

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ, ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ ΔΟΜΗΣ
ΤΟΥ
ΔΙΑΛΕΙΠΟΝΤΟΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΒΡΟΧΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Βασιλική Στεργίου

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2005

Επιβλέπων: Δ. Κουτσογιάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή μου Δημήτρη Κουτσογιάννη για την καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας. Αποτελεί για εμένα πρότυπο δασκάλου και ανθρώπου.

Οφειλώ ένα ευχαριστώ σε όλους τους καθηγητές μου στο Πολυτεχνείο, που συνέβαλαν, ο καθένας με το δικό του αντικείμενο, στην απόκτηση του εφοδίου της γνώσης. Το ταξίδι συνεχίζεται.

Δεν ξεχνώ τον Τάκη Τσαμπάρη, καθηγητή μου στα μαθηματικά, τη φυσική και τη χημεία, που μου μετέδωσε πρώτος τη λάμψη των πιθανοτήτων και αισθάνομαι τυχερή για αυτό.

Ευχαριστώ τους γονείς μου και την αδερφή μου για όλα.

Η διπλωματική μου εργασία αφιερώνεται στη μητέρα μου και στον πατέρα μου.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Περίληψη

Abstract

1 Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά.....	1
1.2 Αντικείμενο της εργασίας.....	1
1.3 Διάρθρωση της εργασίας.....	2
2 Βιβλιογραφική επισκόπηση	4
3 Θεωρητικό υπόβαθρο	7
3.1 Ορισμοί και βασικές παραδοχές.....	7
3.2 Δείκτες εξάρτησης.....	12
3.3 Μοντέλο πλήρους ανεξαρτησίας.....	14
3.4 Μοντέλο Markov.....	15
3.5 Αρχή της μέγιστης εντροπίας.....	17
3.6 Το προτεινόμενο μαθηματικό μοντέλο.....	19
4 Δεδομένα και προεπεξεργασία	23
4.1 Επιλογή και κατανομή βροχομετρικών σταθμών.....	23
4.2 Βάσεις δεδομένων.....	27
5 Επεξεργασία και προσαρμογή της εξίσωσης	34
5.1 Χρονική κλίμακα και συνάθροιση.....	34
5.2 Εξαγωγή εμπειρικών πιθανοτήτων ακολουθίας ξηρών διαστημάτων..	38
5.3 Εφαρμογή της παραμετρικής εξίσωσης $p^{(k)}$ και βελτιστοποίηση.....	44
5.4 Εξαγωγή συμπερασμάτων.....	53
6 Επιχειρησιακή χρήση	64
6.1 Εξαγωγή πιθανοτήτων για μοντέλο δυαδικής ανέλιξης τάξης 7.....	64
6.2 Χρήση του μοντέλου για παραγωγή συνθετικών δυαδικών χρονοσειρών (τεχνική Monte Carlo).....	66
6.3 Έλεγχος αποτελεσμάτων.....	67
7 Συμπεράσματα	69
Βιβλιογραφικές αναφορές	71
Παράρτημα Α: Συγκριτικά Διαγράμματα των 28 σταθμών	75
A.1 Διαγράμματα για τις χρονοσειρές όλου του έτους.....	76
A.2 Διαγράμματα για τις χρονοσειρές των εποχών και της ξηρής και υγρής	

	περιόδου του έτους.....	82
A.3	Διαγράμματα για τις χρονοσειρές των 12 μηνών.....	95
Παράρτημα Β:	Συγκεντρωτικοί πίνακες.....	151
B.1	Πίνακες πιθανοτήτων για τις χρονοσειρές όλου του έτους, των εποχών και της ξηρής και υγρής περιόδου.....	152
B.2	Πίνακες πιθανοτήτων για τις χρονοσειρές των 12 μηνών.....	158

Περίληψη

Χαρακτηριστική ιδιότητα της διεργασίας της βροχόπτωσης που τη διαφοροποιεί από άλλες υδρολογικές διεργασίες αποτελεί ο διαλείπων χαρακτήρας της. Ποικίλα στοχαστικά μοντέλα έχουν προταθεί που περιγράφουν λιγότερο ή περισσότερο ικανοποιητικά τις χρονικές εμφανίσεις της βροχόπτωσης, τα σημαντικότερα εκ των οποίων είναι το Μαρκοβιανό μοντέλο σε διακριτή χρονική κλίμακα και τα μοντέλα σημειακών ανελίξεων σε συνεχή κλίμακα χρόνου. Στην παρούσα εργασία, ακολουθήθηκε ένα μοντέλο γενικευμένης δυαδικής ανέλιξης τάξης k μη Markov που στοχεύει στη βελτίωση της μαθηματικής περιγραφής της ανέλιξης της βροχής με φειδωλή χρήση παραμέτρων. Το μοντέλο βασίζεται στην κυρίαρχη φυσική και μαθηματική αρχή της μεγιστοποίησης της εντροπίας που στη θεωρία των πιθανοτήτων και των στοχαστικών ανελίξεων μεταφράζεται ως μεγιστοποίηση της αβεβαιότητας. Καταλήγει σε μια παραμετρική εξίσωση για την πιθανότητα μιας ξηρής περιόδου συναρτήσει του μήκους της ξηρής περιόδου. Το μοντέλο Markov αποτελεί ειδική περίπτωση της γενικότερης παραμετρικής εξίσωσης.

Το μοντέλο γενικευμένης δυαδικής ανέλιξης εφαρμόστηκε σε δεδομένα ημερησίων υψών βροχόπτωσης που προήλθαν από 28 βροχομετρικούς σταθμούς στις Η.Π.Α., την Αγγλία, τη Γαλλία και την Ιταλία. Εξετάστηκαν οι ημερήσιες χρονοσειρές όλου του έτους, οι χρονοσειρές των 12 μηνών, των εποχών και οι χρονοσειρές υγρής και ξηρής περιόδου του έτους. Από την εφαρμογή, προέκυψε καλή συμφωνία του μοντέλου με τις ιστορικές χρονοσειρές πολλές εκ των οποίων δείχνουν μια μη Markov συμπεριφορά. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε με ικανοποιητική προσέγγιση το γενικευμένο μοντέλο δυαδικής ανέλιξης τάξης 7 για την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών με διατήρηση της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας τάξης 8 της ιστορικής χρονοσειράς. Τα εξαγόμενα αποτελέσματα επαληθεύουν το μοντέλο.

Abstract

The most significant property of the rainfall process, in comparison to other hydrological processes, is its intermittent character. Many and various stochastic processes have been proposed and represent more or less successfully the rainfall occurrence process. In discrete time representation, the most typical model widely used until nowadays is the Markov chain model. In continuous time, the point process models dominate. At the present study, a binary stochastic model of order k non Markovian is investigated. The model aims at a better representation of the rainfall process in combination with a parsimonious use of parameters. This approach is based on the dominant physical and mathematical principle of maximum entropy, interpreted as maximum uncertainty in the theory of stochastic processes. The theoretical framework results in a parametric expression of the probability of a sequence of consecutive dry time intervals. The Markov chain model is a specific case of the parametric expression.

The binary stochastic model was applied to the daily rainfall data set of 28 stations in U.S.A., U.K., France and Italy. Multiple time series were examined; the time series for the entire year, the monthly time series, the seasonal time series as well as the time series for the dry and the wet period of the year. The results of the application to the empirical data indicated good agreement of the model and the historical rainfall time series. The proposed model was used for order 7 with satisfactory accuracy in order to generate synthetic binary rainfall series reproducing the order 8 joint probability mass function of the historical rainfall process. The results of the application to the empirical data verified the proposed model.

1. Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Οι υδρολογικές μεταβλητές όπως η βροχόπτωση μεταβάλλονται με το χρόνο. Η κατασκευή έργων που επηρεάζονται από υδρολογικές μεταβλητές προϋποθέτει τον προσδιορισμό τους στο χρονικό ορίζοντα της λειτουργίας του έργου. Έργα μακρινού χρονικού ορίζοντα, όπως είναι τα μεγάλα υδραυλικά έργα (φράγματα), είναι δύσκολο να σχεδιαστούν βάση αιτιοκρατικών νόμων (ντετερμινιστική προσέγγιση). Οι φυσικοί νόμοι δεν παύουν να διέπουν όλα τα υδρολογικά φαινόμενα, αλλά η χρήση τους στον υδρολογικό σχεδιασμό καθίσταται δύσκολη εξαιτίας της πολυπλοκότητας των φαινομένων και της αδυναμίας επίλυσης των εξαγόμενων εξισώσεων.

Συνεπώς, η πιθανοτική προσέγγιση και πληρέστερα η θεωρία στοχαστικών ανελίξεων αποτελεί το πιο ενδεδειγμένο εργαλείο του υδρολογικού σχεδιασμού. Η στοχαστική προσέγγιση θεωρεί την αβεβαιότητα των υδρολογικών μεταβλητών και λαμβάνοντας υπόψη τη χρονική τους εξάρτηση, ποσοτικοποιεί μέσω της πιθανότητας την αβεβαιότητα αυτή.

1.2 Αντικείμενο της εργασίας

Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη, εφαρμογή και διερεύνηση της επαλήθευσης (με βάση μακρές ιστορικές χρονοσειρές) ενός γενικευμένου στοχαστικού μοντέλου δυαδικής ανέλιξης μη Markov που προτάθηκε από τον Κουτσογιάννη (2005) και στοχεύει στη βελτίωση της μαθηματικής περιγραφής της διεργασίας της βροχόπτωσης με τη φειδωλή χρήση παραμέτρων.

Στα πλαίσια αυτού του μοντέλου, η διεργασία της βροχόπτωσης, λόγω του διαλείποντος χαρακτήρα της (βρέχει /δε βρέχει) εκφράζεται από μια δυαδική στοχαστική ανέλιξη, που λαμβάνει τιμές 0 και 1 οι οποίες αντιστοιχούν στις δύο δυνατές καταστάσεις, την

ξηρή και την υγρή αντίστοιχα. Η χρονική εξέλιξη της βροχόπτωσης παρακολουθείται σε διακριτό χρόνο και σε πολλαπλές κλίμακες συνάθροισης. Το μοντέλο εκφράζεται από μια παραμετρική εξίσωση με την οποία εκτιμάται η πιθανότητα $p^{(k)}$ για ένα ξηρό διάστημα μήκους k . Οι παράμετροι προσδιορίζονται μετά από μια διαδικασία βελτιστοποίησης και συγκεκριμένα ελαχιστοποίησης του σφάλματος προσαρμογής στα χαρακτηριστικά των ιστορικών δεδομένων

Η εφαρμογή του μοντέλου έγινε σε δεδομένα ημερησίων υψών βροχόπτωσης που προήλθαν από 28 βροχομετρικούς σταθμούς στις Η.Π.Α., την Αγγλία, τη Γαλλία και την Ιταλία. Τέλος, παράχθηκαν συνθετικές χρονοσειρές με διατήρηση της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας τάξης 8 της ιστορικής χρονοσειράς.

1.2 Διάρθρωση της εργασίας

Η εργασία περιλαμβάνει συνολικά επτά κεφάλαια και δύο παραρτήματα.

Στο κεφάλαιο 2 πραγματοποιείται μια βιβλιογραφική επισκόπηση των στοχαστικών δυαδικών ανελίξεων που έχουν διερευνηθεί και χρησιμοποιηθεί έως σήμερα για την προσομοίωση της διεργασίας της βροχόπτωσης.

Στο κεφάλαιο 3 καθορίζονται οι βασικοί ορισμοί και μαθηματικές παραδοχές που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Ακόμη, παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά μοντέλα Markov και πλήρους ανεξαρτησίας με τα οποία θα συγκριθεί το προτεινόμενο μοντέλο. Τέλος, αναπτύσσεται το θεωρητικό υπόβαθρο και οι αρχές που διέπουν το γενικευμένο μοντέλο δυαδικής ανέλιξης μη Markov.

Το κεφάλαιο 4 αναφέρεται στο σύνολο των ιστορικών δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν και στην προεπεξεργασία που πραγματοποιήθηκε ώστε να εξασφαλιστεί η αξιοπιστία του ιστορικού δείγματος. Συγκεκριμένα αναπτύσσονται τα κριτήρια επιλογής των διαθέσιμων βροχομετρικών σταθμών και ο τρόπος διαχείρισης των δεδομένων σε βάσεις δεδομένων.

Στο κεφάλαιο 5 γίνεται η επεξεργασία των δεδομένων και η προσαρμογή της παραμετρικής σχέσης του μοντέλου. Εξάγονται οι εμπειρικές πιθανότητες ακολουθίας ξηρών διαστημάτων και με τη διαδικασία της βελτιστοποίησης προσδιορίζονται οι παράμετροι της μαθηματικής εξίσωσης του μοντέλου δυαδικής ανέλιξης.

Στο κεφάλαιο 6 αναπτύσσεται η επιχειρησιακή χρήση του μοντέλου δυαδικής ανέλιξης τάξης επτά. Συγκεκριμένα, εξάγονται οι πιθανότητες ακολουθίας ξηρών ή υγρών διαστημάτων για μοντέλο δυαδικής ανέλιξης τάξης επτά μη Markov και παράγονται συνθετικές δυαδικές χρονοσειρές. Ακολουθεί ο έλεγχος των αποτελεσμάτων.

Το κεφάλαιο 7 περιλαμβάνει τα γενικά συμπεράσματα που εξάγονται από την εφαρμογή του μοντέλου.

Τέλος, στα Παραρτήματα Α και Β παρατίθενται ο ιδιαίτερα αυξημένος όγκος των συγκριτικών διαγραμμάτων των πιθανοτήτων ακολουθίας ξηρών διαστημάτων και των αντίστοιχων πινάκων, τα οποία προέκυψαν από την εφαρμογή του μοντέλου σε 400 συνολικά ιστορικές χρονοσειρές και αποτέλεσαν τη βάση για την εξαγωγή των συμπερασμάτων.

2. Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Ο διαλείπων χαρακτήρας της διεργασίας της βροχόπτωσης, που τη διαφοροποιεί από άλλες υδρολογικές διεργασίες, αποτέλεσε αντικείμενο ιδιαίτερου ενδιαφέροντος και έναυσμα ποικίλων και διαφορετικών προσεγγίσεων έως σήμερα.

Τα πρώτα στοχαστικά μοντέλα που προτάθηκαν, η ανέλιξη Bernoulli και η σημειακή ανέλιξη Poisson, βασίζονται στη θεώρηση μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών πλήρως ανεξάρτητων μεταξύ τους. Στις ακολουθίες Bernoulli, θεωρείται διακριτή χρονική κλίμακα και σε κάθε σημείο της κλίμακας ένα τυχαίο γεγονός δύναται να συμβεί με πιθανότητα p ή να μη συμβεί με πιθανότητα $q = 1 - p$ (τη συμπληρωματική της). Η πιθανότητα ενός γεγονότος είναι ανεξάρτητη του χρόνου και ανεξάρτητη των γεγονότων που έχουν συμβεί στο παρελθόν. Το σύνολο των τυχαίων ανεξάρτητων γεγονότων ακολουθεί δυνωμική κατανομή (Haan, 1977, p.71).

Η σημειακή ανέλιξη Poisson, αποτελεί ένα σύνολο τυχαίων σημείων t_i στον άξονα του χρόνου όπου το μέγεθος t_i αντιστοιχεί στο χρόνο έλευσης του σημείου αυτού σε σχέση με τη χρονική αφετηρία $t = 0$ (Papoulis, 1991, σ.297). Δύο διαδοχικά σημεία, t_{i-1} και t_i , ορίζουν το μεταξύ τους χρονικό διάστημα, $\Delta t_{i-1,i}$, το οποίο καλείται χρόνος διαδοχής των γεγονότων t_{i-1} και t_i (Κουτσογιάννης, 1988, σ.112). Έτσι, ορίζεται η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών Δt_n που αποτελεί μια διακριτή ανέλιξη σε συνεχή χρόνο. Οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Δt_n της ανέλιξης Poisson ακολουθούν εκθετική συνάρτηση κατανομής. Σε κάθε σημειακή ανέλιξη, αντιστοιχίζεται μία στοχαστική ανέλιξη διακριτών τιμών N_t μεγέθους ίσου με τον αριθμό των σημείων, t_i στο διάστημα $(0,t]$. Οι χρόνοι άφιξης των συγκεκριμένων σημείων, t_i , ακολουθούν κατανομή γάμα δύο παραμέτρων ενώ τα τυχαία σημεία N_t στο διάστημα $(0,t]$ ακολουθούν συνάρτηση κατανομής Poisson. Και οι δύο ανελιξεις, Bernoulli και Poisson, διέπονται από μία χαρακτηριστική κλίμακα χρόνου και ενέχουν μία μόνο παράμετρο, εξού και η ιδιαίτερα απλή εφαρμογή τους.

Από τα πρώτα στάδια της ανάλυσης διαπιστώθηκε ότι η χρονοσειρά της βροχόπτωσης δεν είναι τελείως τυχαία, συνεπώς οι ανελίξεις Bernoulli και Poisson δεν ανταποκρίνονται ικανοποιητικά στην πραγματικότητα, αλλά λειτουργούν ως μια αρχική προσέγγιση.

Σε διακριτή χρονική κλίμακα, το πιο διαδεδομένο μοντέλο αποτέλεσε η αλυσίδα Markov, η οποία μελετήθηκε ευρύτατα (Gabriel and Newman, 1962; Feyerherm and Bark, 1964; Hershfield, 1970; Todorovic and Woolhiser, 1975; Haan et al., 1976; Chin, 1977; Katz, 1977a, b; Kottegoda and Horder, 1980; Roldan and Woolhiser, 1982; Mimikou, 1984). Η κατασκευή μιας δυαδικής ανελίξης Markov προϋποθέτει την εκτίμηση των αρχικών πιθανοτήτων και των πιθανοτήτων μεταβάσεως (Μιμίκου, 1985, σ.222). Στη δυαδική ανελίξη Markov, θεωρείται αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης η οποία μειώνεται εκθετικά με τη χρονική υστέρηση (χρονική μετατόπιση). Εντούτοις, διαπιστώθηκε ισχυρότερη αυτοσυσχέτιση της ανελίξης της βροχόπτωσης από εκείνη που εκτιμά η ανελίξη Markov (Katz and Parlange, 1998).

Ακολούθησαν βελτιωμένες προσεγγίσεις της ανελίξης Markov οι οποίες βασίστηκαν στη θεώρηση περισσότερων καταστάσεων (Hutchinson, 1990; Haan et al, 1976). Ο Pegram (1980) και στη συνέχεια οι Katz and Parlange (1998) και Clarke (1998, p.51-55) χρησιμοποίησαν τις δεσμευμένες πιθανότητες (πιθανότητες μεταβάσεως) λαμβάνοντας υπόψη την εξάρτηση από περισσότερα του ενός προηγούμενων χρονικών διαστημάτων, γεγονός που οδηγεί σε δυαδικές ανελίξεις μεγαλύτερης τάξης.

Ακόμα, διερευνήθηκε ο ρόλος της τάξης p (ως εποχιακά κυμαινόμενης) με στόχο την καλύτερη προσομοίωση (Chin, 1977; Mimikou, 1983, 1984) και προτάθηκαν συγκεκριμένα κριτήρια για την εκτίμησή της (Mimikou, 1983). Σε πιο σύγχρονες εργασίες, λήφθηκε υπόψη ένας μεγάλος αριθμός προηγούμενων χρονικών διαστημάτων ενώ ο αυξημένος αριθμός δεσμευμένων πιθανοτήτων μειώθηκε με κατάλληλη ανάλυση (Sharma and O'Neill, 2002). Παράλληλα, στα πλαίσια διαφορετικής προσέγγισης, δύναται να χρησιμοποιηθεί ένα διακριτό μητρώο που βασίζεται στον αριθμό των προηγούμενων υγρών διαστημάτων (Harrold et al., 2003). Τέλος, οι Pegram and Seed (1998) ανέπτυξαν περαιτέρω την ανελίξη Markov σε πολλαπλές κατευθύνσεις.

Σε συνεχή κλίμακα χρόνου, κύριο εργαλείο προσομοίωσης της ανέλιξης της βροχόπτωσης αποτελούν τα μοντέλα συστάδων σημειακών παλμών (cluster-based point processes) που βασίζονται στην εργασία των Neyman and Scott (1952) για την κατανομή στο χώρο των γαλαξιών. Στα μοντέλα αυτά, οι μετρήσεις βροχόπτωσης προσομοιάζονται με σημειακούς παλμούς (μηδενικής θεωρητικής διάρκειας, η έννοια της έντασης δεν υφίσταται) ή ομάδες παλμών που τοποθετούνται στον ορίζοντα του χρόνου, μεθοδολογία που βασίζεται στις αρχές των σημειακών ανελιξεων και παραπέμπει στην ανέλιξη Poisson για τον προσδιορισμό των τυχαίων χρονικών σημείων έναρξης των παλμών (Waymire and Gupta, 1981). Εφαρμογή του μοντέλου σημειακών παλμών Neyman-Scott στην ανέλιξη της βροχόπτωσης πραγματοποιήθηκε αρχικά από τους Kanvas and Delleur (1981) και Rodriguez-Iturbe et al. (1984).

Ακολουθεί η εξέλιξη του μοντέλου στο μοντέλο ορθογωνικών παλμών Neyman-Scott (Neyman-Scott rectangular pulses) - οι ορθογωνικοί παλμοί εκφράζουν θεωρητικές κατακρημνίσεις με δεδομένη, σταθερή διάρκεια και ένταση - καθώς και στο παρεμφερές μοντέλο ορθογωνικών παλμών Bartlett-Lewis (Rodriguez-Iturbe et al., 1987). Κατά το Velge et al. (1994) βασικό μειονέκτημα αυτών των μοντέλων είναι η αδυναμία τους να παράγουν την πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης σε πολλαπλές κλίμακες. Στο ίδιο πλαίσιο, επισημάνθηκε από τους Foufoula-Georgiou and Guttorp (1986) ότι οι παράμετροι του μοντέλου Neyman-Scott είναι εξαρτημένες της κλίμακας και επομένως στερούνται φυσικής ερμηνείας. Τροποποιήσεις των μοντέλων Neyman-Scott και Bartlett-Lewis προτάθηκαν από τους Entekhabi et al. (1989), Rodriguez-Iturbe et al. (1988) και Onof and Wheeler (1993,1994) αντιστοίχως.

Τέλος, εκτίμηση και σύγκριση των διαφορετικών μοντέλων συστάδων ορθογωνικών παλμών για την προσομοίωση της βροχόπτωσης έγινε από τους Velge et al. (1994) και Verhoest et al. (1997), ενώ μια περιεκτική επισκόπηση των σημειακών ανελιξεων Poisson και πιο σύγχρονων αναλύσεων πραγματοποιήθηκε από τον Onof et al. (2000).

3 Θεωρητικό Υπόβαθρο

3.1 Ορισμοί και βασικές παραδοχές

Στοχαστική ανέλιξη καλείται μια απειροπληθής οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X(t)$, $t \in T$. Εάν το σύνολο T τιμών της παραμέτρου t είναι αριθμήσιμο, η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ καλείται ανέλιξη σε διακριτό χρόνο (Κάκουλλος, 1971).

Η χρονική εξέλιξη της βροχόπτωσης μπορεί να αντιπροσωπευτεί από μια στοχαστική ανέλιξη. Κατ'έπекταση, λόγω του διαλείποντος χαρακτήρα της βροχόπτωσης (βρέχει /δε βρέχει) η εξέλιξη της δύναται να εκφραστεί από μια δυαδική στοχαστική ανέλιξη, που λαμβάνει τιμές 0 και 1 οι οποίες αντιστοιχούν στις δύο δυνατές καταστάσεις, την ξηρή (δεν βρέχει) και την υγρή (βρέχει) αντίστοιχα. Η χρονική εξέλιξη των υψών βροχόπτωσης παρακολουθείται σε διακριτό χρόνο.

Αν η δυαδική ανέλιξη στη βασική κλίμακα η οποία είναι η ημερήσια, ορίζεται:

$$X_i \equiv X_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

τότε, η μαθηματική έκφραση της δυαδικής συναθροισμένης ανέλιξης στην κλίμακα συνάθροισης k είναι η ακόλουθη:

$$X_i^{(k)} = \max_{(i-1)k+1 \leq j \leq ik} \{X_j\} \quad (2)$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $X_i^{(k)}$ λαμβάνει την τιμή 0 αν όλες οι συνιστώσες της X_j στη βασική κλίμακα είναι 0 και την τιμή 1 αν μία ή περισσότερες από τις συνιστώσες της ισούνται με 1.

Θεωρούμε $p^{(k)}$ την πιθανότητα ένα διάστημα μήκους k να είναι ξηρό:

$$p^{(k)} \square P\{X_i^{(k)} = 0\} \quad (3)$$

Η πιθανότητα το διάστημα μήκους k να είναι υγρό είναι:

$$P\{X_i^{(k)} = 1\} = 1 - p^{(k)}. \quad (4)$$

Ο συμβολισμός υποδηλώνει την ανεξαρτησία των πιθανοτήτων από τη χρονική θέση i και τη μοναδική εξάρτησή τους από τη χρονική κλίμακα k , γεγονός που εκφράζει την υπόθεση της στασιμότητας. Στην ανάλυση που ακολουθεί εξετάζονται κλιματικά ομογενείς περίοδοι όπως είναι οι μήνες και οι εποχές όπου η στασιμότητα διατηρείται. Ειδικότερα, η θεώρηση της στασιμότητας αναπτύσσεται στην ενότητα 5.1.

Στη βασική κλίμακα, ο άνω δείκτης ⁽¹⁾ μπορεί να παραλειφθεί, $p \equiv p^{(1)}$. Το σύμβολο p δύναται να χρησιμοποιηθεί με έναν ή περισσότερους κάτω δείκτες που δηλώνουν τα διαδοχικά χρονικά βήματα, π.χ. στη βασική κλίμακα, $p_0 = P\{X_t = 0\}$ (ισχύει $p_0 \equiv p \equiv p^{(1)}$), $p_1 = P\{X_t = 1\}$ (ισχύει $p_1 \equiv 1 - p \equiv 1 - p^{(1)}$), $p_{00} = P\{X_t = 0, X_{t-1} = 0\}$ (ισχύει $p_{00} = p^{(2)}$) κτλ.

Γενικότερα, για κάθε κλίμακα k , δύναται να χρησιμοποιηθεί κάθε αριθμός q διαδοχικών χρονικών διαστημάτων μήκους k και οι αντίστοιχοι δείκτες $j_0, j_1, j_2, \dots, j_{q-1}$ που λαμβάνουν τιμές 0 και 1, δηλαδή:

$$p^{(k)}_{j_0 j_1 \dots j_{q-1}} \square P\{X_i^{(k)} = j_0, X_{i-1}^{(k)} = j_1, X_{i-2}^{(k)} = j_2, \dots, X_{i-q+1}^{(k)} = j_{q-1}\} \quad (5)$$

Για q διαδοχικά χρονικά διαστήματα υπάρχουν 2^q δυνατές καταστάσεις (ενδεχόμενα) και οι αντίστοιχες πιθανότητες. Έτσι, προσδιορίζεται το διάνυσμα όλων των δυνατών πιθανοτήτων:

$$\mathbf{p}_q^{(k)} \square [p^{(k)}_{00\dots00}, p^{(k)}_{00\dots01}, p^{(k)}_{11\dots11}]^T \quad (6)$$

όπου ο άνω δείκτης T δηλώνει την αναστροφή (transpose) ενός διανύσματος ή ενός μητρώου.

Για παράδειγμα, για $k = 1$ και $q = 1, 2, 3$, προκύπτουν οι πιθανότητες:

$$\mathbf{p}_1 = [p_0, p_1]^T, \mathbf{p}_2 = [p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}]^T, \mathbf{p}_3 = [p_{000}, p_{001}, p_{010}, p_{011}, p_{100}, p_{101}, p_{110}, p_{111}]^T \quad (7)$$

Το διάνυσμα $\mathbf{p}_q^{(k)}$ αποτελεί την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας τάξης q της ανάλυσης $X_i^{(k)}$ και επομένως εκφράζει τη δομή εξάρτησης της ανάλυσης. Υπό τη θεώρηση της διατήρησης της στασιμότητας επιβάλλεται ένα σύνολο περιορισμών αναδρομικού τύπου για κάθε χρονική κλίμακα k και τάξη q :

$$\begin{aligned} p^{(k)}_{0j_1 \dots j_{q-2} 0} + p^{(k)}_{0j_1 \dots j_{q-2} 1} &= p^{(k)}_{0j_1 \dots j_{q-2}} \\ p^{(k)}_{1j_1 \dots j_{q-2} 0} + p^{(k)}_{1j_1 \dots j_{q-2} 1} &= p^{(k)}_{1j_1 \dots j_{q-2}} \\ p^{(k)}_{0j_1 \dots j_{q-2} 0} + p^{(k)}_{1j_1 \dots j_{q-2} 0} &= p^{(k)}_{j_1 \dots j_{q-2} 0} \\ p^{(k)}_{0j_1 \dots j_{q-2} 1} + p^{(k)}_{1j_1 \dots j_{q-2} 1} &= p^{(k)}_{j_1 \dots j_{q-2} 1} \end{aligned} \quad (8)$$

όπου το αριστερό και το δεξί τμήμα κάθε ισότητας περιλαμβάνουν στοιχεία $\mathbf{p}_{q10}^{(k)}$ και $\mathbf{p}_{q-1}^{(k)}$ αντίστοιχα.

Αν αθροίσουμε τις τέσσερις ισότητες, τότε και το αριστερό και το δεξί τμήμα θα ισούνται με $p^{(k)}_{j_1 \dots j_{q-2}}$, που σημαίνει ότι μία εκ των τεσσάρων ισοτήτων είναι γραμμικώς εξαρτημένη από τις άλλες. Λαμβάνοντας όλους τους συνδυασμούς $j_1 \dots j_{q-2}$, μπορούν να γραφούν $4 \times 2^{q-2}$ ισότητες από τις οποίες οι $3 \times 2^{q-2}$ είναι ανεξάρτητες. Επομένως, αν οι $\mathbf{p}_{q-1}^{(k)}$ είναι γνωστές, ο αριθμός των επιπρόσθετων παραμέτρων (πιθανοτήτων) που απαιτούνται για τον προσδιορισμό των $\mathbf{p}_q^{(k)}$ είναι $2^q - 3 \times 2^{q-2} = 2^{q-2}$. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων για τον προσδιορισμό της πιθανότητας $\mathbf{p}_q^{(k)}$ είναι $1 + 1 + \dots + 2^{q-2} = 2^{q-1}$.

Αν A και B είναι δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα και $P(B) > 0$, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα (ή πιθανότητα μετάβασης) του A όταν δίδεται το B (ή δοθέντος ότι το B συνέβη) ορίζεται (Κάκουλλος, 1971):

$$P(A|B) = P(AB) / P(B) \quad (9)$$

Υποθέτοντας ότι για τη χρονική κλίμακα k είναι γνωστά q διαδοχικά διαστήματα του παρελθόντος ορίζεται η δεσμευμένη πιθανότητα του επόμενου χρονικού διαστήματος (Paroulis, 1991, p.27):

$$\begin{aligned} \pi_{m|j_0j_1\dots j_{q-1}}^{(k)} &\square P\{X_{i+1}=m \mid X_i^{(k)}=j_0, X^{(k)}_{i-1}=j_1, X^{(k)}_{i-2}=j_2, \dots, X^{(k)}_{i-q+1}=j_{q-1}\} = \\ &= \frac{P\{X_{i+1}=m, X_i^{(k)}=j_0, X^{(k)}_{i-1}=j_1, X^{(k)}_{i-2}=j_2, \dots, X^{(k)}_{i-q+1}=j_{q-1}\}}{P\{X_i^{(k)}=j_0, X^{(k)}_{i-1}=j_1, X^{(k)}_{i-2}=j_2, \dots, X^{(k)}_{i-q+1}=j_{q-1}\}} \end{aligned} \quad (10)$$

ή

$$p_{mj_0j_1\dots j_{q-1}}^{(k)} = \pi_{m|j_0j_1\dots j_{q-1}}^{(k)} p_{j_0j_1\dots j_{q-1}}^{(k)} \quad (11)$$

Το σύνολο των δυνατών δεσμευμένων πιθανοτήτων μπορεί να γραφεί με τη μορφή του διανύσματος:

$$\boldsymbol{\pi}_q^{(k)} \square [\boldsymbol{\pi}_{0|00\dots 00}^{(k)}, \boldsymbol{\pi}_{0|00\dots 01}^{(k)}, \dots, \boldsymbol{\pi}_{0|11\dots 11}^{(k)}]^T \quad (12)$$

Για παράδειγμα, για $k = 1$ και $q = 1$ και 2 προκύπτουν:

$$\boldsymbol{\pi}_1 = [\pi_{0|0}, \pi_{0|1}]^T, \boldsymbol{\pi}_2 = [\pi_{0|00}, \pi_{0|01}, \pi_{0|10}, \pi_{0|11}]^T \quad (13)$$

Παρατηρείται ότι το διάνυσμα των δεσμευμένων πιθανοτήτων $\boldsymbol{\pi}_q^{(k)}$ αναφέρεται μόνο στη μετάβαση στη μελλοντική κατάσταση 0 . Κανονικά, για μια στοχαστική ανέλιξη το σύνολο των δεσμευμένων πιθανοτήτων εκφράζεται με τη μορφή μητρώου και όχι διανύσματος και περιλαμβάνει τις πιθανότητες για όλες τις δυνατές μελλοντικές καταστάσεις.

Για μια δυαδική ανέλιξη όμως, επαρκεί το διάνυσμα $\boldsymbol{\pi}_q^{(k)}$ διότι:

$$\boldsymbol{\pi}_{1|j_0j_1\dots j_{q-1}}^{(k)} = 1 - \boldsymbol{\pi}_{0|j_0j_1\dots j_{q-1}}^{(k)} \quad (14)$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (10) και (14) προκύπτει:

$$\mathbf{p}_{q+1}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_q^{(k)} \circ \boldsymbol{\pi}_q^{(k)} \\ \mathbf{p}_q^{(k)} - \boldsymbol{\pi}_q^{(k)} \circ \mathbf{p}_q^{(k)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

όπου το σύμβολο \circ δηλώνει τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων στοιχείων των διανυσμάτων ή των μητρώων.

Για παράδειγμα, για $q = 2$ και $k = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3 &= [p_{000}, p_{001}, p_{010}, p_{011}, p_{100}, p_{101}, p_{110}, p_{111}]^T = \\ &= [p_{00}\pi_{0|00}, p_{01}\pi_{0|01}, p_{10}\pi_{0|10}, p_{11}\pi_{0|11}, p_{00}(1-\pi_{0|00}), p_{01}(1-\pi_{0|01}), p_{10}(1-\pi_{0|10}), \\ & p_{11}(1-\pi_{0|11})]^T \end{aligned} \quad (16)$$

Συνεπώς, η αλληλουχία των διανυσμάτων $\mathbf{p}_q^{(k)}$ για διαφορετικά q σχετίζεται με την αλληλουχία των $\boldsymbol{\pi}_q^{(k)}$ με μια αναδρομική σχέση.

Η περιγραφή της δομής εξάρτησης της δυαδικής στοχαστικής ανέλιξης με την έκφραση $\mathbf{p}_q^{(k)}$, αν και ολοκληρωμένη, κρίνεται ακατάλληλη εξαιτίας του μεγάλου αριθμού παραμέτρων. Η κατάσταση επιδεινώνεται αν ληφθούν υπόψη πολλαπλές χρονικές κλίμακες k . Στόχος είναι η μείωση των παραμέτρων που επιτυγχάνεται με τρόπους που αναπτύσσονται στη συνέχεια.

3.2 Δείκτες εξάρτησης

Ένας κοινός δείκτης εξάρτησης των μεταβλητών μιας στοχαστικής ανελίξης είναι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης και η διακύμανσή του:

$$\rho_j^{(k)} \equiv \text{Corr}[X_i^{(k)}, X_{i+j}^{(k)}] = \frac{\text{Cov}[X_i^{(k)}, X_{i+j}^{(k)}]}{\sqrt{\text{Var}[X_i^{(k)}] \text{Var}[X_{i+j}^{(k)}]}} \quad (17)$$

όπου οι συμβολισμοί $\text{Cov}[\]$ και $\text{Var}[\]$ δηλώνουν την αυτοσυνδιασπορά και τη διασπορά αντίστοιχα.

Στην ανάλυση που ακολουθεί, μελετάται η διακύμανση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης με τη χρονική κλίμακα k για σταθερή χρονική υστέρηση $j = 1$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις προφανείς σχέσεις:

$$E[X_i^{(k)}] = E[(X_i^{(k)})^2] = p_1^{(k)} = 1 - p^{(k)} \quad (18)$$

και

$$E[X_i^{(k)} X_{i+1}^{(k)}] = p_{11}^{(k)} = 1 - 2p^{(k)} + p^{(2k)} \quad (19)$$

όπου ο συμβολισμός $E[\]$ δηλώνει αναμενόμενες τιμές

και θεωρώντας:

$$\rho^{(k)} \equiv \rho_1^{(k)} \quad (20)$$

προκύπτει η ακόλουθη έκφραση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης:

$$\rho^{(k)} = \frac{p^{(2k)} - (p^{(k)})^2}{p^{(k)} - (p^{(k)})^2} \quad (21)$$

Στοχαστικές ανελίξεις με μακροπρόθεσμη εμμογή (φαινόμενο Hurst) εμφανίζουν σημαντική αυτοσυσχέτιση ακόμα και για μεγάλες τιμές της κλίμακας k (Koutsoyiannis,

2002). Για τη δυαδική στοχαστική ανέλιξη όμως, με την αύξηση της κλίμακας, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης $\rho^{(k)}$ μειώνεται τείνοντας στο μηδέν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1 για τα δεδομένα του αγγλικού σταθμού 180704 STRETHAM για ολόκληρο το έτος. Επομένως, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης $\rho^{(k)}$ δεν εκφράζει την εμμονή μακράς κλίμακας σε μια δυαδική στοχαστική ανέλιξη.

Κατά συνέπεια, προτείνεται ο καταλληλότερος δείκτης εξάρτησης των μεταβλητών της δυαδικής στοχαστικής ανέλιξης της βροχόπτωσης που ορίζεται:

$$\tau^{(k)} \square \frac{-\ln p^{(k)}}{-\ln p^{(2k)}} \quad (22)$$

Ο δείκτης $\tau^{(k)}$ περιλαμβάνει τις ίδιες ποσότητες με τον $\rho^{(k)}$ αλλά σε μια απλούστερη σχέση. Για τιμές στο διάστημα $[0.5, 1]$ ο δείκτης $\tau^{(k)}$ εκφράζει τη μακροπρόθεσμη εμμονή. Στο σχήμα 3.1 όπου απεικονίζεται το διάγραμμα του $\tau^{(k)}$ συναρτήσει της κλίμακας k για τα δεδομένα του αγγλικού σταθμού 180704 STRETHAM για ολόκληρο το έτος, ο δείκτης $\tau^{(k)}$ μειώνεται με την κλίμακα k αλλά σταθεροποιείται σε μια τιμή μεγαλύτερη του 0,5, γεγονός ενδεικτικό της μακροπρόθεσμης εμμονής. Ο δείκτης $\tau^{(k)}$ (όπως και ο $\rho^{(k)}$) αποτελεί μια μη γραμμική σχέση των πιθανοτήτων σε δύο χρονικές κλίμακες. Συνεπώς, η εκτίμησή του από εμπειρικά δεδομένα είναι μη αξιόπιστη εξαιτίας της διεύρυνσης του σφάλματος κατά την εφαρμογή των αλγεβρικών υπολογισμών.

Τέλος, παρατίθεται ένας τρίτος δείκτης της εμμονής μακράς κλίμακας :

$$-\ln p^{(k)} = -\ln p \cdot k \quad (23)$$

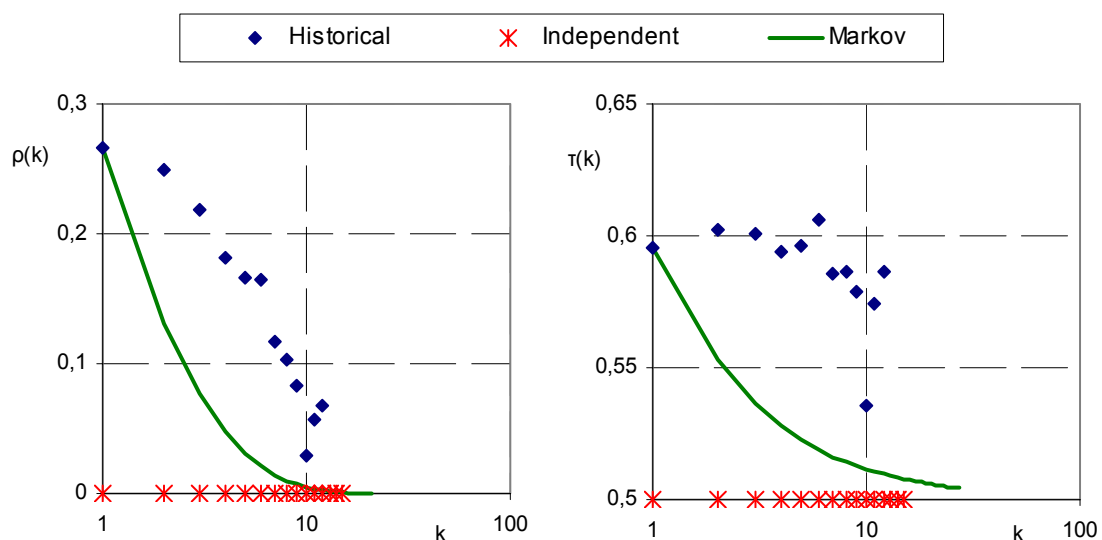
Η απεικόνιση της σχέσης (23) συναρτήσει της κλίμακας σε διπλά λογαριθμικό διάγραμμα εκφράζει το μοντέλο πλήρους ανεξαρτησίας με την εμφάνιση μιας ευθείας γραμμής με κλίση 1. Απόκλιση από αυτή την ευθεία υποδεικνύει την ύπαρξη εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών της ανέλιξης. Ειδικότερα, απόκλιση από την κλίση 1 σε μεγάλες κλίμακες σημαίνει μακροπρόθεσμη εμμονή.

3.3 Μοντέλο πλήρους ανεξαρτησίας

Η πλήρης ανεξαρτησία των μεταβλητών $X_i^{(k)}$ μιας στοχαστικής ανέλιξης εκφράζεται από την προφανή σχέση:

$$p^{(k)} = p^k \quad (24)$$

Η σχέση (24) ουσιαστικά είναι ισοδύναμη με τη σχέση (23) του δείκτη εξάρτησης. Όπως αναμένεται, συνδυάζοντας τις σχέσεις (21) και (23) προκύπτει $\rho^{(k)} = 0$ ανεξαρτήτως της κλίμακας k . Αντίστοιχα, από τις σχέσεις (22) και (24) προκύπτει $\tau^{(k)} = 0,5$. Σε διπλά λογαριθμικό χαρτί η σχέση (24) απεικονίζει ευθεία με κλίση 1 όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.2. Συνεπώς, αρκεί μία παράμετρος p για να προσδιοριστεί πλήρως το μοντέλο, για την οποία προφανώς ισχύει $0 < p < 1$. Το ανεξάρτητο μοντέλο αποτελεί το απλούστερο μοντέλο, αλλά κρίνεται ακατάλληλο να προσομοιάσει τη χρονοσειρά της βροχόπτωσης. Στα διαγράμματα του σχήματος 3.2 φαίνεται καθαρά η απόκλιση των εμπειρικών πιθανοτήτων από το μοντέλο πλήρους ανεξαρτησίας.



Σχήμα 3.1 Συντελεστής αυτοσυσχέτισης $\rho^{(k)}$ για χρονική υστέρηση 1 και δείκτης εξάρτησης $\tau^{(k)}$ συναρτήσει της κλίμακας k , όπως προέκυψαν από δεδομένα ημερήσιων υψών βροχόπτωσης του αγγλικού σταθμού 180704 STRETHAM για τα έτη 1878-1999, και εκτιμήθηκαν από το

μοντέλα Markov και το μοντέλο πλήρους ανεξαρτησίας για όλο το έτος.

3.4 Μοντέλο Markov

Μια ανάλυση Markov ορίζεται από την εξής ιδιότητα (Paroulis, 1991, p.635):

$$P\{X_{i+l} = x_{i+l} \mid X_i = x_i, X_{i-1} = x_{i-1}, \dots, X_1 = x_1\} = P\{X_{i+l} = x_{i+l} \mid X_i = x_i\} \quad (25)$$

όπου η γνώση του παρόντος (χρόνος i) προσδιορίζει πλήρως το μέλλον (χρόνος $i+l$ με $l > 0$) και το παρελθόν (χρόνος $i-1$ και νωρίτερα) δεν παίζει κανένα ρόλο.

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και με θεώρηση Markov προκύπτει:

$$\begin{aligned} p^{(k)} &= P\{X_i = 0, X_{i-1} = 0, \dots, X_{i-k+1} = 0\} = \\ &= P\{X_i = 0 \mid X_{i-1} = 0, \dots, X_{i-k+1} = 0\} P\{X_{i-1} = 0, \dots, X_{i-k+1} = 0\} = \\ &= \pi_{0|0} p^{(k-1)} \end{aligned}$$

και ακολούθως

$$p^{(k)} = \pi_{0|0} p^{(k-1)} = p \pi_{0|0}^{(k-1)} \quad (26)$$

ή εναλλακτικά

$$-\ln p^{(k)} = -\ln p - \ln \pi_{0|0}^{(k-1)} \quad (27)$$

Η σχέση (27) είναι χαρακτηριστική της εξάρτησης Markov και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της παραμέτρου $\pi_{0|0}$ από δύο οποιοσδήποτε πιθανότητες $p^{(k)}$.

Θεωρώντας γνωστές τις πιθανότητες $p = p^{(1)}$ και $p^{(2)}$, τότε $\pi_{0|0} = p^{(2)} / p$.

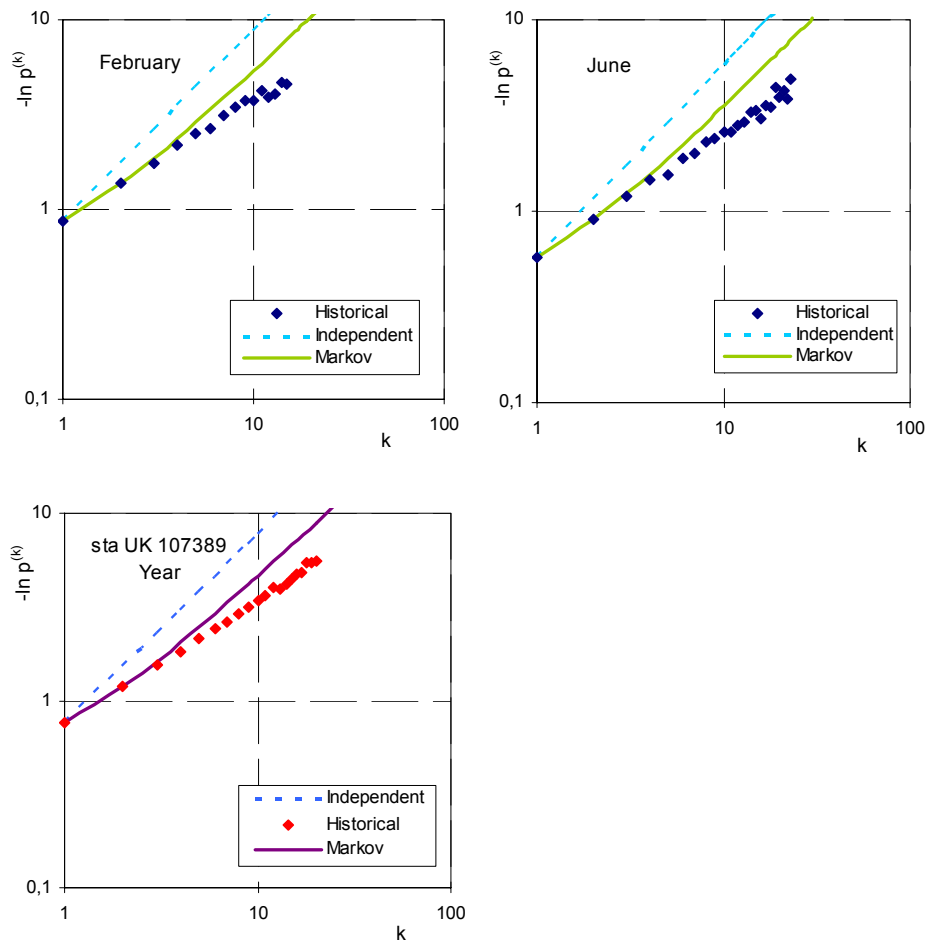
Η παράμετρος $\pi_{0|1}$ εκτιμάται με τη χρήση της σχέσης (8) ως εξής:

$p_{00} + p_{01} = p_0$ ή ισοδύναμα $p^{(2)} + \pi_{0|1} p_1 = p_0$ και επομένως $\pi_{0|1} = (p - p^{(2)}) / (1 - p)$.

Συμπεραίνεται, λοιπόν ότι δεδομένου των δύο πιθανοτήτων ξηρής κατάστασης για τις κλίμακες 1 και 2, $p^{(2)}$ και p , η πιθανότητα $p^{(k)}$ προσδιορίζεται πλήρως με τη θεώρηση Markov από τη σχέση (27).

Στο σχήμα 3.2 απεικονίζονται οι πιθανότητες $p^{(k)}$ συναρτήσει της κλίμακας k που εκτιμήθηκαν από τα εμπειρικά δεδομένα του σταθμού 107389 στην Αγγλία, το μοντέλο Markov (με τη σχέση (28)) και το μοντέλο ανεξαρτησίας (με τη σχέση (25)). Το μοντέλο Markov προσδιορίστηκε (από τη σχέση 27) θεωρώντας τις πιθανότητες $p^{(2)}$ και p των ημερησίων μετρήσεων βροχόπτωσης του αγγλικού σταθμού.

Συγκρίνοντας τα εμπειρικά δεδομένα με το μοντέλο Markov είναι εμφανής η απόκλιση των εμπειρικών δεδομένων από το μοντέλο Markov για κλίμακες $k=8$ και μετά, γεγονός που υποδεικνύει την ύπαρξη ισχυρότερης αυτοσυσχέτισης από εκείνης του Markov. Αυτό συμβαίνει για όλους τους μήνες και για ολόκληρο το χρόνο. Για μεγάλες κλίμακες k , για το μοντέλο Markov, ισχύει $\ln^{(k)} \sim k$ (όπως προκύπτει από τη σχέση (27)) και η ευθεία που απεικονίζει το μοντέλο Markov γίνεται παράλληλη με την ευθεία του ανεξάρτητου μοντέλου (Σχήμα 3.2), γεγονός που υποδεικνύει ότι το μοντέλο Markov δεν επαρκεί για την έκφραση της μακροπρόθεσμης εμμονής



Σχήμα 3.2 Οι πιθανότητες $p^{(k)}$ συναρτήσει της κλίμακας k που εκτιμήθηκαν από τα εμπειρικά δεδομένα του σταθμού 107389 CHATSWORTH στην Αγγλία, το μοντέλο Markov και το μοντέλο ανεξαρτησίας για ολόκληρο το έτος και για τους μήνες Φεβρουάριο και Ιούνιο (για το χειμώνα και το καλοκαίρι αντίστοιχα).

3.5 Αρχή της μέγιστης εντροπίας

Το μοντέλο Markov δίνει μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικότητας, ιδιαίτερα αν συγκριθεί με το μοντέλο ανεξαρτησίας αποτελεί μια θεαματική βελτίωση. Παρόλα αυτά, είναι εμφανείς αποκλίσεις σε μεγάλες κλίμακες προς μια συγκεκριμένη πλευρά που αντιστοιχεί σε μια πιο ισχυρή συσχέτιση από εκείνη που χαρακτηρίζει το μοντέλο Markov.

Η θεώρηση ενός μοντέλου μη Markov θα οδηγούσε στην εμφάνιση ενός μεγάλου αριθμού παραμέτρων (2^q για ένα μοντέλο τάξης q), όπως ήδη αναπτύχθηκε στην ενότητα 3.1. Ένας τρόπος μείωσης των παραμέτρων προτάθηκε από τον Κουτσογιάννη (2005) με τη θεώρηση της αρχής της μέγιστης εντροπίας

Υπενθυμίζεται ότι η έννοια της εντροπίας (πιο συγκεκριμένα η έννοια της εντροπίας που διαμορφώθηκε από τους Boltzmann, Gibbs και Shannon), η τόσο διαδεδομένη στις επιστήμες της φυσικής και των μαθηματικών, στη θεωρία πιθανοτήτων και στοχαστικών ανελίξεων μεταφράζεται ως μέτρο της αβεβαιότητας και της τυχαιότητας και ορίζεται (Paroulis, 1991, σ.558) ως εξής:

Για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X που λαμβάνει τιμές x_j με $j = 1, \dots, w$ και με πιθανότητες $p(x_j)$ ώστε:

$$\sum_{j=1}^w p_j = 1 \quad (28)$$

τότε, η εντροπία ορίζεται ως η ποσότητα:

$$\varphi \square E[-\ln p(X)] = - \sum_{j=1}^w p_j \ln p_j \quad (29)$$

όπου η εντροπία φ αποτελεί την αβεβαιότητα για τη μεταβλητή X και ισούται με την πληροφορία που λαμβάνεται όταν γίνει η μέτρηση της X .

Η μεγιστοποίηση της εντροπίας με μοναδικό περιορισμό τη σχέση (28), οδηγεί στις ίσες πιθανότητες $p_j = 1/w$ (ισοπίθανα γεγονότα). Για προβλήματα με ασύμμετρους περιορισμούς η εντροπία αποτελεί ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό μη ισοπίθανων γεγονότων.

3.6 Το προτεινόμενο μαθηματικό μοντέλο

Ειδικότερα, στην εργασία του Κουτσογιάννη (2005) προτάθηκε ένα μοντέλο μη Markov στο οποίο η πιθανότητα $p^{(k)}$ για μια ξηρή περίοδο μεγέθους k δίνεται από τη σχέση:

$$p^{(k)} = \{1 + (p^s - 1) [1 + (\xi^{-1/n} - 1) (k-1)]^n\}^{-1/s} \quad (28)$$

Περιλαμβάνονται τέσσερις παράμετροι, οι s , p , n και ξ .

Για την παράμετρο s ισχύει $s \geq 0$ ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι p , n και ξ λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $[0, 1]$.

Για να επιτραπεί η προς τα πίσω επεκτασιμότητα στην κλίμακα, δηλαδή η χρήση της εξίσωσης για χρονικές κλίμακες λεπτότερες της βασικής έως το μηδέν (γεγονός που έχει ιδιαίτερη σημασία στην περίπτωση της ανέλιξης της βροχόπτωσης), οι παράμετροι ξ και n πρέπει να ικανοποιούν την ανίσωση: $1 - (\xi^{-1/n} - 1) \geq 0$, ή $\xi \geq 1/2^n$.

Για την τιμή της παραμέτρου $s > 0$, συνεπάγεται από την εξίσωση (1) μια συνάρτηση δύναμης της πιθανότητας $p^{(k)}$ (hyper-exponential tail) με την κλίμακα k .

Μετά από μελέτη, ο Κουτσογιάννης (2005) κατέληξε στην ειδική περίπτωση $s = 0$ για την οποία η εφαρμογή του κανόνα de l'Hopital οδηγεί στην εξίσωση:

$$p^{(k)} = p^{[1 + (\xi^{-1/n} - 1) (k-1)] n} \quad (29)$$

Συνεπώς, για $s = 0$ η πιθανότητα $p^{(k)}$ φθίνει εκθετικά με τη χρονική κλίμακα k (exponential type). Ειδικότερα, δύναται να ονομαστεί τύπου Weibull καθώς ο εκθέτης αυξάνεται ως συνάρτηση δύναμης της χρονικής κλίμακας k . Η εξίσωση (29) μπορεί να γραφεί:

$$-\ln p^{(k)} = -\ln p [1 + (\xi^{-1/n} - 1) (k - 1)]^n \quad (30)$$

Άμεσα επαληθεύεται ότι $p^{(1)} = p$ για κάθε n, s και ξ που σημαίνει ότι η παράμετρος p ταυτίζεται με την πιθανότητα ξηρής κατάστασης στη βασική κλίμακα.

Επιπλέον, αν είναι γνωστή η πιθανότητα ξηρής κατάστασης σε δύο κλίμακες k και l τότε η παράμετρος ξ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\xi = [\{(1-l) \alpha^{1/n} - (k-l)\} / \{(1-l) \alpha^{1/n} - (k-2)\}]^n \quad (31)$$

όπου

$$\alpha := \frac{-\ln p^{(k)}}{-\ln p^{(l)}} \quad (32)$$

Θεωρούμε $k = 1$ και $l = 2$ και τοποθετούμε τις πιθανότητες $p^{(2)}$ και p ως περιορισμούς, τότε η παράμετρος $\xi = \alpha$ και αν $s = 0$ ισχύει επιπλέον $\xi = \tau$ όπου τ ο δείκτης εξάρτησης της δυαδικής ανέλιξης ο οποίος προσδιορίστηκε από τη σχέση (22) στην ενότητα 3.2.

Για $s = 0$ και $n = 1$ η προκύπτουσα σχέση αντιστοιχεί σε εξάρτηση Markov, όπως επιβεβαιώνεται με τη σύγκριση των σχέσεων (27) και (30).

Για $s = 0$, $n = 1$ και $\xi = 0,5$ προκύπτει πλήρη ανεξαρτησία, όπως επιβεβαιώνεται με τη σύγκριση των σχέσεων (23) και (30).

Για $s = 0$, $n < 1$ και μεγάλο k , η εξαγόμενη πιθανότητα $-\ln p^{(k)}$ είναι ανάλογη με k^n , γεγονός που υποδηλώνει μια υπερεκθετική «ουρά» της πιθανότητας $p^{(k)}$.

Συμπεραίνεται ότι η παραμετρική εξίσωση (28) δύναται να εκφράσει ένα εύρος σχέσεων εξάρτησης και να υποδείξει τη μακροπρόθεσμη εμμονή αν υπάρχει με τη χρήση μόνο τεσσάρων παραμέτρων.

Τελικά, με τη σχέση (28) καθορίζονται πλήρως οι πιθανότητες $p^{(k)}$ ακολουθιών ξηρών ημερών για κάθε κλίμακα και τάξη καθώς και οι αντίστοιχες δεσμευμένες πιθανότητες $\pi_0^{(k)} | 00...00$.

Οι πιθανότητες των άλλων ακολουθιών, δεδομένου ότι είναι γνωστές οι πιθανότητες τάξης 1 και 2, προκύπτουν με αναδρομική εφαρμογή των ακόλουθων σχέσεων (33) και (34):

$$\begin{aligned} p_{0x0} + p_{0x1} &= p_{0x} \\ p_{1x0} + p_{1x1} &= p_{1x} \\ p_{0x0} + p_{1x0} &= p_{x0} \\ p_{0x1} + p_{1x1} &= p_{x1} \end{aligned} \quad (33)$$

Η σχέση (33) αποτελεί μια πιο απλή διατύπωση της σχέσης (8) για $k = 1$, με το σύμβολο x να εκφράζει το συνδυασμό των δεικτών $j_1 \dots j_{q-2}$.

Παρατηρείται ότι από την (33) προσδιορίζονται άμεσα τέσσερις πιθανότητες με δεδομένη την πιθανότητα $p^{(k)} = p_{00\dots0}$. Οι υπόλοιπες άγνωστες πιθανότητες προκύπτουν από τη σχέση:

$$p_{ixj} = \frac{p_{ix} p_{xj}}{p_x} \quad (34)$$

όπου οι δείκτες i και j λαμβάνουν τιμές 0 ή 1 και η πιθανότητα $p_x = p_{x1} + p_{x0} = p_{0x} + p_{1x}$ εκφράζει τις πιθανότητες τάξης $q-2$. Η σχέση (34) συνδέει τις πιθανότητες τάξης q με τις πιθανότητες τάξης $q-1$. Επομένως, με γνωστές τις πιθανότητες τάξης $q-1$, προσδιορίζονται εκείνες της τάξης q .

Κατ'επέκταση, η σχέση (34) μπορεί να γραφεί: $p_{ixj} / p_{xj} = p_{ix} / p_x$ όπου τα δύο μέρη της εξίσωσης εκφράζουν δεσμευμένες πιθανότητες.

Τελικά, η σχέση (34) καταλήγει στη μορφή:

$$\pi_{i|xj} = \pi_{i|x} \quad (35)$$

Η σχέση (35) υποδεικνύει ότι η δεσμευμένη πιθανότητα της ανέλιξης της βροχόπτωσης δεν εξαρτάται από το πιο απομακρυσμένο χρονικό βήμα ($\pi_{i|x0} = \pi_{i|x1} = \pi_{i|x}$).

Με αναδρομική εφαρμογή της σχέσης (35) συμπεραίνεται ότι η δεσμευμένη πιθανότητα της ανέλιξης της βροχόπτωσης εξαρτάται μόνο από το αμέσως προηγούμενο χρονικό βήμα, γεγονός που εκφράζει εξάρτηση Markov.

Συνεπώς, η εφαρμογή των σχέσεων (33) και (35) (ή η εφαρμογή των (34) και (35)) ισοδυναμεί με τη θεώρηση του Μαρκοβιανού μοντέλου για τον υπολογισμό των υπόλοιπων (εκτός των τεσσάρων) πιθανοτήτων και για το λόγο αυτό το προτεινόμενο μοντέλο καλείται quasi-Markov.

4 Δεδομένα και Προεπεξεργασία

4.1 Επιλογή και Κατανομή Σταθμών

Η πιθανοτική προσέγγιση προϋποθέτει την ύπαρξη επαρκούς και αξιόπιστου ιστορικού δείγματος. Η εξαγωγή και η επαλήθευση των εξισώσεων και σχέσεων ενός στοχαστικού μοντέλου δεν είναι δυνατή παρά μόνο όταν υπάρχουν αξιόπιστες μετρήσεις των υδρολογικών συνιστωσών. Αρχικό στάδιο της μελέτης ήταν η αναζήτηση της διαθέσιμης υδρολογικής πληροφορίας σε παγκόσμια κλίμακα. Η εύρεση των απαιτούμενων δεδομένων κατέστη ευχερής χάρη στην αυτοματοποίησή τους μέσω ηλεκτρονικών υπολογιστών, την οργάνωσή τους σε συστήματα βάσεων δεδομένων και τη διάθεσή τους στο διαδίκτυο.

Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στην επιλογή της πληροφορίας. Μια μέτρια μέτρηση αξίζει πολύ περισσότερο από έναν καλό υπολογισμό (Κουτσογιάννης, 1997, σ. 48). Κατά συνέπεια, αναζητήθηκαν ιστορικές χρονοσειρές με πραγματικό¹ μήκος τουλάχιστον 100 ετών. Επιλέχθηκαν οι μετρήσεις ημερησίων υψών σημειακής βροχόπτωσης από 160 σταθμούς συνολικά στις Η.Π.Α και την Ευρώπη που ικανοποιούν το άνω κριτήριο. Το ιστορικό δείγμα ήταν καταχωρημένο σε βάσεις δεδομένων (Database). Η λειτουργία και ο τρόπος διαχείρισης των βάσεων δεδομένων για την επιλογή και εξαγωγή των επιθυμητών στοιχείων θα αναπτυχθεί στη συνέχεια (ενότητα 4.2). Τέλος, από το σύνολο των 160 σταθμών επιλέχθηκαν 15 σταθμοί κατανεμημένοι χωρικά σε όλη την έκταση των ΗΠΑ και 14 σταθμοί στην Ευρώπη² εκ των οποίων 10 βρίσκονται στην Αγγλία, 2 στην Ιταλία και 1 στη Γαλλία.

Η επιλογή των σταθμών έγινε με τρόπο ώστε να επιτευχθεί η βέλτιστη χωρική κατανομή τους (πυκνότητα σταθμών ανά km²). Έτσι, αποφεύγεται η συσσώρευση περισσότερων σταθμών σε ορισμένες περιοχές ενώ άλλες παραμένουν ακάλυπτες.

¹ Λόγω σποραδικής έλλειψης μετρήσεων περιορίζεται το μήκος χρονοσειράς

² Χρονοσειρά ημερησίων υψών βροχόπτωσης με μήκος τουλάχιστον 100 ετών δεν βρέθηκε για ελληνικά δεδομένα.

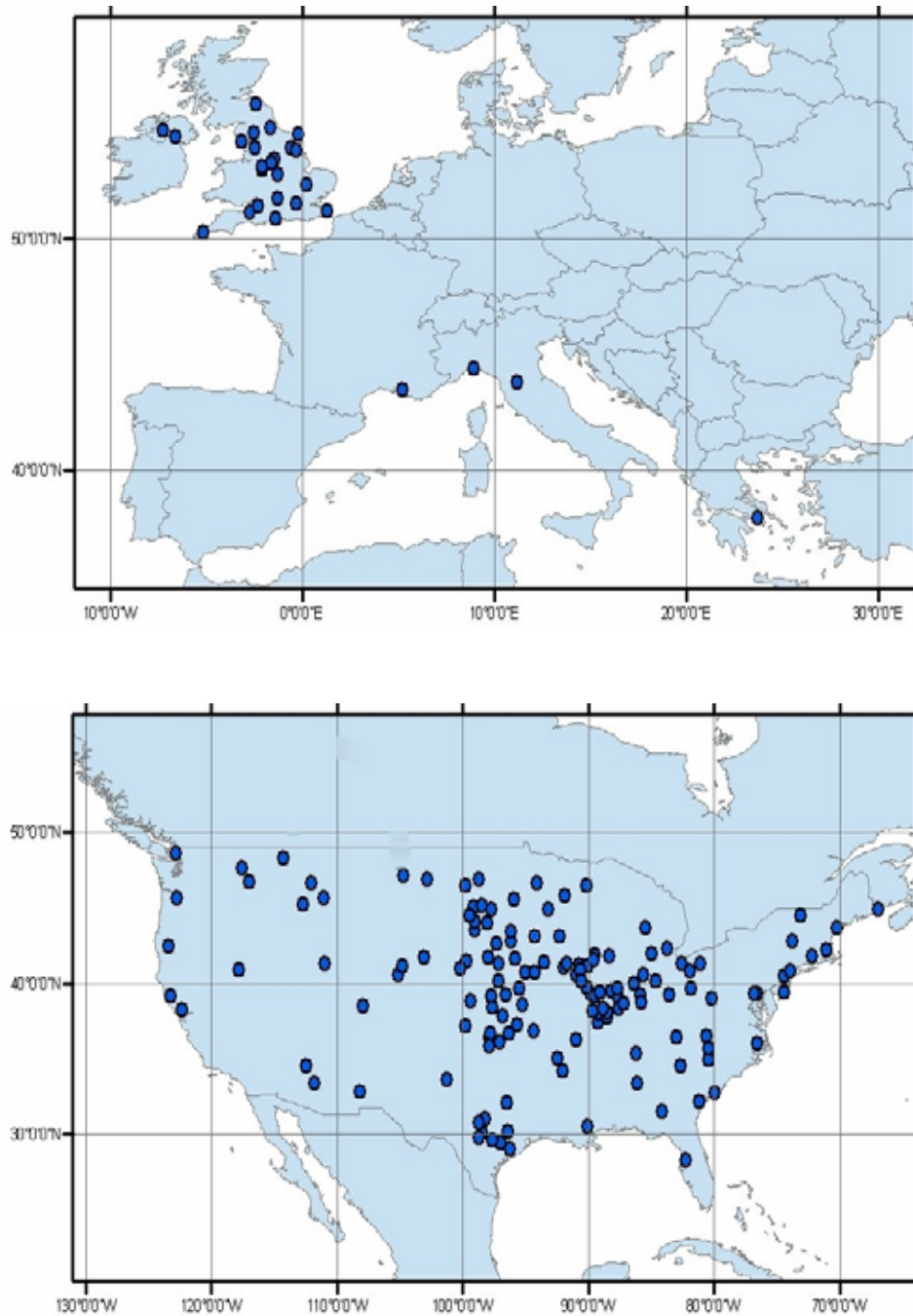
Συνεπώς, η συλλεγόμενη πληροφορία και τα εξαγόμενα δια αυτής συμπεράσματα αντιπροσωπεύουν ικανοποιητικά όλη την περιοχή στην οποία αναφέρονται.

Ακολουθεί συγκεντρωτικός πίνακας που περιλαμβάνει το τελικό ιστορικό δείγμα των 28 συνολικά επιλεγμένων σταθμών με την ταυτότητα του κάθε σταθμού - κωδικός, όνομα, περιοχή, γεωγραφικό πλάτος και μήκος, υψόμετρο θέσης - το πραγματικό μήκος χρόνου της χρονοσειράς καθώς και τη χρονική περίοδο της μέτρησης (πίνακας 4.1) καθώς και χάρτες των Η.Π.Α και της Ευρώπης όπου έχει προσδιοριστεί η θέση των σταθμών με κατάλληλη ένδειξη (σχήμα 4.2).

Με τον ποσοτικό έλεγχο των ιστορικών χρονοσειρών, προσδιορίζονται οι σποραδικές ελλείψεις δεδομένων. Οι ελλείψεις οφείλονται σε βλάβες των βροχομετρικών οργάνων, στις δύσκολες καιρικές συνθήκες κάτω από τις οποίες πρέπει να λειτουργήσουν τα μετρητικά συστήματα, στην κακή συντήρησή τους και σε αμέλειες ή εμπόδια των παρατηρητών. Η αποκατάσταση της συνέπειας και συμπλήρωση των ελλείψεων των χρονοσειρών έχει ήδη πραγματοποιηθεί κατά τη δημιουργία της βάσης δεδομένων. Αποτέλεσμα του ελέγχου που προηγήθηκε είναι οι κατάλληλα κωδικοποιημένες ενδείξεις της βάσης δεδομένων με τη βοήθεια των οποίων προσδιορίζονται οι αναξιόπιστες μετρήσεις και αφαιρούνται από την ιστορική χρονοσειρά, διαδικασία που περιγράφεται στην ενότητα 4.2.

Πίνακας 4.1 Συγκεντρωτικός πίνακας των 28 βροχομετρικών σταθμών των οποίων χρησιμοποιήθηκαν οι μετρήσεις ημερησίων υψών σημειακής βροχόπτωσης.

A/A	Κωδικός Σταθμού	Όνομα Σταθμού/ Πόλη	Κράτος/ Χώρα	Γεωγραφ. Πλάτος	Γεωγραφ. Μήκος	Υψόμετρο (m)	Πραγματικό Μήκος Μηνιαίων Χρονοσειρών (έτη)	Έτη Μέτρησης
1	35820	POCAHONTAS 1	ARIZONA USA	36,27	-90,97	96	106-108	1894-2001
2	53005	FORT COLLINS	COLORADO USA	40,59	-105,09	1524	101-102	1900-2001
3	90140	ALBANY 3SE	GEORGIA USA	31,54	-84,14	55	106-110	1892-2001
4	106152	MOSCOW U OF ID	IDAHO USA	46,74	-116,97	810	107-108	1893-2001
5	138688	WASHINGTON	IOWA USA	41,29	-91,69	230	108-109	1893-2001
6	144972	MANHATTAN	KANSAS USA	39,21	-96,59	324	101-102	1900-2001
7	251145	BRIDGEPORT	NEBRASKA USA	41,67	-103,1	1116	103-105	1897-2001
8	253630	HARTINGTON	NEBRASKA USA	42,61	-97,27	417	105-109	1893-2001
9	269171	WINNEMUCCA WSO AP	NEVADA USA	40,91	-117,8	1309	123-124	1877-2001
10	322188	DICKINSON EXP STN	NORTH DAKOTA USA	46,89	-102,8	749	106-109	1893-2001
11	324418	JAMESTOWN STATE HOSPITAL	NORTH DAKOTA USA	46,89	-98,69	447	100-102	1881-2001
12	326255	NAPOLEON	NORTH DAKOTA USA	46,51	-99,77	603	100-101	1901-2001
13	391739	CLARK	SOUTH DAKOTA USA	44,89	-97,74	542	101-107	1893-2001
14	412121	CROSBYTON	TEXAS USA	33,66	-101,25	917	100-104	1897-2001
15	483100	EVANSTON 1E	WYOMING USA	41,27	-110,95	2078	100-102	1890-2000
16	2165	DURHAM_ LPMS	UK	54,697	-1,655		108-110	1880-1994
17	4061	SHEFFIELD_ LPMS	UK	53,324	-1,538		105-107	1883-1994
18	43941	DALTON_ HOLME	UK	53,84	-0,603		104-107	1881-1998
19	82583	SHEFFIELD	UK	53,383	-1,483		109-114	1883-2000
20	107389	CHATSWORTH	UK	53,233	-1,617		102-105	1878-1999
21	180704	STRETHAM	UK	52,306	0,178		114-116	1871-1999
22	305050	DOVER_ W.WKS	UK	51,141	1,295		99-102	1894-1998
23	404988	MILLFIELD_ SCHOOL	UK	51,088	-2,728		106-108	1871-1987
24	575548	STONYHURST	UK	53,85	-2,467		100-102	1871-1978
25	923753	MARCHMONT	UK	55,733	-2,417		105-106	1871-1981
26		MARSEILLE	FRANCE	43,45	5,2	6	128	1864-1991
27		GENOVA	ITALY	44,4	8,9	21	148	1833-1980
28		FIRENZE	ITALY	43,8	11,2	40	158	1822-1979



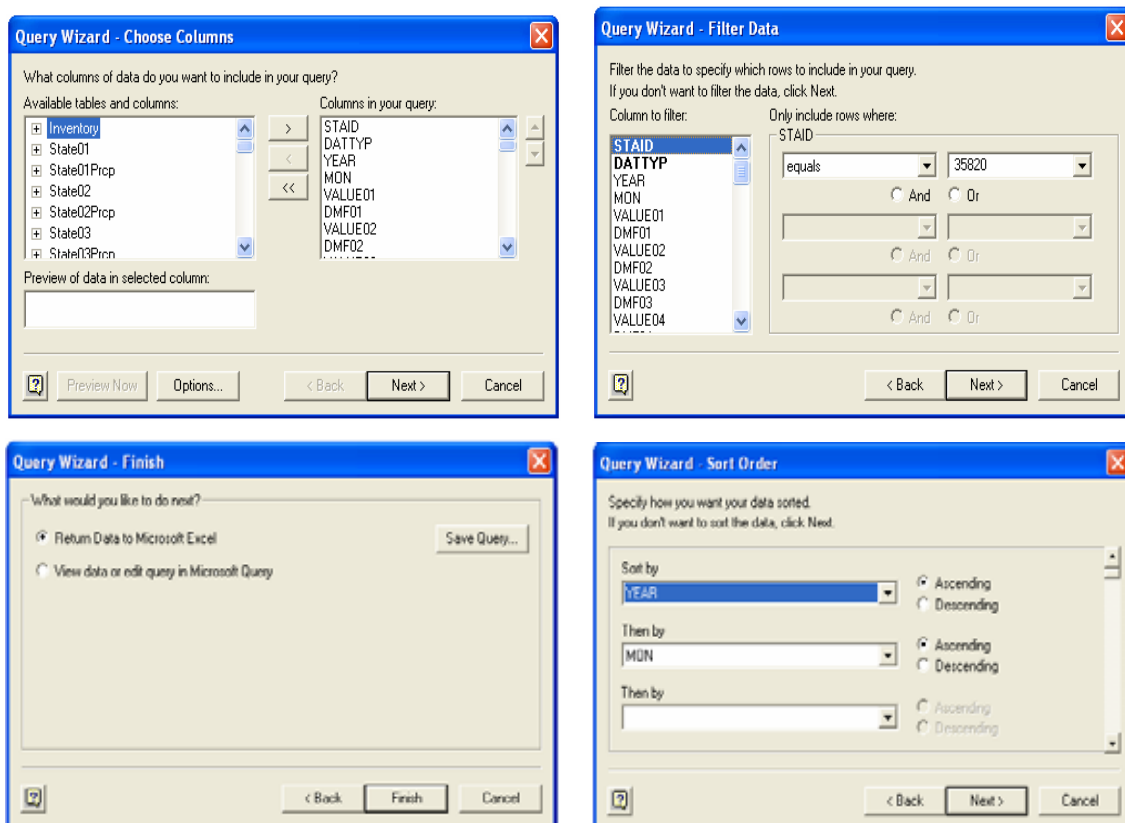
Σχήμα 4.3 Η γεωγραφική θέση των 28 βροχομετρικών σταθμών στις Η.Π.Α και την Ευρώπη εν μέσω των 160 σταθμών που έχουν δείγματα άνω των 100 ετών (με την ένδειξη του κύκλου). Προέλευση: Koutsoyiannis (2004) μετά από προσαρμογή.

