



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ»

**«Στοχαστική διερεύνηση της δυνατότητας
αξιοποίησης πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων
για βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων»**

Εκπόνηση εργασίας: **Ιλιάδα Χ. Μιμηγιάννη**



Αθήνα, Οκτώβριος 2010

Επιβλέπων: **Δημήτρης Κουτσογιάννης,**

καθηγητής ΕΜΠ

«ΕΠΙΣΤΗΜΗ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ
ΠΟΡΩΝ»

*«...why mathematics is such a delight to study,
such a challenge to practice,
and such a puzzle to define»*

George Temple

Ευχαριστίες

Δεν ξέρω κατά πόσο είμαι σε θέση να αντιληφθώ πως ολοκληρώθηκε αυτό το κεφάλαιο της ζωής μου και ομολογώ πως η σύνταξη αυτών των τελευταίων σελίδων με δυσκόλεψε αρκετά. Κάθομαι μπροστά στον υπολογιστή μου, ο οποίος έχει γίνει αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητάς μου τους τελευταίους μήνες, και προσπαθώ να βρω τα κατάλληλα λόγια για να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε κάποιους ανθρώπους, χωρίς τη συμβολή των οποίων δε θα βρισκόμουν στη θέση που βρίσκομαι σήμερα. Και δεν αναφέρομαι στην ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας, καθώς με τον έναν ή με τον άλλον τρόπο αυτή θα ολοκληρωνόταν. Αναφέρομαι στο προσωπικό κέρδος που αποκόμισα να μπορώ αντιλαμβάνομαι έννοιες που φάνταζαν απρόσιτες και να τους δώσω τελείως διαφορετικές προεκτάσεις. Τα μαθηματικά ανέκαθεν αποτελούσαν για εμένα τρόπο έκφρασης, κάτι που λίγοι θα καταλάβουν και ακόμη λιγότεροι θα ασπαστούν. Αρκετά όμως για εμένα. Αρχικά αισθάνομαι την ανάγκη να απευθυνθώ προσωπικά στον επιβλέποντα καθηγητή μου Δημήτρη Κουτσογιάννη.

Κύριε Κουτσογιάννη, θέλω να σας ευχαριστήσω καταρχάς που με εμπιστευτήκατε και μου δώσατε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα θέμα το οποίο θεωρώ πως με εκφράζει απόλυτα. Όταν ήρθα να σας ζητήσω να συνεργαστούμε ήμουν πολύ μπερδεμένη και απογοητευμένη από τις μέχρι τότε επιλογές μου, σε ό,τι αφορά στο αντικείμενο που θέλω να ακολουθήσω. Αισθάνομαι λοιπόν, πως τα πράγματα έχουν πλέον ξεκαθαρίσει μέσα μου. Θέλω επίσης να σας ευχαριστήσω που ανεχτήκατε το ιδιαίτερο του χαρακτήρα μου, που ήσασταν πάντα διαθέσιμος και ακόμη να αναφερθώ στο ότι μου έκανε απίστευτη εντύπωση το πως δεν θεωρήσατε ποτέ τίποτε δεδομένο. Το έναυσμα να ασχοληθώ με τα στοχαστικά δόθηκε από το κείμενό σας “A random walk on water” και την απλή συνειδητοποίηση πως δεν καταλάβαινα απολύτως τίποτε. Σήμερα, ένα χρόνο μετά, αισθάνομαι την ανάγκη να μεταφέρω κάτι που πολύ εύστοχα διατυπώσατε στο εν λόγω κείμενο: «Understanding is not identical, nor a prerequisite, to overstanding». Ευχαριστώ για όλα.

Στην προσπάθειά μου αυτή βέβαια, υπήρξαν συνεχώς δίπλα μου κάποιοι άνθρωποι στους οποίους επίσης οφείλονται ιδιαίτερες ευχαριστίες.

Για τη συνάδελφο και πολύ καλή μου φίλη Αφροδίτη Ντίτορα δεν υπάρχουν λόγια για να την ευχαριστήσω. Τα τελευταία δέκα χρόνια είναι πάντα δίπλα μου στηρίζοντας τις επιλογές μου και δικαιολογώντας τα λάθη μου. Η εκπόνηση της παρούσας εργασίας δε θα ήταν δυνατή χωρίς την Αφροδίτη. Υπήρξαν στιγμές που αισθάνθηκα, λόγω σωματικής κούρασης, πως δε μπορώ συνεχίσω και αυτή ήταν πάντα πρόθυμη να βοηθήσει, είτε φτιάχνοντας διαγράμματα, είτε διαβάζοντας ξανά και ξανά αυτές τις σελίδες.

Με την Αγγελική Αλεξοπούλου βιώσαμε αυτό το ταξίδι ταυτόχρονα, καθώς και αυτή παραδίδει τη διπλωματική της τώρα, κατά συνέπεια με κάποιο τρόπο μοιραστήκαμε τα ξενύχτια, τις απογοητεύσεις αλλά και πολύ γέλιο. Τι να πρωτοθυμηθώ. Καταρχάς, δε θυμάμαι από πότε έχω να γελάσω τόσο. Δηλαδή πραγματικά έπρεπε να έχουμε κρατήσει τις συνομιλίες στο *Skype* και να τις κάνουμε λεύκωμα. Δεν ξέρω τι να πω, οπότε θα αρκεστώ σε αυτό: Αγγελική, μην αγχώνεσαι θα σε βοηθήσω εγώ... Να τα κάνουμε όλα λάθος!

Η περίοδος αυτή της ζωής μου συμπίπτει χρονικά με την έκδοση της πρώτης μου οικοδομικής άδειας και μάλλον πρέπει να ζητήσω συγγνώμη από τους ιδιοκτήτες για την απίστευτη καθυστέρηση από πλευράς μου και να τους ευχαριστήσω για την κατανόηση που έδειξαν.

Επίσης, ευχαριστώ τη Νανά για την πάντα διαθέσιμη θέση στο *bali*, την Ευτυχία, τον Άγγελο από το ψιλικατζίδικο για τις τσάμπα μπύρες, τον *Johnny Cash* για την παρέα που μου κράτησε και φυσικά το Δημήτρη μου.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τις αδερφές μου Αλεξάνδρα και Ανθή, τον αδερφό μου Μάριο-Ιωάννη, την Έλενα, τη γιαγιά μου και φυσικά τους γονείς μου Αρετή και Χριστόφορο για την αμέριστη και συνεχή συμπαράστασή τους.

I.X. Μιμηγιάννη

Παρασκευή, 8 Οκτωβρίου 2010

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	i
Περιεχόμενα	iii
Περίληψη	vi
Abstract	vii
Extended abstract	viii
Introduction	viii
Method overview	viii
Statistical analysis of serially independent samples	ix
Statistical analysis of serially dependent samples – Markov model	x
Statistical analysis of serially dependent samples – SSS model	xiv
Attempt to establish a relation to express the equivalent number of independent sites as a function of the correlation coefficient	xviii
Conclusions – Suggestions for further investigation	xxiv
1 Εισαγωγή	1
1.1 Στόχος έρευνας	1
1.2 Μεθοδολογία στοχαστικής – στατιστικής ανάλυσης/προσέγγισης	2
1.3 Διάρθρωση εργασίας	3
2 Βιβλιογραφική επισκόπηση	5
2.1 Προσομοίωση Monte Carlo	5
2.1.1 Ορισμοί	7
2.1.2 Παραδοχή χρονικής ανεξαρτησίας υδρολογικών δειγμάτων (Εφαρμογή κλασσικής στατιστικής)	9
2.1.3 «Μαρκοβιανή» Προσέγγιση	11
2.1.4 Ανεπίξεις απλής ομοιοθεσίας	13
2.2 Αξιοποίηση πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων με ενοποίηση διαρκειών	17
2.3 Προσπάθειες ποσοτικοποίησης της επαύξησης της υδρολογικής πληροφορίας για βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων	19
2.3.1 Προσέγγιση με αναλυτικές σχέσεις	19
2.3.2 Προσέγγιση με προσομοίωση Monte Carlo	22
3 Στατιστική ανάλυση, ανεξάρτητων χρονικά, υδρολογικών δειγμάτων – Εφαρμογή κλασσικής στατιστικής	29
3.1 Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας - Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της μέσης τιμής	35

3.2	Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας – Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της δειγματικής διασποράς	38
3.3	Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς	40
4	Στατιστική ανάλυση, εξαρτημένων χρονικά, υδρολογικών δειγμάτων	44
4.1	Μαρκοβιανή προσέγγιση	45
4.1.1	Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας – Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της μέσης τιμής	52
4.1.2	Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας – Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της δειγματικής διασποράς	56
4.1.3	Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς	61
4.2	Ανελίζεις Απλής Ομοιοθεσίας	65
4.2.1	Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας – Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της μέσης τιμής	70
4.2.2	Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας – Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της δειγματικής διασποράς	74
4.2.3	Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς	78
5	Σύγκριση εκτιμήσεων προσομοίωσης Monte Carlo και αναλυτικών σχέσεων	83
5.1	Περίπτωση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων	84
5.2	Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων («Μαρκοβιανή» προσέγγιση)	86
5.3	Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων (Ανελίζεις Απλής Ομοιοθεσίας)	90
6	Προσαρμογή σχέσης έκφρασης ισοδύναμου αριθμού σταθμών ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης των υδρολογικών δειγμάτων	96
6.1	Περίπτωση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων	96
6.2	Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων («Μαρκοβιανή» προσέγγιση)	98
6.3	Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων (Ανελίζεις Απλής Ομοιοθεσίας)	102
7	Συμπεράσματα – Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση	106
	Βιβλιογραφικές αναφορές	112
	Παράρτημα Α - Αποδείξεις σχέσεων	116
	Προσδιορισμός συντελεστών α_{ij}	116
	Προσδιορισμός στατιστικών χαρακτηριστικών λευκών θορύβων (περίπτωση χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων)	119

