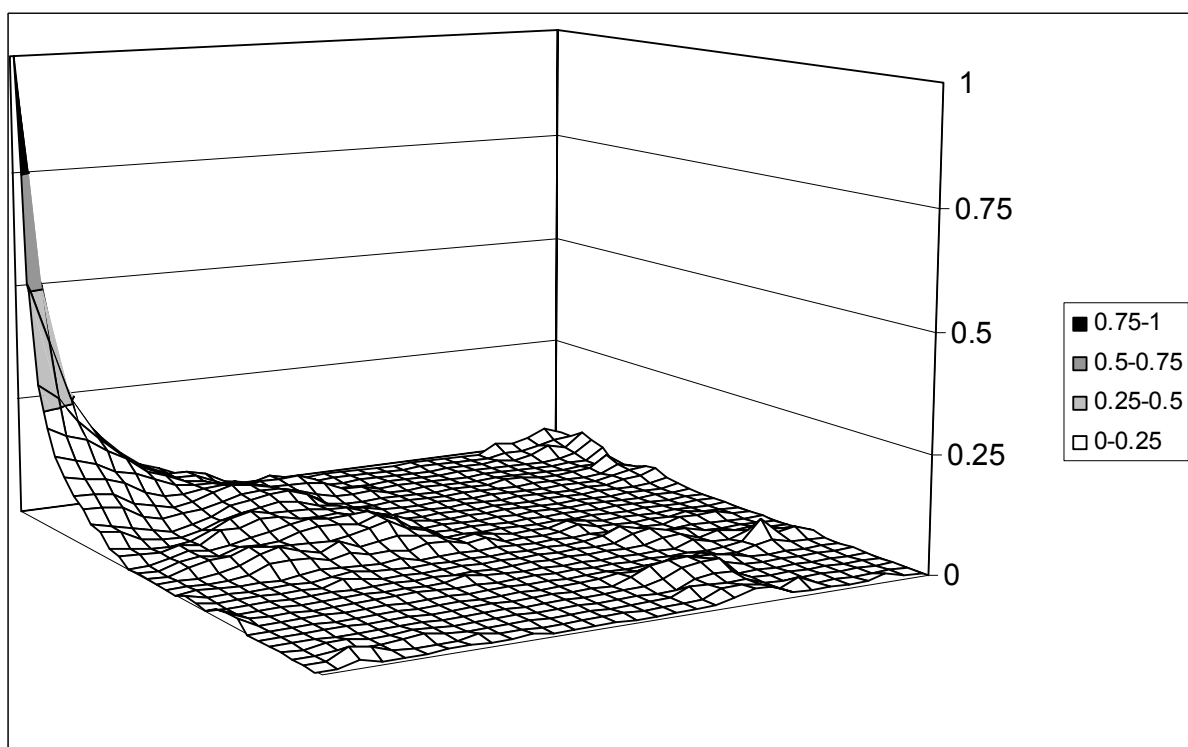
Τα παραπάνω φαίνονται και στο σχήμα 5.7

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το συνθετικό πεδίο έχει αυτοσυσχετόγραμμα πολύ κοντά στο θεωρητικά αναμενόμενο.

Στο σχήμα 5.8 φαίνεται το αυτοσυσχετόγραμμα σε προοπτική άποψη

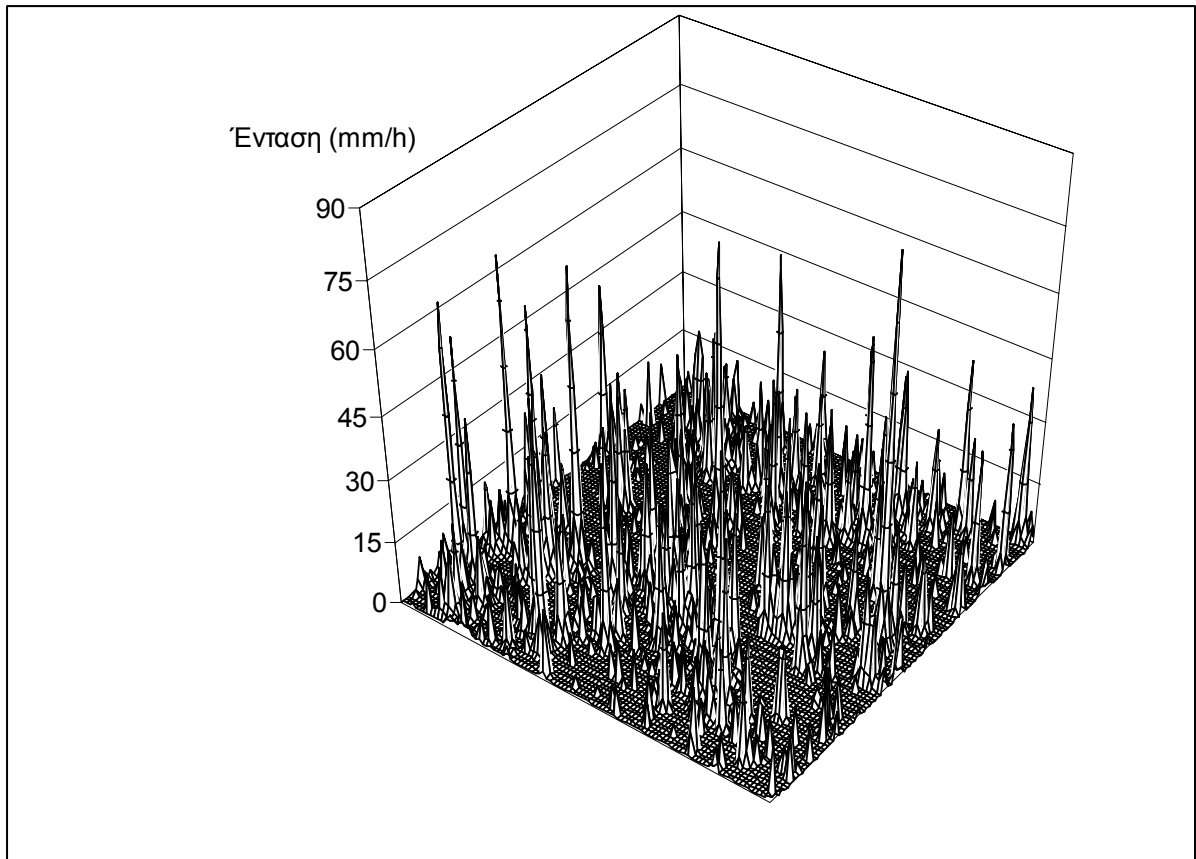


Σχήμα 5.7: Σύγκριση θεωρητικού και συνθετικού αυτοσυσχετογράμματος



Σχήμα 5.8: Προοπτική άποψη του αυτοσυσχετογράμματος του συνθετικού πεδίου

Τέλος στο σχήμα 5.9 φαίνεται σε προοπτική άποψη το ανορθωμένο συνθετικό πεδίο.