4.2 Βάσεις Δεδομένων (Databases)

Η ανάγκη ευχερούς διαχείρισης της υδρολογικής πληροφορίας οδήγησε στην ανάπτυξη διαφόρων πρακτικών οργάνωσης και αποθήκευσης της πληροφορίας, όπως είναι οι βάσεις δεδομένων. Για την παρούσα μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις βάσεις δεδομένων (αμερικάνικη, αγγλική, γαλλική και ιταλική) οι οποίες διαφέρουν σε επιμέρους στοιχεία αλλά υπακούν σε ένα γενικό πλαίσιο διαχείρισης συμβατό με το λογισμικό Microsoft Access Database.

Το λογισμικό Access Database παρέχει τη δυνατότητα διαχείρισης όλων των δεδομένων από ένα μόνο αρχείο. Μέσω του αρχείου γίνεται η επιλεκτική αναζήτηση και ο εντοπισμός των επιθυμητών δεδομένων με τη δημιουργία κατάλληλων πινάκων (queries). Ακολουθεί η εξαγωγή των δεδομένων με συγκεκριμένη προεπιλεγμένη μορφή (layout) σε εξωτερικές εφαρμογές όπως το Microsoft Excel για το επόμενο στάδιο της επεξεργασίας τους. Αναλυτικότερα, η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής:

Επιλέγεται από την μπάρα εργαλείων φύλλου του Excel η επιλογή «δεδομένα» (Data) και στη συνέχεια η επιλογή «εξαγωγή εξωτερικών δεδομένων» (Get External Data). Μέσω παραθύρου, δημιουργείται νέος πίνακας δεδομένων (New Database Query). Για κάθε βάση δεδομένων δημιουργείται ξεχωριστός πίνακας. Αναζητείται η νέα πηγή δεδομένων (η αποθηκευμένη από το διαδίκτυο βάση δεδομένων) και επιλέγεται ο τύπος διακομιστή (Server) ο οποίος είναι ο Microsoft Access Driver (*.mdb). Με τον τρόπο αυτό, δημιουργείται ο νέος πίνακας και το αρχείο διαχείρισης της συγκεκριμένης βάσης δεδομένων όπου με χρήση κατάλληλου φίλτρου (Filter Data) εμφανίζονται μόνο τα επιθυμητά δεδομένα. Ακολουθεί η επιλογή του τρόπου ταξινόμησής τους (η παρούσα ταξινόμηση έγινε με χρονολογική σειρά) από ειδικό παράθυρο (Sort Order) και τέλος τα δεδομένα προβάλλονται με την επιλεγμένη μορφή σε φύλλο λογισμικού του Excel. Η διαδικασία που περιγράφηκε απεικονίζεται στο σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4 Διαδικασία διαχείρισης της βάσης δεδομένων για την επιλογή και εξαγωγή των επιθυμητών πληροφοριών.

Η αμερικάνικη βάση δεδομένων προέρχεται από το Αμερικάνικο Δίκτυο Ιστορικής Κλιματολογίας (United States Historical Climatology Network) και πραγματοποιήθηκε από το Κέντρο Ανάλυσης Διοξειδίου του Άνθρακα (Carbon Dioxide Information Analysis Center CDIAC). Περιλαμβάνει ημερήσιες μετρήσεις μέγιστης και ελάχιστης θερμοκρασίας, βροχόπτωσης και χιονόπτωσης από σταθμούς εγκατεστημένους στις περισσότερες πολιτείες των Η.Π.Α. Μετά από επιλογή των δεδομένων που μας ενδιαφέρουν (της βροχόπτωσης) και ταξινόμησής τους χρονολογικά, προβάλλεται σε φύλλο του Excel πίνακας $n \times 31$ όπου n το σύνολο των μηνών για τη δεδομένη χρονική περίοδο (πίνακας 4.5).

Πίνακας 4.5 Πίνακας της αμερικάνικης βάσης δεδομένων με επιλεγμένα μόνο τα ημερήσια ύψη βροχόπτωσης του αμερικάνικου σταθμού 106152 MOSCOW IDAHO.

A/A	STAIID	DATTYP	YEAR	MON	VALUE01	DMF01	VALUE02	DMF02	VALUE...	DMF ...	VALUE30	DMF30	VALUE31	DMF31
1	106152	PRCP	1893	11	-999	0	-999	0	0	0	-999	0
2	106152	PRCP	1893	12	0	0	0	0	0	0	55	0
3	106152	PRCP	1894	1	0	0	0	0	30	0	0	0
4	106152	PRCP	1894	2	0	0	0	0	-999	0	-999	0
5	106152	PRCP	1894	3	0	0	0	0	0	0	0	0
6	106152	PRCP	1894	4	0	0		T	0	0	-999	0
7	106152	PRCP	1894	5		T	0	0	0	0	0	0
8	106152	PRCP	1894	6	38	0	0	0	16	0	-999	0
9	106152	PRCP	1894	7	0	0	0	0	0	0	0	0
10	106152	PRCP	1894	8	0	0	0	0	0	0	25	0
11	106152	PRCP	1894	9	0	0	0	0	0	0	-999	0
12	106152	PRCP	1894	10	55	0		T	0	0	48	0
13	106152	PRCP	1894	11	0	0	0	0	0	0	-999	0
14	106152	PRCP	1894	12	0	0	0	0	0	0	54	0
15	106152	PRCP	1895	1	0	0	60	0	0	0	0	0
16	106152	PRCP	1895	2	0	0	0	0	-999	0	-999	0
17	106152	PRCP	1895	3	0	0	0	0	0	0	0	0
...
...
n-1	106152	PRCP	1898	11	0	0	35	0	20	0	-999	0
n	106152	PRCP	1898	12	1	0	0	0	25	0		T

Στον πίνακα του Excel, κάθε σταθμός φέρει έναν αριθμητικό κωδικό αναγνώρισης (STAIID), ενώ δηλώνεται ο τύπος των δεδομένων (DATTYP) π.χ. βροχόπτωση (PRECIPITATION). Κάθε γραμμή του πίνακα αντιπροσωπεύει ένα μήνα του κάθε έτους και περιλαμβάνει το σύνολο των ημερησίων μετρήσεων (VALUES) οι οποίες είναι 30 ή 31 ανάλογα με το μήνα (28 ή 29 για το Φεβρουάριο). Οι τιμές των μετρήσεων έχουν φυσικό νόημα όταν είναι θετικοί αριθμοί. Η τιμή «-999» δηλώνει απουσία ή σφάλμα μέτρησης. Οι μετρήσεις με τιμές «-999» αντικαθίστανται με «κενό», ώστε να καθίσταται στη συνέχεια δυνατή η συνάθροισή τους για την επίτευξη μεγαλύτερης χρονικής κλίμακας.

Ο κωδικός DMF εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο προήλθε η μέτρηση. Έτσι, χρησιμοποιούνται οι εξής συμβολισμοί:

- A = συναθροισμένο ποσό από την τελευταία μέτρηση
- B = συναθροισμένο ποσό από την τελευταία μέτρηση (συμπεριλαμβανομένων και εκτιμημένων τιμών)
- E = εκτιμημένη τιμή
- J = τιμή που έχει καταγραφεί ιδιοχείρως

T	=	ίχνος βροχόπτωσης, η τιμή της μέτρησης θεωρήθηκε μηδενική
S	=	τιμή που έχει ληφθεί υπόψη σε άλλη μέτρηση η οποία προκύπτει από συνάθροιση επιμέρους τιμών
«κενό»	=	μη έγκυρη η αρχική μέτρηση

Οι μετρήσεις βροχόπτωσης με τις ενδείξεις A, B, E, J, T και S κρίνονται αναξιόπιστες και αφαιρούνται από τη χρονοσειρά με τρόπο ώστε να μη χάνεται η χρονική αλληλουχία των δεδομένων (αντικαθίστανται με κενό). Έτσι εξασφαλίζεται η ποιότητα και αξιοπιστία του δείγματος.

Η γαλλική βάση δεδομένων περιλαμβάνει ημερήσιες μετρήσεις βροχόπτωσης από τον παλαιότερο σταθμό της Γαλλίας, στην πόλη Marseille. Η μορφή της αποθηκευμένης χρονοσειράς διαφέρει. Οι μετρήσεις είναι καταχωρημένες με χρονική αλληλουχία σε σειρές των 16 τιμών και κάθε μήνας περιλαμβάνει δύο σειρές. Στην πρώτη σειρά κάθε μήνα απουσιάζει η δέκατη έκτη τιμή (υπάρχει «κενό»), ενώ στη δεύτερη σειρά η δέκατη έκτη τιμή υπάρχει μόνο αν ο μήνας έχει 31 ημέρες¹. Δηλώνεται το έτος (an), ο μήνας (mois) και το δεκαπενθήμερο (quinzaine).

Μορφή του πίνακα της γαλλικής βάσης δεδομένων (μεγέθους $2n \times 16$ όπου n το σύνολο των μηνών για δεδομένη χρονική περίοδο) φαίνεται στον πίνακα 4.6

¹Ο Φεβρουάριος έχει 28 ημέρες και 29 για τα δίσεκτα έτη, οπότε λείπουν οι τιμές της δέκατης τρίτης (αν έχει 28 ημέρες), δέκατης τέταρτης και δέκατης πέμπτης μέτρησης.

Πίνακας 4.6 Πίνακας της γαλλικής βάσης δεδομένων με επιλεγμένα μόνο τα ημερήσια ύψη βροχόπτωσης του σταθμού Marseille.

A/A	an	mois	quin	1 ου 16	2 ου 17	3 ου 18	4 ου 19	5 ου 20	6 ου 21	7 ου 22	8 ου 23	9 ου 24	10 ου 25	11 ου 26	12 ου 27	13 ου 28	14 ου 29	15 ου 30	16 ου 31
1	1864	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1864	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1864	2	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	40	0	0	0	0	
4	1864	2	2	0	0	0	25	51	115	18	30	14	56	0	12	9	1		
5	1864	3	1	0	0	0	0	9	132	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	1864	3	2	0	0	0	0	0	33	0	5	0	0	72	90	89	6	0	0
7	1864	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	1864	4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	1864	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	147	0	0	1	
10	1864	5	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1864	6	1	0	321	0	0	0	16	2	0	9	0	0	0	12	7	7	
12	1864	6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13	1864	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
14	1864	7	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...
...
2n	1991	12	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Η ιταλική βάση δεδομένων περιλαμβάνει ημερήσιες τιμές βροχόπτωσης από δύο σταθμούς στις πόλεις Firenze και Genova. Οι δύο χρονοσειρές αποτελούν τα μεγαλύτερα σε μήκος δείγματα που χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη με 158 και 148 έτη αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ημερήσιες μετρήσεις για το σταθμό του Firenze υπάρχουν για την περίοδο 1813-1979, όμως χρησιμοποιήθηκαν μόνο οι μετρήσεις από το έτος 1822 και μετά. Αντίστοιχα, για το σταθμό της Genova, ημερήσιες μετρήσεις υπάρχουν για την περίοδο 1813-1980, όμως λήφθηκαν υπόψη οι μετρήσεις από το 1833 και μετά. Τα δεδομένα πριν το 1822 και 1833 αντίστοιχα κρίθηκαν αναξιόπιστα, μετά από έλεγχο των ετήσιων υψών βροχόπτωσης και αμελήθηκαν.

Η μορφή αποθήκευσης των δεδομένων της ιταλικής βάσης είναι διαφορετική από εκείνη της αμερικάνικης και της αγγλικής βάσης.

Οι μετρήσεις είναι καταχωρημένες σε σειρές των 11 τιμών και κάθε μήνας περιλαμβάνει τρεις σειρές. Στις δύο πρώτες σειρές κάθε μήνα απουσιάζει η ενδέκατη τιμή (υπάρχει «κενό»), ενώ στην τρίτη σειρά η ενδέκατη μέτρηση υπάρχει αν ο μήνας έχει 31 ημέρες. Μορφή του πίνακα της ιταλικής βάσης δεδομένων (μεγέθους $3n \times 11$ όπου n το σύνολο των μηνών για δεδομένη χρονική περίοδο) φαίνεται στον πίνακα 4.7.

Πίνακας 4.7 Πίνακας της ιταλικής βάσης δεδομένων με επιλεγμένα μόνο τα ημερήσια ύψη βροχόπτωσης του σταθμού Firenze.

A/A	Year	Month	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1822	1	0	4,86	0,72	0	0,45	7,02	0,45	4,95	1,53	2,22	
2	1822	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	1822	1	0	0	0	0,27	8,37	5,49	0	0	0	0	0
4	1822	2	0	0	0	0,45	0	0	0	0	0	0	
5	1822	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	1822	2	0	0	0	0	0	0	0	0			
7	1822	3	0	0	0	0	0	0	0,05	11,97	0	0	
8	1822	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	1822	3	0	0,99	0	0	0	0,5	0	0	0	0	2,25
10	1822	4	0,18	0	0	0	0	0	3,47	2,43	9,41	9,36	
11	1822	4	4,14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
12	1822	4	1,08	0,77	0	0	0	0,72	6,21	1,17	0	0	
13	1822	5	0	0	0	0	0	0	8,37	0	0	5,81	
14	1822	5	3,47	9	2,97	0	0	0	0	0	0	0	
15	1822	5	0	0	0	10,44	10,44	9,68	0	0	0	0	0
...
...
3n	1979	12	6,4	11	3,8	0	0	0	0	6,6	0,2	23,4	36,6

Η αγγλική βάση δεδομένων περιλαμβάνει ημερήσιες μετρήσεις βροχόπτωσης από τους παλαιότερους σταθμούς εγκαταστημένους στην Αγγλία. Ο πίνακας του Excel που προκύπτει φαίνεται στον πίνακα 4.8. Η μορφή της χρονοσειράς βροχόπτωσης όπως είναι αποθηκευμένη στη βάση δεδομένων διαφέρει από την αμερικάνικη βάση. Οι μετρήσεις είναι καταχωρημένες σε μια στήλη με χρονική αλληλουχία. Δηλώνεται ο αριθμητικός κωδικός του σταθμού (GAUGE_ID), ο τύπος των δεδομένων (IDTYPE), το έτος, ο μήνας, η ημέρα και η τιμή της μέτρησης (AMT). Απουσιάζει ο κωδικός DMF που εκφράζει τον τρόπο παραγωγής της μέτρησης, ενώ δεν υπάρχουν τιμές «-999». Γενικά, ο τρόπος αυτός καταγραφής των μετρήσεων στη βάση δεδομένων διευκολύνει την επεξεργασία που ακολουθεί.

Μετά την εξαγωγή των δεδομένων από τη βάση δεδομένων σε φύλλο του Excel, έχουν προκύψει πίνακες δεδομένων μεγέθους $n \times 31$ (αμερικάνικοι σταθμοί), $2n \times 16$ (γαλλικός σταθμός) και $3n \times 11$ (ιταλικοί σταθμοί). Η χρονοσειρά όλου του έτους κάθε σταθμού προκύπτει με μετατροπή του συγκεκριμένου ανά περίπτωση πίνακα σε μια στήλη δεδομένων ($N \times 1$) που περιλαμβάνει το σύνολο των ημερησίων υψών βροχόπτωσης με χρονολογική σειρά. Η μετατροπή γίνεται με κατάλληλη φόρμα εντολών στο Excel λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύνολο των ημερών ανά μήνα δεν είναι

σταθερό (28 ή 29 για το Φεβρουάριο και 30 ή 31 για τους υπόλοιπους μήνες) και διατηρώντας τα «κενά» στη χρονοσειρά για τις ημέρες που λείπουν οι μετρήσεις.

Πίνακας 4.8 Πίνακας της αγγλικής βάσης δεδομένων με επιλεγμένα μόνο τα ημερήσια ύψη βροχόπτωσης του αγγλικού σταθμού 4061 SHEFFIELD.

A/A	GAUGE_ID	IDTYPE	YEAR	MONTH	DAY	AMT
1	4061	RAIN	1880	1	2	0
2	4061	RAIN	1880	1	3	9
3	4061	RAIN	1880	1	4	0
4	4061	RAIN	1880	1	5	0
5	4061	RAIN	1880	1	6	0
6	4061	RAIN	1880	1	7	0
7	4061	RAIN	1880	1	8	4
8	4061	RAIN	1880	1	9	0
9	4061	RAIN	1880	1	10	0
10	4061	RAIN	1880	1	11	0
11	4061	RAIN	1880	1	12	0
12	4061	RAIN	1880	1	13	0
13	4061	RAIN	1880	1	14	0
14	4061	RAIN	1880	1	15	0
15	4061	RAIN	1880	1	16	43
16	4061	RAIN	1880	1	17	61
17	4061	RAIN	1880	1	18	0
18	4061	RAIN	1880	1	19	18
19	4061	RAIN	1880	1	20	0
20	4061	RAIN	1880	1	21	0
21	4061	RAIN	1880	1	22	0
22	4061	RAIN	1880	1	23	0
23	4061	RAIN	1880	1	24	0
24	4061	RAIN	1880	1	25	0
25	4061	RAIN	1880	1	26	0
...
...
N-1	4061	RAIN	1993	12	31	15
N	4061	RAIN	1994	1	1	3

Τα δεδομένα της αγγλικής βάσης δεδομένων δεν χρειάζονται μετατροπή καθώς οι μετρήσεις είναι ήδη καταχωρημένες σε στήλη με χρονική αλληλουχία. Οι χρονοσειρές κάθε μήνα κάθε σταθμού προκύπτουν από τη χρονοσειρά όλου του έτους με κατάλληλο φίλτραρισμα (Filter). Μεταξύ των μηνών διαφορετικού έτους της χρονοσειράς κάθε μήνα τοποθετείται ένα «κενό» που αποτελεί ένδειξη της χρονικής ασυνέχειας. Κατά τη συνάθροιση προς επίτευξη αδρότερης χρονικής κλίμακας, το «κενό» δεν επιτρέπει τη συνάθροιση τιμών που δεν έχουν χρονική συνέχεια. Συνεπώς, η μέγιστη κλίμακα συνάθροισης για τη μηνιαία χρονοσειρά είναι $k=30$ (ή 31 και 28 ή 29 για το Φεβρουάριο).

Τέλος, σχηματίζονται οι χρονοσειρές για τις τέσσερις εποχές του έτους όπου «κενό» εισάγεται μεταξύ εποχής διαφορετικού έτους καθώς και οι χρονοσειρές υγρής και ξηρής περιόδου του έτους με «κενό» στις θέσεις ασυνέχειας αντίστοιχα.

5 Επεξεργασία και Προσαρμογή της Εξίσωσης

5.1 Χρονική Κλίμακα και Συνάθροιση

Η χρονική εξέλιξη της βροχόπτωσης θεωρείται ως μια δυαδική στοχαστική ανάλυση που περιγράφεται από τη σχέση (2) που έχει διατυπωθεί στην ενότητα 3.1:

$$X_i^{(k)} = \max_{(i-1)k+1 \leq j \leq ik} \{X_j\}$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $X_i^{(k)}$ λαμβάνει την τιμή 0 αν όλες οι συνιστώσες της X_j στη βασική κλίμακα είναι 0 και την τιμή 1 αν μία ή περισσότερες από τις συνιστώσες της ισούνται με 1.

Υιοθετείται η παραδοχή της στασιμότητας που ισχύει σε ομογενείς κλιματικά περιόδους όπως είναι κάθε ένας από τους 12 μήνες. Εξετάζονται οι επιμέρους ημερήσιες χρονοσειρές για κάθε μήνα, για κάθε εποχή και οι χρονοσειρές υγρής και ξηρής περιόδου του έτους, όπου θεωρείται ότι ισχύει κατά προσέγγιση η στασιμότητα.

Επιπλέον, εξετάζονται και οι συνολικές χρονοσειρές που περιλαμβάνουν το σύνολο των ημερησίων μετρήσεων όλων των ετών παρόλο που εδώ η στασιμότητα δε διατηρείται εξαιτίας της ετήσιας περιοδικότητας λόγω της διαδοχής των εποχών. Εξαίρεση αποτελούν οι σταθμοί της Αγγλίας όπου η στασιμότητα ισχύει με ικανοποιητική προσέγγιση όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια. Η εξέταση της συνολικής χρονοσειράς αν και δε συμφωνεί με την παραδοχή της στασιμότητας έχει σκοπό:

- (1) τη διαμόρφωση μιας συνολικής εικόνας της μέσης συμπεριφοράς κατά τη διάρκεια του έτους,
- (2) την ανάλυση μεγάλων χρονικά ξηρών περιόδων, διάρκειας περισσότερων του ενός μηνών,
- (3) τη μετάβαση σε μεγαλύτερες χρονικές κλίμακες και

- (4) την επίτευξη εγκυρότερων εκτιμήσεων χάρη στην αύξηση του μεγέθους του δείγματος κατά 12 φορές.

Η χρονική κλίμακα για τη χρονοσειρά κάθε μήνα κυμαίνεται από $k=1$ έως $k=30$ (ή 31 και 28 ή 29 για το Φεβρουάριο) και για τη χρονοσειρά κάθε εποχής δύναται να κυμανθεί από $k=1$ έως $k=90$ (ή 91 ή 92), ανάλογα με τον αριθμό ημερών κάθε ενός από τους τρεις μήνες της κάθε εποχής. Για τη χρονοσειρά όλου του έτους η χρονική κλίμακα κυμαίνεται από $k=1$ έως $k=365$ (ή 366). Επισημαίνεται ότι για τη χρονοσειρά όλου του έτους μπορούν να ληφθούν και μεγαλύτερες κλίμακες (π.χ. $k = 1000$) όμως πρακτικά δεν έχει νόημα καθώς, όπως θα δειχθεί στη συνέχεια, οι εξαγόμενες πιθανότητες αλληλουχίας διαδοχικών ξηρών ημερών μηδενίζονται ήδη σε μικρότερες κλίμακες από $k = 365$.

Τέλος, το χρονικό μήκος της υγρής και ξηρής περιόδου έχει ένα ευρύ φάσμα διακύμανσης τιμών ανάλογα με το κλίμα κάθε περιοχής π.χ. για τη μεγαλύτερη υγρή περίοδο του δείγματος (9 μήνες ή 272 ημέρες, από Σεπτέμβριο έως Μάιο), που εμφανίζεται στη Georgia των Η.Π.Α. (σταθμός 90140), η κλίμακα κυμαίνεται από $k=1$ έως $k=272$.

Οι αρχικές χρονοσειρές βροχόπτωσης όπως προκύπτουν μετά τη μορφοποίησή τους στο Excel βρίσκονται στη βασική κλίμακα ($k=1$). Οι επιμέρους μετρήσεις τους συναθροίζονται για να προκύψουν χρονοσειρές μεγαλύτερης κλίμακας. Ενδεικτικά, στους πίνακες 5.1α και β φαίνεται τμήμα των εξαγόμενων συναθροισμένων μηνιαίων χρονοσειρών για το μήνα Σεπτέμβριο για κλίμακες $k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 30$. Τα δεδομένα προέρχονται από το σταθμό 106152 Moscow της πολιτείας Idaho των Η.Π.Α.

Στον πίνακα 5.1α, είναι χαρακτηριστικό το «κενό» που έχει εισαχθεί στην αρχική χρονοσειρά (για $k = 1$) στη θέση εναλλαγής από το έτος 1984 στο έτος 1985 ως ένδειξη της ασυνέχειας. Εξαιτίας των ασυνεχειών στις θέσεις αλλαγής έτους δεν είναι δυνατή η συνάθροιση, εξού και η ένδειξη «#VALUE!» στις αντίστοιχες θέσεις των συναθροισμένων χρονοσειρών. Οι τελικές συναθροισμένες χρονοσειρές (χωρίς την ένδειξη «#VALUE!») φαίνονται στον πίνακα 5.1.β.

Πίνακας 5.1α Αρχικός πίνακας των συναθροισμένων χρονοσειρών για το μήνα Σεπτέμβριο του σταθμού 106152 Moscow της πολιτείας Idaho των Η.Π.Α.

k				1		2		3		4		5		6		8		10		12		15		30
A/A	Year	Month	Day	χ_i	A/A	$\chi_i^{(2)}$	A/A	$\chi_i^{(3)}$	A/A	$\chi_i^{(4)}$	A/A	$\chi_i^{(5)}$	A/A	$\chi_i^{(6)}$	A/A	$\chi_i^{(8)}$	A/A	$\chi_i^{(10)}$	A/A	$\chi_i^{(12)}$	A/A	$\chi_i^{(15)}$	A/A	$\chi_i^{(30)}$
1	1894	9	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	51	1	78	1	90
2	1894	9	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	51	2	78	2	78	2	27	2	12	2	#VALUE!
3	1894	9	3	0	3	0	3	0	3	51	3	78	3	27	3	0	3	12	3	#VALUE!	3	#VALUE!	3	#VALUE!
4	1894	9	4	0	4	0	4	51	4	27	4	0	4	0	4	#VALUE!	4	#VALUE!	4	330	4	3	4	#VALUE!
5	1894	9	5	0	5	0	5	27	5	0	5	0	5	12	5	24	5	306	5	3	5	#VALUE!	5	#VALUE!
6	1894	9	6	0	6	51	6	0	6	0	6	12	6	#VALUE!	6	306	6	3	6	#VALUE!	6	#VALUE!	6	#VALUE!
7	1894	9	7	0	7	27	7	0	7	12	7	#VALUE!	7	172	7	0	7	#VALUE!	7	69	7	#VALUE!	7	#VALUE!
8	1894	9	8	0	8	0	8	0	8	#VALUE!	8	24	8	158	8	#VALUE!	8	69	8	#VALUE!	8	10	8	#VALUE!
9	1894	9	9	0	9	0	9	12	9	0	9	306	9	0	9	#VALUE!	9	#VALUE!	9	62	9	#VALUE!	9	#VALUE!
10	1894	9	10	0	10	0	10	0	10	24	10	0	10	3	10	69	10	#VALUE!	10	10	10	56	10	#VALUE!
11	1894	9	11	0	11	0	11	#VALUE!	11	306	11	0	11	#VALUE!	11	#VALUE!	11	0	11	#VALUE!	11	#VALUE!	11	#VALUE!
12	1894	9	12	51	12	0	12	0	12	0	12	3	12	#VALUE!	12	#VALUE!	12	10	12	0	12	52	12	#VALUE!
13	1894	9	13	18	13	0	13	24	13	0	13	#VALUE!	13	69	13	62	13	#VALUE!	13	#VALUE!	13	#VALUE!	13	#VALUE!
14	1894	9	14	9	14	12	14	148	14	0	14	#VALUE!	14	0	14	0	14	0	14	#VALUE!	14	0	14	#VALUE!
15	1894	9	15	0	15	0	15	158	15	3	15	55	15	#VALUE!	15	10	15	56	15	0	15	#VALUE!	15	#VALUE!
16	1894	9	16	0	16	#VALUE!	16	0	16	#VALUE!	16	14	16	#VALUE!	16	#VALUE!	16	#VALUE!	16	#VALUE!	16	75	16	#VALUE!
17	1894	9	17	0	17	0	17	0	17	0	17	0	17	62	17	0	17	52	17	50	17	#VALUE!	17	#VALUE!
18	1894	9	18	0	18	0	18	0	18	#VALUE!	18	#VALUE!	18	0	18	0	18	0	18	26	18	38	18	#VALUE!
19	1894	9	19	0	19	24	19	0	19	69	19	#VALUE!	19	0	19	91	19	#VALUE!	19	#VALUE!	19	#VALUE!	19	#VALUE!
20	1894	9	20	0	20	0	20	3	20	0	20	117	20	10	20	#VALUE!	20	53	20	75	20	#VALUE!	20	#VALUE!
21	1894	9	21	0	21	148	21	#VALUE!	21	0	21	0	21	#VALUE!	21	52	21	0	21	#VALUE!	21	#VALUE!	21	#VALUE!
22	1894	9	22	0	22	158	22	0	22	#VALUE!	22	0	22	#VALUE!	22	0	22	#VALUE!	22	1	22	0	22	#VALUE!
23	1894	9	23	0	23	0	23	0	23	12	23	0	23	0	23	6	23	16	23	95	23	#VALUE!	23	#VALUE!
24	1894	9	24	0	24	0	24	#VALUE!	24	#VALUE!	24	10	24	0	24	#VALUE!	24	59	24	#VALUE!	24	#VALUE!	24	#VALUE!
25	1894	9	25	0	25	0	25	55	25	62	25	#VALUE!	25	56	25	50	25	#VALUE!	25	#VALUE!	25	#VALUE!	25	#VALUE!
26	1894	9	26	0	26	0	26	14	26	0	26	#VALUE!	26	#VALUE!	26	0	26	0	26	#VALUE!	26	#VALUE!	26	#VALUE!
27	1894	9	27	12	27	0	27	0	27	0	27	0	27	#VALUE!	27	26	27	38	27	0	27	#VALUE!	27	#VALUE!
28	1894	9	28	0	28	0	28	0	28	0	28	0	28	52	28	#VALUE!	28	#VALUE!	28	38	28	47	28	#VALUE!
29	1894	9	29	0	29	1	29	#VALUE!	29	0	29	14	29	0	29	16	29	99	29	#VALUE!	29	#VALUE!	29	#VALUE!
30	1894	9	30	0	30	2	30	0	30	10	30	42	30	0	30	59	30	#VALUE!	30	#VALUE!	30	#VALUE!	30	#VALUE!
31					31	#VALUE!	31	#VALUE!	31	#VALUE!	31	#VALUE!	31	#VALUE!	31	#VALUE!	31	#VALUE!	31	#VALUE!	31	#VALUE!	31	#VALUE!
32	1895	9	1	0	32	0	32	80	32	#VALUE!	32	#VALUE!	32	3	32	0	32	0	32	20	32	#VALUE!	32	#VALUE!
33	1895	9	2	0	33	0	33	62	33	0	33	0	33	50	33	1	33	0	33	#VALUE!	33	#VALUE!	33	#VALUE!
34	1895	9	3	0	34	0	34	0	34	0	34	52	34	0	34	37	34	#VALUE!	34	#VALUE!	34	#VALUE!	34	#VALUE!
...
...
3315	2001	9	29	0	1657	39	1657	#VALUE!	828	#VALUE!	662	0	551	#VALUE!	413	#VALUE!	330	1	275	1	220	#VALUE!	109	#VALUE!
3316	2001	9	30	0	1658	0	1658	39	829	39	663	#VALUE!	552	#VALUE!	414	#VALUE!	331	#VALUE!	276	#VALUE!	221	#VALUE!	110	#VALUE!

Πίνακας 5.1β Τελικός πίνακας των συναθροισμένων χρονοσειρών για το μήνα Σεπτέμβριο του σταθμού 106152 Moscow της πολιτείας Idaho των Η.Π.Α

k				1		2		3		4		5		6		8		10		12		15		30
A/A	Year	Month	Day	χ_i	A/A	$\chi_i^{(2)}$	A/A	$\chi_i^{(3)}$	A/A	$\chi_i^{(4)}$	A/A	$\chi_i^{(5)}$	A/A	$\chi_i^{(6)}$	A/A	$\chi_i^{(8)}$	A/A	$\chi_i^{(10)}$	A/A	$\chi_i^{(12)}$	A/A	$\chi_i^{(15)}$	A/A	$\chi_i^{(30)}$
1	1894	9	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	51	1	78	1	90
2	1894	9	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	51	2	78	2	78	2	27	2	12		
3	1894	9	3	0	3	0	3	0	3	51	3	78	3	27	3	0	3	12	3	330	3	3		
4	1894	9	4	0	4	0	4	51	4	27	4	0	4	0	4	24	4	306	4	3	4	10		
5	1894	9	5	0	5	0	5	27	5	0	5	0	5	12	5	306	5	3	5	69	5	56		
6	1894	9	6	0	6	51	6	0	6	0	6	12	6	172	6	0	6	69	6	62	6	52		
7	1894	9	7	0	7	27	7	0	7	12	7	24	7	158	7	69	7	0	7	10	7	0		
8	1894	9	8	0	8	0	8	0	8	0	8	306	8	0	8	62	8	10	8	0	8	75		
9	1894	9	9	0	9	0	9	12	9	24	9	0	9	3	9	0	9	0	9	0	9	38		
10	1894	9	10	0	10	0	10	0	10	306	10	0	10	69	10	10	10	56	10	50	10	0		
11	1894	9	11	0	11	0	11	0	11	0	11	3	11	0	11	0	11	52	11	26	11	47		
12	1894	9	12	51	12	0	12	24	12	0	12	55	12	62	12	0	12	0	12	75	12	0		
13	1894	9	13	18	13	0	13	148	13	0	13	14	13	0	13	91	13	53	13	1	13	173		
14	1894	9	14	9	14	12	14	158	14	3	14	0	14	0	14	52	14	0	14	95	14	30		
15	1894	9	15	0	15	0	15	0	15	0	15	117	15	10	15	0	15	16	15	0	15	11		
16	1894	9	16	0	16	0	16	0	16	69	16	0	16	0	16	6	16	59	16	38	16	49		
17	1894	9	17	0	17	0	17	0	17	0	17	0	17	0	17	50	17	0	17	20	17	26		
18	1894	9	18	0	18	24	18	0	18	0	18	0	18	56	18	0	18	38	18	34	18	160		
19	1894	9	19	0	19	0	19	3	19	12	19	10	19	52	19	26	19	99	19	19	19	58		
20	1894	9	20	0	20	148	20	0	20	62	20	0	20	0	20	16	20	0	20	0	20	53		
21	1894	9	21	0	21	158	21	0	21	0	21	0	21	0	21	59	21	0	21	6	21	0		
22	1894	9	22	0	22	0	22	55	22	0	22	14	22	3	22	0	22	169	22	0	22	71		
23	1894	9	23	0	23	0	23	14	23	0	23	42	23	50	23	1	23	4	23	51	23	0		
24	1894	9	24	0	24	0	24	0	24	0	24	0	24	0	24	37	24	34	24	122	24	26		
25	1894	9	25	0	25	0	25	0	25	10	25	52	25	0	25	20	25	16	25	82	25	28		
26	1894	9	26	0	26	0	26	0	26	0	26	0	26	26	26	127	26	0	26	30	26	0		
27	1894	9	27	12	27	0	27	80	27	0	27	0	27	0	27	0	27	0	27	31	27	53		
28	1894	9	28	0	28	1	28	62	28	0	28	53	28	16	28	0	28	0	28	12	28	243		
29	1894	9	29	0	29	2	29	0	29	0	29	0	29	59	29	38	29	15	29	0	29	31		
30	1894	9	30	0	30	0	30	0	30	56	30	0	30	51	30	0	30	0	30	75	30	116		
31					31	0	31	0	31	35	31	0	31	0	31	132	31	173	31	26	31	0		
32	1895	9	1	0	32	0	32	0	32	0	32	26	32	1	32	20	32	0	32	0	32	138		
33	1895	9	2	0	33	0	33	0	33	52	33	0	33	37	33	4	33	30	33	150	33	16		
34	1895	9	3	0	34	55	34	0	34	0	34	16	34	58	34	12	34	1	34	53	34	19		
...
...
3315	2001	9	29	0	1398	39	862	0	586	0	433	0	334	1	205	7	141	0	104	1	58	31		
3316	2001	9	30	0	1399	0	863	39	587	39	434	0	335	0	206	1	142	1	105	8	59	6		
N_0				3049		1399		863		587		434		335		206		142		105		59		1
N				2396		979		547		339		222		156		75		49		28		7		0
$\rho^{(k)}$				0,786		0,700		0,634		0,578		0,512		0,466		0,364		0,345		0,267		0,119		0,000

5.2 Εξαγωγή Εμπειρικών Πιθανοτήτων ακολουθίας ξηρών διαστημάτων

Εφαρμόζεται ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας του Laplace (1812), ο οποίος ορίζει ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου A το λόγο του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων N_A για το ενδεχόμενο A δια του συνολικού αριθμού των δυνατών περιπτώσεων N , δηλαδή:

$$P(A) = N_A / N$$

Για το σύνολο των συναθροισμένων ιστορικών χρονοσειρών εκτιμάται η εμπειρική πιθανότητα $p^{(k)}$, δηλαδή η πιθανότητα ένα διάστημα μήκους k να είναι ξηρό. Στο τέλος του πίνακα του σχήματος 5.1β έχουν εξαχθεί οι πιθανότητες των συναθροισμένων ιστορικών μηνιαίων χρονοσειρών για το μήνα Σεπτέμβριο του αμερικάνικου σταθμού 106152 MOSCOW OF IDAHO.

Είναι εμφανές ότι η πιθανότητα $p^{(k)}$ μειώνεται με την αύξηση της κλίμακας k :

$$p^{(k_1)} > p^{(k_2)} \quad \text{για} \quad k_1 < k_2$$

Αυτό σημαίνει πως είναι πιθανότερο να μη βρέξει για 2 ημέρες συνεχόμενα παρά για 15 ημέρες συνεχόμενα. Όταν η κλίμακα k αυξάνεται πολύ τότε η πιθανότητα $p^{(k)}$ πρακτικά μηδενίζεται. Στη μηνιαία χρονοσειρά του Σεπτεμβρίου του αμερικάνικου σταθμού 106152 του πίνακα 5.1β η πιθανότητα $p^{(30)} = 0$, δηλαδή δεν υπάρχουν 30 διαδοχικές ξηρές ημέρες στη μηνιαία χρονοσειρά του Σεπτεμβρίου.

Συνολικά, εκτιμήθηκαν οι πιθανότητες $p^{(k)}$ των χρονοσειρών για το σύνολο του έτους, τους 12 μήνες, τις 4 εποχές και τέλος οι πιθανότητες της υγρής και ξηρής περιόδου του έτους. Οι εξαγόμενες πιθανότητες συναρτήσκει της κλίμακας k για τις χρονοσειρές όλου του έτους των 28 σταθμών παρατίθενται στο συγκεντρωτικό πίνακα 5.2.

Τα αποτελέσματα είναι ενδεικτικά της γεωγραφικής θέσης και των υδρολογικών συνθηκών της περιοχής εγκατάστασης του κάθε σταθμού.

Τα όρια διακύμανσης των πιθανοτήτων στη βασική κλίμακα είναι:

$$0,43 < p^{(k)} < 0,60 \text{ για τους 10 αγγλικούς σταθμούς με μέση τιμή } 0,5$$

$$0,67 < p^{(k)} < 0,83 \text{ για τους 15 αμερικάνικους σταθμούς με μέση τιμή } 0,76$$

$$p^{(k)} = 0,69 \text{ η μέση τιμή των 2 σταθμών Firenze και Genova στην Ιταλία}$$

$$p^{(k)} = 0,78 \text{ για το σταθμό Marseille στη Γαλλία}$$

Οι τιμές της πιθανότητας ένα διάστημα $k=1$ να είναι ξηρό των αγγλικών σταθμών είναι οι χαμηλότερες (ακόμα και η μέγιστη τιμή $p^{(k)}_{\max} = 0,60$ του αγγλικού σταθμού Stretham 180704 είναι κατά πολύ χαμηλότερη από την ελάχιστη τιμή των αμερικάνικων σταθμών, όπου $p^{(k)}_{\min} = 0,67$). Η μικρή τιμή της πιθανότητας ένα διάστημα k να είναι ξηρό (ή αντίστροφα η μεγάλη τιμή της πιθανότητας ένα διάστημα k να είναι υγρό) είναι αναμενόμενη για την Αγγλία, η οποία χαρακτηρίζεται για τη συνεχή βροχόπτωση όλο το έτος. Αντίθετα, αυξημένες είναι οι πιθανότητες $p^{(k)}$ των σταθμών στην Ιταλία και τη Γαλλία. Το μεσογειακό ξηρό κλίμα των περιοχών εγκατάστασης των σταθμών Firenze, Genova και Marseille, όπως φαίνεται και στο χάρτη του σχήματος 4.2, ερμηνεύει την αυξημένη τιμή των πιθανοτήτων $p^{(k)}$. Ανάλογα συμπεράσματα εξάγονται για όλες τις κλίμακες k .

Τέλος, όσο αυξάνεται η κλίμακα k η πιθανότητα $p^{(k)}$ μειώνεται έως να μηδενιστεί. Ο μηδενισμός της πιθανότητας $p^{(k)}$ γίνεται πολύ ταχύτερα για τους αγγλικούς σταθμούς (ήδη στις 30 ημέρες και για το σταθμό 923753 στις 15 ημέρες) από ότι συμβαίνει για τους αμερικάνικους (στις 40 ή 50 ημέρες). Στον πίνακα 5.2, η μέγιστη κλίμακα για την οποία εκτιμήθηκε η πιθανότητα $p^{(k)}$ είναι $k = 365$ ημέρες, όμως είναι εμφανής ο μηδενισμός της πιθανότητας $p^{(k)}$ ήδη σε μικρότερες κλίμακες.

Οι εξαγόμενες πιθανότητες $p^{(k)}$ των μηνιαίων χρονοσειρών για τους 12 μήνες, για τις 4 εποχές και για την υγρή και περίοδο του έτους των 28 σταθμών παρατίθενται στο Παράρτημα. Οι εποχιακές χρονοσειρές προκύπτουν από το διαχωρισμό των μετρήσεων

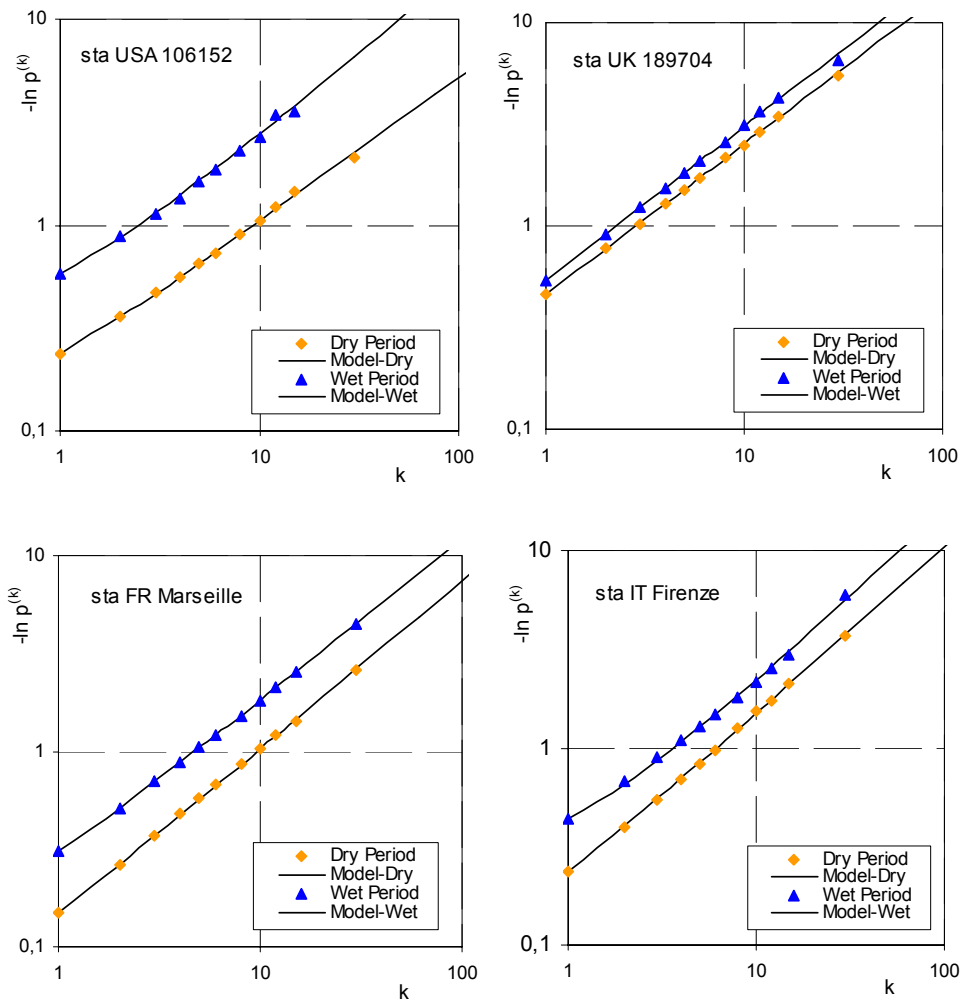
στις 4 εποχές του χρόνου: χειμώνας (Δεκέμβριος, Ιανουάριος, Φεβρουάριος), άνοιξη (Μάρτιος, Απρίλιος, Μάιος), καλοκαίρι (Ιούνιος, Ιούλιος, Αύγουστος), φθινόπωρο (Σεπτέμβριος, Οκτώβριος, Νοέμβριος). Οι χρονοσειρές υγρής και ξηρής περιόδου προκύπτουν από το διαχωρισμό των μετρήσεων σε δύο κλιματικά ομογενείς περιόδους του χρόνου, την ξηρή και την υγρή.

Συνολικά, από τις εξαγόμενες πιθανότητες $p^{(k)}$ συμπεραίνονται τα εξής:

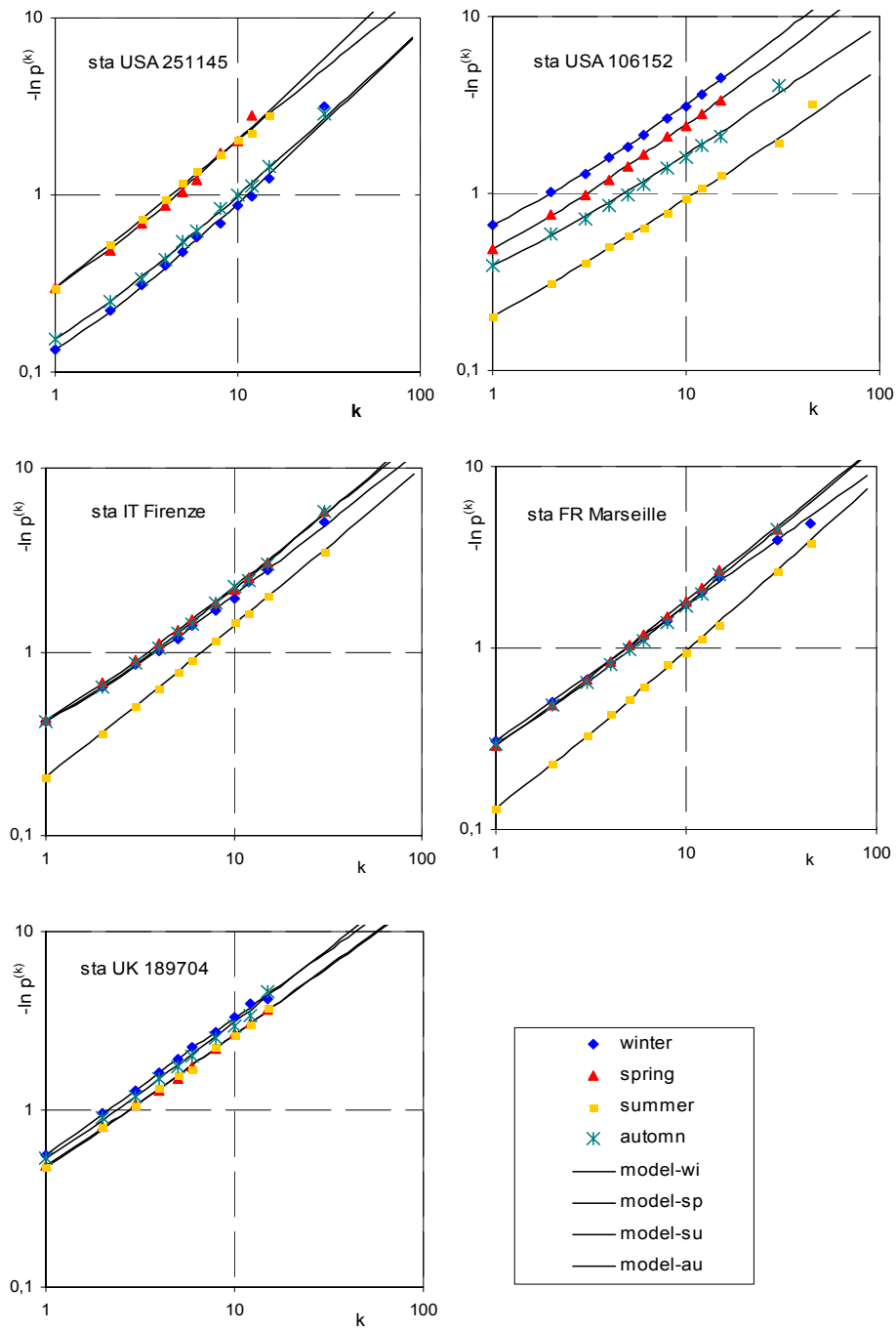
- (1) Η ξηρή και υγρή περίοδος του έτους και η χρονική διάρκεια της περιόδου ποικίλλουν. Στο σχήμα 5.5 απεικονίζεται η έκταση κάθε περιόδου και οι μήνες που περιλαμβάνονται σε κάθε περίοδο για τους 28 σταθμούς. Παρατηρείται ότι η υγρή περίοδος για τις ανατολικές και δυτικές περιοχές των Η.Π.Α (σταθμοί 90140 Georgia, 35820 Arizona, 106152 Idaho, 269171 Nevada και 483100 Wyoming) κυμαίνεται τους μήνες Οκτώβριο έως Μάιο ενώ η ξηρή περίοδος περιλαμβάνει τους μήνες Ιούνιο έως Σεπτέμβριο, γεγονός που συμφωνεί με το εύκρατο κλίμα των περιοχών αυτών. Αντίθετα, στις κεντρικές περιοχές των Η.Π.Α. όπου είναι εγκατεστημένοι οι υπόλοιποι 10 σταθμοί, η υγρή και ξηρή περίοδος κυμαίνονται από το Μάρτιο έως το Σεπτέμβριο και από τον Οκτώβριο έως το Φεβρουάριο αντίστοιχα, δηλαδή αντίστροφα από ότι συμβαίνει στα ανατολικά και δυτικά της Αμερικής. Στις τρεις ευρωπαϊκές χώρες, η υγρή περίοδος κυμαίνεται από τον Οκτώβριο έως τον Απρίλιο και η ξηρή από το Μάιο έως το Σεπτέμβριο. Επομένως, οι ανατολικές και δυτικές ακτές των Η.Π.Α. και οι τρεις μεσογειακές χώρες χαρακτηρίζονται από κοινή χρονική έκταση της υγρής και ξηρής περιόδου του έτους.
- (2) Στον πίνακα 5.6, απεικονίζονται ο ξηρότερος και ο υγρότερος μήνας του έτους και οι αντίστοιχες πιθανότητες $p^{(k)}$. Ο ξηρότερος μήνας στην Αγγλία είναι ο Ιούνιος, και ο υγρότερος ο Δεκέμβριος. Στη Γαλλία και την Ιταλία ο ξηρότερος μήνας είναι ο Ιούλιος και ο υγρότερος ο Νοέμβριος. Τέλος, στις κεντρικές πολιτείες των Η.Π.Α. ο ξηρότερος και ο υγρότερος μήνας είναι ο Δεκέμβριος και ο Μάιος αντίστοιχα (αντίστροφα από ότι συμβαίνει στην Ευρώπη). Στις

ανατολικές και δυτικές πολιτείες των Η.Π.Α. ο ξηρότερος και ο υγρότερος μήνας είναι ο Ιούλιος και ο Ιανουάριος αντίστοιχα.

- (3) Στις μεσογειακές χώρες η ξηρή και η υγρή περίοδος διακρίνονται ξεκάθαρα. Αντιθέτως, η Αγγλία χαρακτηρίζεται από κλιματική ομοιογένεια (κοντινές οι τιμές των πιθανοτήτων $p^{(k)}$ κατάστασης για την ξηρή και υγρή περίοδο). Στις Η.Π.Α., η διαφορά των $p^{(k)}$ ξηρής και υγρής περιόδου είναι ακόμα μεγαλύτερη από ότι στις μεσογειακές χώρες. Συγκριτικά διαγράμματα των εμπειρικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$ για την ξηρή και υγρή περίοδο τεσσάρων σταθμών εγκατεστημένων στις Η.Π.Α, την Αγγλία, τη Γαλλία και την Ιταλία απεικονίζονται στον πίνακα 5.3
- (4) Οι τέσσερις εποχές του έτους στις μεσογειακές χώρες έχουν εκφυλιστεί σε δύο, το καλοκαίρι με διαφορετική πιθανότητα $p^{(k)}$ και οι υπόλοιπες τρεις εποχές μαζί, με κοινή πιθανότητα $p^{(k)}$. Στην Αγγλία, όλες οι εποχές σχεδόν ταυτίζονται, δηλαδή έχει χαθεί η εποχιακή διαφοροποίηση. Τέλος, στις ανατολικές και δυτικές περιοχές των Η.Π.Α (σχήμα 5.4, σταθμός 106152 MOSCOW IDAHO) η εποχιακή διαφοροποίηση είναι εμφανής, ενώ στις κεντρικές περιοχές των Η.Π.Α. οι εποχές εκφυλίζονται σε δύο. Τα άνω συμπεράσματα απεικονίζονται στα συγκριτικά διαγράμματα του σχήματος 5.4.



Σχήμα 5.3 Διαγράμματα εμπειρικών πιθανοτήτων ξηρής και υγρής περιόδου για τέσσερις σταθμούς στις Η.Π.Α., Αγγλία, Γαλλία και Ιταλία.



Σχήμα 5.4. Διαγράμματα εμπειρικών πιθανοτήτων των τεσσάρων εποχών για πέντε αντιπροσωπευτικούς σταθμούς στις Η.Π.Α., Αγγλία, Γαλλία και Ιταλία.

Πίνακας 5.5 Τα όρια διακύμανσης και η χρονική έκταση της ξηρής και υγρής περιόδου για τις περιοχές εγκατάστασης των 28 σταθμών.

sta		October	November	December	January	February	March	April	May	June	July	August	September
144972	USA												
53005	USA												
391739	USA												
412121	USA												
138688	USA												
251145	USA												
324418	USA												
322188	USA												
326255	USA												
253630	USA												
35820	USA												
483100	USA												
269171	USA												
106152	USA												
90140	USA												
305050	UK												
575548	UK												
107389	UK												
43941	UK												
923753	UK												
4061	UK												
404988	UK												
82583	UK												
180704	UK												
2165	UK												
Firenze	IT												
Genova	IT												
Marseille	FR												

Πίνακας 5.6 Ο ξηρότερος και ο υγρότερος μήνας και οι αντίστοιχες πιθανότητες $p^{(k)}$ για τους 28 σταθμούς.

sta	STATE/ COUNTRY	driest month	p(k)	wettest month	p(k)	LAT	LON
144972	USA	December	0,828	May	0,616	39,21	-96,59
253630	USA	December	0,857	May	0,659	42,61	-97,27
53005	USA	December	0,857	May	0,595	40,59	-105,09
391739	USA	December	0,811	June	0,625	44,89	-97,74
412121	USA	January	0,89	May	0,762	33,66	-101,25
138688	USA	February	0,795	May	0,665	41,29	-91,69
251145	USA	November	0,89	May	0,653	41,67	-103,1
326255	USA	November	0,832	June	0,619	46,51	-99,77
324418	USA	November	0,865	June	0,644	46,89	-98,69
322188	USA	October	0,823	June	0,56	46,89	-102,8
90140	USA	October	0,827	July	0,558	31,54	-84,14
35820	USA	October	0,802	April	0,683	36,27	-90,97
483100	USA	July	0,839	April	0,731	41,27	-110,95
269171	USA	August	0,923	February	0,67	40,91	-117,8
106152	USA	July	0,873	January	0,49	46,74	-116,97
305050	UK	July	0,665	December	0,485	51,141	1,295
575548	UK	June	0,512	December	0,346	53,85	-2,467
107389	UK	June	0,563	January	0,366	53,233	-1,617
43941	UK	June	0,574	November	0,391	53,84	-0,603
923753	UK	June	0,544	October	0,392	55,733	-2,417
4061	UK	June	0,573	December	0,387	53,324	-1,538
404988	UK	June	0,603	December	0,431	51,088	-2,728
82583	UK	June	0,569	December	0,383	53,383	-1,483
180704	UK	May	0,643	November	0,552	52,306	0,178
2165	UK	June	0,53	November	0,39	54,697	-1,655
Firenze	IT	July	0,854	November	0,585	43,8	11,2
Genova	IT	July	0,838	November	0,6	44,4	8,9
Marseille	FR	July	0,916	November	0,708	43,45	5,2

5.3 Εφαρμογή της παραμετρικής εξίσωσης $p^{(k)}$ και βελτιστοποίηση

Με βάση το θεωρητικό υπόβαθρο που αναπτύχθηκε στην ενότητα 3.6 χρησιμοποιείται η προτεινόμενη παραμετρική εξίσωση (30) για την ειδική περίπτωση $s = 0$:

$$-\ln p^{(k)} = -\ln p [1 + (\xi^{-1/n} - 1)(k - 1)]^n$$

Για τις παραμέτρους s , p , n και ξ ισχύουν οι περιορισμοί που αναπτύχθηκαν στην ενότητα 3.6.

Η παράμετρος $p = p^{(1)}$ είναι γνωστή εκ των προτέρων και ισούται με την πιθανότητα ξηρής κατάστασης στη βασική κλίμακα, καθώς και η παράμετρος $s = 0$. Συνεπώς, από τις τέσσερις παραμέτρους s , p , n και ξ της εξίσωσης (30) οι δύο είναι γνωστές. Οι τιμές των υπόλοιπων δύο παραμέτρων, n και ξ , προκύπτουν με μια διαδικασία βελτιστοποίησης με δεδομένες τις εμπειρικές πιθανότητες ακολουθίας ξηρών διαστημάτων.

Συγκεκριμένα, κατασκευάζεται μοντέλο βελτιστοποίησης που εκφράζει το άνω πρόβλημα, αξιολογεί και συγκρίνει τα αποτελέσματα της κάθε εναλλακτικής λύσης και επιλέγει τη βέλτιστη. Η συστηματική διαδικασία εύρεσης της καλύτερης λύσης (βέλτιστη τιμή των παραμέτρων n και ξ) με βάση ορισμένους περιορισμούς επιτυγχάνεται με τη χρήση κατάλληλου αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Το μοντέλο βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκε είναι το ακόλουθο:

Ορίζεται το σφάλμα w της μαθηματικής έκφρασης της πιθανότητας $p^{(k)}$ ως η διαφορά της παραμετρικής εξίσωσης $p^{(k)}$ από την εμπειρική πιθανότητα $p^{(k)}$, υψωμένη στη δύναμη λ :

$$w = (\ln p^{(k)} - \ln p^{(k)})^\lambda \quad (36)$$

όπου

$p^{(k)}$: η παραμετρική εξίσωση $p^{(k)} = p^{[1 + (\xi - 1/n - 1)(k-1)]}$ που εκφράζει μαθηματικά την πιθανότητα $p^{(k)}$

$p^{(k)}$: η εμπειρική πιθανότητα ένα διάστημα k ημερών να είναι ξηρό που εκτιμάται από τις ιστορικές χρονοσειρές.

λ : άρτιος αριθμός που κατά κανόνα θεωρείται 2 αλλά μπορεί να λάβει και μεγαλύτερες τιμές ώστε να δοθεί μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο ακραίες αποκλίσεις

Η αντικειμενική συνάρτηση που προτείνεται ορίζεται ως το πηλίκο του αθροίσματος των επιμέρους σφαλμάτων για τις διαφορετικές χρονικές κλίμακες k προς την κλίμακα k υψωμένη στη δύναμη λ' :

$$Z = \min \sum (\ln p^{(k)} - \ln p^{(k)\lambda} / k^{\lambda'} \quad (37)$$

όπου λ' : συντελεστής βάρους για την κλίμακα k

Η κλίμακα k στον παρανομαστή της σχέσης (36) λειτουργεί ως συντελεστής βάρους. Με την αύξηση της κλίμακας k μειώνεται η βαρύτητα του σφάλματος στο συνολικό άθροισμα. Η εισαγωγή θετικού συντελεστή βαρύτητας λ' στην αντικειμενική συνάρτηση προσομοιάζει καλύτερα την πραγματικότητα δεδομένου ότι για μεγάλες κλίμακες οι εκτιμήσεις ενέχουν μεγάλη αβεβαιότητα.

Στη διαδικασία βελτιστοποίησης, μετά από έλεγχο διαφορετικών τιμών λήφθηκαν οι τιμές των συντελεστών βαρύτητας $\lambda = 4$ και $\lambda' = 4$. Συνεπώς, η αντικειμενική συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε είναι:

$$Z = \min \sum \{(\ln p^{(k)} - \ln p^{(k)}) / k\}^4$$

Στόχος είναι η εύρεση των παραμέτρων n και ξ ώστε να ελαχιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση (ελαχιστοποίηση του σφάλματος). Ο μηδενισμός του σφάλματος θα σήμαινε απόλυτη ταύτιση της μαθηματικής έκφρασης της πιθανότητας

με την εμπειρική πιθανότητα. Η επίτευξη ικανοποιητικής προσέγγισης της μαθηματικής έκφρασης της πιθανότητας με την εμπειρική πιθανότητα μετά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης συνιστά την επιτυχία του μαθηματικού μοντέλου.

Οι περιοριστικές διατάξεις που πρέπει να ικανοποιούνται είναι:

$$0,1 \leq n \leq 1 \quad (42)$$

$$0,1 \leq \xi \leq 1 \quad (43)$$

$$1 - (\xi^{-1/n} - 1) \geq 0, \quad \text{ή} \quad \xi \geq 1/2^n \quad (44)$$

Η μη γραμμικότητα των εξισώσεων της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών συνιστούν πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού. Η επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων γίνεται με μη γραμμικό αλγόριθμο αναζήτησης με τη χρήση H/Y.

Χρησιμοποιήθηκε η βελτιωμένη έκδοση διαδεδομένης εμπορικά ρουτίνας επίλυσης (επιλυτής) προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού (Solver) που επιλύει προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού.

Κατά την ενεργοποίηση του επιλυτή (solver) χρειάζεται να γίνουν τα ακόλουθα:

- Εισαγωγή των δεδομένων της αντικειμενικής συνάρτησης και επιλογή του είδους του προβλήματος (μεγιστοποίησης, ελαχιστοποίησης ή ισότητας).
- Εισαγωγή των μεταβλητών και των περιορισμών.
- Επιλογή του τύπου επιλυτή ανάλογα με το είδος του προβλήματος γραμμικού ή μη γραμμικού: γραμμικός επιλυτής/ μέθοδος Simplex (Linear Simplex), τετραγωνικός επιλυτής (Quadratic), μη γραμμικός επιλυτής (Non Linear), εξελικτικός επιλυτής (Evolutionary), επιλυτής ολικά βέλτιστης λύσης (Interval Global).

Χρησιμοποιήθηκε ο τύπος εξελικτικού επιλυτή που δίνει καλύτερα αποτελέσματα έναντι του μη γραμμικού επιλυτή για προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού. Σε περίπτωση ασυνεχούς συνάρτησης ο τύπος εξελικτικού επιλυτή βρίσκει την ολικά βέλτιστη λύση (globally optimal solution) σε αντίθεση με τον τύπο μη γραμμικού

επιλυτή που βρίσκει μία τοπικά βέλτιστη λύση (locally optimal solution) και όχι απαραίτητως την ολικά βέλτιστη².

Συγκριτικά με τον τύπο επιλυτή ολικά βέλτιστης λύσης, ο εξελικτικός επιλυτής πλεονεκτεί ως προς το χρόνο επίλυσης για προβλήματα περισσότερων μεταβλητών και περιορισμών.

Τελικά, με την εφαρμογή του επιλυτή και επίλυση του προβλήματος λαμβάνονται οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων n και ξ . Στους συγκεντρωτικούς πίνακες 5.8 και 5.9α,β παρατίθενται οι τιμές των παραμέτρων n , ξ και p για το έτος και για τους 12 μήνες όλων των υπό μελέτη σταθμών.

Οι τιμές των παραμέτρων n και ξ είναι ενδεικτικές της σχέσης εξάρτησης των πιθανοτήτων $p^{(k)}$ της стоχαστικής ανέλιξης της βροχόπτωσης. Χαρακτηρίζουν τη δομή της стоχαστικής ανέλιξης και υποδεικνύουν τη μακροπρόθεσμη εμμονή. Σε αντιστοιχία με το συντελεστή Hurst για μια стоχαστική ανέλιξη, η παράμετρος n είναι δείκτης της μακροπρόθεσμης εμμονής σε μια δυαδική стоχαστική ανέλιξη (Κουτσογιάννης, 2002). Προφανώς, υπάρχουν ποσοτικές διαφορές μεταξύ των δύο δεικτών H και n . Στην περίπτωση του συντελεστή Hurst, η ανεξαρτησία αντιστοιχεί στην τιμή $H = 0,5$ και η θετική μακροπρόθεσμη εμμονή αντιστοιχεί στην τιμή $H > 0,5$ έως 1. Στην περίπτωση της παραμέτρου n , η ανεξαρτησία αντιστοιχεί στην τιμή $n = 1$ και η θετική μακροπρόθεσμη εμμονή αντιστοιχεί στην τιμή $n < 1$ έως 0.

Συγκεκριμένα:

Για $s = 0$ και $n = 1$ η προκύπτουσα σχέση αντιστοιχεί σε μία διαδικασία που μπορεί να περιγραφεί από ένα μοντέλο Markov.

Για $s = 0$, $n = 1$ και $\xi = 0,5$ προκύπτει πλήρη ανεξαρτησία.

Για $s = 0$, $n < 1$ και μεγάλο k , η εξαγόμενη πιθανότητα $-\ln p^{(k)}$ είναι ανάλογη με k^n , γεγονός που υποδηλώνει μια υπερεκθετική «ουρά» της πιθανότητας $p^{(k)}$.

² Η τοπικά βέλτιστη λύση αντιπροσωπεύει σε ένα μικρό εύρος τιμών (στη γειτονία της) τη βέλτιστη λύση. Ενδέχεται να υπάρχουν περισσότερα τοπικά βέλτιστα. Η ολικά βέλτιστη λύση είναι η μοναδική βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος.