Προσδιορισμός στατιστικών χαρακτηριστικών λευκών θορύβων (περίπτωση χρονικά εξαρτημένων υδρολογικών δειγμάτων) _____	121
Παράρτημα Β - Αποτελέσματα προσομοιώσεων Monte Carlo _____	123
Γραφική απεικόνιση ισοδύναμου αριθμού σταθμών ke ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j _____	123
Περίπτωση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών _____	123
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών («Μαρκοβιανή» προσέγγιση) _____	128
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών (Ανεπίξεις Απλής Ομοιοθεσίας) _____	146
Παράρτημα Γ - Συγκριτική παρουσίαση εκτιμήσεων προσομοίωσης και ήδη υφιστάμενων σχέσεων _____	169
Γραφική απεικόνιση ισοδύναμου αριθμού σταθμών ke ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j _____	169
Περίπτωση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών _____	169
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών («Μαρκοβιανή» προσέγγιση) _____	174
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών (Ανεπίξεις Απλής Ομοιοθεσίας) _____	192
Παράρτημα Δ - Αποτελέσματα προσπάθειας προσαρμογής σχέσης έκφρασης ισοδύναμου αριθμού σταθμών ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης των υδρολογικών δειγμάτων _____	215
Γραφική απεικόνιση ισοδύναμου αριθμού σταθμών ke ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j _____	215
Περίπτωση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών _____	215
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών («Μαρκοβιανή» προσέγγιση) _____	220
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών (Ανεπίξεις Απλής Ομοιοθεσίας) _____	238

Περίληψη

Εφόσον διατίθενται περισσότερα του ενός υδρολογικά δείγματα από διάφορους σταθμούς μιας κλιματικά ομογενούς περιοχής, ή και από τον ίδιο σταθμό για διαφορετικές χρονικές κλίμακες, προκύπτει το ζήτημα της ταυτόχρονης μελέτης του συνόλου των δειγμάτων με σκοπό τη βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων. Σε περίπτωση που τα στατιστικά δείγματα των επιμέρους σταθμών είναι στατιστικώς ανεξάρτητα, η ενοποίηση έχει ως αποτέλεσμα τη σημαντική αύξηση της στατιστικής αξιοπιστίας των εκτιμήσεων, αφού το μήκος του ενοποιημένου δείγματος, το οποίο χαρακτηρίζει την αξιοπιστία των στατιστικών εκτιμήσεων, είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους μηκών (μέθοδος σταθμών-ετών). Ωστόσο, η ενοποίηση είναι επιτρεπτή και όταν υπάρχει στοχαστική εξάρτηση, στην περίπτωση βέβαια αυτή η αξιοπιστία των στατιστικών εκτιμήσεων δεν αυξάνεται το ίδιο όπως στην περίπτωση στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων. Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία διερευνάται η δυνατότητα ενοποίησης και η συνεπαγόμενη αύξηση της αξιοπιστίας, εκφρασμένη σε όρους ισοδύναμου αριθμού στοχαστικά ανεξάρτητων σταθμών, στην περίπτωση αυτή της ύπαρξης στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων. Παράλληλα, επιχειρείται να εντοπιστεί και να εκφραστεί η αδυναμία της κλασσικής στατιστικής να αποδώσει τη στοχαστική φύση των υδρολογικών διαδικασιών, ώστε να ληφθεί υπόψη η αβεβαιότητα που εισάγει στις εκτιμήσεις η απλοποιητική θεώρηση υδρολογικών δειγμάτων χρονικά ανεξάρτητων.

Abstract

In the case that more than one natural time series are available in different measuring stations, or in the same station for different timescales, the issue of the simultaneous study of the all samples arises in order to improve the reliability of the estimations, assuming that the homogeneity hypothesis stands for the study region. If the at-site statistical samples are assumed independent and identically distributed (IID), the unification of samples results in a significant increase of the reliability of the results since the length of the overall sample, which represents the reliability of the statistical estimations, equals the sum of the at-site lengths (station-years method). However, the unification is acceptable and in the cases that intersite correlation exists but in such cases the reliability does not increase in the same manner as in the cases of stochastically independent samples. In the present master thesis, the possibility of unification and the respective increase of reliability are investigated. The latter is quantified in terms of the effective number of independent sites, whose uncertainty is equal to that in the case of intersite correlation. It turns out that the intersite correlations results in a dramatic increase of uncertainty in statistical estimation in comparison to the results produced by the simplifying assumption of serially independent samples. This indicates the weakness of the classical statistics to define the stochastic nature of the hydrological processes and the importance of considering the autocorrelation and cross-correlation properties of hydrological processes.

Extended abstract

Introduction

The study made in the framework of this master thesis concerns the concept of the so-called *substitution of space for time* through the transfer of information from other sites in order to improve the information gained at a site. If the regional samples do not exhibit either spatial or temporal correlation the unification of records at different locations results in a significant increase of the reliability of the results since the length of the overall sample, which represents the reliability of the statistical estimations, equals the sum of the at-site lengths (station-years method). However, the integration is possible and in the cases of samples which exhibit spatial correlation. Still, in such cases the reliability doesn't increase in the same way as in the cases of stochastically independent samples.

The main aim of the thesis thus, was to investigate, through simulation, this possibility of integration in the cases of samples that exhibit spatial correlation and to express the resulting increase of reliability in terms of effective number of independent sites. Besides the main aim described above, an additional objective was to compare the estimations derived from the Monte Carlo experiments with the existing corresponding analytical relations. In the cases of weakness detected to express the effective number of independent sites through those analytical relations, effort was given to improve the existing relations or to establish a new relation to express the equivalent number of independent sites as a function of the correlation coefficient.

Method overview

In order to make the study of substitution of space for time possible, a series of Monte Carlo experiments were conducted to determine the sequences to represent the investigated samples. In this thesis the samples were assumed to be Gaussian with sample mean μ and standard deviation σ .

The estimation of the equivalent number of independent sites was initially conducted under the assumption of serially independent samples, hence under the assumption of samples which exhibit zero autocorrelation. The estimation of the effective number of stations in that case, was then based on the estimation of the variance of the sample mean,

on the estimation of the variance of the sample variance and on the estimation of the empirical return period. For the first two estimations, there are corresponding analytical relations which express the effective number of sites as a function of the cross-correlation coefficient (Yule, 1945 and Stedinger, 1983, respectively).

The same approach, i.e. conduction of simulation Monte Carlo for the estimation of the effective number of independent sites based on the estimations described above, was adopted in the case of samples serially dependent, adopting two different approaches accounting for the kind of the autocorrelation structure of the investigated samples. The first approach refers to samples which exhibit short term persistence (STP) and in order to generate sequences consistent to that kind of behavior the simplest STP model was used, which is the AR(1) model. The second approach refers to samples that exhibit long term persistence (LTP). Several models, such as fractional Gaussian noise (FGN) models have been proposed to reproduce the dynamics of the Hurst – Kolmogorov phenomenon. In this study a multiple time-scale fluctuation approach is used to generate samples that exhibit LTP, which implies that the sum of three Markovian processes can give an acceptable approximation of the FGN autocorrelation function on the basic time scale (Koutsoyiannis, 2002).

Statistical analysis of serially independent samples

As it has been already mentioned, the main objective of this thesis was to investigate, through simulation, the possibility of integrating at-site cross-correlated samples so as to quantify the information gained in terms of effective number of independent sites. In order to express the problem described above a linear stochastic model was developed to describe the stochastic stationary process $X_i(t)$ to represent the investigated samples. Hence, Monte Carlo experiments were conducted to generate for each station 10,000 realizations of the stochastic process $X_i(t)$ each of length $n = 50$.

An estimation of the equivalent number of independent sites follows, through the statistical analysis of the overall sample, based on three different estimations: estimation of the variance of the sample mean estimator, estimation of the variance of the sample variance estimator and estimation based on the empirical return period of the maximum value of the overall sample.

The results of the above estimations of the equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient are presented at the following diagram (Figure 1) for number of stations $k = 10$. We can observe that, for the estimation based on the variance of the sample mean estimator, the equivalent number of independent sites k_e equals only the 0.18 of k , for $r_{ij} = 0.5$. This estimation is clearly higher for the cases of estimation based on the variance of the sample variance estimator and estimation based on the empirical return period, hence 0.32 of k and 0.75 of k , respectively.

