

# Στοχαστική Προσομοίωση Δισδιάστατων Τυχαίων Πεδίων με Διατήρηση της Εμμοσύνης

Παρουσίαση Διπλωματικής Εργασίας

22/07/2004

Νίκος Θεοδωράτος

Επιβλέπων: Δ. Κουτσογιάννης, Αν. Καθηγητής



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και  
Θαλάσσιων Έργων

# Διάρθρωση της παρουσίασης

- Εισαγωγή
- Θεωρητική Επεξεργασία του μοντέλου
- Εφαρμογές με τη χρήση του μοντέλου
- Συμπεράσματα

# Εισαγωγή 1: Αντικείμενο της Εργασίας

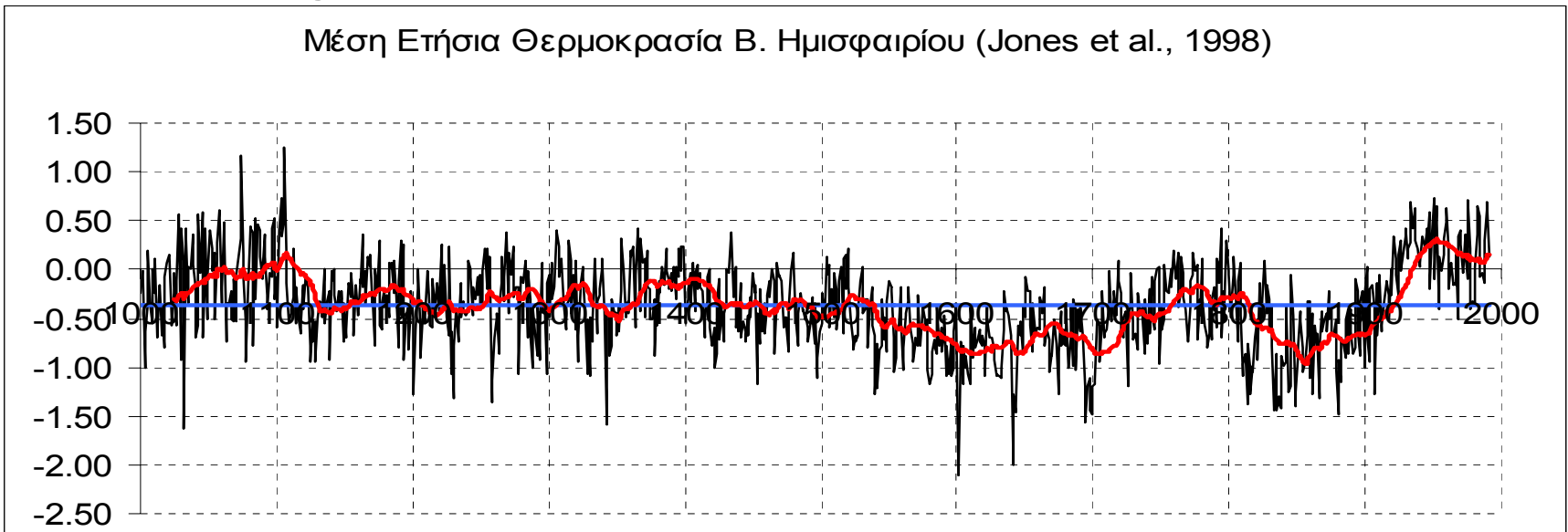
- Ανάγκη Αντιπλημμυρικής Προστασίας
- Αντιπλημμυρικός σχεδιασμός και προσομοίωση
- Χωρικά συνεπής προσομοίωση
- Ανάπτυξη στοχαστικού χωρικού μοντέλου βροχής με διατήρηση της Εμμοχής

# Εισαγωγή 2: Συμβολισμοί

- Μέση τιμή:  $\mu_X = m_X = E[X]$
- Διασπορά:  $\gamma_{0X} = \sigma^2_X = E[(X - \mu_X)^2] = Var[X]$
- Τυπική Απόκλιση:  $\sigma_X = \sqrt{\sigma^2_X}$
- Συντελεστής Ασυμμετρίας:  $\xi_X = \frac{\mu^{(3)}_X}{\sigma^3_X}$
- Συνδιασπορά:  $\sigma_{XY} = Cov[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$
- Συντελεστής Αυτοσυσχέτισης:  $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$

# Εισαγωγή 3: Εμμονή και Φαινόμενο Hurst 1

- Ανακαλύφθηκε το 1951 από τον Hurst
- Ομαδοποίηση υγρών ετών σε υγρές περιόδους και ξηρών ετών σε ξηρές περιόδους
- Οφείλεται σε τυχαίες διακυμάνσεις σε όλες τις κλίμακες



# Εισαγωγή 4: Εμμογή και Φαινόμενο Hurst 2

- Ανέλιξη FGN: 
$$\left(Z_i^{(k)} - k\mu\right) \stackrel{d}{=} \left(\frac{k}{l}\right)^H \left(Z_j^{(l)} - l\mu\right)$$
- Εισήχθη το 1965 από τον Mandelbrot
- Προσομοιώνει το φαινόμενο Hurst και την εμμογή
- Δύο χρήσιμες ιδιότητες:
$$\gamma_0^{(k)} = k^{2H} \cdot \gamma_0^{(1)}$$
$$\rho_j = H(2H - 1) \cdot j^{2H-2}$$
- Με περιορισμό:  $0.5 \leq H \leq 1$

# Εισαγωγή 4: Μέτρηση βροχής με radar

- Διαφορές με κλασικές μεθόδους
- Βασική αρχή λειτουργίας: Ανάκλαση ραδιοκυμάτων στα υδροσταγονίδια
- Ανακλαστικότητα και ένταση βροχής
- Στην παρούσα εργασία: Δεδομένα από radar

του πειράματος TOGA-COARE. Υπολογισμός

έντασης βροχής από τη σχέση: 
$$i = \left( \frac{Z}{230} \right)^{1/1.25}$$

# Θεωρητική Επεξεργασία 1: Δομή Μοντέλου

- Ανήκει στην κατηγορία Συμμετρικού Κυλιόμενου Μέσου (SMA)
- Μετασχηματίζει πεδίο λευκού θορύβου  $V$  σε πεδίο FGN
- Έχει εξίσωση: 
$$Z(i, j) = \sum_{u=-q}^q \sum_{v=-q}^q a(u, v) V(i-u, j-v)$$
- Αρκεί η εκτίμηση των  $a(u, v)$  για τη σύνθεση πεδίου FGN



## Θεωρητική Επεξεργασία 2: Βασικές Σχέσεις 1

- Συνδιασπορά:  $\gamma(\eta, \xi) = \sum \sum \alpha(u, v) \alpha(u + \eta, v + \xi)$
- Διασπορά:  $\gamma_0 = \sum \sum (\alpha(u, v))^2$
- Φάσμα Ισχύος:  $s_\alpha = \sqrt{s_\gamma}$

## Θεωρητική Επεξεργασία 3: Βασικές Σχέσεις 2

Παραδοχή:

Συνδιασπορά σε συνεχές πεδίο:  $\gamma(r) = A \cdot r^{-b}$ ,  $b = 4 - 4H$   
 $0 \leq b \leq 2$

- Φάσμα Ισχύος:  $s_\gamma(q) = A \pi^{b-1} \frac{\Gamma(1 - b/2)}{\Gamma(b/2)} q^{b-2}$

ή  $s_\gamma(q) = A \cdot d(b) \cdot q^{b-2}$ ,  $d(b) = \pi^{b-1} \frac{\Gamma(1 - b/2)}{\Gamma(b/2)}$

# Θεωρητική Επεξεργασία 4: Βασικές Σχέσεις 3

- Διακριτοποίηση της Συνδιασποράς:

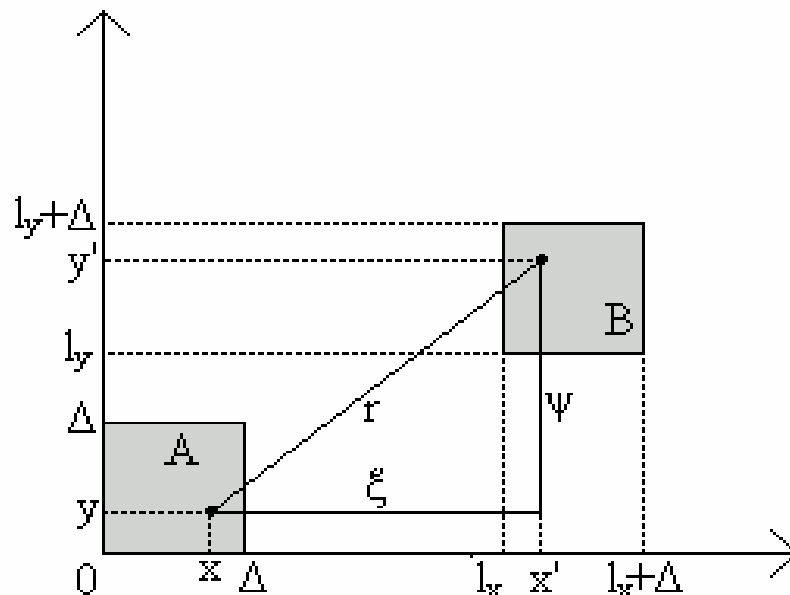
$$\gamma(l_x, l_y) = \iiint \iiint \gamma(r) dx dy dx' dy'$$

- Καταλήγουμε στην προσέγγιση:

$$\gamma(s) = A(b) \cdot \left( s - \frac{0.1 \cdot b^{1.4}}{s} \right)^{-b}$$

με

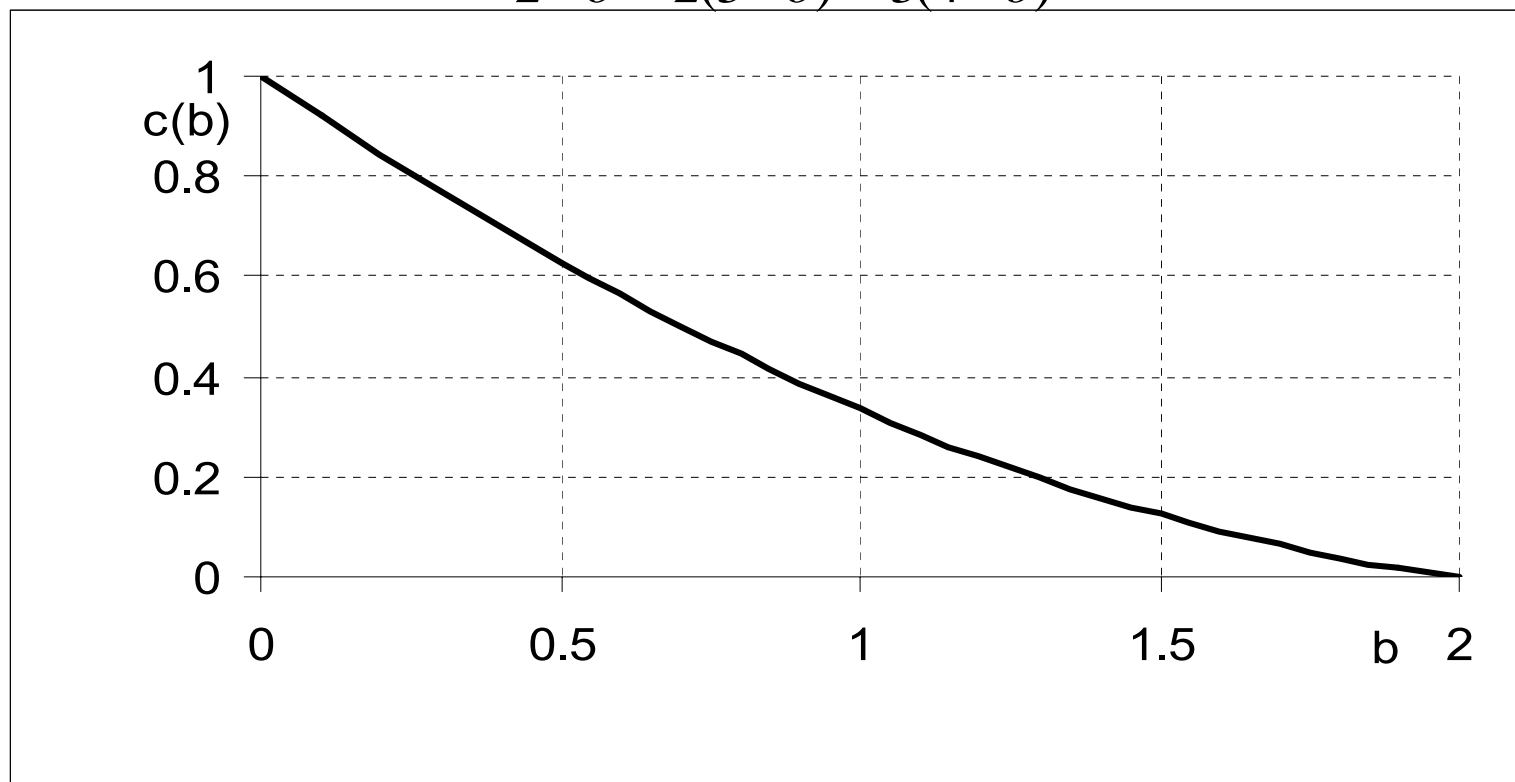
$$A(b) = \gamma_0 c(b), \quad c(b) = \frac{1}{\frac{2\pi}{2-b} - \frac{7\pi-6}{2(3-b)} + \frac{2\pi}{3(4-b)}}$$



# Θεωρητική Επεξεργασία 5: Βασικές Σχέσεις 4

Διάγραμμα του  $c(b)$

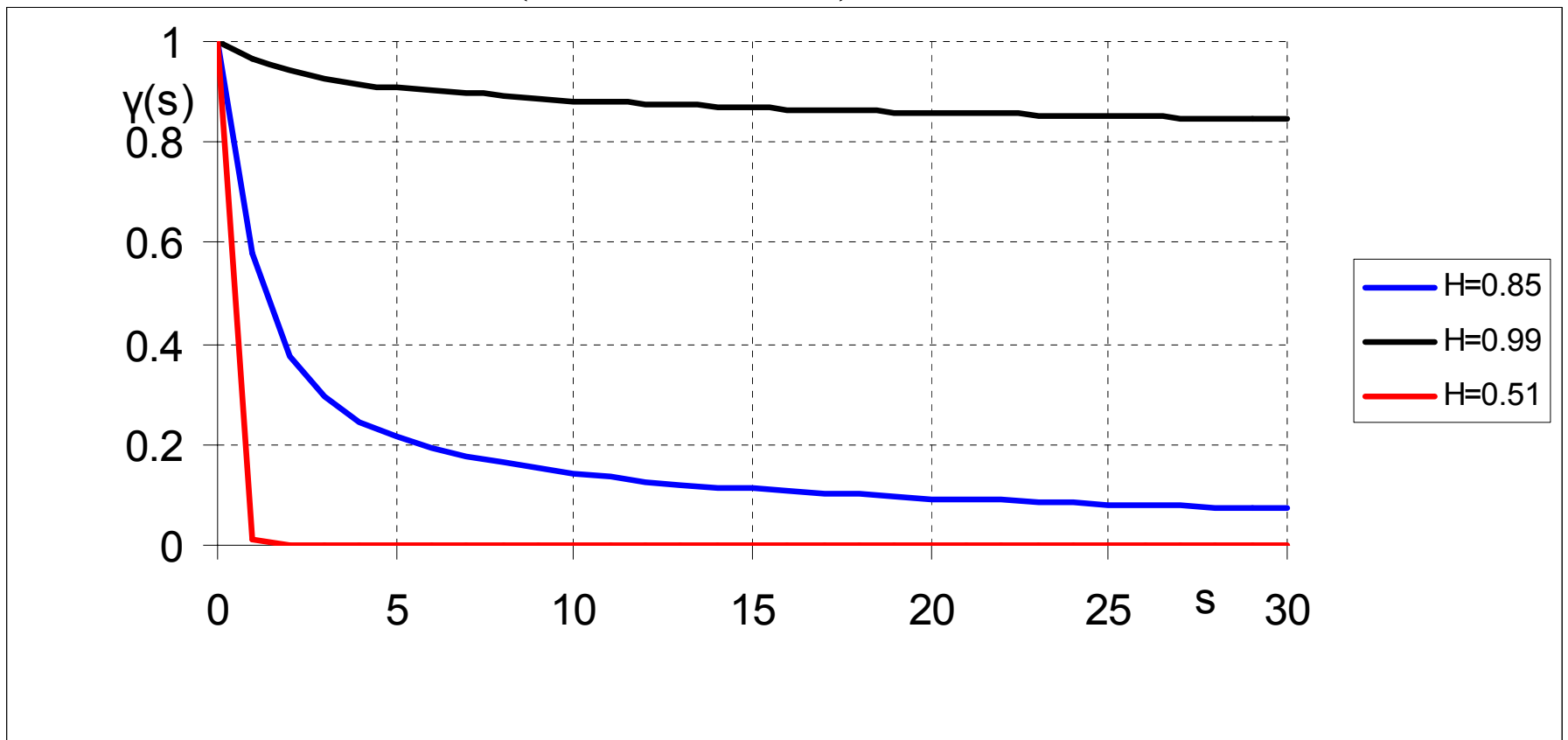
$$c(b) = \frac{1}{\frac{2\pi}{2-b} - \frac{7\pi-6}{2(3-b)} + \frac{2\pi}{3(4-b)}}$$