Πίνακας 5.8 Οι τιμές των παραμέτρων η , ξ και ρ για το έτος για τους 28 σταθμούς

A/A	Stations		Year	A/A	Stations		Year
1	35820 POCAHONTAS 1 USA/ARIZONA	ξ	0,54	15	483100 EVANSTON 1E USA/WYOMING	ξ	0,61
		η	0,88			η	0,81
		ρ	0,74			ρ	0,78
2	53005 FORT COLLINS USA/COLORADO	ξ	0,65	16	2165 DURHAM_LPMS UK	ξ	0,62
		η	0,79			η	0,74
		ρ	0,75			ρ	0,46
3	90140 ALBANY 3SE USA/ GEORGIA	ξ	0,59	17	4061 SHEFFIELD_LPMS UK	ξ	0,65
		η	0,87			η	0,76
		ρ	0,70			ρ	0,48
4	106152 MOSCOW U OF ID USA/ IDAHO	ξ	0,68	18	43941 DALTON_HOLME UK	ξ	0,62
		η	0,67			η	0,70
		ρ	0,67			ρ	0,49
5	138688 WASHINGTON USA/IOWA	ξ	0,56	19	82583 SHEFFIELD UK	ξ	0,66
		η	0,85			η	0,76
		ρ	0,75			ρ	0,48
6	144972 MANHATTAN USA/KANSAS	ξ	0,61	20	107389 CHATSWORTH UK	ξ	0,67
		η	0,88			η	0,76
		ρ	0,73			ρ	0,47
7	251145 BRIDGEPORT USA/NEBRASKA	ξ	0,59	21	180704 STRETHAM UK	ξ	0,61
		η	0,84			η	0,79
		ρ	0,80			ρ	0,60
8	253630 HARTINGTON USA/NEBRASKA	ξ	0,60	22	305050 DOVER_W.WKS UK	ξ	0,64
		η	0,96			η	0,78
		ρ	0,77			ρ	0,58
9	269171 WINNEMUCCA WSO AP USA/NEVADA	ξ	0,69	23	404988 MILLFIELD_SCHOOL UK	ξ	0,68
		η	0,58			η	0,83
		ρ	0,79			ρ	0,52
10	322188 DICKINSON EXP STN USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,60	24	575548 STONYHURST UK	ξ	0,65
		η	0,84			η	0,67
		ρ	0,73			ρ	0,43
11	324418 JAMESTOWN STATE USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,57	25	923753 MARCHMONT UK	ξ	0,63
		η	0,86			η	0,73
		ρ	0,79			ρ	0,45
12	326255 NAPOLEON USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,57	26	MARSEILLE FRANCE	ξ	0,59
		η	0,85			η	0,77
		ρ	0,76			ρ	0,78
13	391739 CLARK USA/SOUTH DAKOTA	ξ	0,57	27	GENOVA ITALY	ξ	0,63
		η	0,83			η	0,88
		ρ	0,75			ρ	0,69
14	412121 CROSBYTON USA/TEXAS	ξ	0,61	28	FIRENZE ITALY	ξ	0,64
		η	0,84			η	0,83
		ρ	0,83			ρ	0,70

Πίνακας 5.9α Οι τιμές των παραμέτρων η, ξ και ρ για τους 12 μήνες των αμερικάνικων σταθμών

	STATIONS		January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December	
1	35820 POCAHONTAS 1 USA/ARIZONA	ξ	0,59	0,62	0,62	0,60	0,58	0,60	0,58	0,60	0,63	0,65	0,62	0,60	
		η	0,94	0,88	0,98	0,88	0,98	0,97	0,94	0,91	0,96	0,96	0,71	0,93	
		ρ	0,73	0,73	0,71	0,68	0,70	0,74	0,74	0,78	0,78	0,80	0,75	0,74	
2	53005 FORT COLLINS USA/COLORADO	ξ	0,62	0,64	0,61	0,61	0,66	0,67	0,61	0,61	0,66	0,62	0,65	0,62	
		η	0,89	0,87	0,95	1,00	0,86	1,00	0,95	0,90	0,94	0,83	1,00	0,83	
		ρ	0,85	0,81	0,75	0,68	0,60	0,66	0,66	0,67	0,76	0,82	0,84	0,86	
3	90140 ALBANY 3SE USA/GEORGIA	ξ	0,56	0,54	0,54	0,54	0,57	0,60	0,63	0,61	0,63	0,61	0,59	0,56	
		η	0,85	0,98	0,95	0,93	0,57	1,00	0,66	0,57	0,63	0,92	1,00	0,91	
		ρ	0,68	0,67	0,70	0,76	0,74	0,64	0,56	0,62	0,73	0,83	0,78	0,71	
4	106152 MOSCOW U OF ID USA/IDAHO	ξ	0,68	0,68	0,67	0,64	0,64	0,63	0,60	0,66	0,68	0,68	0,69	0,67	
		η	0,79	0,81	1,00	0,74	0,80	0,71	0,89	0,95	0,98	0,60	0,62	0,66	
		ρ	0,49	0,54	0,55	0,63	0,66	0,71	0,87	0,86	0,79	0,70	0,53	0,51	
5	138688 WASHINGTON USA/IOWA	ξ	0,56	0,54	0,55	0,54	0,55	0,56	0,53	0,54	0,57	0,58	0,58	0,58	
		η	0,95	0,94	1,00	0,89	0,90	0,86	0,92	0,98	0,94	0,95	0,83	0,90	
		ρ	0,79	0,80	0,75	0,69	0,67	0,69	0,73	0,76	0,74	0,78	0,78	0,79	
6	144972 MANHATTAN USA/KANSAS	ξ	0,64	0,59	0,59	0,58	0,59	0,56	0,57	0,58	0,59	0,62	0,66	0,60	
		η	0,94	1,00	0,82	1,00	0,98	0,87	0,85	0,80	1,00	0,97	0,96	0,87	0,99
		ρ	0,82	0,79	0,75	0,67	0,62	0,64	0,71	0,70	0,72	0,77	0,80	0,83	
7	251145 BRIDGEPORT USA/NEBRASKA	ξ	0,59	0,60	0,56	0,59	0,63	0,58	0,56	0,58	0,59	0,61	0,58	0,60	
		η	0,86	0,98	1,00	1,00	0,96	0,88	1,00	0,97	1,00	1,00	0,96	0,91	
		ρ	0,82	0,79	0,75	0,67	0,62	0,64	0,71	0,70	0,72	0,77	0,80	0,83	
8	253630 HARTINGTON USA/NEBRASKA	ξ	0,60	0,57	0,58	0,61	0,57	0,54	0,53	0,55	0,57	0,60	0,63	0,60	
		η	0,74	0,82	0,91	1,00	0,99	0,92	1,00	0,99	0,95	0,90	0,82	0,84	
		ρ	0,84	0,82	0,78	0,70	0,66	0,67	0,74	0,73	0,77	0,83	0,84	0,86	
9	269171 WINNEMUCCA WSO AP USA/NEVADA	ξ	0,67	0,69	0,68	0,67	0,68	0,73	0,66	0,68	0,68	0,69	0,72	0,72	
		η	0,79	0,83	0,72	1,00	0,66	0,96	0,93	0,69	0,76	0,90	0,74	0,78	
		ρ	0,68	0,67	0,70	0,74	0,75	0,82	0,92	0,92	0,89	0,84	0,76	0,71	
10	322188 DICKINSON EXP STN USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,67	0,64	0,63	0,62	0,62	0,59	0,56	0,55	0,63	0,63	0,72	0,63	
		η	0,84	0,69	0,68	0,81	0,99	0,91	1,00	0,89	0,98	0,89	0,96	0,68	
		ρ	0,77	0,78	0,75	0,71	0,64	0,56	0,69	0,75	0,75	0,82	0,80	0,78	
11	324418 JAMESTOWN STATE HOSP. USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,54	0,57	0,60	0,60	0,63	0,55	0,54	0,55	0,57	0,57	0,58	0,59	
		η	0,90	0,91	1,00	0,89	0,98	0,96	0,92	0,96	0,96	0,93	0,83	1,00	
		ρ	0,85	0,85	0,85	0,78	0,72	0,64	0,71	0,75	0,78	0,84	0,86	0,84	
12	326255 NAPOLEON USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,58	0,58	0,58	0,61	0,60	0,54	0,51	0,52	0,55	0,59	0,59	0,61	
		η	0,79	1,00	1,00	0,94	0,90	0,90	0,98	0,95	1,00	0,90	0,78	0,96	
		ρ	0,81	0,82	0,80	0,74	0,69	0,62	0,71	0,75	0,75	0,82	0,83	0,82	
13	391739 CLARK USA/SOUTH DAKOTA	ξ	0,60	0,59	0,58	0,56	0,59	0,57	0,52	0,55	0,58	0,64	0,67	0,58	
		η	0,77	1,00	0,97	0,88	0,79	0,83	0,96	0,97	0,85	0,93	0,98	0,82	
		ρ	0,79	0,80	0,77	0,72	0,67	0,63	0,71	0,73	0,76	0,79	0,81	0,81	
14	412121 CROSBYTON USA/TEXAS	ξ	0,56	0,57	0,53	0,58	0,57	0,59	0,58	0,57	0,60	0,65	0,60	0,59	
		η	0,86	0,86	0,79	1,00	0,87	0,94	1,00	0,83	0,83	0,99	0,90	0,92	
		ρ	0,89	0,88	0,88	0,84	0,76	0,79	0,81	0,79	0,79	0,83	0,88	0,89	
15	483100 EVANSTON 1E USA/WYOMING	ξ	0,63	0,60	0,60	0,60	0,63	0,63	0,61	0,59	0,65	0,64	0,62	0,61	
		η	0,98	0,91	0,97	0,88	0,97	0,74	0,83	0,89	0,95	0,97	0,85	1,00	
		ρ	0,77	0,74	0,73	0,73	0,74	0,81	0,84	0,81	0,81	0,81	0,80	0,79	

Πίνακας 5.9β Οι τιμές των παραμέτρων η , ξ και ρ για τους 12 μήνες των ευρωπαϊκών σταθμών

	STATIONS		January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
16	2165 DURHAM_LPMS UK	ξ	0,63	0,64	0,62	0,62	0,65	0,65	0,61	0,60	0,59	0,63	0,61	0,60
		η	0,67	1,00	0,68	0,70	1,00	0,77	0,70	0,73	0,76	0,67	0,71	0,73
		ρ	0,42	0,44	0,45	0,47	0,50	0,53	0,51	0,48	0,50	0,42	0,39	0,41
17	4061 SHEFFIELD_LPMS UK	ξ	0,65	0,65	0,69	0,67	0,65	0,65	0,62	0,60	0,65	0,64	0,65	0,66
		η	0,90	0,85	1,00	0,78	0,97	0,77	0,89	0,73	0,84	0,64	0,80	0,89
		ρ	0,39	0,44	0,47	0,50	0,54	0,57	0,56	0,53	0,55	0,46	0,40	0,39
18	43941 DALTON_HOLME UK	ξ	0,62	0,58	0,59	0,66	0,64	0,63	0,59	0,61	0,62	0,59	0,57	0,62
		η	0,69	0,78	0,60	0,97	1,00	0,79	0,76	0,72	0,96	0,69	0,77	0,69
		ρ	0,42	0,48	0,48	0,51	0,55	0,57	0,56	0,53	0,54	0,46	0,39	0,40
19	82583 SHEFFIELD UK	ξ	0,65	0,65	0,69	0,69	0,65	0,66	0,61	0,56	0,64	0,61	0,64	0,65
		η	1,00	0,83	1,00	0,88	0,93	0,81	0,86	0,60	0,87	0,58	0,74	0,84
		ρ	0,38	0,44	0,46	0,50	0,54	0,57	0,56	0,53	0,55	0,46	0,39	0,38
20	107389 CHATSWORTH UK	ξ	0,64	0,62	0,63	0,67	0,63	0,64	0,64	0,64	0,65	0,63	0,62	0,61
		η	0,63	0,56	0,65	0,76	0,80	0,66	0,88	0,79	0,81	0,71	0,67	0,72
		ρ	0,37	0,42	0,45	0,51	0,55	0,56	0,54	0,50	0,52	0,44	0,39	0,37
21	180704 STRETHAM UK	ξ	0,58	0,61	0,57	0,62	0,63	0,61	0,60	0,59	0,63	0,59	0,59	0,57
		η	0,73	0,90	0,66	0,78	0,97	0,74	0,80	0,75	0,90	0,79	0,77	0,78
		ρ	0,56	0,61	0,60	0,61	0,64	0,63	0,62	0,63	0,62	0,59	0,55	0,56
22	305050 DOVER_W.WKS UK	ξ	0,64	0,61	0,66	0,65	0,62	0,59	0,60	0,60	0,64	0,63	0,62	0,61
		η	0,87	0,71	0,85	0,81	0,83	0,76	0,78	0,73	0,92	0,67	0,79	0,73
		ρ	0,49	0,53	0,57	0,60	0,65	0,66	0,66	0,65	0,62	0,55	0,49	0,49
23	404988 MILLFIELD_SCHOOL UK	ξ	0,66	0,66	0,68	0,66	0,67	0,65	0,63	0,64	0,65	0,65	0,65	0,62
		η	0,90	0,73	1,00	0,71	1,00	0,83	0,71	0,72	0,84	0,61	0,66	0,68
		ρ	0,45	0,50	0,54	0,55	0,57	0,60	0,56	0,53	0,53	0,47	0,46	0,43
24	575548 STONYHURST UK	ξ	0,67	0,62	0,67	0,65	0,65	0,64	0,64	0,63	0,64	0,64	0,68	0,63
		η	1,00	0,60	0,89	0,74	0,79	0,65	0,64	0,60	0,67	0,64	0,66	0,52
		ρ	0,35	0,41	0,47	0,49	0,51	0,51	0,44	0,42	0,44	0,40	0,37	0,35
25	923753 MARCHMONT UK	ξ	0,60	0,67	0,63	0,67	0,64	0,66	0,65	0,64	0,62	0,64	0,60	0,62
		η	0,76	0,98	0,66	1,00	0,78	1,00	0,93	0,65	0,71	0,74	0,73	0,96
		ρ	0,42	0,44	0,44	0,47	0,50	0,54	0,49	0,45	0,46	0,39	0,37	0,39
26	MARSEILLE FRANCE	ξ	0,61	0,64	0,61	0,57	0,61	0,56	0,56	0,55	0,60	0,64	0,64	0,61
		η	0,79	0,87	0,81	0,74	0,99	0,92	0,93	0,95	0,98	0,92	0,93	0,79
		ρ	0,75	0,74	0,75	0,74	0,77	0,84	0,92	0,88	0,81	0,72	0,71	0,71
27	GENOVA ITALY	ξ	0,67	0,66	0,65	0,63	0,60	0,58	0,57	0,58	0,61	0,65	0,68	0,67
		η	0,96	0,78	0,82	1,00	0,83	0,97	0,96	1,00	0,94	0,85	0,92	0,84
		ρ	0,67	0,69	0,66	0,64	0,63	0,73	0,84	0,79	0,71	0,61	0,60	0,66
28	FIRENZE ITALY	ξ	0,66	0,67	0,65	0,62	0,61	0,58	0,57	0,59	0,62	0,65	0,68	0,66
		η	0,98	0,76	0,74	0,72	0,81	0,82	0,96	0,97	0,94	0,74	0,78	0,81
		ρ	0,66	0,68	0,67	0,64	0,66	0,75	0,85	0,83	0,73	0,65	0,59	0,63

5.4 Εξαγωγή συμπερασμάτων

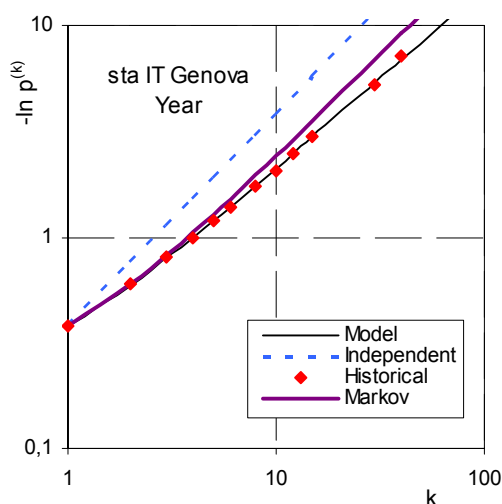
Οι εξαγόμενες πιθανότητες $p^{(k)}$ του προτεινόμενου μοντέλου, οι εμπειρικές πιθανότητες και οι πιθανότητες των χαρακτηριστικών μοντέλων Markov και πλήρους ανεξαρτησίας απεικονίζονται σε συγκριτικά διαγράμματα.

Η παραστατική παρουσίαση των αποτελεσμάτων μέσω των διαγραμμάτων έχει διερευνητικό ρόλο. Εκτός από γραφικές απεικονίσεις, τα διαγράμματα (1) υποδεικνύουν άμεσα την επαλήθευση ή μη της προτεινόμενης μαθηματικής έκφρασης και κατ'επέκταση την επιτυχία του μαθηματικού μοντέλου, (2) δίνουν μια γενική εικόνα και μορφή της παραμετρικής σχέσης και του μοντέλου που περιγράφεται, (3) παρέχουν τη δυνατότητα σύγκρισης των προσαρμοσμένων μαθηματικών σχέσεων μεταξύ τους αλλά και σε σχέση με χαρακτηριστικά μοντέλα (Markov και ανεξάρτητου).

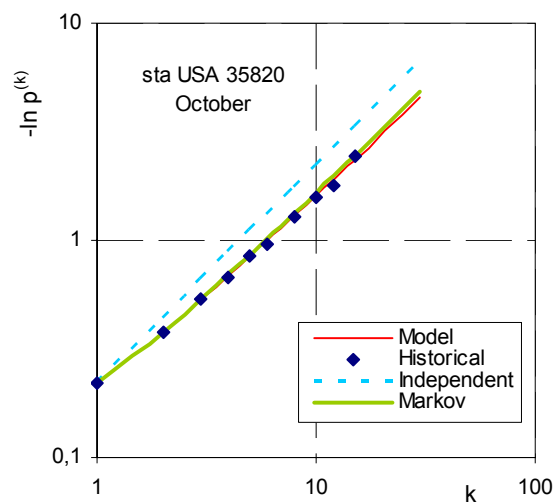
Η μελέτη των διαγραμμάτων σε συνδυασμό με τις παραμέτρους η και ξ οδήγησε στην εξαγωγή των ακόλουθων συμπερασμάτων:

1. Γενική διαπίστωση από το σύνολο των διαγραμμάτων είναι η επαλήθευση του προτεινόμενου μαθηματικού μοντέλου. Τα σημεία των εμπειρικών πιθανοτήτων συμπίπτουν με την καμπύλη που απεικονίζει το προτεινόμενο μαθηματικό μοντέλο για όλες τις διαφορετικές χρονοσειρές που μελετήθηκαν. Ιδιαίτερα, αναφερόμαστε στην απόλυτη ταύτιση του μοντέλου και των εμπειρικών πιθανοτήτων για τη χρονοσειρά όλου του έτους, στην οποία η εκτίμηση των εμπειρικών πιθανοτήτων είναι πιο αξιόπιστη. Λαμβάνοντας υπόψη τις ημερήσιες μετρήσεις σε σύνολο 100 ετών και άνω, προκύπτουν χρονοσειρές με αυξημένο μήκος, γεγονός που προσδίδει μεγαλύτερη αξιοπιστία στα εξαγόμενα διαγράμματα. Συνεπώς, η ταύτιση της καμπύλης του μοντέλου και των ιστορικών δεδομένων αποδεικνύει την επιτυχία του μαθηματικού μοντέλου στην προσομοίωση της πραγματικότητας (Σχήμα 5.10).

2. Παρατηρείται γενική ομοιότητα ως προς τη διάταξη. Όλα τα γραφήματα εμφανίζουν κοινή διάταξη των καμπύλων που απεικονίζουν τις εμπειρικές πιθανότητες και τα τρία μοντέλα- το μαθηματικό, το Markov και το ανεξάρτητο. Το ανεξάρτητο βρίσκεται υψηλότερα όλων, ακολουθεί το Markov και μετά η καμπύλη του μαθηματικού μοντέλου που συμπίπτει με τις εμπειρικές πιθανότητες (Σχήμα 5.10). Η συγκεκριμένη διάταξη επισημαίνει ότι το ανεξάρτητο μοντέλο και λιγότερο το Markov υποεκτιμούν την πιθανότητα $p^{(k)}$ σε αντίθεση με το προτεινόμενο μοντέλο που εκτιμά ικανοποιητικά την πιθανότητα $p^{(k)}$. Αποδεικνύεται έτσι για τη διεργασία της βροχής μια ισχυρότερη αυτοσυσχέτιση από την αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης του μοντέλου Markov, που σημαίνει ότι σε ένα μελλοντικό χρονικό βήμα, η πιθανότητα ξηρής κατάστασης δεν εξαρτάται μόνο από το προηγούμενο χρονικό βήμα (την προηγούμενη ημέρα) αλλά από την αλληλουχία περισσότερων χρονικών βημάτων. Το μαθηματικό μοντέλο ορίζεται από μία γενικότερη μαθηματική σχέση η οποία χάρη στις τέσσερις παραμέτρους της χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερη ευελιξία και δύναται να εκφράσει εξάρτηση Markov ή ακόμα και να εκφυλιστεί σε σχέση πλήρους ανεξαρτησίας.



Σχήμα 5.10 Επαλήθευση του μοντέλου



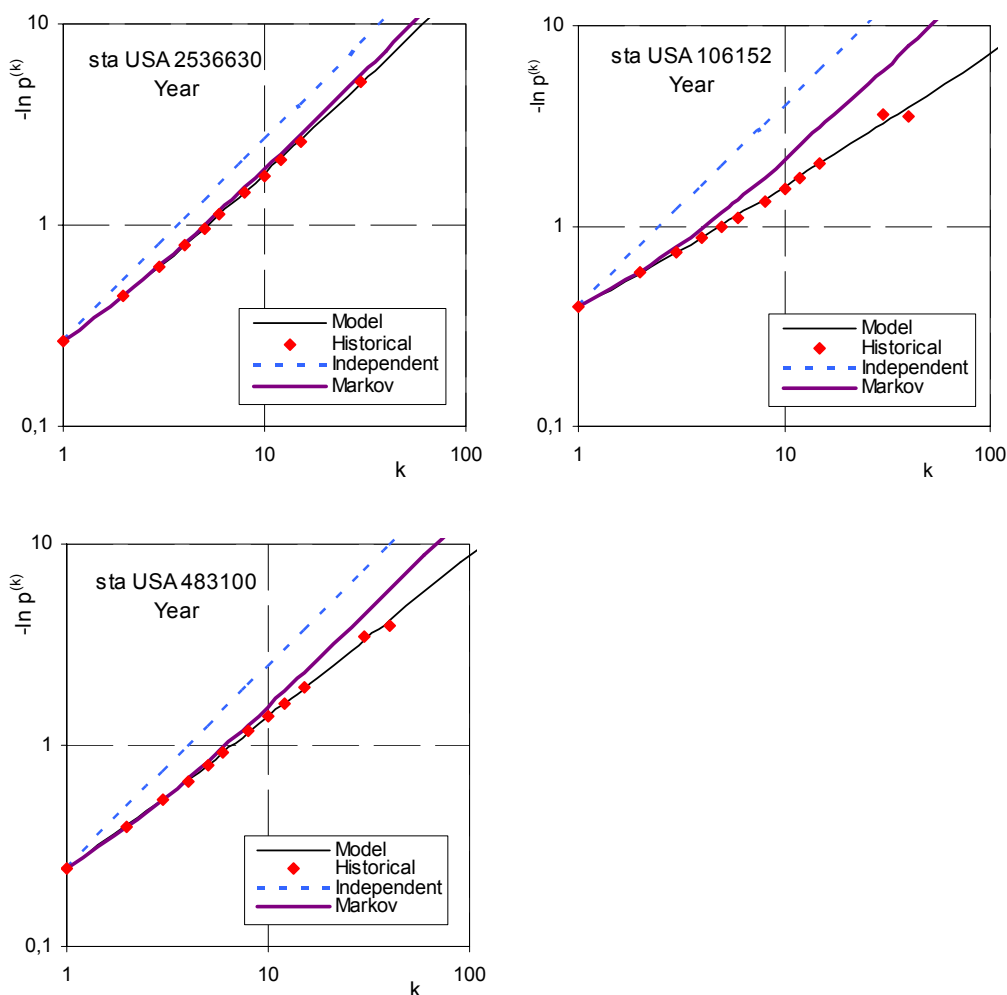
Σχήμα 5.11 Εξάρτηση Markov

3. Διαπιστώθηκε σε πολλά διαγράμματα των αμερικάνικων σταθμών για τους 12 μήνες του έτους ότι τα σημεία που εκφράζουν τις εμπειρικές πιθανότητες, το προτεινόμενο μαθηματικό μοντέλο και το μοντέλο Markov ταυτίζονται. Κατά συνέπεια, οι εμπειρικές πιθανότητες $p^{(k)}$ αυτών των αμερικάνικων σταθμών για τους 12 μήνες του έτους έχουν εξάρτηση Markov. Εξάρτηση Markov εμφανίζεται και σε αμερικάνικους σταθμούς σε χρονοσειρά για όλο το έτος. Τα άνω συμπεράσματα φαίνονται στο ενδεικτικό διάγραμμα του σχήματος 5.11 για δεδομένα του αμερικάνικου σταθμού 35820 POCAHONTAS ARIZONA.

Αναλυτικότερα, για τα επιμέρους διαγράμματα ισχύουν τα εξής συμπεράσματα:

1. Τα διαγράμματα του μαθηματικού μοντέλου για ολόκληρο το έτος για τους σταθμούς των ΗΠΑ εμφανίζουν μια ποικιλία ως προς τη μορφή τους. Οι καμπύλες των πιθανοτήτων $p^{(k)}$ των σταθμών 259171 και 106152, που είναι εγκατεστημένοι στις δυτικές περιοχές Nevada και Idaho, αποκλίνουν καθαρά από το μοντέλο Markov ήδη για κλίμακες $k = 5$ ημέρες. Παρουσιάζουν ισχυρότερη αυτοσυσχέτιση από ότι το μοντέλο Markov. Επιβεβαίωση αυτής της συμπεριφοράς αποτελούν και οι παράμετροι του μαθηματικού μοντέλου $n = 0,58$ και $0,67$ αντίστοιχα, δηλαδή $n \ll 1$. Ακόμα, η κλίση της καμπύλης του προτεινόμενου μαθηματικού μοντέλου για μεγάλες χρονικές κλίμακες k διαφέρει από εκείνη της ευθείας της πλήρους ανεξαρτησίας, γεγονός που εκφράζει την ύπαρξη μακροπρόθεσμης εμμονής. Αντίθετα, για τους σταθμούς 2536630 (Nebraska), 35820 (Arizona) και 90140 (Georgia) τα σημειοσύνολα των εμπειρικών πιθανοτήτων εκφράζουν εξάρτηση Markov. Αντίστοιχα, οι παράμετροι n και ξ του μαθηματικού μοντέλου ($n = 0,96$, $\xi = 0,6$) σχεδόν ταυτίζονται με τις παραμέτρους που εκφράζουν το μοντέλο Markov ($n = 1$, $\xi = 0,59$). Οι υπόλοιποι 10 αμερικάνικοι σταθμοί εμφανίζουν μια ενδιάμεση κατάσταση με τα σημεία των εμπειρικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$ να αποκλίνουν από το μοντέλο Markov για $k = 10$. Ενδεικτικά, για τις περιπτώσεις που αναλύθηκαν παρατίθενται στο σχήμα 5.11 τρία διαγράμματα με δεδομένα των

αντιπροσωπευτικών αμερικάνικων σταθμών 2536630 HARTINGTON NEBRASKA, 106152 MOSCOW IDAHO, 483100 EVANSTON WYOMING.

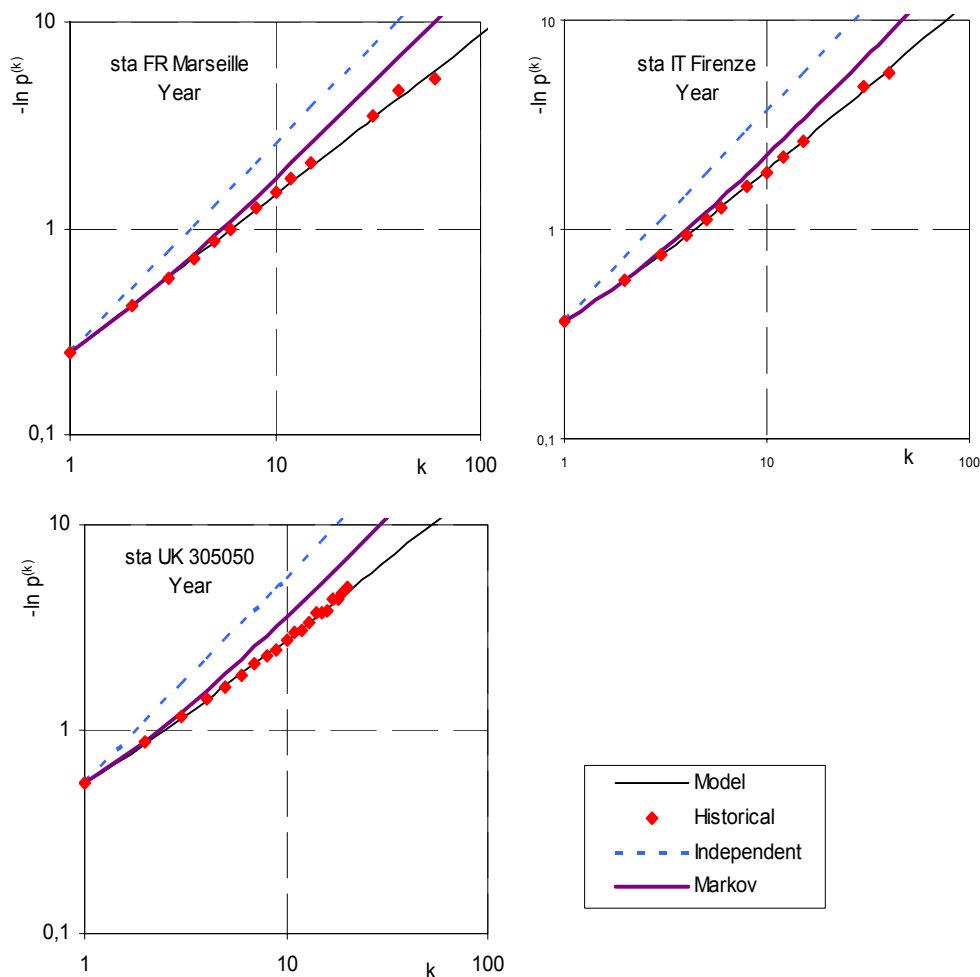


Σχήμα 5.11 Διαγράμματα πιθανοτήτων για όλο το έτος για δεδομένα αντιπροσωπευτικών αμερικάνικων σταθμών. Εμφανείς οι διαφορές ως προς την απόκλιση των εμπειρικών πιθανοτήτων από το μοντέλο Markov για διαφορετικές περιοχές των Η.Π.Α. (sta 2536630 NEBRASKA, κεντρικά των Η.Π.Α; sta 106152 IDAHO, δυτικά; sta 483100 WYOMING, κεντρο-δυτικά).

2. Τα διαγράμματα του μαθηματικού μοντέλου για ολόκληρο το έτος για τους αγγλικούς σταθμούς εμφανίζουν μια ενιαία καθαρή μορφή. Οι καμπύλες των εμπειρικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$ αποκλίνουν εμφανώς από το μοντέλο Markov ήδη για κλίμακες $k = 5$ ημέρες. Επιβεβαίωση αυτής της συμπεριφοράς αποτελούν οι παράμετροι n του μαθηματικού μοντέλου για τους 10 αγγλικούς σταθμούς που έχουν μικρές διαφορές μεταξύ τους με μέσο $n = 0,75 \ll 1$. Η καμπύλη του

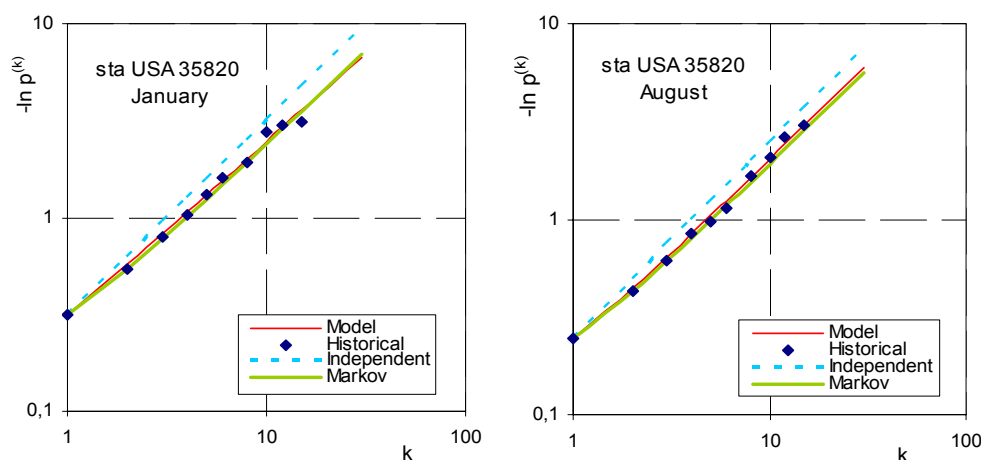
μαθηματικού μοντέλου για μεγάλες χρονικές κλίμακες k αποκλίνει από την ευθεία του μοντέλου πλήρους ανεξαρτησίας, γεγονός που εκφράζει την ύπαρξη μακροπρόθεσμης εμμονής (Σχήμα 5.12). Οι τιμές των πιθανοτήτων $p^{(k)}$ των αγγλικών σταθμών είναι οι χαμηλότερες (εκτενής αναφορά έγινε στην ενότητα 5.2).

3. Για τους σταθμούς Marseille στη Γαλλία, Firenze και Genova στην Ιταλία, η τα σημειοσύνολα των εμπειρικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$ αποκλίνουν από το μοντέλο Markov για κλίμακες $k = 8$ ημέρες. Οι παράμετροι η είναι αντίστοιχα 0,77, 0,82 και $0,88 < 1$. (Σχήμα 5.12)

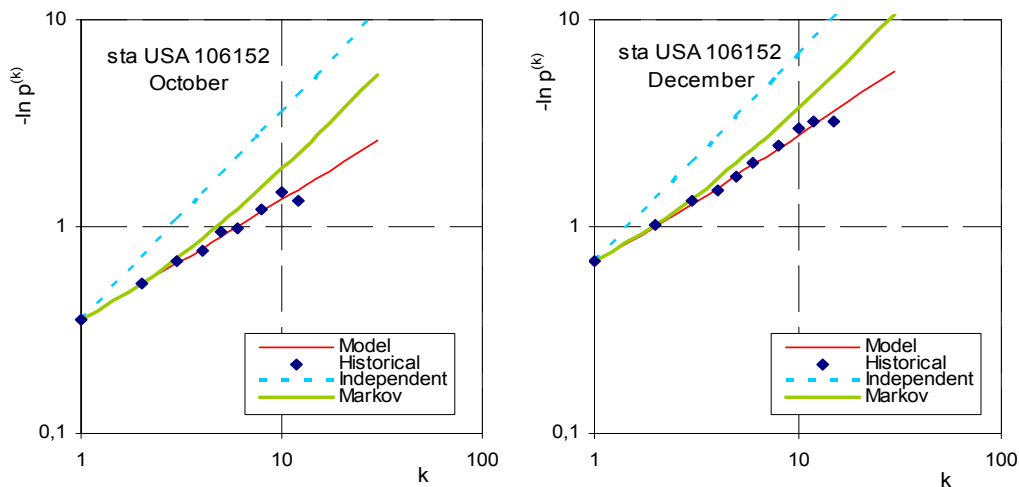


Σχήμα 5.12 Διαγράμματα πιθανοτήτων για όλο το έτος για δεδομένα ενός γαλλικού, ιταλικού και αγγλικού σταθμού. Χαρακτηριστική η απόκλιση των εμπειρικών πιθανοτήτων από το μοντέλο Markov.

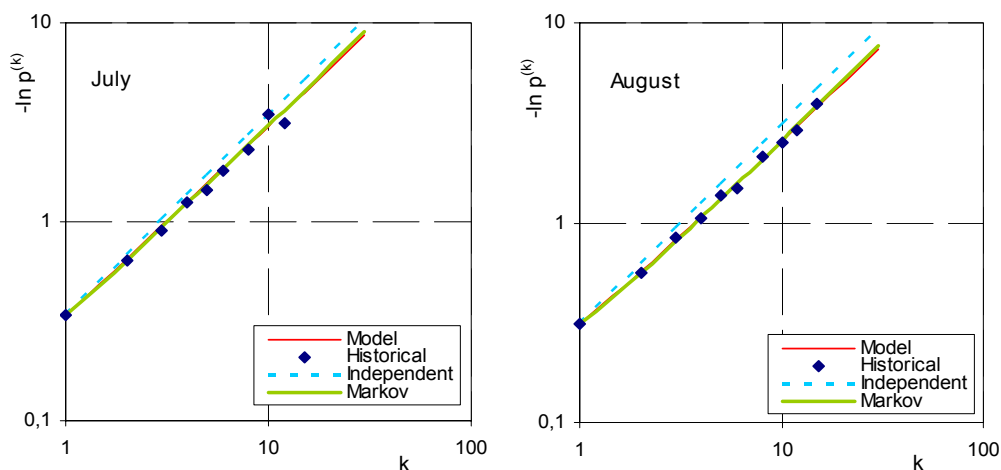
4. Όπως συμβαίνει και στα διαγράμματα για ολόκληρο το έτος για τους σταθμούς των ΗΠΑ, αντίστοιχα και στα διαγράμματα για τους 12 μήνες των αμερικάνικων σταθμών παρουσιάζεται ιδιαίτερη ποικιλία. Για 7 από τους 15 σταθμούς (90140, 35820, 2536630, 251145, 324418, 412121 και 322188), τα σημειοσύνολα των εμπειρικών πιθανοτήτων εκφράζουν εξάρτηση Markov για όλους τους μήνες με κάποιες εξαιρέσεις (2 ή 3 μηνών σε κάθε σταθμό). Ενδεικτικά, παρουσιάζονται τα διαγράμματα των μηνών Ιανουαρίου και Αυγούστου του σταθμού 35820 στο σχήμα 5.13. 5 σταθμοί (53005, 391739, 136888, 326255 και 144972) εμφανίζουν μια ενδιάμεση κατάσταση με τα σημειοσύνολα των εμπειρικών πιθανοτήτων άλλοτε να εκφράζουν σχέση Markov και άλλοτε όχι. Τέλος, για 3 σταθμούς (269171, 106152 και 483100), τα σημεία των εμπειρικών πιθανοτήτων αποκλίνουν εμφανώς από το μοντέλο Markov για όλους τους μήνες (με κάποιες εξαιρέσεις 2 ή 3 μηνών). Ενδεικτικά, παρουσιάζονται τα διαγράμματα των μηνών Οκτωβρίου και Νοεμβρίου του σταθμού 106152 στο σχήμα 5.14. Χαρακτηριστική είναι η μικρή απόσταση της ευθείας του μοντέλου πλήρους ανεξαρτησίας από το μοντέλο Markov, η οποία γίνεται ελάχιστη για τους μήνες Ιούλιο και Αύγουστο. Στους σταθμούς 324418, 2536630, 391739, 138688, 326255 τους μήνες Ιούλιο και Αύγουστο, τα μοντέλα πλήρους ανεξαρτησίας και Markov ταυτίζονται. Ενδεικτικά, στο σχήμα 5.15 φαίνονται τα διαγράμματα για τους μήνες Ιούλιο και Αύγουστο του σταθμού 391739. Η μέγιστη απόσταση της ευθείας του μοντέλου πλήρους ανεξαρτησίας από το μοντέλο Markov εμφανίζεται τους μήνες Νοέμβριο και Οκτώβριο.



Σχήμα 5.13 Χαρακτηριστική εξάρτηση Markov για τους μήνες Ιανουάριο και Αύγουστο (δεδομένα του αμερικάνικου σταθμού 35820 POCAHONTAS ARIZONA).



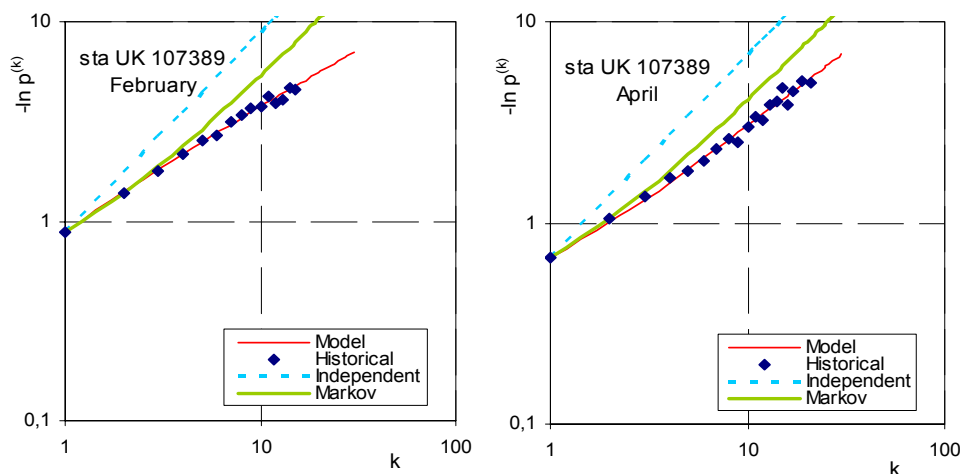
Σχήμα 5.14 Χαρακτηριστική απόκλιση των εμπειρικών πιθανοτήτων από το μοντέλο Markov για τους μήνες Οκτώβριο και Δεκέμβριο (δεδομένα του αμερικάνικου σταθμού 106152 MOSCOW IDAHO).



Σχήμα 5.15 Ταύτιση των εμπειρικών πιθανοτήτων, του μοντέλου Markov και του ανεξάρτητου μοντέλου για τους μήνες Ιούλιο και Αύγουστο (δεδομένα του αμερικάνικου σταθμού 391739 CLARK SOUTH DAKOTA).

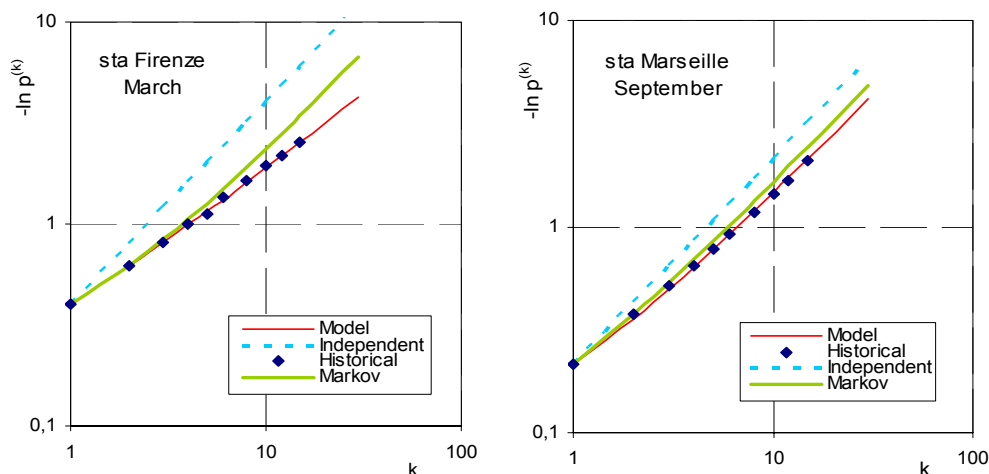
5. Τα διαγράμματα των αγγλικών σταθμών για τους 12 μήνες του έτους εμφανίζουν μια ενιαία μορφή. Τα σημειοσύνολα των εμπειρικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$ αποκλίνουν εμφανώς από το μοντέλο Markov ήδη για κλίμακες $k = 5$ ημέρες. Ενδεικτικά, στο σχήμα 5.16 φαίνονται τα διαγράμματα για τους μήνες Φεβρουάριο και Απρίλιο του σταθμού 107389 CHATSWORTH. Κατ' εξαίρεση

για τους μήνες Φεβρουάριο και Μάιο (συνηθέστερα) των σταθμών 2165, 43941, 82583, 4061, 923753, 404988 και 575548 τα σημειοσύνολα των εμπειρικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$ προσεγγίζουν το μοντέλο Markov. Τέλος, η ελάχιστη απόσταση της ευθείας του μοντέλου πλήρους ανεξαρτησίας από το μοντέλο Markov εμφανίζεται το μήνα Αύγουστο ενώ η μέγιστη εμφανίζεται το μήνα Ιανουάριο.



Σχήμα 5.16 Χαρακτηριστική απόκλιση των εμπειρικών πιθανοτήτων από το μοντέλο Markov για τους μήνες Φεβρουάριο και Απρίλιο (δεδομένα του αγγλικού σταθμού 107389 CHATSWORTH).

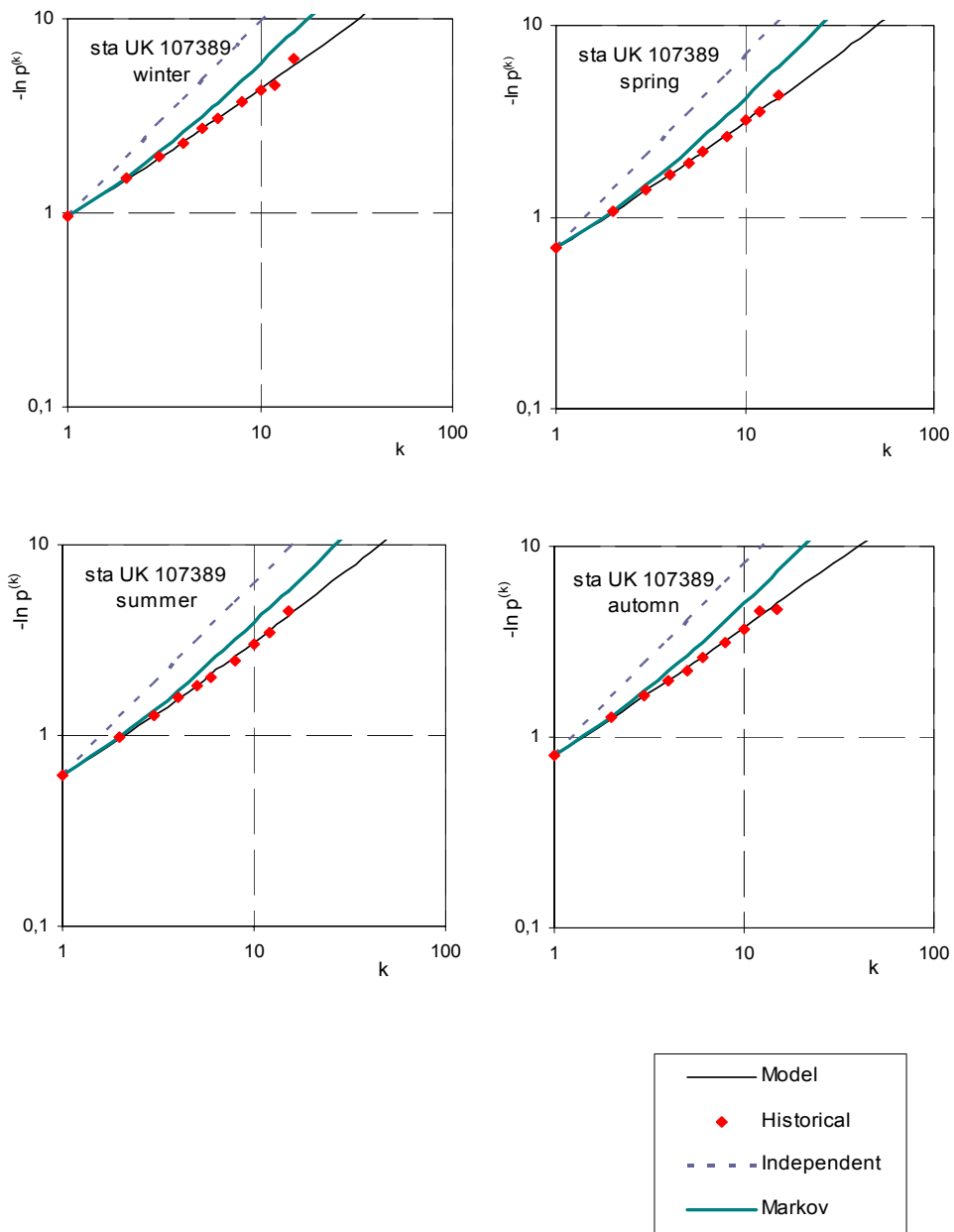
6. Τα διαγράμματα των σταθμών Marseille στη Γαλλία, Firenze και Genova στην Ιταλία για τους 12 μήνες του έτους εμφανίζουν μια ενδιάμεση κατάσταση, με τα σημειοσύνολα των εμπειρικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$ άλλοτε να εκφράζουν σχέση Markov και άλλοτε όχι. Για τους ιταλικούς σταθμούς, η μέγιστη απόσταση του μοντέλου ανεξαρτησίας από το μοντέλο Markov εμφανίζεται το μήνα Νοέμβριο ενώ η ελάχιστη απόσταση εμφανίζεται τους μήνες Ιούλιο και Αύγουστο. Για το γαλλικό σταθμό οι αποστάσεις είναι μικρές, με τη μέγιστη να εμφανίζεται τον Ιανουάριο και την ελάχιστη τον Αύγουστο(Σχήμα 5.17).



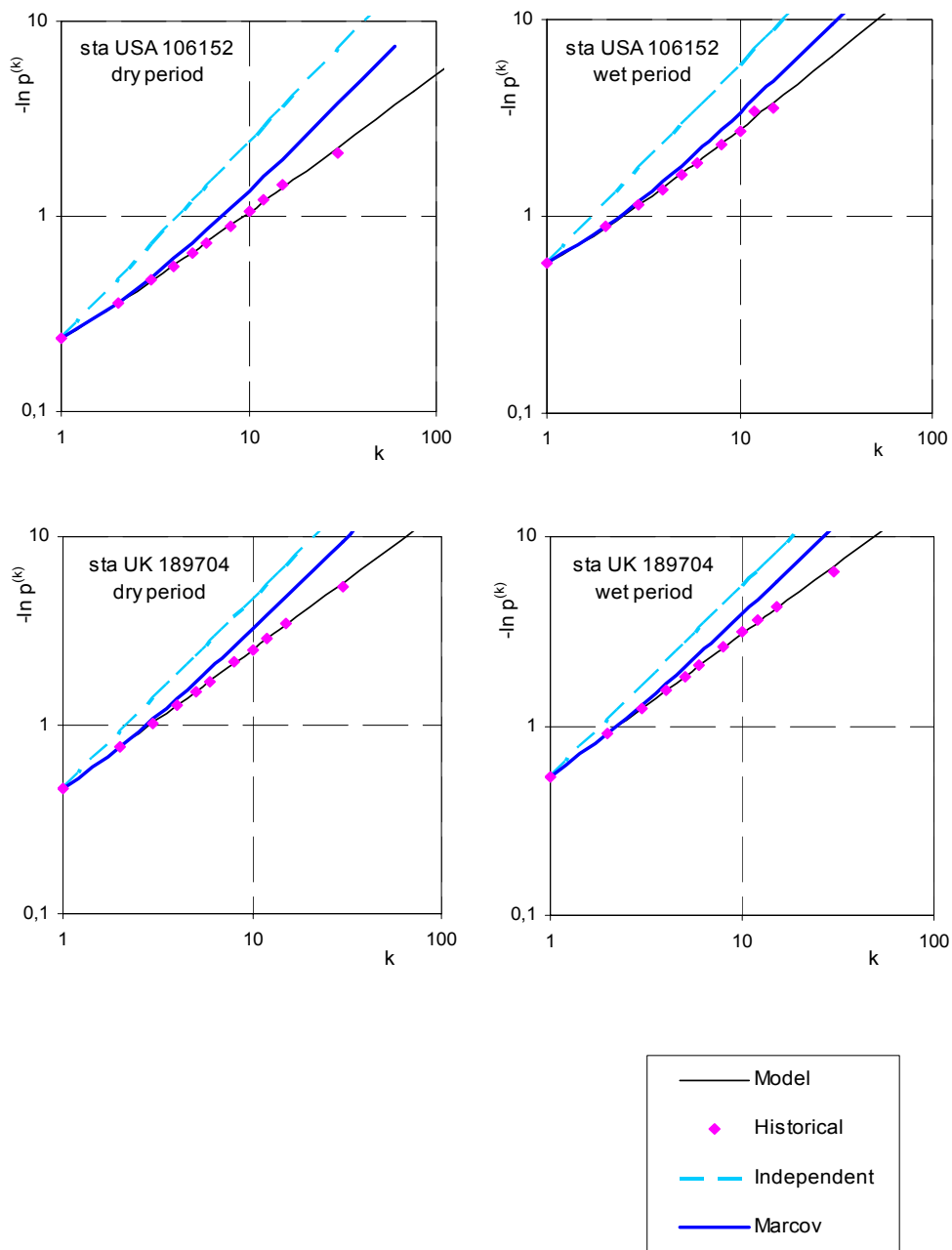
Σχήμα 5.17 Ενδεικτικά διαγράμματα για το μήνα Μάρτιο με δεδομένα από τον ιταλικό σταθμό στην πόλη Firenze και για το μήνα Σεπτέμβριο με δεδομένα από το γαλλικό σταθμό στην πόλη Marseille.

7. Τα διαγράμματα του μαθηματικού μοντέλου για τις τέσσερις εποχές του έτους, επιβεβαιώνουν τα εξαγόμενα συμπεράσματα από τα διαγράμματα για τους 12 μήνες του έτους. Τα σημειοσύνολα των εμπειρικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$ αποκλίνουν από το μοντέλο Markov στους αγγλικούς, τους ιταλικούς και το γαλλικό σταθμό, ενώ στους αμερικάνικους σταθμούς η μορφή των διαγραμμάτων ποικίλλει. Ενδεικτικά διαγράμματα απεικονίζονται στο σχήμα 5.18.

8. Τα διαγράμματα του μαθηματικού μοντέλου για την ξηρή και υγρή περίοδο του έτους όλων των σταθμών εμφανίζουν κοινή μορφή. Η καμπύλη που απεικονίζει την παραμετρική εξίσωση $p^{(k)}$ ταυτίζεται με την καμπύλη των ιστορικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$, γεγονός που επαληθεύει την επιτυχία του μαθηματικού μοντέλου. Τα σημειοσύνολα των εμπειρικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$ αποκλίνουν εμφανώς από το μοντέλο Markov για κλίμακες $k = 10$ (Σχήμα 5.19).



Σχήμα 5.18 Ενδεικτικά διαγράμματα των τεσσάρων εποχών με δεδομένα από τον αγγλικό σταθμό 107389 CHATSWORTH. Επαλήθευση του μαθηματικού μοντέλου.



Σχήμα 5.1. Ενδεικτικά διαγράμματα των δύο περιόδων του έτους (ξηρής και υγρής) με δεδομένα από τον αγγλικό σταθμό 180704 STRETHAM. Επαλήθευση του μαθηματικού μοντέλου.

Το σύνολο των διαγραμμάτων και οι αντίστοιχοι πίνακες των πιθανοτήτων $p^{(k)}$ των 28 σταθμών για τις χρονοσειρές όλου του έτους, των 12 μηνών, των εποχών και της ξηρής και υγρής περιόδου του έτους παρατίθενται στο Παράρτημα.

6 Επιχειρησιακή Χρήση

6.1 Εξαγωγή πιθανοτήτων για μοντέλο δυαδικής ανέλιξης τάξης 7

Η διαδικασία παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών από ένα στοχαστικό μοντέλο εξασφαλίζει τη διατήρηση μιας ιδιότητας ή ενός στατιστικού χαρακτηριστικού κοινού με την ιστορική χρονοσειρά. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, παράγονται συνθετικές ημερήσιες δυαδικές χρονοσειρές βροχόπτωσης για τους μήνες Μάρτιο και Ιούνιο και τις εποχές χειμώνα και άνοιξη, με διατήρηση της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας τάξης 8 της ιστορικής χρονοσειράς \mathbf{p}_8 ή του διανύσματος των αντίστοιχων δεσμευμένων πιθανοτήτων $\mathbf{\pi}_8$. Για την παραγωγή των συνθετικών χρονοσειρών χρησιμοποιείται μοντέλο δυαδικής ανέλιξης τάξης 7 (μη Markov), όπου η πιθανότητα μετάβασης σε ένα επόμενο διάστημα εξαρτάται από την αλληλουχία των προηγούμενων 7 διαστημάτων. Κάθε διάστημα λαμβάνει την τιμή 0 (ξηρό) ή 1 (υγρό).

Η παραδοχή τάξης 7 του μοντέλου αλληλουχίας δυαδικής ανέλιξης ή ισοδύναμα η παραδοχή διανύσματος πιθανοτήτων \mathbf{p}_8 , όπου $q = 8$ διαδοχικά διαστήματα, καθορίστηκε από την τεχνική δυνατότητα των υπολογιστικών μέσων που χρησιμοποιήθηκαν εξαιτίας της αναδρομικής εφαρμογής του μοντέλου. Συγκεκριμένα, για $q = 8$ προκύπτουν $2^8 = 256$ δυνατοί συνδυασμοί αλληλουχιών διαδοχικών διαστημάτων. Είναι φανερό, ότι η αύξηση του q κατά μία μονάδα κάθε φορά συνεπάγεται γεωμετρική αύξηση του συνόλου των δυνατών συνδυασμών γεγονός που οδηγεί σε διανύσματα ιδιαίτερα μεγάλου μεγέθους και δυσκολεύει την υπολογιστική διαδικασία. Για την αποφυγή ενός αυξημένου αριθμού δυνατών συνδυασμών επιλέγεται $q = 8$ που όπως θα δειχθεί στη συνέχεια προσδίδει ικανοποιητική αξιοπιστία στα εξαγόμενα αποτελέσματα.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή συνθετικών δυαδικών χρονοσειρών προέρχονται από τις χρονοσειρές βροχόπτωσης του αγγλικού σταθμού 107389 CHATSWORTH για τους μήνες Μάρτιο και Ιούνιο και για τις εποχές χειμώνα και καλοκαίρι.

Σε πρώτο στάδιο, εξάγονται οι πιθανότητες p_8 και αντίστοιχα οι δεσμευμένες πιθανότητες π_8 με την εφαρμογή του μοντέλου δυαδικής ανέλιξης τάξης 7. Θεωρείται ημερήσια κλίμακα¹ και καθορίζονται οι παράμετροι του μοντέλου.

Προσδιορίζονται οι απαιτούμενες παράμετροι του μοντέλου s , n , p και ξ . Θεωρούνται οι παράμετροι $s=0$ και $p=p^{(1)}$ όπου $p^{(1)}$ η εμπειρική πιθανότητα ένα διάστημα μίας ημέρας να είναι ξηρό και στη συνέχεια με τη διαδικασία της βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκε στην ενότητα 5.4 προσδιορίζονται οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων n και ξ οι οποίες φαίνονται στον πίνακα του σχήματος 6.1

sta UK 107389	March	June	winter	spring
s	0	0	0	0
n	0,6492	0,6574	0,7106	0,7196
p	0,4482	0,5629	0,3834	0,4996
ξ	0,5732	0,6115	0,6513	0,6553

Σχήμα 6.1 Τιμές των παραμέτρων του μοντέλου δυαδικής ανέλιξης τάξης 7 που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή συνθετικών δυαδικών χρονοσειρών για τους μήνες Μάρτιο, Ιούνιο και τις εποχές χειμώνα και καλοκαίρι.

Οι σχέσεις (30), (33) και (35) που εκφράζουν το προτεινόμενο μοντέλο (ενότητα 3) είναι:

$$-\ln p^{(k)} = -\ln p [1 + (\xi^{-1/n} - 1) (k - 1)]^n$$

$$p_{0x0} + p_{0x1} = p_{0x}$$

$$p_{1x0} + p_{1x1} = p_{1x}$$

$$p_{0x0} + p_{1x0} = p_{x0}$$

$$p_{0x1} + p_{1x1} = p_{x1}$$

$$\pi_i |_{x_j} = \pi_i |_x$$

Οι σχέσεις (30), (33) και (35) εφαρμόζονται με τρόπο ώστε δοσμένων των τεσσάρων παραμέτρων να υπολογίζεται αναδρομικά το διάνυσμα των πιθανοτήτων των 256

¹ Δύναται να θεωρηθεί οποιαδήποτε κλίμακα k . Η επιλογή κλίμακας καθορίζει τις παραμέτρους, π.χ. για κλίμακα $k=2$ τότε ως παράμετροι, θα λαμβάνονταν οι s , n , $p^{(2)}$ και $p^{(4)}$.

δυνατών αλληλουχιών των οχτώ διαστημάτων, \mathbf{p}_8 , καθώς και το διάνυσμα των αντίστοιχων δεσμευμένων πιθανοτήτων, $\boldsymbol{\pi}_8$.

Δηλαδή, αρχικά υπολογίζεται το διάνυσμα $\mathbf{p}_1 = [p_0, p_1]$, στη συνέχεια τα διανύσματα $\mathbf{p}_2 = [p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}]$ και $\boldsymbol{\pi}_2 = [\pi_{0|0}, \pi_{0|1}, \pi_{1|0}, \pi_{1|1}]$, ακολουθούν τα $\mathbf{p}_3 = [p_{000}, p_{001}, p_{010}, p_{011}, p_{100}, p_{101}, p_{110}, p_{111}]$ και $\boldsymbol{\pi}_3 = [\pi_{0|00}, \pi_{0|01}, \pi_{0|10}, \pi_{0|11}, \pi_{1|00}, \pi_{1|01}, \pi_{1|10}, \pi_{1|11}]$ κ.ο.κ. έως τον υπολογισμό των \mathbf{p}_8 και $\boldsymbol{\pi}_8$. Ο πίνακας με τις εξαγόμενες πιθανότητες \mathbf{p}_8 και $\boldsymbol{\pi}_8$ παρατίθεται στο Παράρτημα.

6.2 Χρήση του μοντέλου για παραγωγή συνθετικών δυαδικών χρονοσειρών (τεχνική Monte Carlo)

Οι παραγόμενες συνθετικές χρονοσειρές έχουν οποιοδήποτε επιθυμητό χρονικό μήκος και ίση πιθανότητα να συμβούν (ισοπίθανες). Η διαδικασία παραγωγής είναι αναδρομική. Για κάθε τιμή της χρονοσειράς που παράγεται (0 ή 1) λαμβάνονται υπόψη οι 7 προηγούμενες τιμές (διαστήματα).

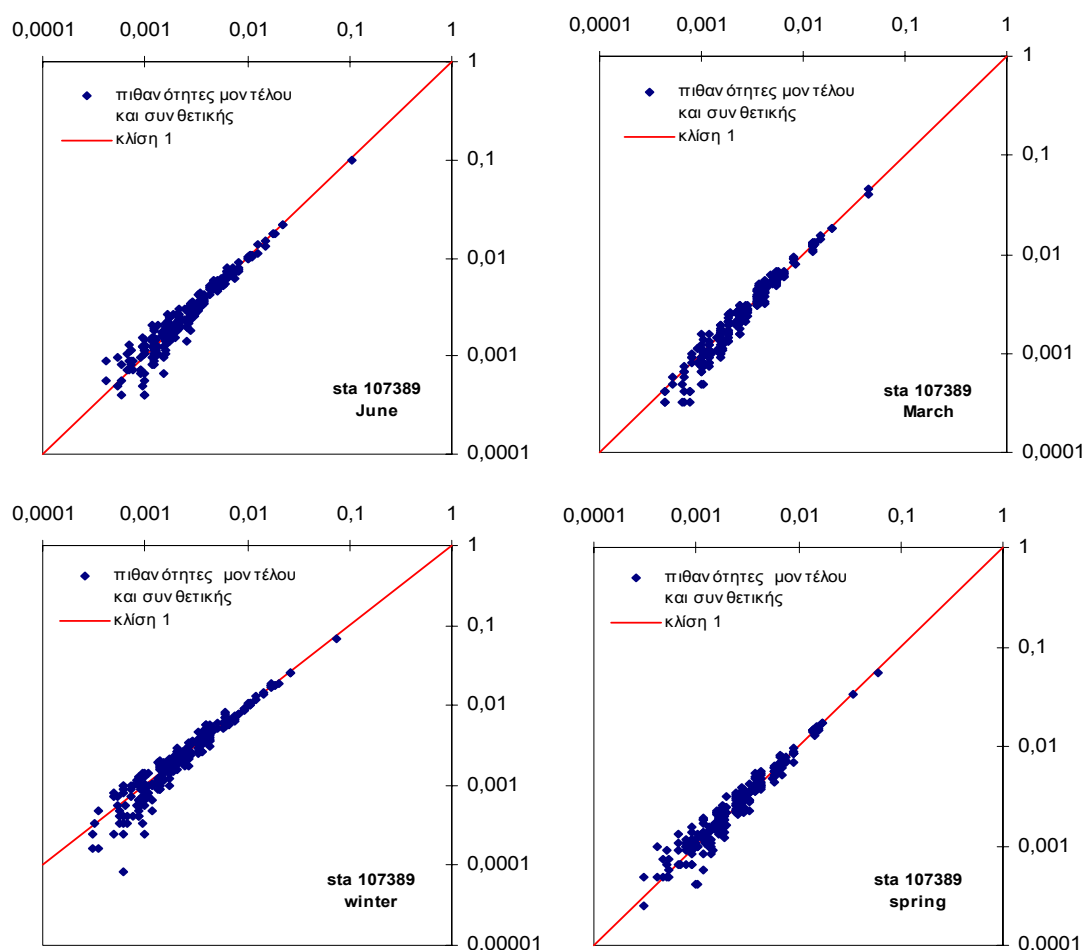
Για την εκκίνηση της διαδικασίας γένεσης τυχαίων τιμών, 0 ή 1, είναι απαραίτητη η εισαγωγή μιας αρχικής αλληλουχίας 7 διαστημάτων (σπόρος). Αρχικά, θεωρούμε για παράδειγμα 7 διαδοχικά ξηρά διαστήματα. Με δεδομένα τα 7 προηγούμενα διαδοχικά διαστήματα αναζητείται η δεσμευμένη πιθανότητα για μετάβαση σε ένα επόμενο (στο 8^ο) ξηρό διάστημα.. Η τιμή της δεσμευμένης πιθανότητας $\pi_{0|w}$ όπου $w = j_1, j_2, \dots, j_7$ η αλληλουχία των προηγούμενων 7 διαστημάτων είναι γνωστή από το διάνυσμα $\boldsymbol{\pi}_8$ που υπολογίστηκε σε προηγούμενο στάδιο.

Γεννιέται τυχαίος αριθμός ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα (0,1) και συγκρίνεται με τη δεσμευμένη πιθανότητα $\pi_{0|w}$. Αν ο τυχαίος αριθμός είναι μεγαλύτερος της $\pi_{0|w}$ τότε εκφράζει ξηρό διάστημα και λαμβάνει την τιμή 0, αλλιώς λαμβάνει την τιμή 1 (υγρό διάστημα). Η διαδικασία συνεχίζεται αναδρομικά, με την παραγωγή επόμενης τιμής δοσμένων των προηγούμενων 7 τιμών, έως ότου να

παραχθεί δυαδική χρονοσειρά ικανοποιητικού μήκους. Οι πρώτες 100 παραγόμενες τιμές λαμβάνονται «για προθέρμανση» και αμελούνται.

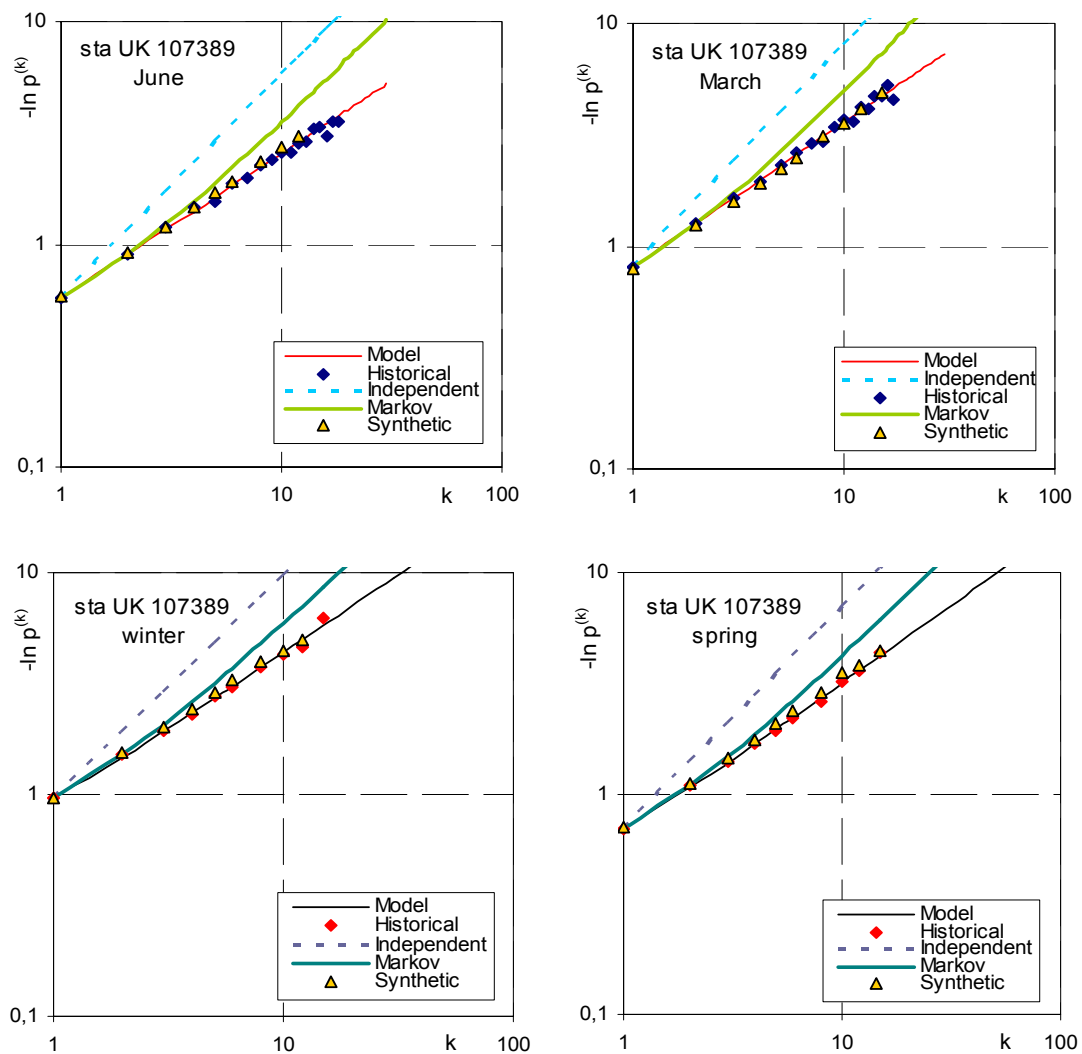
6.3 Έλεγχος αποτελεσμάτων

Παράχθηκαν οι συνθετικές μηνιαίες δυαδικές χρονοσειρές για τους μήνες Ιούνιο και Μάρτιο και τις εποχές χειμώνα και καλοκαίρι μήκους 10000 τιμών. Συγκρίνονται οι πιθανότητες p_8 των παραγόμενων συνθετικών χρονοσειρών με τις πιθανότητες p_8 του μοντέλου δυαδικής ανέλιξης που εφαρμόστηκε και συμπεραίνεται ικανοποιητική προσέγγιση. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης φαίνονται στα διαγράμματα του σχήματος 6.2.



Σχήμα 6.2 Ικανοποιητική προσέγγιση των πιθανοτήτων p_8 της συνθετικής χρονοσειράς και των πιθανοτήτων του μοντέλου δυαδικής ανέλιξης τάξης 7.

Ακόμα, συγκρίνονται οι πιθανότητες $p^{(k)}$ αλληλουχίας ξηρών διαστημάτων των συνθετικών χρονοσειρών για κλίμακα συνάθροισης k με τις εμπειρικές πιθανότητες $p^{(k)}$ και το μαθηματικό μοντέλο. Είναι εμφανής η ταύτιση των πιθανοτήτων $p^{(k)}$ των συνθετικών χρονοσειρών με τις εμπειρικές πιθανότητες $p^{(k)}$ καθώς και με την καμπύλη που εκφράζει το μοντέλο δυαδικής ανέλιξης. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης φαίνονται στα διαγράμματα του σχήματος 6.3.



Σχήμα 6.3 Ταύτιση των πιθανοτήτων της συνθετικής χρονοσειράς με τις εμπειρικές πιθανότητες και το μαθηματικό μοντέλο.

7 Συμπεράσματα

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε ένα στοχαστικό μοντέλο γενικευμένης δυαδικής ανέλιξης τάξης μη Markov που εξασφαλίζει τη διατήρηση της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας θεωρητικά οποιασδήποτε τάξης της ιστορικής χρονοσειράς.

Το μοντέλο εφαρμόστηκε στις χρονοσειρές όλου του έτους, τις μηνιαίες χρονοσειρές, τις εποχιακές χρονοσειρές και τις χρονοσειρές υγρής και ξηρής περιόδου του έτους 28 σταθμών εγκατεστημένων στις Η.Π.Α, την Αγγλία, τη Γαλλία και την Ιταλία. Για τις χρονοσειρές αυτές εκτιμήθηκαν οι πιθανότητες ακολουθίας ξηρών διαστημάτων από το προτεινόμενο μοντέλο και συγκρίθηκαν μέσω διαγραμμάτων με τις εξαγόμενες εμπειρικές πιθανότητες και τις πιθανότητες από το μοντέλου Markov και το ανεξάρτητο μοντέλο.

- Γενικό συμπέρασμα αποτελεί η επαλήθευση του μοντέλου. Συνολικά μελετήθηκαν 400 χρονοσειρές. Σε όλες τις περιπτώσεις, το μοντέλο προσεγγίζει με ικανοποιητική ακρίβεια τα εμπειρικά δεδομένα. Η επαλήθευση είναι εμφανής στο σύνολο των διαγραμμάτων που παρατίθενται στο παράρτημα. Ακόμα, η προσέγγιση του μοντέλου γενικευμένης δυαδικής ανέλιξης είναι καλύτερη από εκείνη του μοντέλου Markov.
- Το προτεινόμενο μοντέλο επιτυγχάνει να εκφράζει τη μακροπρόθεσμη εμμονή μέσω μιας παραμέτρου n αντίστοιχης με το συντελεστή Hurst. Στην περίπτωση του συντελεστή Hurst, η μακροπρόθεσμη εμμονή αντιστοιχεί στην τιμή $H > 0,5$ έως 1 ενώ, η ανεξαρτησία αντιστοιχεί στην τιμή $H = 0,5$. Κατά αναλογία με το συντελεστή Hurst, η παράμετρος n είναι μια θετική σταθερά που λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$. Για τιμές της παραμέτρου $n < 1$ έως 0 υποδεικνύεται εμμονή μακράς κλίμακας ενώ, πλήρους ανεξαρτησίας υποδεικνύεται για $n = 1$.

- Συνολικά, το μοντέλο εκφράζεται μόνο με τέσσερις παραμέτρους - s , n , p , και ξ - εκ των οποίων οι δύο είναι γνωστές $s = 0$ και $p = p^{(1)}$ (η πιθανότητα ένα διάστημα να είναι ξηρό). Η εκτίμηση των υπόλοιπων παραμέτρων επιτυγχάνεται με μια απλή διαδικασία βελτιστοποίησης. Συνεπώς το μοντέλο κρίνεται απλό στην εφαρμογή.
- Το μοντέλο χαρακτηρίζεται από ευελιξία περιγράφοντας μεγάλο φάσμα στοχαστικών εξαρτήσεων, από πλήρη ανεξαρτησία έως μακροπρόθεσμη εμμονή, ενώ η εξάρτηση Markov αποτελεί ειδική περίπτωση.
- Το θεωρητικό υπόβαθρο του μοντέλου προϋποθέτει τη διατήρηση της στασιμότητας, συνεπώς, το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε υδρολογικά ομογενείς χρονοσειρές όπως είναι οι μηνιαίες και οι εποχιακές.
- Ειδικότερα, από την εφαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα των 28 σταθμών συμπεραίνονται τα εξής: Για τους αγγλικούς σταθμούς, στην πλειονότητα των περιπτώσεων, αποδεικνύεται μια ισχυρότερη αυτοσυσχέτιση από εκείνη του μοντέλου Markov. Αντίθετα, στους αμερικάνικους, τους ιταλικούς και το γαλλικό σταθμό, σε ένα μεγάλο αριθμό περιπτώσεων, η σχέση εξάρτησης είναι Markov.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του μοντέλου είναι ικανοποιητικά.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Κάκουλλος, Θ. Ν. (1978) *Στοχαστικές Ανελιξίες*, Αθήνα.
- Κουτσογιάννης, Δ. (1988) *Μοντέλο επιμερισμού σημειακής βροχόπτωσης*, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ, Τομέας Υδατικών Πόρων – Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων, Αθήνα.
- Κουτσογιάννης, Δ. (1997) *Στατιστική Υδρολογία*, Έκδοση 4, ΕΜΠ, Αθήνα.
- Κουτσογιάννης, Δ. & Ξανθόπουλος, Θ., (1999) *Τεχνική Υδρολογία*, Έκδοση 3, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο – Τομέας Υδατικών Πόρων, Αθήνα.
- Μιμίκου, Μ. (1985) *Στοχαστική Υδρολογία*, Κατά τις Παραδόσεις στον Τομέα Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ, Αθήνα.
- Μιμίκου, Μ.Α. (1994) *Τεχνολογία Υδατικών Πόρων*, β' Έκδοση, Α. Παπαπασωτηρίου & ΣΙΑ Ο.Ε., Αθήνα.
- Box, G.E.P. & G.M. (1970) *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden – Day, San Francisco, California, U.S.A.
- Chin, E. H., (1977) *Modeling daily precipitation occurrence process with Markov chains*, Water Resour. Res., 13(6), 956-959.
- Clarke, R.T., (1998) *Stochastic Processes for Water Scientists, Developments and Applications*, Willey, New York.
- Entekhabi, D., I. Rodriguez-Iturbe and P. S. Eagleson, (1989) *Probabilistic representation of the temporal rainfall process by the modified Newman-Scott rectangular pulses model: Parameter estimation and validation*, Water Resour. Res., 25(2), 295-302.
- Feyerhem, A. M., and L. D. Bark, (1964) *Statistical methods for persistent precipitation patterns*, J. Appl. Meteorol., 4, 320-328.
- Foufoula-Georgiou, E., and P. Guttorp, (1986) *Compatibility of continuous rainfall occurrence models with discrete rainfall observations*, Water Resour. Res., 22(8), 1316-1322.
- Gabriel, K. R., and J. Neumann, (1962) *A Markov chain model for daily rainfall occurrences at Tel Aviv*, Royal Meteorol. Soc. Quart. J., 88, 90-95.