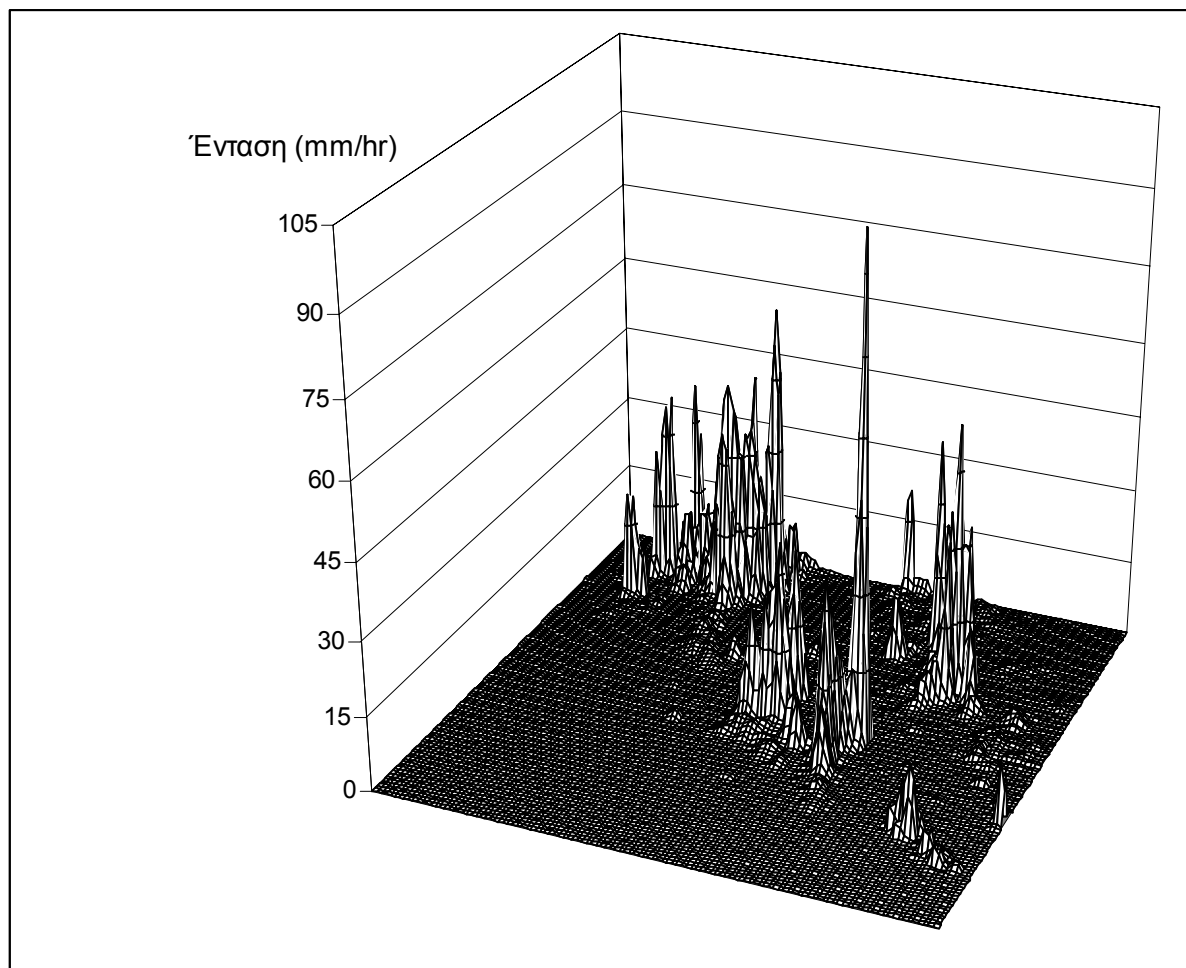


Σχήμα 5.9: Το συνθετικό πεδίο

5.3 Εφαρμογή Β

Σε αυτή την εφαρμογή χρησιμοποιήθηκε το δείγμα με κωδικό MIT_921110_2001_2km. Η διαδικασία σύνθεσης είναι η ίδια με αυτήν της εφαρμογής Α.

Στο σχήμα 5.10 φαίνεται το φυσικό πεδίο σε προοπτική άποψη.



Σχήμα 5.10: Το φυσικό πεδίο

Το Z_φ έχει τα εξής στατιστικά χαρακτηριστικά

Πίνακας 5.5: Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του Z_φ

$\mu_{Z_\varphi} = 0.65$
$\sigma^2_{Z_\varphi} = 11.04$
$\sigma_{Z_\varphi} = 3.32$
$\xi_{Z_\varphi} = 9.83$

Προχωρούμε σε τυποποίηση του Z_φ . Το τυποποιημένο πεδίο καλούμε Z_φ .

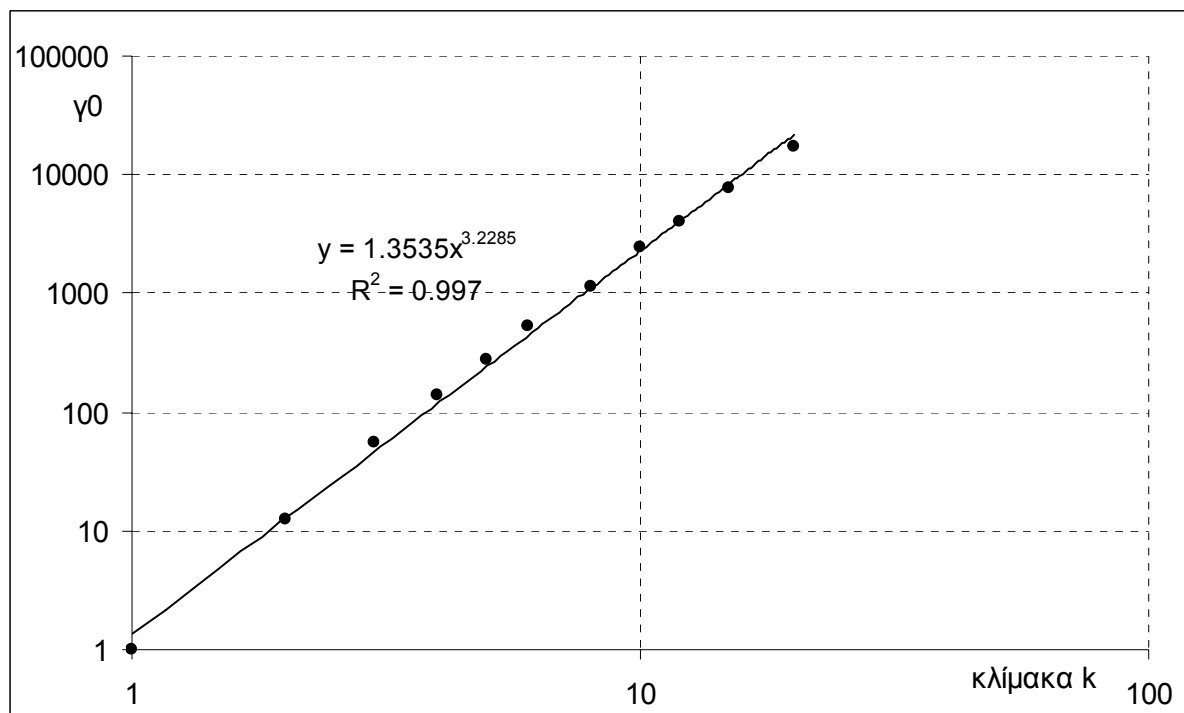
Με τη βοήθεια της σχέσης (4.67) συναθροίζουμε το τυποποιημένο πεδίο σε διάφορες κλίμακες. Υπολογίζουμε τη διασπορά κάθε κλίμακας, και κατασκευάζουμε το σχήμα 5.11, με

τη βοήθεια του οποίου καθώς και της σχέσης (4.68) υπολογίζουμε το συντελεστή Hurst του φυσικού πεδίου. Καταλήγουμε στο