# Θεωρητική Επεξεργασία 6: Βασικές Σχέσεις 5

Διάγραμμα του  $\gamma(s)$  με  $\gamma_0=1$ , για διάφορα  $H$

$$\gamma(s) = \gamma_0 \cdot c(b) \cdot \left( s - \frac{0.1 \cdot b^{1.4}}{s} \right)^{-b} \quad b = 4 - 4H$$



# Θεωρητική Επεξεργασία 7: Βασικές Σχέσεις 6

Υπολογισμός ακολουθίας συντελεστών βάρους, μέσω Φάσματος Ισχύος:

$$s_\alpha = \sqrt{s_\gamma} \quad s_\gamma(q) = \gamma_0 \cdot c(b) \cdot d(b) \cdot q^{b-2}$$

$$s_a(q) = \sqrt{\gamma_0 \cdot c(b) \cdot d(b)} \cdot q^{b/2-1}$$

$$s_a(q) = a_0 \cdot c(b') \cdot d(b') \cdot q^{b'-2}$$

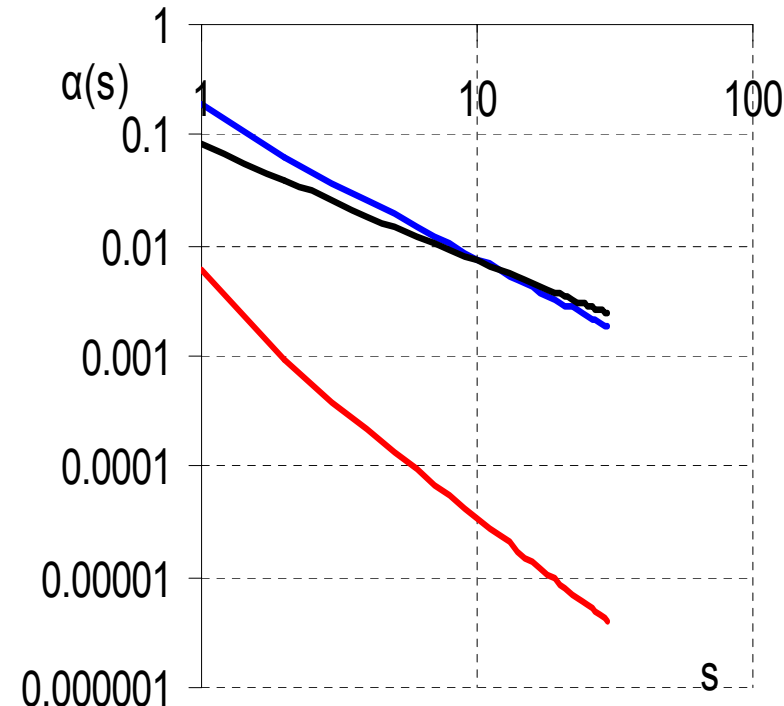
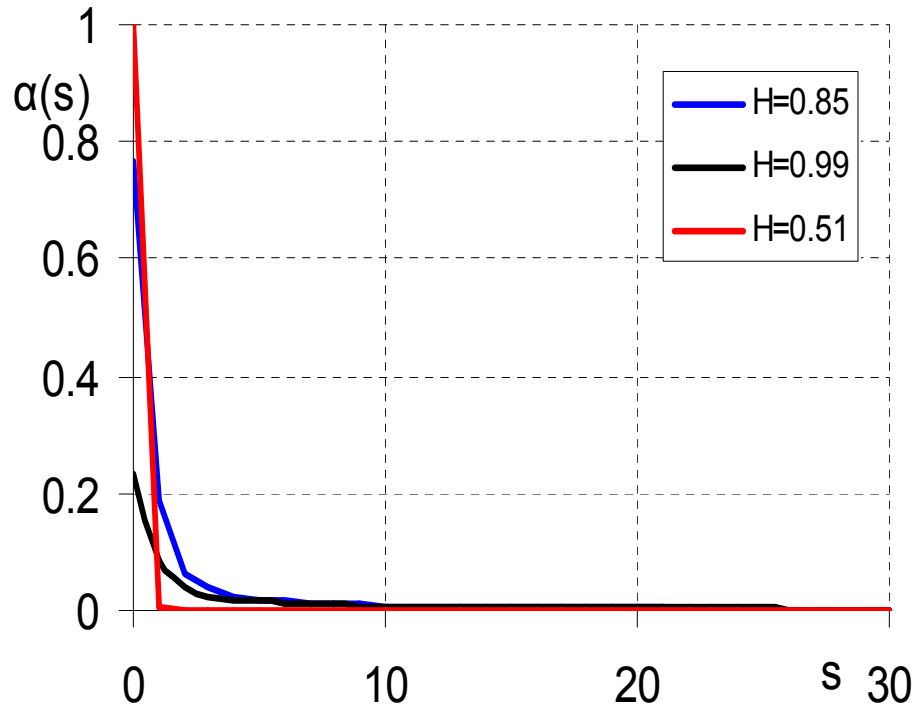
$$a_0 = \sqrt{\gamma_0} \cdot \frac{\sqrt{c(b)} \cdot \sqrt{d(b)}}{c(b') \cdot d(b')}, \quad b' = b/2 + 1$$

$$a(s) = a_0 \cdot c(b') \cdot \left( s - \frac{0.1 \cdot b'^{1.4}}{s} \right)^{-b'}$$

# Θεωρητική Επεξεργασία 8: Βασικές Σχέσεις 7

Διάγραμμα του  $\alpha(s)$  με  $\gamma_0=1$ , για διάφορα  $H$

$$\alpha(s) = a_0 \cdot c(b') \cdot \left( s - \frac{0.1 \cdot b'^{1.4}}{s} \right)^{-b'} \quad a_0 = \sqrt{\gamma_0} \cdot \frac{\sqrt{c(b)} \cdot \sqrt{d(b)}}{c(b') \cdot d(b')}, \quad b' = b/2 + 1$$