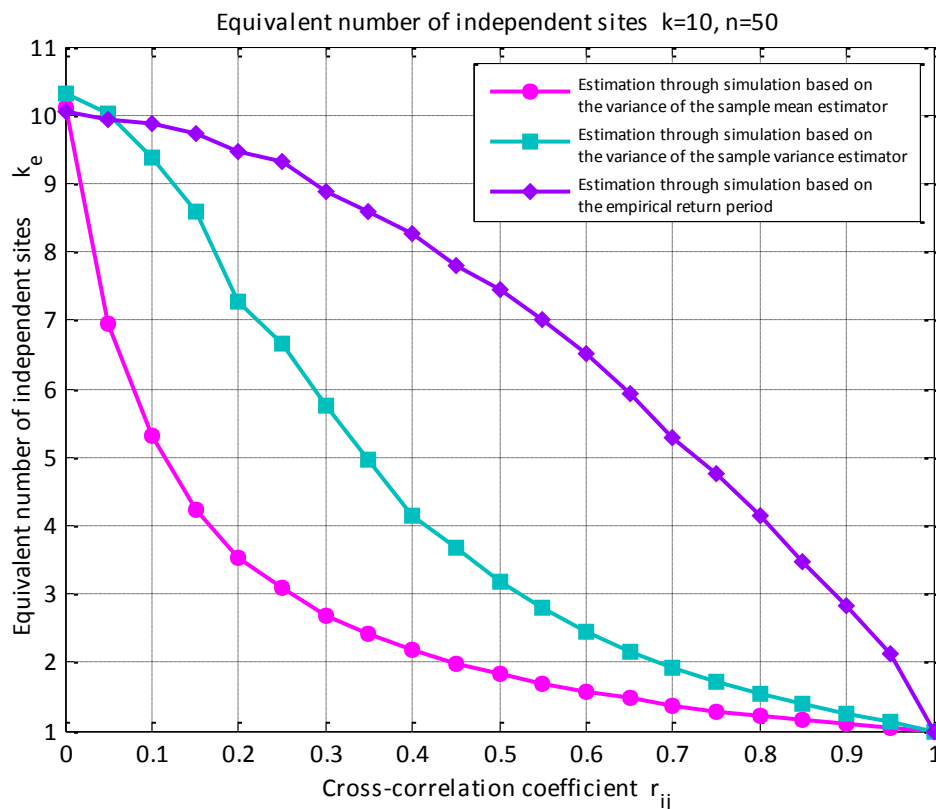


Figure 1: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for number of stations $k = 10$

Statistical analysis of serially dependent samples – Markov model

The above simplifying assumption of serially uncorrelated samples fails to reproduce the stochastic nature of the hydrological processes. In the framework of this master thesis, an approach taking into consideration the short term persistence that hydrological samples exhibit is initially adopted. Thus, in order to generate sequences to represent the investigated samples which exhibit STP, the Multivariate Autoregressive model MAR(1) was used.

Given that the stochastic stationary process $X_i(t)$ is described by the MAR(1), Monte Carlo experiments were conducted to generate for each station 10,000 realizations of the stochastic process $X_i(t)$ each of length $n = 50$.

As in the case of serially independent samples an estimation of the equivalent number of independent sites follows, through the statistical analysis of the overall sample, based on three different estimations: estimation of the variance of the sample mean estimator, estimation of the variance of the sample variance estimator and estimation based on the empirical return period of the maximum value of the overall sample.

However, in this case the equivalent number of independent sites refers to samples of length $n_{auto} < n$, where n_{auto} stands for the equivalent sample size in the classical statistics sense. Thus, for each one of the at-site samples three different effective sample sizes were calculated for the estimations based on the variance of the sample mean estimator, the variance of the sample variance estimator and for the estimation based on the empirical return period.

The estimations of the equivalent sample size versus the autocorrelation coefficient and the estimations of the equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient for autocorrelation coefficient $\rho_1 = 0.2, 0.4, 0.6$ and 0.8 are presented at the following diagrams (Figure 2 and Figures 3, 4, 5 and 6, respectively) for number of stations $k = 10$.

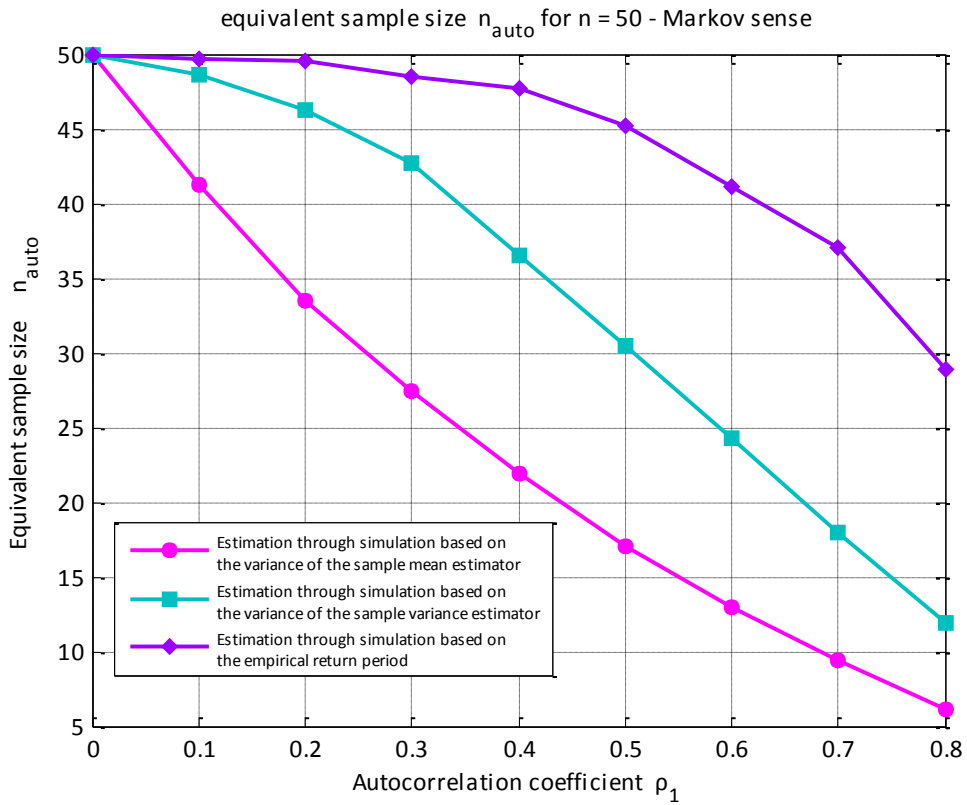


Figure 2: Equivalent sample size n_{auto} versus the autocorrelation coefficient ρ_1 for sample size $n = 50$

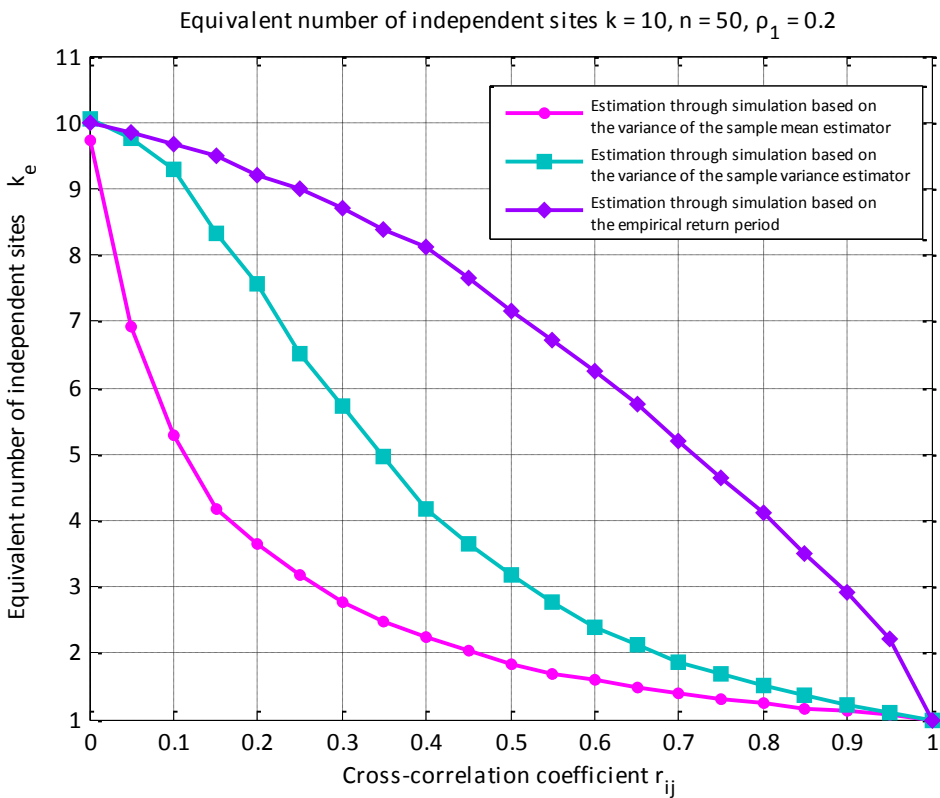


Figure 3: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for autocorrelation coefficient $\rho_1 = 0.2$ and for number of stations $k = 10$