$$H = 0.81 \quad (5.5)$$

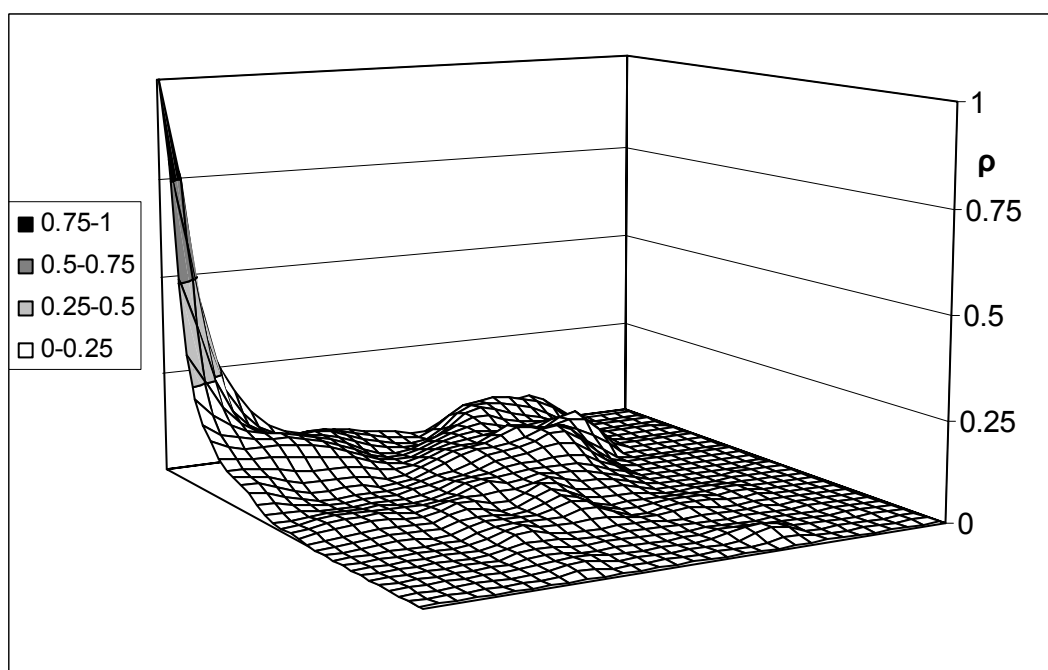
και με τη βοήθεια της σχέσης (4.22) στο

$$b = 0.76$$

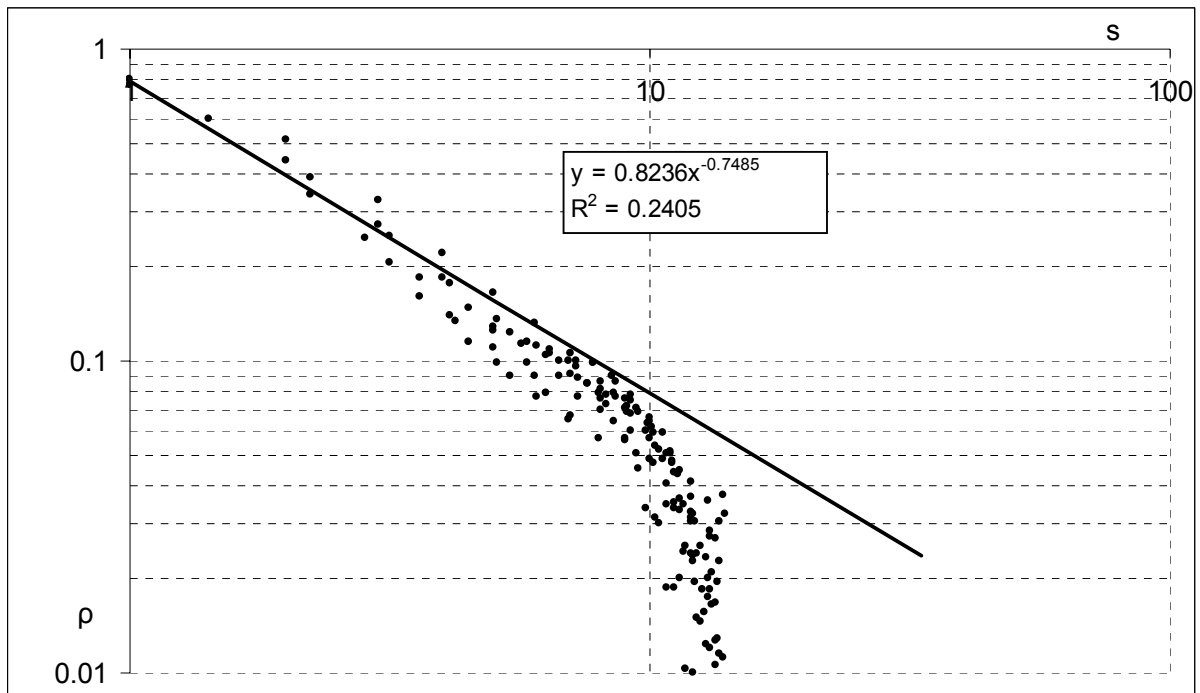


Σχήμα 5.11: Σχέση Κλίμακας Συνάθροισης – Διασποράς του τυποποιημένου φυσικού πεδίου

Υπολογίζουμε το συντελεστή αυτοσυσχέτισης του φυσικού πεδίου και καταλήγουμε στα σχήματα 5.12 και 5.13.



Σχήμα 5.12: Προοπτική άποψη του αυτοσυσχετογράμματος του φυσικού πεδίου

Σχήμα 5.13: Συντελεστής αυτοσυσχέτισης του φυσικού πεδίου ως προς την υστέρηση s

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.13 ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης του φυσικού πεδίου προσεγγίζεται καλά με μια συνάρτηση δύναμης της υστέρησης, με εκθέτη 0.75, πολύ κοντά στον εκθέτη $b = 0.76$ που υπολογίστηκε θεωρητικά.

Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το φυσικό πεδίο μπορεί να προσομοιωθεί από ένα πεδίο FGN. Η σύνθεση του πεδίου FGN θα γίνει με τη βοήθεια της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3.

Με τη βοήθεια των σχέσεων (4.59), (4.62), (4.64), (4.65) και (4.66) καταλήγουμε στα

$$b' = 1.36$$

$$c(b) = 0.49$$

$$c(b') = 0.17$$

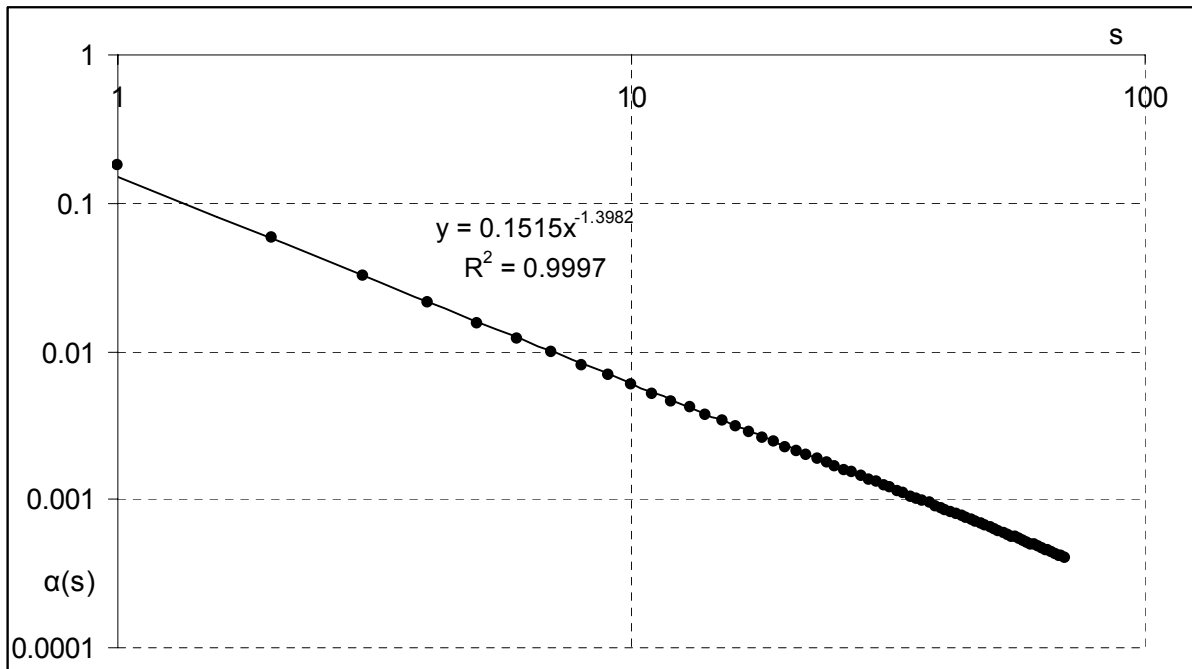
$$d(b) = 0.41$$

$$d(b') = 3.17$$

$$B = 1.03$$

$$a_0 = 0.838$$

Η ακολουθία των συντελεστών βάρους (σχέση (4.66)) υπολογίζεται για s μέχρι 70 και οι τιμές της φαίνονται στον Πίνακα Β.2, παρίσταται δε γραφικά στο σχήμα 5.14



Σχήμα 5.14: Η ακολουθία $a(s)$ των συντελεστών βάρους

Με τη βοήθεια της σχέσης (4.70), και με δεδομένη την ακολουθία $a(s)$ και το συντελεστή ασυμμετρίας του Z_φ (βλ. Πίνακα 5.5), υπολογίζουμε το συντελεστή ασυμμετρίας που θα πρέπει να έχει ο λευκός θόρυβος $V(i,j)$. Προκύπτει ότι

$$\xi_V = 15.21$$

Ο λευκός θόρυβος $V(i,j)$ θα ακολουθεί την κατανομή γάμμα 3 παραμέτρων.

Οι τρεις παράμετροι (κ σχήματος, λ κλίμακας και c θέσης) υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (3.35), (3.36) και (3.37) και προκύπτει

$$\kappa = 0.017$$

$$\lambda = 0.132$$

$$c = -0.132$$

Ο λευκός θόρυβος $V(i,j)$ παράγεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο γέννησης τυχαίων αριθμών της κατανομής γάμμα 3 παραμέτρων που παρουσιάζεται στο Παράρτημα Γ.

Ο παραχθείς λευκός θόρυβος έχει τα εξής στατιστικά χαρακτηριστικά

Πίνακας 5.6: Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του V

$\mu_V = -0.002$
$\sigma^2_V = 1.010$
$\sigma_V = 1.005$
$\xi_V = 15.30$

Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε την ακολουθία των βαρών από $a(s)$ (πολικές συντεταγμένες) σε $a(i,j)$ (καρτεσιανές συντεταγμένες).

Συνθέτουμε το συνθετικό πεδίο με εφαρμογή της σχέσης (4.2). Συμβολίζουμε το συνθετικό πεδίο ως Z_σ .