- Haan, C. T., D. M. Allen, and J. O. Street, (1976) *A Markov chain model of daily rainfall*, Water Resour. Res., 12(3), 443-449.
- Haan, C.T., (1977) *Statistical Methods in Hydrology*, Iowa State University Press, Ames Iowa.
- Harrold, T. I., A. Sharma, and S. J. Sheather, (2003) *A nonparametric model for stochastic generation of daily rainfall occurrence*, Water Resour. Res., 39(10), 1300.
- Hershfield, D. M., (1970) *A comparison of conditional and unconditional probabilities for wet- and dry-day sequences*, J. Appl. Meteorol., 9(5), 825-827.
- Hutchinson, M. F., (1990) *A point rainfall model based on a three-state continuous Markov occurrence process*, J. of Hydrol., 114, 125-148.
- Kanvas, M. L., and J. W. Delleur, (1981) *A stochastic cluster model of daily rainfall sequences*, Water Resour. Res., 17(4), 1151-1160.
- Katz, R. W., and M.B. Parlange, (1998) *Overdispersion Phenomenon in Stochastic Modeling of Precipitation*, J. Climate, 11, 591-601.
- Kottegoda, N. T., and Horder, M. A., (1980) *Daily flow model based on rainfall occurrences using pulses and a transfer function*, J. of Hydrol., 47, 215-234.
- Koutsoyiannis, D. (2002) *The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy*, Hydrological Sciences-Journal-des Sciences Hydrologiques, 47(4), 573-595.
- Koutsoyiannis, D. (2004a) *Statistics of extremes and estimation of extreme rainfall, 1, Theoretical investigation*, Hydrological Sciences-Journal-des Sciences Hydrologiques 49(4), 591-610.
- Koutsoyiannis, D. (2004b) *Statistics of extremes and estimation of extreme rainfall, 2, Empirical investigation of long rainfall records*, Hydrological Sciences-Journal-des Sciences Hydrologiques 49(4), 591-610.
- Koutsoyiannis, D. (2005) *An entropic-stochastic representation of rainfall intermittency: The origin of clustering and persistence*, Water Resour.
- Mimikou, M., (1983) *Daily precipitation occurrences modeling with Markov chain of seasonal order*, Hydrol. Sc. J. 28, 2, 6, 221-232.
- Mimikou, M., (1984) *A study for improving precipitation occurrences modeling with Markov chain of seasonal order*, Hydrol. Sc. J. 70, 25-33.

- Newman, J., and E. L. Scott, (1952) *A theory of the spatial distribution of galaxies*, Astrophysical Journal, 116, 1144-163.
- Onof, C. and H. S. Wheather, (1993) *Modelling of British rainfall using a Random Parameter Bartlett-Lewis Rectangular Pulse Model*, J. Hydrol., 149, 67-95.
- Onof, C. and H. S. Wheather, (1994) *Improvements to the modeling of British rainfall using a Modified Random Parameter Bartlett-Lewis Rectangular Pulses Model*, J. Hydrol., 157, 177-195.
- Onof, C., R. E. Chandler, A. Kakou, P. Northrop, H. S. Wheather, and V. Isham, (2000) *Rainfall modeling using Poisson-cluster processes: a review of developments*, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 14, 384-411.
- Papoulis, A., (1991) *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* (third edn), 57. McGraw-Hill, New York.
- Pegram, G. G. S., (1980) *An auto-regressive model for multi-lag Markov chains*, J. Appl. Prob., 17, 350-362.
- Pegram, G. G. S. and A. W. Seed, (1998) *The feasibility of stochastically modeling the spatial and temporal distribution of rainfields*, WRC Report No. 550/1/98 to the Water Research Commission, Pretoria, South Africa.
- Rodriguez-Iturbe, I., D. R. Cox, and V. Isham, (1987) *Some models for rainfall based on stochastic point process*, Proc. R. Soc. Lond., A 410, 269-298.
- Rodriguez-Iturbe, I., D. R. Cox, and V. Isham, (1988) *A point process model for rainfall: Further developments*, Proc. R. Soc. Lond., A 417, 283-298.
- Roldan, J., and D. A. Woolhiser, (1982) *Stochastic daily precipitation models*, 1, A comparison of occurrence processes, Water Resour. Res., 18(5), 1451-1459.
- Sharma, A., and R. O'Neill, (2002) *A nonparametric approach for representing interannual dependence in monthly streamflow sequences*, Water Resour. Res., 38(7), 1100.
- Shaw, E.M. (1994) *Hydrology in Practice*, Third Edition, Chapman & Hall, United Kingdom
- Todorovic, P., and D.A. Woolhiser, (1975) *A Stochastic Model of a n-day Precipitation*, J. Appl. Meteorol., 14, 17-24.

- Velghe, T., P. A. Troch, and J. Van de Velde, (1994) *Evaluation of cluster-based rectangular pulses point process models for rainfall*, Water Resour. Res., 30(10) 2847-2857.
- Verhoest, N., P. A. Troch, and F. P. De Troch, (1997) *On the application of Berlett-Lewis rectangular pulses models in the modeling of design storms at a point*, J. of Hydrol., 202, 108-120.
- Waymire, E., and V. K. Gupta, (1981b) *The mathematical structure of rainfall representations, 2, A review of the theory of point processes*, Water Resour. Res., 17(5), 1273-1285

Παράρτημα Α

Το Παράρτημα Α περιλαμβάνει το σύνολο των διαγραμμάτων για τους 28 υπό μελέτη σταθμούς. Τα διαγράμματα αποδεικνύουν την επαλήθευση του μοντέλου δυαδικής ανέλιξης μη Markov.

Σε κάθε διάγραμμα παρουσιάζονται συγκριτικά συναρτήσεις της κλίμακας k :

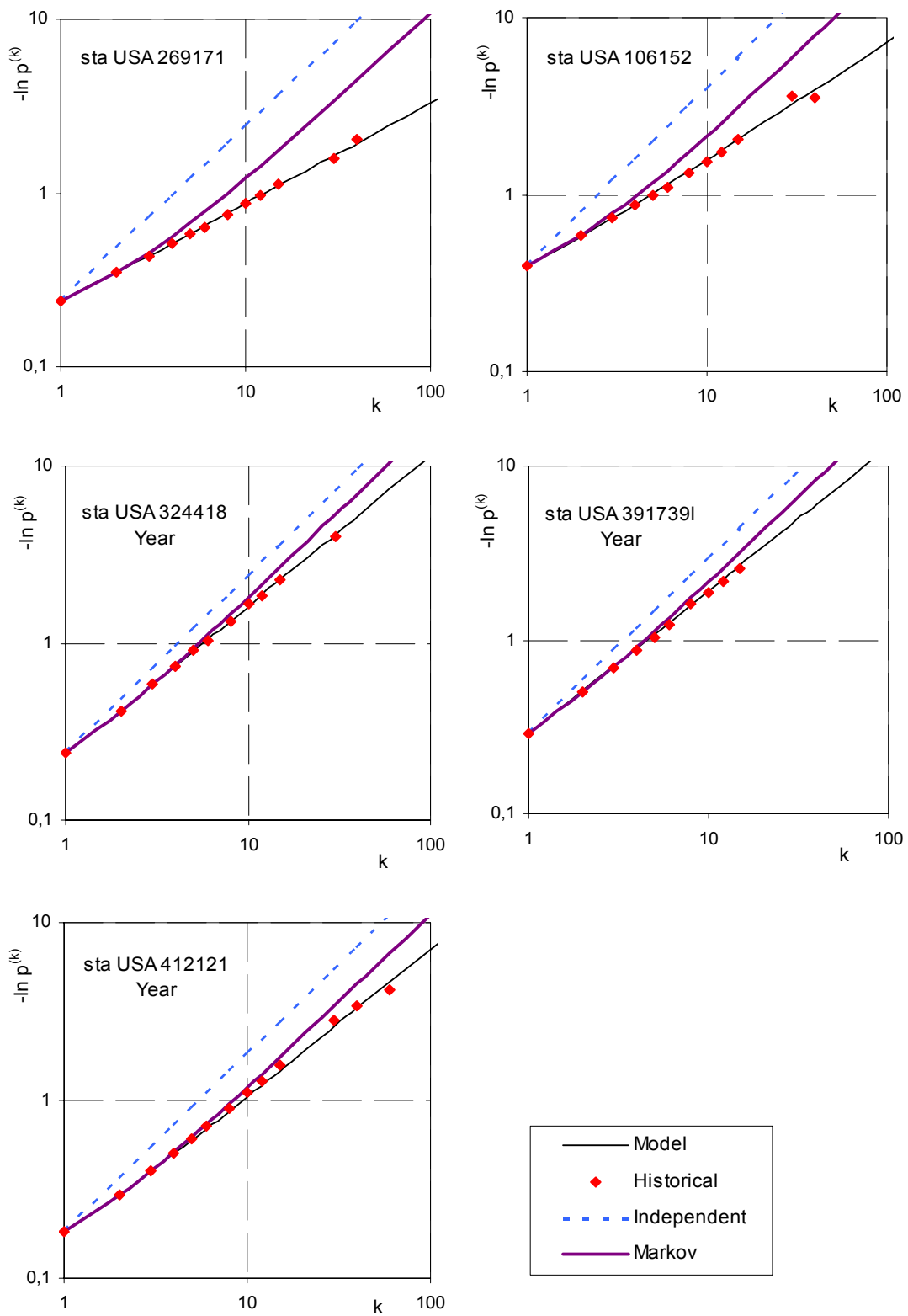
1. οι εμπειρικές πιθανότητες $p^{(k)}$ αλληλουχίας ξηρών διαστημάτων μήκους k , που εξάγονται από τα δεδομένα των ημερησίων υψών σημειακής βροχόπτωσης των 28 σταθμών.
2. οι πιθανότητες $p^{(k)}$ αλληλουχίας ξηρών διαστημάτων μήκους k , που εξάγονται από το Μαρκοβιανό μοντέλο.
3. οι πιθανότητες $p^{(k)}$ αλληλουχίας ξηρών διαστημάτων μήκους k , που εξάγονται από το μοντέλο ανεξαρτησίας.
4. οι πιθανότητες $p^{(k)}$ αλληλουχίας ξηρών διαστημάτων μήκους k , που εξάγονται από το προτεινόμενο μοντέλο δυαδικής ανέλιξης (μη Markov).

Στην ενότητα A1 παρουσιάζονται τα διαγράμματα που εξήχθησαν για τις χρονοσειρές όλου του έτους.

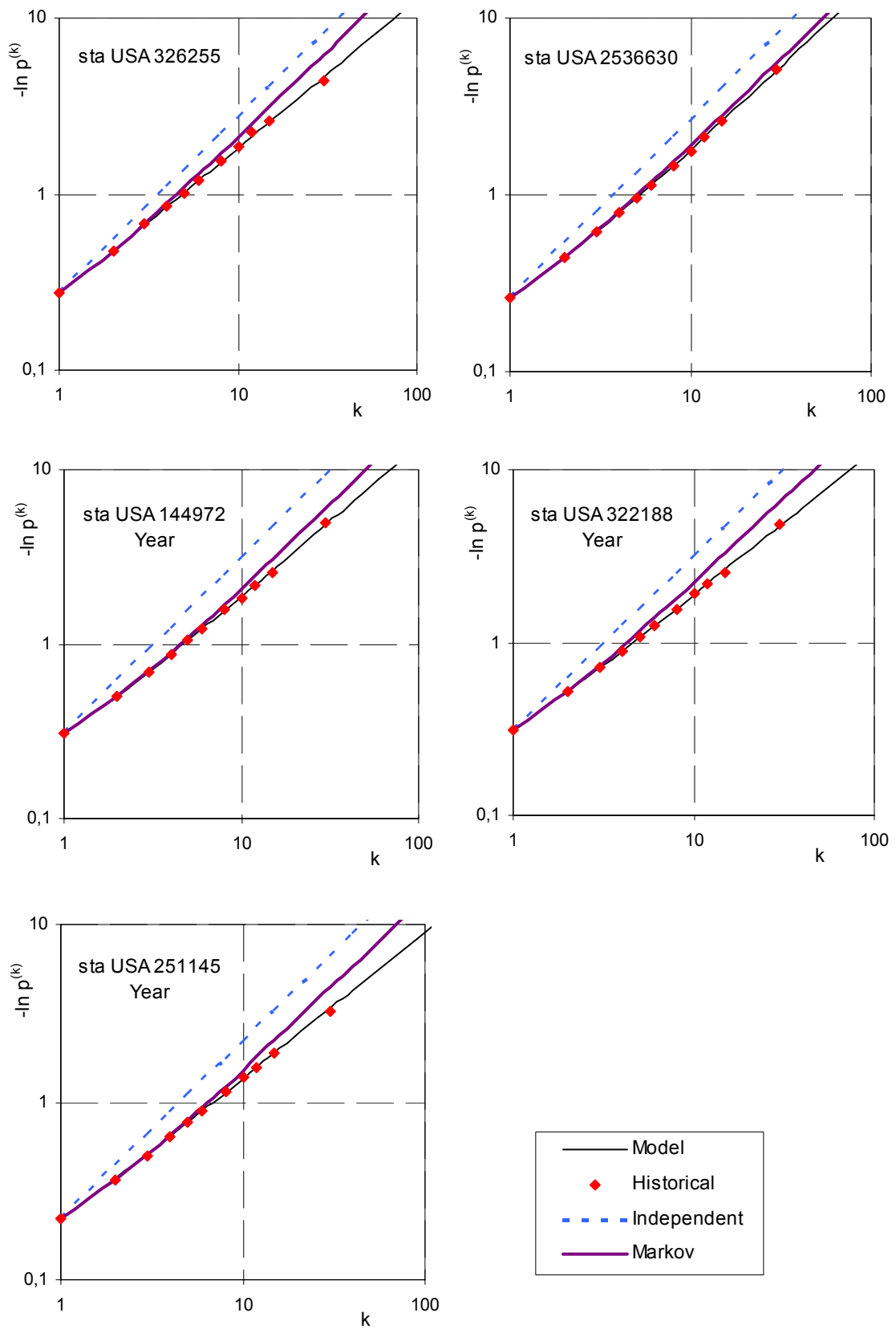
Στην ενότητα A2 παρουσιάζονται τα διαγράμματα που εξήχθησαν για τις εποχιακές χρονοσειρές, τις χρονοσειρές ξηρής και υγρής περιόδου του έτους και τα συγκριτικά διαγράμματα για τις εποχιακές χρονοσειρές και τις χρονοσειρές ξηρής και υγρής περιόδου.

Στην ενότητα A3, παρατίθενται τα διαγράμματα που κατασκευάστηκαν για τις μηνιαίες χρονοσειρές.

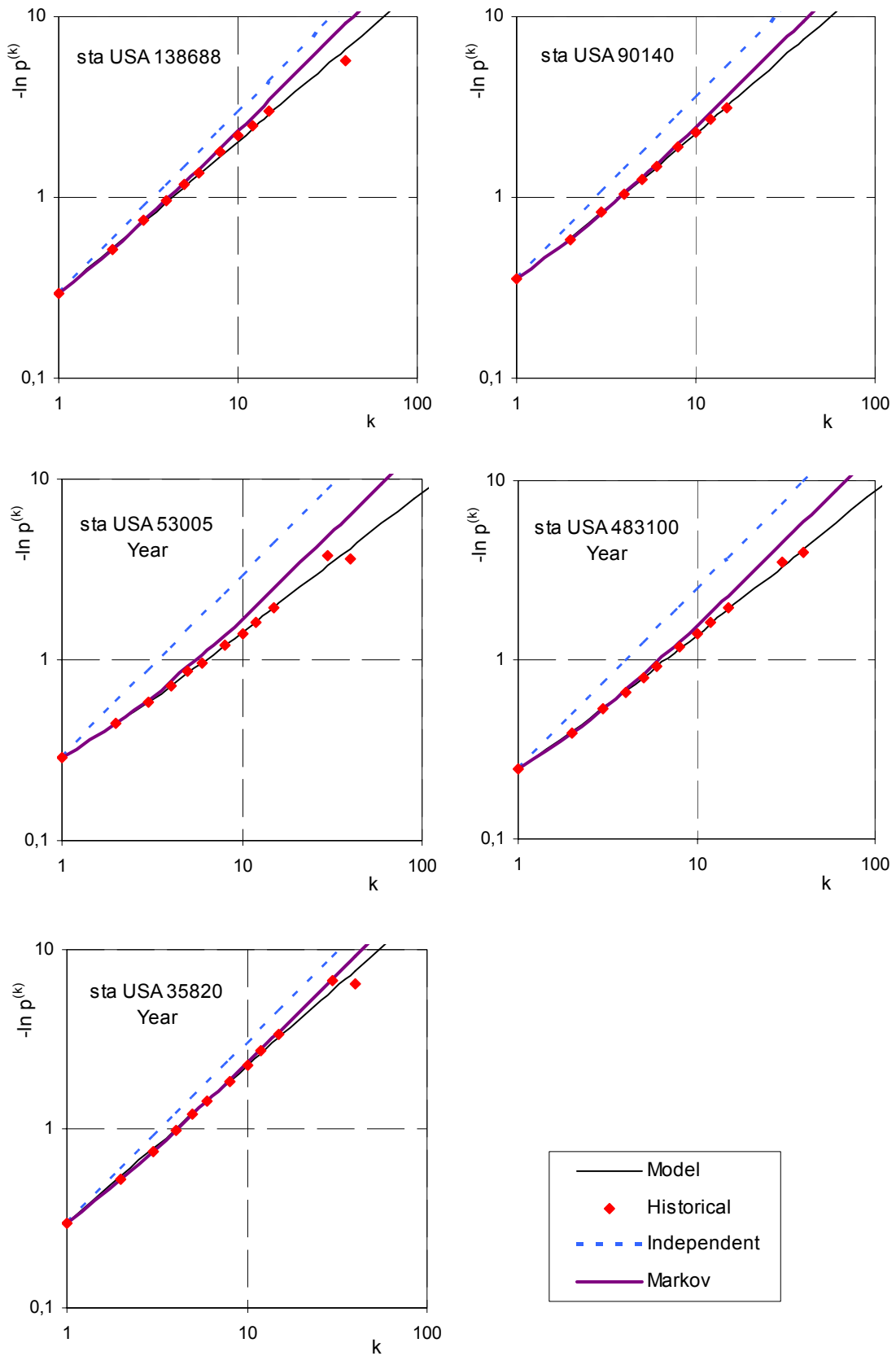
Παράρτημα A1



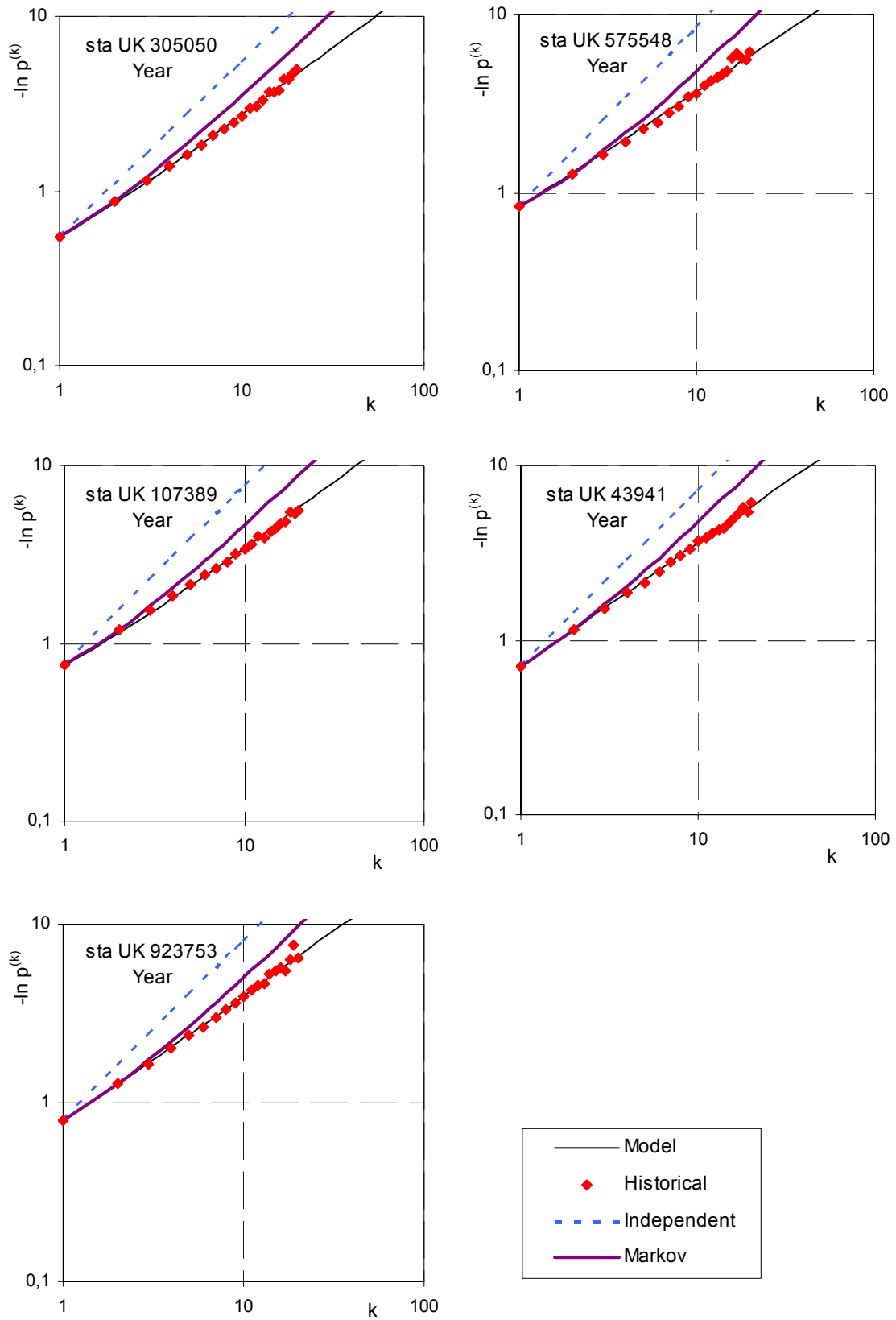
Σχήμα A.1



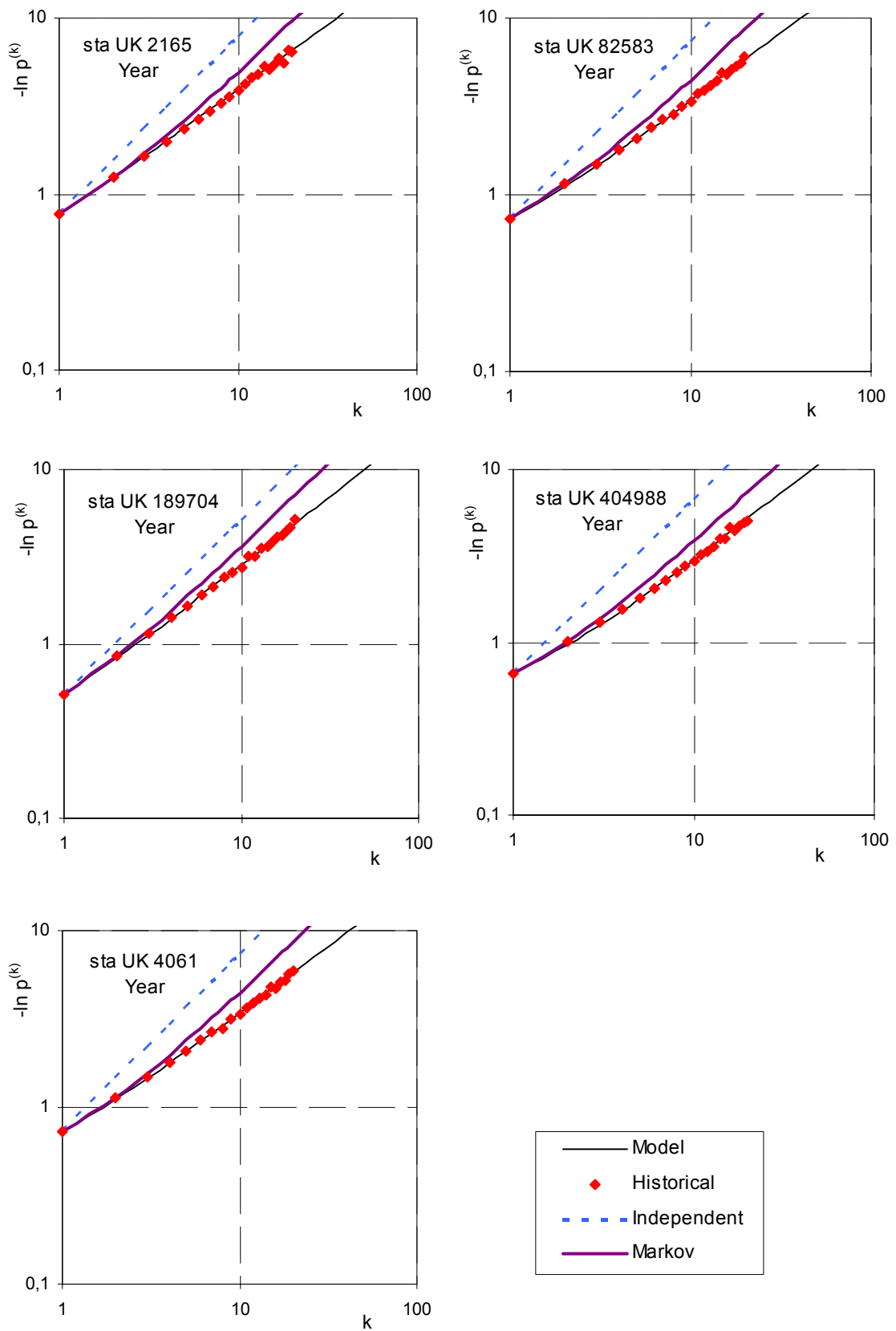
Σχήμα A.2



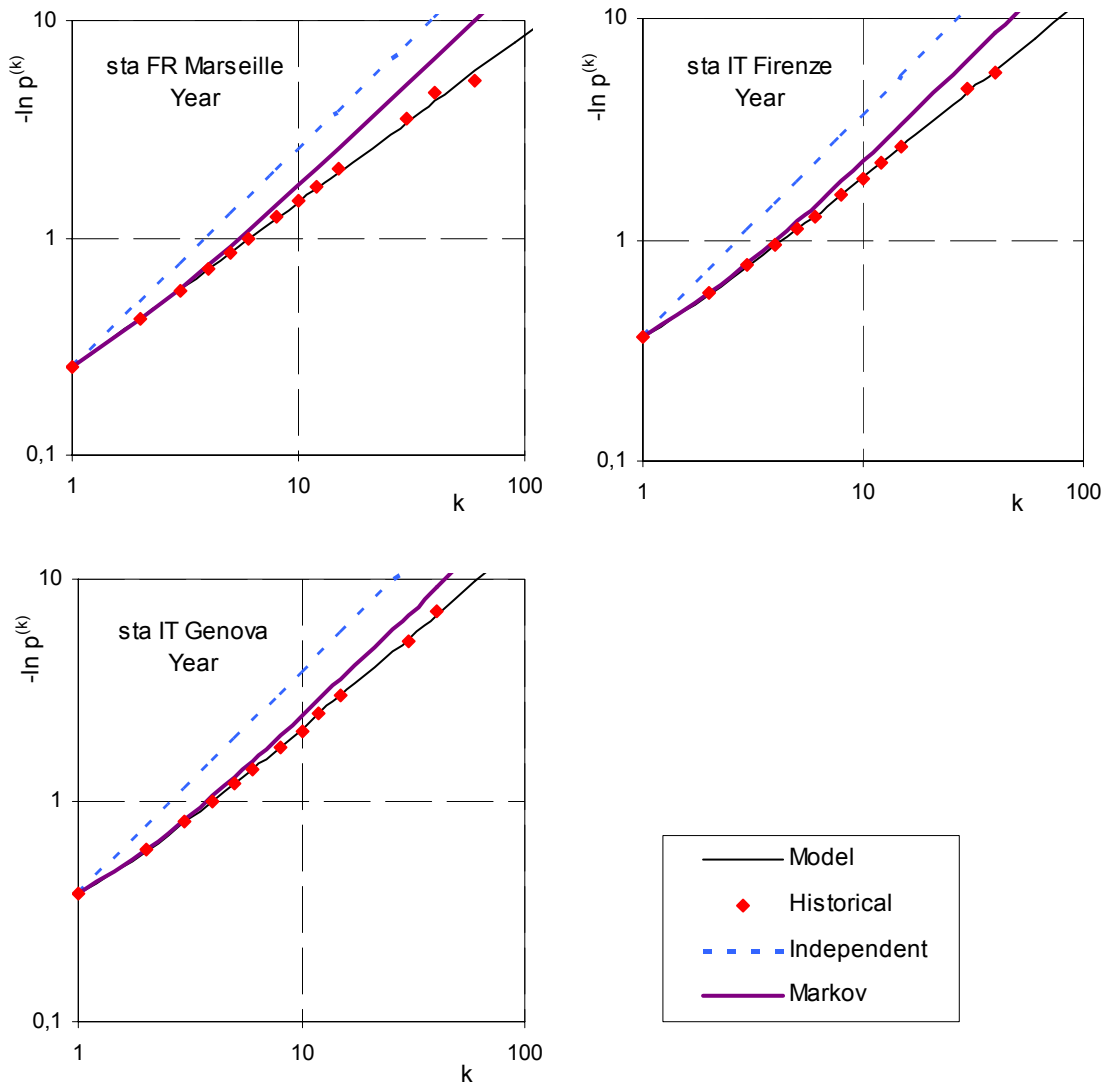
Σχήμα A.3



Σχήμα Α.4

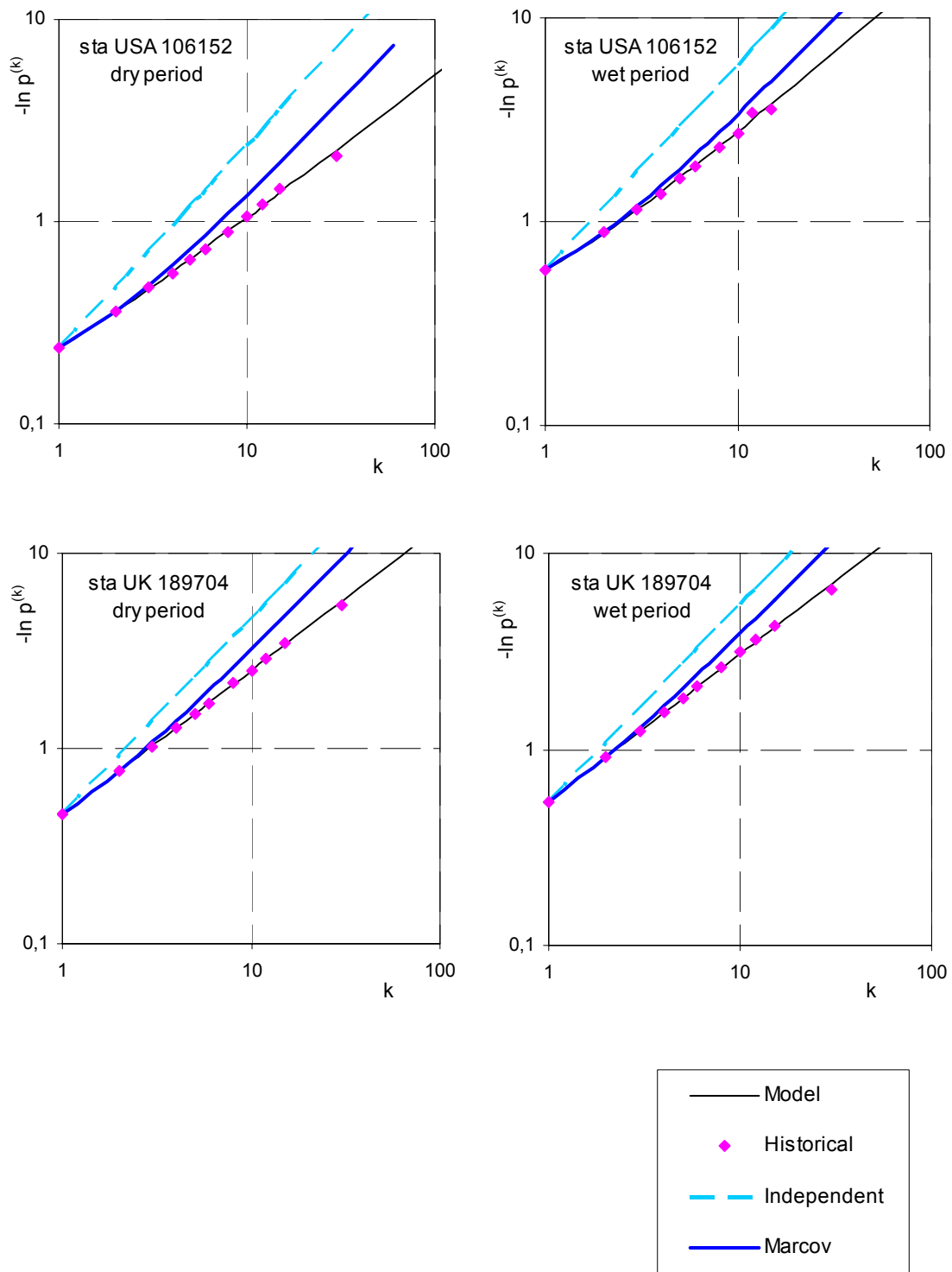


Σχήμα Α.5

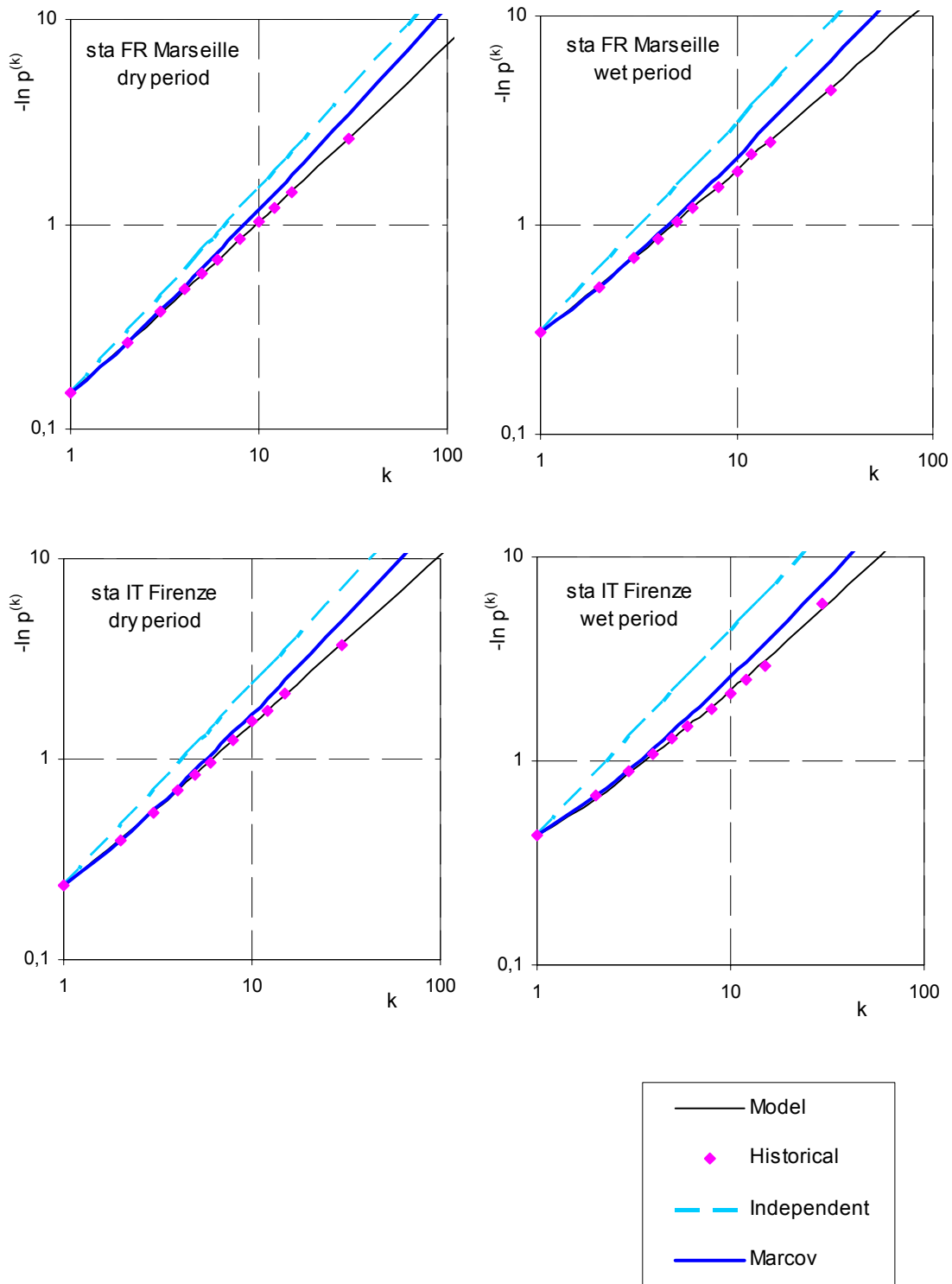


Σχήμα Α.6

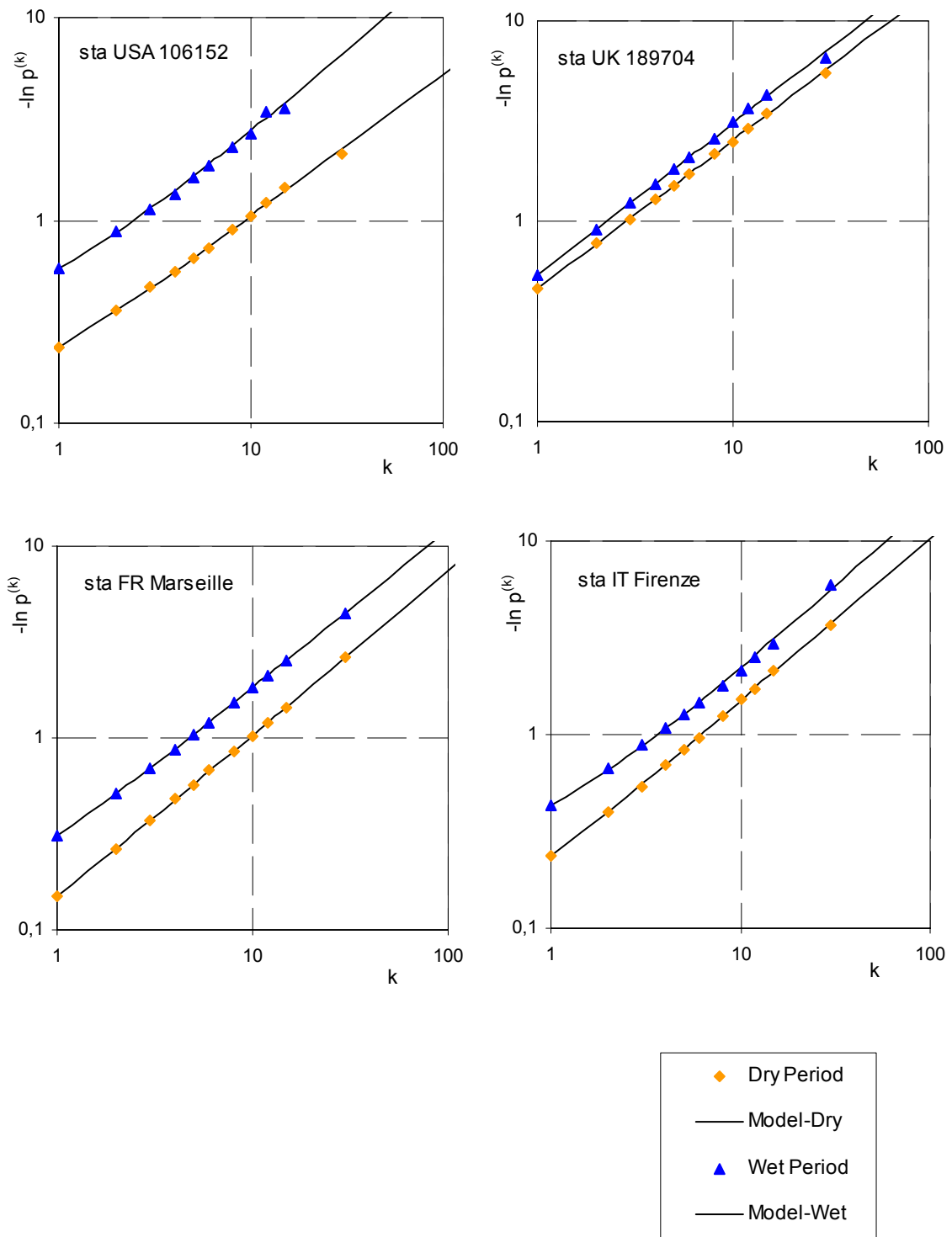
Παράρτημα A2



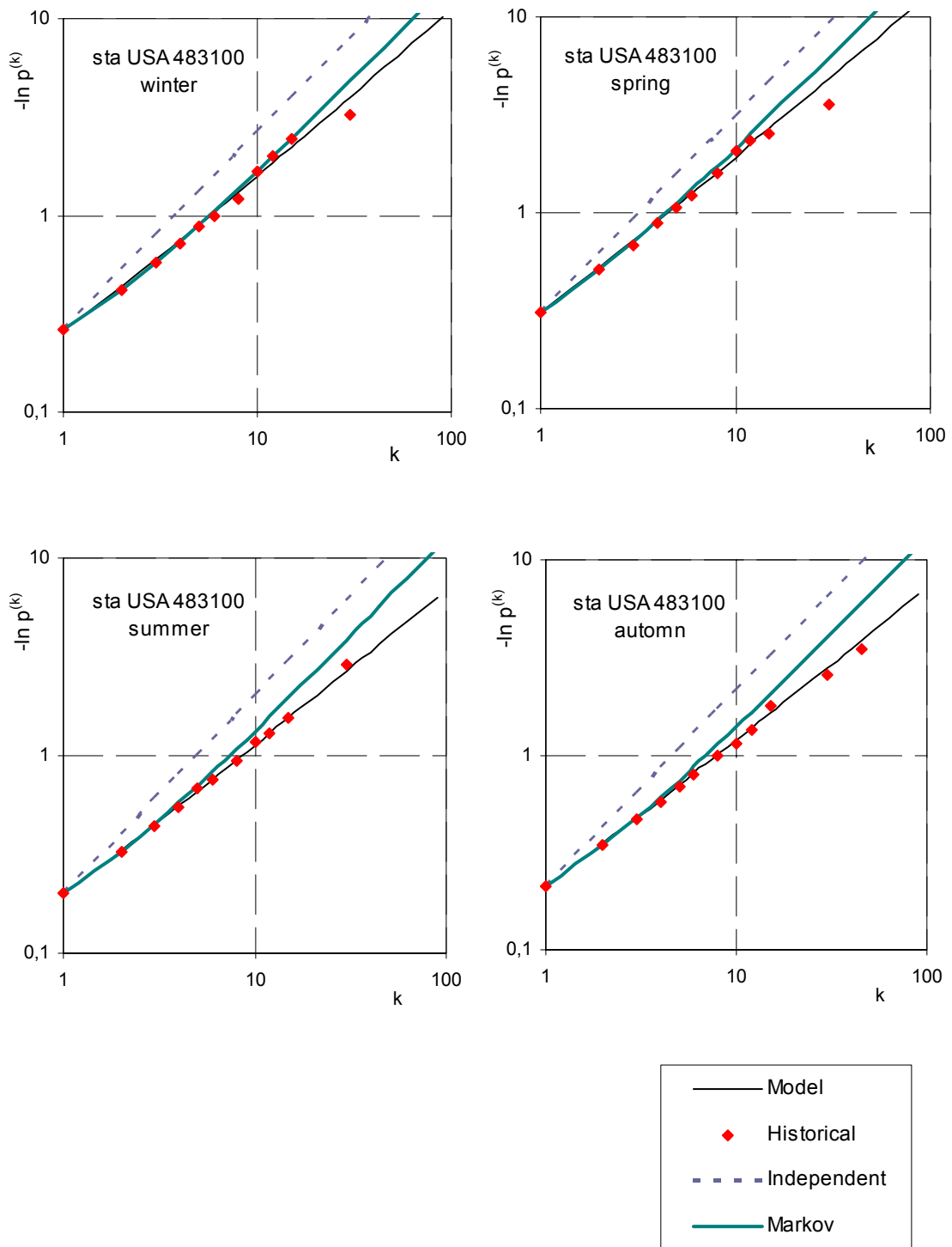
Σχήμα A.7



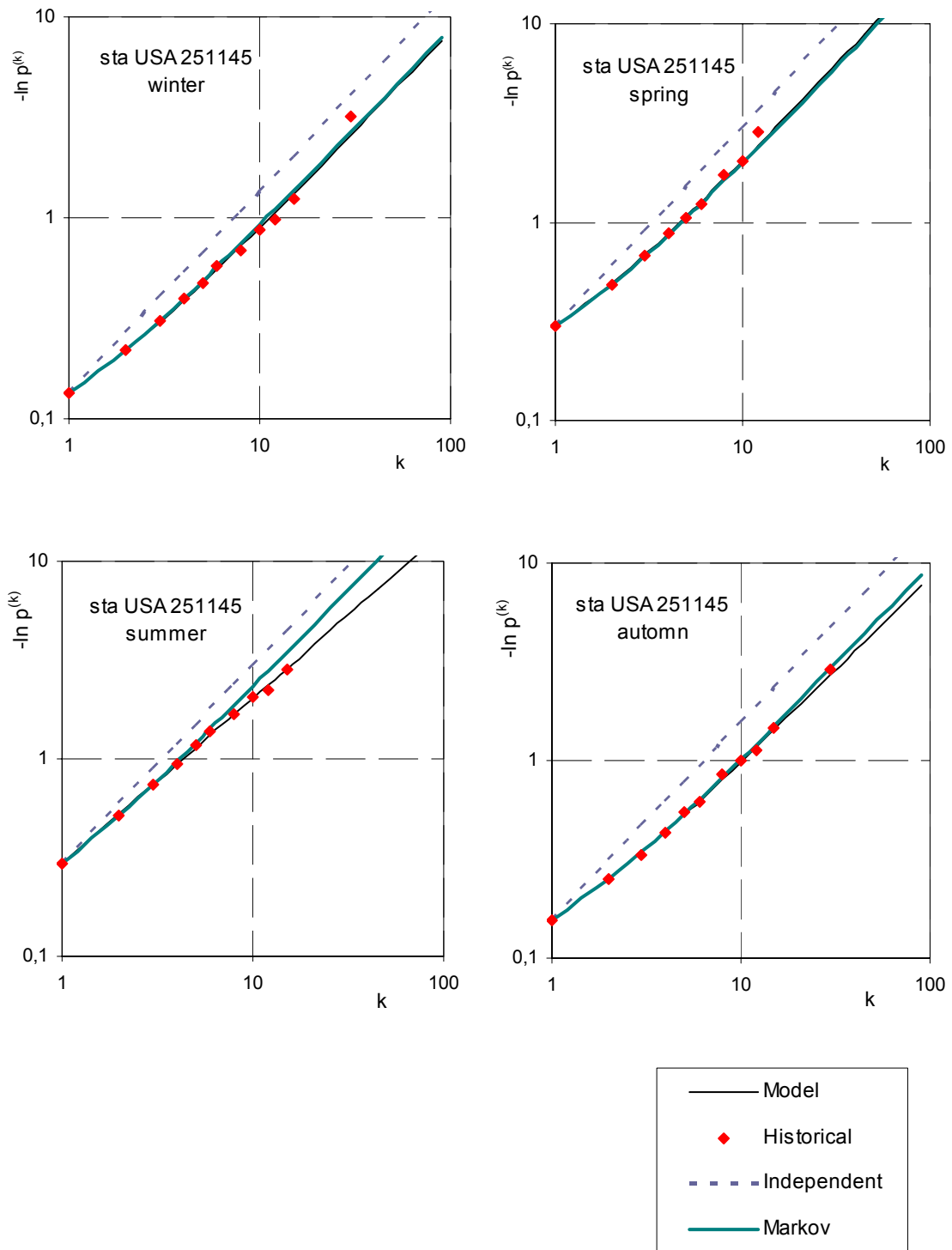
Σχήμα A.8



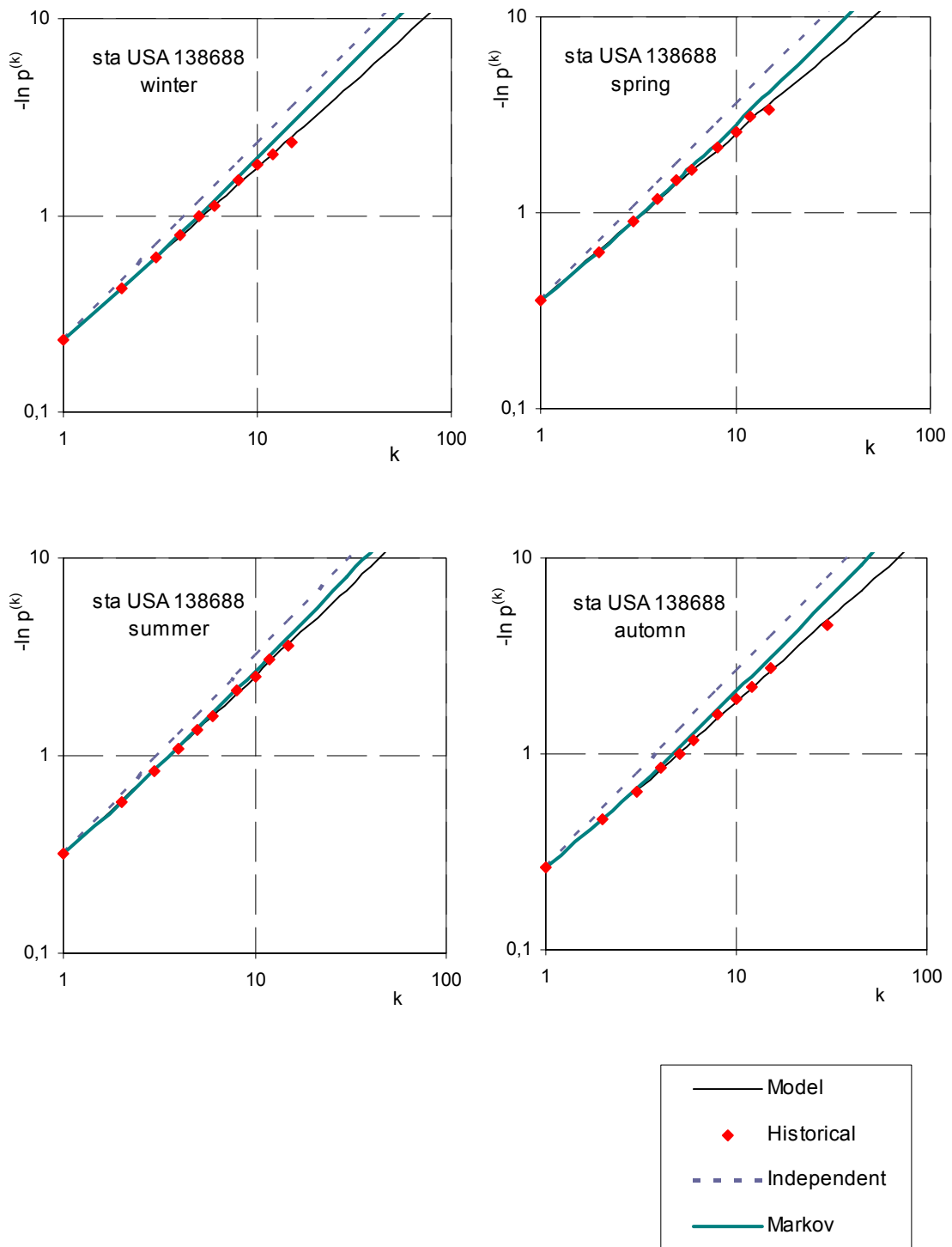
Σχήμα Α.9 Συγκριτικά διαγράμματα ξηρής και υγρής περιόδου του έτους