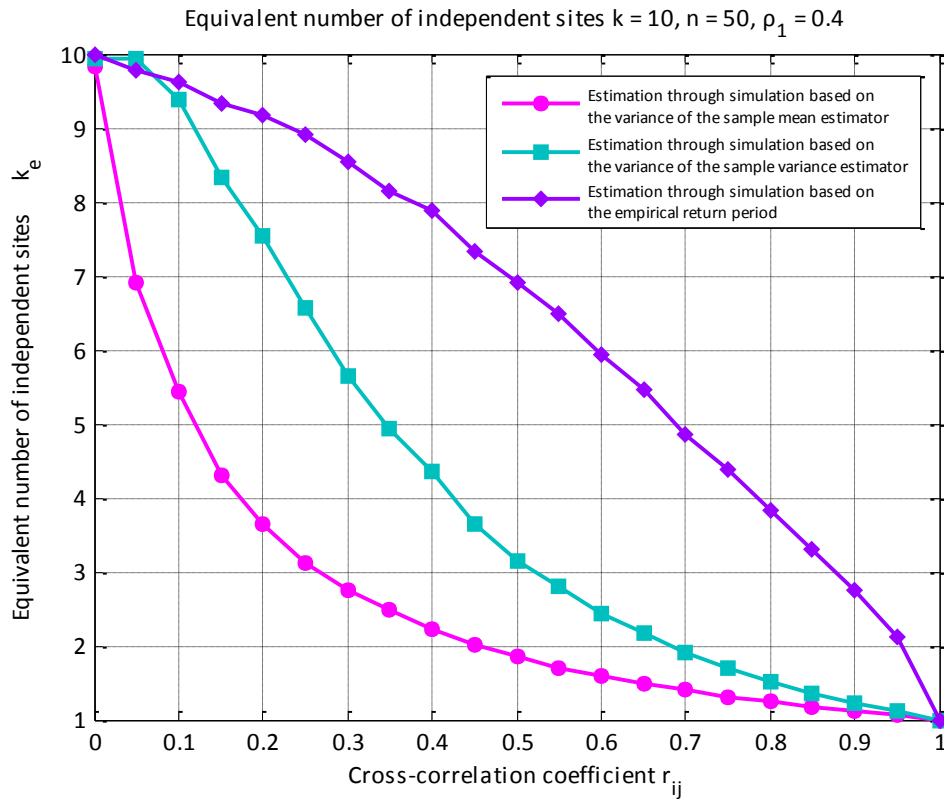


Figure 4: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for autocorrelation coefficient $\rho_1 = 0.4$ and for number of stations $k = 10$

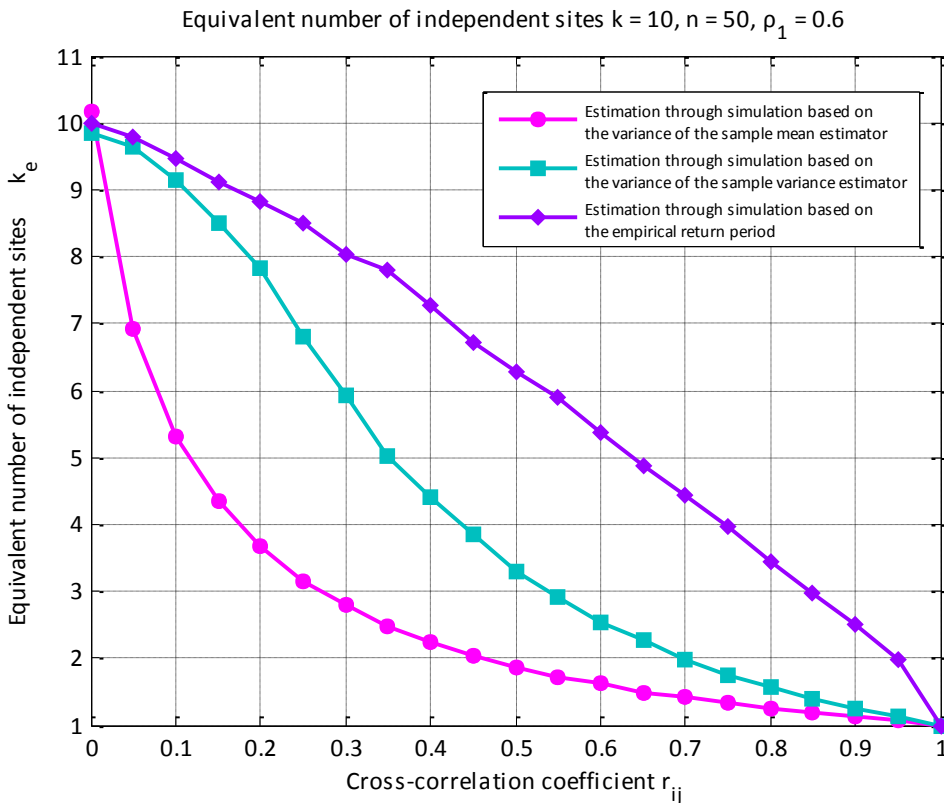


Figure 5: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for autocorrelation coefficient $\rho_1 = 0.6$ and for number of stations $k = 10$

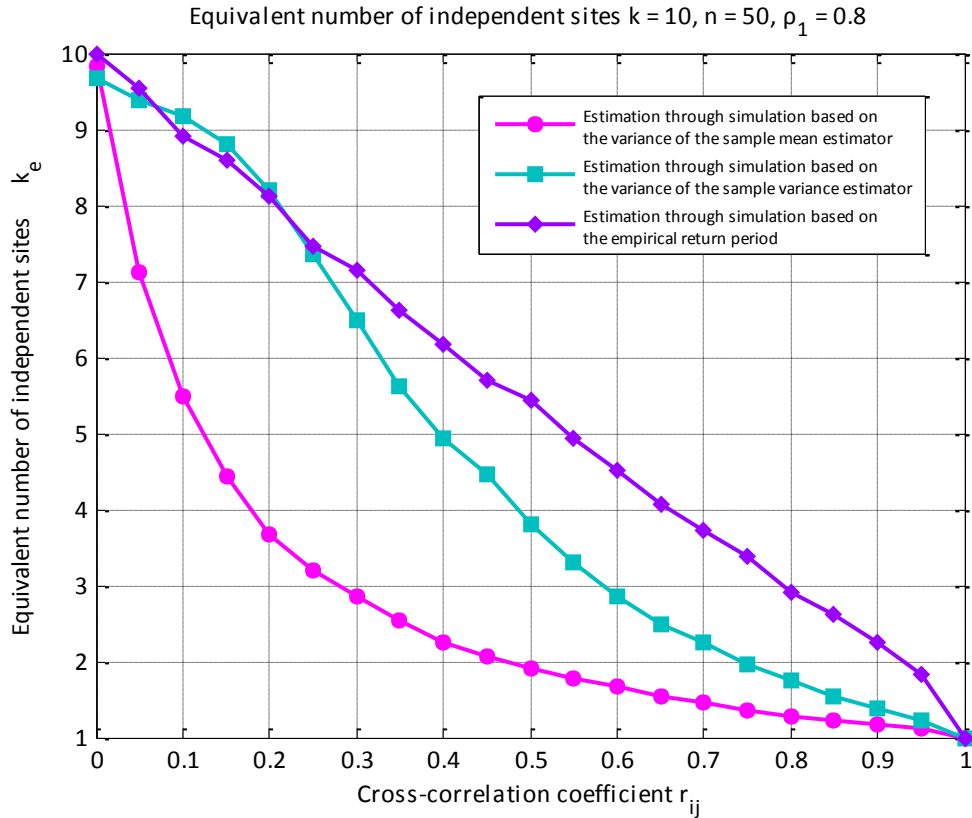


Figure 6: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for autocorrelation coefficient $\rho_1 = 0.8$ and for number of stations $k = 10$

Statistical analysis of serially dependent samples – SSS model

Although the approach described above takes into consideration the serial correlation that the hydrological samples exhibit reproducing their short term persistence fails to reproduce the long term memory that is observed in hydrological processes. Hence, in the framework of this study in order to generate sequences to represent the investigated samples that exhibit LTP a multiple time-scale fluctuation approach is used which implies that the sum of three Markovian processes can give an acceptable approximation of the FGN autocorrelation function on the basic time scale.

Exactly as in the Markovian approach, an estimation of the equivalent number of independent sites follows, through the statistical analysis of the overall sample, based on the variance of the sample mean estimator, the variance of the sample variance estimator and estimation based on the empirical return period of the maximum value of the overall sample. In this case too, the equivalent number of independent sites refers to samples of length n_{auto} which is calculated the same way as in the case of samples which exhibit STP.

The estimations of the equivalent sample size versus the Hurst exponent H and the estimations of the equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient for Hurst exponent $H = 0.55, 0.6, 0.7, 0.8$ and 0.9 are presented at the following diagrams (Figure 7 and Figures 8, 9, 10, 11 and 12, respectively) for number of stations $k = 10$.

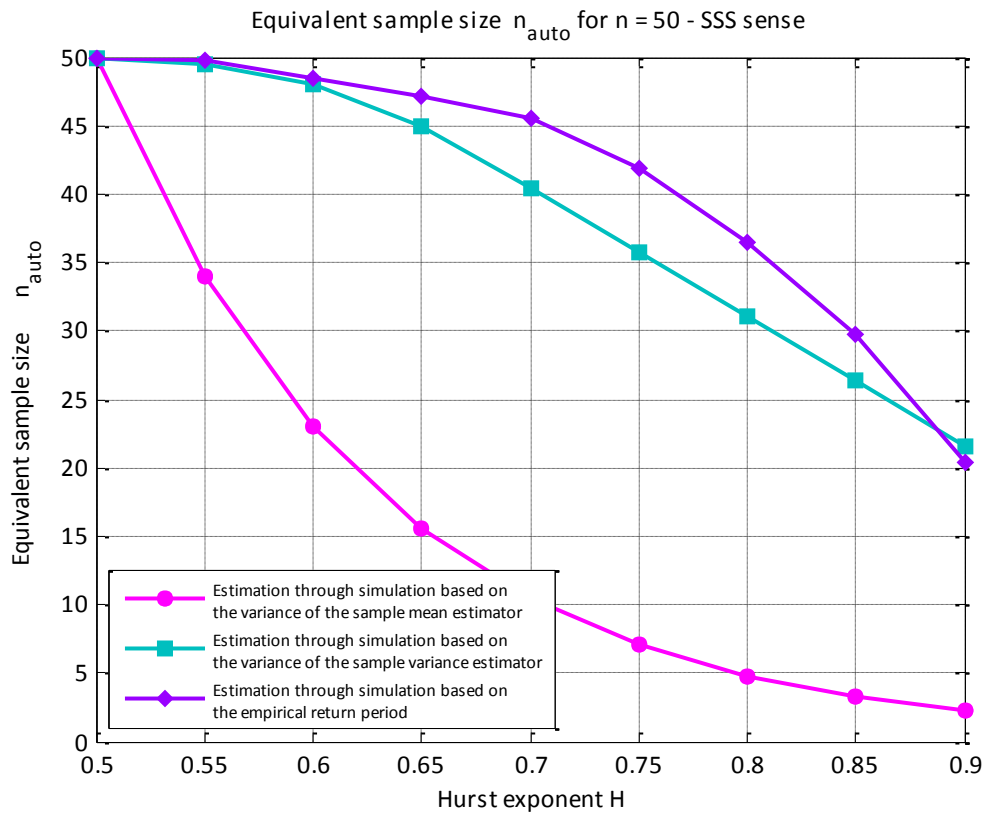


Figure 7: Equivalent sample size n_{auto} versus the Hurst exponent H for sample size $n = 50$