Το Z_σ έχει τα ακόλουθα στατιστικά χαρακτηριστικά

Πίνακας 5.7: Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του Z_σ

$\mu_{Z_\sigma} = 0.008$
$\sigma^2_{Z_\sigma} = 1.126$
$\sigma_{Z_\sigma} = 1.061$
$\xi_{Z_\sigma} = 9.812$

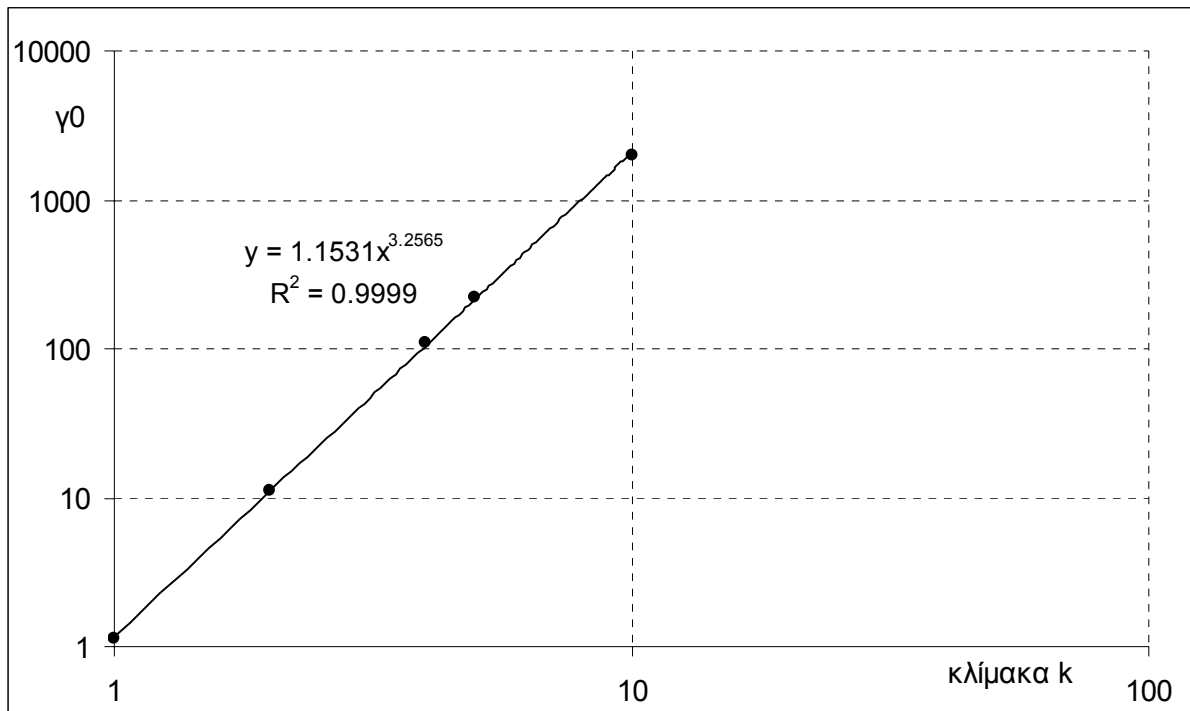
Προχωρούμε σε τυποποίηση του Z_σ και καταλήγουμε στο τυποποιημένο πεδίο $Z_{T\sigma}$. Στη συνέχεια ανορθώνουμε το $Z_{T\sigma}$ με τη βοήθεια των στατιστικών χαρακτηριστικών του φυσικού πεδίου. Το ανορθωμένο πεδίο συμβολίζεται ως Z'_σ

Το Z'_σ έχει τα ακόλουθα στατιστικά χαρακτηριστικά

Πίνακας 5.8: Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του Z'_σ

$\mu_{Z'_\sigma} = 0.65$
$\sigma^2_{Z'_\sigma} = 11.04$
$\sigma_{Z'_\sigma} = 3.32$
$\xi_{Z'_\sigma} = 12.75$

Στη συνέχεια συναθροίζουμε το Z σε διάφορες κλίμακες με τη βοήθεια της σχέσης (4.67) και ελέγχουμε τη σχέση μεταξύ της κλίμακας συνάθροισης και της διασποράς. Η σχέση κλίμακας – διασποράς ελέγχεται με τη βοήθεια του σχήματος 5.15



Σχήμα 5.15: Σχέση Κλίμακας Συνάθροισης – Διασποράς του συνθετικού πεδίου

Από το σχήμα 5.15 και με τη βοήθεια της σχέσης (4.68) προκύπτει ότι

$$4H = 3.26$$

Δηλαδή

$$H = 0.81 \quad (5.6)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.5) και (5.6) παρατηρούμε ότι το συνθετικό πεδίο διατηρεί το συντελεστή Hurst του φυσικού.

Με τη βοήθεια της σχέσης (4.60) υπολογίζουμε το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα του πεδίου.

Για το συντελεστή συσχέτισης προκύπτει

$$\rho_{\theta, \sigma} = 0.75 \quad (5.7)$$

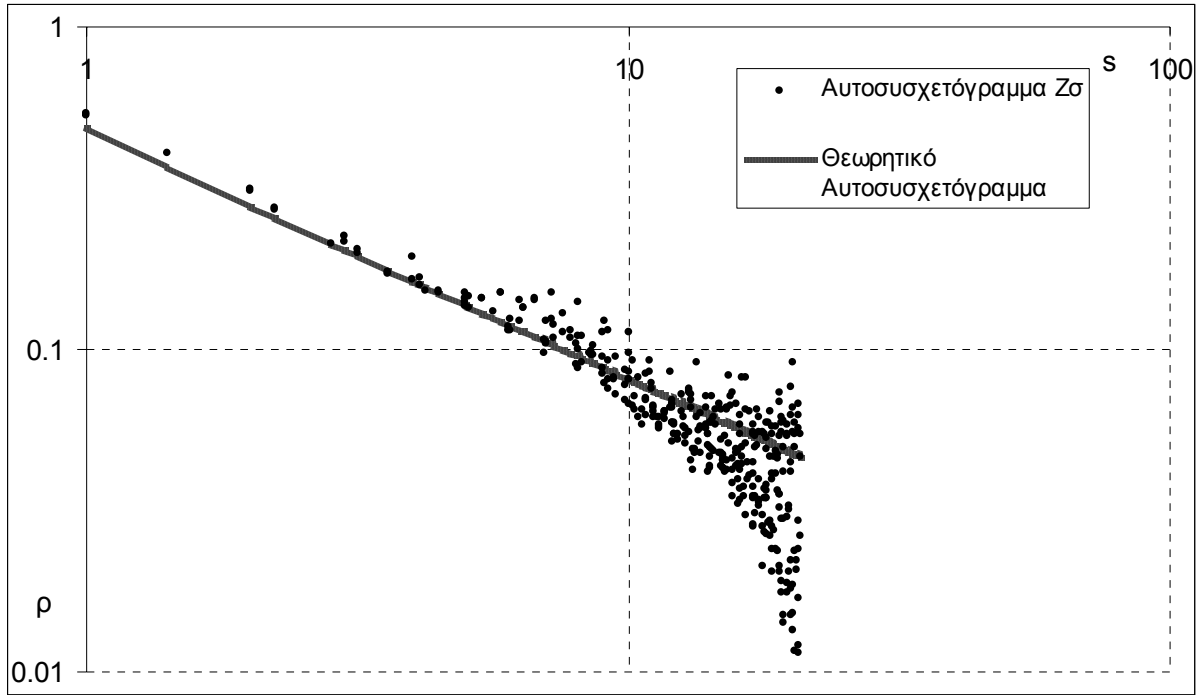
Τα παραπάνω φαίνονται και στο σχήμα 5.16

Το συνθετικό πεδίο λοιπόν έχει αυτοσυσχετόγραμμα κοντά στο θεωρητικά αναμενόμενο όχι όμως όπως το συνθετικό πεδίο της εφαρμογής A.

Αν όμως υπολογίσουμε το συντελεστή συσχέτισης της σχέσης (5.7) για υστέρηση μέχρι $10 \cdot \sqrt{2}$, τότε προκύπτει

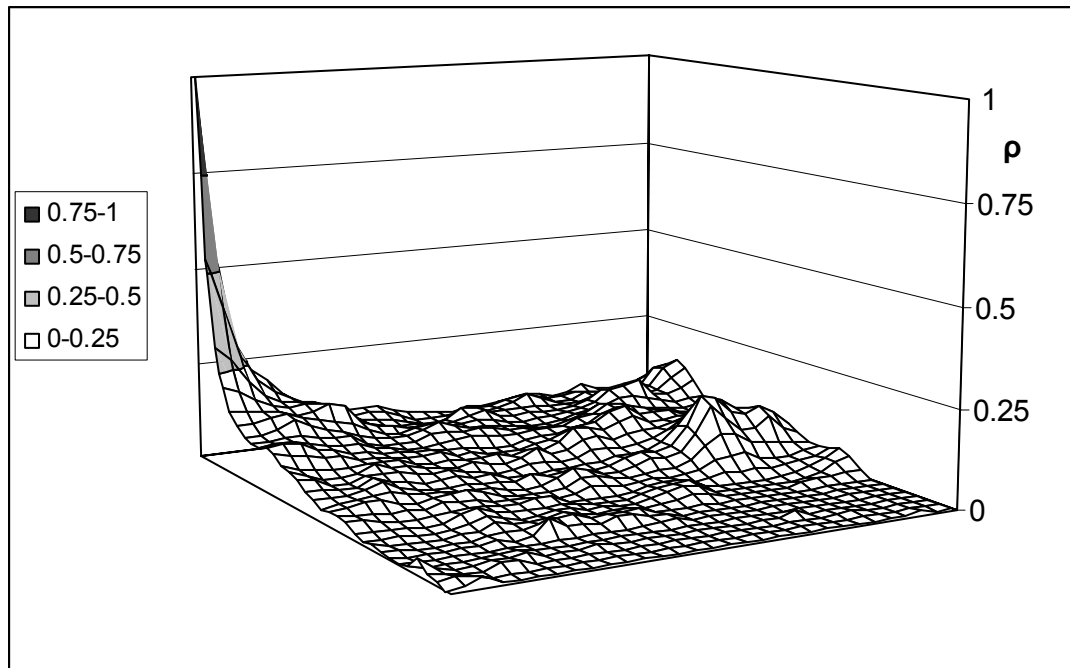
$$\rho_{\theta, \sigma} = 0.98$$

Το συνθετικό αυτοσυσχετόγραμμα λοιπόν αποκλίνει από το θεωρητικό για μεγάλη υστέρηση.