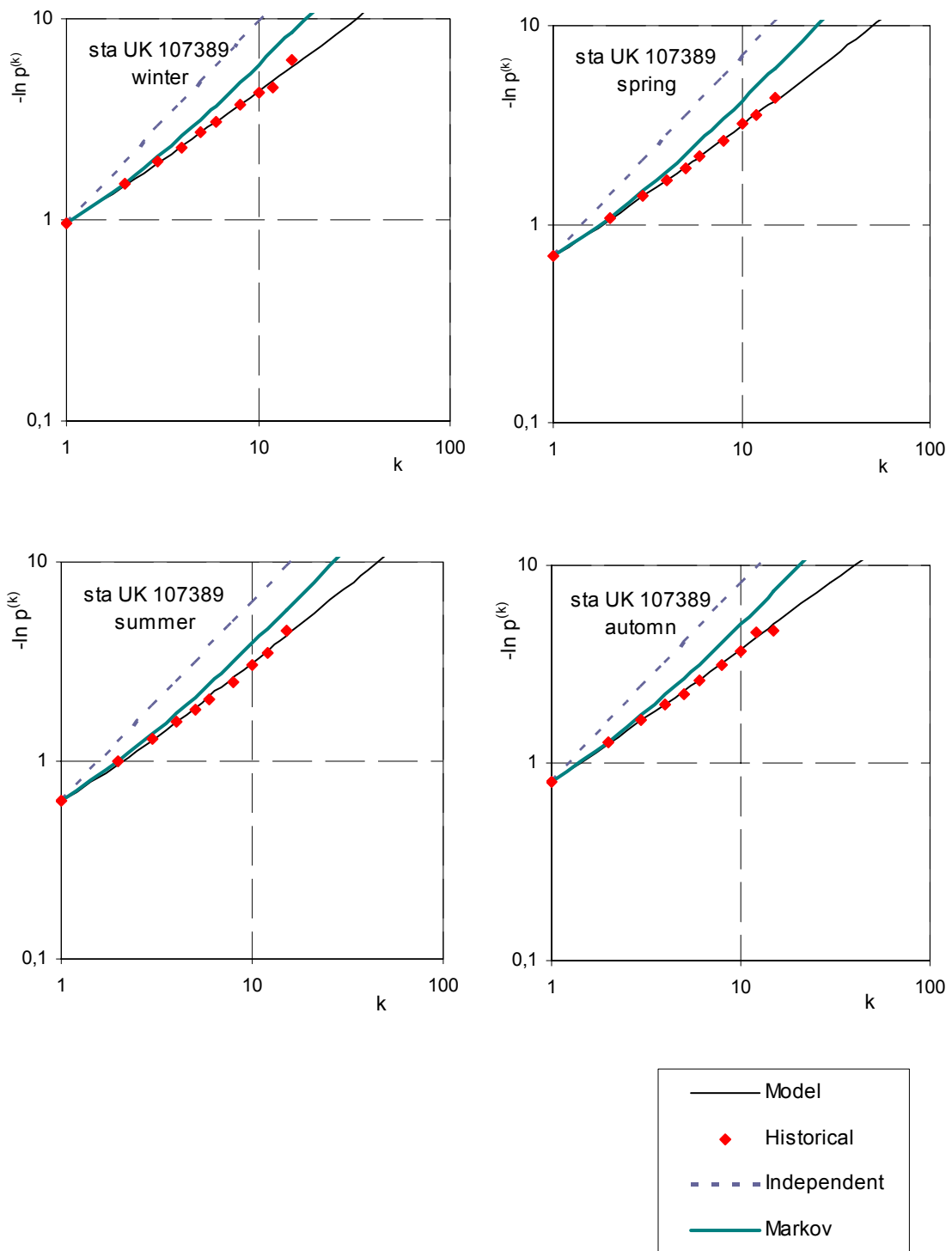
Σχήμα Α.10



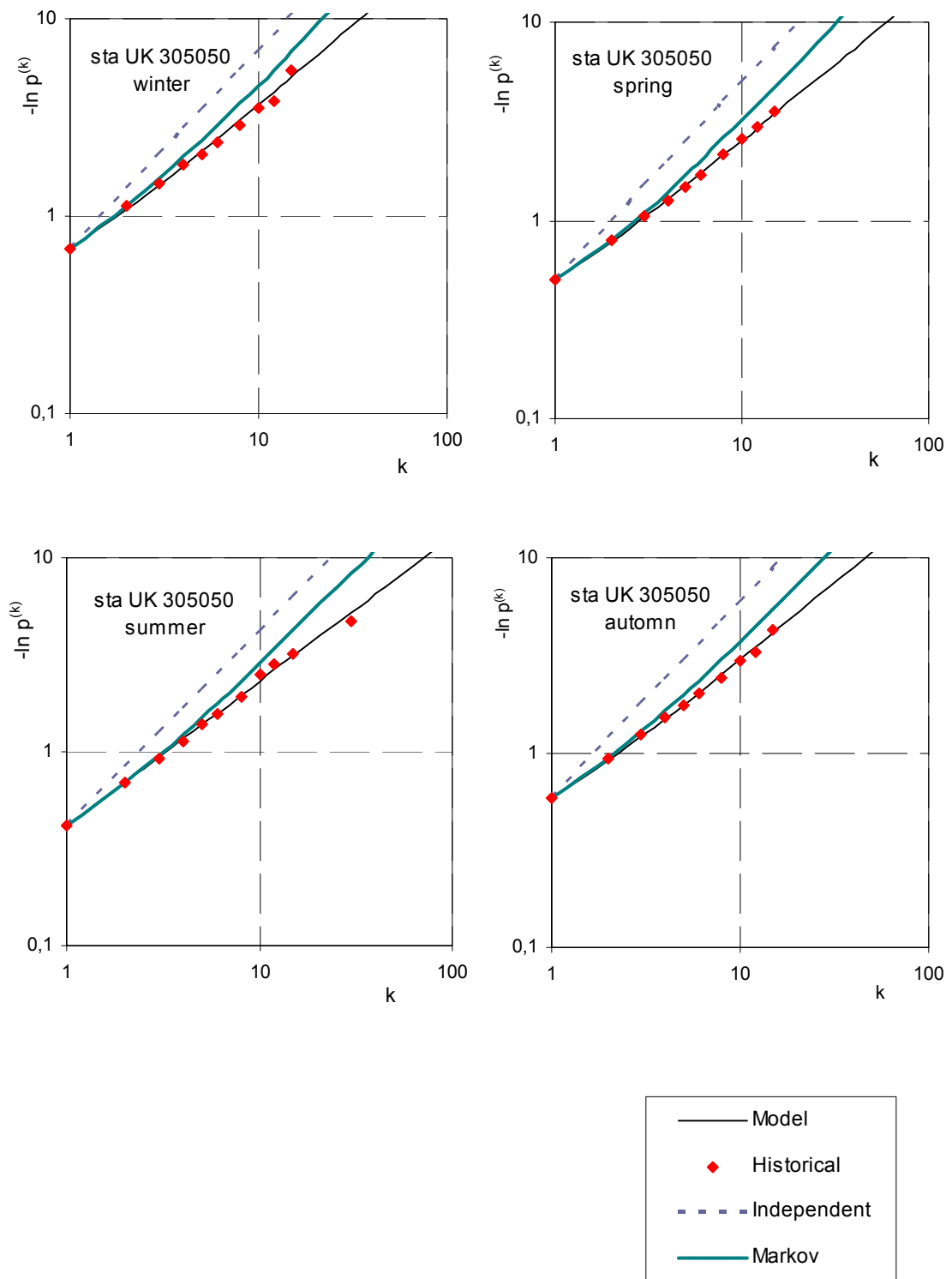
Σχήμα Α.11



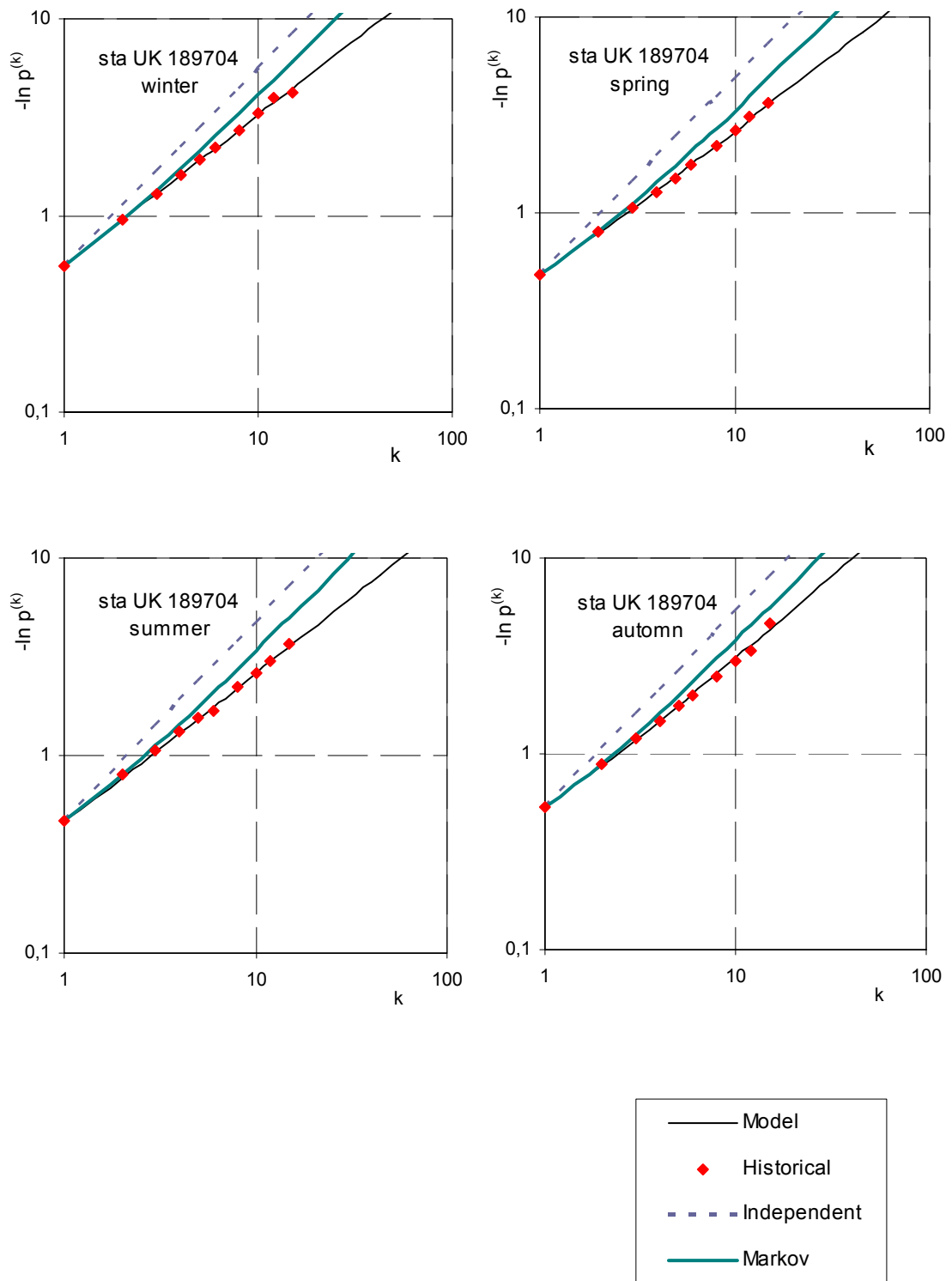
Σχήμα Α.12



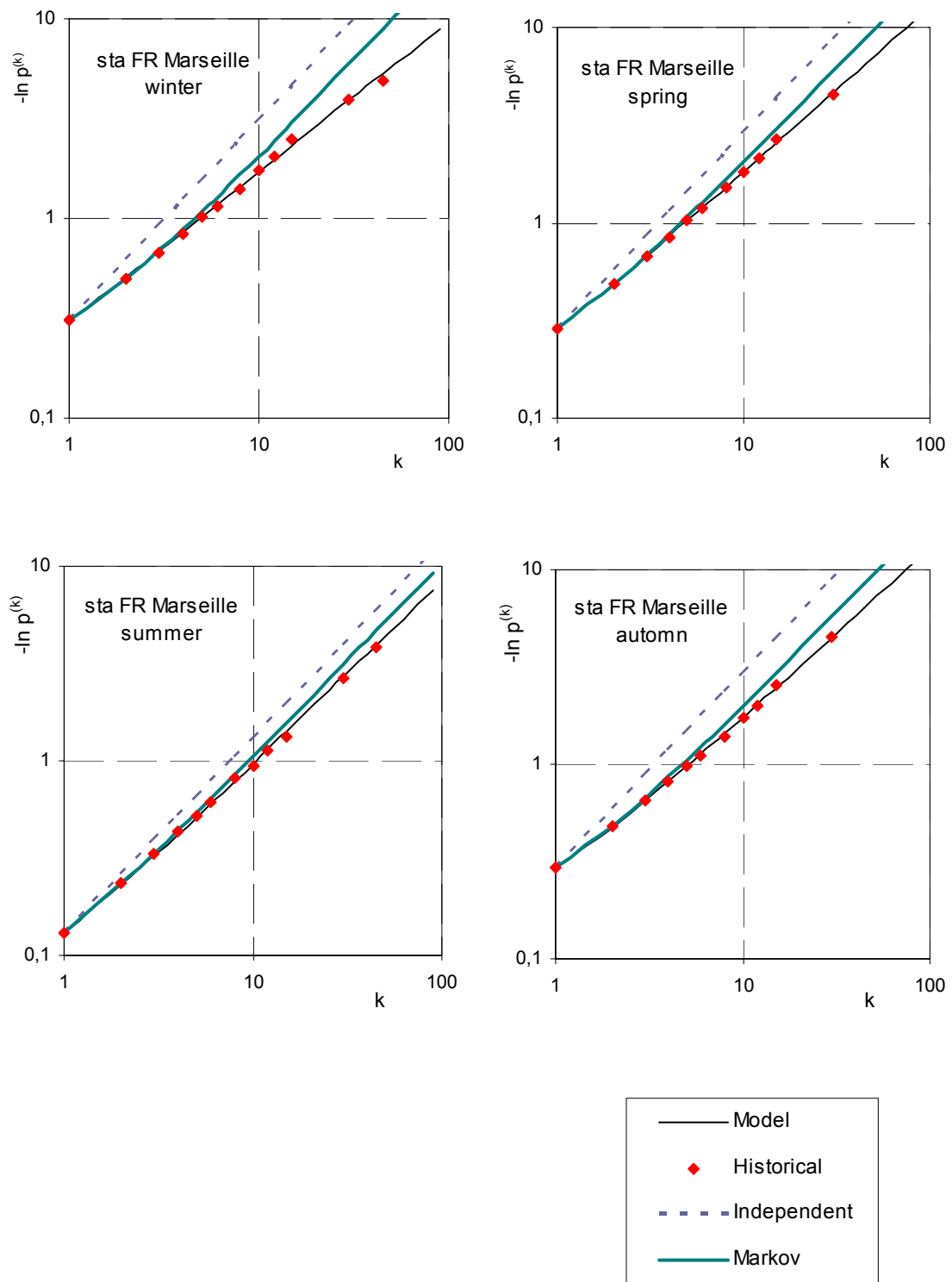
Σχήμα Α.13



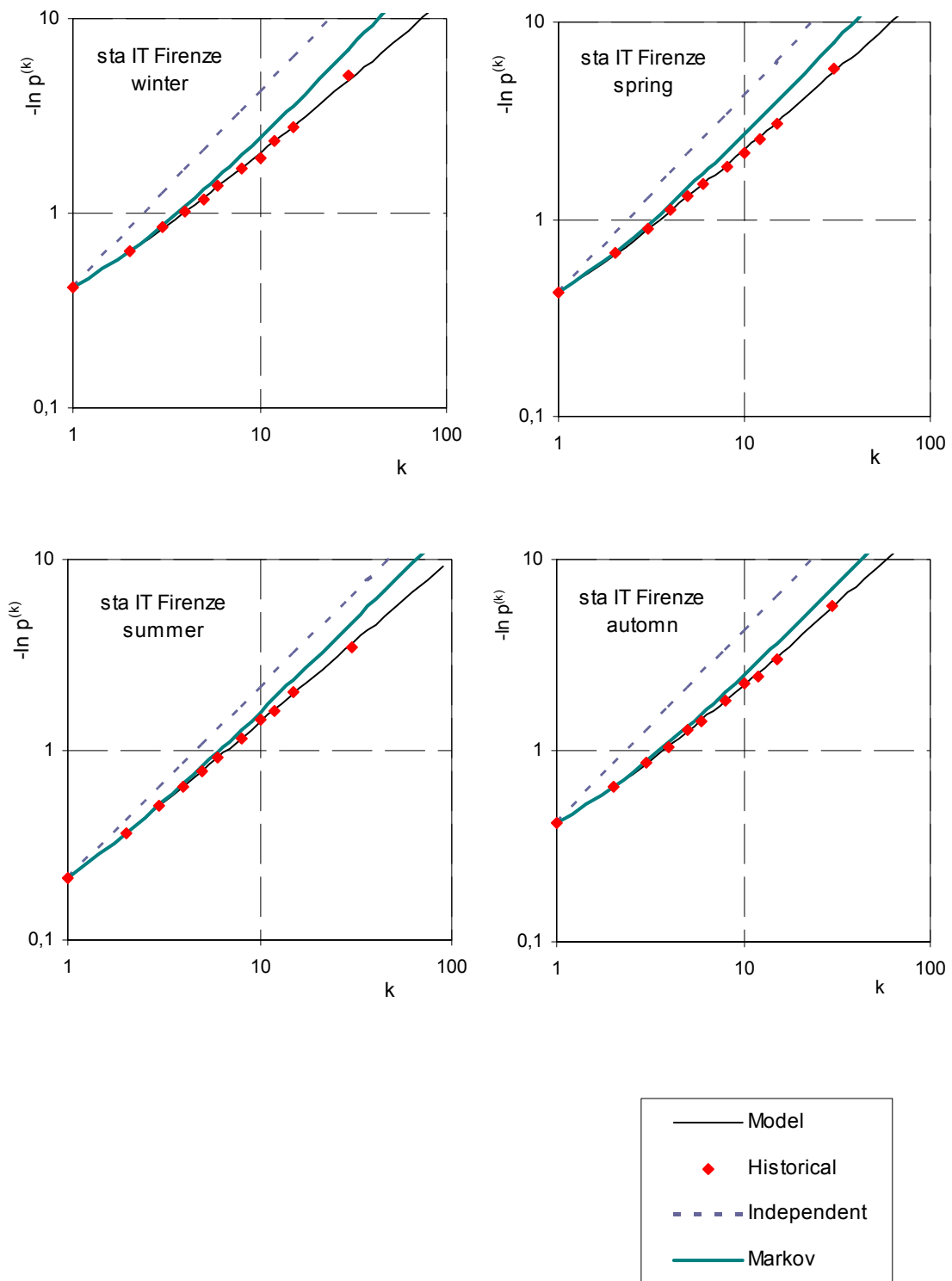
Σχήμα Α.14



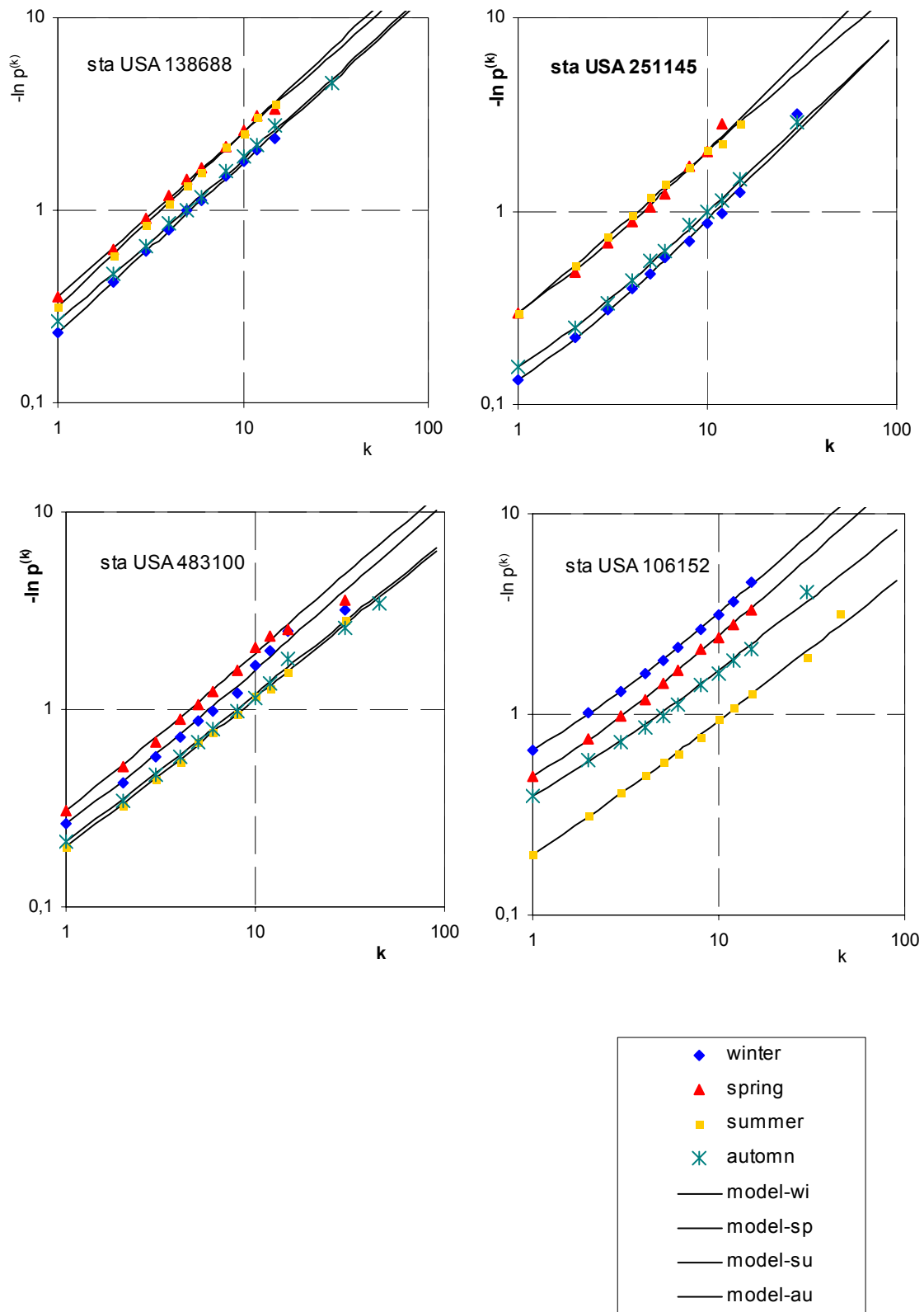
Σχήμα Α.15



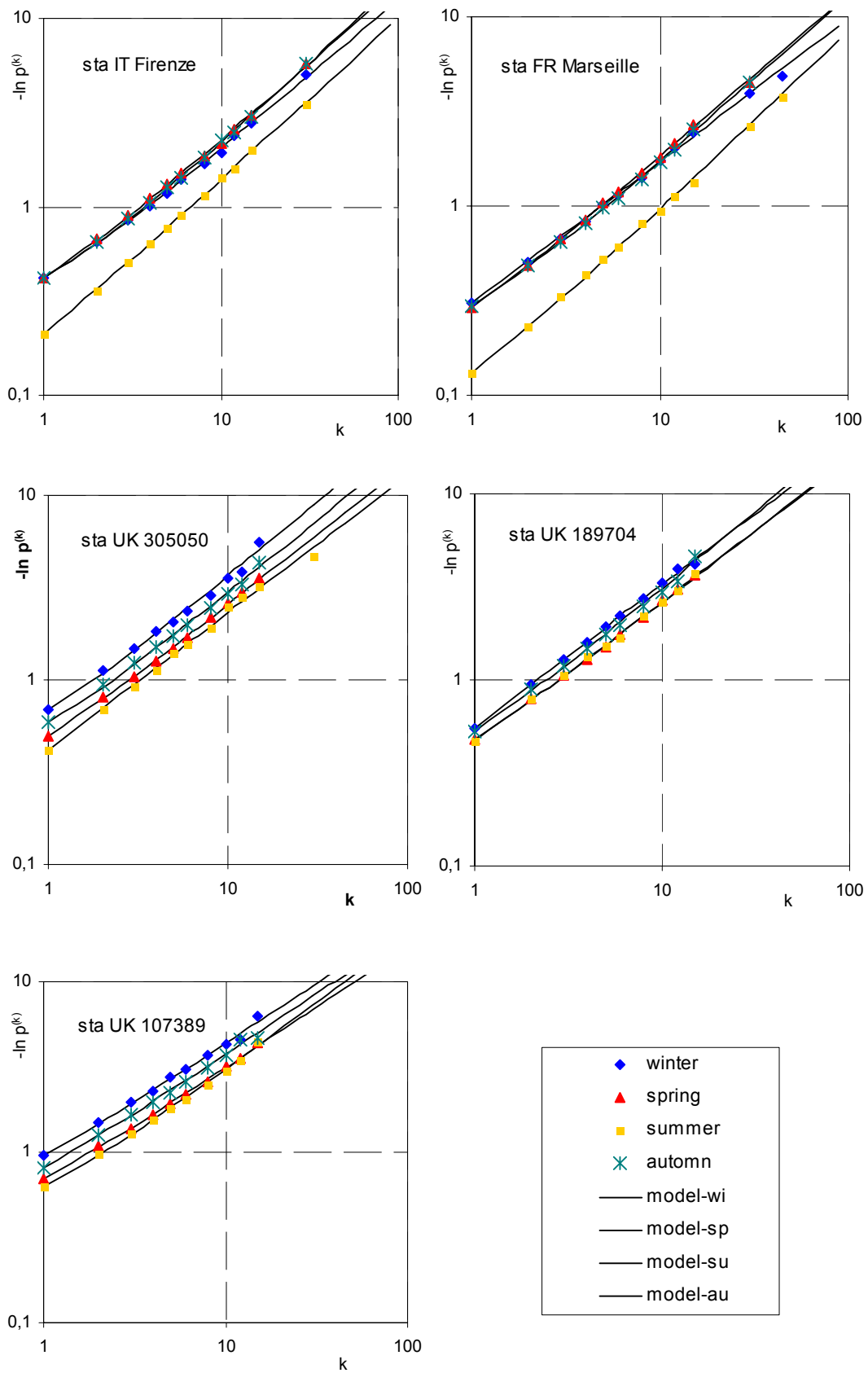
Σχήμα Α.16



Σχήμα A.17

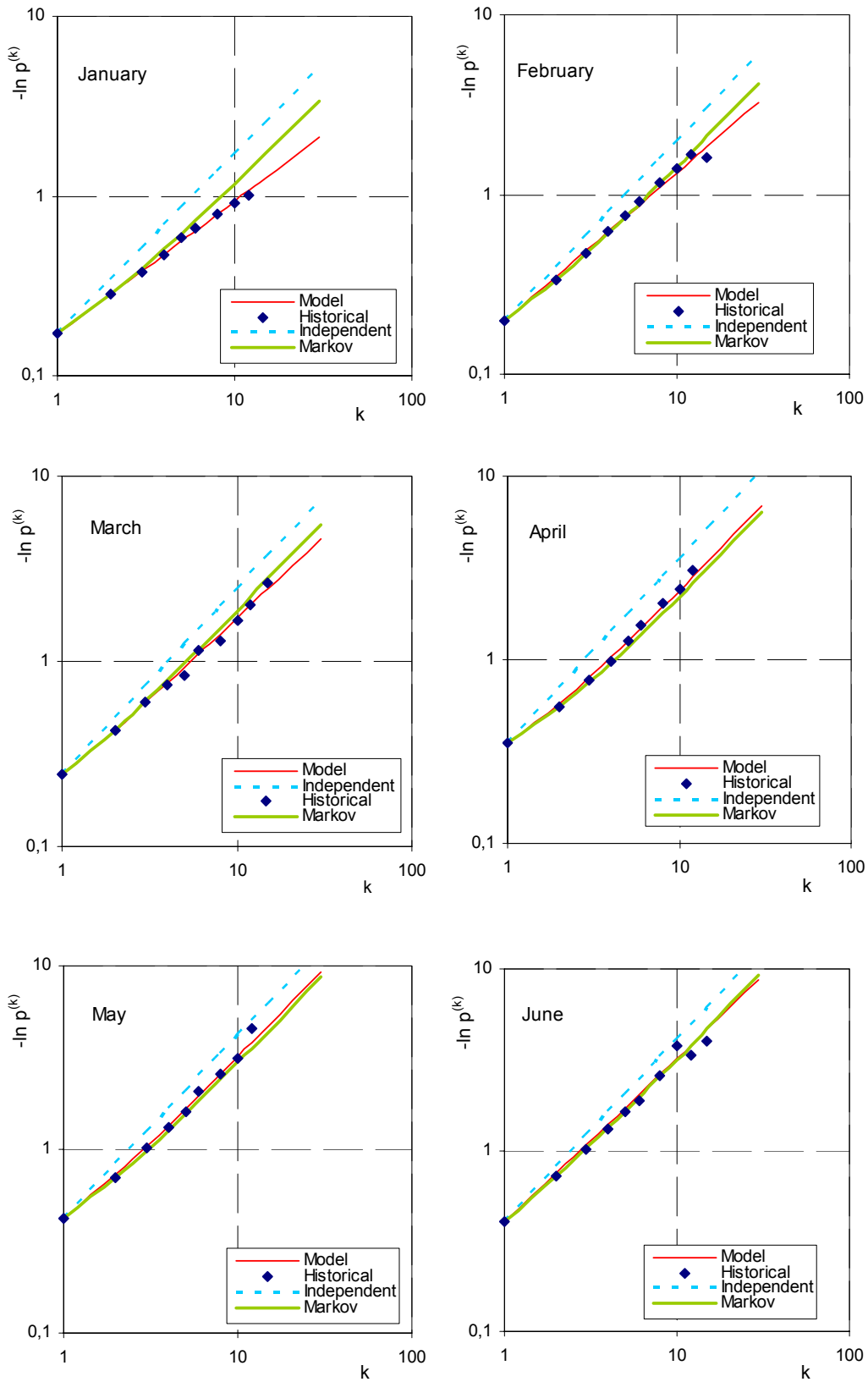


Σχήμα Α.18

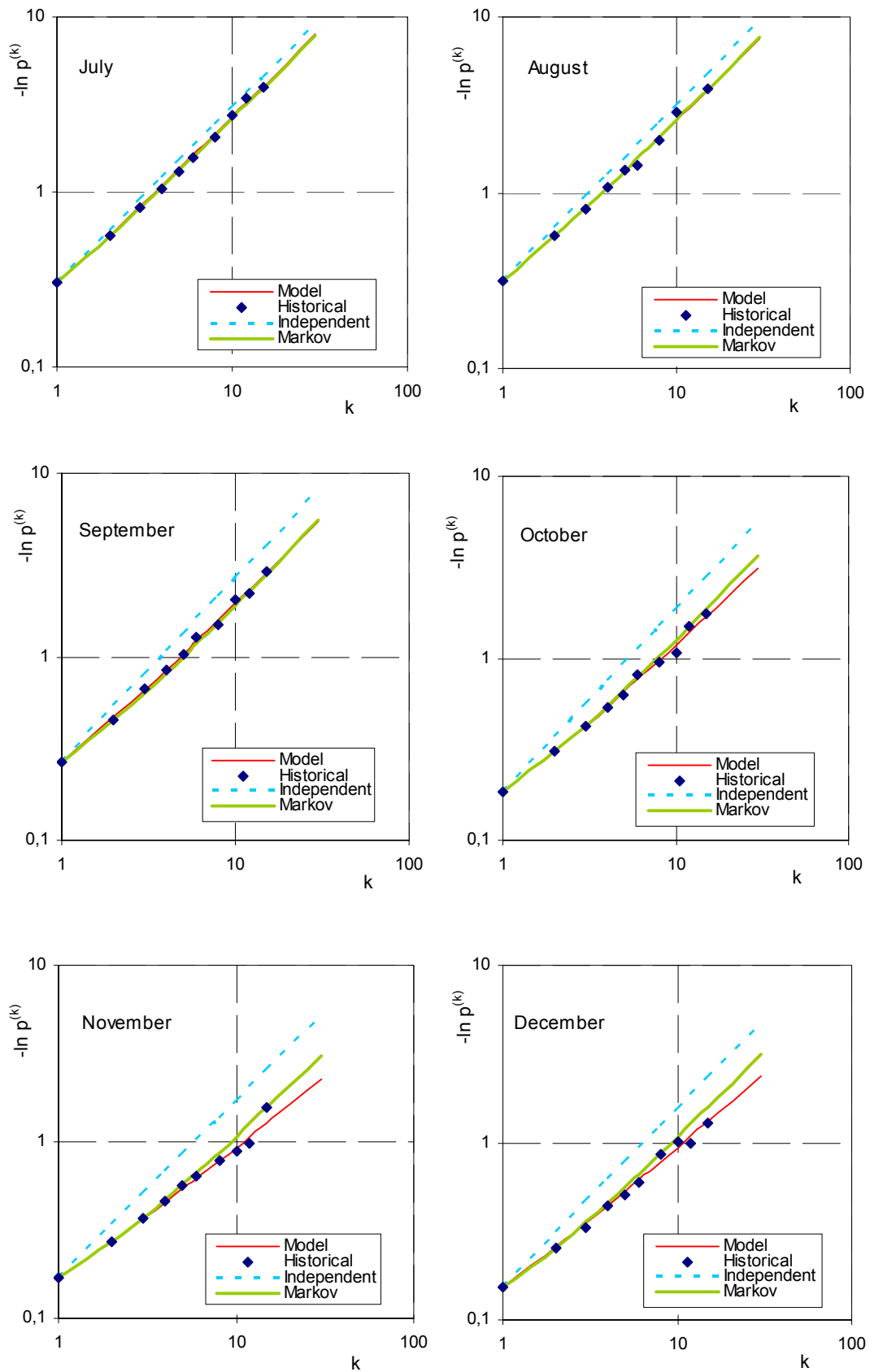


Σχήμα Α.19

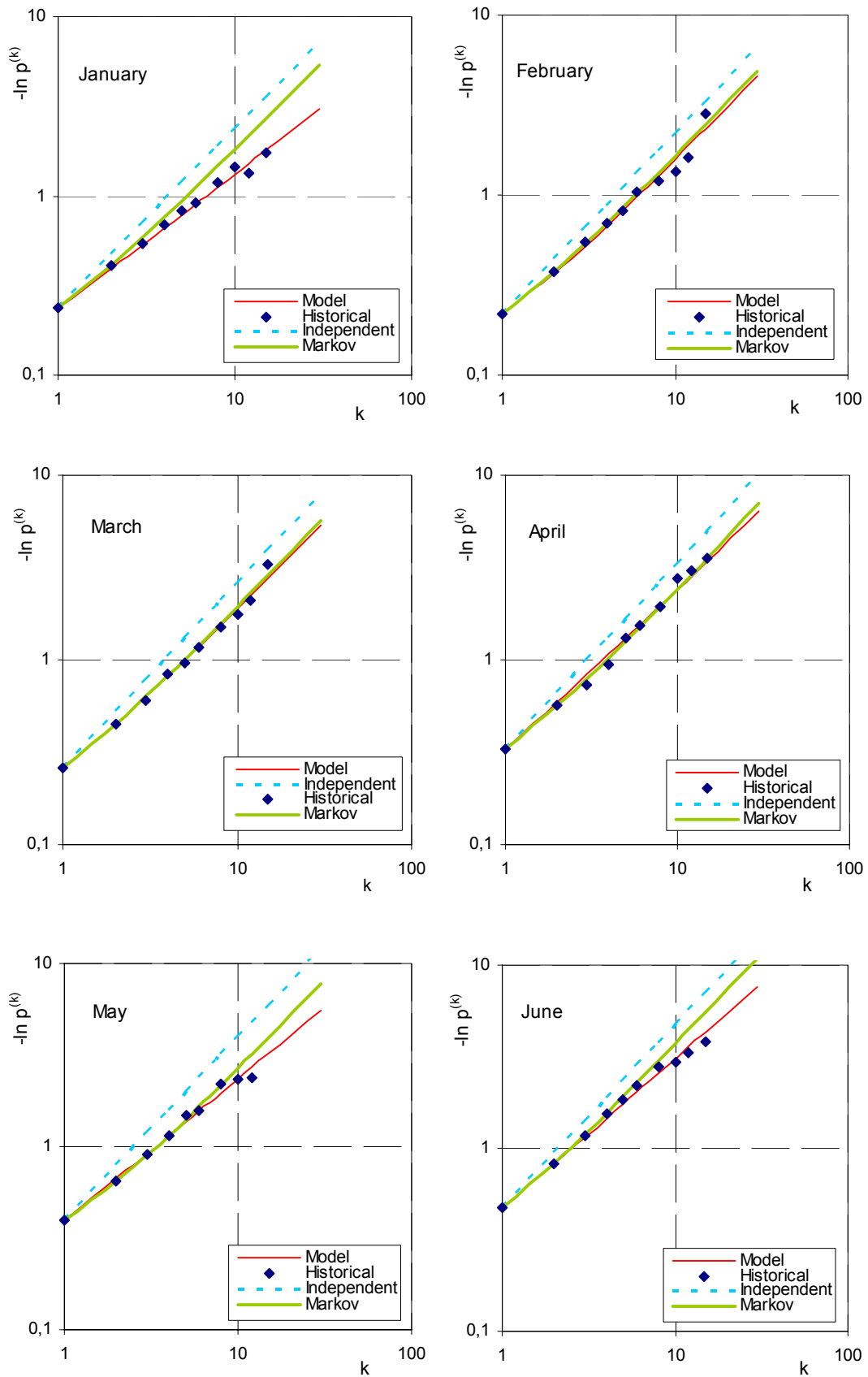
Παράρτημα Α3



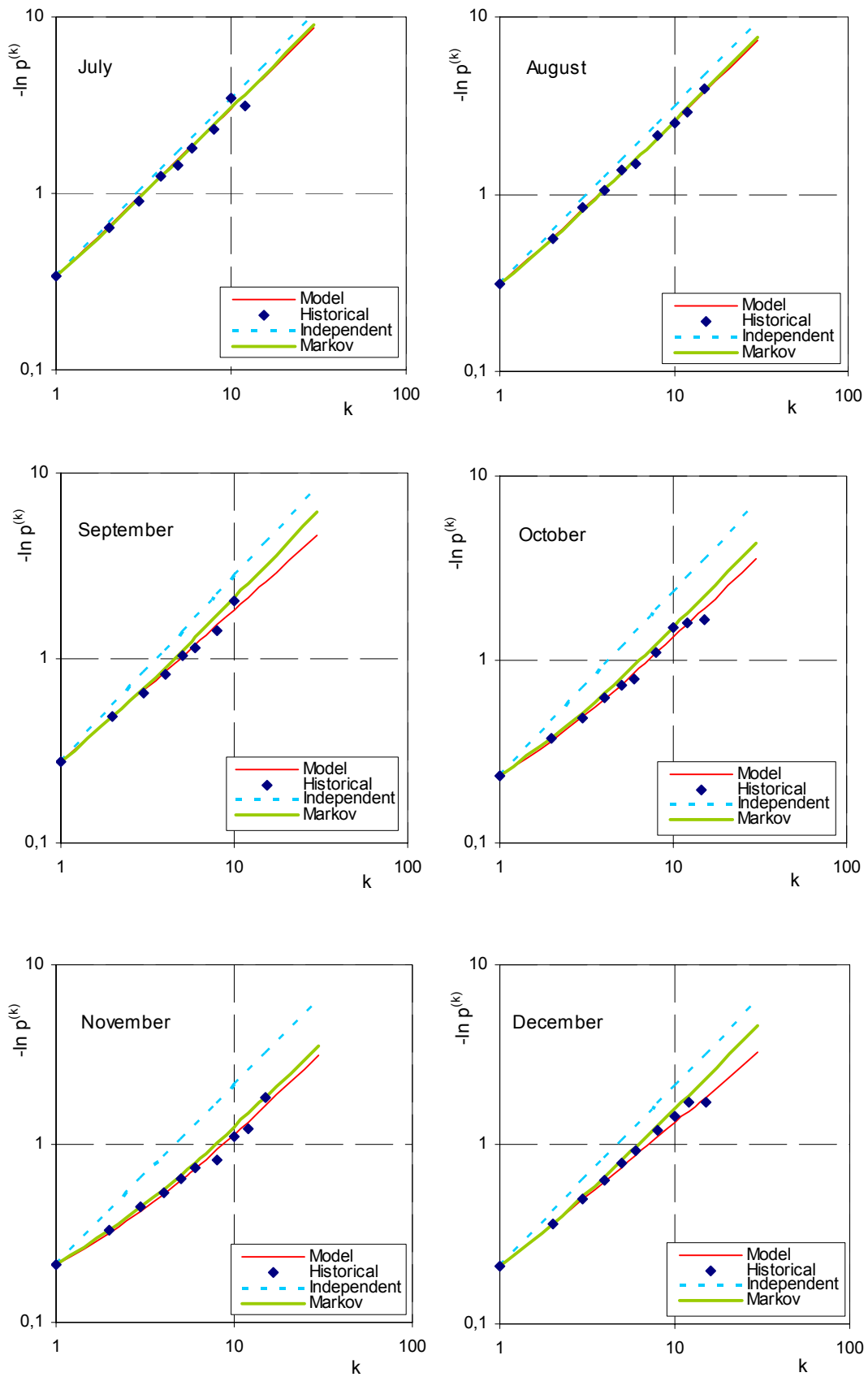
Σχήμα Α.20 sta usa 2536630



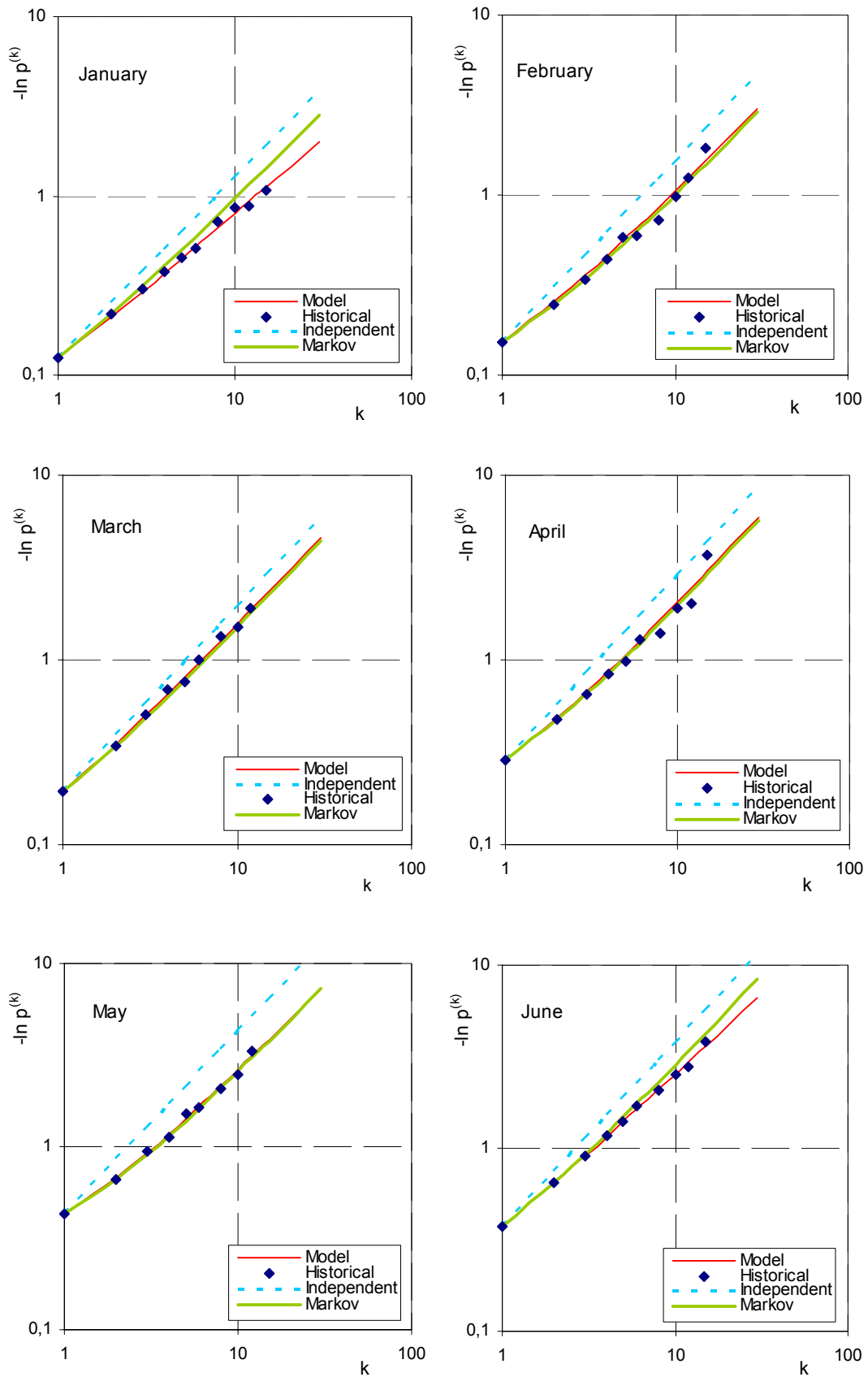
Σχήμα Α.21 sta 2536630



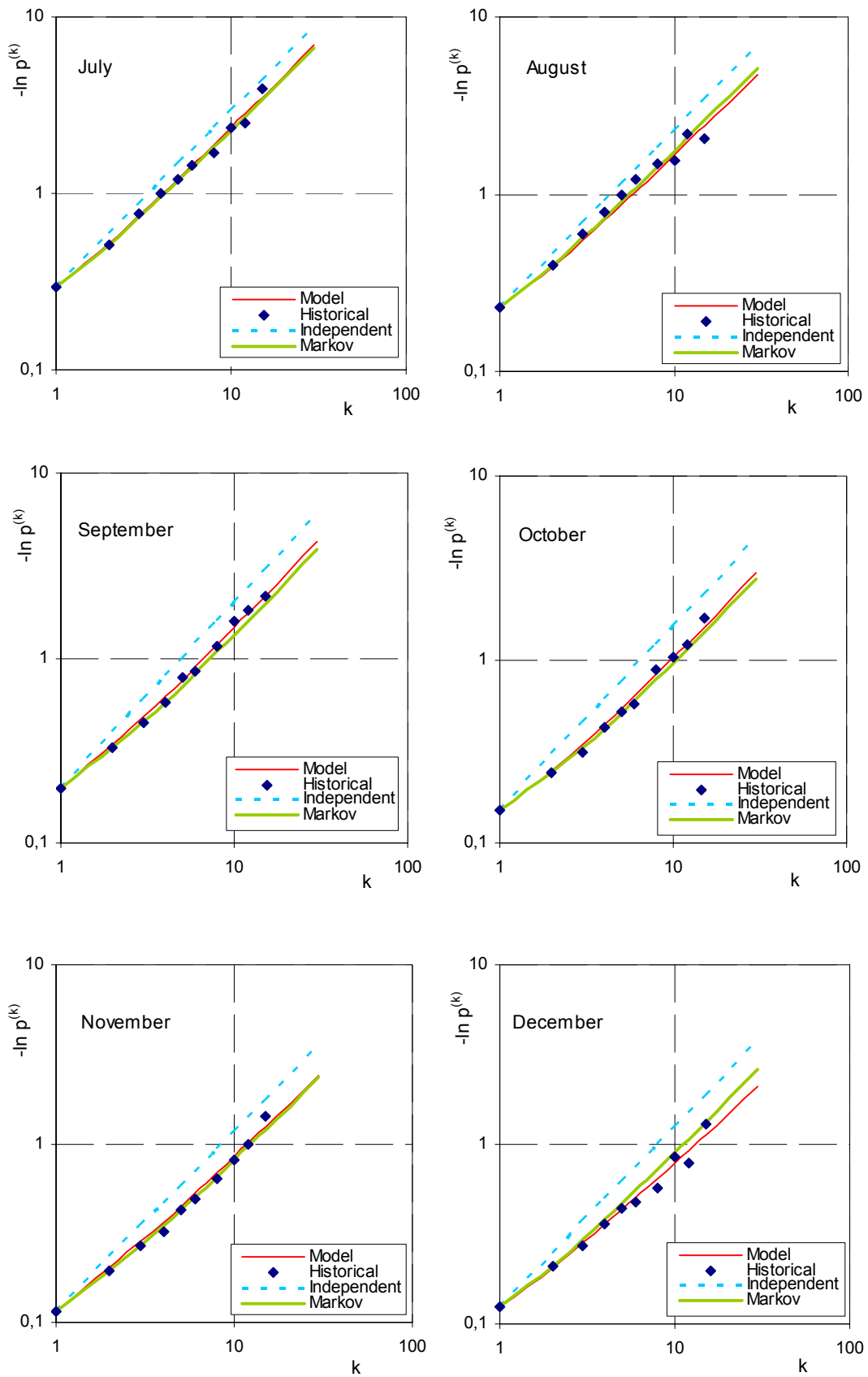
Σχήμα A.22 sta 391739



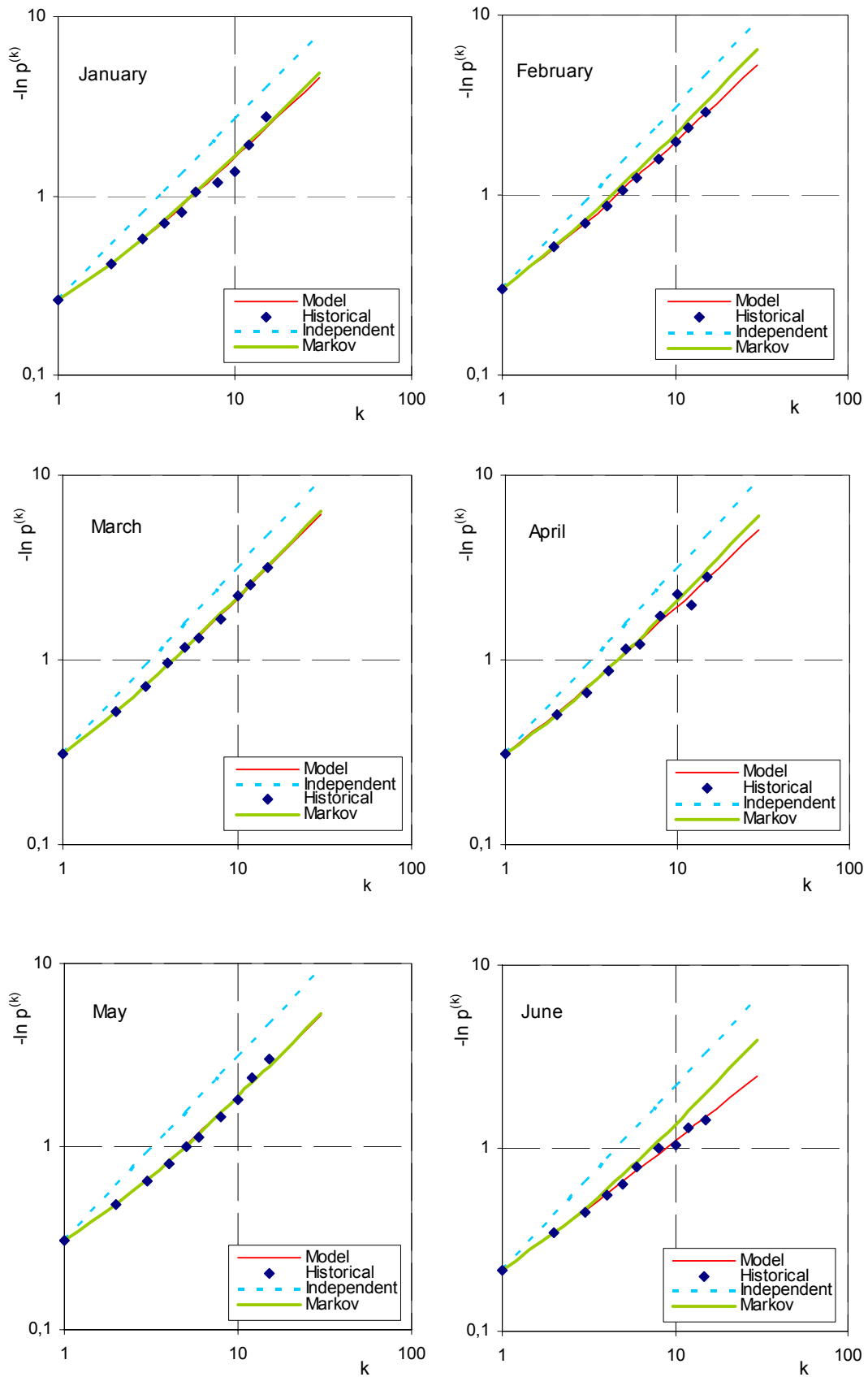
Σχήμα A.23 sta usa 391739



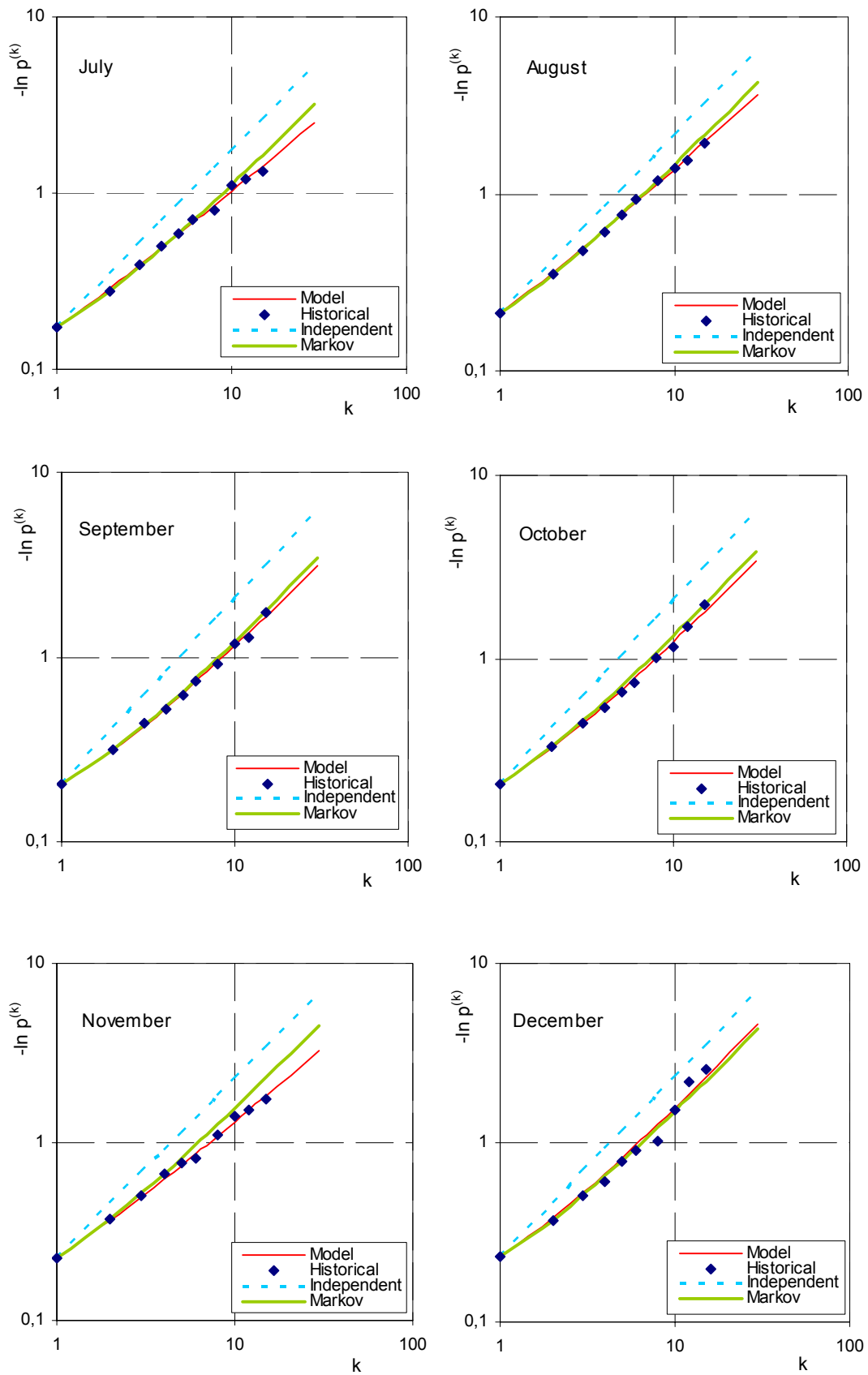
Σχήμα A.24 sta usa 251145



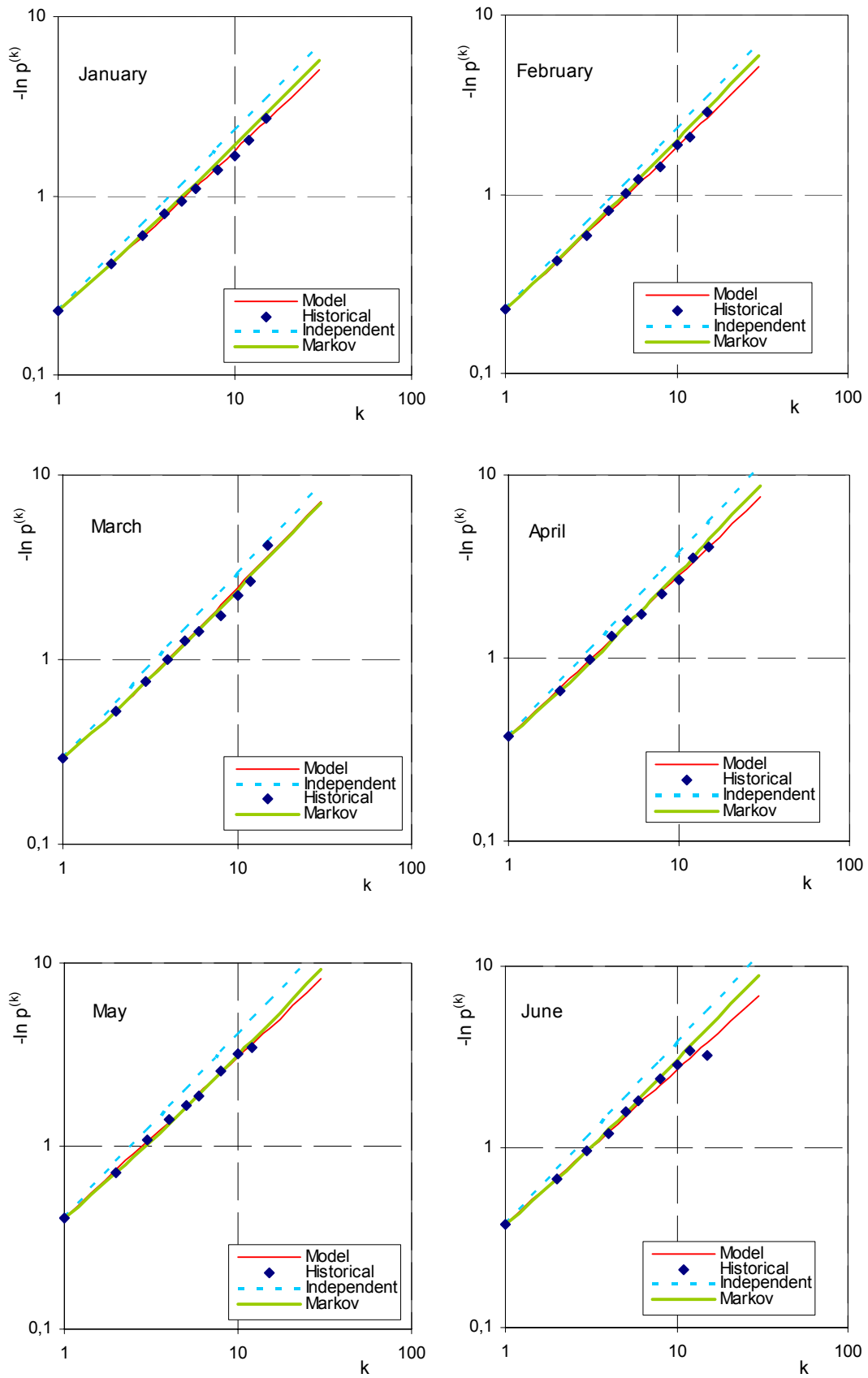
Σχήμα A.25 sta usa 251145



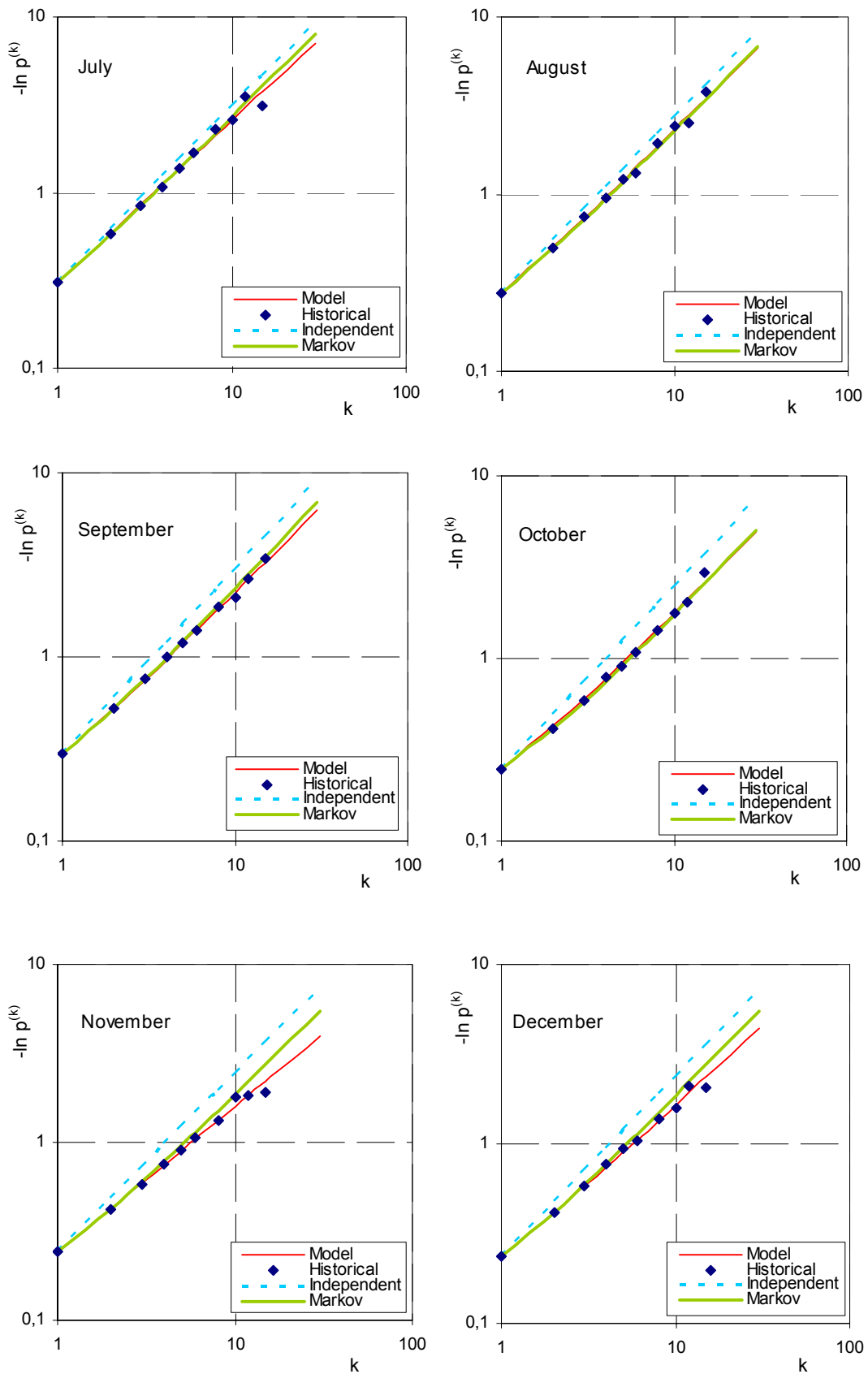
Σχήμα A.26 sta usa 483100



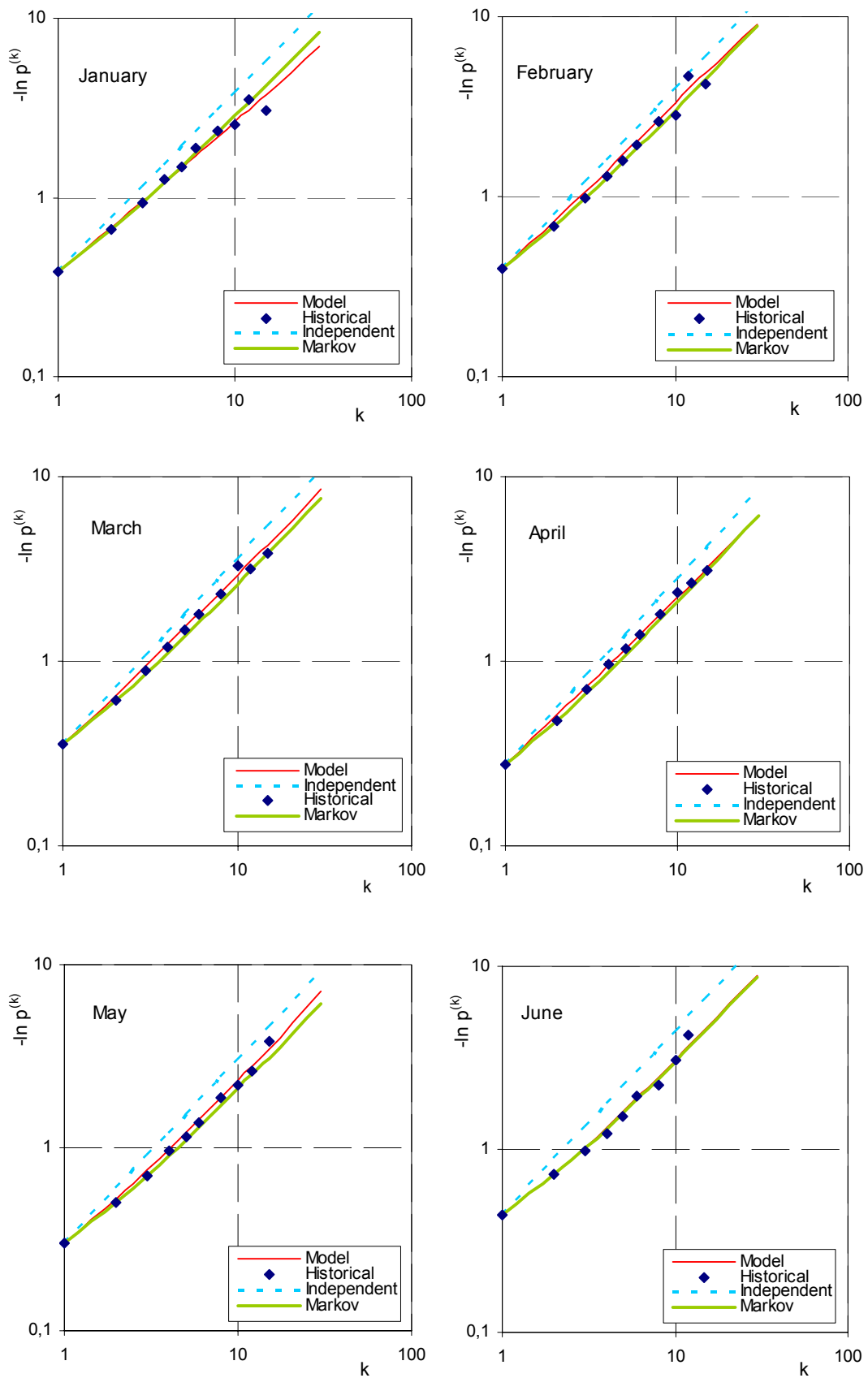
Σχήμα A.27 sta usa 483100



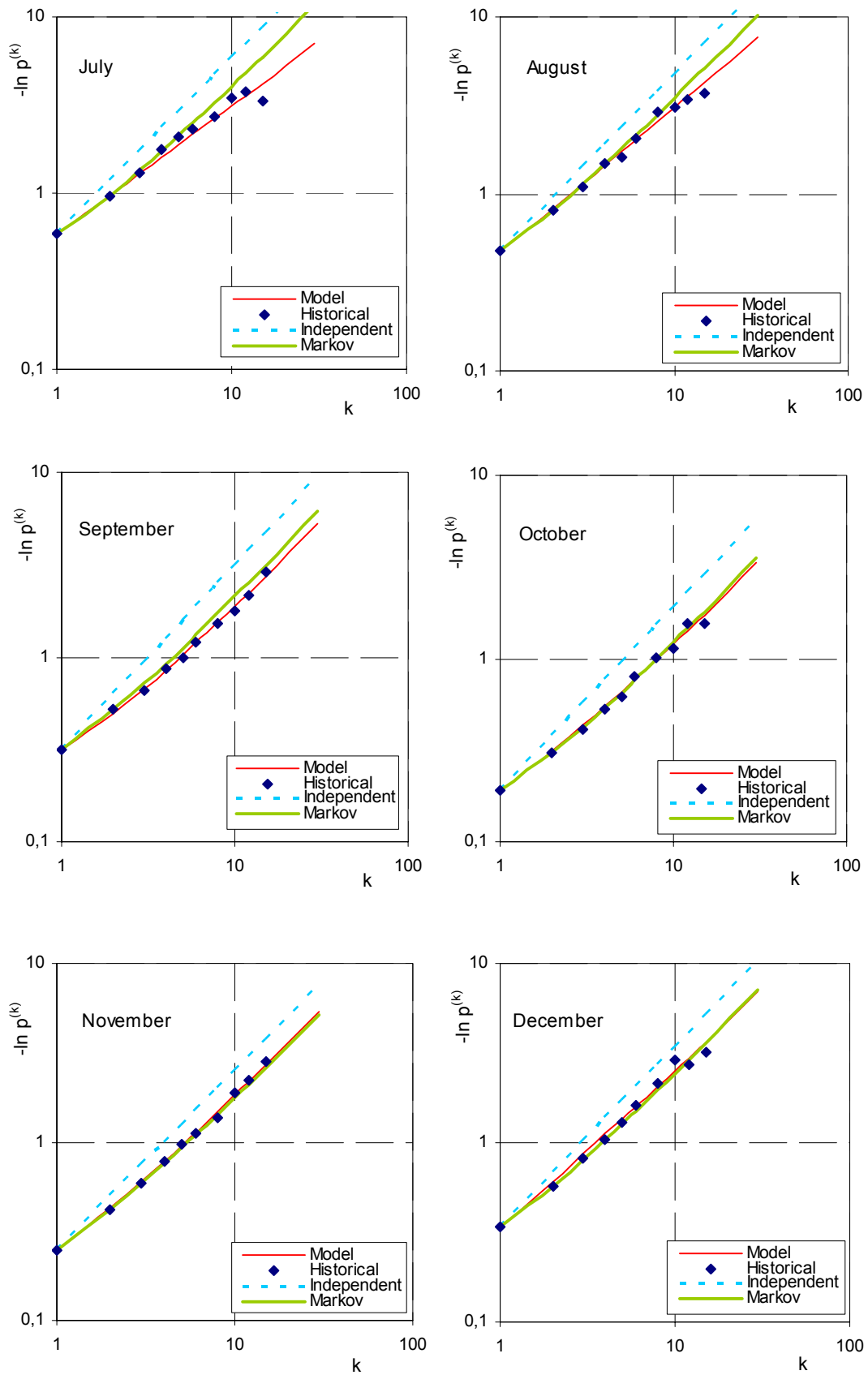
Σχήμα A.28 sta usa 138688



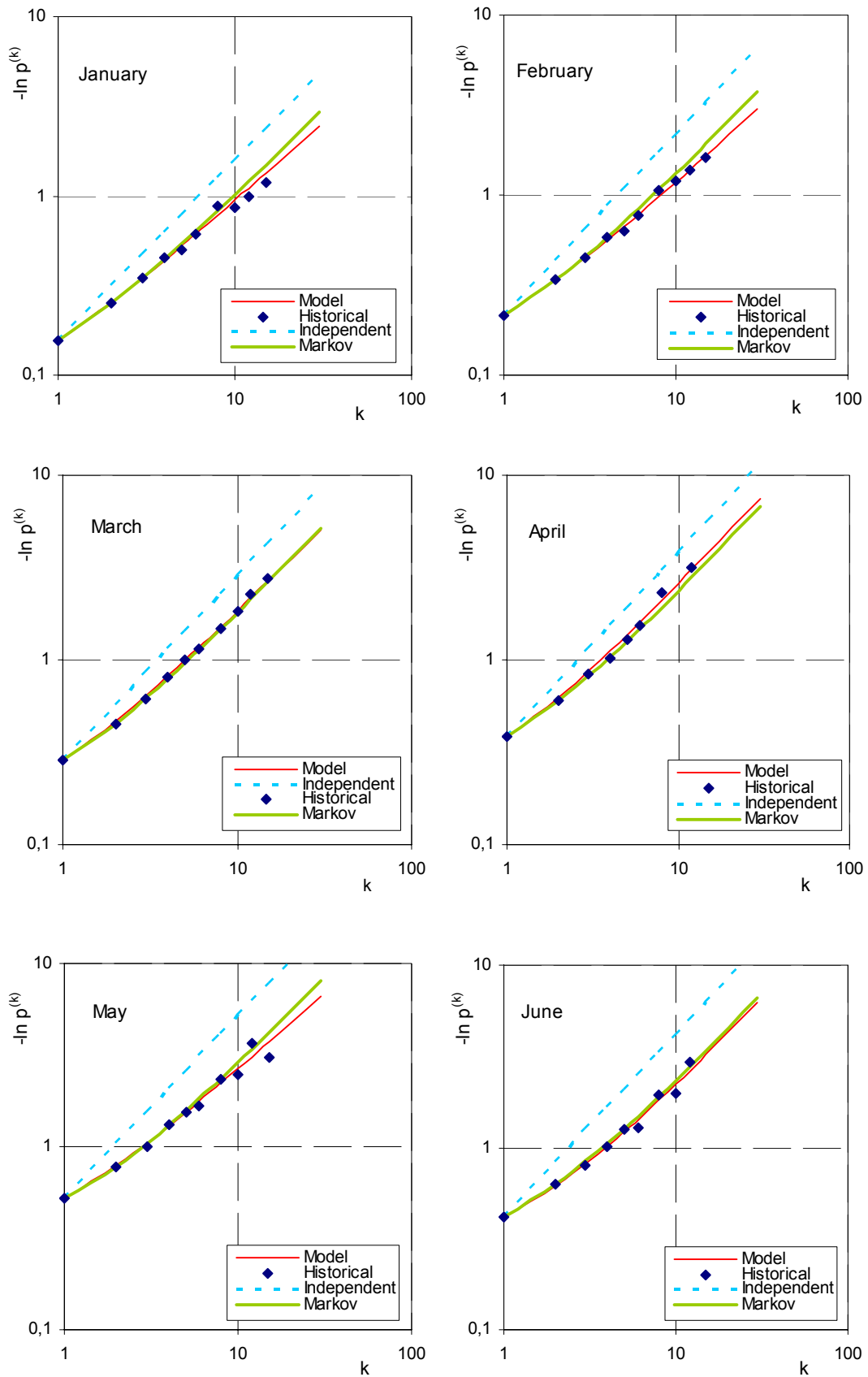
Σχήμα A.29 sta usa 138688



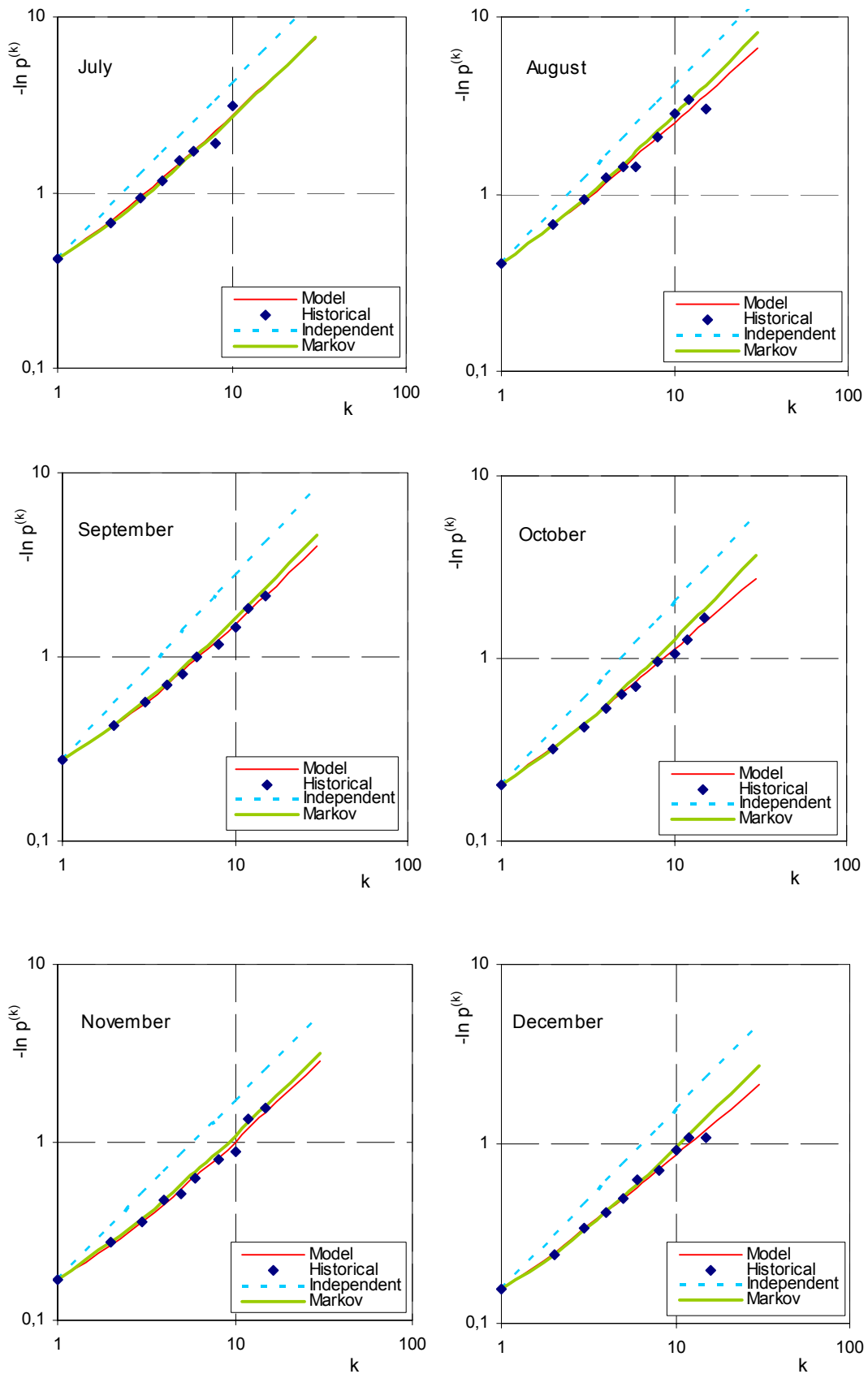
Σχήμα A.30 sta usa 90140



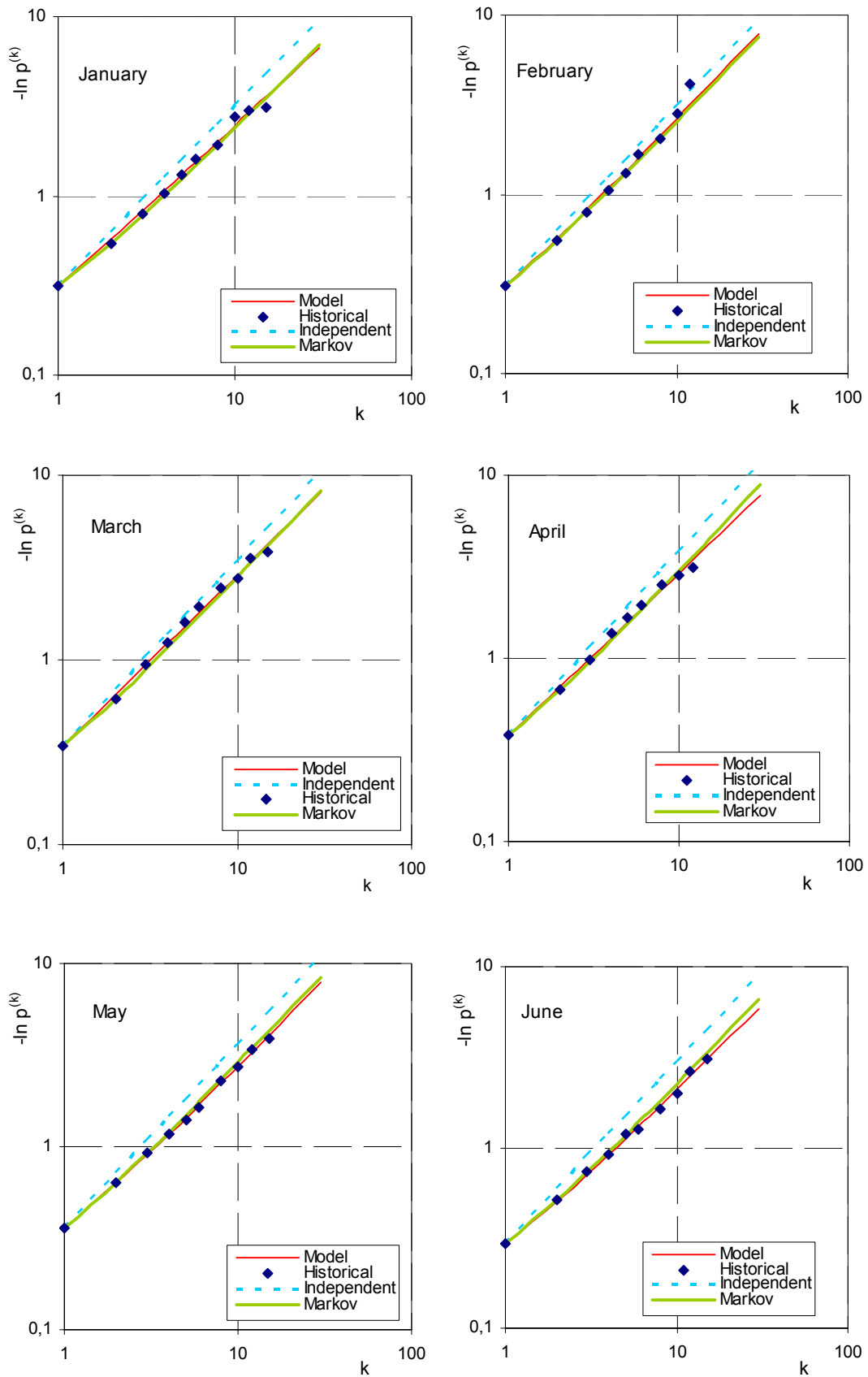
Σχήμα Α.31 sta usa 90140



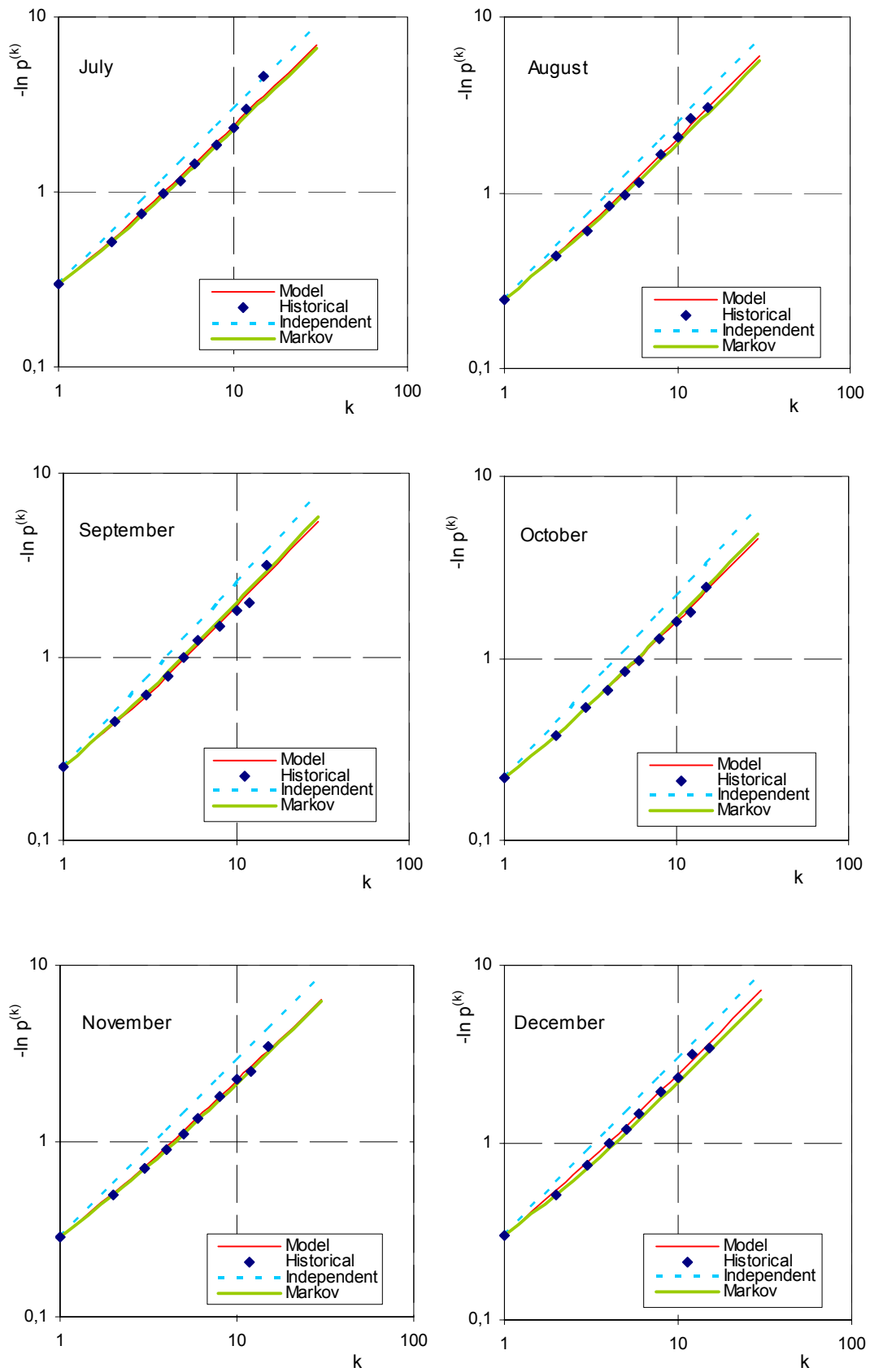
Σχήμα A.32 sta usa 53005



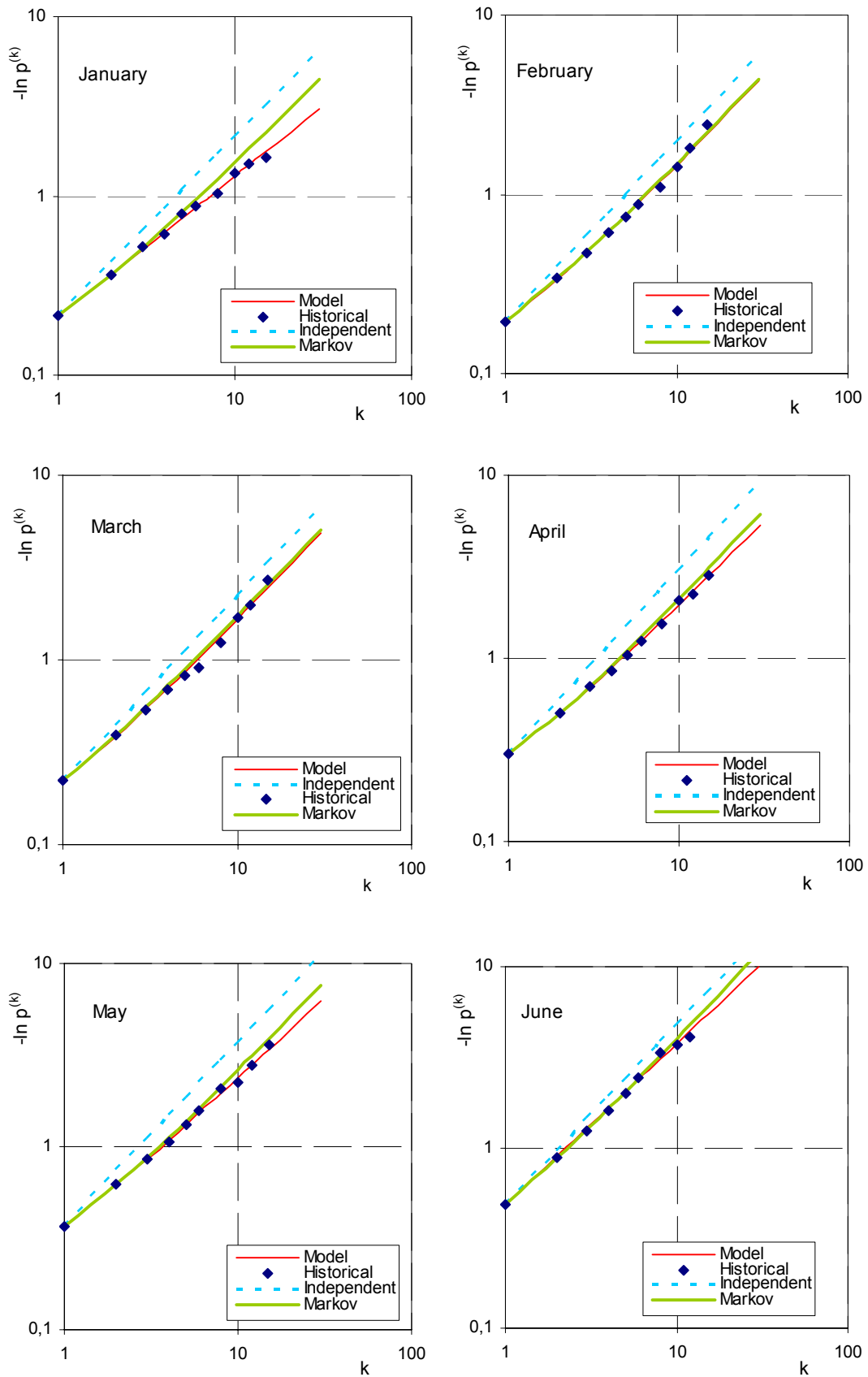
Σχήμα A.33 sta usa 53005



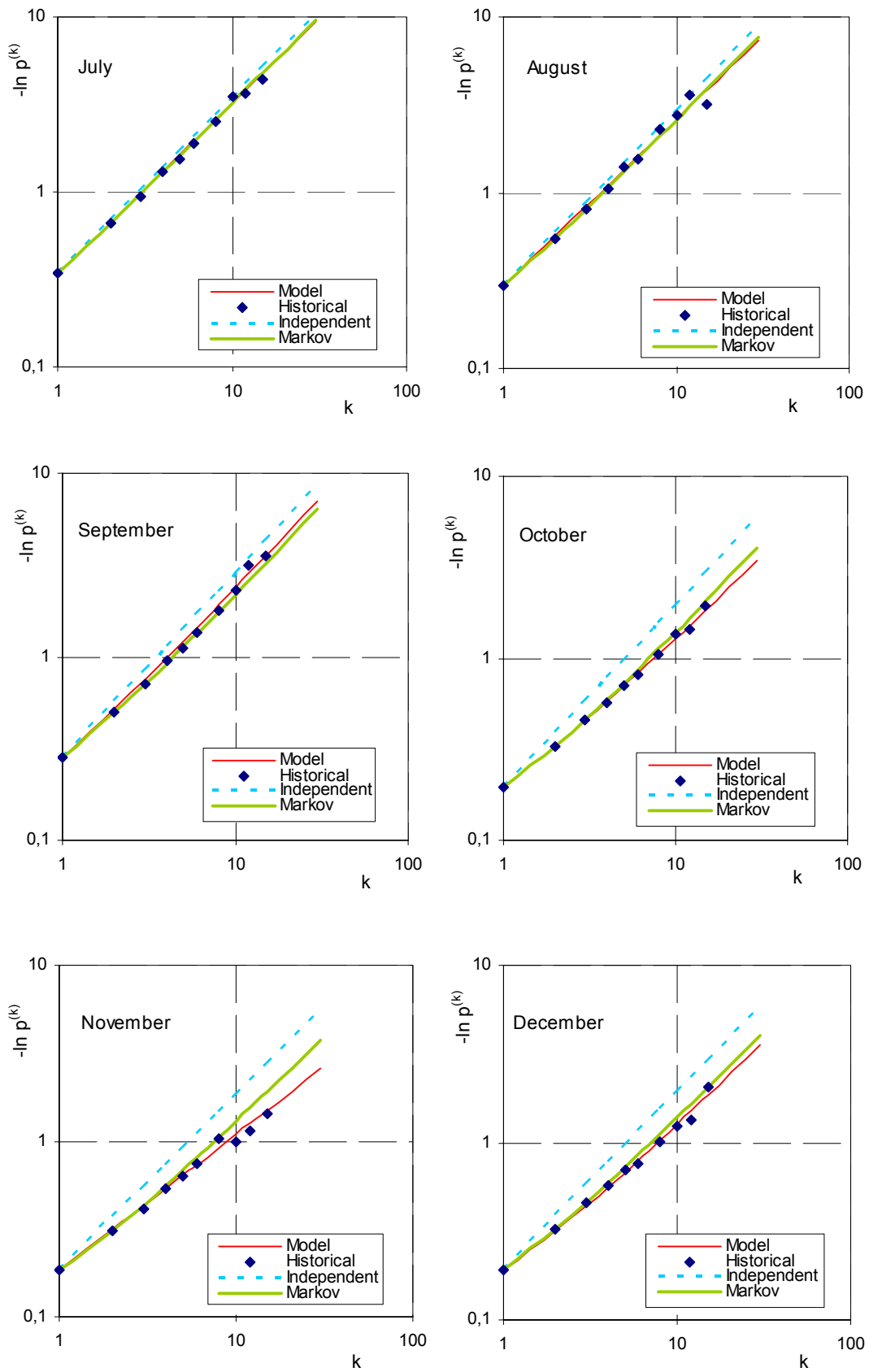
Σχήμα A.34 sta usa 35820



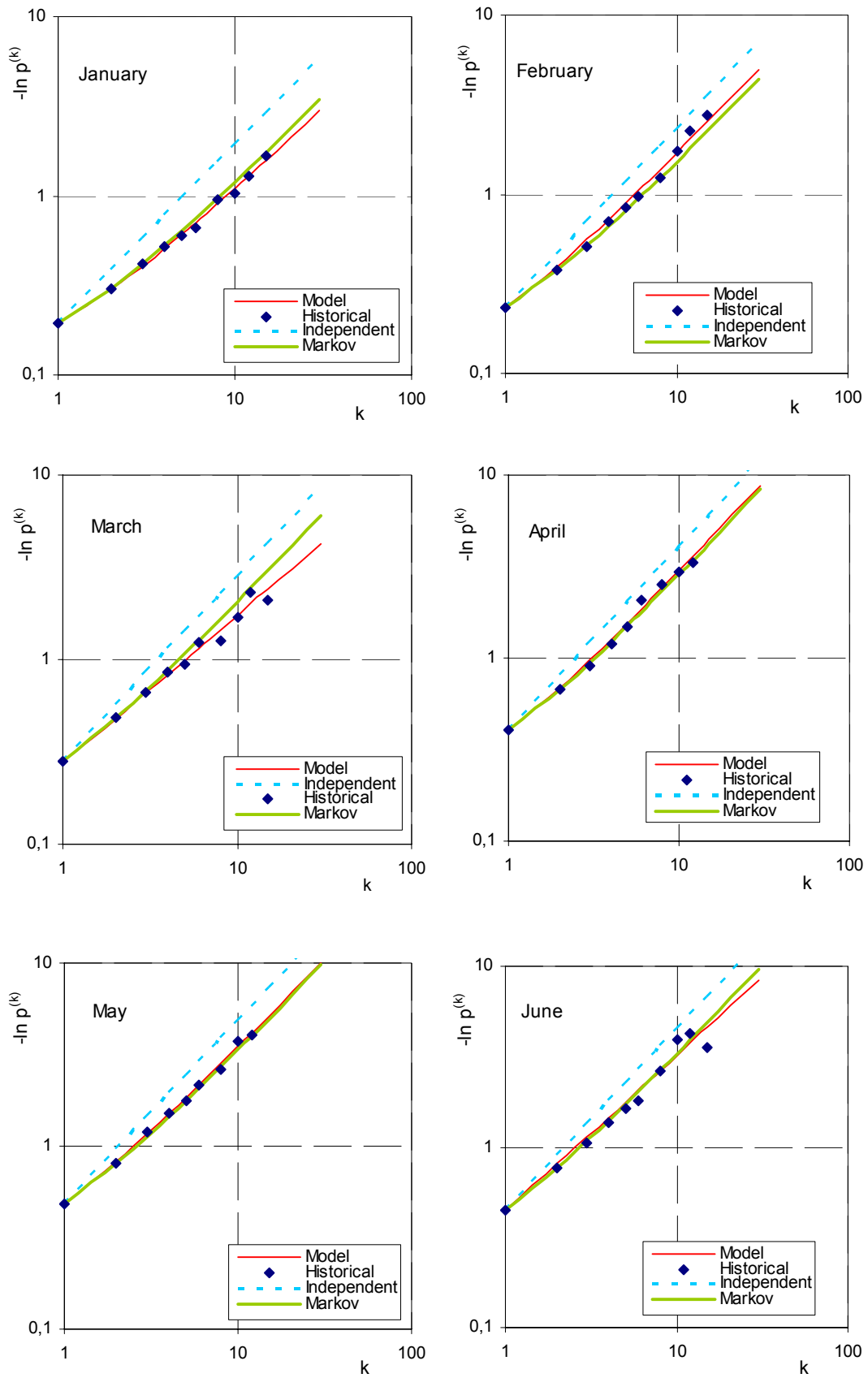
Σχήμα A.35 sta usa 35820



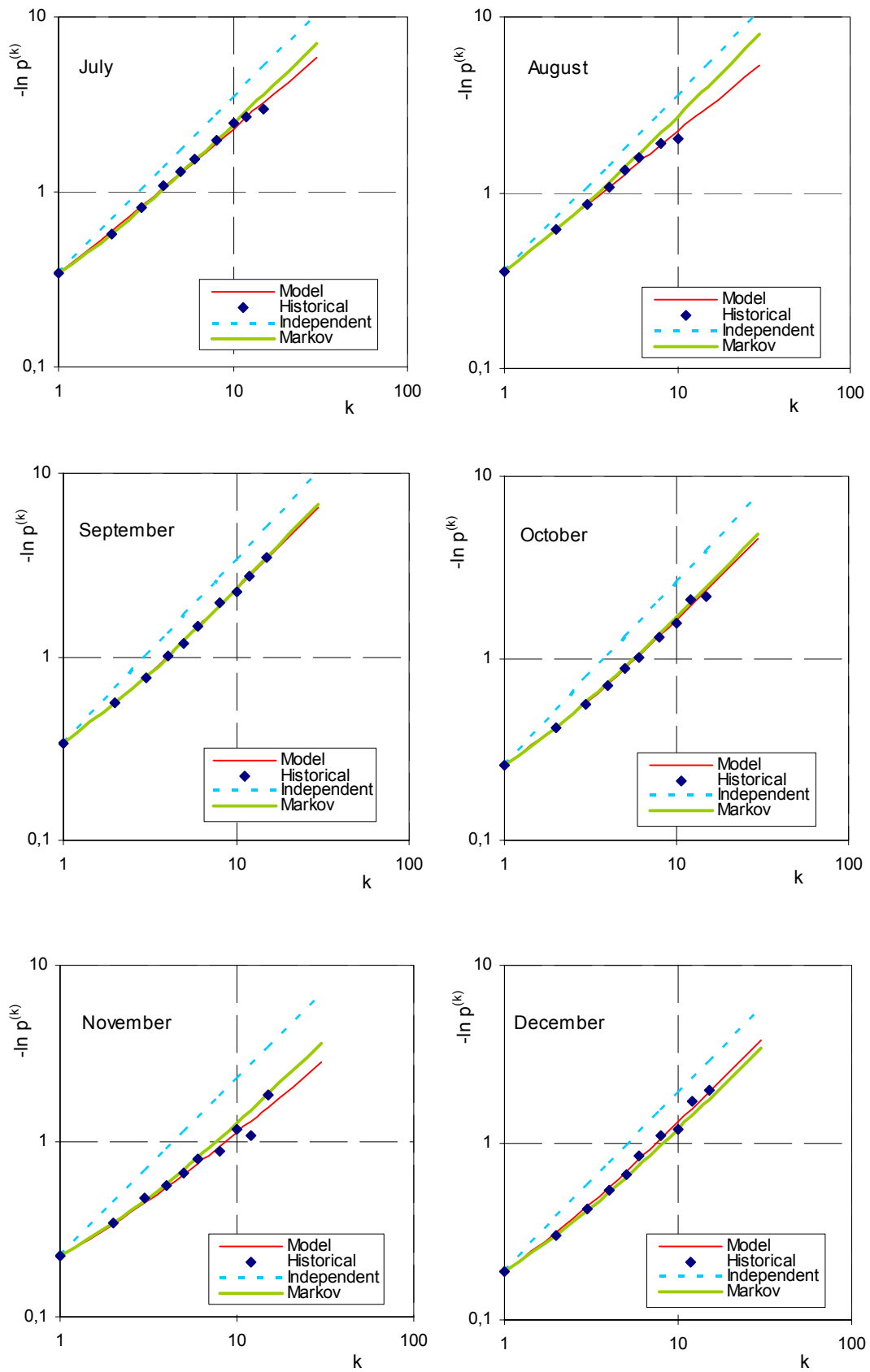
Σχήμα A.36 sta usa 326255



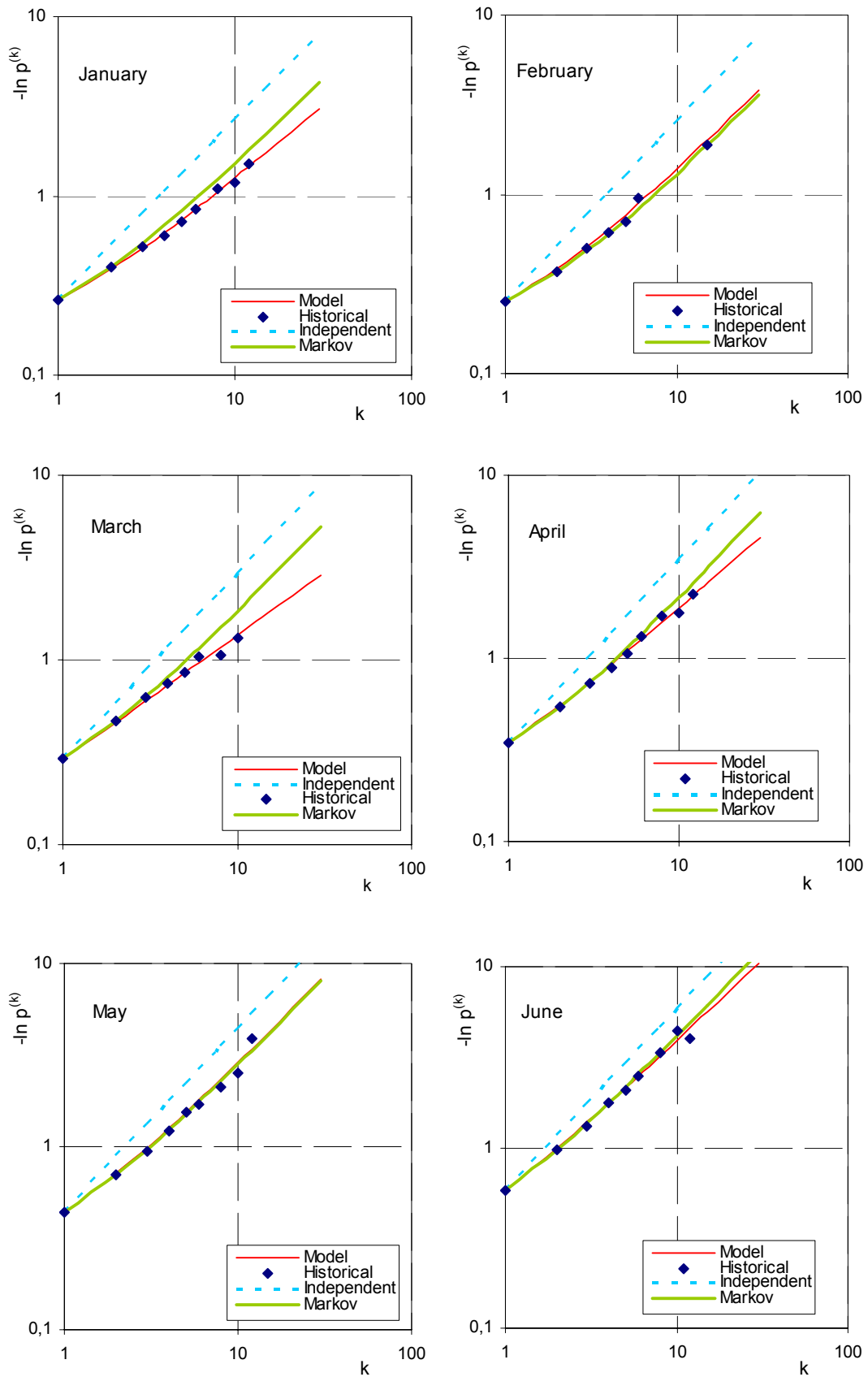
Σχήμα A.37 sta usa 326255



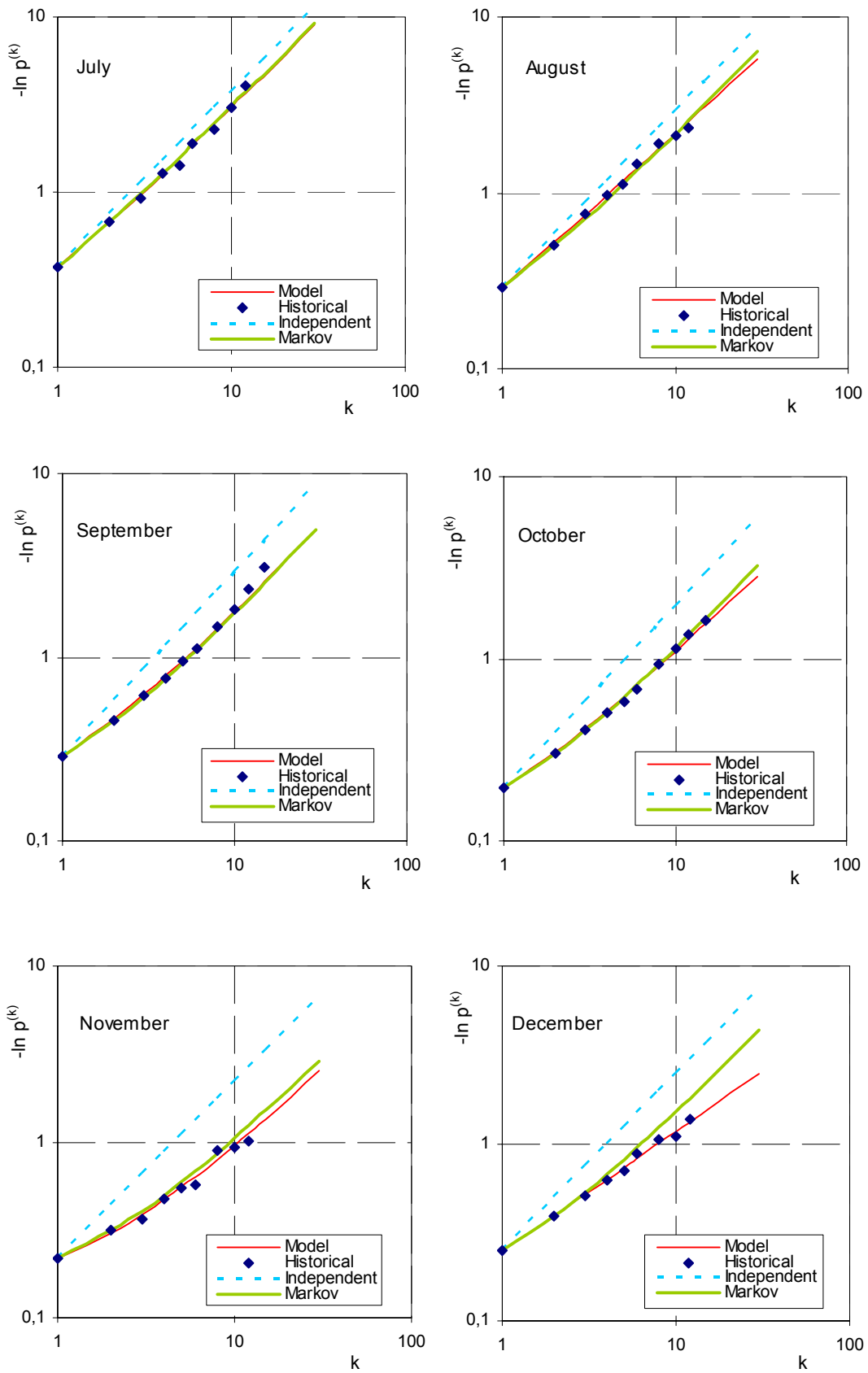
Σχήμα A.38 sta usa 144972



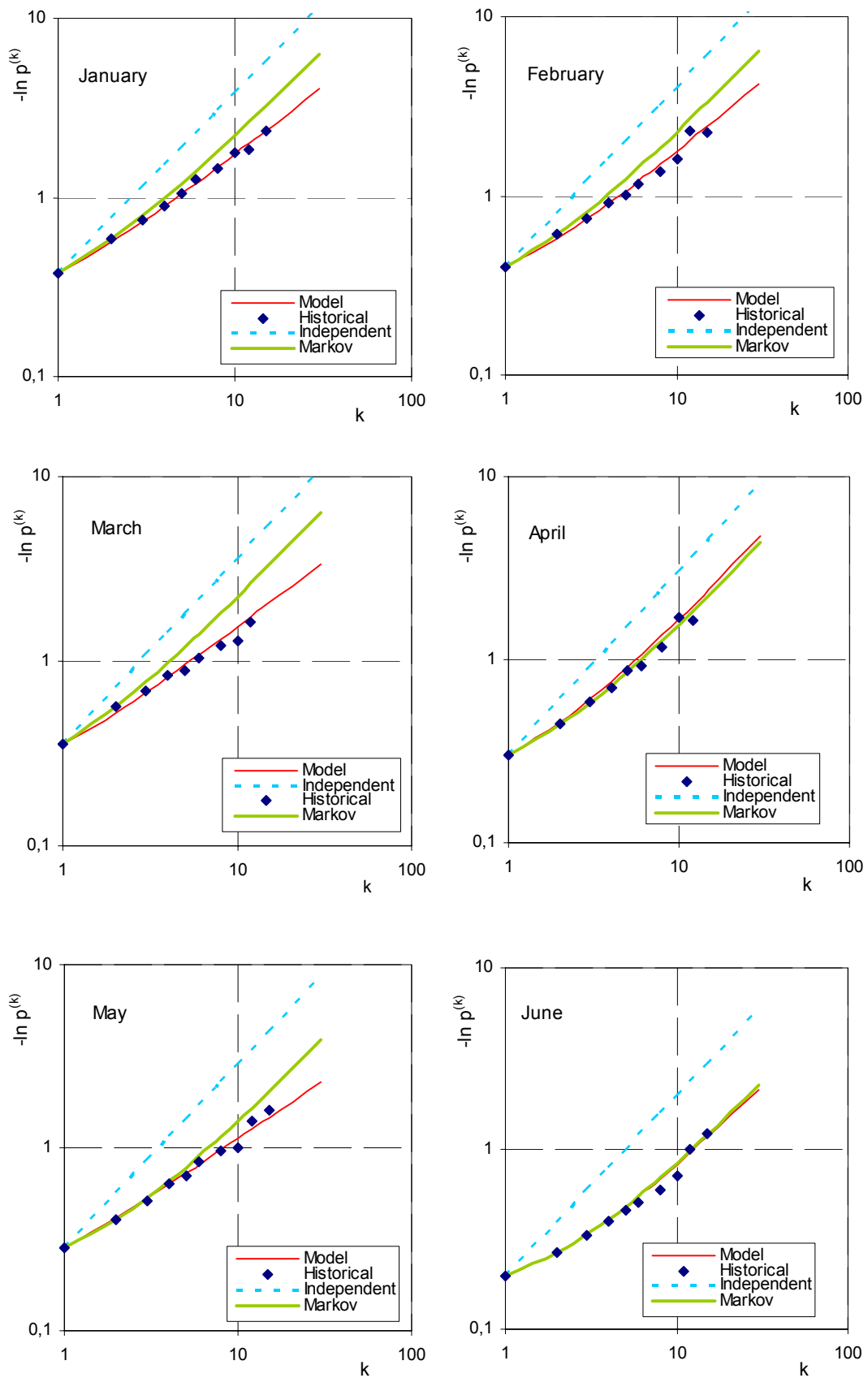
Σχήμα A.39 sta usa 144972



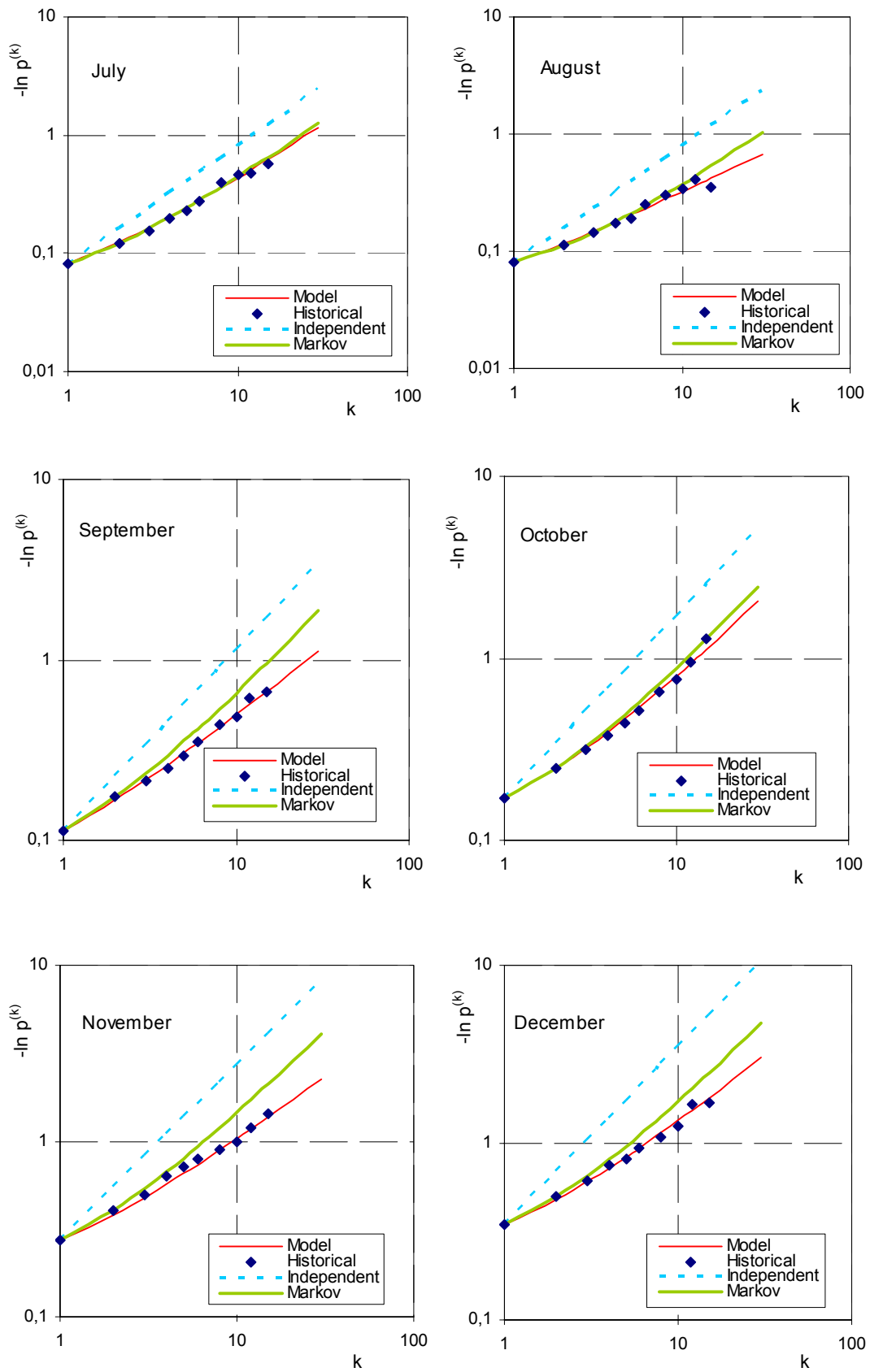
Σχήμα A.40 sta usa 322188



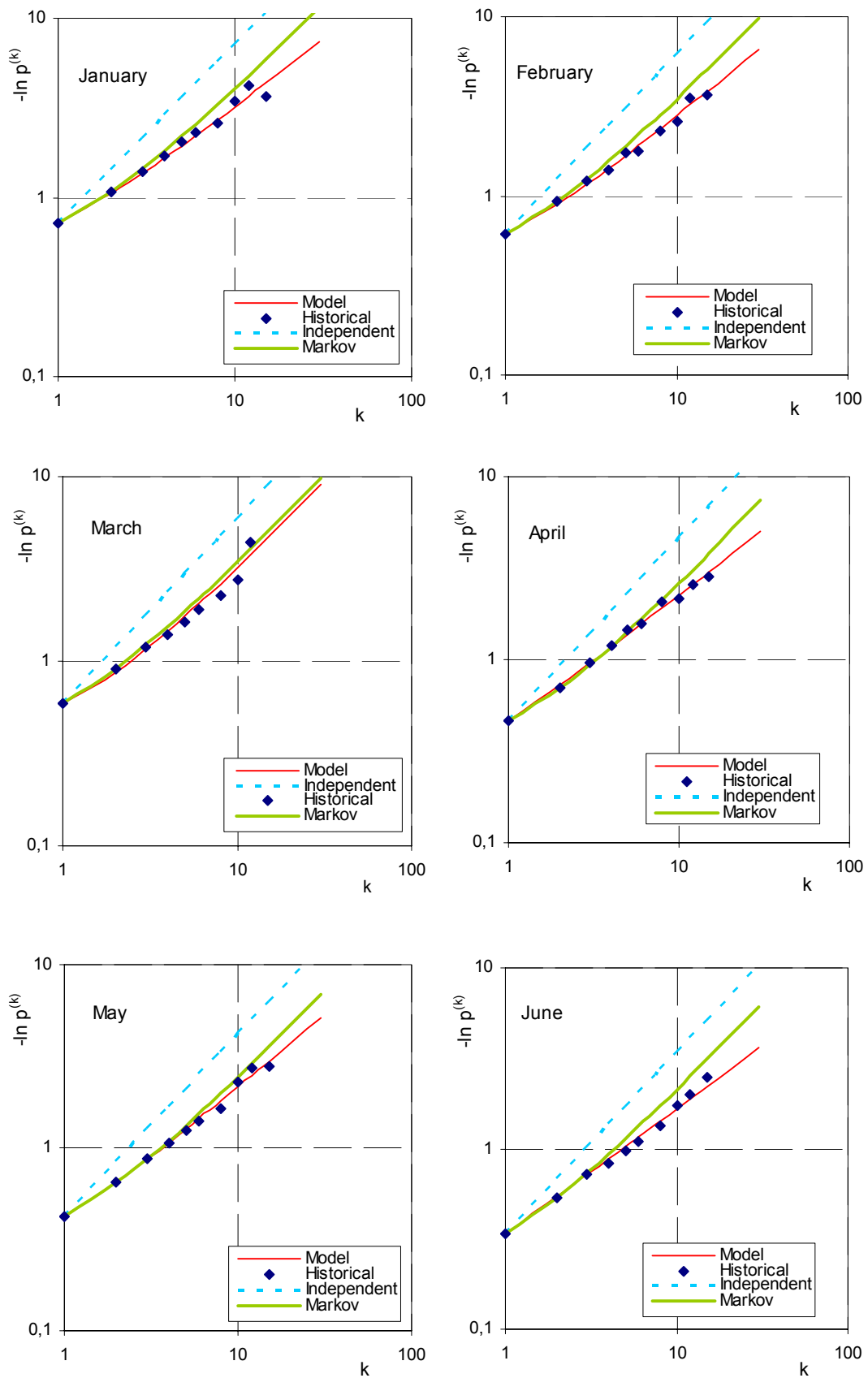
Σχήμα A.41 sta usa 322188



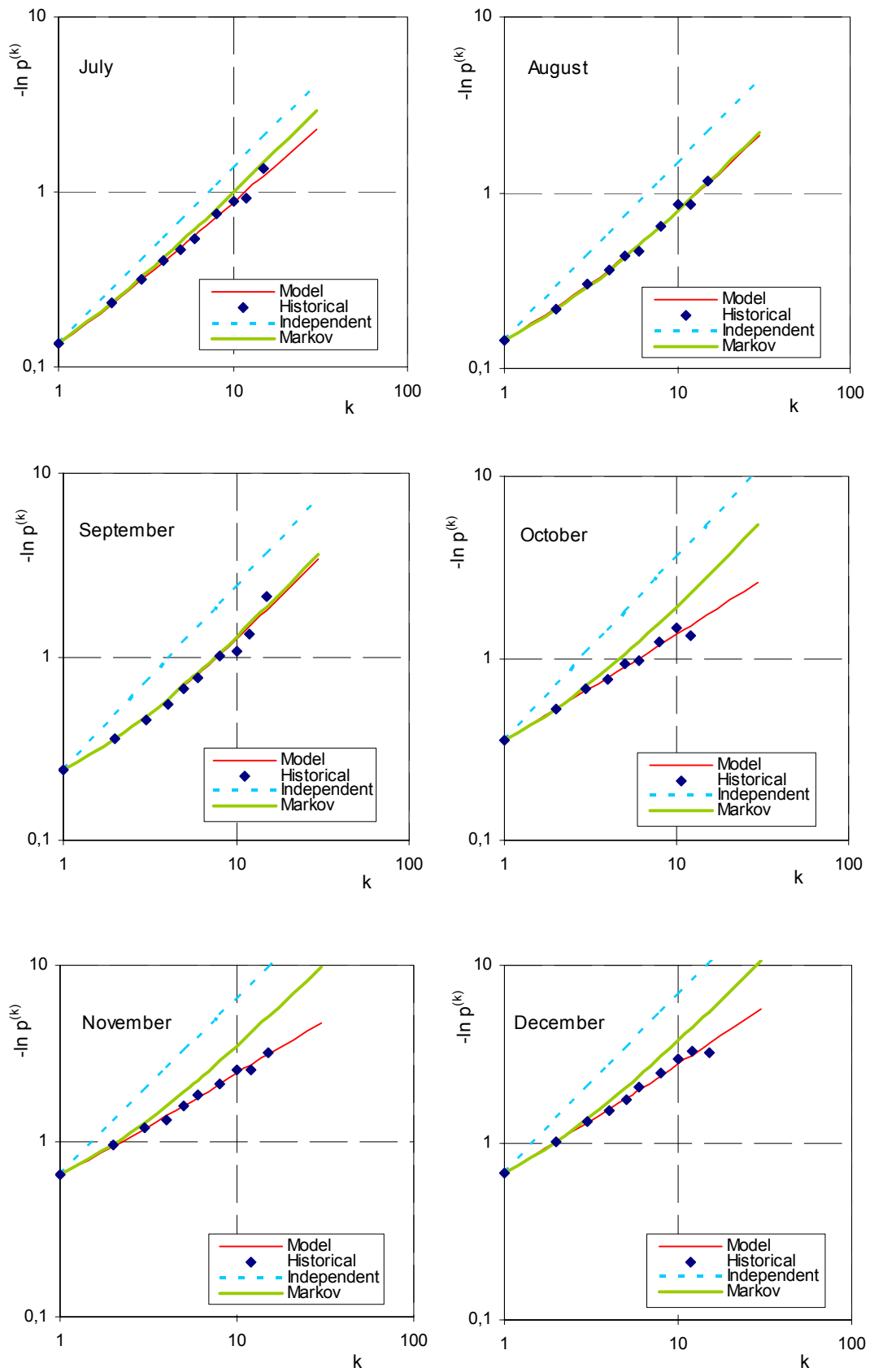
Σχήμα A.42 sta usa 269171



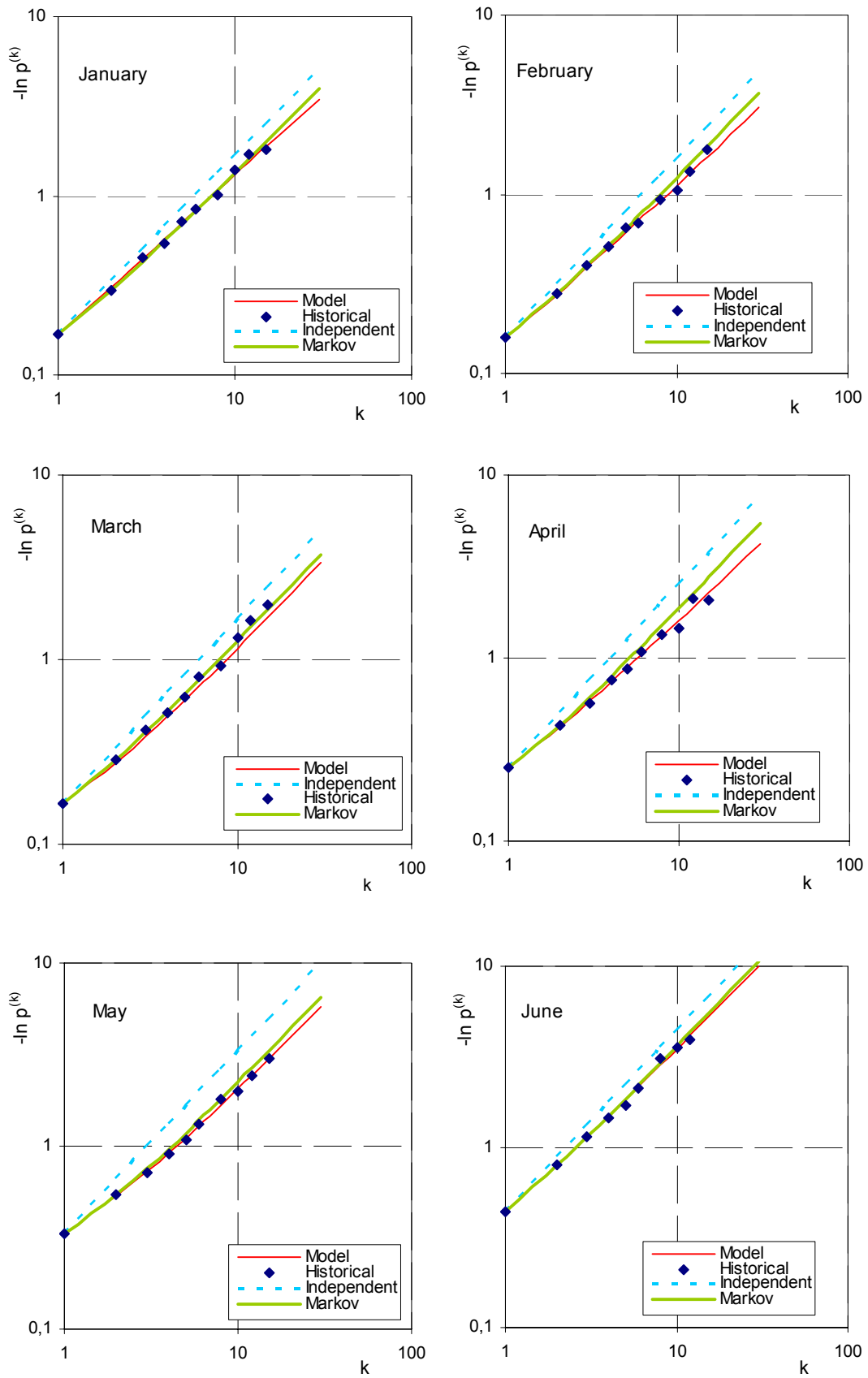
Σχήμα A.43 sta usa 269171



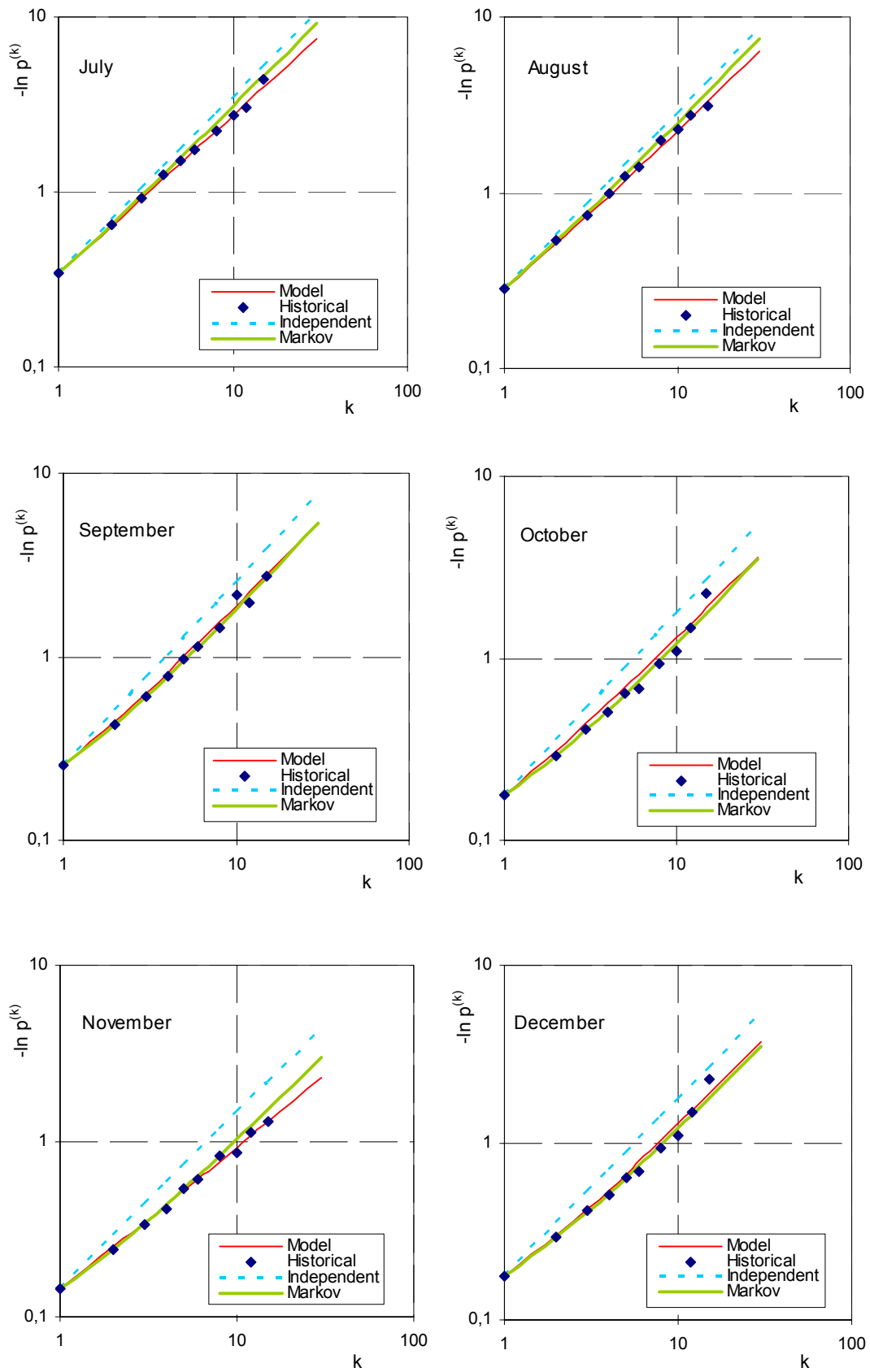
Σχήμα A.44 sta usa 106152



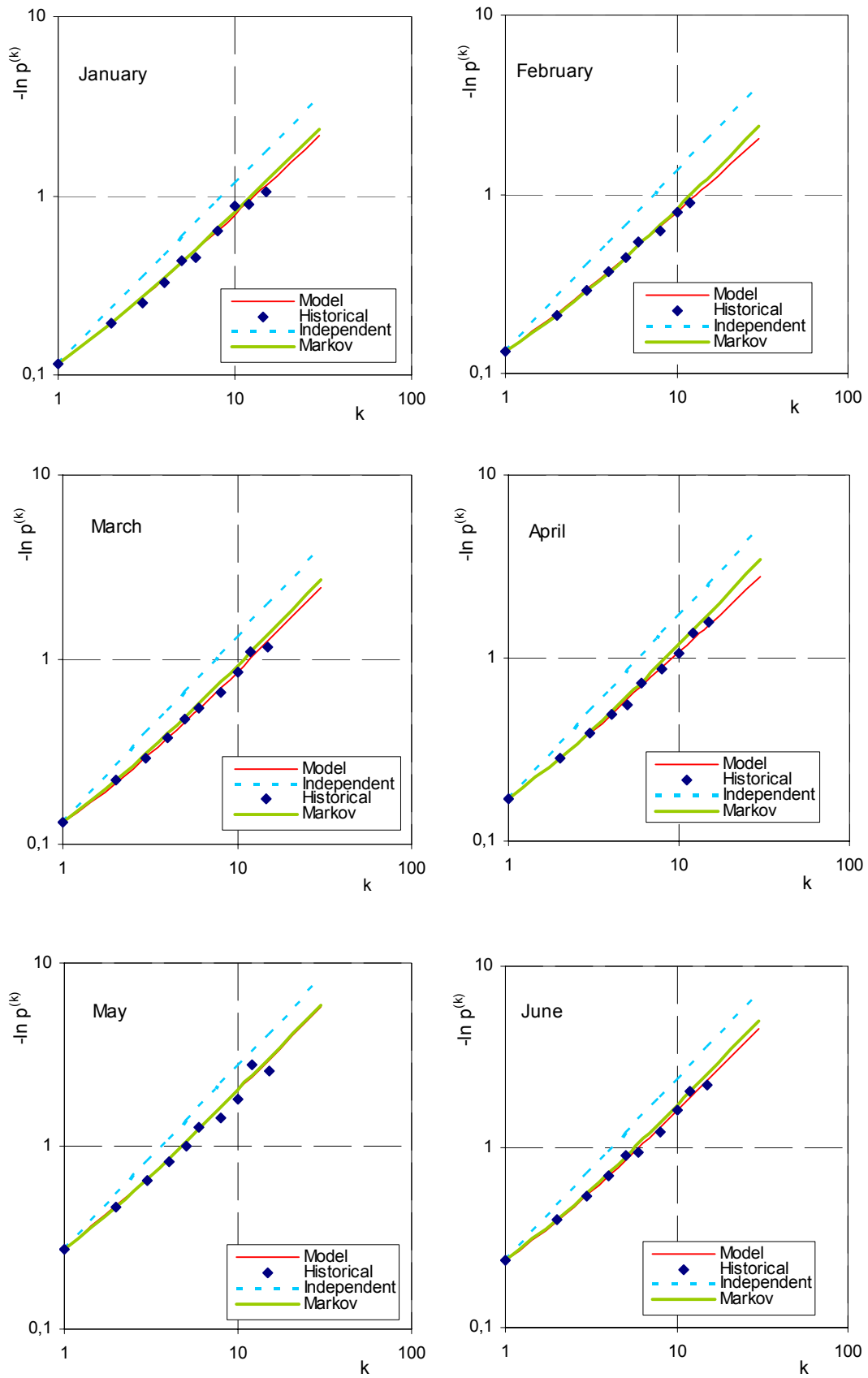
Σχήμα A.45 sta usa 106152



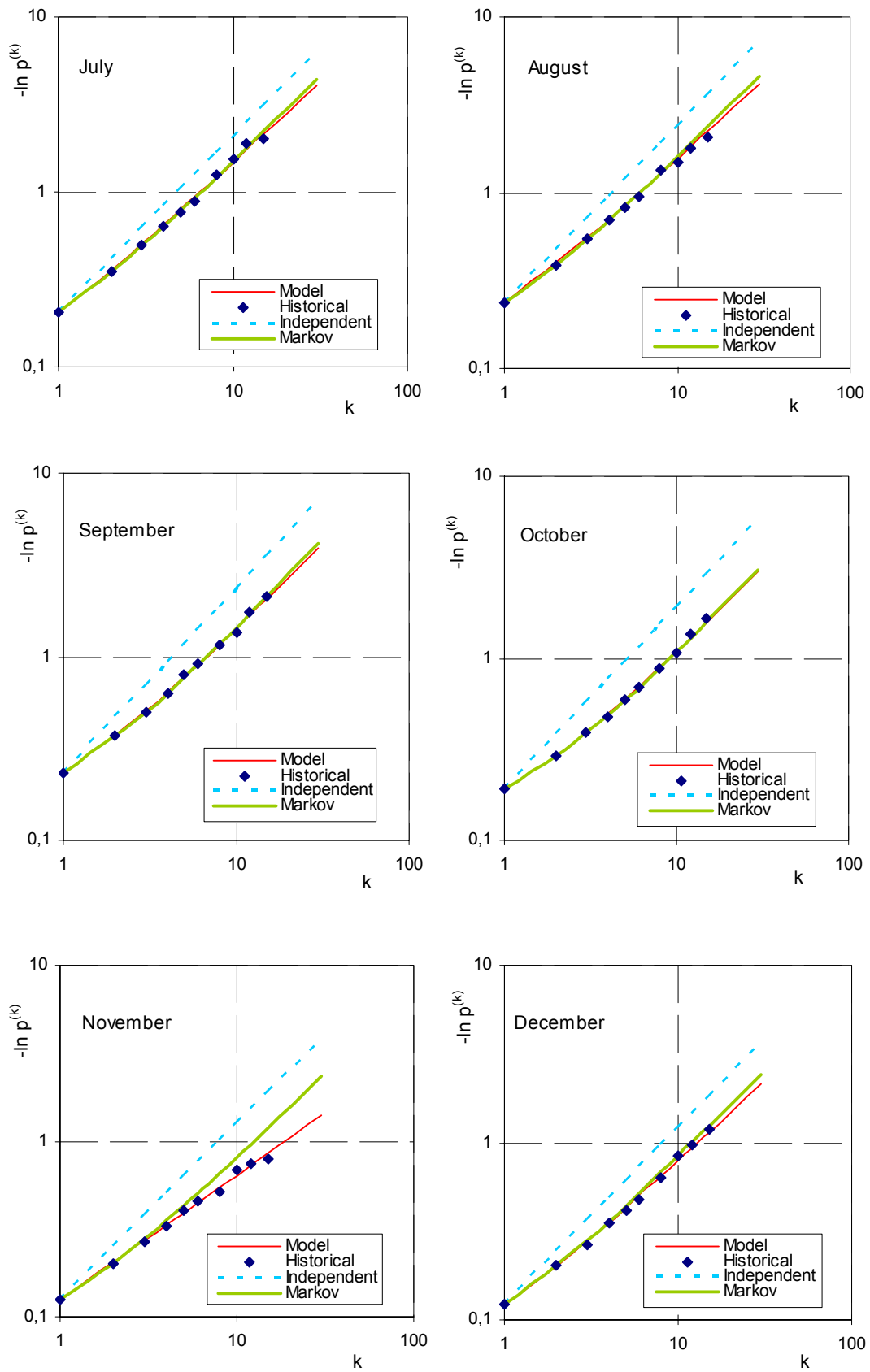
Σχήμα A.46 sta usa 324418



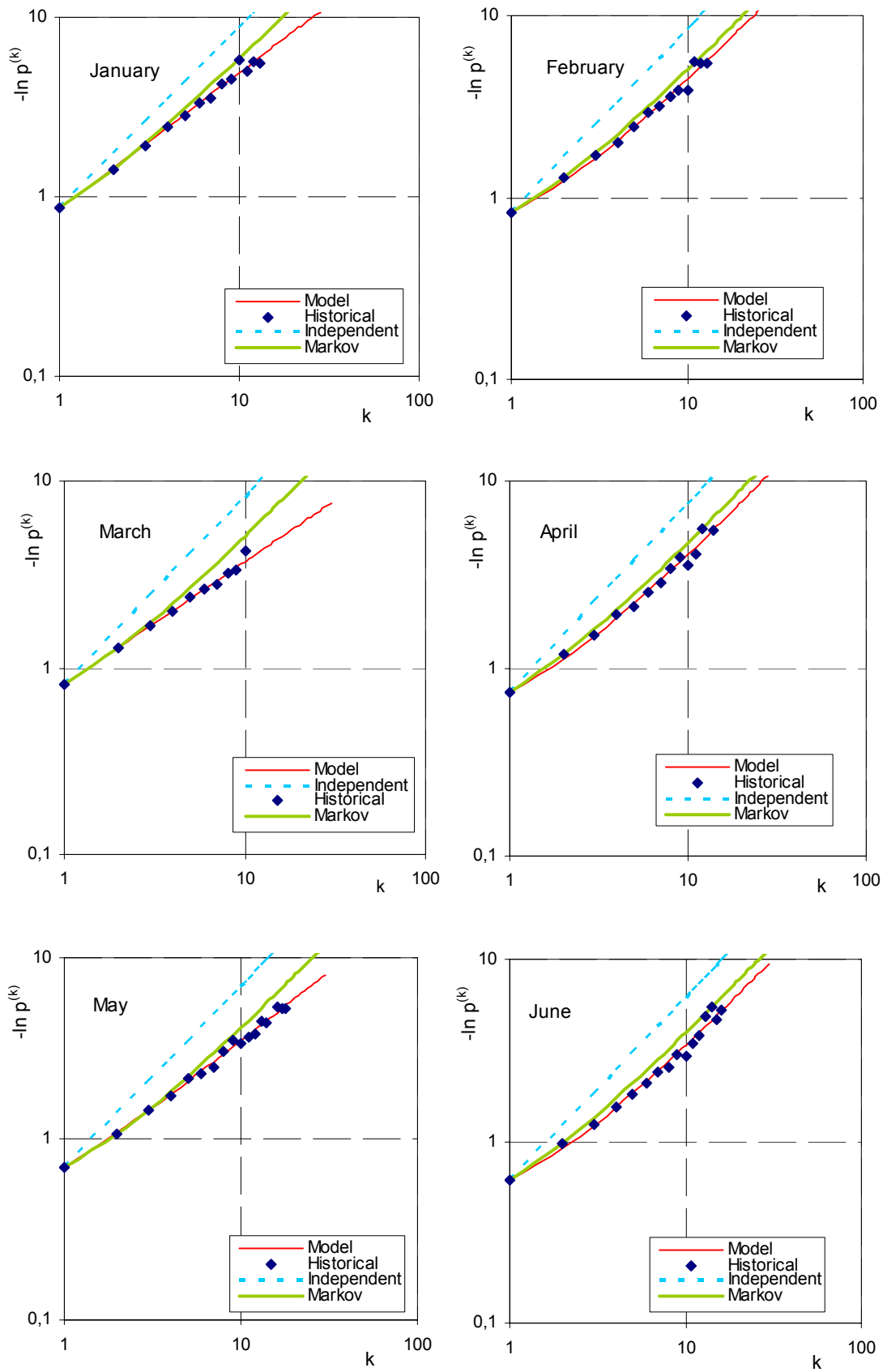
Σχήμα A.47 sta usa 324418



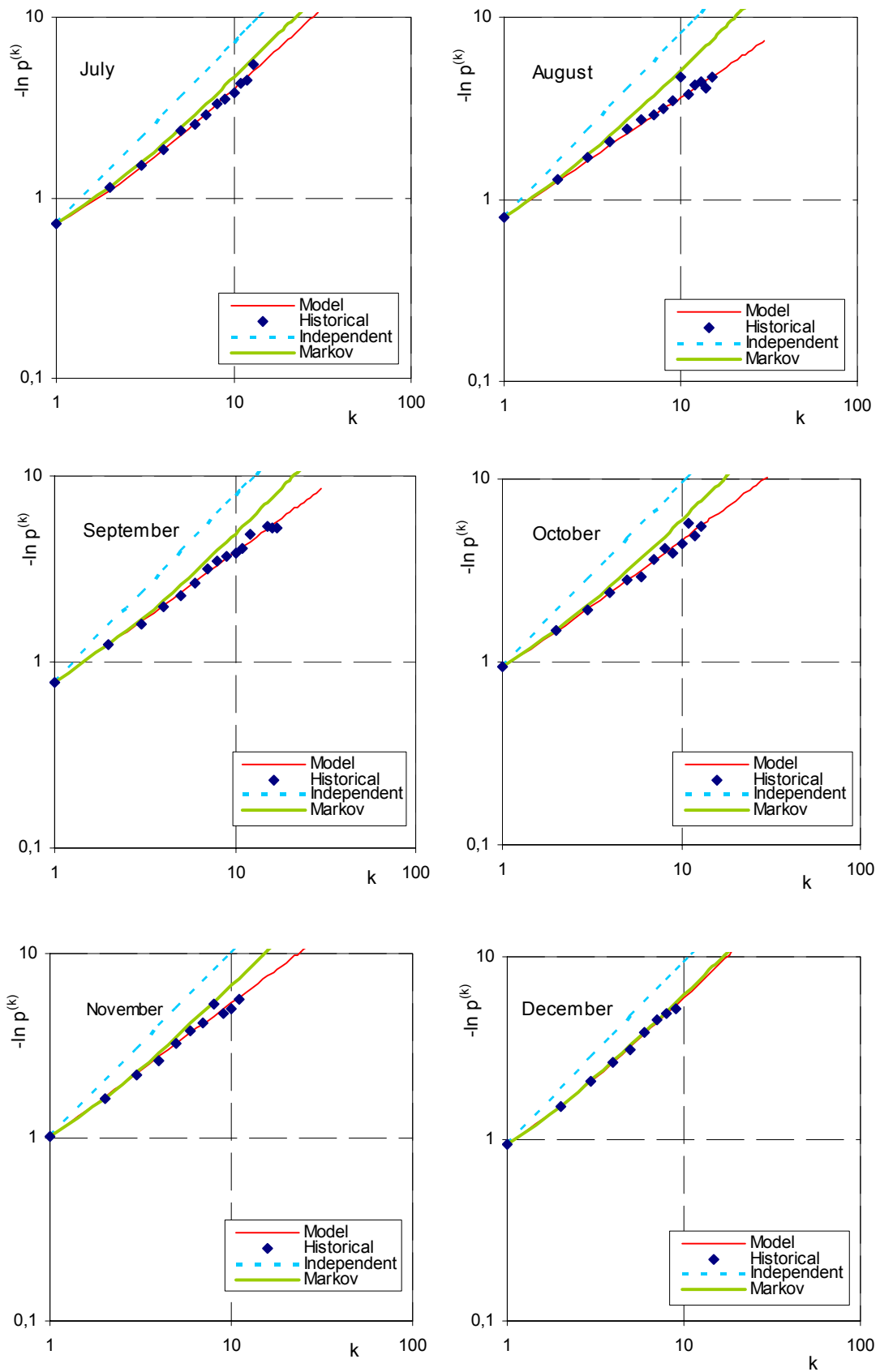
Σχήμα A.48 sta usa 412121



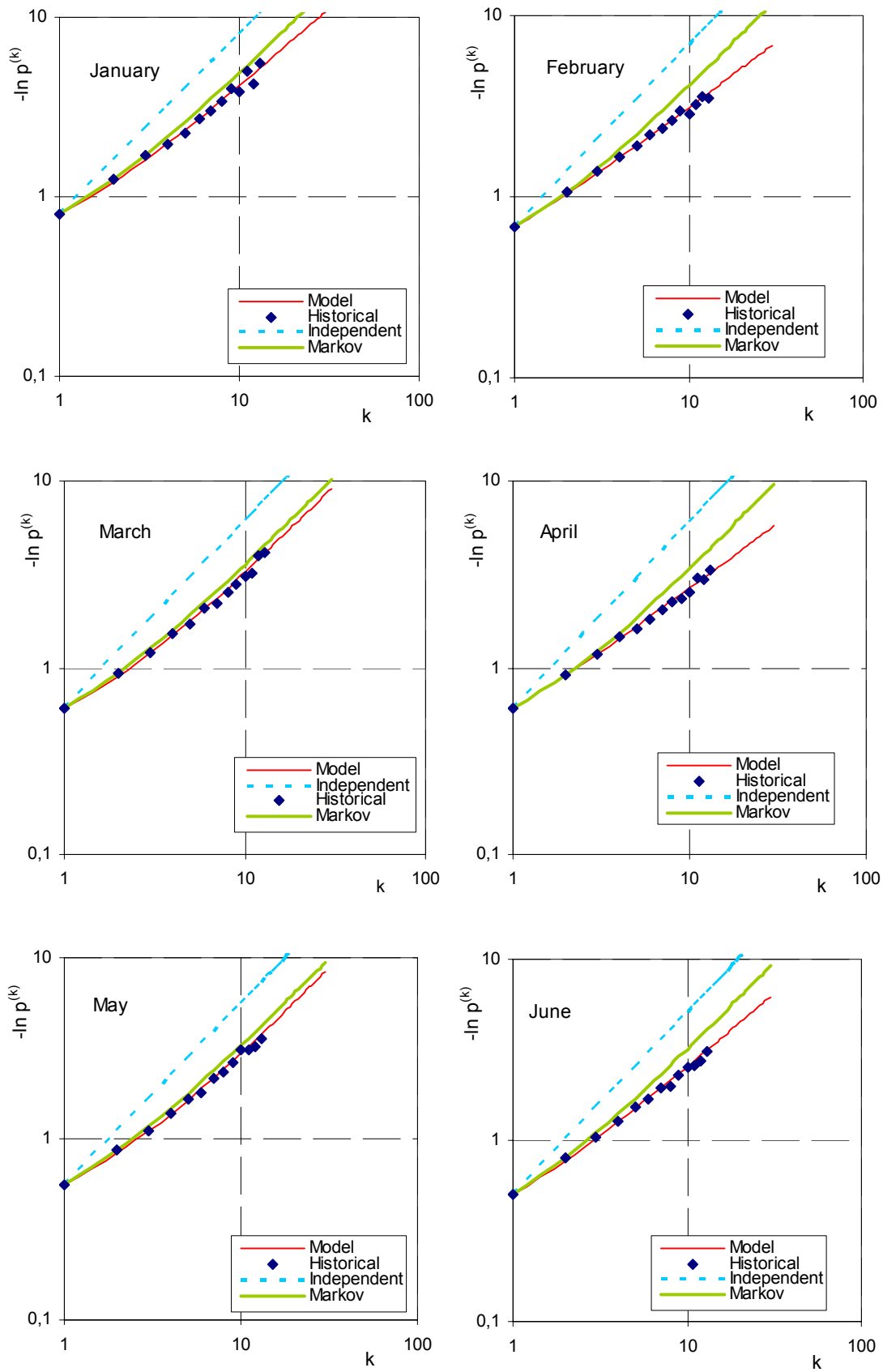
Σχήμα A.49 sta usa 412121



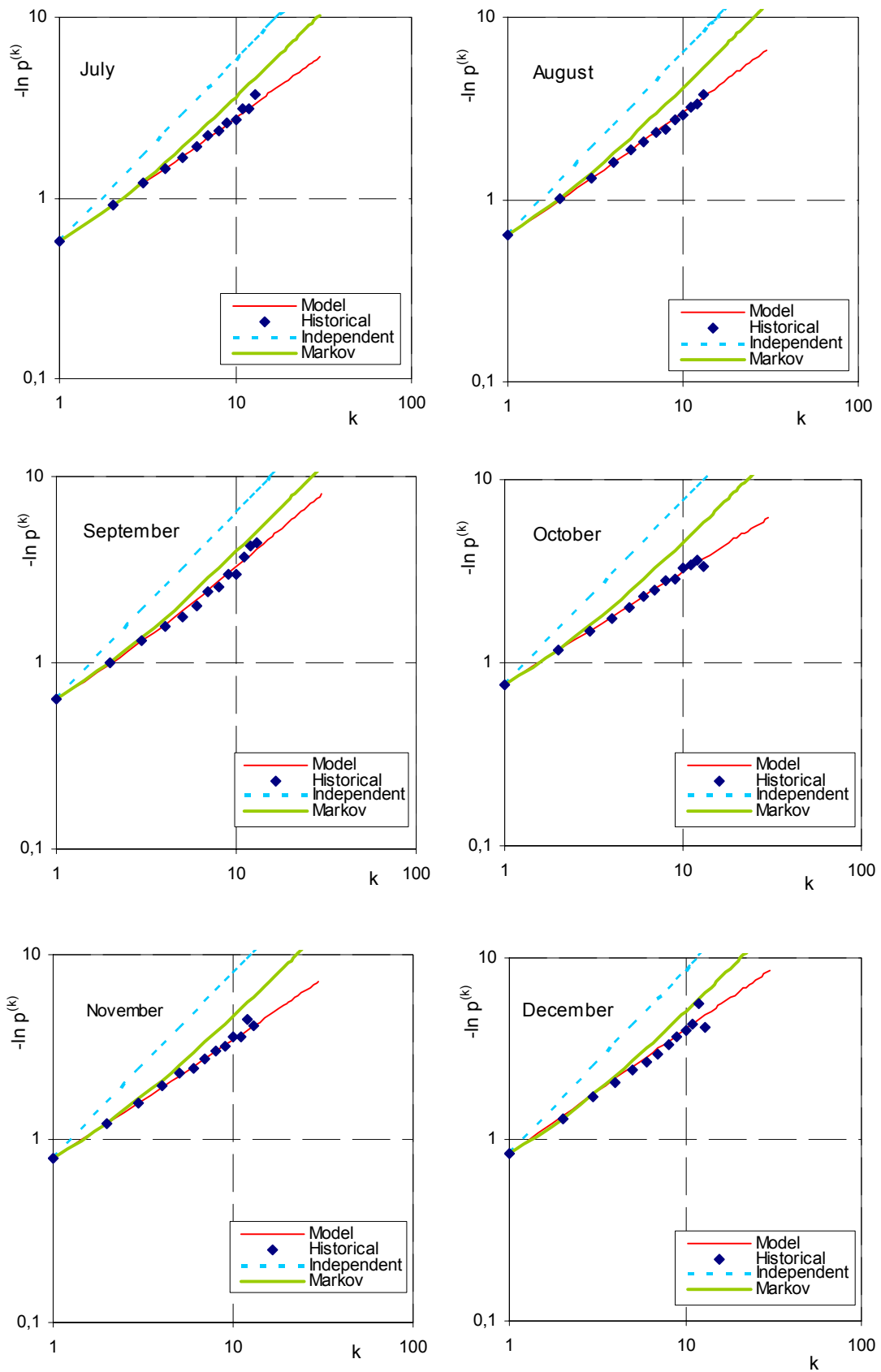
Σχήμα A.50 sta uk 923753



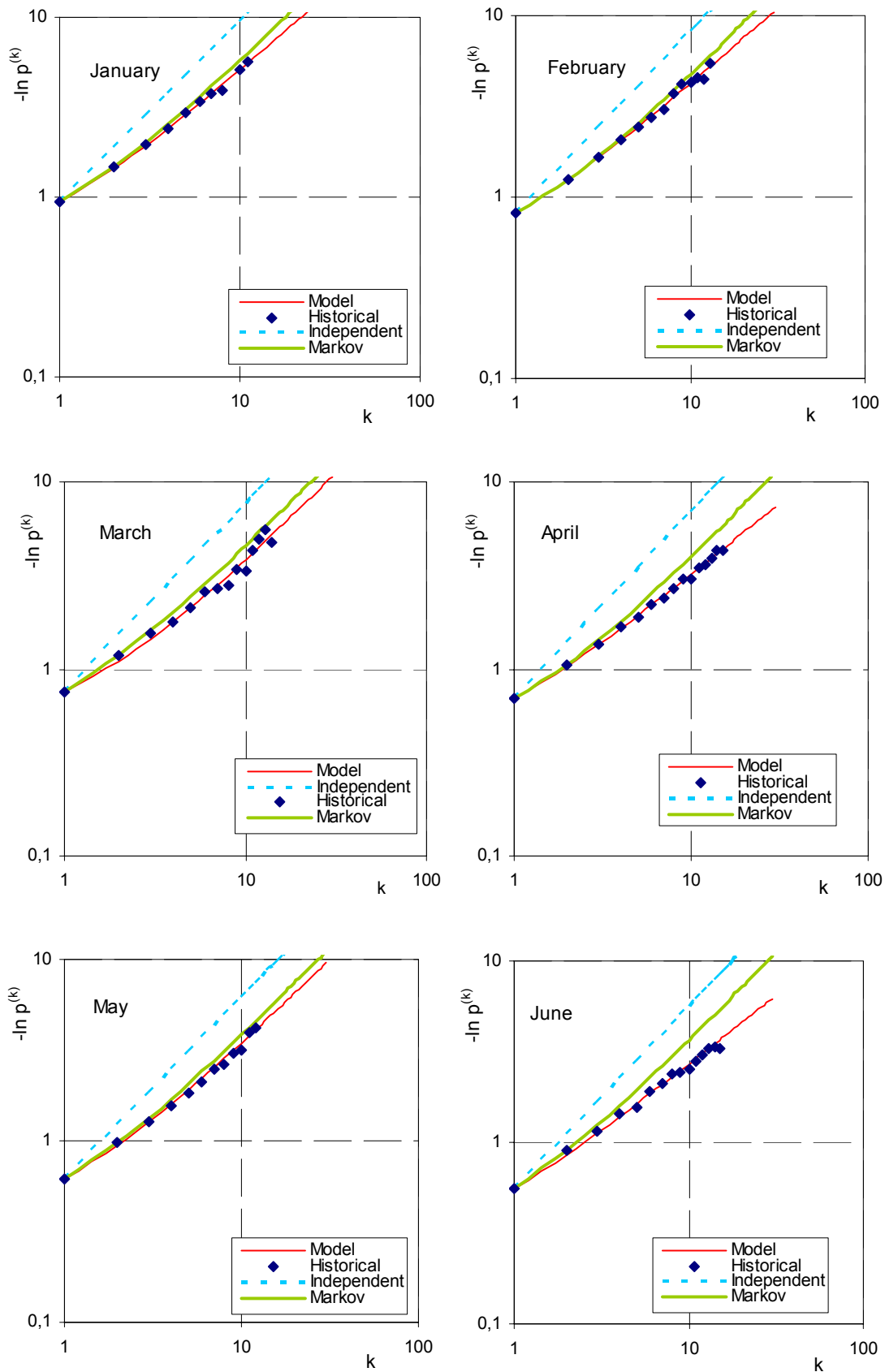
Σχήμα A.51 sta uk 923753



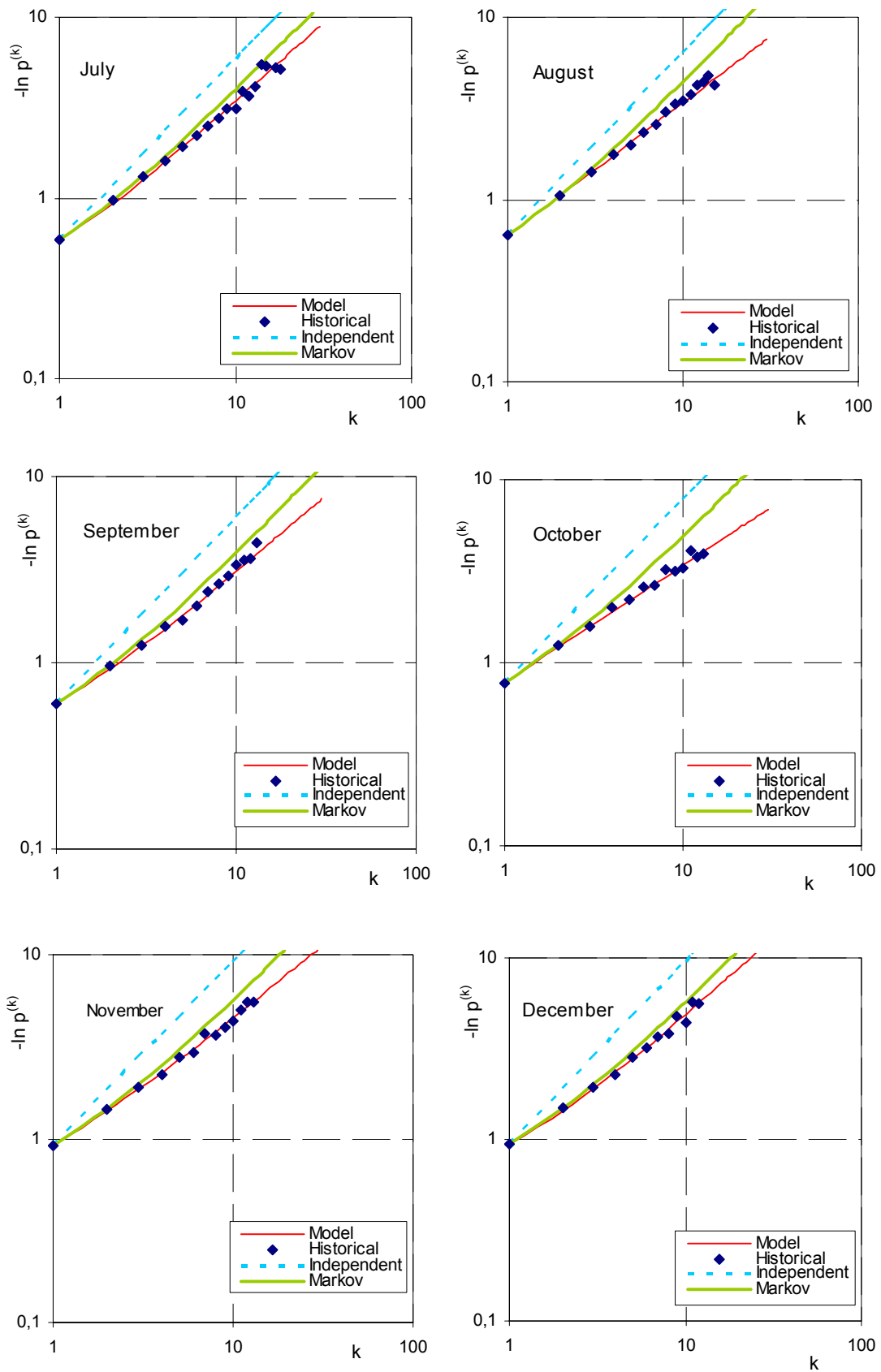
Σχήμα A.52 sta uk 404988



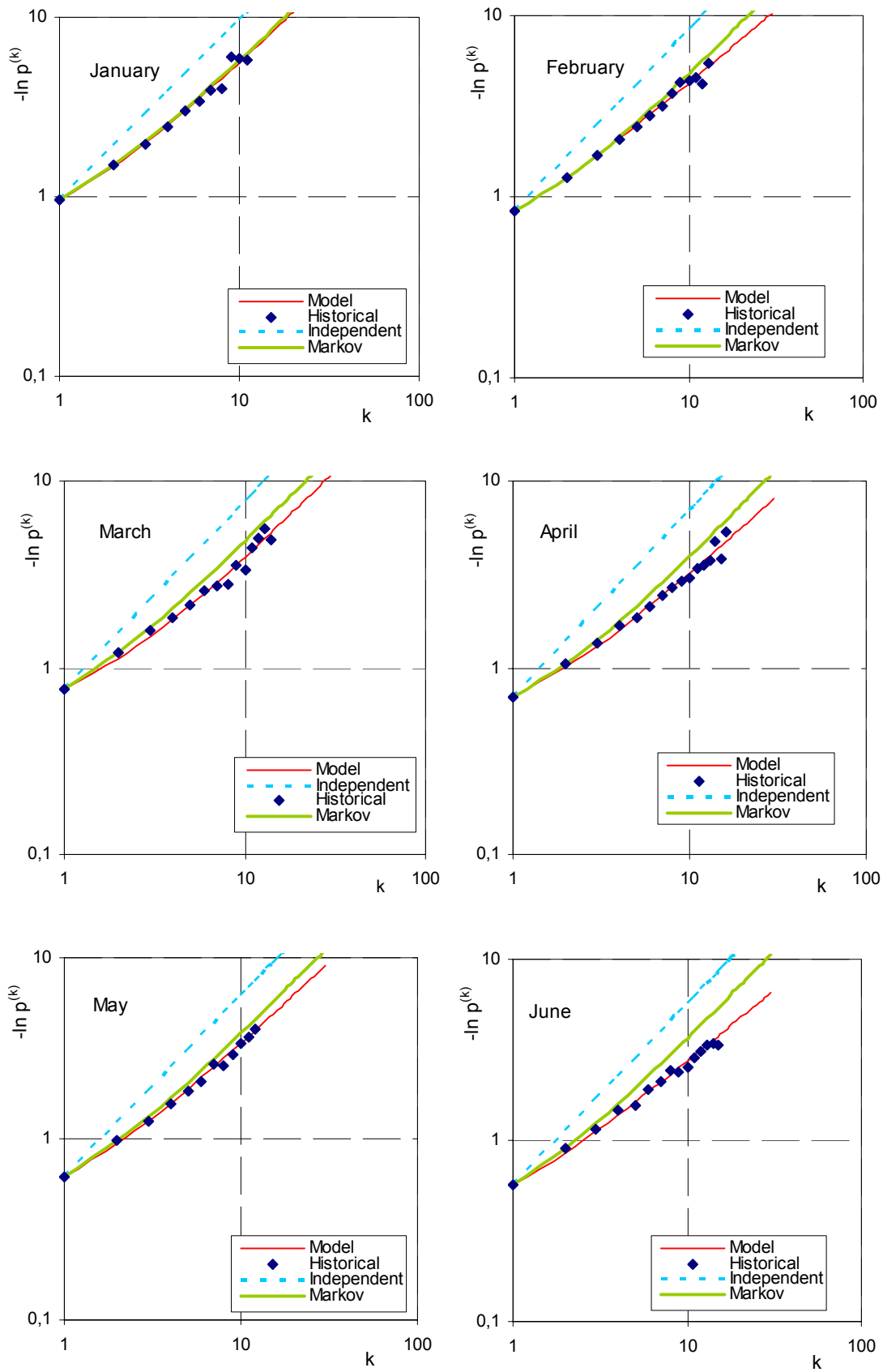
Σχήμα A.53 sta uk 404988



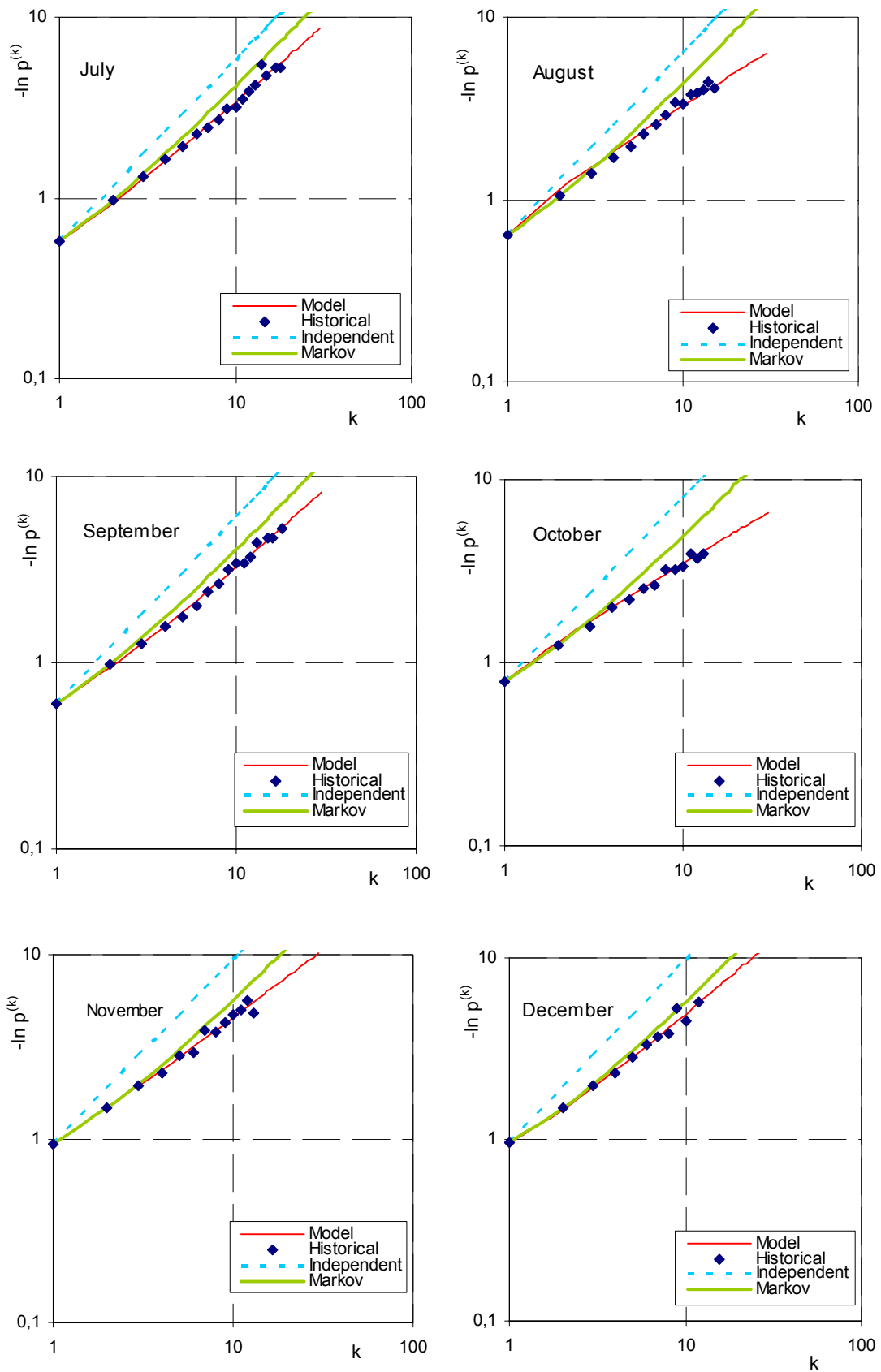
Σχήμα A.54 sta uk 4061