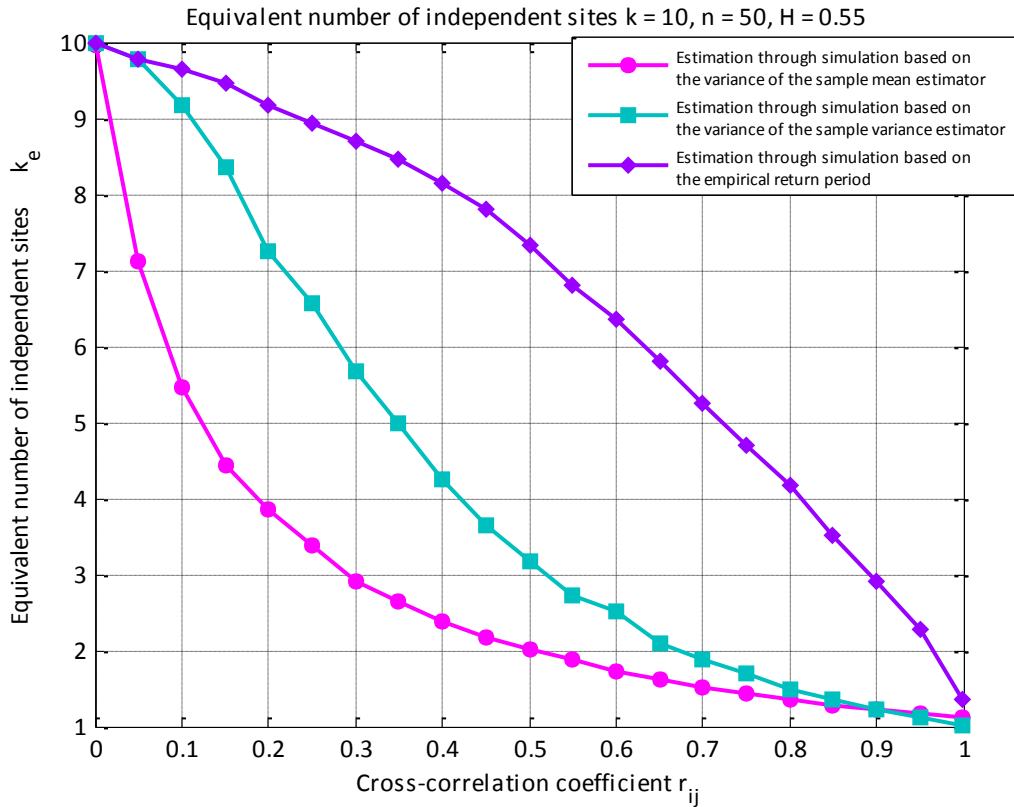


Figure 8: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for Hurst exponent $H = 0.55$ and for number of stations $k = 10$

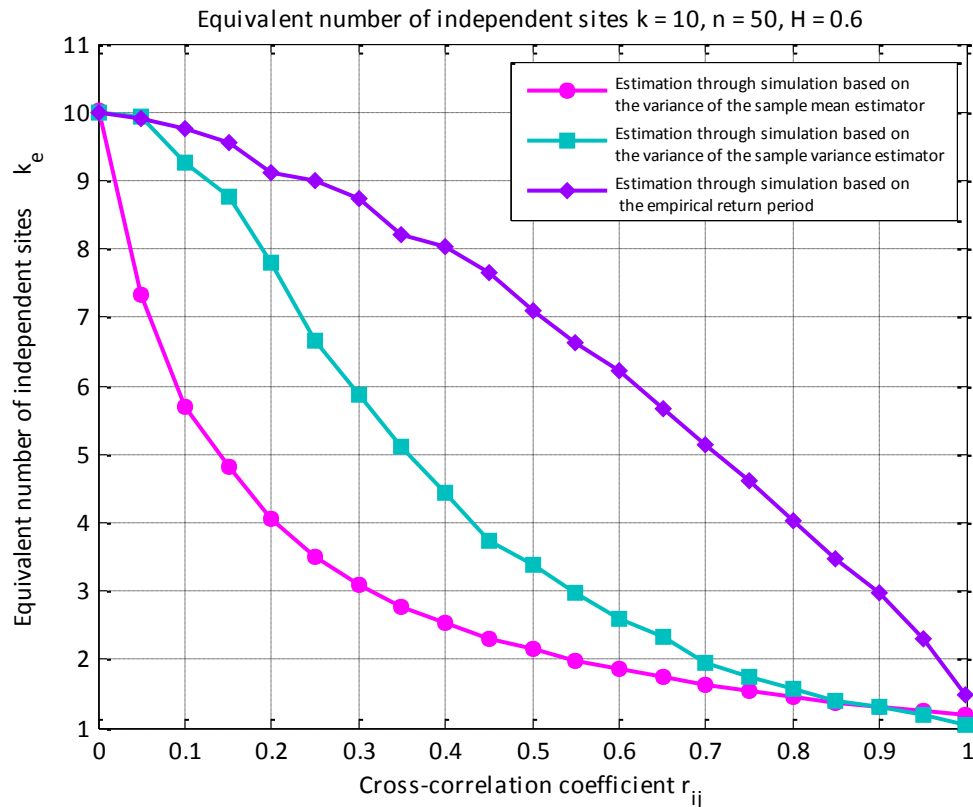


Figure 9: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for Hurst exponent $H = 0.6$ and for number of stations $k = 10$

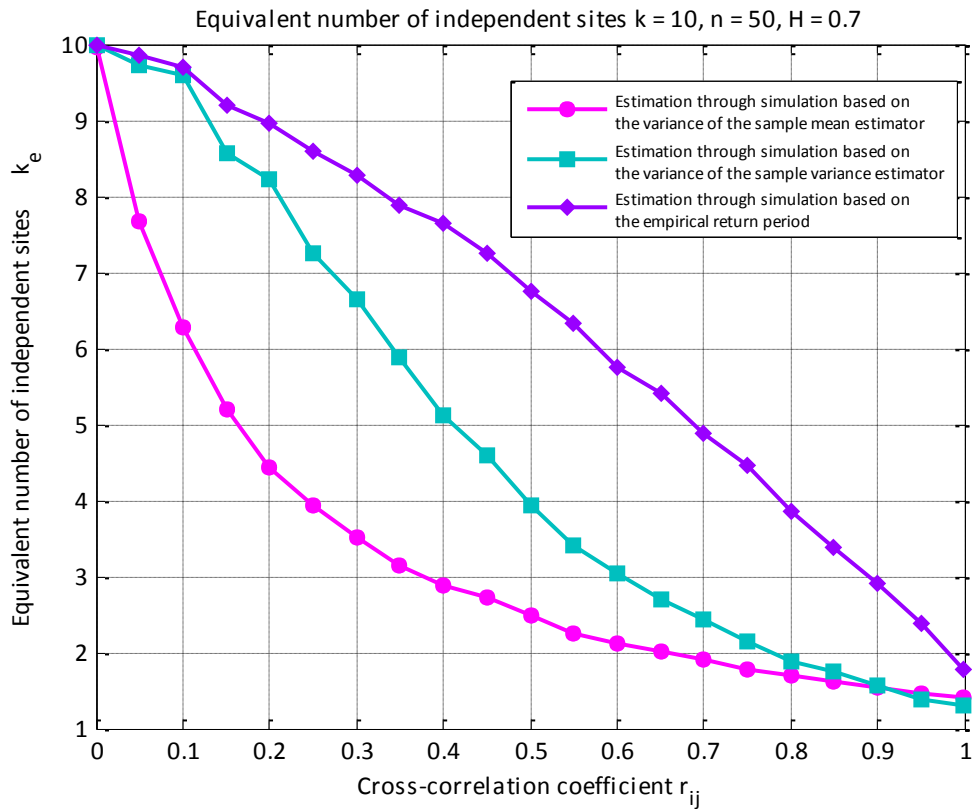


Figure 10: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for Hurst exponent $H = 0.7$ and for number of stations $k = 10$