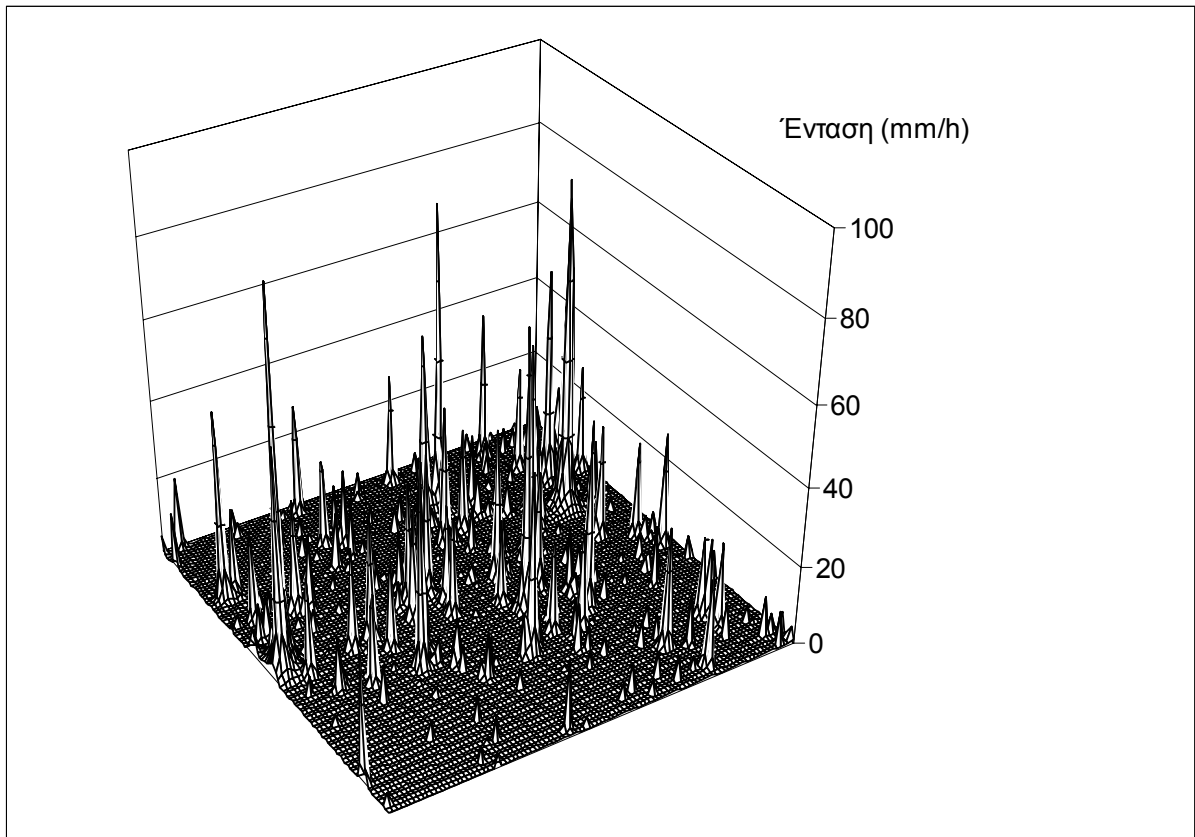
Σχήμα 5.16: Σύγκριση θεωρητικού και συνθετικού αυτοσυσχετογράμματος

Στο σχήμα 5.17 φαίνεται το αυτοσυσχετόγραμμα σε προοπτική άποψη



Σχήμα 5.17: Προοπτική άποψη του αυτοσυσχετογράμματος του συνθετικού πεδίου

Τέλος στο σχήμα 5.18 φαίνεται σε προοπτική άποψη το ανορθωμένο συνθετικό πεδίο.



Σχήμα 5.18: Το συνθετικό πεδίο

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη ενός γραμμικού μοντέλου προσομοίωσης δισδιάστατων τυχαίων πεδίων. Έμφαση δόθηκε στη διατήρηση της εμμονής. Το μοντέλο βασίστηκε στο σχήμα του συμμετρικού κινούμενου μέσου (symmetric moving average – SMA) το οποίο έχει τη δυνατότητα εξαγωγής κλειστών λύσεων ως προς τις παραμέτρους του. Το εν λόγω σχήμα επεκτάθηκε, μέσω θεωρητικών αναλύσεων, από τη μία στις δύο διαστάσεις, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην παραγωγή δισδιάστατων τυχαίων πεδίων. Τα κύρια συμπεράσματα που προκύπτουν από τις θεωρητικές αναλύσεις και τις εφαρμογές αυτής της εργασίας είναι:

- 1) Το μοντέλο που αναπτύχθηκε είναι απλό στην εφαρμογή, αφού αρκεί η εκτίμηση του συντελεστή Hurst, η οποία γίνεται πολύ εύκολα από το δείγμα, και στη συνέχεια όλες οι υπόλοιπες παράμετροι του μοντέλου υπολογίζονται με τη βοήθεια απλών εκφράσεων.
- 2) Και στις δύο εφαρμογές που παρουσιάστηκαν ο συντελεστής Hurst των συνθετικών πεδίων ήταν πρακτικά ίσος με το συντελεστή των αντίστοιχων φυσικών πεδίων.
- 3) Τα στατιστικά χαρακτηριστικά των συνθετικών πεδίων ήταν πολύ κοντά σε αυτά των φυσικών. Με εξαίρεση το συντελεστή ασυμμετρίας που είχε μια μικρή απόκλιση, τα υπόλοιπα αναπαράχθηκαν με μεγάλη ακρίβεια.
- 4) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του συνθετικού πεδίου και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης που υπολογίστηκε θεωρητικά είχαν μικρή απόκλιση. Το μοντέλο λοιπόν μπορεί να προσομοιώσει και να αναπαράγει το αυτοσυσχετόγραμμα πεδίου FGN.

Με δεδομένα τα παραπάνω μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι ο στόχος της εργασίας επιτεύχθηκε. Δύο αδυναμίες παρουσίασε μόνο το μοντέλο. Η μία σχετίζεται με τη διαδικασία της ανόρθωσης της τυποποιημένης συνθετικής χρονοσειράς (προκειμένου να μηδενιστούν οι παραγόμενες αρνητικές τιμές), η οποία έχει αποτέλεσμα την αύξηση του συντελεστή ασυμμετρίας. Η άλλη αδυναμία σχετίζεται με τη μορφή των συνθετικών πεδίων η οποία διαφέρει από τη μορφή των φυσικών στο ότι έχει λιγότερες μηδενικές τιμές και πιο διασκορπισμένες κορυφές. Παρ' όλ' αυτά οι μέγιστες τιμές διατηρήθηκαν. Αυτή η αδυναμία ίσως να οφείλεται στο σχετικά μικρό αριθμό συντελεστών βάρους που χρησιμοποιήθηκε, αλλά και στο γεγονός ότι για πολύ μικρή τιμή της υστέρησης ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης

των φυσικών πεδίων ήταν αρκετά μεγαλύτερος από τον θεωρητικά αναμενόμενο, σύμφωνα με το μοντέλο FGN. Η άρση αυτών των αδυναμιών, καθώς και η επέκταση της χρήσης του μοντέλου σε άλλα υδρομετεωρολογικά πεδία, εκτός από τις βροχοπτώσεις, μπορεί να αποτελέσει το αντικείμενο περαιτέρω έρευνας σχετικά με το υπόψη θέμα.