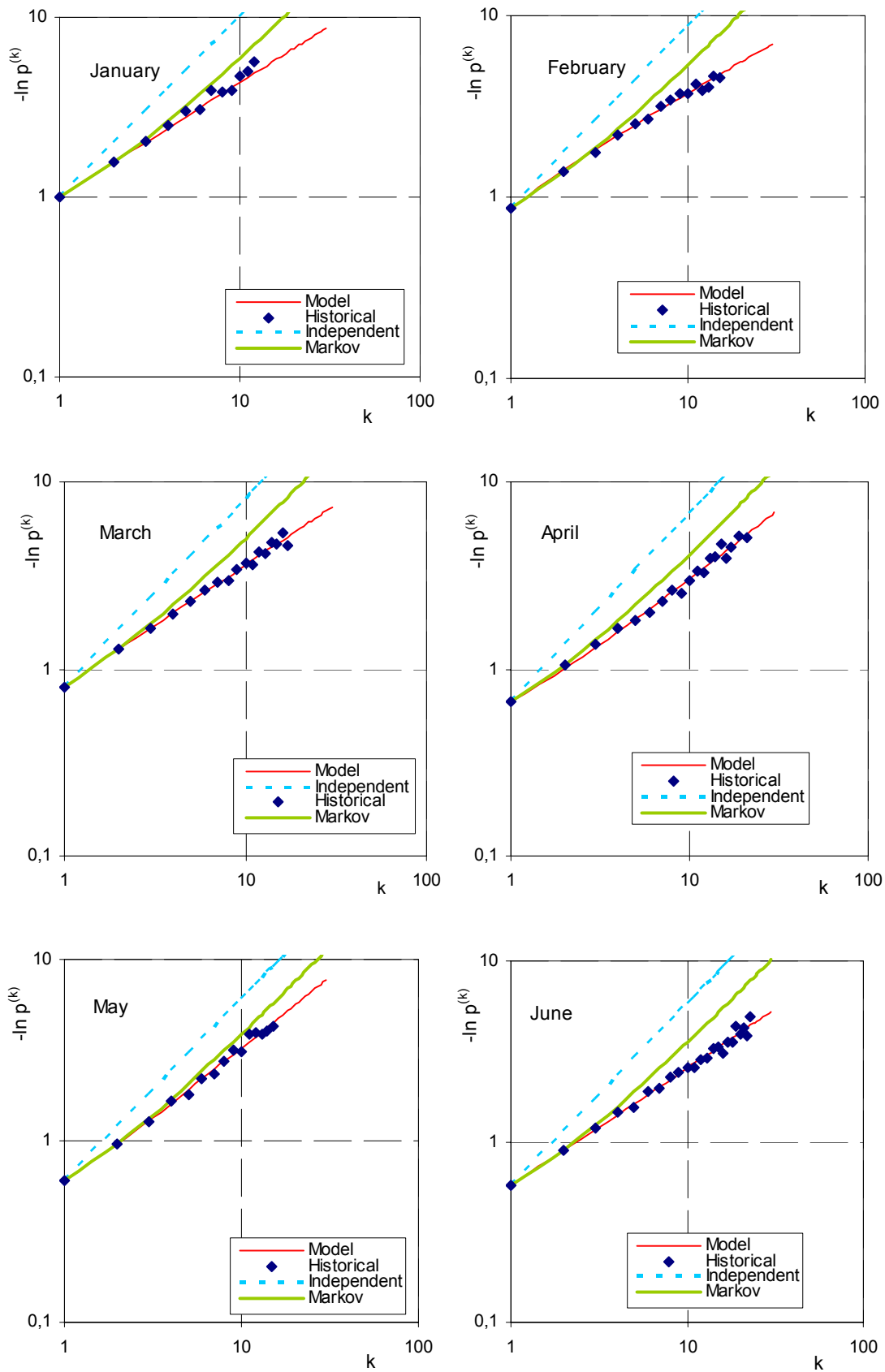
Σχήμα A.55 sta uk 4061



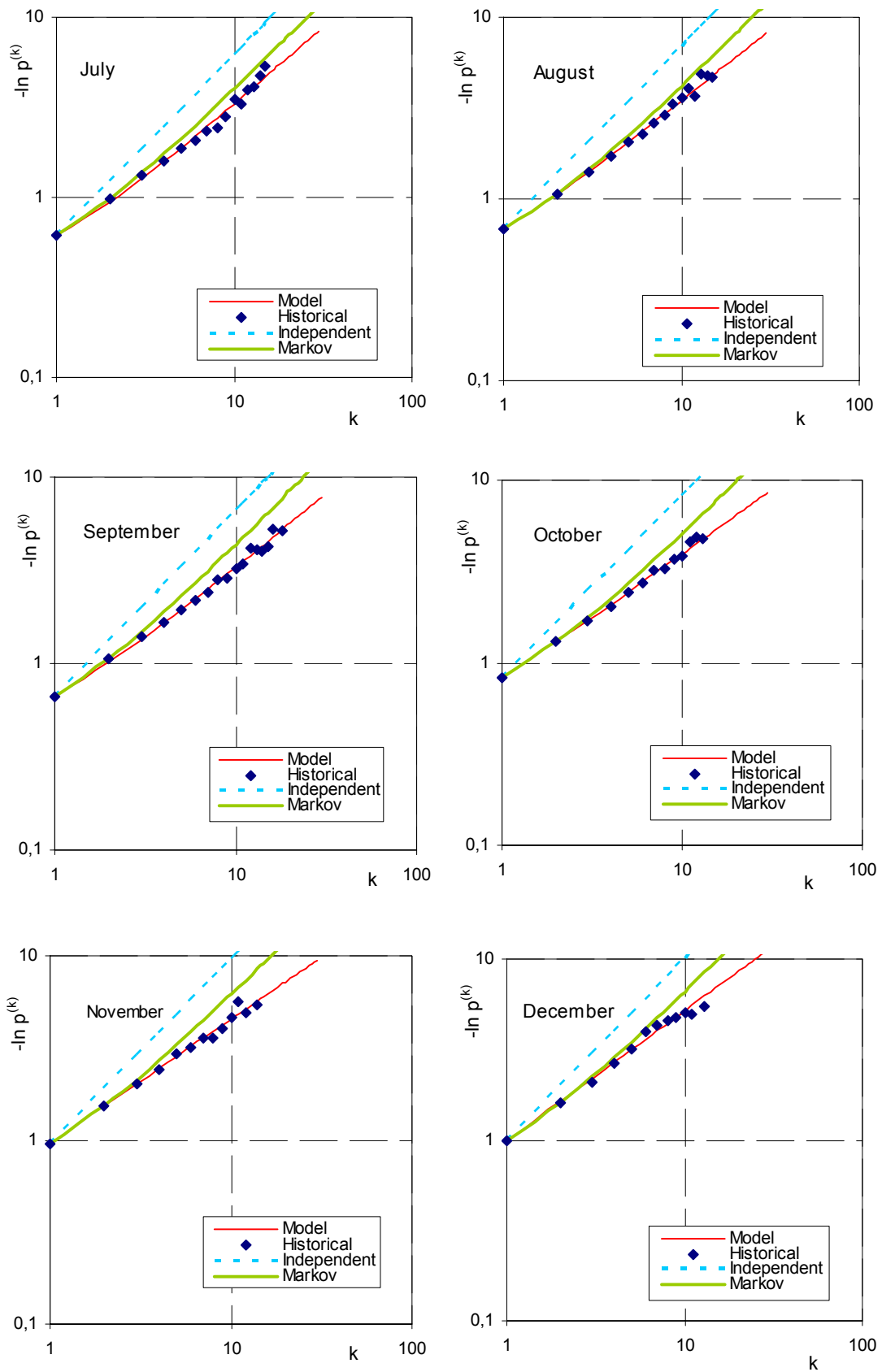
Σχήμα A.56 sta uk 82583



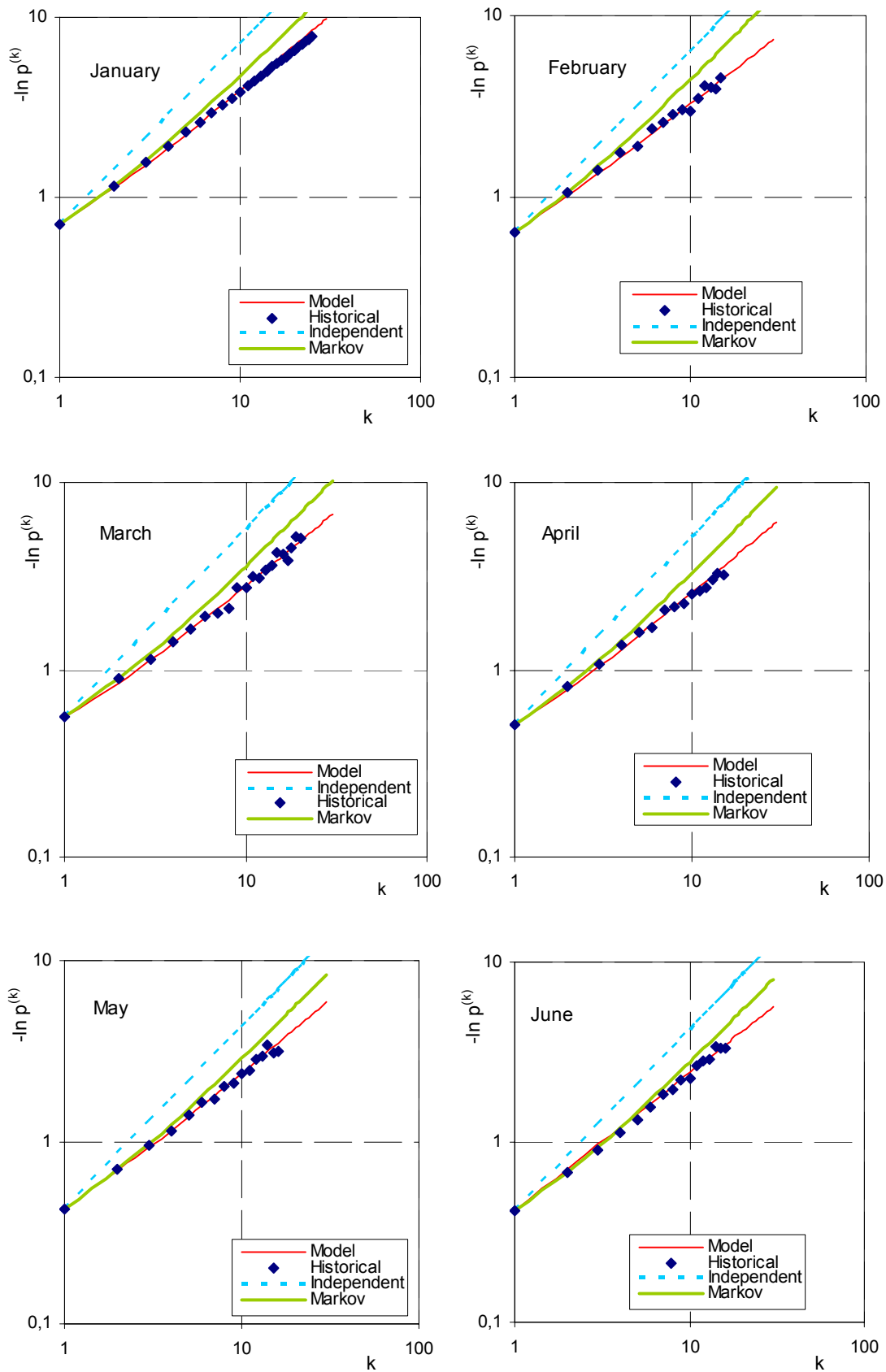
Σχήμα A.57 sta uk 82583



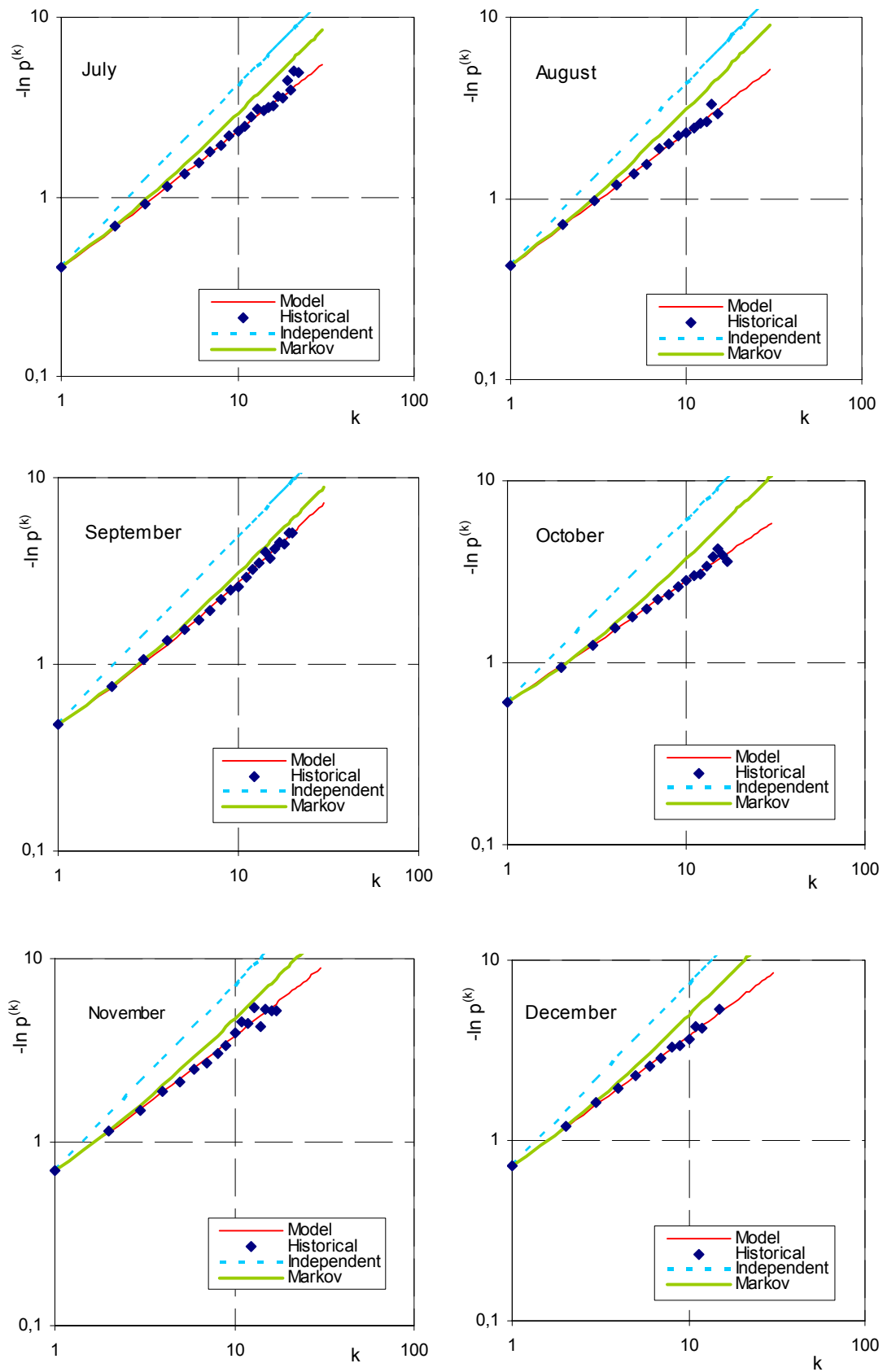
Σχήμα A.58 sta uk 107389



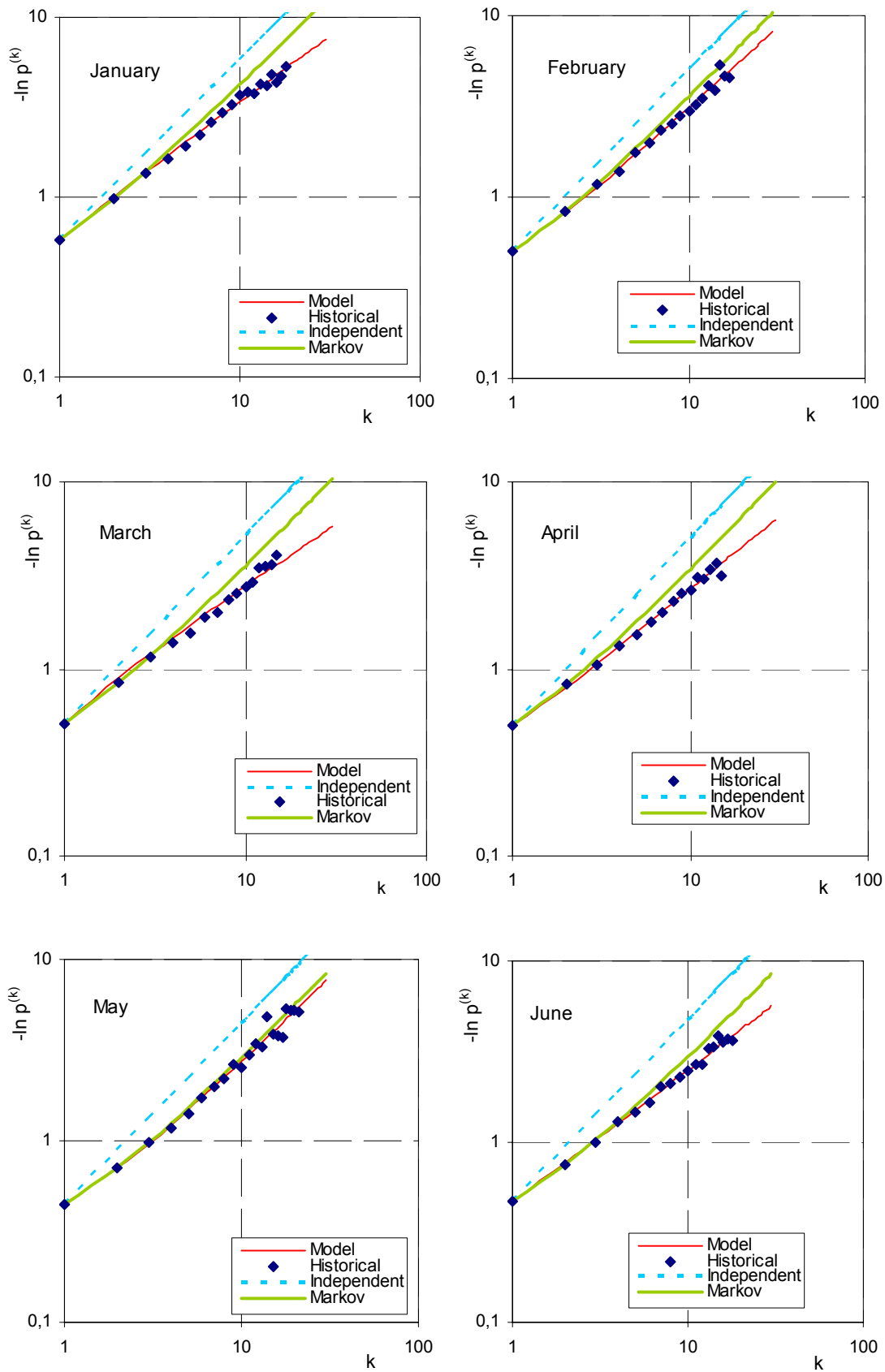
Σχήμα A.59 sta uk 107389



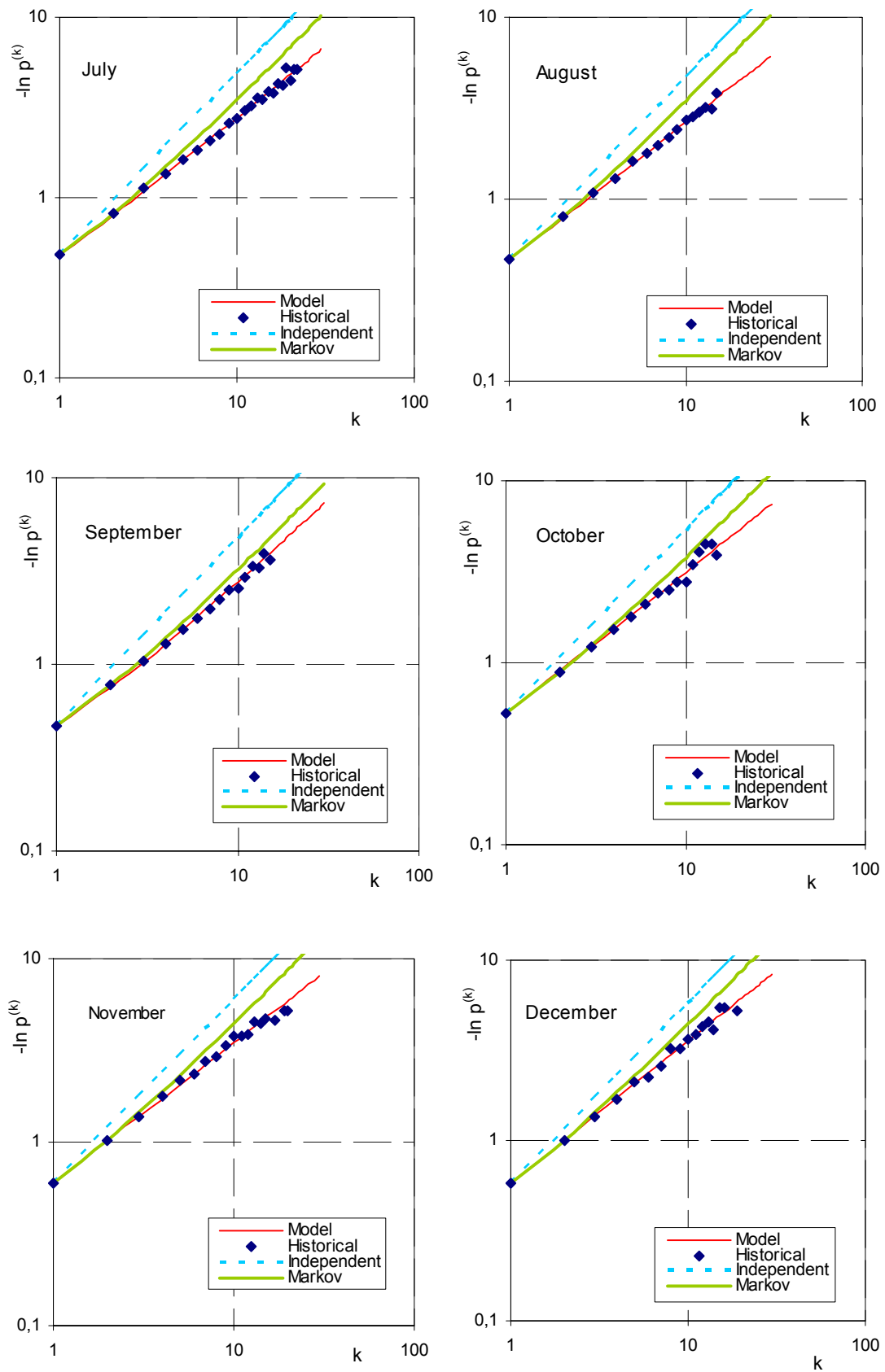
Σχήμα A.60 sta uk 305050



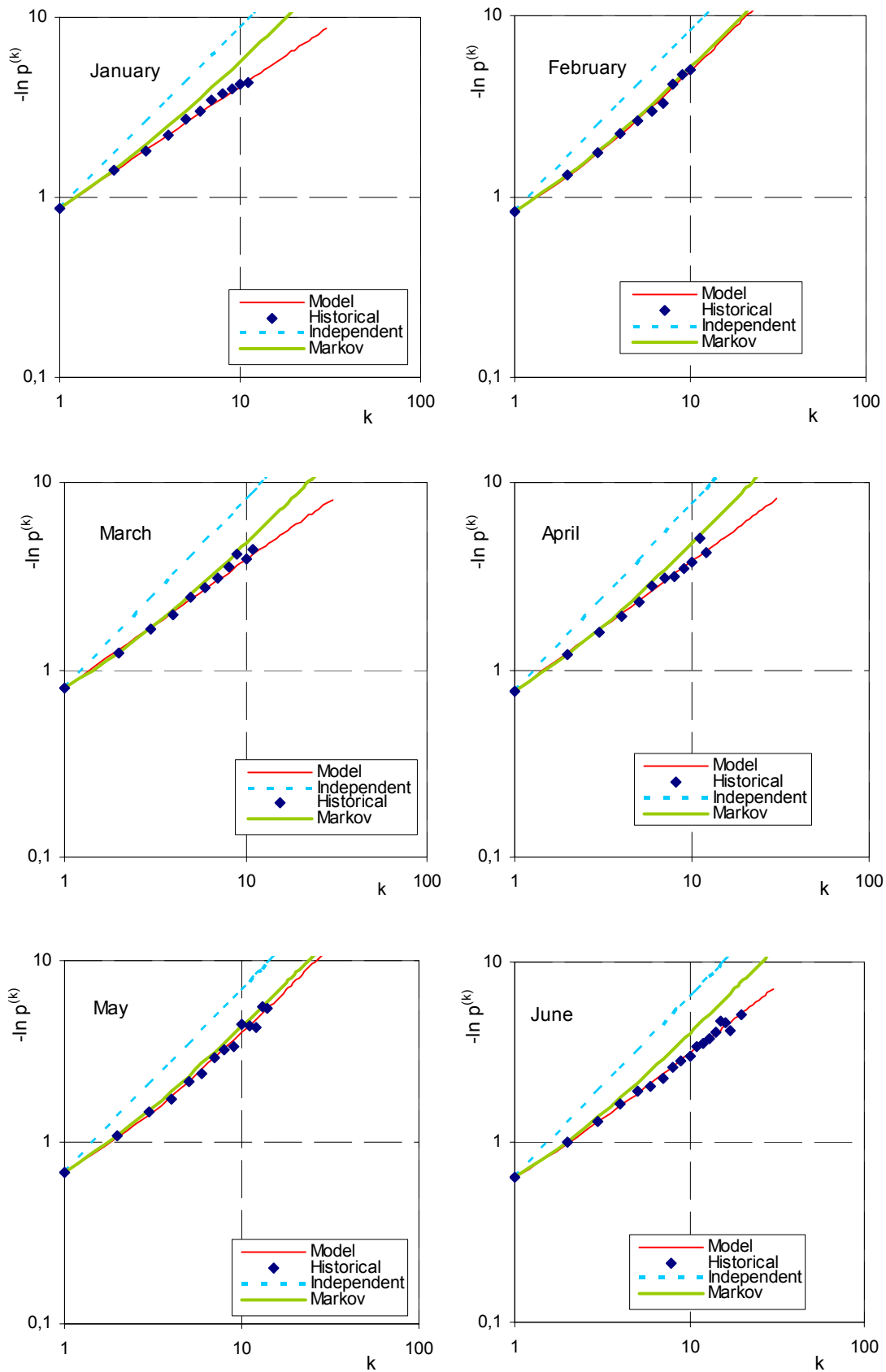
Σχήμα A.61 sta uk 305050



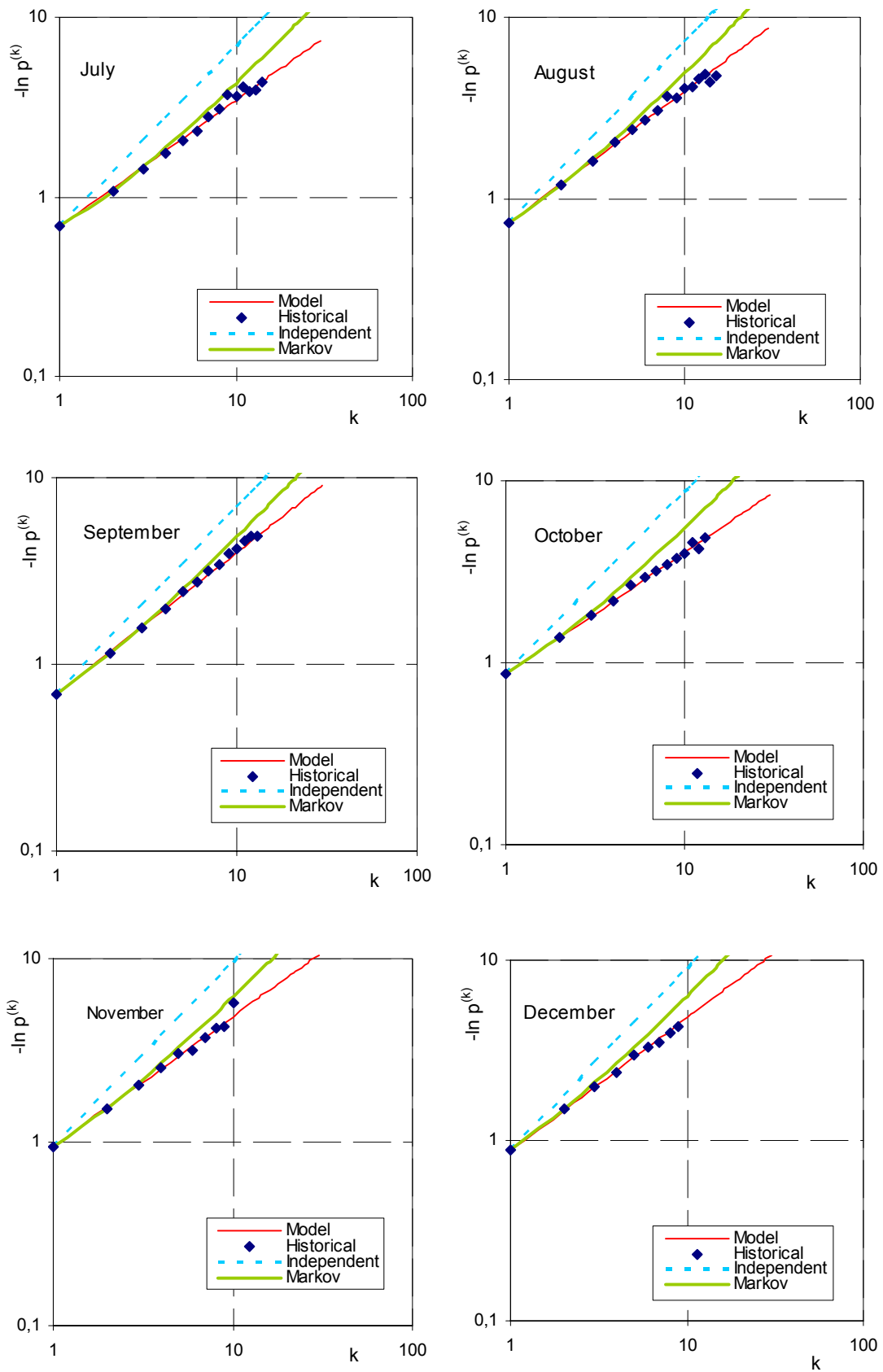
Σχήμα A.62 sta uk 189704



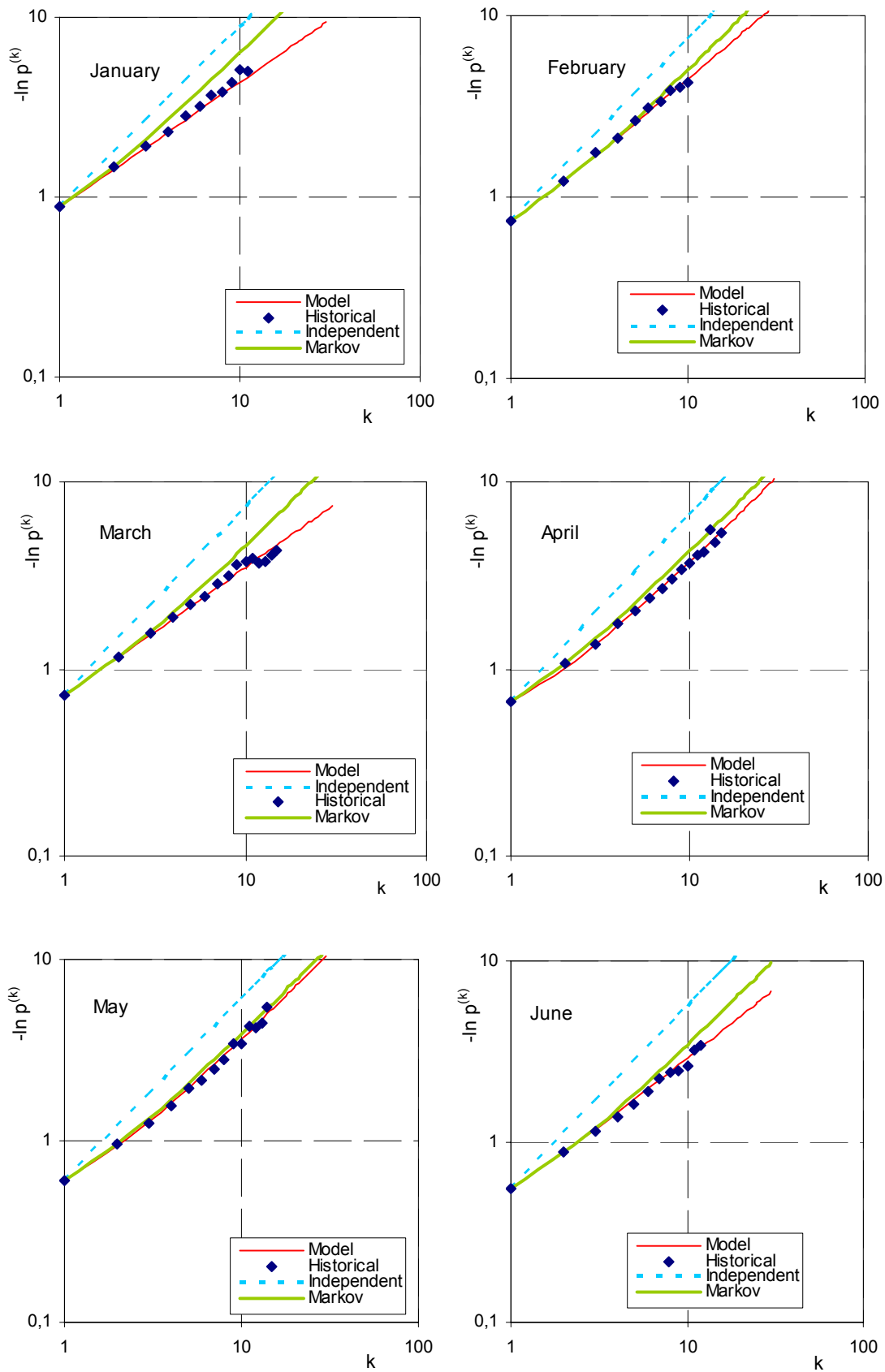
Σχήμα A.63 sta uk 189704



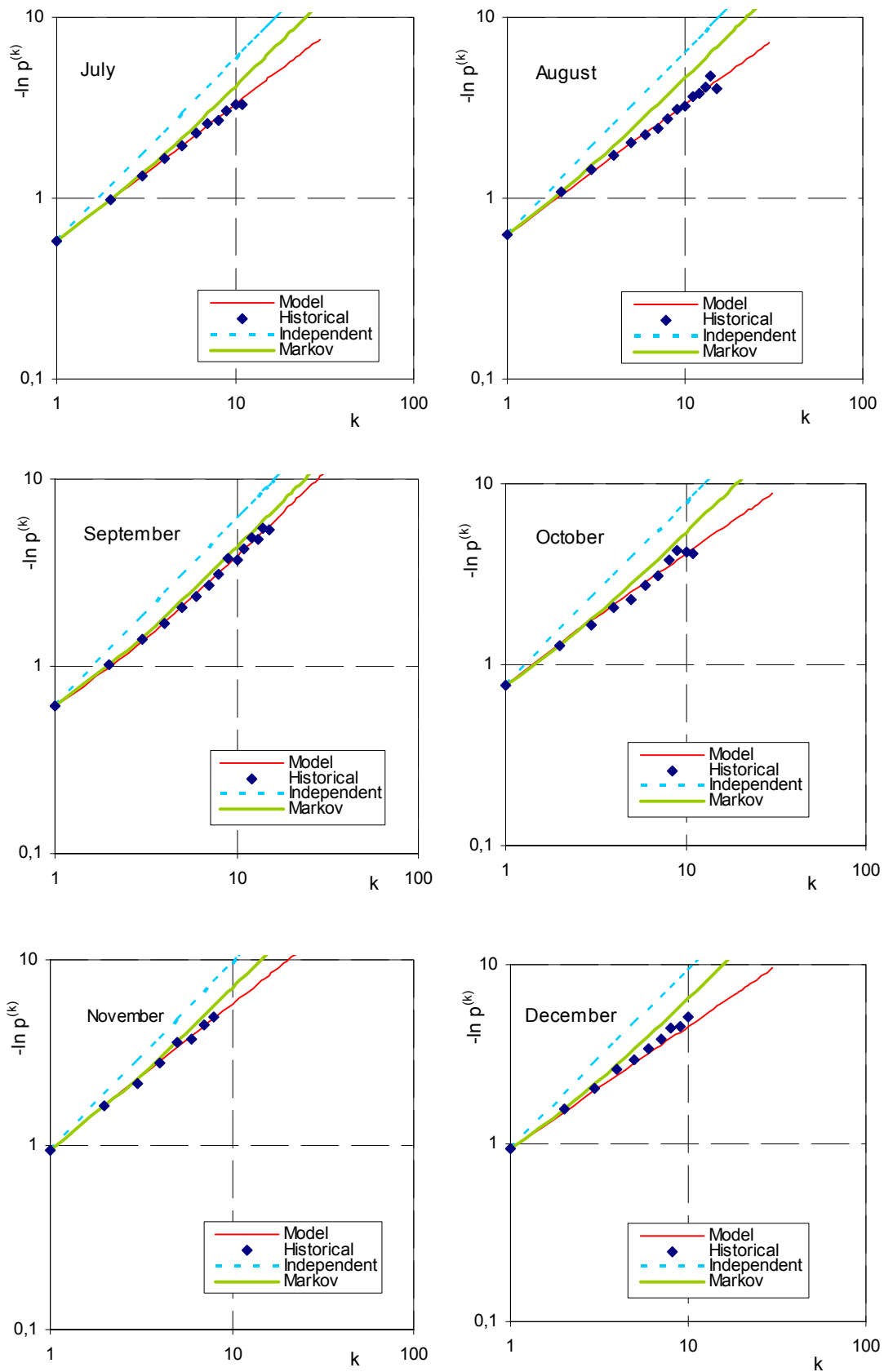
Σχήμα A.64 sta uk 2165



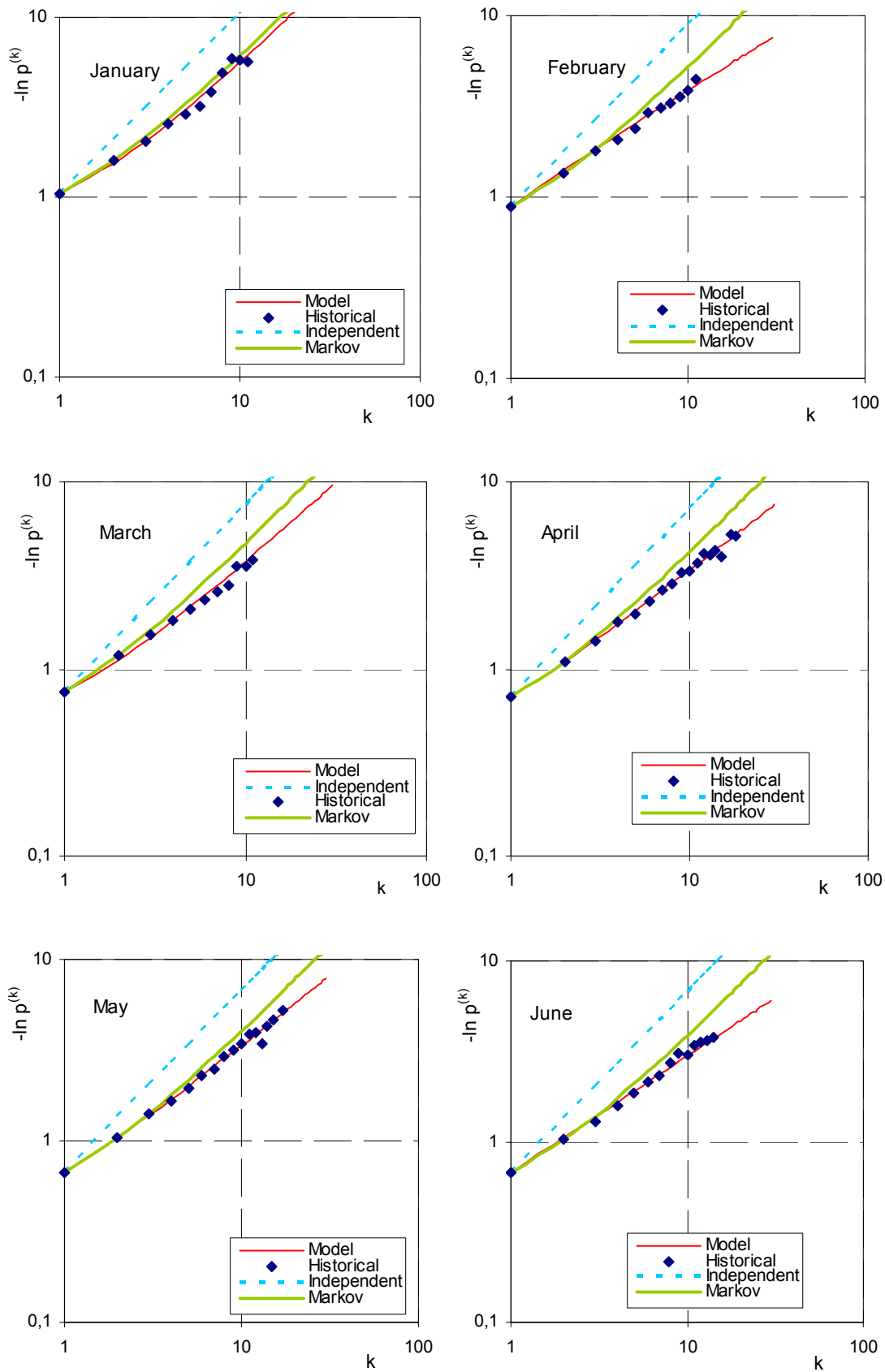
Σχήμα A.65 sta uk 2165



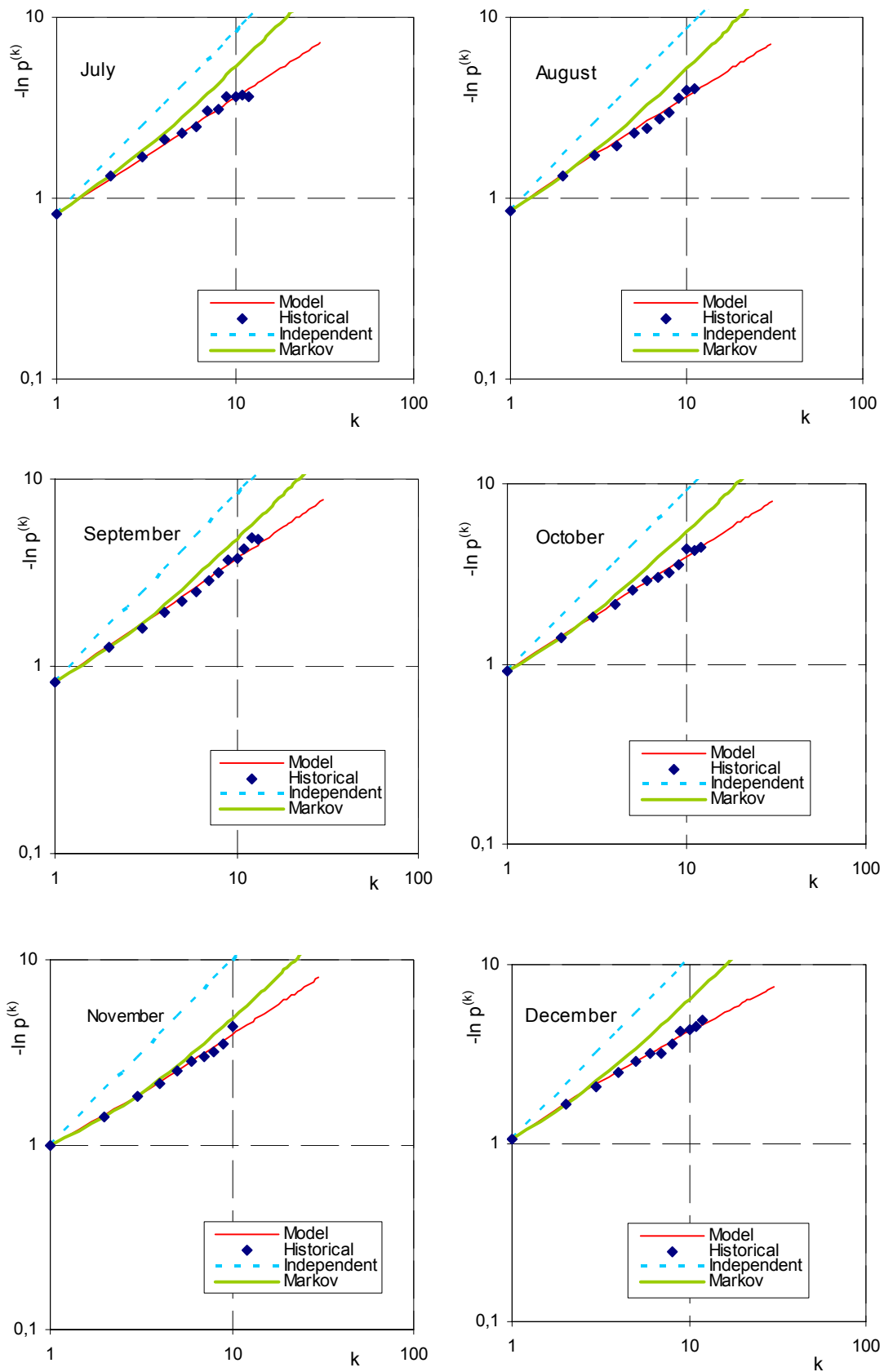
Σχήμα A.66 sta uk 43941



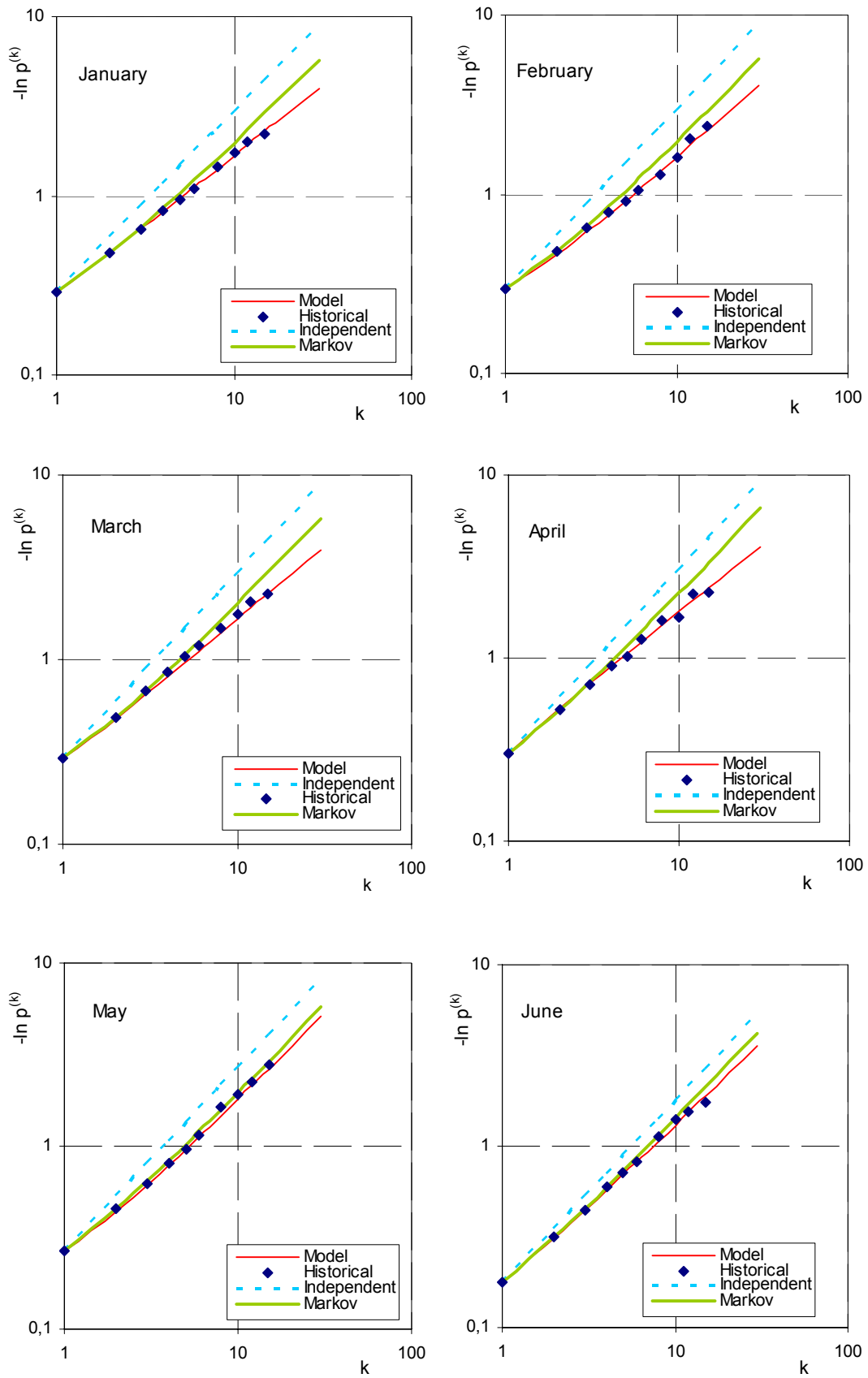
Σχήμα A.67 sta uk 43941



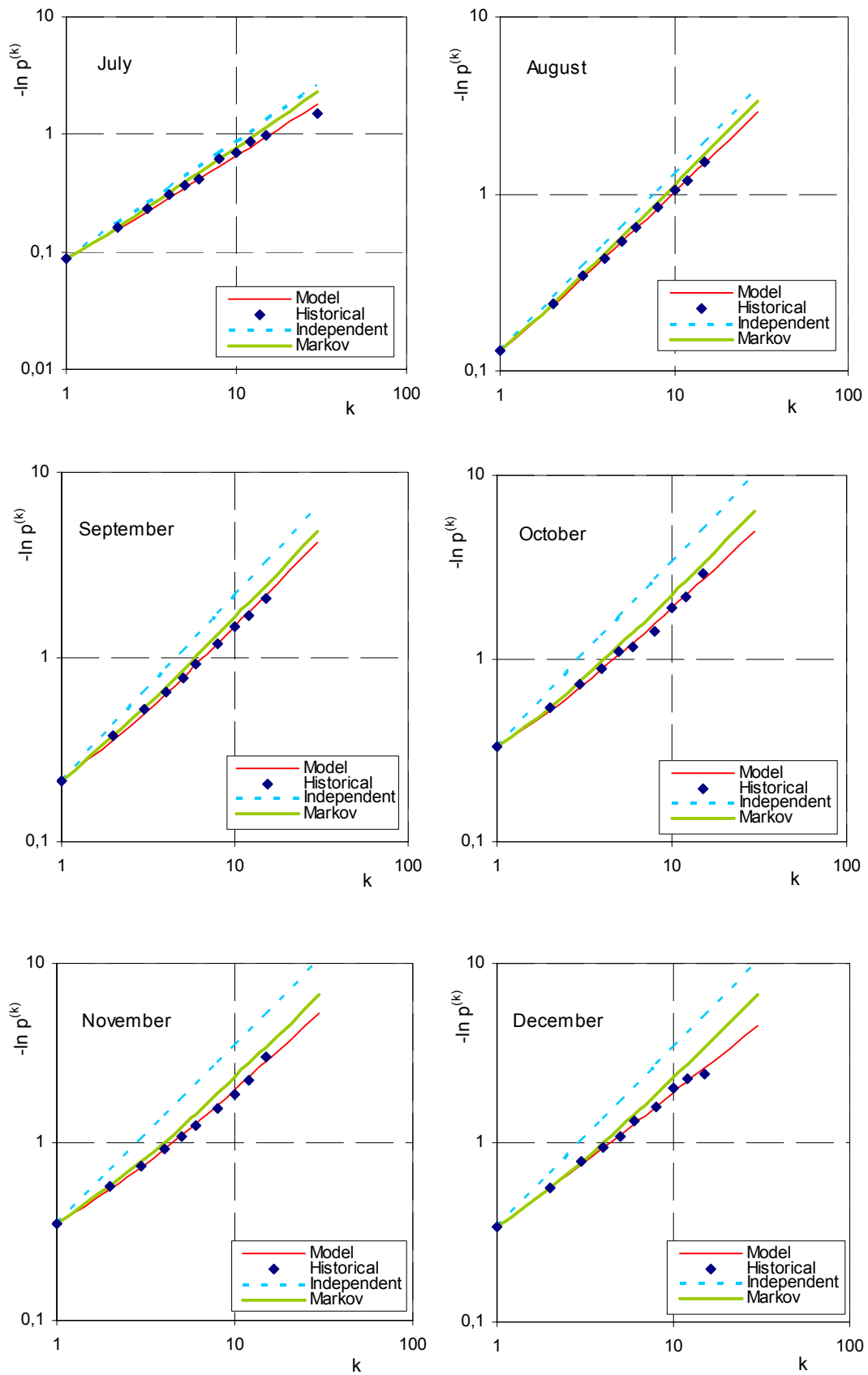
Σχήμα A.68 sta uk 575548



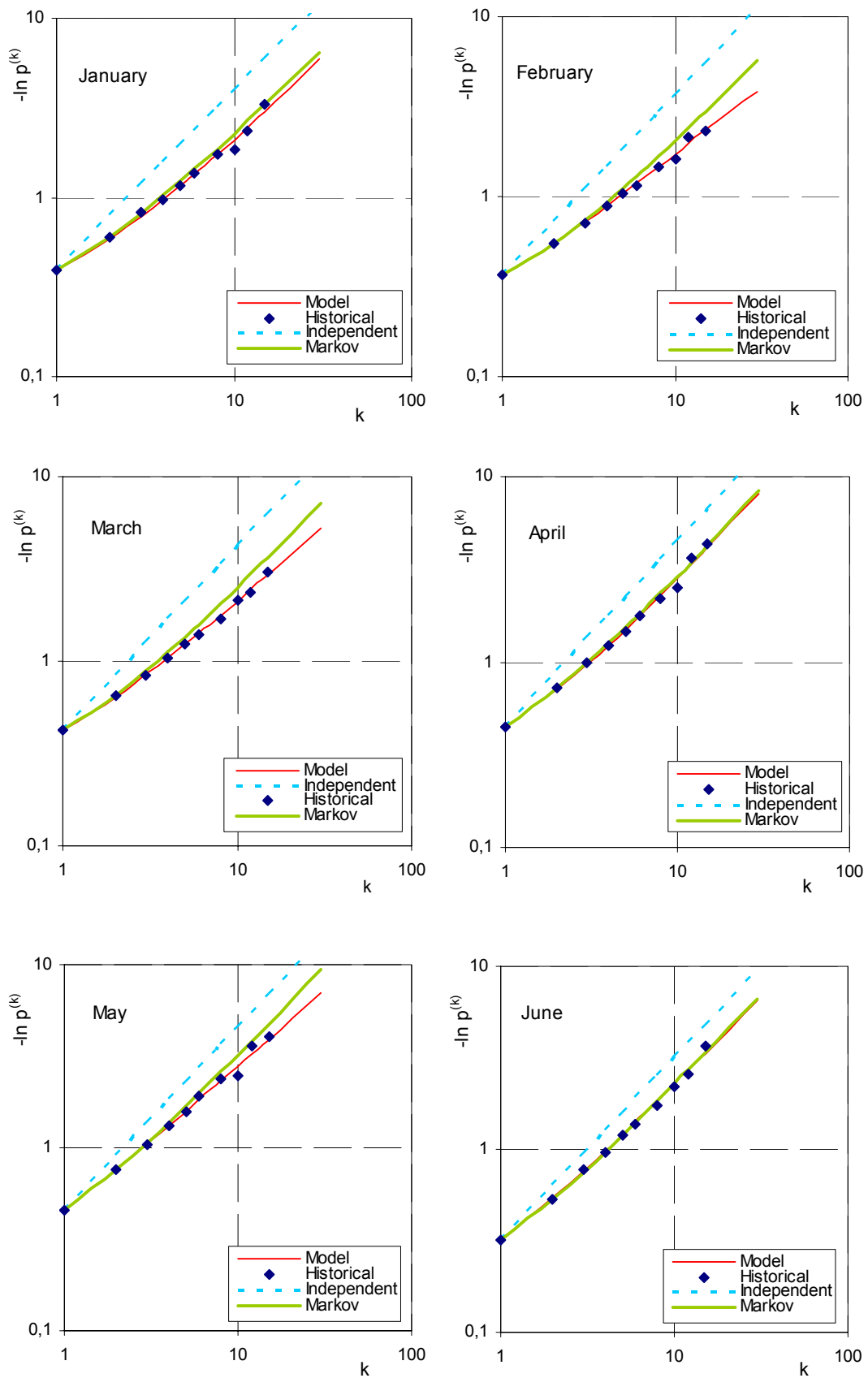
Σχήμα A.69 sta uk 575548



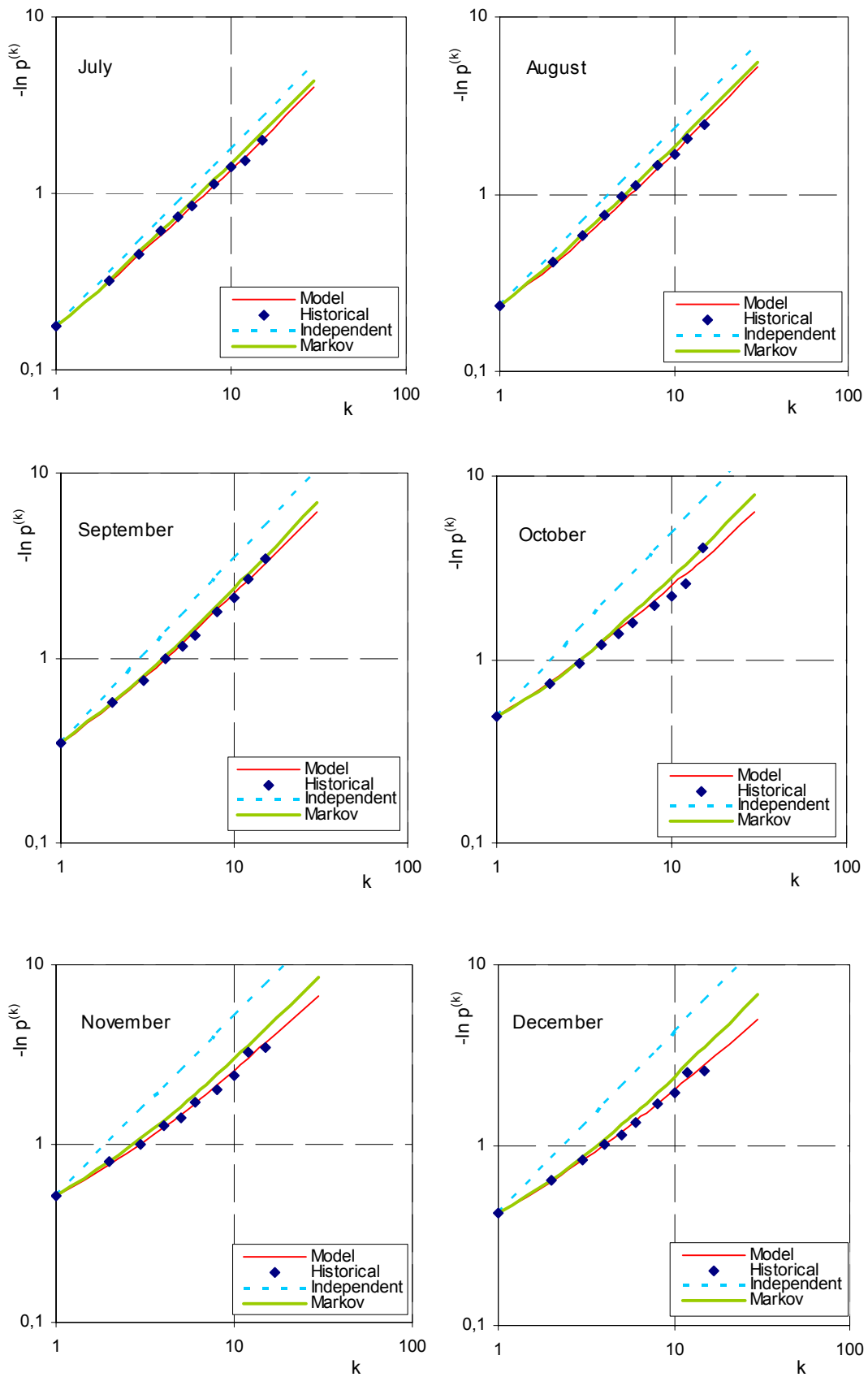
Σχήμα A.70 sta Marseille



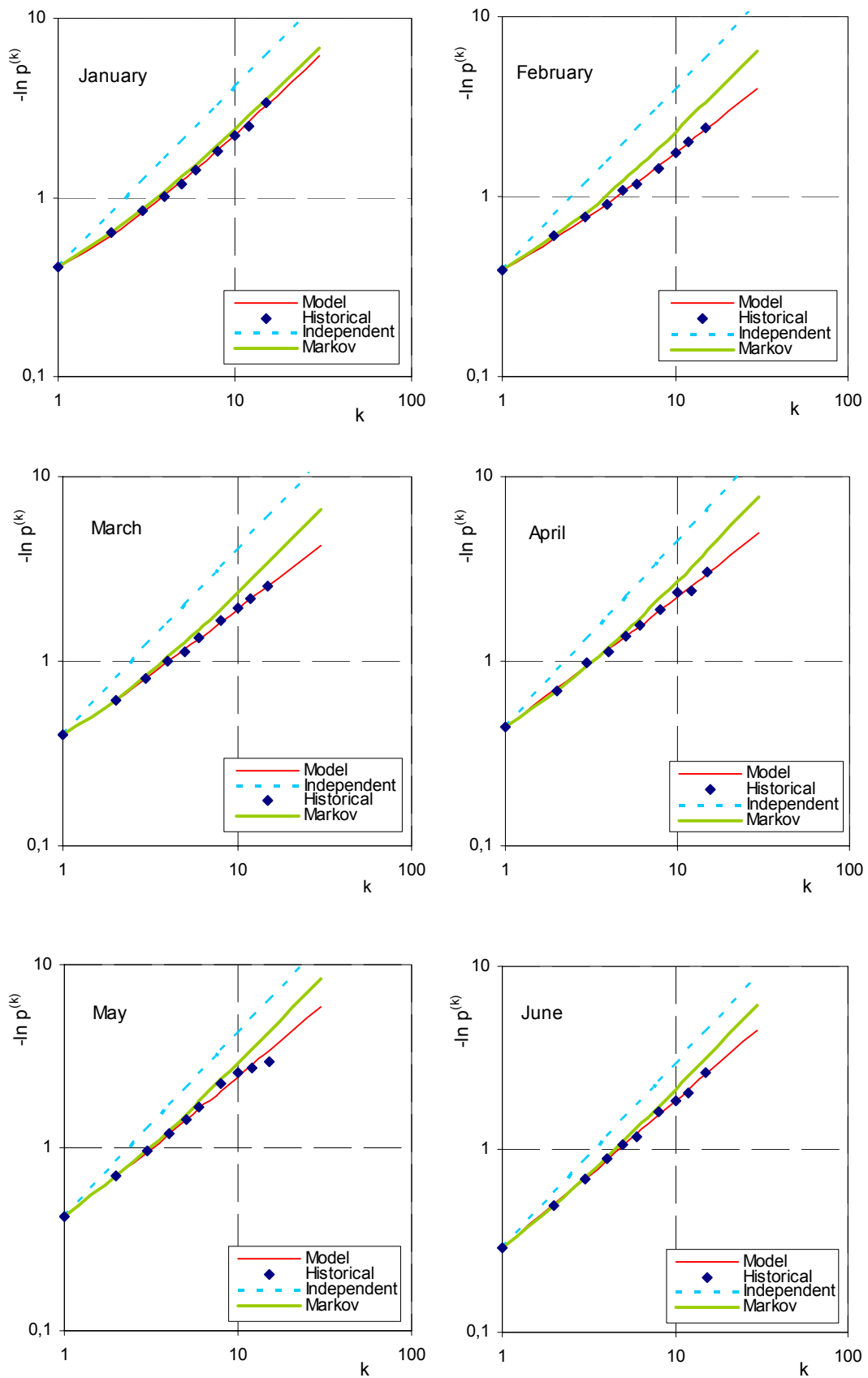
Σχήμα A.71 sta Marseille



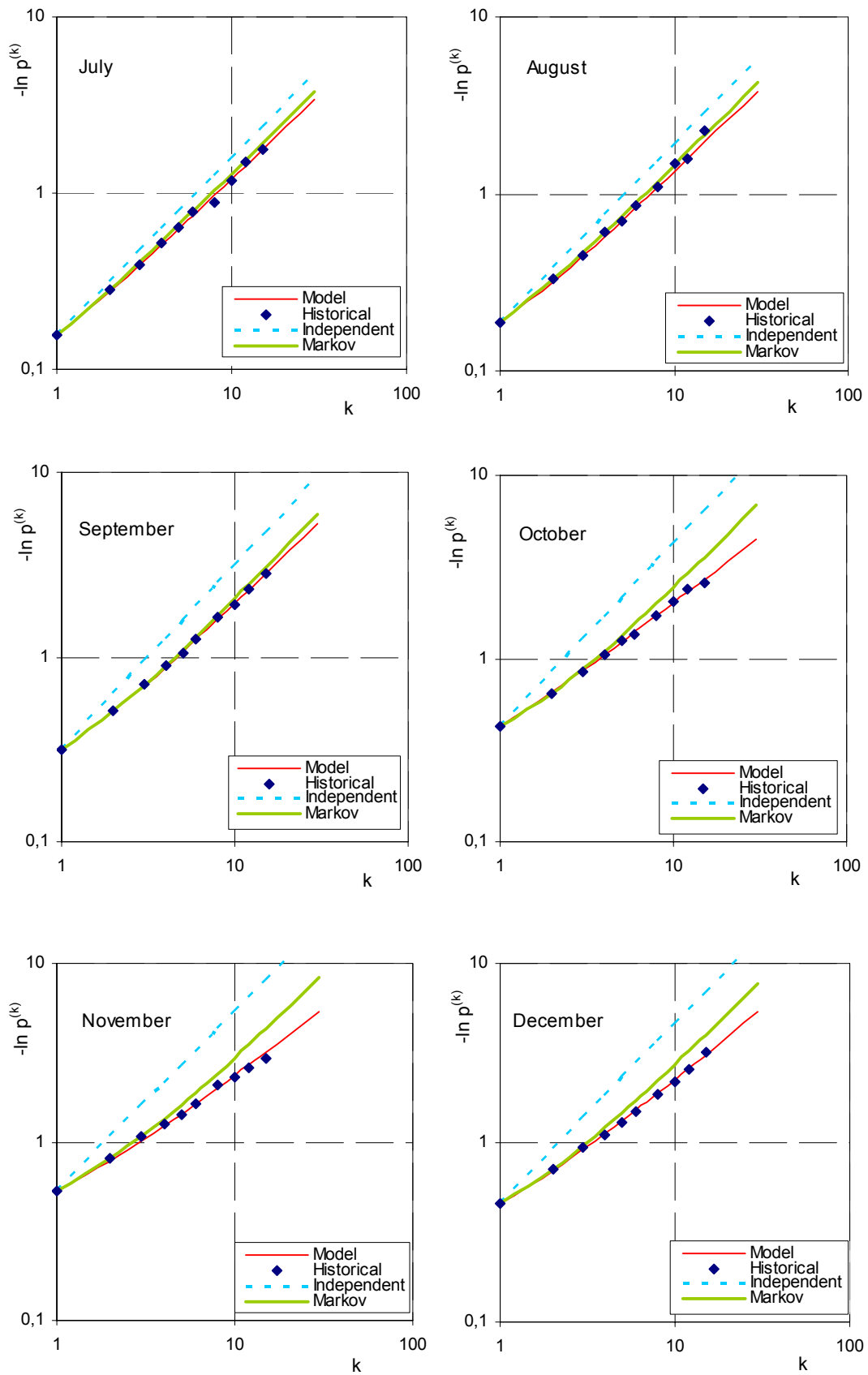
Σχήμα A.72 sta Genova



Σχήμα A.73 sta Genova



Σχήμα A.74 sta Firenze



Σχήμα A.75 sta Firenze

Παράρτημα Β

Το Παράρτημα Β περιλαμβάνει τους πίνακες των εμπειρικών πιθανοτήτων $p^{(k)}$ καθώς και των εξαγόμενων πιθανοτήτων $p^{(k)}$ από το μοντέλο δυαδικής ανέλιξης, βάση των οποίων κατασκευάστηκαν τα διαγράμματα που προηγήθηκαν.

Επισημαίνεται ότι τα ιστορικά δεδομένα των ημερησίων μετρήσεων των 28 σταθμών, καθώς και η επεξεργασμένη τους μορφή μετά την εξαγωγή από τις βάσεις δεδομένων, εξαιτίας του ιδιαίτερα αυξημένου όγκου τους, διατίθενται μόνο σε ηλεκτρονική μορφή.

Στην ενότητα Β1 παρατίθενται οι πίνακες των πιθανοτήτων που κατασκευάστηκαν για τις χρονοσειρές όλου του έτους, τις εποχιακές χρονοσειρές και τις χρονοσειρές ξηρής και υγρής περιόδου.

Στην ενότητα Β2 παρατίθενται οι πίνακες των πιθανοτήτων που κατασκευάστηκαν για τις μηνιαίες χρονοσειρές.

Παράρτημα Β1

STATIONS USA - YEAR

Model probabilities

-lnp^(k)

ξ	0,6895	0,6836	0,5699	0,5692	0,6149	0,5447	0,5723	0,5989	0,6110	0,6012	0,5920	0,6138	0,5580	0,5931	0,6512
η	0,5844	0,6730	0,8553	0,8306	0,8425	0,8766	0,8517	0,9636	0,8800	0,8424	0,8351	0,8092	0,8478	0,8736	0,7887
k/sta	269171	106152	324418	391739	412121	35820	326255	2536630	144972	322188	251145	483100	138688	90140	53005
1	0,2390	0,3946	0,2375	0,2894	0,1807	0,2990	0,2727	0,2646	0,3086	0,3117	0,2185	0,2455	0,2918	0,3533	0,2889
2	0,3466	0,5772	0,4168	0,5084	0,2939	0,5489	0,4765	0,4418	0,5050	0,5184	0,3691	0,4000	0,5229	0,5957	0,4436
3	0,4343	0,7348	0,5834	0,7091	0,3992	0,7831	0,6656	0,6163	0,6913	0,7103	0,5081	0,5412	0,7364	0,8241	0,5847
4	0,5108	0,8774	0,7423	0,8987	0,4995	1,0078	0,8457	0,7889	0,8708	0,8929	0,6399	0,6740	0,9391	1,0436	0,7172
5	0,5799	1,0095	0,8955	1,0803	0,5962	1,2255	1,0193	0,9601	1,0454	1,0686	0,7665	0,8010	1,1342	1,2566	0,8433