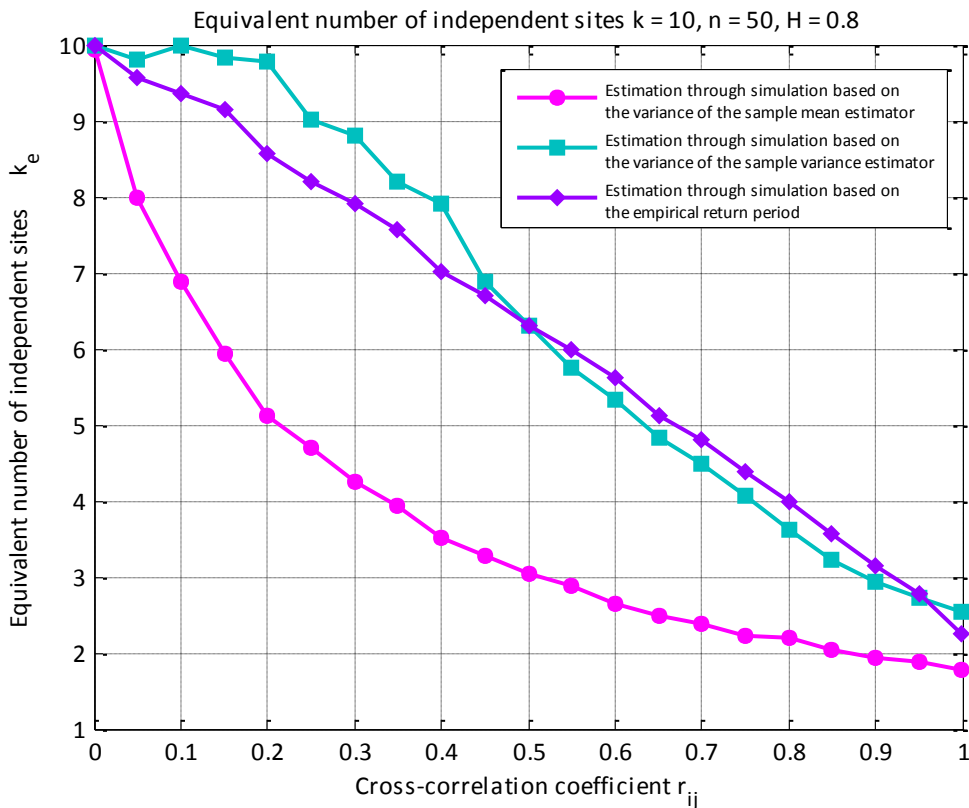


Figure 11: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for Hurst exponent $H = 0.8$ and for number of stations $k = 10$

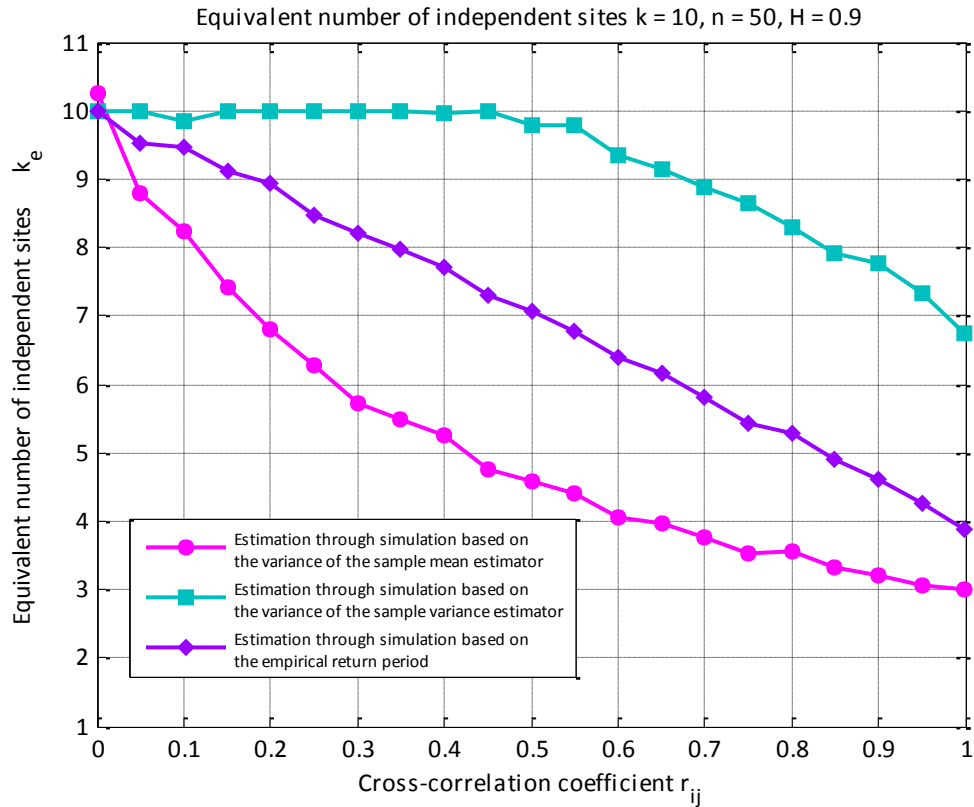


Figure 12: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for Hurst exponent $H = 0.9$ and for number of stations $k = 10$

Attempt to establish a relation to express the equivalent number of independent sites as a function of the correlation coefficient

In the framework of the study of substitution of space for time, effort was given to adjust the existing analytical expressions of the equivalent number of independent sites in order to fit the corresponding estimations through simulation (Yule, 1945 and Stedinger, 1983 for the estimations based on the variances of the sample mean and the sample variance, respectively). For the estimation of the equivalent number of independent sites based on the empirical return period of the maximum value of the overall sample the expression of the equivalent number introduced by Koutsoyiannis et al. (2010) was adjusted so as to become consistent to the corresponding estimations through simulation.

Thus, for every case studied in this thesis and for every estimation of the equivalent number of independent sites made a graphical illustration of the adjustments occurred (through a series of Monte Carlo experiments) follows, for $k = 10$. Adjustments were made only in cases that the existing expressions were found inconsistent to the corresponding estimations through simulation.

➤ Case of serially independent samples (Figure 13)

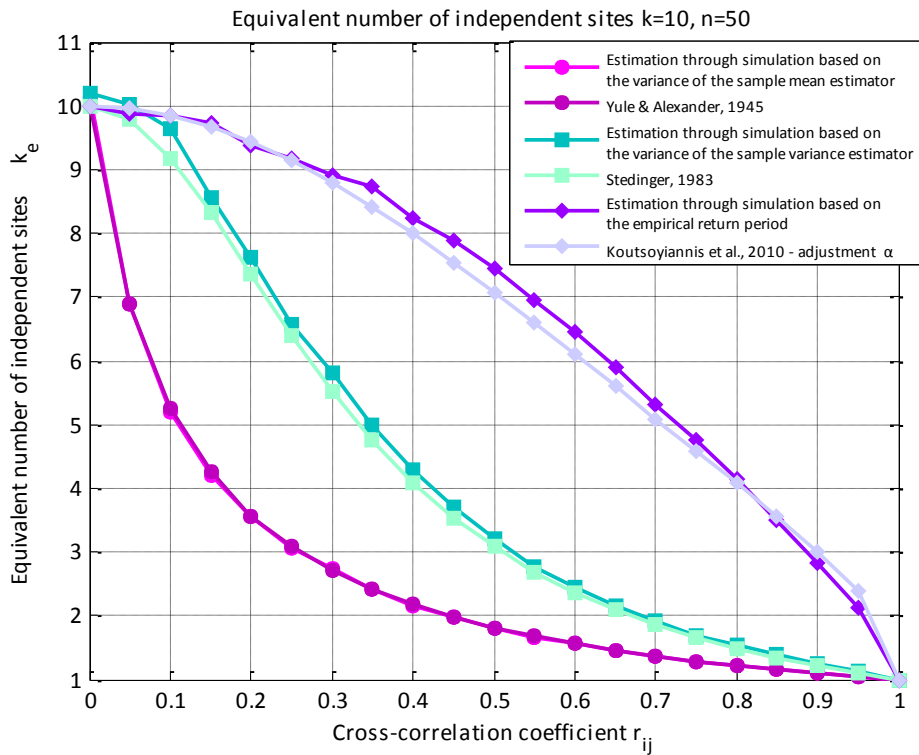


Figure 13: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for number of stations $k = 10$

➤ Case of serially dependent samples- Markov model (Figures 14, 15, 16 and 17 for $\rho_1 = 0.2, 0.4, 0.6$ and 0.8 , respectively)

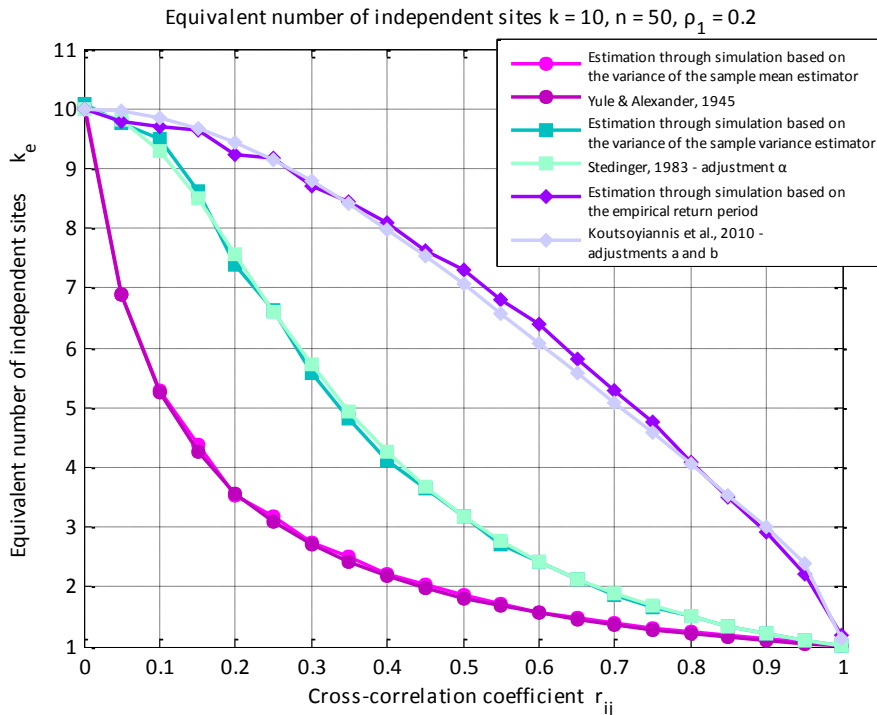


Figure 14: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for autocorrelation coefficient $\rho_1 = 0.2$ and for number of stations $k = 10$