Αναφορές

- Κουτσογιάννης, Δ. (1996) *Στατιστική Υδρολογία*, Έκδοση 3, 307 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα
- Κουτσογιάννης, Δ. (2003) *Φασματική Ανάλυση Χρονσειρών*, Σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος: *Στοχαστική Υδρολογία*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τομέας ΥΠΥΘΕ, Αθήνα
- Μιμίκου, Μ. (1994) *Τεχνολογία Υδατικών Πόρων*, Έκδοση 2, 564 σελίδες, Παπασωτηρίου, Αθήνα
- Μιμίκου, Μ. και Μπαλτάς, Ε. (2001) *Τεχνική Υδρολογία*, 263 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα
- Bak, P. (1996) *How Nature Works, The Science of Self-Organized Criticality*. Copernicus, Springer-Verlag, New York, USA.
- Bhattacharya, R. N., Gupta, V.K. & Waymire, E. (1983) The Hurst effect under trends. *J. Appl. Prob.* **20**, 649-662.
- Bloofield, P. (1992) Trends in global temperature, *Climatic Change* **21**, 1-16
- Bracewell, R. N. (2000) *The Fourier Transform and its applications*, 616. McGraw-Hill International Editions, Singapore
- Eltahir, E. A. B. (1996) El Nino and the natural variability in the flow of the Nile River. *Wat. Resour. Res.* **32**(1), 131-137.
- Gneiting, T. & Schlather, M. (2004) Stochastic models that separate fractal dimension and the Hurst effect, *Society of Industrial and Applied Mathematics Review* **46**(2), 269-282.
- Haslett, J. & Raftery, A. E. (1989) Space-time modeling with long-memory dependence: assessing Ireland's wind power resource. *Appl. Statist.* **38**(1), 1-50.
- Hewett, T. A., (1986) Fractal distribution of reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport, *SPE Pap. 15386* presented at 61st Annual Technical Conference, Soc. of Pet. Eng., New Orleans, La.
- Hurst, H.E. (1951) Long term storage capacities of reservoirs. *Trans. ASCE* **116**, 776-808.
- Jones, P. D., Brifta, K. R., Barnett, T. D. & Tett, S. F. B. (1998) High-resolution Paleoclimatic Records for the last Millennium: Interpretation, Integration and Comparison with General Circulation Model Control-run Temperatures, *The Holocene* **8**, 155-471
- Koutsoyiannis, D. (2000) A generalized mathematical framework for stochastic simulation and forecast of hydrologic time series. *Wat. Resour. Re.* **36**(6), 1519-1534.
- Koutsoyiannis, D. (2002) The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy. *Hydrological Sciences-Journal-des Sciences Hydrologiques* **47**(4), 573-595.
- Koutsoyiannis, D. (2002b) Internal report: <http://www.itia.ntua.gr/getfile/511/2/2002HSJHurstSuppl.pdf>.
- Mandelbrot, B. B. (1965) Une classe de processus stochastiques homothetiques a soi: application a la loi climatologique de H. E. Hurst. *C. R. Acad. Sci. Paris* **260**, 3284-3277.
- Mandelbrot, B. B. (1977) *The fractal Geometry of Nature*, 248. Freeman, New York, USA.
- Molz, F. J. & Boman, G. K. (1993) A stochastic interpolation scheme in subsurface hydrology, *Wat. Resour. Re.* **29**, 3769-3774.
- Molz, F. J., Liu, H. H., & Szulga, J. (1997) Fractional Brownian motion and fractional Gaussian noise in subsurface hydrology: A review, presentation of fundamental properties, and extensions, *Wat. Resour. Re.* **33**(10), 2273-2286.
- Montanari, A., Rosso, R. & Taqqu, M. S. (1997) Fractionally differenced ARIMA models applied to hydrologic time series. *Wat. Resour. Res.* **33**(5), 1035-1044.

- National Research Council (Committee on Opportunities in the Hydrologic Sciences) (1991) *Opportunities in the Hydrologic Sciences*, 21. National Academy Press, Washington DC, USA.
- Neumann, S. P. (1994) Generalized scaling of permeabilities: Validation and effect of support scale, *Geophys. Res. Lett.* **21**, 349-352.
- Pavlopoulos, H. & Gupta, V. K. (2003) Scale invariance of regional wet and dry durations of rain fields: A diagnostic study, *Jour. of Geoph. Res.* **108**.
- Radziejewski, M. & Kundzewicz, Z. W. (1997) Fractal Analysis of flow of the river Warta. *J. Hydrol.* **200**, 280-294.
- Ripley, R.D. (1987) *Stochastic Simulation*, Wiley, New York, USA.
- Short, D. A., Kucera, P. A., Ferrier, B. S., Gerlach, J. C., Rutledge, S. A. & Thiele O. W. (1997) Shipboard radar rainfall patterns within the TOGA/COARE IFA, *Bull. Am. Meteorol. Soc.* **78**, 2871-2836.
- Stephenson, D. B., Pavan, V. & Bojariu, R. (2000) Is the North Atlantic Oscillation a random walk? *Int. J. Clim.* **20**, 1-18.
- Vanmarcke, E. (1988) *Random Fields*, 382. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA
- Vogel, R. M., Tsai, Y. & Limbrunner, J. F. (1998) The regional persistence and variability of annual streamflow in the United States. *Wat. Resour. Res.* **34**(12), 3445-3459.
- Wheater, H. S., Isham, V. S., Onof, C., Chandler, R. E., Northrop, P. J., Guiblin, P., Bate, S. M., Cox, D. R., Koutsoyiannis, D. (2000) *Generation of spatially consistent rainfall data*, Report to the Ministry of Agriculture, Fisheries and Food (2 Vol.). Also available as Res. Report No. 204, Dept. of Statist. Sci., University College London, Gower Street, London WC1E 6BT. (<http://www.ucl.ac.uk/Stats/abstracts.html>).

Παράρτημα Α

Εφαρμογή του μονοδιάστατου μοντέλου

Πίνακας Α.1: Τμήμα της ιστορικής (φυσικής) χρονοσειράς των Jones *et al.* (1998)

S/N	Ti	S/N	Ti	S/N	Ti	S/N	Ti	S/N	Ti	S/N	Ti
1	-0.24	51	-0.08	101	-0.07	151	-0.34	201	-0.48	251	-0.4
2	-0.02	52	0.41	102	-0.6	152	-0.7	202	-1.28	252	-0.33
3	-0.06	53	0.21	103	0.4	153	-0.61	203	-0.61	253	-0.02
4	-1.01	54	-0.01	104	0.74	154	-0.13	204	-0.19	254	0.22
5	-0.63	55	0.17	105	0.34	155	-0.29	205	0	255	-0.19
6	-0.37	56	-0.51	106	0.51	156	-0.03	206	-0.59	256	0.21
7	0.2	57	0.1	107	1.25	157	-0.32	207	-0.91	257	-0.29
8	-0.37	58	0.27	108	0.2	158	-0.67	208	-0.49	258	0.14
9	-0.56	59	0.61	109	-0.13	159	-0.19	209	-0.35	259	-1.36
10	0.01	60	-0.35	110	-0.54	160	-0.15	210	-0.55	260	-1.14
11	-0.25	61	-0.17	111	-0.45	161	-0.47	211	-0.46	261	-0.69
12	0.12	62	0.48	112	-0.4	162	-0.09	212	-0.01	262	-0.49
13	-0.69	63	0.35	113	-0.29	163	-0.14	213	-0.44	263	-0.45
14	-0.64	64	-0.73	114	0.22	164	0.35	214	-0.57	264	-0.86
15	-0.15	65	-0.34	115	-0.56	165	-0.17	215	-0.59	265	-0.39
16	-0.68	66	-0.34	116	-0.17	166	-0.02	216	-0.1	266	-0.13
17	-0.4	67	-0.21	117	-0.48	167	-0.36	217	-0.35	267	0.13
18	-0.8	68	-0.5	118	-0.66	168	0.14	218	-0.48	268	-0.32
19	-0.08	69	-0.54	119	-0.56	169	0.02	219	-0.13	269	-0.08
20	0.07	70	-0.09	120	-0.15	170	0.16	220	-0.45	270	0.39
21	0.06	71	-0.54	121	-0.41	171	-0.35	221	-0.24	271	-0.45
22	0.16	72	-0.05	122	-0.1	172	-0.27	222	0.26	272	0.17
23	-0.49	73	0.13	123	-0.07	173	-0.77	223	-0.36	273	-0.06
24	-0.57	74	0.32	124	-0.18	174	0	224	-0.41	274	0
25	-0.25	75	1.16	125	-0.77	175	-0.23	225	0.05	275	0.23
26	-0.04	76	0.15	126	-0.95	176	0.3	226	-0.49	276	-0.29
27	-0.57	77	-0.07	127	-0.51	177	-0.58	227	-0.68	277	-0.17
28	-0.12	78	-0.53	128	-0.73	178	-0.62	228	0.24	278	-0.17
29	0.57	79	-0.94	129	-0.53	179	-0.34	229	-1.06	279	-1.06
30	-0.92	80	-0.15	130	-0.95	180	-0.19	230	-0.63	280	-0.09
31	0.42	81	0.44	131	-0.5	181	-0.38	231	-1.31	281	-0.07
32	0.1	82	0.42	132	-0.33	182	-0.26	232	-0.77	282	-0.1
33	-1.63	83	0.39	133	-0.36	183	-0.49	233	-0.41	283	-0.13
34	0.43	84	-0.77	134	-0.48	184	0.06	234	-0.74	284	0.1
35	0.31	85	0.53	135	-0.41	185	0.01	235	-0.57	285	-0.7
36	-0.35	86	-0.31	136	0	186	0.08	236	-0.13	286	-0.02
37	0.03	87	0.46	137	-0.55	187	-0.24	237	-0.48	287	-0.31
38	0.01	88	0.41	138	-0.33	188	0.09	238	-0.33	288	-0.68
39	0.37	89	0.13	139	-0.23	189	-0.28	239	-0.43	289	-1
40	0.04	90	-0.09	140	-0.92	190	-0.8	240	-0.47	290	-0.39
41	-0.18	91	-0.01	141	-0.01	191	-0.12	241	-0.42	291	-0.65
42	-0.69	92	0.36	142	-0.12	192	0.29	242	0.09	292	-0.88
43	-0.57	93	0.14	143	0	193	-0.46	243	0	293	-0.34
44	0.57	94	-0.27	144	-0.26	194	0.26	244	-0.07	294	-0.93
45	-0.03	95	-0.41	145	-0.43	195	-0.93	245	-0.47	295	-0.6
46	0.59	96	-0.04	146	-0.21	196	-0.49	246	-0.17	296	0.08
47	-0.69	97	-0.07	147	-0.36	197	-0.37	247	-0.3	297	-0.43
48	-0.05	98	0.42	148	-0.3	198	-0.83	248	-0.07	298	-0.39
49	0.42	99	0.52	149	-0.22	199	-0.4	249	-0.27	299	-1.06
50	-0.5	100	-0.3	150	-0.73	200	-0.23	250	-0.05	300	-0.14