# Θεωρητική Επεξεργασία 9:

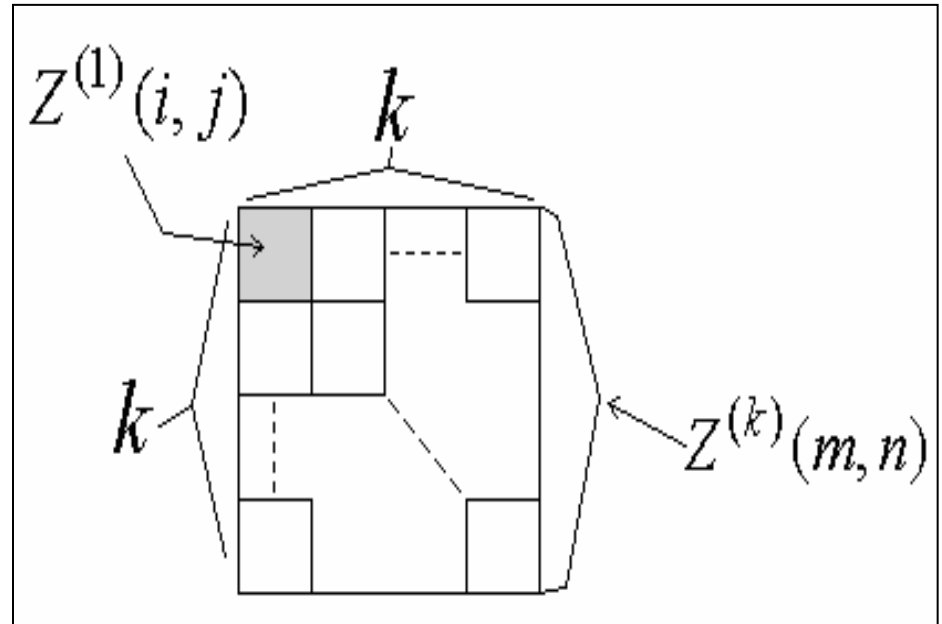
Εκτίμηση Παραμέτρων. Εκτίμηση συντελεστή  $H$

Συναθροισμένο Πεδίο:

$$Z^{(k)}(m, n) = \sum \sum Z^{(1)}(i, j)$$

Η διασπορά ως  
συνάρτηση της  
κλίμακας:

$$\text{Var}[Z^{(k)}] = k^{4H} \cdot \text{Var}[Z^{(1)}]$$





# Θεωρητική Επεξεργασία 10: Εκτίμηση Παραμέτρων.

Εκτίμηση συντελεστή ασυμμετρίας του λευκού θορύβου  $V$

Για σύνθεση πεδίου με ασυμμετρία  $\xi_z$  ο λευκός θόρυβος πρέπει να έχει ασυμμετρία:

$$\xi_V = \frac{\xi_Z \cdot \gamma_0^{3/2}}{\sum \sum a^3(u, v)}$$

# Εφαρμογή Μεθοδολογίας

1. Από το δείγμα: Υπολογίζεται η διασπορά
2. Από το δείγμα: Με συνάθροιση υπολογίζεται ο συντελεστής  $H$ , και οι εκθέτες  $b$  και  $b'$
3. Κατασκευάζεται η ακολουθία των συντελεστών βάρους  $\alpha(u, v)$
4. Παράγεται λευκός θόρυβος με κατάλληλο συντελεστή ασυμμετρίας
5. Παράγεται το Συνθετικό Πεδίο

# Εφαρμογή Α 1

- Κωδικός Δείγματος:  
MIT\_921110\_2321\_2km
- Στατιστικά χαρακτηριστικά:

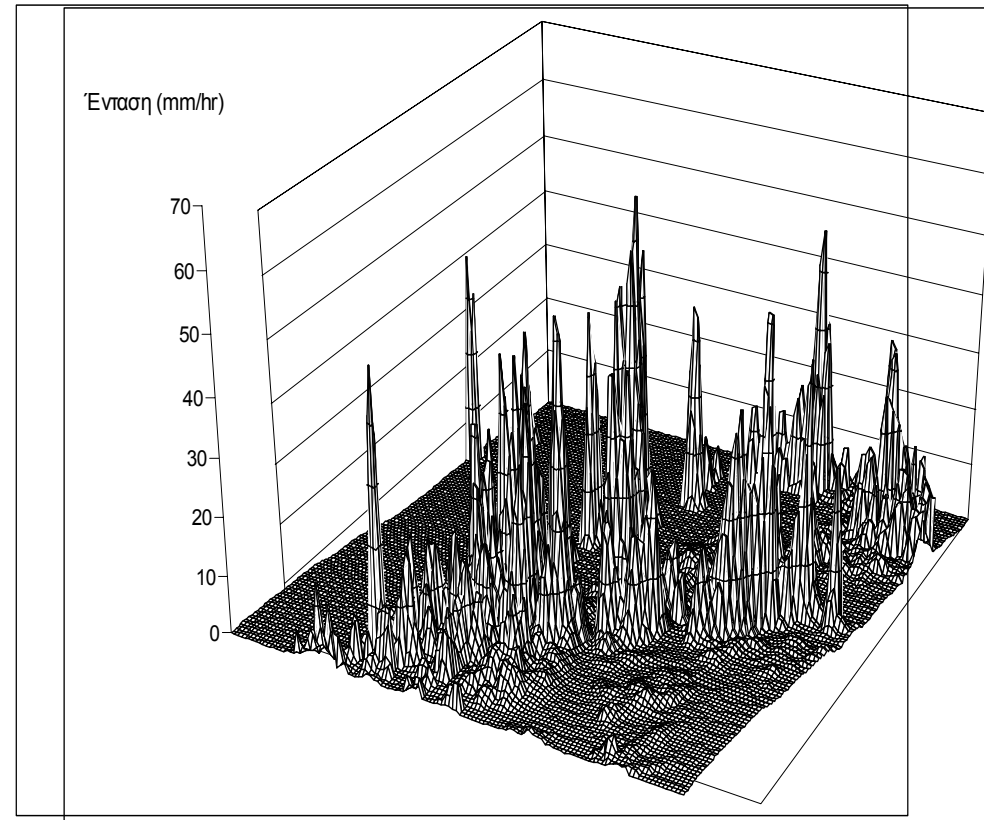
$$\mu_{Z\phi} = 1.45$$

$$\sigma^2_{Z\phi} = 18.85$$

$$\sigma_{Z\phi} = 4.34$$

$$\xi_{Z\phi} = 5.77$$

- Τυποποίηση Πεδίου

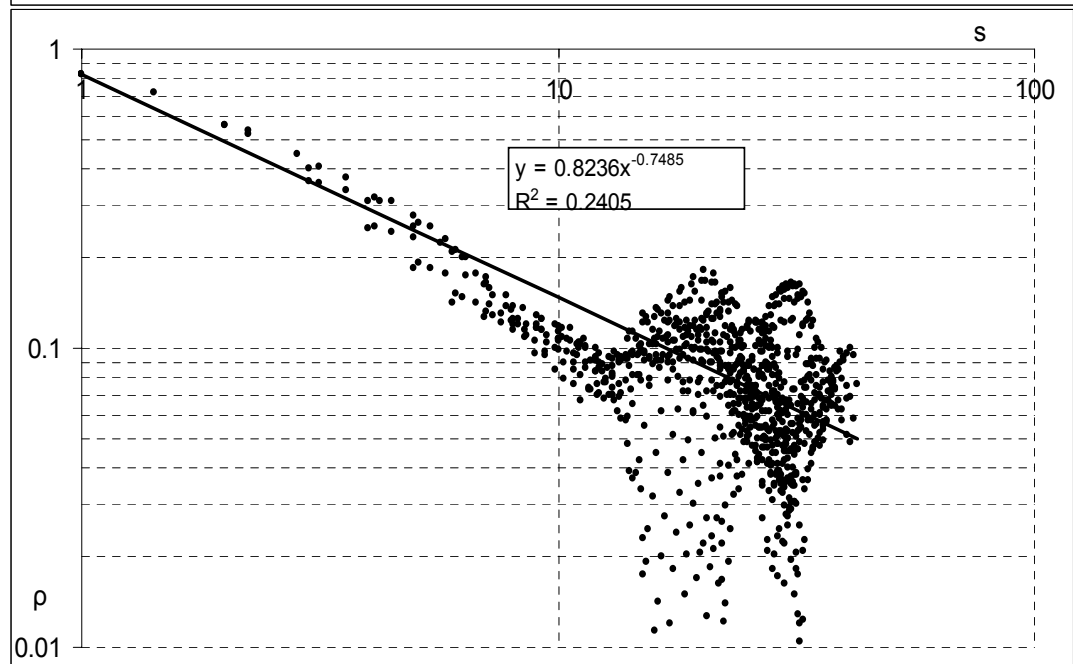
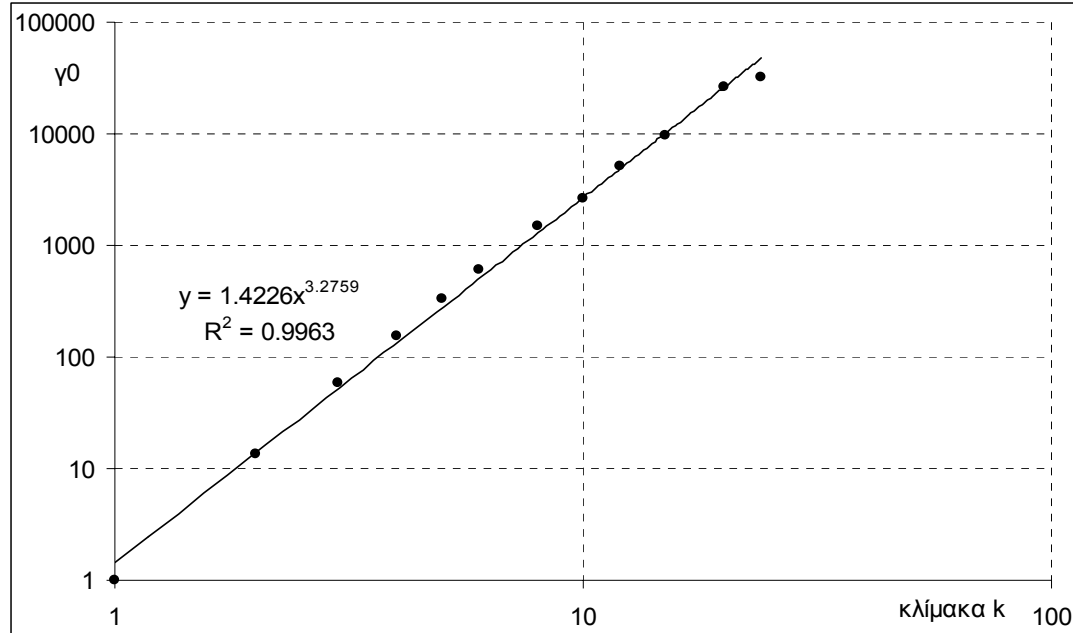