6	0,6435	1,1337	1,0444	1,2560	0,6900	1,4378	1,1878	1,1302	1,2161	1,2391	0,8890	0,9233	1,3235	1,4645	0,9646
8	0,7590	1,3642	1,3322	1,5933	0,8710	1,8503	1,5133	1,4675	1,5484	1,5679	1,1248	1,1574	1,6884	1,8682	1,1959
10	0,8632	1,5772	1,6098	1,9166	1,0451	2,2500	1,8269	1,8019	1,8710	1,8841	1,3512	1,3808	2,0396	2,2597	1,4157
12	0,9591	1,7769	1,8794	2,2290	1,2140	2,6399	2,1314	2,1340	2,1863	2,1907	1,5703	1,5959	2,3803	2,6415	1,6267
15	1,0914	2,0577	2,2722	2,6818	1,4594	3,2102	2,5746	2,6285	2,6480	2,6362	1,8881	1,9065	2,8756	3,1998	1,9302
30	1,6324	3,2578	4,1020	4,7654	2,5968	5,8941	4,6355	5,0581	4,8266	4,6998	3,3549	3,3222	5,1740	5,8256	3,3016
40	1,9301	3,9468	5,2435	6,0504	3,3026	7,5846	5,9192	6,6514	6,2021	5,9800	4,2616	4,1872	6,6027	7,4781	4,1322
60	2,4446	5,1759	7,4131	8,4715	4,6383	10,8216	8,3557	9,7978	8,8397	8,4026	5,9728	5,8052	9,3108	10,6397	5,6751
90	3,0970	6,7917	10,4824	11,8621	6,5186	15,4401	11,7975	14,4487	12,6093	11,8123	8,3740	8,0522	13,1300	15,1461	7,8006
150	4,1729	9,5690	16,2213	18,1293	10,0142	24,1612	18,2222	23,5947	19,7401	18,1502	12,8221	12,1653	20,2460	23,6449	11,6551
365	6,9581	17,2337	34,2909	37,5097	20,9196	52,0480	38,3974	54,7638	42,6021	37,9202	26,6229	24,6901	42,5288	50,7659	23,2206

Historical probabilities

-lnp^(k)

k/sta	269171	106152	324418	391739	412121	35820	326255	2536630	144972	322188	251145	483100	138688	90140	53005
1	0,2390	0,3946	0,2375	0,2894	0,1807	0,2990	0,2727	0,2646	0,3086	0,3117	0,2185	0,2455	0,2918	0,3533	0,2889
2	0,3472	0,5868	0,4120	0,4969	0,2920	0,5254	0,4766	0,4466	0,5032	0,5257	0,3627	0,3912	0,5184	0,5867	0,4445
3	0,4327	0,7361	0,5841	0,6847	0,4006	0,7519	0,6715	0,6221	0,6968	0,7209	0,5010	0,5346	0,7482	0,8235	0,5811
4	0,5071	0,8701	0,7317	0,8756	0,5019	0,9814	0,8579	0,7968	0,8681	0,8950	0,6425	0,6639	0,9667	1,0510	0,7246
5	0,5795	0,9869	0,9018	1,0341	0,6084	1,2097	1,0190	0,9576	1,0559	1,0858	0,7714	0,7889	1,1851	1,2660	0,8635
6	0,6351	1,1012	1,0355	1,2151	0,7102	1,4166	1,2010	1,1374	1,2325	1,2499	0,9000	0,9230	1,3785	1,4806	0,9619
8	0,7433	1,3336	1,3126	1,5974	0,9051	1,8396	1,5279	1,4617	1,5672	1,5647	1,1500	1,1827	1,7929	1,9037	1,2050
10	0,8637	1,5230	1,6564	1,8776	1,1055	2,2678	1,8562	1,7680	1,8488	1,9153	1,3813	1,4056	2,1919	2,2807	1,3944
12	0,9599	1,7340	1,8445	2,1661	1,2696	2,7163	2,2255	2,1078	2,1788	2,1793	1,5649	1,6206	2,4947	2,7045	1,6053
15	1,1258	2,0309	2,2829	2,5979	1,5621	3,3543	2,6219	2,5943	2,5775	2,5374	1,8723	1,9419	3,0171	3,1214	1,9251
30	1,5856	3,6139	3,9943	#NUM!	2,8127	6,7799	4,4006	5,1705	4,9698	4,8520	3,2581	3,4753	#NUM!	4,8296	3,7534
40	2,0369	3,5025	#NUM!	#NUM!	3,4122	6,4297	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	3,9435	5,7589	5,1140	3,5835
60	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	4,1510	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	5,6240	#NUM!
90	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	5,0752	#NUM!
150	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!
365	#DIV/0!	#DIV/0!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!