Πίνακας Α.2: Η ακολουθία των συντελεστών βάρους

j	α_j	j	α_j
0	0.827	31	0.022
1	0.234	32	0.022
2	0.133	33	0.022
3	0.101	34	0.021
4	0.084	35	0.021
5	0.073	36	0.02
6	0.064	37	0.02
7	0.058	38	0.02
8	0.054	39	0.019
9	0.05	40	0.019
10	0.046	41	0.019
11	0.044	42	0.019
12	0.041	43	0.018
13	0.039	44	0.018
14	0.037	45	0.018
15	0.036	46	0.017
16	0.034	47	0.017
17	0.033	48	0.017
18	0.032	49	0.017
19	0.031	50	0.017
20	0.03	51	0.016
21	0.029	52	0.016
22	0.028	53	0.016
23	0.027	54	0.016
24	0.026	55	0.016
25	0.026	56	0.015
26	0.025	57	0.015
27	0.025	58	0.015
28	0.024	59	0.015
29	0.023	60	0.015
30	0.023		

Πίνακας Α.3: Αυτοσυσχετογράμματα

μ	0.278	0.2391	0.0839	0.0151	0.0206
	X	Y	xy	(x-mx) ²	(y-my) ²
lag	θεωρ	συνθ			
0	1	1	1	0.52126	0.57898
1	0.6192	0.6473	0.4008	0.11641	0.1666
2	0.51	0.5122	0.2612	0.0538	0.07461
3	0.4552	0.4556	0.2074	0.03141	0.04686
4	0.42	0.4133	0.1736	0.02016	0.03036
5	0.3946	0.3847	0.1518	0.01358	0.02119
6	0.3749	0.3687	0.1382	0.00939	0.01679
7	0.3591	0.3447	0.1238	0.00657	0.01115
8	0.3459	0.3226	0.1116	0.00461	0.00697
9	0.3347	0.322	0.1078	0.00321	0.00687
10	0.325	0.3278	0.1065	0.0022	0.00788
11	0.3164	0.3144	0.0995	0.00147	0.00568
12	0.3088	0.3036	0.0937	0.00095	0.00416
13	0.3019	0.2904	0.0877	0.00057	0.00263
14	0.2957	0.2883	0.0853	0.00031	0.00242
15	0.2901	0.2739	0.0795	0.00015	0.00121
16	0.2849	0.2711	0.0772	4.7E-05	0.00102
17	0.2801	0.265	0.0742	4.3E-06	0.00067
18	0.2756	0.2601	0.0717	5.6E-06	0.00044
19	0.2715	0.2566	0.0697	4.2E-05	0.00031
20	0.2676	0.2534	0.0678	0.00011	0.0002
21	0.264	0.2467	0.0651	0.0002	5.8E-05
22	0.2606	0.2494	0.065	0.0003	0.00011
23	0.2574	0.249	0.0641	0.00043	9.7E-05
24	0.2543	0.24	0.061	0.00056	8.9E-07
25	0.2514	0.226	0.0568	0.00071	0.00017
26	0.2487	0.2205	0.0548	0.00086	0.00035
27	0.2461	0.2111	0.052	0.00102	0.00078
28	0.2436	0.2044	0.0498	0.00119	0.00121
29	0.2412	0.2015	0.0486	0.00136	0.00142
30	0.2389	0.1996	0.0477	0.00153	0.00156
31	0.2367	0.2035	0.0482	0.0017	0.00127
32	0.2346	0.2009	0.0471	0.00188	0.00146
33	0.2326	0.1981	0.0461	0.00206	0.00168
34	0.2307	0.1868	0.0431	0.00224	0.00273
35	0.2288	0.1767	0.0404	0.00242	0.00389
36	0.227	0.1721	0.0391	0.0026	0.00449
37	0.2253	0.1664	0.0375	0.00278	0.00528
38	0.2236	0.1553	0.0347	0.00296	0.00702
39	0.222	0.1462	0.0325	0.00314	0.00863
40	0.2204	0.1531	0.0337	0.00332	0.0074
41	0.2189	0.1509	0.033	0.00349	0.00778
42	0.2174	0.1502	0.0326	0.00367	0.00791
43	0.216	0.1464	0.0316	0.00385	0.00858
44	0.2146	0.1525	0.0327	0.00402	0.0075
45	0.2133	0.1491	0.0318	0.00419	0.0081
46	0.212	0.1478	0.0313	0.00436	0.00834
47	0.2107	0.1472	0.031	0.00453	0.00844
48	0.2095	0.139	0.0291	0.0047	0.01003
49	0.2082	0.1321	0.0275	0.00487	0.01146
50	0.2071	0.1208	0.025	0.00503	0.01398
51	0.2059	0.1188	0.0245	0.0052	0.01446
52	0.2048	0.1247	0.0255	0.00536	0.01309
53	0.2037	0.1398	0.0285	0.00552	0.00987
54	0.2027	0.1372	0.0278	0.00568	0.01039
55	0.2016	0.1309	0.0264	0.00584	0.0117
56	0.2006	0.1297	0.026	0.00599	0.01198
57	0.1996	0.1376	0.0275	0.00615	0.01029
58	0.1986	0.1256	0.0249	0.0063	0.01288
59	0.1977	0.1166	0.0231	0.00645	0.01499
60	0.1968	0.1049	0.0206	0.0066	0.018

Παράρτημα Β

Εφαρμογή του δισδιάστατου μοντέλου

Πίνακας Β.1: Τμήμα του φυσικού πεδίου από το TOGA-COARE (κωδ. δείγματος MIT_921110_2321_2km)