# Εφαρμογή Α 2

$$\gamma_0 = 1.42 \cdot k^{3.28}$$

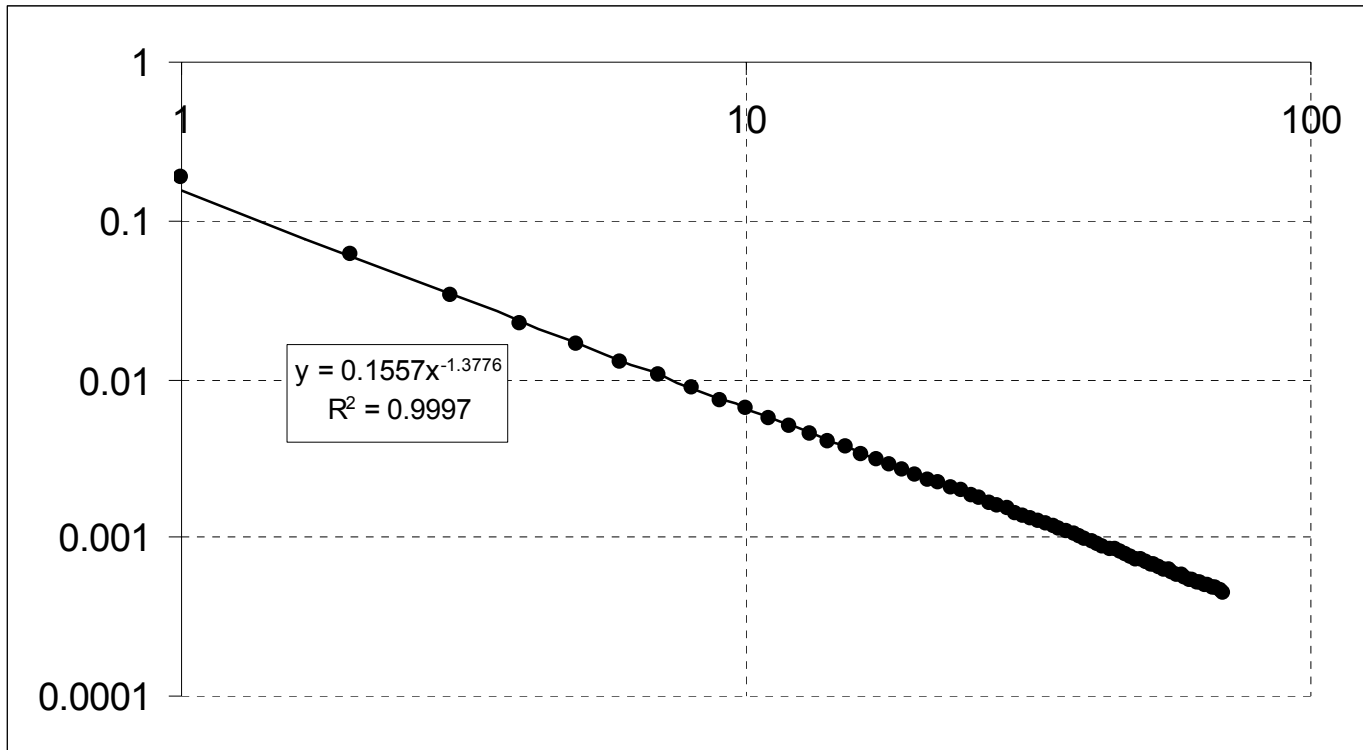
$$H = 0.82 \Leftrightarrow b = 0.72$$

$$\rho = 0.82 \cdot s^{-0.75}$$



# Εφαρμογή Α 3

Ακολουθία συντελεστών βάρους,  $\alpha(s)$



Ασυμμετρία θορύβου  $V$ :  $\xi_V = 9.29$

Κατανομή Pearson III

# Εφαρμογή Α 4: Σύνθεση Πεδίου

- Αποτυποποίηση και ανόρθωση συνθετικού πεδίου
- Στατιστικά χαρακτηριστικά συνθετικού πεδίου