DRY/WET PERIOD

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,66206		0,66569		0,60472		0,59345		0,57101		0,60362		0,58511		0,66176		
η	1		0,81020		0,74059		0,75283		0,86462		1		0,84539		0,87491		
sta	106152 usa				189704 uk				Marseille France				Firence Italy				
k	dry (6-10)		k	wet (11-5)		k	dry (5-9)		k	wet (10-4)		k	dry (6-9)		k	wet (10-5)	
1	0,23791	1	0,58170	1	0,46542	1	0,54108	1	0,15021	1	0,30839	1	0,23436	1	0,43479		
2	0,35935	2	0,87384	2	0,76965	2	0,91176	2	0,26306	2	0,51090	2	0,40055	2	0,65702		
3	0,46556	3	1,14427	3	1,03560	3	1,23722	3	0,36854	3	0,69770	3	0,55461	3	0,86877		
4	0,56253	4	1,40033	4	1,27927	4	1,53639	4	0,46943	4	0,87464	4	0,70110	4	1,07330		
5	0,65302	5	1,64581	5	1,50756	5	1,81743	5	0,56700	5	1,04448	5	0,84215	5	1,27237		
6	0,73860	6	1,88296	6	1,72429	6	2,08482	6	0,66200	6	1,20880	6	0,97899	6	1,46707		
8	0,89871	8	2,33786	8	2,13186	8	2,58896	8	0,84604	8	1,52476	8	1,24294	8	1,84607		
10	1,04779	10	2,77277	10	2,51362	10	3,06254	10	1,02397	10	1,82773	10	1,49694	10	2,21418		
12	1,18857	12	3,19219	12	2,87599	12	3,51310	12	1,19715	12	2,12068	12	1,74324	12	2,57370		
15	1,38780	15	3,79840	15	3,39161	15	4,15573	15	1,44990	15	2,54535	15	2,10135	15	3,10007		
30	2,25344	30	6,56763	30	5,66290	30	7,00278	30	2,63276	30	4,50043	30	3,76191	30	5,58049		
76	4,33637	106	18,07659	76	11,26736	106	18,11171	61	4,85605	121	14,26041	61	6,84165	121	18,63744		
153	7,10904	212	31,63216	153	18,91512	212	30,51991	122	8,83615	243	25,41825	122	12,28173	243	34,22106		

Historical probabilities -lnp^(k)

sta	106152 usa				189704 uk				Marseille France				Firence Italy				
k	dry (6-10)		k	wet (11-5)		k	dry (5-9)		k	wet (10-4)		k	dry (6-9)		k	wet (10-5)	
1	0,23791	1	0,58170	1	0,46542	1	0,54108	1	0,15021	1	0,30839	1	0,23436	1	0,43479		
2	0,36096	2	0,88953	2	0,77418	2	0,91449	2	0,26454	2	0,50870	2	0,39565	2	0,67370		
3	0,47079	3	1,14270	3	1,01996	3	1,23483	3	0,37157	3	0,69305	3	0,54223	3	0,89278		
4	0,55824	4	1,35458	4	1,27794	4	1,53253	4	0,47887	4	0,86506	4	0,69554	4	1,08770		
5	0,64567	5	1,62279	5	1,49356	5	1,80515	5	0,57320	5	1,04086	5	0,83193	5	1,27821		
6	0,73560	6	1,85936	6	1,71142	6	2,09257	6	0,67725	6	1,20135	6	0,96529	6	1,47172		
8	0,89726	8	2,29997	8	2,17154	8	2,60421	8	0,85311	8	1,51915	8	1,25523	8	1,78826		
10	1,05301	10	2,69500	10	2,50673	10	3,15487	10	1,02920	10	1,79443	10	1,53305	10	2,15270		
12	1,21902	12	3,41140	12	2,90581	12	3,65532	12	1,20736	12	2,17921	12	1,73414	12	2,51509		
15	1,44489	15	3,54578	15	3,48171	15	4,28457	15	1,43292	15	2,50246	15	2,12716	15	2,93937		
30	2,13269	30	#NUM!	30	5,47855	30	6,55393	30	2,61664	30	4,41774	30	3,68888	30	5,90808		
76	#NUM!	106	#NUM!	76	#NUM!	106	#NUM!	61	#NUM!	121	#NUM!	61	#NUM!	121	#NUM!		
153	#NUM!	212	#NUM!	153	#NUM!	212	#NUM!	122	#NUM!	243	#NUM!	122	#NUM!	243	#NUM!		

SEASONS

Model probabilities

-lnp^(k)

ξ	0,60809	0,59432	0,60596	0,60829	0,61230	0,60696	0,56409	0,61634	0,63724	0,67129	0,65303	0,64902
η	1	0,84599	0,78833	0,78461	0,99995	1	0,84939	0,95440	0,83196	1	0,82717	1
sta	483100 usa				251145 usa				106152 usa			
k	winter	spring	summer	autumn	winter	spring	summer	autumn	winter	spring	summer	autumn
1	0,26433	0,30945	0,20078	0,21299	0,13355	0,29887	0,29547	0,15504	0,68720	0,49861	0,41869	0,58918
2	0,43470	0,52068	0,33135	0,35014	0,21811	0,49240	0,52381	0,25155	1,07840	0,78377	0,69736	0,91358
3	0,59426	0,71691	0,44901	0,47354	0,30267	0,68593	0,73513	0,34628	1,44218	1,04127	0,94174	1,21174
4	0,74686	0,90367	0,55882	0,58858	0,38723	0,87946	0,93603	0,43977	1,78810	1,28152	1,16613	1,49300
5	0,89438	1,08361	0,66308	0,69771	0,47179	1,07299	1,12950	0,53231	2,12090	1,50944	1,37673	1,76194
6	1,03791	1,25824	0,76309	0,80233	0,55634	1,26652	1,31723	0,62408	2,44343	1,72787	1,57692	2,02130
8	1,31572	1,59522	0,95345	1,00128	0,72546	1,65359	1,67951	0,80579	3,06458	2,14304	1,95399	2,51784
10	1,58397	1,91962	1,13404	1,18986	0,89457	2,04065	2,02831	0,98554	3,66110	2,53622	2,30780	2,99166
12	1,84478	2,23427	1,30719	1,37052	1,06368	2,42771	2,36673	1,16373	4,23851	2,91260	2,64410	3,44798
15	2,22497	2,69186	1,55604	1,63000	1,31734	3,00830	2,85905	1,42865	5,07633	3,45266	3,12329	4,10665
30	3,99861	4,81477	2,67854	2,79835	2,58562	5,91127	5,14554	2,72460	8,94073	5,87805	5,24124	7,10699
45	5,64491	6,77375	3,68330	3,84212	3,85387	8,81424	7,25838	3,99052	12,48303	8,03800	7,09589	9,81999
90	10,19616	12,15566	6,35428	6,61100	7,65852	17,91020	13,07282	7,69104	22,14137	13,74668	11,91207	17,10830

Historical probabilities

-lnp^(k)

sta	483100 usa				251145 usa				106152 usa			
k	winter	spring	summer	autumn	winter	spring	summer	autumn	winter	spring	summer	autumn
1	0,26433	0,30945	0,20078	0,21299	0,13355	0,29887	0,29547	0,15504	0,68720	0,49861	0,41869	0,58918
2	0,42116	0,51141	0,32624	0,34400	0,22128	0,48676	0,52150	0,25080	1,12463	0,79964	0,69011	0,93685
3	0,57095	0,68552	0,44183	0,46727	0,30970	0,68462	0,73525	0,33332	1,46747	1,04806	0,92124	1,22886
4	0,72062	0,88714	0,54396	0,57396	0,39721	0,87441	0,94776	0,43423	1,82099	1,26137	1,12468	1,51176
5	0,87359	1,05865	0,67974	0,68028	0,47730	1,04078	1,17386	0,54834	2,07540	1,48515	1,38798	1,73214
6	0,98306	1,22974	0,76142	0,79409	0,57402	1,22545	1,37037	0,62409	2,36339	1,68046	1,55900	1,99473
8	1,21444	1,59042	0,94570	0,98524	0,69315	1,72019	1,68697	0,84351	2,87136	2,16835	1,91841	2,43437
10	1,67068	2,06291	1,16315	1,14876	0,87083	2,03143	2,05534	0,99824	3,56524	2,58946	2,50049	2,93603
12	1,99129	2,34857	1,28978	1,34783	0,97571	2,82994	2,23453	1,13380	3,85470	2,95491	2,83908	3,29435
15	2,47009	2,52573	1,55193	1,79176	1,24360	3,51651	2,82477	1,45821	5,53733	3,53999	3,22268	4,30599
30	3,21888	3,58352	2,86790	2,59027	3,17805	#NUM!	#NUM!	2,87168	#NUM!	#NUM!	4,66814	#NUM!
45	#NUM!	#NUM!	#NUM!	3,46574	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!
90	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#NUM!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

Παράρτημα Β2

STA 251145 BRIDGEPORT NEBRASKA

Model probabilities		-lnp^(k)										
ξ	0,59340	0,60075	0,55947	0,59413	0,62509	0,57760	0,56087	0,58058	0,58676	0,61060	0,57908	0,60477
η	1	0,98417	0,99661	0,99807	0,96315	1	1,00000	0,96952	1,00000	1	0,96144	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,12569	0,15346	0,19462	0,28617	0,42571	0,37557	0,29173	0,22799	0,19880	0,15166	0,11599	0,12378
2	0,21182	0,25545	0,34787	0,48167	0,68104	0,65022	0,52014	0,39269	0,33880	0,24838	0,20030	0,20468
3	0,29240	0,35676	0,50088	0,67700	0,93267	0,90907	0,74855	0,55518	0,47881	0,34510	0,28316	0,28261
4	0,36947	0,45762	0,65373	0,87222	1,18169	1,15787	0,97696	0,71617	0,61881	0,44182	0,36504	0,35855
5	0,44398	0,55811	0,80646	1,06736	1,42871	1,39938	1,20537	0,87602	0,75882	0,53854	0,44619	0,43302
6	0,51648	0,65831	0,95909	1,26243	1,67409	1,63517	1,43378	1,03494	0,89882	0,63526	0,52675	0,50630
8	0,65686	0,85800	1,26411	1,65240	2,16093	2,09349	1,89060	1,35061	1,17883	0,82870	0,68646	0,65006
10	0,79247	1,05695	1,56888	2,04220	2,64357	2,53812	2,34742	1,66395	1,45884	1,02214	0,84467	0,79089
12	0,92437	1,25529	1,87345	2,43185	3,12285	2,97207	2,80424	1,97544	1,73886	1,21558	1,00170	0,92940
15	1,11672	1,55187	2,32999	3,01610	3,83662	3,60715	3,48946	2,43984	2,15887	1,50574	1,23545	1,13369
30	2,01508	3,02357	4,60894	5,93465	7,34330	6,59871	6,91560	4,72785	4,25895	2,95653	2,38252	2,11393

Historical probabilities		-lnp^(k)										
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,12569	0,15346	0,19462	0,28617	0,42571	0,37557	0,29173	0,22799	0,19880	0,15166	0,11599	0,12378
2	0,21909	0,24802	0,33895	0,47280	0,66378	0,65135	0,51131	0,39758	0,32491	0,24078	0,19286	0,20982
3	0,30213	0,34079	0,50346	0,65522	0,94535	0,90011	0,76889	0,59708	0,44561	0,31078	0,26719	0,27294
4	0,37934	0,44425	0,68736	0,83463	1,11889	1,18005	0,99053	0,78637	0,57676	0,42911	0,31917	0,36061
5	0,45548	0,58470	0,75787	0,98795	1,52606	1,39645	1,19697	0,99543	0,78942	0,52225	0,42134	0,44325
6	0,51452	0,59977	0,99435	1,28874	1,64000	1,68777	1,44921	1,20397	0,85047	0,57732	0,49028	0,47984
8	0,71220	0,73089	1,33123	1,39209	2,05189	2,05189	1,70952	1,48881	1,15449	0,87184	0,63009	0,57409
10	0,85678	0,98485	1,50408	1,89085	2,47654	2,50144	2,34771	1,53248	1,58609	1,03799	0,81536	0,85866
12	0,88504	1,23474	1,91692	2,03688	3,30811	2,79728	2,48491	2,18605	1,79176	1,19770	0,98941	0,79113
15	1,06471	1,83258	3,66356	3,68888	#NUM!	3,80666	3,95124	2,05839	2,14007	1,66771	1,43508	1,29928
30	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!

STA 483100 EVANSTON 1E WYOMING

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,63100	0,59774	0,59570	0,59956	0,63137	0,62719	0,60720	0,59073	0,65366	0,63961	0,61848	0,60826
η	1	0,90712	0,97044	0,87902	0,97384	1	0,83099	0,88540	0,95033	1	0,84913	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,26346	0,30358	0,31130	0,31028	0,30688	0,21632	0,17486	0,21221	0,20653	0,20782	0,22512	0,23076
2	0,41753	0,50788	0,52257	0,51752	0,48605	0,34490	0,28798	0,35922	0,31596	0,32492	0,36399	0,37938
3	0,57065	0,70385	0,73120	0,71359	0,66342	0,45839	0,39247	0,49861	0,42339	0,44076	0,49378	0,52799
4	0,72310	0,89430	0,93800	0,90241	0,83951	0,56284	0,49151	0,63305	0,52941	0,55569	0,61770	0,67661
5	0,87502	1,08065	1,14341	1,08590	1,01461	0,66097	0,58661	0,76386	0,63432	0,66991	0,73732	0,82523
6	1,02651	1,26376	1,34770	1,26520	1,18890	0,75429	0,67867	0,89182	0,73833	0,78357	0,85358	0,97385
8	1,32844	1,62230	1,75358	1,61399	1,53550	0,93012	0,85574	1,14107	0,94416	1,00947	1,07824	1,27108
10	1,62924	1,97284	2,15659	1,95262	1,88000	1,09511	1,02559	1,38341	1,14765	1,23387	1,29482	1,56832
12	1,92914	2,31708	2,55730	2,28331	2,22280	1,25191	1,18988	1,62034	1,34926	1,45707	1,50510	1,86555
15	2,37759	2,82398	3,15488	2,76750	2,73440	1,47528	1,42810	1,96767	1,64881	1,79002	1,81121	2,31141
30	4,60280	5,24718	6,10050	5,05072	5,26077	2,46158	2,52549	3,61039	3,11183	3,43222	3,23430	4,54067

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,26346	0,30358	0,31130	0,31028	0,30688	0,21632	0,17486	0,21221	0,20653	0,20782	0,22512	0,23076
2	0,42030	0,51461	0,52118	0,50770	0,48173	0,34221	0,27933	0,35140	0,31760	0,33255	0,37239	0,37105
3	0,56963	0,69170	0,71797	0,65960	0,64355	0,45064	0,39153	0,47841	0,43675	0,44417	0,50346	0,50778
4	0,70705	0,87203	0,95513	0,87777	0,80697	0,55500	0,49870	0,61196	0,51948	0,54427	0,66455	0,61151
5	0,80550	1,07170	1,16575	1,13740	0,99040	0,63574	0,59457	0,75321	0,61970	0,65999	0,76705	0,78630
6	1,05193	1,25878	1,32262	1,21816	1,12080	0,79431	0,70792	0,92646	0,73840	0,74250	0,81351	0,90589
8	1,18784	1,58989	1,67006	1,74375	1,45316	1,00823	0,79851	1,17865	0,92083	1,00169	1,09861	1,02411
10	1,37764	1,95606	2,20574	2,25129	1,79176	1,04797	1,09861	1,39937	1,17373	1,15057	1,40282	1,52606
12	1,91959	2,38263	2,56495	1,98413	2,35665	1,28451	1,19484	1,53148	1,27554	1,48160	1,51635	2,19722
15	2,77259	2,91777	3,17805	2,81341	2,99573	1,41528	1,34117	1,91692	1,73460	1,96009	1,73460	2,54553
30	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	1,09861	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

STA 412121 CROSBYTON TEXAS

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,59495	0,61504	0,61755	0,59769	0,57951	0,60227	0,57735	0,59768	0,62960	0,65060	0,61598	0,60498
η	1	0,87632	0,98348	0,87938	0,98312	1	0,93666	0,91376	0,95880	1	0,71170	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,11626	0,13306	0,13254	0,16959	0,27197	0,23472	0,20706	0,23817	0,23385	0,19088	0,12577	0,12180
2	0,19541	0,21634	0,21463	0,28374	0,46931	0,38973	0,35865	0,39849	0,37142	0,29339	0,20417	0,20132
3	0,27243	0,29521	0,29617	0,39174	0,66519	0,54267	0,50588	0,55276	0,50678	0,39458	0,27167	0,27864
4	0,34801	0,37117	0,37734	0,49574	0,86007	0,69417	0,65022	0,70301	0,64059	0,49482	0,33291	0,35445
5	0,42252	0,44498	0,45821	0,59681	1,05419	0,84459	0,79241	0,85027	0,77320	0,59431	0,38986	0,42912
6	0,49615	0,51709	0,53884	0,69557	1,24770	0,99411	0,93288	0,99515	0,90483	0,69320	0,44361	0,50289
8	0,64137	0,65733	0,69952	0,88770	1,63323	1,29104	1,20978	1,27928	1,16575	0,88948	0,54400	0,64826
10	0,78443	0,79344	0,85958	1,07424	2,01719	1,58571	1,48241	1,55752	1,42416	1,08418	0,63735	0,79135
12	0,92577	0,92632	1,01913	1,25641	2,39989	1,87857	1,75167	1,83113	1,68056	1,27761	0,72544	0,93263
15	1,13518	1,12080	1,25770	1,52317	2,97202	2,31510	2,15048	2,23455	2,06209	1,56578	0,85005	1,14182
30	2,15130	2,03693	2,44114	2,78123	5,80941	4,46444	4,08415	4,16933	3,93266	2,98281	1,39133	2,15513

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,11626	0,13306	0,13254	0,16959	0,27197	0,23472	0,20706	0,23817	0,23385	0,19088	0,12577	0,12180
2	0,19365	0,21041	0,22154	0,28249	0,46683	0,39760	0,35081	0,38997	0,36813	0,29003	0,20142	0,20171
3	0,25396	0,28812	0,29157	0,38854	0,65281	0,53504	0,49676	0,54457	0,49593	0,39422	0,26586	0,26611
4	0,32593	0,36730	0,37500	0,49528	0,82462	0,68652	0,63723	0,69641	0,63262	0,47417	0,32994	0,34913
5	0,43389	0,44725	0,47992	0,55854	1,00524	0,89111	0,76824	0,82418	0,79623	0,59034	0,40429	0,41220
6	0,44866	0,54473	0,54734	0,73304	1,25835	0,93353	0,88216	0,95098	0,92367	0,69591	0,45328	0,48089
8	0,63090	0,62930	0,66168	0,87633	1,43848	1,22026	1,24204	1,35618	1,14967	0,87886	0,51395	0,63252
10	0,88075	0,80114	0,84730	1,05755	1,80403	1,60944	1,55060	1,49165	1,35455	1,06894	0,67990	0,83873
12	0,89382	0,89382	1,10809	1,36098	2,78148	2,01045	1,88529	1,79176	1,73769	1,34645	0,74497	0,97456
15	1,04145	1,52606	1,16643	1,56862	2,59525	2,18324	2,02815	2,05127	2,12525	1,66501	0,79493	1,19870
30	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	1,60944	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

STA 391739 CLARK SOUTH DAKOTA

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,60215	0,59096	0,58188	0,55672	0,59111	0,57242	0,52087	0,54568	0,57569	0,64401	0,67098	0,58435
η	1	1,00000	0,96667	0,88468	0,79133	1	0,96183	0,97352	0,84660	1	0,98094	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,23578	0,21843	0,26068	0,33046	0,39554	0,46987	0,33888	0,30922	0,27546	0,23222	0,21048	0,20973
2	0,39156	0,36961	0,44800	0,59357	0,66914	0,82084	0,65060	0,56666	0,47849	0,36058	0,31369	0,35891
3	0,53014	0,52080	0,63257	0,84176	0,91518	1,14205	0,95626	0,82084	0,66650	0,48571	0,41624	0,49555
4	0,65848	0,67198	0,81528	1,08061	1,14468	1,44520	1,25802	1,07286	0,84522	0,60858	0,51829	0,62450
5	0,77966	0,82317	0,99657	1,31270	1,36255	1,73555	1,55690	1,32327	1,01729	0,72970	0,61994	0,74799
6	0,89540	0,97435	1,17673	1,53954	1,57156	2,01607	1,85351	1,57238	1,18421	0,84941	0,72128	0,86726
8	1,11460	1,27672	1,53432	1,98101	1,96945	2,55463	2,44136	2,06755	1,50620	1,08544	0,92315	1,09615
10	1,32147	1,57909	1,88904	2,40990	2,34703	3,07034	3,02359	2,55947	1,81608	1,31787	1,12416	1,31523
12	1,51899	1,88146	2,24146	2,82901	2,70917	3,56852	3,60138	3,04883	2,11661	1,54741	1,32448	1,52677
15	1,80171	2,33501	2,76661	3,44313	3,22984	4,29007	4,46136	3,77895	2,55361	1,88736	1,62387	1,83302
30	3,06468	4,60278	5,35033	6,34507	5,58096	7,60590	8,68121	7,38261	4,58083	3,53461	3,10756	3,23862

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,23578	0,21843	0,26068	0,33046	0,39554	0,46987	0,33888	0,30922	0,27546	0,23222	0,21048	0,20973
2	0,41196	0,37794	0,44686	0,56280	0,64939	0,82906	0,63893	0,56086	0,47863	0,37258	0,32461	0,36084
3	0,53660	0,54539	0,60205	0,73274	0,90811	1,16065	0,89859	0,84302	0,64803	0,48023	0,43888	0,49386
4	0,69084	0,69813	0,83819	0,94274	1,13943	1,54227	1,24144	1,04689	0,81475	0,62132	0,52897	0,62646
5	0,82418	0,81275	0,96911	1,32317	1,47455	1,82557	1,44513	1,36778	1,03560	0,72014	0,64185	0,78846
6	0,90904	1,04559	1,16857	1,53533	1,57077	2,20059	1,81118	1,48719	1,13579	0,78977	0,72594	0,92459
8	1,17865	1,20397	1,50408	1,95881	2,19103	2,80060	2,28820	2,14982	1,39872	1,09861	0,81269	1,20397
10	1,45725	1,34373	1,76766	2,76212	2,31254	2,95317	3,48124	2,49994	2,05017	1,48808	1,09861	1,43281
12	1,32687	1,63142	2,10006	3,06027	2,39790	3,29584	3,10234	2,92316	1,87180	1,58563	1,21444	1,71298
15	1,74920	2,83321	3,29584	3,58352	#NUM!	3,78419	#NUM!	3,91202	3,71357	1,65292	1,79176	1,70475
30	#DIV/0!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!

STA 324418 JAMESTOWN STATE HOSPITAL NORTH DAKOTA

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,54147	0,57334	0,60087	0,59670	0,62727	0,55411	0,54213	0,55315	0,57073	0,56693	0,58214	0,59079
η	1	0,91498	1,00000	0,88574	0,97599	1	0,92019	0,95678	0,96139	1	0,82755	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,16751	0,15815	0,16461	0,25151	0,33112	0,43938	0,34665	0,28328	0,25414	0,17644	0,14507	0,17644
2	0,30937	0,27583	0,27396	0,42151	0,52788	0,79294	0,63941	0,51211	0,44530	0,31122	0,24920	0,29865
3	0,44376	0,38887	0,38330	0,58283	0,72280	1,14054	0,92055	0,73625	0,63310	0,44154	0,34469	0,42086
4	0,57352	0,49889	0,49265	0,73851	0,91642	1,48418	1,19430	0,95729	0,81866	0,56894	0,43489	0,54306
5	0,69992	0,60669	0,60199	0,89003	1,10904	1,82486	1,46266	1,17604	1,00252	0,69419	0,52132	0,66527
6	0,82371	0,71272	0,71134	1,03828	1,30082	2,16319	1,72680	1,39295	1,18504	0,81773	0,60484	0,78748
8	1,06523	0,92064	0,93003	1,32712	1,68241	2,83424	2,24518	1,82242	1,54685	1,06079	0,76524	1,03190
10	1,30051	1,12425	1,14871	1,60799	2,06186	3,49938	2,75328	2,24732	1,90527	1,29963	0,91887	1,27631
12	1,53091	1,32447	1,36740	1,88264	2,43959	4,15983	3,25333	2,66861	2,26098	1,53515	1,06729	1,52073
15	1,86928	1,61972	1,69544	2,28531	3,00355	5,14341	3,99134	3,29506	2,79044	1,88345	1,28228	1,88736
30	3,47683	3,03609	3,33560	4,19028	5,79128	9,97615	7,53969	6,36189	5,38858	3,56586	2,27040	3,72048

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,16751	0,15815	0,16461	0,25151	0,33112	0,43938	0,34665	0,28328	0,25414	0,17644	0,14507	0,17644
2	0,29800	0,27817	0,28638	0,43191	0,54258	0,78950	0,65216	0,53070	0,42823	0,29030	0,24316	0,29030
3	0,45159	0,39715	0,41940	0,56986	0,71430	1,14306	0,91518	0,75078	0,60455	0,41067	0,33387	0,41067
4	0,54452	0,50627	0,51816	0,76584	0,90130	1,44519	1,24330	0,98964	0,78915	0,50701	0,41407	0,50701
5	0,72180	0,64282	0,62930	0,87697	1,09188	1,70357	1,51800	1,22995	0,96537	0,63649	0,53606	0,63649
6	0,84353	0,68471	0,80263	1,07570	1,30922	2,10413	1,74181	1,40339	1,12601	0,68152	0,60324	0,68152
8	1,01160	0,92641	0,92252	1,33929	1,80098	3,06339	2,24723	1,98959	1,43881	0,93588	0,82905	0,93588
10	1,40399	1,05605	1,31928	1,45299	1,99890	3,56247	2,72607	2,30882	2,18324	1,09861	0,84999	1,09861
12	1,69168	1,32914	1,62471	2,10413	2,41790	3,88156	3,03655	2,74544	1,95606	1,47810	1,11088	1,47810
15	1,79176	1,76359	1,96944	2,05839	3,02852	#NUM!	4,36945	3,13549	2,72458	2,28820	1,28093	2,28820
30	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	0,00000	#NUM!

STA 106152 MOSCOW U OF IDAHO

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,67784	0,68006	0,67125	0,63687	0,64119	0,62776	0,59756	0,66053	0,68032	0,67811	0,68881	0,67377
η	1	0,81428	1,00000	0,73811	0,80352	1	0,89361	0,95053	0,97811	1	0,62106	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,71241	0,61252	0,59121	0,46121	0,41802	0,33946	0,13555	0,14525	0,24101	0,35667	0,64289	0,67849
2	1,05101	0,90069	0,88075	0,72418	0,65194	0,54074	0,22683	0,21990	0,35427	0,52599	0,93333	1,00700
3	1,36225	1,16885	1,17030	0,95626	0,86648	0,71496	0,31381	0,29323	0,46670	0,66449	1,17625	1,28733
4	1,65542	1,42352	1,45985	1,16968	1,06862	0,87339	0,39798	0,36561	0,57852	0,78585	1,39166	1,53923
5	1,93529	1,66814	1,74939	1,37002	1,26174	1,02094	0,48006	0,43724	0,68986	0,89576	1,58835	1,77154
6	2,20473	1,90481	2,03894	1,56043	1,44787	1,16034	0,56049	0,50826	0,80080	0,99731	1,77115	1,98919
8	2,71937	2,35952	2,61803	1,91884	1,80396	1,42093	0,71748	0,64883	1,02169	1,18217	2,10620	2,39188
10	3,20912	2,79493	3,19713	2,25479	2,14352	1,66345	0,87046	0,78783	1,24150	1,34941	2,41139	2,76242
12	3,67963	3,21533	3,77622	2,57377	2,47035	1,89245	1,02028	0,92555	1,46044	1,50379	2,69459	3,10906
15	4,35704	3,82365	4,64486	3,02773	2,94186	2,21655	1,24030	1,13018	1,78751	1,71735	3,08834	3,59498
30	7,42223	6,60945	8,98807	5,02732	5,08700	3,62591	2,28515	2,12981	3,40627	2,59690	4,72893	5,65930

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,71241	0,61252	0,59121	0,46121	0,41802	0,33946	0,13555	0,14525	0,24101	0,35667	0,64289	0,67849
2	1,08261	0,92975	0,91077	0,69989	0,64284	0,53784	0,23092	0,21644	0,35698	0,52944	0,95773	1,01863
3	1,39556	1,19848	1,18178	0,96180	0,86966	0,71650	0,31440	0,30123	0,45597	0,67942	1,19747	1,32145
4	1,71568	1,40310	1,38816	1,18932	1,05178	0,83433	0,40784	0,36341	0,54902	0,76597	1,33097	1,50222
5	2,04348	1,73460	1,63576	1,44121	1,24921	0,97917	0,46792	0,43869	0,67037	0,93827	1,57936	1,74150
6	2,30259	1,77219	1,90778	1,56398	1,39551	1,09205	0,54016	0,46547	0,76427	0,97273	1,82589	2,04157
8	2,58400	2,28238	2,26868	2,05839	1,61964	1,32972	0,75107	0,64583	1,01039	1,22184	2,10095	2,46810
10	3,44468	2,57588	2,77259	2,17313	2,26622	1,72616	0,88821	0,86330	1,06401	1,46152	2,54771	2,97893
12	4,21951	3,48124	4,36945	2,59027	2,75154	2,00882	0,91184	0,85678	1,32176	1,34184	2,55205	3,24519
15	3,63759	3,68888	#NUM!	2,81341	2,75684	2,48491	1,35963	1,17499	2,13163	2,21557	3,19867	3,23868
30	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!

STA 2536630 HARTINGTON NEBRASKA

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,60046	0,56527	0,57703	0,60906	0,57112	0,54231	0,53313	0,55192	0,57363	0,60197	0,62921	0,59976
η	1	0,82429	0,90589	1,00000	0,98588	1	1,00000	0,98697	0,94784	1	0,82273	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,17087	0,19756	0,24632	0,35310	0,41769	0,40677	0,30198	0,31349	0,26726	0,18586	0,17096	0,15432
2	0,28457	0,34950	0,42688	0,57974	0,73134	0,75007	0,56643	0,56800	0,46590	0,30876	0,27171	0,25731
3	0,38400	0,48805	0,59958	0,80638	1,04302	1,07883	0,83087	0,82095	0,65984	0,42638	0,36480	0,35298
4	0,47515	0,61856	0,76718	1,03302	1,35335	1,39838	1,09532	1,07286	0,85065	0,54053	0,45297	0,44402
5	0,56059	0,74341	0,93103	1,25966	1,66265	1,71125	1,35977	1,32398	1,03910	0,65208	0,53756	0,53172
6	0,64173	0,86391	1,09192	1,48630	1,97113	2,01886	1,62421	1,57448	1,22569	0,76158	0,61936	0,61681
8	0,79441	1,09502	1,40676	1,93958	2,58610	2,62183	2,15311	2,07396	1,59441	0,97575	0,77652	0,78096
10	0,93750	1,31608	1,71438	2,39286	3,19896	3,21208	2,68200	2,57184	1,95846	1,18487	0,92705	0,93893
12	1,07338	1,52946	2,01634	2,84614	3,81013	3,79237	3,21089	3,06844	2,31879	1,39002	1,07246	1,09211
15	1,26684	1,83826	2,46080	3,52606	4,72432	4,64793	4,00423	3,81140	2,85369	1,69179	1,28303	1,31481
30	2,12006	3,25473	4,58362	6,92566	9,26406	8,75115	7,97093	7,50267	5,46128	3,13067	2,24970	2,34717

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,17087	0,19756	0,24632	0,35310	0,41769	0,40677	0,30198	0,31349	0,26726	0,18586	0,17096	0,15432
2	0,28231	0,33410	0,42791	0,55828	0,70289	0,71431	0,55909	0,56548	0,44802	0,30603	0,27107	0,25648
3	0,37541	0,47033	0,59808	0,77839	1,02040	1,01280	0,80745	0,80479	0,67016	0,42225	0,36726	0,33244
4	0,46755	0,62012	0,73947	0,98995	1,32803	1,31268	1,04934	1,06594	0,85349	0,53852	0,46401	0,44158
5	0,58930	0,76489	0,84633	1,26641	1,61392	1,61673	1,31824	1,35335	1,02779	0,63118	0,56259	0,50555
6	0,66648	0,91919	1,14343	1,52826	2,05591	1,88965	1,56432	1,44214	1,28153	0,81245	0,63840	0,59529
8	0,79031	1,17351	1,29436	2,02095	2,58400	2,59027	2,04022	1,96765	1,50161	0,95843	0,78846	0,86396
10	0,90756	1,40534	1,67006	2,41790	3,12090	3,76892	2,73725	2,84988	2,02961	1,07711	0,89248	1,00063
12	1,00552	1,67398	2,03688	3,07577	4,58497	3,36730	3,42318	4,43082	2,20827	1,49290	0,98083	0,98083
15	2,19722	1,60944	2,67415	3,58352	#NUM!	4,00733	3,95124	3,87120	2,90872	1,77307	1,57554	1,28093
30	#DIV/0!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!

STA 322188 DICKINSON EXP STN NORTH DAKOTA

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,67469	0,63821	0,63225	0,62214	0,61607	0,58595	0,55926	0,55225	0,63153	0,63494	0,72136	0,62997
η	1	0,68568	0,67857	0,81356	0,98564	1	1,00000	0,88939	0,97504	1	0,95937	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,26346	0,25305	0,29193	0,34296	0,44086	0,57974	0,37594	0,29094	0,28981	0,19453	0,21960	0,24689
2	0,39049	0,39650	0,46173	0,55126	0,71560	0,98940	0,67221	0,52683	0,45890	0,30637	0,30443	0,39191
3	0,51015	0,51891	0,60553	0,74246	0,98877	1,38146	0,96848	0,74978	0,62637	0,41304	0,38826	0,51515
4	0,62479	0,62921	0,73458	0,92286	1,26083	1,76202	1,26475	0,96464	0,79268	0,51621	0,47132	0,62601
5	0,73563	0,73124	0,85364	1,09547	1,53203	2,13408	1,56102	1,17366	0,95811	0,61676	0,55376	0,72845
6	0,84346	0,82710	0,96528	1,26202	1,80253	2,49943	1,85729	1,37812	1,12280	0,71522	0,63568	0,82463
8	1,05199	1,00516	1,17218	1,58121	2,34183	3,21436	2,44984	1,77647	1,45041	0,90720	0,79824	1,00316
10	1,25309	1,16973	1,36299	1,88616	2,87932	3,91284	3,04238	2,16391	1,77612	1,09403	0,95940	1,16807
12	1,44837	1,32428	1,54186	2,18016	3,41533	4,59842	3,63492	2,54285	2,10030	1,27678	1,11942	1,32287
15	1,73258	1,54180	1,79320	2,60503	4,21711	5,60746	4,52373	3,09864	2,58422	1,54483	1,35768	1,54068
30	3,05258	2,47535	2,86779	4,54639	8,19860	10,42559	8,96779	5,73087	4,97530	2,81355	2,52714	2,47476

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,26346	0,25305	0,29193	0,34296	0,44086	0,57974	0,37594	0,29094	0,28981	0,19453	0,21960	0,24689
2	0,40323	0,36906	0,46426	0,54548	0,70489	0,97496	0,67822	0,50008	0,45007	0,29985	0,31182	0,38739
3	0,52356	0,49778	0,63174	0,73360	0,94350	1,31493	0,91561	0,75477	0,61581	0,41032	0,36068	0,50451
4	0,60263	0,61519	0,74691	0,88926	1,21284	1,75828	1,28135	0,97748	0,76884	0,50303	0,47596	0,61904
5	0,71784	0,70669	0,85982	1,06236	1,53746	2,08249	1,41438	1,13027	0,94821	0,57964	0,54884	0,69699
6	0,84923	0,95942	1,04455	1,31020	1,70273	2,50144	1,90251	1,45473	1,12393	0,67360	0,56453	0,87113
8	1,08814	0,84730	1,06582	1,68479	2,11776	3,31054	2,25479	1,89939	1,46040	0,93282	0,88605	1,04679
10	1,18377	1,12059	1,30625	1,76359	2,54273	4,43082	3,04452	2,11296	1,83023	1,14267	0,93156	1,09861
12	1,51983	1,23214	1,20397	2,21920	3,87120	3,98898	4,04305	2,36085	2,33076	1,34602	1,01160	1,35812
15	#NUM!	1,87180	1,25276	2,14007	#NUM!	#NUM!	#NUM!	2,60269	3,11352	1,60944	2,35138	#NUM!
30	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#NUM!

STA 90140 ALBANY 3SE GEORGIA

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,56292	0,54431	0,54305	0,54170	0,56579	0,60053	0,63337	0,61075	0,63100	0,60793	0,58698	0,55949
η	1	0,98185	0,95124	0,92543	0,57038	1	0,65889	0,57059	0,63374	1	1,00000	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,38090	0,39552	0,35689	0,27756	0,30084	0,44116	0,58290	0,47336	0,31434	0,19039	0,24935	0,34178
2	0,67665	0,72665	0,65721	0,51238	0,52744	0,73462	0,96630	0,82960	0,49602	0,31317	0,42479	0,61089
3	0,95088	1,05491	0,95037	0,73850	0,75403	1,02809	1,29874	1,15189	0,67413	0,43160	0,60024	0,86795
4	1,21191	1,38126	1,23890	0,95908	0,98063	1,32155	1,60188	1,45393	0,84974	0,54708	0,77568	1,11733
5	1,46350	1,70618	1,52399	1,17561	1,20723	1,61501	1,88495	1,74177	1,02343	0,66037	0,95113	1,36109
6	1,70781	2,02995	1,80635	1,38896	1,43382	1,90847	2,15298	2,01877	1,19556	0,77190	1,12658	1,60044
8	2,17967	2,67475	2,36466	1,80819	1,88702	2,49540	2,65550	2,54813	1,53605	0,99081	1,47747	2,06882
10	2,63440	3,31667	2,91621	2,21966	2,34021	3,08232	3,12475	3,05259	1,87254	1,20535	1,82836	2,52650
12	3,07591	3,95629	3,46244	2,62503	2,79341	3,66925	3,56908	3,53804	2,20583	1,41644	2,17926	2,97580
15	3,71866	4,91221	4,27375	3,22395	3,47320	4,54964	4,19977	4,23848	2,70088	1,72788	2,70559	3,63722
30	6,89904	9,02105	8,49448	6,11100	7,09875	8,95157	7,13061	7,62805	5,27587	3,32069	5,33729	7,00209

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,38090	0,39552	0,35689	0,27756	0,30084	0,44116	0,58290	0,47336	0,31434	0,19039	0,24935	0,34178
2	0,65622	0,68658	0,60819	0,47855	0,50052	0,72698	0,96598	0,80687	0,51656	0,30520	0,41778	0,57324
3	0,92409	0,98044	0,89290	0,71006	0,70037	0,98915	1,30937	1,09134	0,65603	0,41101	0,59116	0,82264
4	1,25203	1,28494	1,19061	0,95551	0,95784	1,21485	1,76556	1,49149	0,85872	0,53275	0,78165	1,05003
5	1,48199	1,57592	1,46761	1,16315	1,13753	1,50408	2,09128	1,59548	0,99937	0,62253	0,97495	1,29803
6	1,87558	1,94018	1,81146	1,38138	1,37899	1,95119	2,31532	2,06402	1,19243	0,79904	1,12412	1,60227
8	2,35707	2,59613	2,31363	1,79176	1,88114	2,22562	2,73131	2,89828	1,51345	1,00106	1,37880	2,12963
10	2,56495	2,82006	3,30111	2,36712	2,21297	3,09104	3,43935	3,10234	1,77071	1,13943	1,89354	2,90042
12	3,52636	4,70048	3,14988	2,63189	2,63189	4,16667	3,79174	3,43399	2,14739	1,56862	2,21193	2,69463
15	3,06805	4,20469	3,83945	3,12457	3,82864	#NUM!	3,35574	3,68888	2,86790	1,54420	2,84491	3,18842
30	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	1,60944	1,60944	0,69315	#NUM!	#NUM!	#NUM!

STA 53005 FORT COLLINS COLORADO

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,61703	0,64001	0,61123	0,60782	0,65583	0,67303	0,60663	0,60885	0,65690	0,62443	0,64542	0,62007
η	1	0,87161	0,94924	1,00000	0,85791	1	0,94867	0,89638	0,93803	1	0,99931	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,15702	0,21614	0,28498	0,38126	0,51888	0,41471	0,41752	0,40780	0,27639	0,20166	0,16968	0,15415
2	0,25448	0,33772	0,46624	0,62726	0,79119	0,61619	0,68826	0,66978	0,42074	0,32295	0,26289	0,24860
3	0,34757	0,45302	0,64371	0,87326	1,04846	0,81766	0,95319	0,92010	0,56183	0,43550	0,35609	0,33610
4	0,43773	0,56409	0,81856	1,11926	1,29556	1,01914	1,21415	1,16268	0,70059	0,54242	0,44926	0,41916
5	0,52572	0,67202	0,99142	1,36526	1,53505	1,22062	1,47208	1,39950	0,83755	0,64525	0,54243	0,49897
6	0,61198	0,77743	1,16268	1,61126	1,76847	1,42209	1,72758	1,63175	0,97303	0,74487	0,63558	0,57627
8	0,78043	0,98236	1,50135	2,10326	2,22103	1,82504	2,23275	2,08549	1,24045	0,93668	0,82185	0,72504
10	0,94461	1,18112	1,83595	2,59526	2,65869	2,22799	2,73175	2,52800	1,50408	1,12086	1,00810	0,86781
12	1,10545	1,37505	2,16730	3,08726	3,08468	2,63094	3,22585	2,96168	1,76468	1,29913	1,19432	1,00594
15	1,34167	1,65871	2,65939	3,82526	3,70621	3,23537	3,95953	3,59897	2,15096	1,55779	1,47362	1,20630
30	2,46385	2,99260	5,06061	7,51526	6,61076	6,25750	7,53856	6,63011	4,02667	2,75099	2,86966	2,12980

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,15702	0,21614	0,28498	0,38126	0,51888	0,41471	0,41752	0,40780	0,27639	0,20166	0,16968	0,15415
2	0,25219	0,33876	0,45359	0,60119	0,78072	0,62631	0,66798	0,67302	0,42493	0,31997	0,27218	0,24291
3	0,34991	0,44809	0,61054	0,83090	0,99451	0,79612	0,92620	0,92278	0,57306	0,42253	0,35631	0,33596
4	0,45585	0,58598	0,80425	1,02724	1,32362	1,01617	1,16017	1,23643	0,70000	0,52823	0,47692	0,41683
5	0,49946	0,63671	1,00866	1,29698	1,54299	1,26637	1,52696	1,41320	0,80853	0,63267	0,50903	0,49271
6	0,61226	0,77464	1,13588	1,54853	1,66351	1,26911	1,71480	1,42043	1,00045	0,70657	0,63127	0,62646
8	0,88552	1,06983	1,46853	2,30259	2,33214	1,94591	1,92181	2,07944	1,17865	0,96644	0,79450	0,71640
10	0,86377	1,18958	1,82685	4,18965	2,46810	1,98100	3,13549	2,87168	1,44036	1,06171	0,88864	0,92073
12	0,99164	1,36828	2,28578	3,15700	3,63759	2,94444	#NUM!	3,43399	1,83258	1,27841	1,36098	1,08571
15	1,19392	1,60944	2,74084	#NUM!	3,09104	#NUM!	#NUM!	2,99573	2,12026	1,66771	1,56398	1,07614
30	#DIV/0!	#DIV/0!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

STA 269171 WINNEMUCCA NEVADA

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,67361	0,69178	0,67532	0,66702	0,68336	0,73351	0,65942	0,68095	0,67808	0,69013	0,71789	0,72029
η	1	0,82550	0,72461	1,00000	0,66089	1	0,92654	0,68509	0,76172	1	0,73900	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,38006	0,40040	0,35728	0,30305	0,28440	0,19558	0,08163	0,07969	0,11328	0,17048	0,27191	0,34530
2	0,56420	0,57880	0,52905	0,45433	0,41617	0,26663	0,12379	0,11702	0,16706	0,24703	0,37877	0,47939
3	0,73357	0,74607	0,68149	0,60561	0,52907	0,33690	0,16482	0,14947	0,21581	0,32100	0,47577	0,60324
4	0,89320	0,90569	0,82185	0,75689	0,63070	0,40655	0,20504	0,17893	0,26131	0,39311	0,56618	0,72006
5	1,04567	1,05954	0,95359	0,90817	0,72451	0,47570	0,24464	0,20631	0,30443	0,46378	0,65174	0,83159
6	1,19252	1,20879	1,07873	1,05945	0,81245	0,54443	0,28374	0,23210	0,34572	0,53328	0,73350	0,93893
8	1,47318	1,49644	1,31401	1,36202	0,97523	0,68086	0,36073	0,28014	0,42407	0,66945	0,88818	1,14376
10	1,74045	1,77277	1,53417	1,66458	1,12508	0,81614	0,43642	0,32465	0,49810	0,80260	1,03384	1,33840
12	1,99736	2,04024	1,74289	1,96714	1,26529	0,95048	0,51108	0,36650	0,56883	0,93334	1,17256	1,52511
15	2,36748	2,42824	2,03940	2,42098	1,46187	1,15055	0,62151	0,42547	0,67008	1,12581	1,37048	1,79348
30	4,04468	4,21552	3,33895	4,69020	2,29710	2,13292	1,15480	0,67903	1,12206	2,04450	2,24611	3,00174

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,38006	0,40040	0,35728	0,30305	0,28440	0,19558	0,08163	0,07969	0,11328	0,17048	0,27191	0,34530
2	0,58455	0,60906	0,56643	0,44208	0,40826	0,26613	0,12244	0,11246	0,17366	0,24965	0,40309	0,49734
3	0,74969	0,74344	0,69315	0,59319	0,50920	0,33335	0,15433	0,14343	0,21278	0,31360	0,49644	0,60363
4	0,88908	0,91115	0,84534	0,70128	0,63431	0,39292	0,19947	0,17524	0,25002	0,37767	0,63580	0,74721
5	1,05416	1,01084	0,89768	0,87724	0,69869	0,45700	0,23283	0,19117	0,29254	0,44137	0,71085	0,81475
6	1,26534	1,15342	1,03302	0,92246	0,84470	0,50358	0,27534	0,25008	0,35012	0,51540	0,78317	0,92882
8	1,44692	1,37103	1,20624	1,17272	0,95551	0,59406	0,39204	0,30034	0,43610	0,64947	0,89638	1,07536
10	1,77196	1,59601	1,28967	1,69773	1,00866	0,70131	0,46587	0,33968	0,48468	0,76009	0,98649	1,22945
12	1,86322	2,30259	1,62924	1,64866	1,40534	0,99325	0,47236	0,41074	0,60938	0,95753	1,19942	1,65456
15	2,36712	2,25129	2,39790	3,04452	1,60944	1,20397	0,57536	0,35667	0,66140	1,27766	1,44036	1,69168
30	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#NUM!	#DIV/0!	#NUM!	0	0,69315	#DIV/0!	#NUM!	#DIV/0!

STA Firenze Italy

Model probabilities $-lnp^{(k)}$

ξ	0,64870	0,66186	0,64691	0,64532	0,63597	0,59579	0,57942	0,60831	0,64531	0,63221	0,65085	0,63383
η	1	0,74349	0,69530	0,77049	0,73896	1	0,98768	0,98780	0,89068	1	0,64850	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,41089	0,38759	0,40189	0,43580	0,41851	0,29576	0,15822	0,19149	0,31267	0,42764	0,53552	0,46076
2	0,63341	0,58561	0,62124	0,67532	0,65807	0,49642	0,27307	0,31479	0,48452	0,67642	0,82279	0,72695
3	0,83299	0,76241	0,81034	0,89134	0,86953	0,67826	0,38731	0,43748	0,64903	0,89495	1,06298	0,95745
4	1,01828	0,92595	0,98166	1,09262	1,06403	0,84866	0,50111	0,55975	0,80851	1,09540	1,27661	1,16702
5	1,19338	1,08003	1,14071	1,28334	1,24664	1,01095	0,61459	0,68168	0,96420	1,28324	1,47233	1,36216
6	1,36064	1,22684	1,29056	1,46594	1,42022	1,16703	0,72781	0,80334	1,11685	1,46153	1,65483	1,54646
7	1,52160	1,36782	1,43313	1,64199	1,58658	1,31810	0,84081	0,92477	1,26696	1,63222	1,82700	1,72217
8	1,67731	1,50394	1,56972	1,81257	1,74699	1,46501	0,95362	1,04601	1,41492	1,79663	1,99078	1,89084
10	1,97593	1,76434	1,82853	2,14036	2,05335	1,74863	1,17876	1,28798	1,70543	2,11026	2,29835	2,21118
12	2,26080	2,01205	2,07215	2,45377	2,34428	2,02129	1,40336	1,52938	1,98995	2,40772	2,58502	2,51353
14	2,53468	2,24964	2,30379	2,75564	2,62295	2,28513	1,62751	1,77031	2,26954	2,69233	2,85537	2,80168
15	2,66810	2,36520	2,41582	2,90290	2,75838	2,41423	1,73943	1,89062	2,40773	2,83056	2,98543	2,94125
20	3,30680	2,91693	2,94574	3,60926	3,40415	3,03676	2,29782	2,49086	3,08537	3,48891	3,59524	3,60313
25	3,90828	3,43457	3,43662	4,27637	4,00901	3,62907	2,85451	3,08931	3,74505	4,10460	4,15329	4,21843
30	4,48159	3,92649	3,89842	4,91369	4,58310	4,19833	3,40983	3,68631	4,39069	4,68826	4,67326	4,79896

Historical probabilities $-lnp^{(k)}$

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,41089	0,38759	0,40189	0,43580	0,41851	0,29576	0,15822	0,19149	0,31267	0,42764	0,53552	0,46076
2	0,62230	0,57339	0,59671	0,67947	0,66872	0,48326	0,27641	0,32816	0,49302	0,65004	0,78288	0,69237
3	0,82098	0,74538	0,79497	0,90992	0,90190	0,67534	0,38652	0,46365	0,67065	0,85857	1,03707	0,92065
4	1,01064	0,91333	0,95289	1,11919	1,16408	0,85774	0,51392	0,59601	0,85398	1,08556	1,25476	1,11340
5	1,18641	1,04092	1,14610	1,33564	1,33635	1,01535	0,62680	0,72555	0,99896	1,26198	1,41669	1,30380
6	1,36109	1,16979	1,35658	1,51513	1,53890	1,21400	0,74310	0,85389	1,16291	1,41215	1,68401	1,48114
7	1,52389	1,37008	1,43481	1,69580	1,77698	1,36828	0,83075	0,97768	1,35193	1,62169	1,89945	1,64947
8	1,65206	1,51861	1,58954	1,77509	1,99501	1,49059	0,97928	1,06517	1,49059	1,82796	2,03263	1,88738
10	1,93055	1,76041	1,89133	2,29362	2,33602	1,78579	1,14818	1,29222	1,73927	2,05839	2,30458	2,20499
12	2,37723	1,86294	2,15409	2,48051	2,56960	1,95555	1,38398	1,60020	2,02575	2,32844	2,77499	2,60037
14	2,61496	2,38312	2,38444	2,69255	2,81975	2,38123	1,63413	1,73641	2,38123	2,65270	3,10515	2,81975
15	2,62467	2,38210	2,54771	2,98456	2,95317	2,55304	1,71641	1,97234	2,37715	2,66549	3,03855	3,07096
20	3,60705	2,82053	2,98801	3,77659	3,35574	2,95651	2,11897	2,41747	3,03655	3,35574	3,91202	3,47352
25	4,23411	3,62700	3,38681	3,72328	3,54096	3,21888	2,38828	3,03013	3,21888	3,94642	4,19971	3,72328
30	4,04888	4,36310	3,76120	4,44852	3,53806	3,50856	3,20158	3,20158	3,73170	4,04888	3,73170	4,04888

STA Marseille France

Model probabilities -lnp^(k)

ξ	0,65556	0,65509	0,63874	0,61731	0,59587	0,57060	0,56669	0,55006	0,62455	0,63012	0,66562	0,64688
η	1	0,97667	0,96797	0,94383	1,00000	1	0,98895	1,00000	1,00000	1	0,95861	1
k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,29307	0,29481	0,29409	0,30343	0,26706	0,17609	0,08793	0,12979	0,21439	0,33350	0,34558	0,33799
2	0,44705	0,45002	0,46042	0,49154	0,44819	0,30861	0,15516	0,23596	0,34328	0,52927	0,51918	0,52248
3	0,59992	0,60394	0,62473	0,67535	0,62931	0,44112	0,22206	0,34213	0,47216	0,72504	0,69027	0,70586
4	0,75197	0,75692	0,78762	0,85618	0,81044	0,57364	0,28873	0,44830	0,60105	0,92080	0,85952	0,88843
5	0,90337	0,90916	0,94938	1,03476	0,99156	0,70616	0,35523	0,55447	0,72993	1,11657	1,02734	1,07037
6	1,05425	1,06079	1,11024	1,21151	1,17268	0,83867	0,42159	0,66064	0,85882	1,31234	1,19397	1,25178
7	1,20468	1,21190	1,27032	1,38673	1,35381	0,97119	0,48783	0,76680	0,98770	1,50810	1,35961	1,43275
8	1,35472	1,36256	1,42974	1,56064	1,53493	1,10370	0,55397	0,87297	1,11659	1,70387	1,52437	1,61333
10	1,65379	1,66273	1,74688	1,90515	1,89718	1,36874	0,68599	1,08531	1,37436	2,09540	1,85168	1,97350
12	1,95174	1,96161	2,06211	2,24596	2,25943	1,63377	0,81773	1,29765	1,63213	2,48694	2,17650	2,33257
14	2,24874	2,25939	2,37575	2,58372	2,62168	1,89880	0,94924	1,50998	1,88990	2,87847	2,49923	2,69070
15	2,39693	2,40793	2,53205	2,75159	2,80280	2,03132	1,01491	1,61615	2,01878	3,07424	2,65991	2,86945
20	3,13523	3,14756	3,30911	3,58256	3,70842	2,69390	1,34262	2,14699	2,66321	4,05307	3,45749	3,76062
25	3,86989	3,88302	4,08012	4,40210	4,61404	3,35648	1,66942	2,67783	3,30763	5,03191	4,24714	4,64821
30	4,60164	4,61515	4,84631	5,21260	5,51967	4,01906	1,99551	3,20868	3,95205	6,01074	5,03045	5,53293

Historical probabilities -lnp^(k)

k	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	0,29307	0,29481	0,29409	0,30343	0,26706	0,17609	0,08793	0,12979	0,21439	0,33350	0,34558	0,33799
2	0,47973	0,47923	0,48955	0,51256	0,45400	0,31158	0,16335	0,23979	0,36715	0,53792	0,56982	0,56556
3	0,27815	0,29741	0,29629	0,30132	0,28819	0,16436	0,09101	0,13418	0,20764	0,35311	0,34447	0,33572
4	0,81295	0,82684	0,86424	0,91890	0,81522	0,59029	0,31217	0,45083	0,66036	0,93257	0,95073	0,94389
5	0,96209	1,00230	1,03038	1,06406	0,98546	0,70625	0,39356	0,54895	0,76886	1,07244	1,09471	1,19103
6	1,09108	1,10529	1,19045	1,25198	1,13717	0,83026	0,46548	0,64443	0,87422	1,29928	1,30241	1,31197
7	1,26342	1,28834	1,37575	1,44646	1,30816	0,94498	0,51851	0,74388	1,01297	1,45402	1,46209	1,47106
8	1,41908	1,37527	1,53375	1,57867	1,54314	1,08619	0,58618	0,94389	1,26851	1,66126	1,65200	1,66328
10	1,71873	1,71172	1,73292	1,94331	1,87054	1,33552	0,73439	1,05416	1,31591	1,95353	1,92529	2,15277
12	2,06142	1,91959	2,13553	2,15740	2,01490	1,67398	0,82928	1,31046	1,77934	2,33032	2,27181	2,46689
14	2,42657	2,25324	2,38735	2,77991	2,75508	1,66188	0,94497	1,48656	1,89956	2,80869	2,39425	2,60092
15	2,44045	2,53620	2,58022	2,90612	3,17805	1,96166	1,02207	1,62471	2,01882	2,86410	2,71196	3,01100
20	3,09104	3,24148	3,20883	3,46574	4,59512	2,61844	1,41707	2,34383	2,69255	5,28320	3,87120	3,90197
25	3,67630	4,26970	3,67630	5,03044	4,36945	3,64414	1,59686	2,66470	3,42100	#NUM!	#NUM!	4,36945
30	4,18965	4,77912	4,88280	4,85203	#NUM!	4,15888	1,99243	3,49651	3,75342	#NUM!	4,85203	4,88280

A/A	Stations		Year	A/A	Stations		Year	A/A	Stations		Year	A/A	Stations		Year
1	35820 POCAHONTAS 1 USA/ARIZONA	ξ	0,54	8	253630 HARTINGTON USA/NEBRASKA	ξ	0,60	15	483100 EVANSTON 1E USA/WYOMING	ξ	0,61	22	305050 DOVER_W.WKS UK	ξ	0,64
		n	0,88			n	0,96			n	0,81			n	0,78
		p	0,74			p	0,77			p	0,78			p	0,58
2	53005 FORT COLLINS USA/COLORADO	ξ	0,65	9	269171 WINNEMUCCA WSO AP USA/NEVADA	ξ	0,69	16	2165 DURHAM_LPMS UK	ξ	0,62	23	404988 MILLFIELD_SCHOOL UK	ξ	0,68
		n	0,79			n	0,58			n	0,74			n	0,83
		p	0,75			p	0,79			p	0,46			p	0,52
3	90140 ALBANY 3SE USA/ GEORGIA	ξ	0,59	10	322188 DICKINSON EXP STN USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,60	17	4061 SHEFFIELD_LPMS UK	ξ	0,65	24	575548 STONYHURST UK	ξ	0,65
		n	0,87			n	0,84			n	0,76			n	0,67
		p	0,70			p	0,73			p	0,48			p	0,43
4	106152 MOSCOW U OF ID USA/ IDAHO	ξ	0,68	11	324418 JAMESTOWN STATE HOSP. USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,57	18	43941 DALTON_HOLME UK	ξ	0,62	25	923753 MARCHMONT UK	ξ	0,63
		n	0,67			n	0,86			n	0,70			n	0,73
		p	0,67			p	0,79			p	0,49			p	0,45
5	138688 WASHINGTON USA/IOWA	ξ	0,56	12	326255 NAPOLEON USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,57	19	82583 SHEFFIELD UK	ξ	0,66	26	MARSEILLE FRANCE	ξ	0,59
		n	0,85			n	0,85			n	0,76			n	0,77
		p	0,75			p	0,76			p	0,48			p	0,78
6	144972 MANHATTAN USA/KANSAS	ξ	0,61	13	391739 CLARK USA/SOUTH DAKOTA	ξ	0,57	20	107389 CHATSWORTH UK	ξ	0,67	27	GENOVA ITALY	ξ	0,63
		n	0,88			n	0,83			n	0,76			n	0,88
		p	0,73			p	0,75			p	0,47			p	0,69
7	251145 BRIDGEPORT USA/NEBRASKA	ξ	0,59	14	412121 CROSBYTON USA/TEXAS	ξ	0,61	21	180704 STRETHAM UK	ξ	0,61	28	FIRENZE ITALY	ξ	0,64
		n	0,84			n	0,84			n	0,79			n	0,83
		p	0,80			p	0,83			p	0,60			p	0,70

	STATIONS		January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
1	35820 POCAHONTAS 1 USA/ARIZONA	ξ	0,59	0,62	0,62	0,60	0,58	0,60	0,58	0,60	0,63	0,65	0,62	0,60
		n	0,94	0,88	0,98	0,88	0,98	0,97	0,94	0,91	0,96	0,96	0,71	0,93
		p	0,73	0,73	0,71	0,68	0,70	0,74	0,74	0,78	0,78	0,80	0,75	0,74
2	53005 FORT COLLINS USA/COLORADO	ξ	0,62	0,64	0,61	0,61	0,66	0,67	0,61	0,61	0,66	0,62	0,65	0,62
		n	0,89	0,87	0,95	1,00	0,86	1,00	0,95	0,90	0,94	0,83	1,00	0,83
		p	0,85	0,81	0,75	0,68	0,60	0,66	0,66	0,67	0,76	0,82	0,84	0,86
3	90140 ALBANY 3SE USA/ GEORGIA	ξ	0,56	0,54	0,54	0,54	0,57	0,60	0,63	0,61	0,63	0,61	0,59	0,56
		n	0,85	0,98	0,95	0,93	0,57	1,00	0,66	0,57	0,63	0,92	1,00	0,91
		p	0,68	0,67	0,70	0,76	0,74	0,64	0,56	0,62	0,73	0,83	0,78	0,71
4	106152 MOSCOW U OF ID USA/ IDAHO	ξ	0,68	0,68	0,67	0,64	0,64	0,63	0,60	0,66	0,68	0,68	0,69	0,67
		n	0,79	0,81	1,00	0,74	0,80	0,71	0,89	0,95	0,98	0,60	0,62	0,66
		p	0,49	0,54	0,55	0,63	0,66	0,71	0,87	0,86	0,79	0,70	0,53	0,51
5	138688 WASHINGTON USA/IOWA	ξ	0,56	0,54	0,55	0,54	0,55	0,56	0,53	0,54	0,57	0,58	0,58	0,58
		n	0,95	0,94	1,00	0,89	0,90	0,86	0,92	0,98	0,94	0,95	0,83	0,90
		p	0,79	0,80	0,75	0,69	0,67	0,69	0,73	0,76	0,74	0,78	0,78	0,79
6	144972 MANHATTAN USA/KANSAS	ξ	0,64	0,59	0,59	0,58	0,59	0,56	0,57	0,58	0,59	0,62	0,66	0,60
		n	0,94	1,00	0,82	1,00	0,98	0,87	0,85	0,80	0,97	0,96	0,87	0,99
		p	0,82	0,79	0,75	0,67	0,62	0,64	0,71	0,70	0,72	0,77	0,80	0,83
7	251145 BRIDGEPORT USA/NEBRASKA	ξ	0,59	0,60	0,56	0,59	0,63	0,58	0,56	0,58	0,59	0,61	0,58	0,60
		n	0,86	0,98	1,00	1,00	0,96	0,88	1,00	0,97	1,00	1,00	0,96	0,91
		p	0,82	0,79	0,75	0,67	0,62	0,64	0,71	0,70	0,72	0,77	0,80	0,83
8	253630 HARTINGTON USA/NEBRASKA	ξ	0,60	0,57	0,58	0,61	0,57	0,54	0,53	0,55	0,57	0,60	0,63	0,60
		n	0,74	0,82	0,91	1,00	0,99	0,92	1,00	0,99	0,95	0,90	0,82	0,84
		p	0,84	0,82	0,78	0,70	0,66	0,67	0,74	0,73	0,77	0,83	0,84	0,86
9	269171 WINNEMUCCA WSO AP USA/NEVADA	ξ	0,67	0,69	0,68	0,67	0,68	0,73	0,66	0,68	0,68	0,69	0,72	0,72
		n	0,79	0,83	0,72	1,00	0,66	0,96	0,93	0,69	0,76	0,90	0,74	0,78
		p	0,68	0,67	0,70	0,74	0,75	0,82	0,92	0,92	0,89	0,84	0,76	0,71
10	322188 DICKINSON EXP STN USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,67	0,64	0,63	0,62	0,62	0,59	0,56	0,55	0,63	0,63	0,72	0,63
		n	0,84	0,69	0,68	0,81	0,99	0,91	1,00	0,89	0,98	0,89	0,96	0,68
		p	0,77	0,78	0,75	0,71	0,64	0,56	0,69	0,75	0,75	0,82	0,80	0,78

	STATIONS		January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
11	324418 JAMESTOWN STATE HOSP. USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,54	0,57	0,60	0,60	0,63	0,55	0,54	0,55	0,57	0,57	0,58	0,59
		n	0,90	0,91	1,00	0,89	0,98	0,96	0,92	0,96	0,96	0,93	0,83	1,00
		p	0,85	0,85	0,85	0,78	0,72	0,64	0,71	0,75	0,78	0,84	0,86	0,84
12	326255 NAPOLEON USA/NORTH DAKOTA	ξ	0,58	0,58	0,58	0,61	0,60	0,54	0,51	0,52	0,55	0,59	0,59	0,61
		n	0,79	1,00	1,00	0,94	0,90	0,90	0,98	0,95	1,00	0,90	0,78	0,96
		p	0,81	0,82	0,80	0,74	0,69	0,62	0,71	0,75	0,75	0,82	0,83	0,82
13	391739 CLARK USA/SOUTH DAKOTA	ξ	0,60	0,59	0,58	0,56	0,59	0,57	0,52	0,55	0,58	0,64	0,67	0,58
		n	0,77	1,00	0,97	0,88	0,79	0,83	0,96	0,97	0,85	0,93	0,98	0,82
		p	0,79	0,80	0,77	0,72	0,67	0,63	0,71	0,73	0,76	0,79	0,81	0,81
14	412121 CROSBYTON USA/TEXAS	ξ	0,56	0,57	0,53	0,58	0,57	0,59	0,58	0,57	0,60	0,65	0,60	0,59
		n	0,86	0,86	0,79	1,00	0,87	0,94	1,00	0,83	0,83	0,99	0,90	0,92
		p	0,89	0,88	0,88	0,84	0,76	0,79	0,81	0,79	0,79	0,83	0,88	0,89
15	483100 EVANSTON 1E USA/WYOMING	ξ	0,63	0,60	0,60	0,60	0,63	0,63	0,61	0,59	0,65	0,64	0,62	0,61
		n	0,98	0,91	0,97	0,88	0,97	0,74	0,83	0,89	0,95	0,97	0,85	1,00
		p	0,77	0,74	0,73	0,73	0,74	0,81	0,84	0,81	0,81	0,81	0,80	0,79
16	2165 DURHAM_LPMS UK	ξ	0,63	0,64	0,62	0,62	0,65	0,65	0,61	0,60	0,59	0,63	0,61	0,60
		n	0,67	1,00	0,68	0,70	1,00	0,77	0,70	0,73	0,76	0,67	0,71	0,73
		p	0,42	0,44	0,45	0,47	0,50	0,53	0,51	0,48	0,50	0,42	0,39	0,41
17	4061 SHEFFIELD_LPMS UK	ξ	0,65	0,65	0,69	0,67	0,65	0,65	0,62	0,60	0,65	0,64	0,65	0,66
		n	0,90	0,85	1,00	0,78	0,97	0,77	0,89	0,73	0,84	0,64	0,80	0,89
		p	0,39	0,44	0,47	0,50	0,54	0,57	0,56	0,53	0,55	0,46	0,40	0,39
18	43941 DALTON_HOLME UK	ξ	0,62	0,58	0,59	0,66	0,64	0,63	0,59	0,61	0,62	0,59	0,57	0,62
		n	0,69	0,78	0,60	0,97	1,00	0,79	0,76	0,72	0,96	0,69	0,77	0,69
		p	0,42	0,48	0,48	0,51	0,55	0,57	0,56	0,53	0,54	0,46	0,39	0,40
19	82583 SHEFFIELD UK	ξ	0,65	0,65	0,69	0,69	0,65	0,66	0,61	0,56	0,64	0,61	0,64	0,65
		n	1,00	0,83	1,00	0,88	0,93	0,81	0,86	0,60	0,87	0,58	0,74	0,84
		p	0,38	0,44	0,46	0,50	0,54	0,57	0,56	0,53	0,55	0,46	0,39	0,38
20	107389 CHATSWORTH UK	ξ	0,64	0,62	0,63	0,67	0,63	0,64	0,64	0,64	0,65	0,63	0,62	0,61
		n	0,63	0,56	0,65	0,76	0,80	0,66	0,88	0,79	0,81	0,71	0,67	0,72
		p	0,37	0,42	0,45	0,51	0,55	0,56	0,54	0,50	0,52	0,44	0,39	0,37

	STATIONS		January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
21	180704 STRETHAM UK	ξ	0,58	0,61	0,57	0,62	0,63	0,61	0,60	0,59	0,63	0,59	0,59	0,57
		n	0,73	0,90	0,66	0,78	0,97	0,74	0,80	0,75	0,90	0,79	0,77	0,78
		p	0,56	0,61	0,60	0,61	0,64	0,63	0,62	0,63	0,62	0,62	0,59	0,55
22	305050 DOVER_W.WKS UK	ξ	0,64	0,61	0,66	0,65	0,62	0,59	0,60	0,60	0,64	0,63	0,62	0,61
		n	0,87	0,71	0,85	0,81	0,83	0,76	0,78	0,73	0,92	0,67	0,79	0,73
		p	0,49	0,53	0,57	0,60	0,65	0,66	0,66	0,66	0,65	0,62	0,55	0,49
23	404988 MILLFIELD_SCHOOL UK	ξ	0,66	0,66	0,68	0,66	0,67	0,65	0,63	0,64	0,65	0,65	0,65	0,62
		n	0,90	0,73	1,00	0,71	1,00	0,83	0,71	0,72	0,84	0,61	0,66	0,68
		p	0,45	0,50	0,54	0,55	0,57	0,60	0,56	0,53	0,53	0,47	0,46	0,43
24	575548 STONYHURST UK	ξ	0,67	0,62	0,67	0,65	0,65	0,64	0,64	0,63	0,64	0,64	0,68	0,63
		n	1,00	0,60	0,89	0,74	0,79	0,65	0,64	0,60	0,67	0,64	0,66	0,52
		p	0,35	0,41	0,47	0,49	0,51	0,51	0,44	0,42	0,44	0,44	0,40	0,37
25	923753 MARCHMONT UK	ξ	0,60	0,67	0,63	0,67	0,64	0,66	0,65	0,64	0,62	0,64	0,60	0,62
		n	0,76	0,98	0,66	1,00	0,78	1,00	0,93	0,65	0,71	0,74	0,73	0,96
		p	0,42	0,44	0,44	0,47	0,50	0,54	0,49	0,45	0,46	0,39	0,37	0,39
26	MARSEILLE FRANCE	ξ	0,61	0,64	0,61	0,57	0,61	0,56	0,56	0,55	0,60	0,64	0,64	0,61
		n	0,79	0,87	0,81	0,74	0,99	0,92	0,93	0,95	0,98	0,92	0,93	0,79
		p	0,75	0,74	0,75	0,74	0,77	0,84	0,92	0,88	0,81	0,72	0,71	0,71
27	GENOVA ITALY	ξ	0,67	0,66	0,65	0,63	0,60	0,58	0,57	0,58	0,61	0,65	0,68	0,67
		n	0,96	0,78	0,82	1,00	0,83	0,97	0,96	1,00	0,94	0,85	0,92	0,84
		p	0,67	0,69	0,66	0,64	0,63	0,73	0,84	0,79	0,71	0,61	0,60	0,66
28	FIRENZE ITALY	ξ	0,66	0,67	0,65	0,62	0,61	0,58	0,57	0,59	0,62	0,65	0,68	0,66
		n	0,98	0,76	0,74	0,72	0,81	0,82	0,96	0,97	0,94	0,74	0,78	0,81
		p	0,66	0,68	0,67	0,64	0,66	0,75	0,85	0,83	0,73	0,65	0,59	0,63