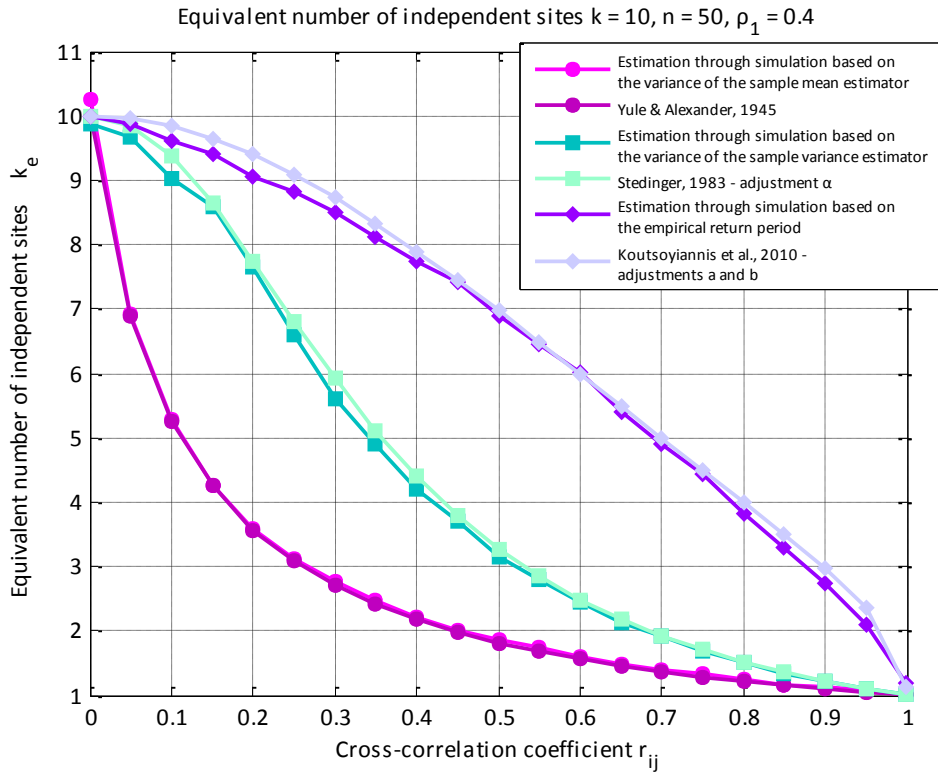


Figure 15: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for autocorrelation coefficient $\rho_1 = 0.4$ and for number of stations $k = 10$

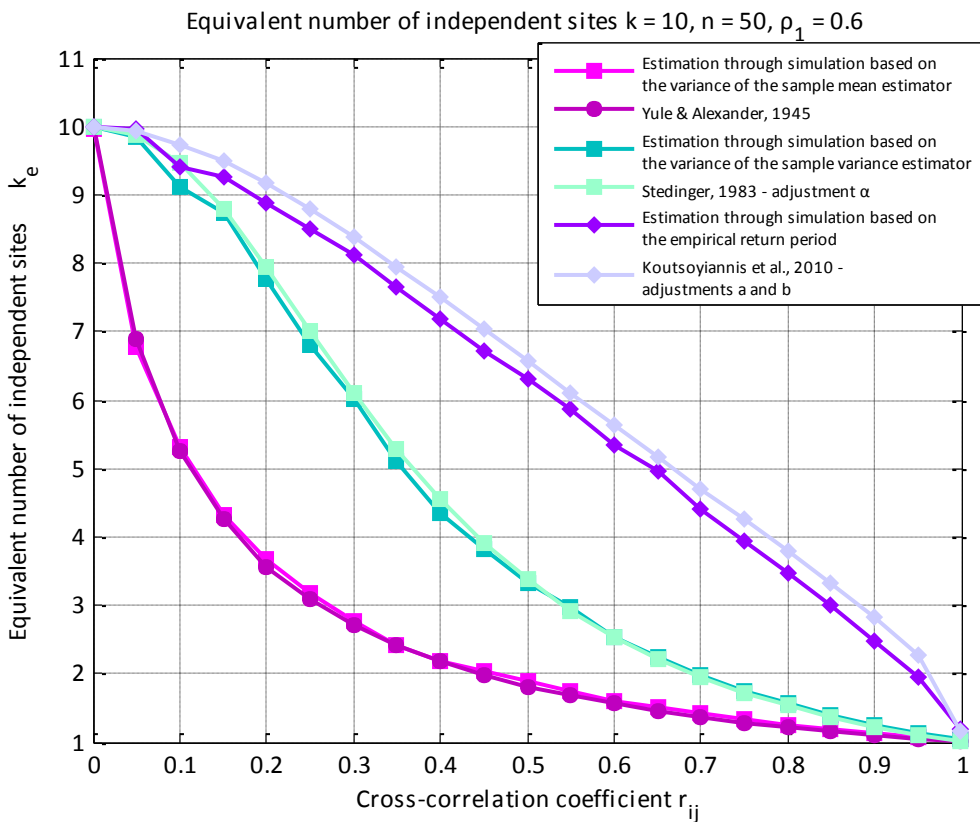


Figure 16: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for autocorrelation coefficient $\rho_1 = 0.6$ and for number of stations $k = 10$

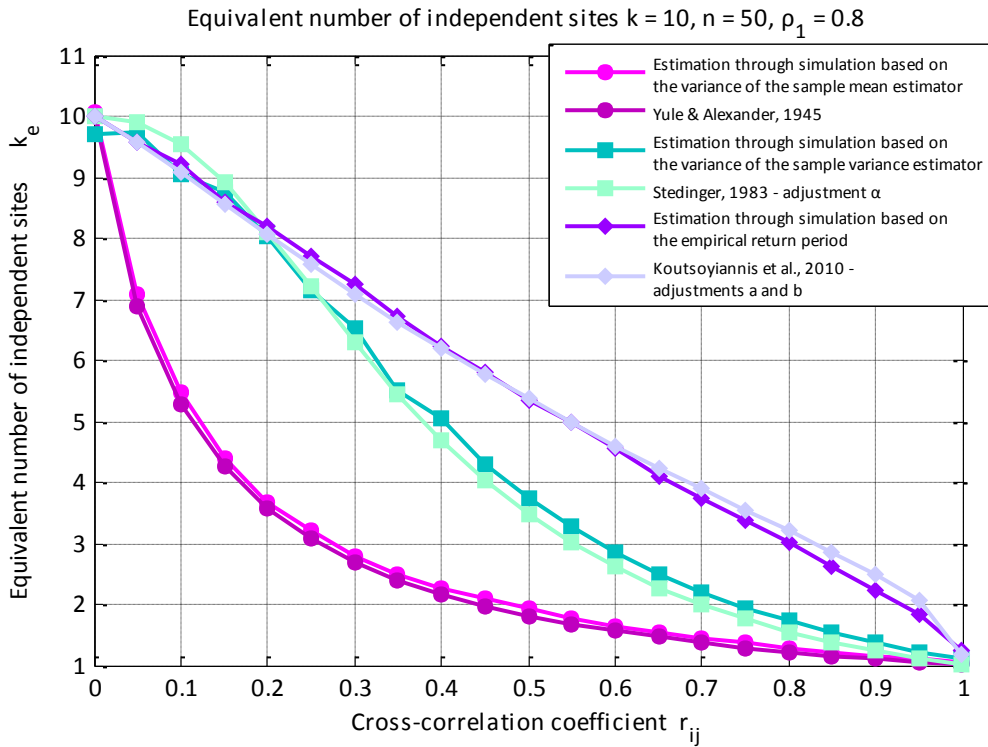


Figure 17: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for autocorrelation coefficient $\rho_1 = 0.8$ and for number of stations $k = 10$

➤ Case of serially dependent samples- SSS model (Figures 18, 19, 20, 21 and 22 for $H = 0.55, 0.6, 0.7, 0.8$ and 0.9 , respectively)