$$\mu_{Z'\sigma} = 1.46$$

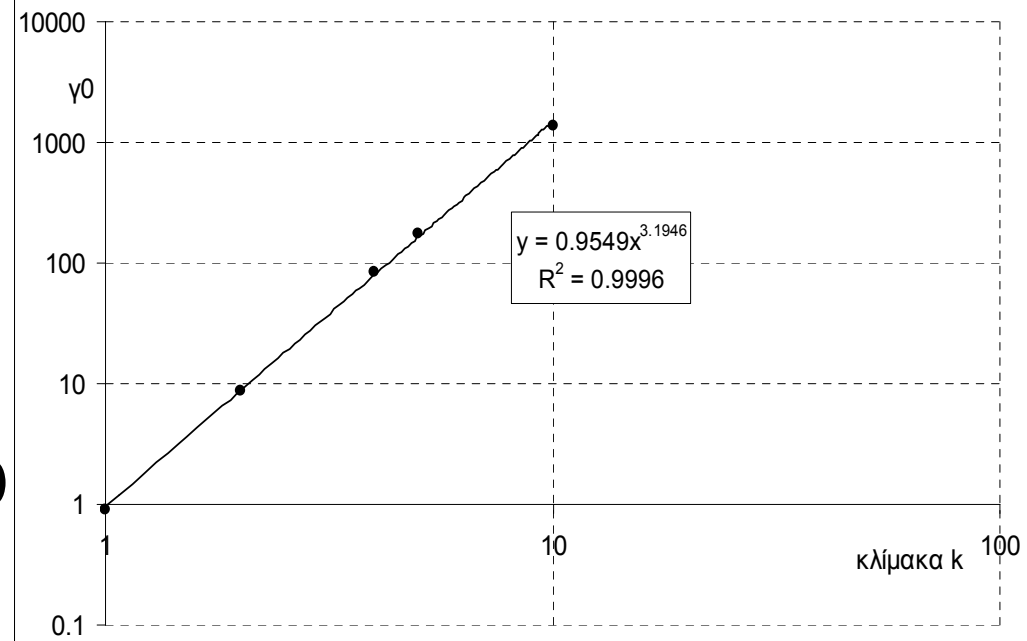
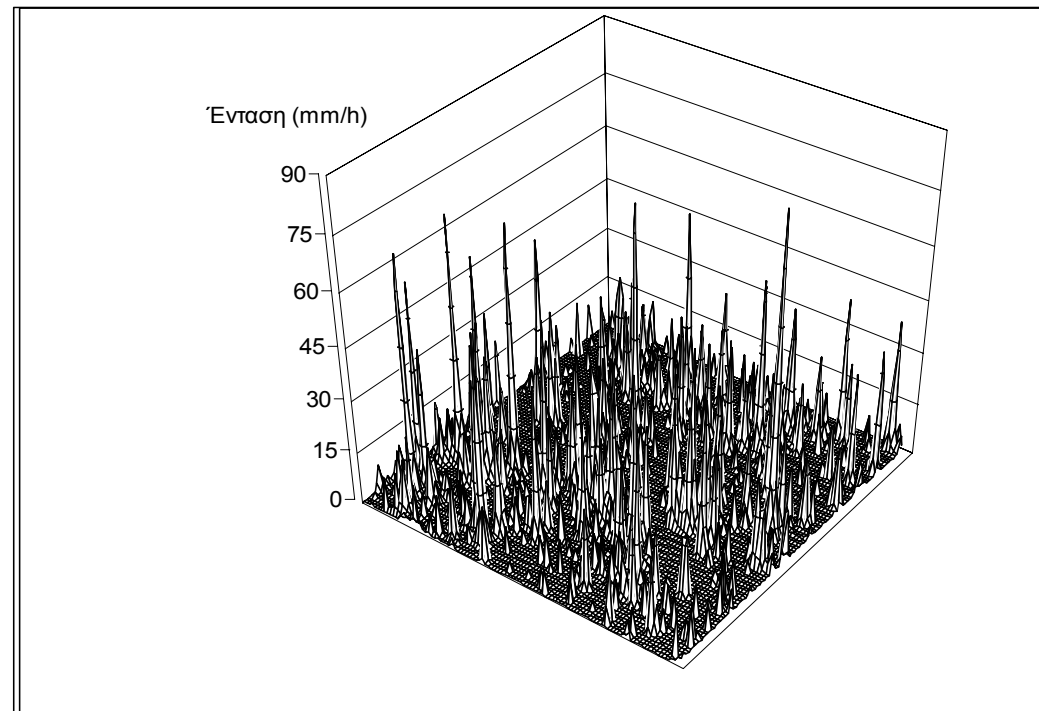
$$\sigma^2_{Z'\sigma} = 18.85$$

$$\sigma_{Z'\sigma} = 4.34$$

$$\xi_{Z'\sigma} = 7.05$$

- Υπολογισμός  $H$

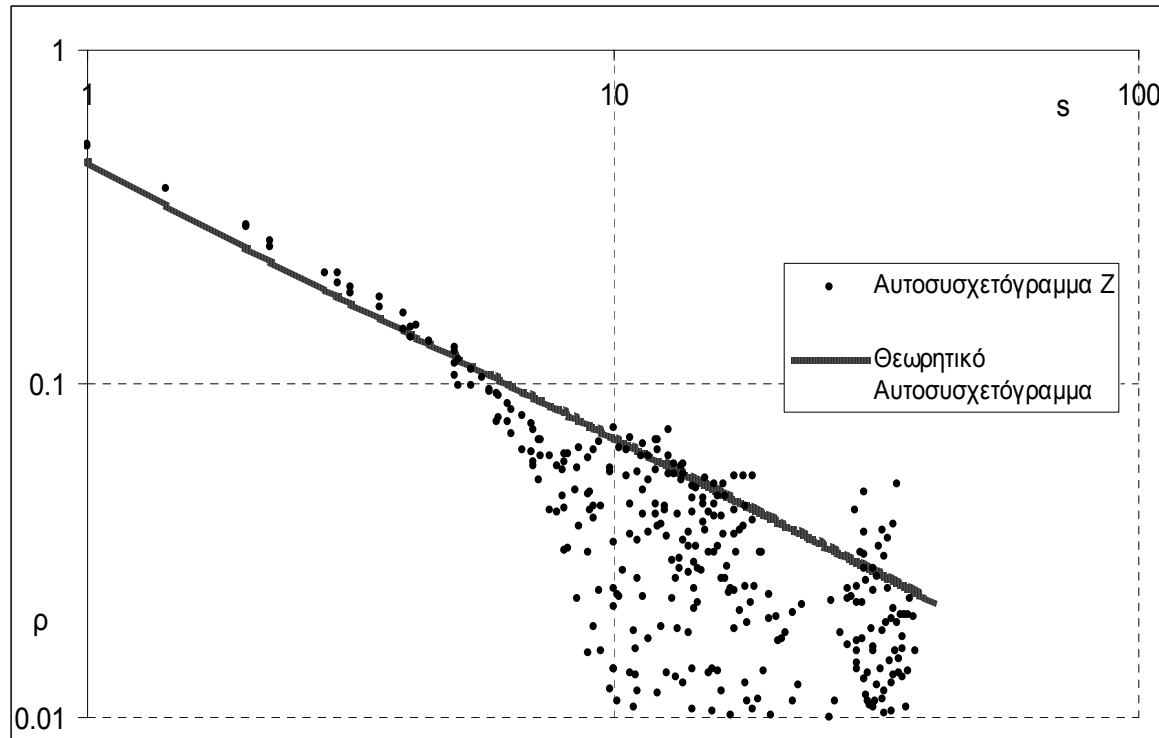
$$\gamma_0 = 0.95 \cdot k^{3.19} \Leftrightarrow H = 0.80$$



# Εφαρμογή Α 5

Θεωρητικό  
αυτοσυσχετόγραμμα:

$$\rho(s) = c(b) \cdot \left( s - \frac{0.1 \cdot b^{1.4}}{s} \right)^{-b}$$



# Εφαρμογή Β 1

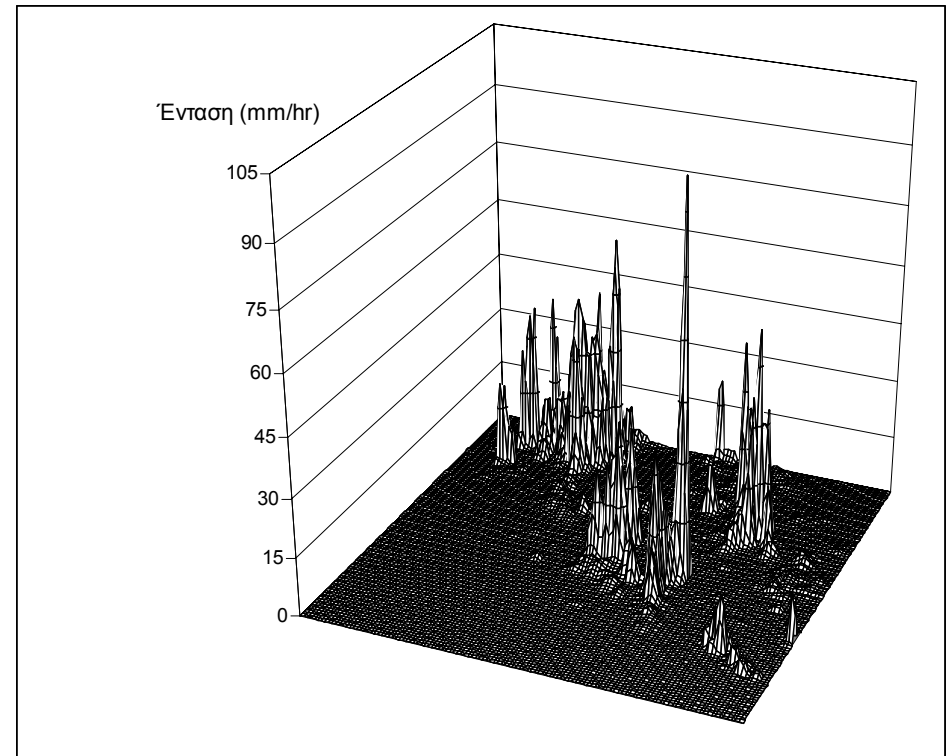
- Κωδικός Δείγματος:  
MIT\_921110\_2001\_2km
- Στατιστικά χαρακτηριστικά:

$$\mu_{Z|\sigma} = 0.65$$

$$\sigma^2_{Z|\sigma} = 11.04$$

$$\sigma_{Z|\sigma} = 3.32$$

$$\xi_{Z|\sigma} = 9.83$$



- Τυποποίηση Πεδίου

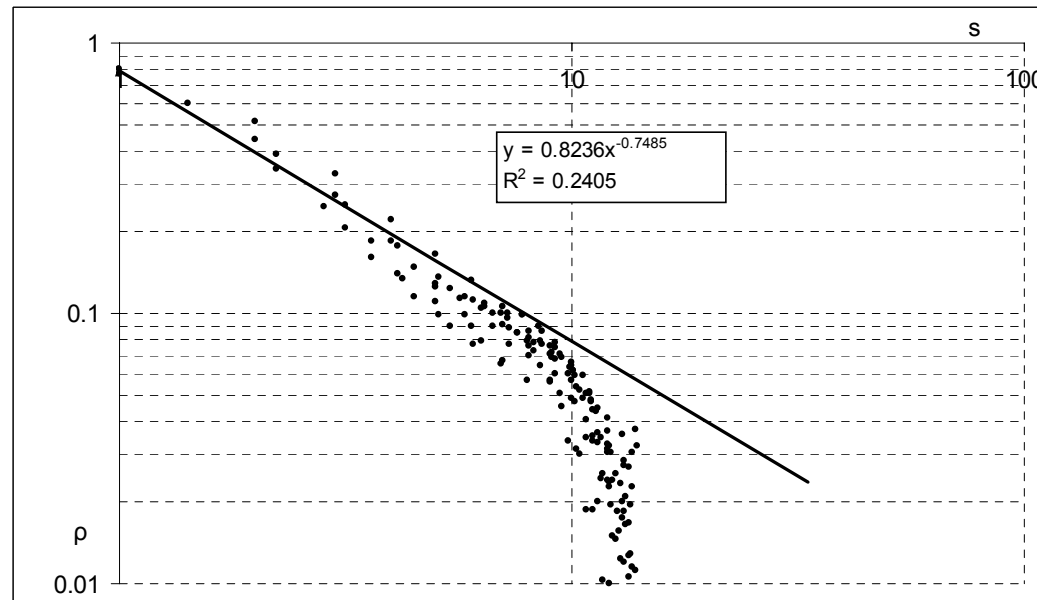
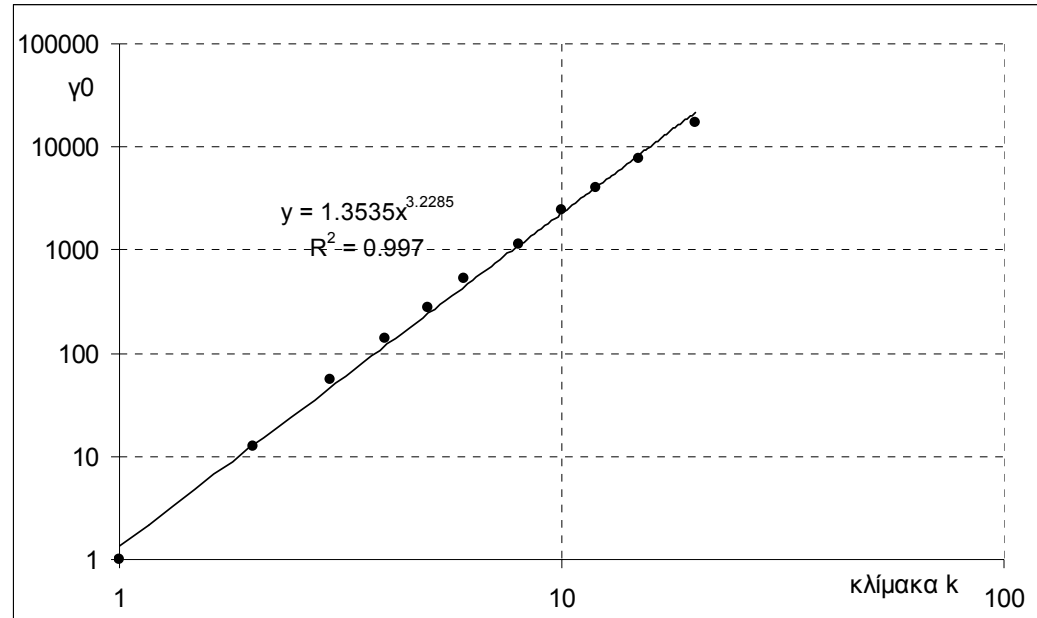


# Εφαρμογή Β 2

$$\gamma_0 = 1.35 \cdot k^{3.23}$$

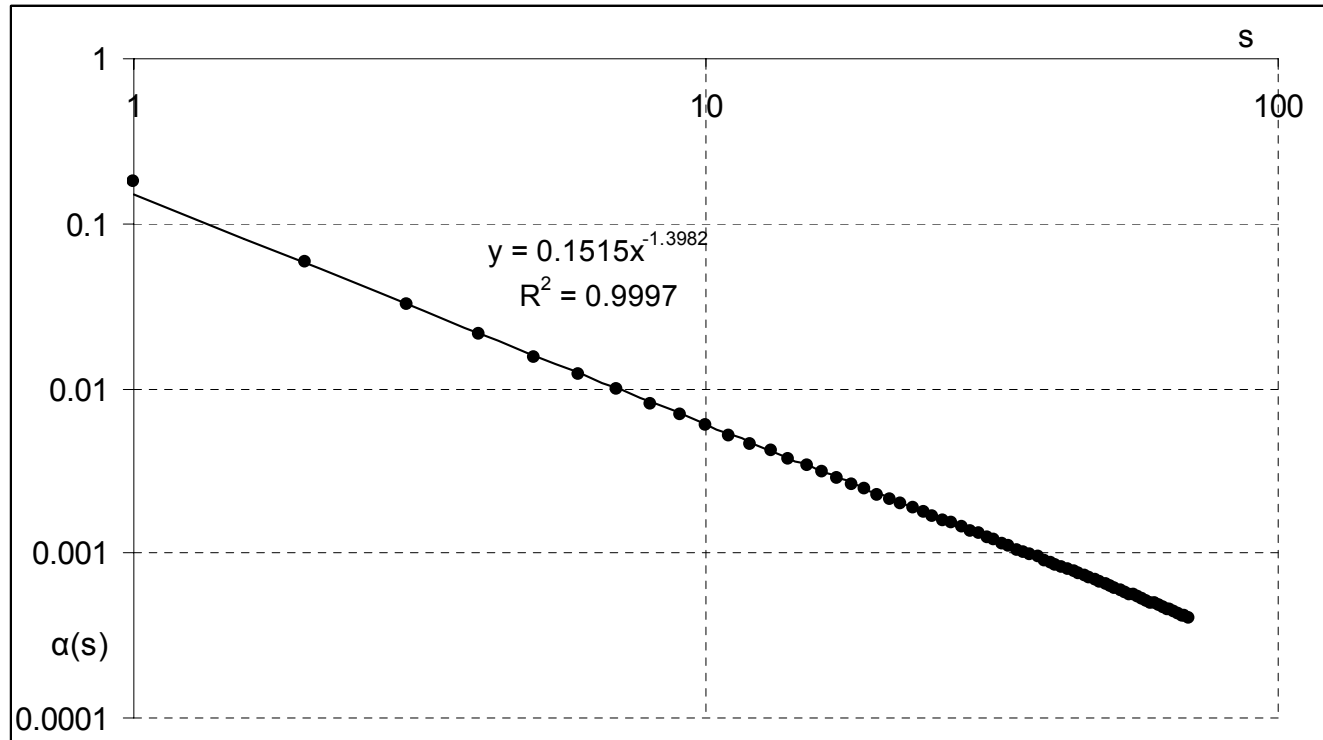
$$H = 0.81 \Leftrightarrow b = 0.76$$

$$\rho = 0.82 \cdot s^{-0.75}$$



# Εφαρμογή Β 3

- Ακολουθία συντελεστών βάρους,  $\alpha(s)$



- Ασυμμετρία θορύβου V:  $\xi_V = 15.21$
- Κατανομή Pearson III

# Εφαρμογή Β 4: Σύνθεση Πεδίου

- Αποτυποποίηση και ανόρθωση συνθετικού πεδίου
- Στατιστικά χαρακτηριστικά συνθετικού πεδίου