	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
45	0	0	0	0	0	0.013	0.036	0.486	4.316	6.628	12.67	14.01	16.08	7.246	0.012
46	0	0	0	0	0	0.019	0.034	0.421	2.723	18.31	39.82	31.36	22.91	8.662	0.014
47	0	0.01	0.01	0	0	0.017	0.038	0.228	2.755	17.58	32.46	23.38	10.35	1.718	0.015
48	0	0.011	0.014	0.015	0.011	0.01	0.125	0.881	2.7	6.185	13.61	26.31	13.3	0.262	0.019
49	0	0.012	0.015	0.014	0.02	0.031	0.175	0.718	1.263	2.096	12.85	38.92	26.69	5.45	0.105
50	0	0	0	0	0.044	0.054	0.107	0.145	0.16	0.682	6.628	27.95	35.49	14.75	0.83
51	0	0	0	0	0.038	0.049	0.034	0.019	0.032	0.083	3.419	21.39	42.42	23.99	3.468
52	0	0	0	0	0	0.012	0.009	0.009	0.037	0.479	3.284	15.49	28.52	24.34	8.154
53	0	0	0	0	0	0	0.009	0.028	0.132	0.489	1.632	4.585	8.762	11.75	5.958
54	0	0	0	0	0	0	0.014	0.043	0.161	0.665	1.492	19.17	17.94	3.611	2.491
55	0	0	0	0	0	0.018	0.043	0.078	0.176	0.587	1.945	16.94	16.51	1.518	0.986
56	0	0	0.018	0.029	0.072	0.078	0.043	0.065	0.107	0.113	0.876	1.779	0.934	0.106	0.103
57	0.009	0.013	0.025	0.057	0.105	0.099	0.033	0.01	0.064	0.041	0.026	0.034	0.025	0.018	0.028
58	0.009	0.013	0.023	0.06	0.098	0.085	0.016	0.008	0	0.006	0.007	0.008	0.091	0.239	0.179
59	0	0	0.022	0.047	0.052	0.028	0	0	0	0.006	0.007	0.009	1.962	2.013	0.221
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0.009	0.009	0.007	0.019	2.002	10.78	9.416
61	0	0	0	0	0	0	0	0	0.069	0.045	0.016	0.033	4.242	20.07	15.23
62	0	0	0	0	0	0	0	0	0.071	0.037	0.016	0.028	2.126	7.991	4.899
63	0	0.01	0.009	0.01	0.013	0.017	0.015	0.012	0.009	0.009	0.013	0.022	0.163	0.268	0.237
64	0	0.015	0.019	0.026	0.03	0.03	0.035	0.037	0.031	0.03	0.023	0.017	0.015	0.02	0.053
65	0	0.02	0.032	0.047	0.057	0.06	0.064	0.048	0.036	0.045	0.052	0.047	0.019	0.011	0.008
66	0	0.022	0.033	0.049	0.064	0.066	0.061	0.056	0.202	0.175	0.086	0.09	0.041	0.016	0.01
67	0	0.015	0.023	0.028	0.032	0.024	0.036	0.116	0.339	0.269	0.149	0.14	0.059	0.048	0.377
68	0	0	0.014	0.014	0.016	0.007	0.046	0.103	0.225	0.186	0.142	0.109	0.085	0.327	11.09
69	0	0	0	0	0	0	0.027	0.051	0.073	0.089	0.078	0.102	0.279	2.084	20.31
70	0	0	0	0	0	0	0.009	0.051	0.047	0.037	0.048	0.116	0.393	2.513	13.07
71	0	0	0	0	0	0	0	0.016	0.023	0.026	0.028	0.076	0.216	0.866	5.356
72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.005	0.01	0.019	0.024	0.207	1.641
73	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.011	0.023	0.401
74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01	0.012	0.011
75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.006	0.006
76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.005
77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.012	0.01
79	0	0	0	0	0	0	0	0	0.011	0.012	0.009	0.013	0.022	0.023	0.015
80	0	0	0	0	0.014	0.015	0.017	0	0.011	0.011	0.01	0.023	0.054	0.085	0.065
81	0	0	0	0	0.014	0.017	0.018	0.017	0.019	0.023	0.015	0.083	0.119	0.145	0.107
82	0	0	0	0	0.015	0.019	0.018	0.018	0.027	0.041	0.037	0.075	0.086	0.062	0.073
83	0	0	0	0	0.03	0.036	0.027	0.027	0.039	0.063	0.066	0.052	0.051	0.476	0.49
84	0	0	0	0.057	0.067	0.063	0.082	0.081	0.058	0.06	0.057	0.043	0.079	1.377	1.162
85	0	0	0.047	0.057	0.084	0.134	0.163	0.207	0.169	0.091	0.052	0.031	0.049	0.648	0.539
86	0	0	0.033	0.064	0.144	0.218	0.224	0.223	0.166	0.089	0.048	0.025	0.026	0.036	0.057
87	0	0	0.026	0.092	0.188	0.275	0.262	0.133	0.093	0.06	0.029	0.038	0.071	0.061	0.016
88	0	0	0.029	0.063	0.13	0.227	0.17	0.06	0.068	0.065	0.046	0.054	0.149	0.203	0
89	0	0	0	0.02	0.05	0.134	0.097	0.037	0.05	0.061	0.063	0.073	0.123	0.196	0
90	0	0	0	0	0	0.032	0.02	0.016	0.046	0.069	0.067	0.054	0.069	0	0
91	0	0	0	0	0	0	0	0	0.044	0.069	0.071	0.043	0.028	0	0
92	0	0	0	0	0	0	0	0	0.03	0.046	0.064	0.049	0.029	0	0
93	0	0	0	0	0	0	0	0	0.024	0.035	0.04	0.032	0.026	0.016	0
94	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.022	0.045	0.052	0.016	0

Πίνακας Β.2: Οι ακολουθίες των συντελεστών βάρους των δύο εφαρμογών

Εφαρμογή Α				Εφαρμογή Β			
s	a(s)	s	a(s)	s	a(s)	s	a(s)
0	0.838229	36	0.001118	0	0.851267	36	0.00101
1	0.183413	37	0.001077	1	0.179638	37	0.000973
2	0.060055	38	0.001038	2	0.057628	38	0.000938
3	0.033581	39	0.001002	3	0.031928	39	0.000905
4	0.022475	40	0.000968	4	0.021239	40	0.000874
5	0.016514	41	0.000936	5	0.015533	41	0.000844
6	0.012854	42	0.000906	6	0.012046	42	0.000817
7	0.010407	43	0.000878	7	0.009722	43	0.000791
8	0.00867	44	0.000851	8	0.008077	44	0.000766
9	0.007382	45	0.000825	9	0.006861	45	0.000742
10	0.006393	46	0.000801	10	0.005929	46	0.00072
11	0.005614	47	0.000778	11	0.005197	47	0.000699
12	0.004986	48	0.000756	12	0.004607	48	0.000679
13	0.004471	49	0.000735	13	0.004125	49	0.00066
14	0.004041	50	0.000715	14	0.003723	50	0.000642
15	0.003679	51	0.000696	15	0.003384	51	0.000625
16	0.003369	52	0.000678	16	0.003096	52	0.000608
17	0.003102	53	0.00066	17	0.002847	53	0.000592
18	0.00287	54	0.000644	18	0.002631	54	0.000577
19	0.002666	55	0.000628	19	0.002441	55	0.000563
20	0.002487	56	0.000613	20	0.002274	56	0.000549
21	0.002327	57	0.000598	21	0.002126	57	0.000536
22	0.002184	58	0.000584	22	0.001994	58	0.000523
23	0.002056	59	0.000571	23	0.001875	59	0.000511
24	0.00194	60	0.000558	24	0.001768	60	0.000499
25	0.001835	61	0.000545	25	0.001671	61	0.000488
26	0.00174	62	0.000534	26	0.001583	62	0.000477
27	0.001653	63	0.000522	27	0.001503	63	0.000467
28	0.001573	64	0.000511	28	0.001429	64	0.000457
29	0.0015	65	0.0005	29	0.001362	65	0.000447
30	0.001432	66	0.00049	30	0.001299	66	0.000438
31	0.00137	67	0.00048	31	0.001242	67	0.000429
32	0.001312	68	0.000471	32	0.001189	68	0.00042
33	0.001258	69	0.000461	33	0.001139	69	0.000412
34	0.001208	70	0.000452	34	0.001093	70	0.000403
35	0.001161			35	0.00105		

Παράρτημα Γ

Αλγόριθμος γέννησης τυχαίων αριθμών της κατανομής Γάμα 2

Έστω ότι θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς w_i της κατανομής Γάμα 2 παραμέτρων, με παράμετρο σχήματος $\kappa > 0$ και παράμετρο κλίμακας $\lambda = 1$. Προτείνεται (Ripley, 1987) ο ακόλουθος αλγόριθμος:

1) Υπολογίζονται από την τιμή του κ την τιμή των αριθμών k και τ για τους οποίους ισχύει ότι $\kappa = k + \tau$, $0 < \tau < 1$, $k = [\kappa]$ (δηλαδή ο k είναι το ακέραιο μέρος του κ).

2) Γενώνται οι ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί $v_i, r_i, u_i, u_{i,j}$.

3) Υπολογίζονται οι αριθμοί $a_i = v_i^{1/\tau}$ και $b_i = r_i^{1/(1-\tau)}$.

4) Ελέγχεται αν ισχύει $a_i + b_i \leq 1$. Αν δεν ισχύει επιστρέφουμε στο βήμα 2, αλλιώς,

5) Υπολογίζονται οι τυχαίοι αριθμοί w_i από τη σχέση $w_i = -\frac{a_i}{a_i + b_i} \cdot \ln u_i - \sum_{j=1}^k \ln u_{i,j}$

6) Αν χρειαζόμαστε τυχαίους αριθμούς z_i της κατανομής Γάμα τριών παραμέτρων, με παραμέτρους σχήματος $\kappa_z = \kappa$, κλίμακας $\lambda_z \neq \lambda = 1$, θέσης c , υπολογίζουμε τους w_i και από αυτούς προκύπτουν οι z_i σύμφωνα με τη σχέση $z_i = \frac{w_i}{\lambda_z} + c$