$$\mu_{Z'\sigma} = 0.65$$

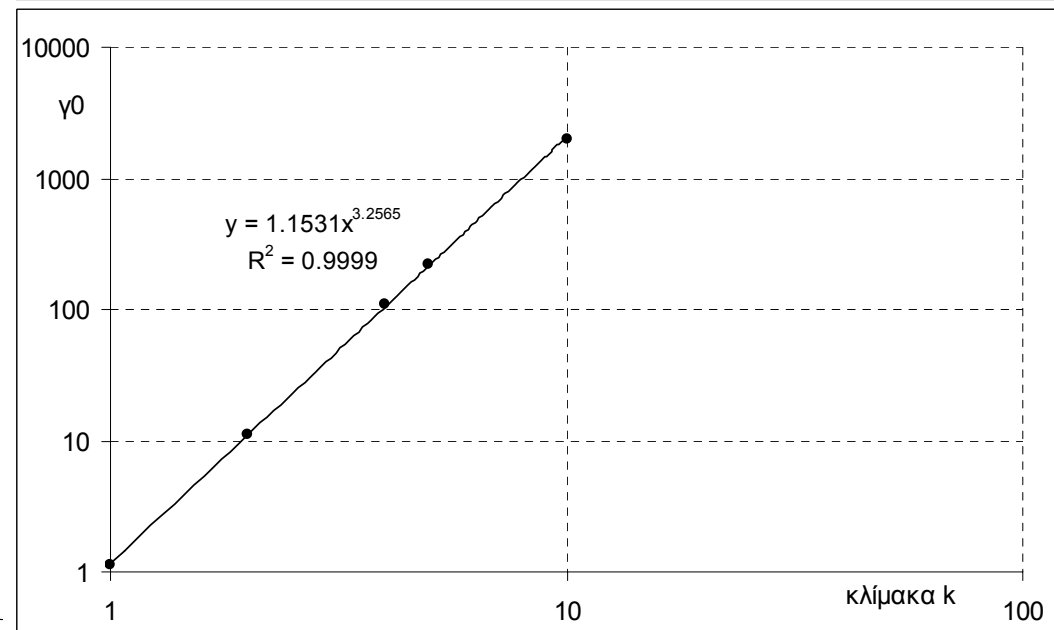
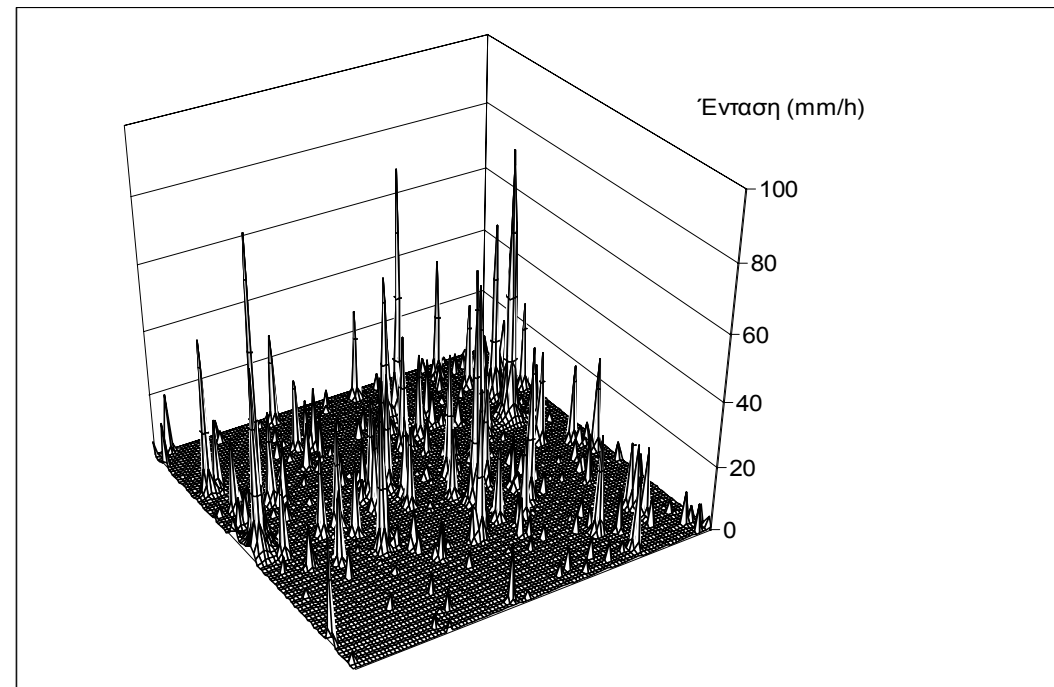
$$\sigma^2_{Z'\sigma} = 11.04$$

$$\sigma_{Z'\sigma} = 3.32$$

$$\xi_{Z'\sigma} = 12.75$$

- Υπολογισμός  $H$

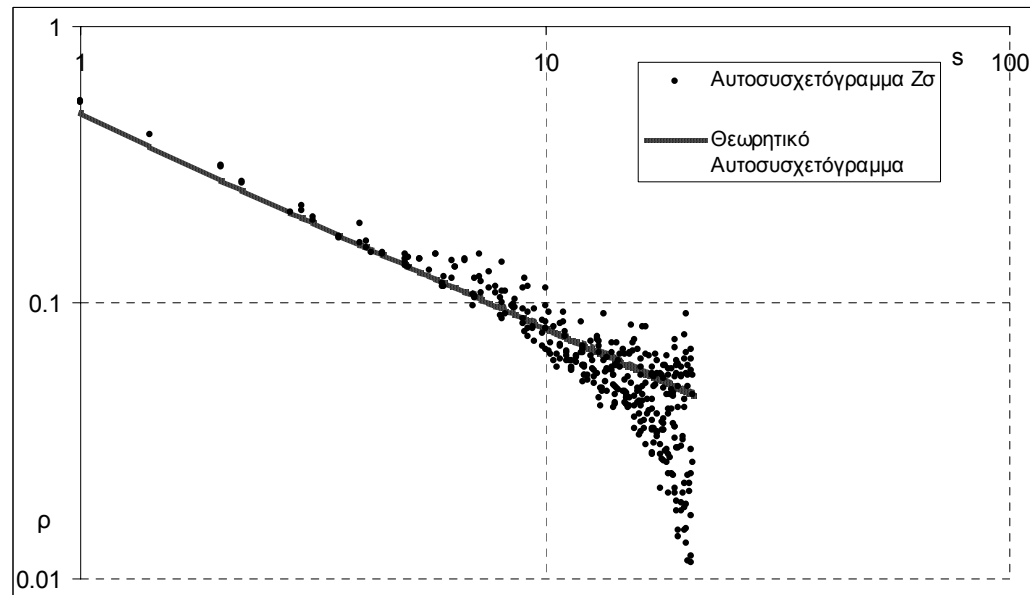
$$\gamma_0 = 1.15 \cdot k^{3.26} \Leftrightarrow H = 0.81$$



# Εφαρμογή Β 5

Θεωρητικό  
αυτοσυσχετόγραμμα:

$$\rho(s) = c(b) \cdot \left( s - \frac{0.1 \cdot b^{1.4}}{s} \right)^{-b}$$



# Συμπεράσματα 1

1. Απλό στη χρήση μοντέλο, αρκεί η εκτίμηση του συντελεστή  $H$
2. Συντελεστής  $H$  συνθετικού πεδίου ίσος με αυτόν του φυσικού
3. Στατιστικά χαρακτηριστικά συνθετικού πεδίου, πολύ κοντά σε αυτά του φυσικού
4. Συνθετικό αυτοσυσχετόγραμμα πολύ κοντά στο ιστορικό και το θεωρητικό

# Συμπεράσματα 2

Αδυναμίες μοντέλου:

1. Μικρή αύξηση του συντελεστή ασυμμετρίας
2. Μορφή συνθετικών πεδίων

Περαιτέρω έρευνα για: Άρση αδυναμιών και επέκταση εφαρμογή σε άλλα υδρομετεωρολογικά πεδία