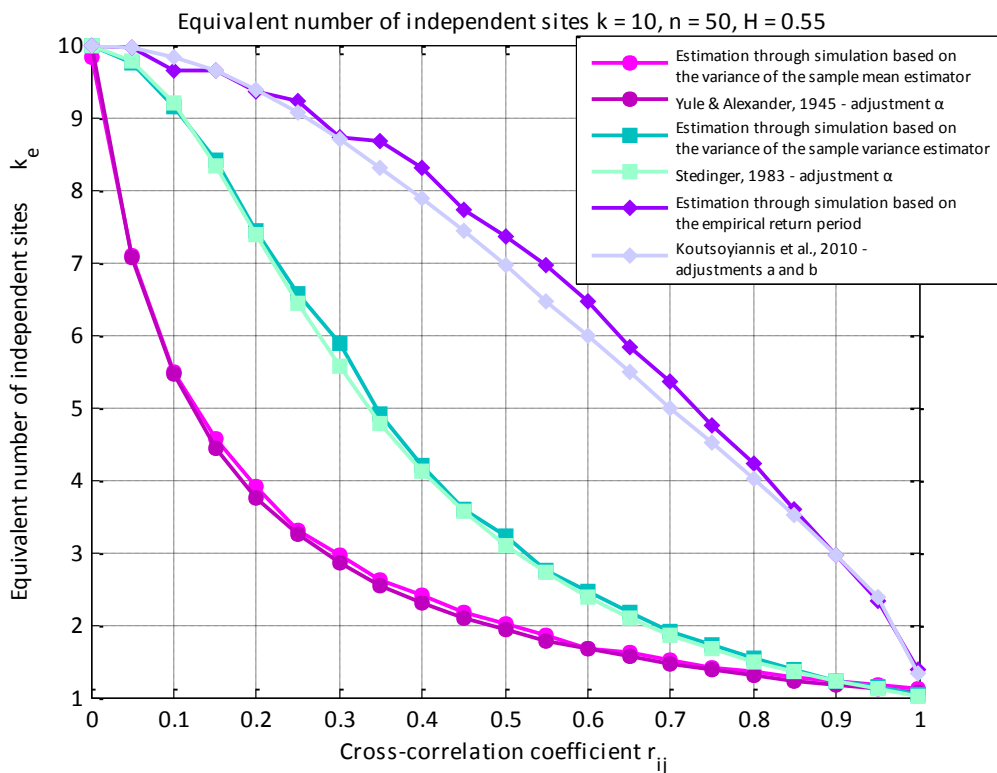


Figure 18: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for Hurst exponent $H = 0.55$ and for number of stations $k = 10$

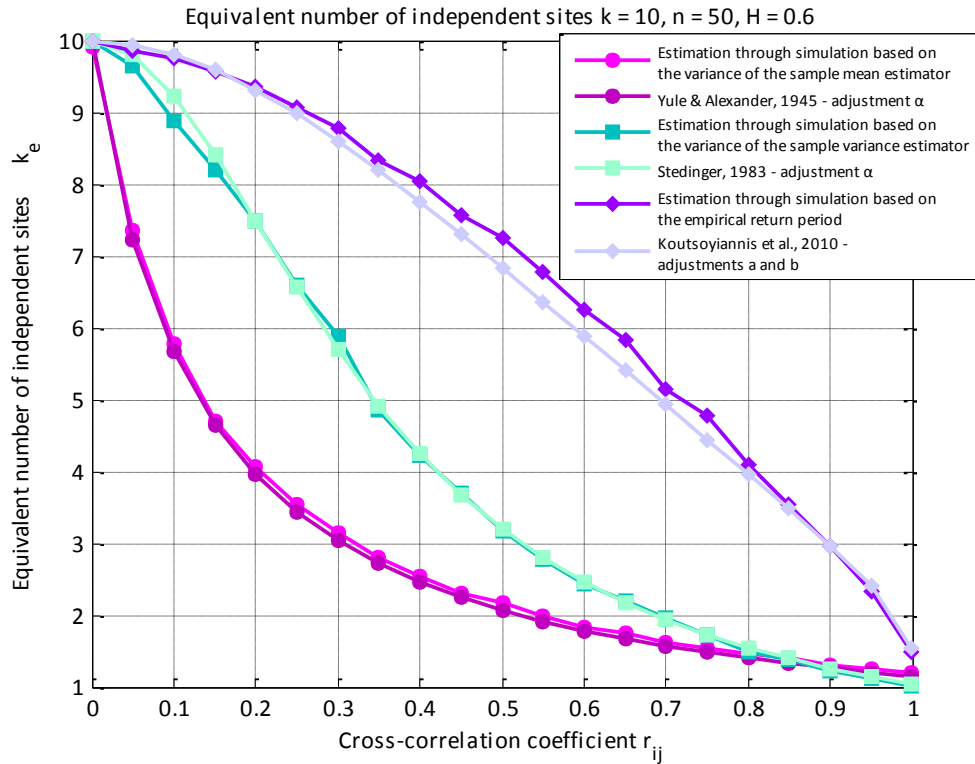


Figure 19: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for Hurst exponent $H = 0.6$ and for number of stations $k = 10$

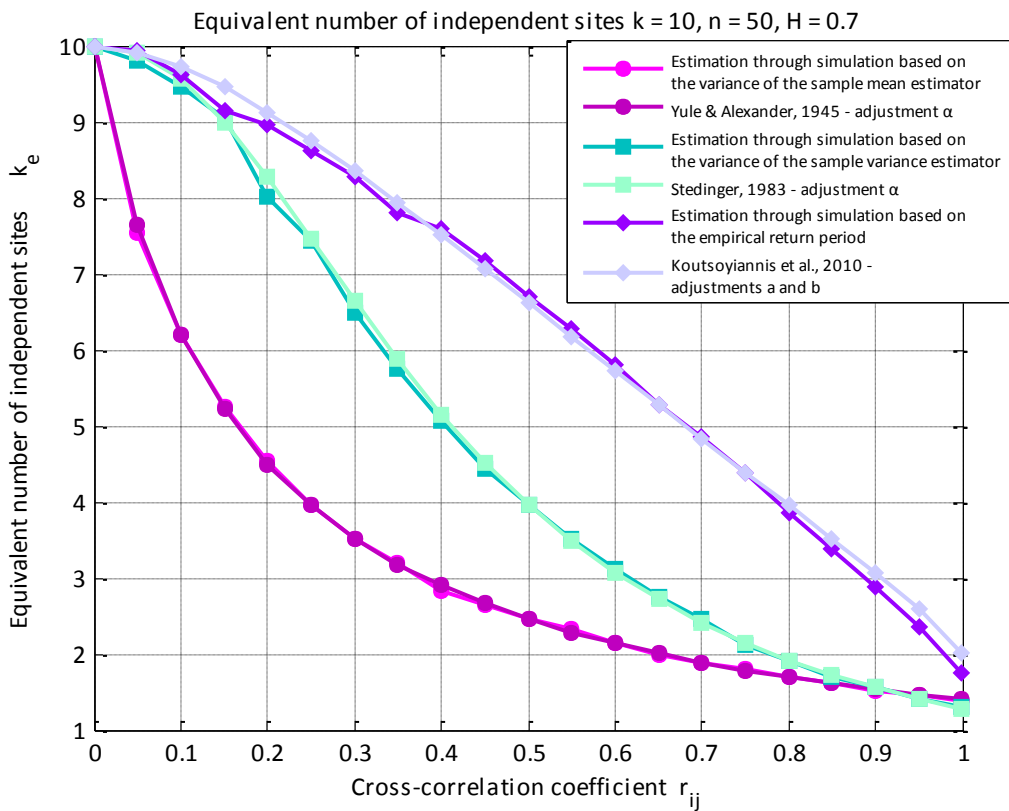


Figure 20: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for Hurst exponent $H = 0.7$ and for number of stations $k = 10$

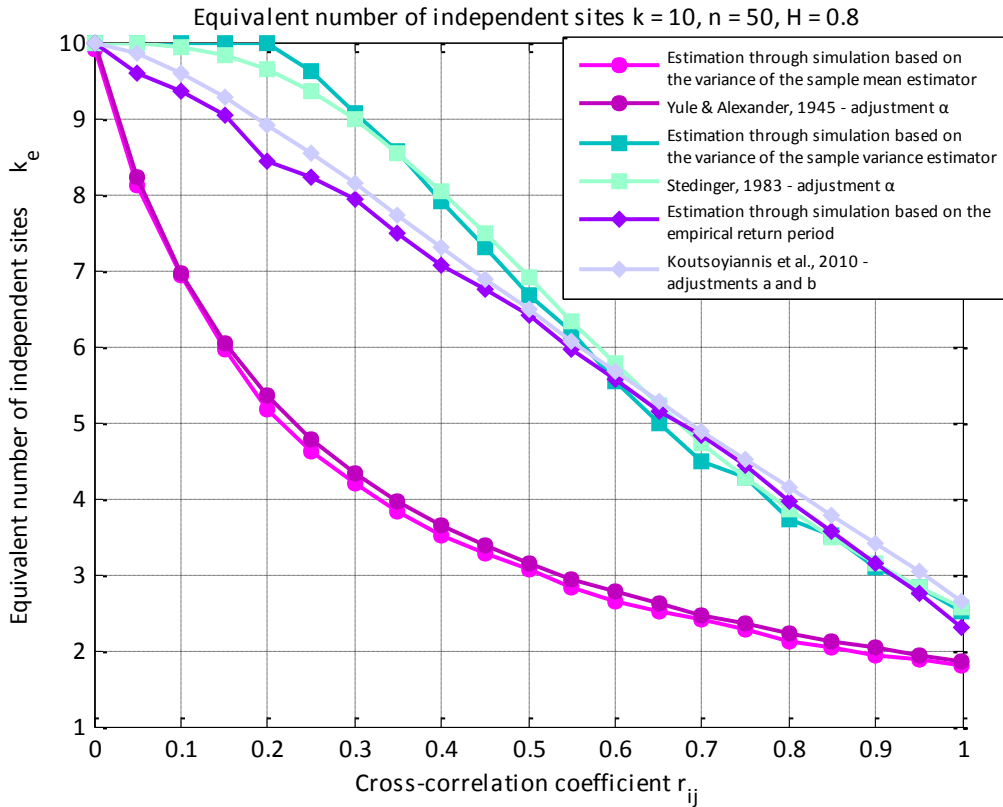


Figure 21: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for Hurst exponent $H = 0.8$ and for number of stations $k = 10$

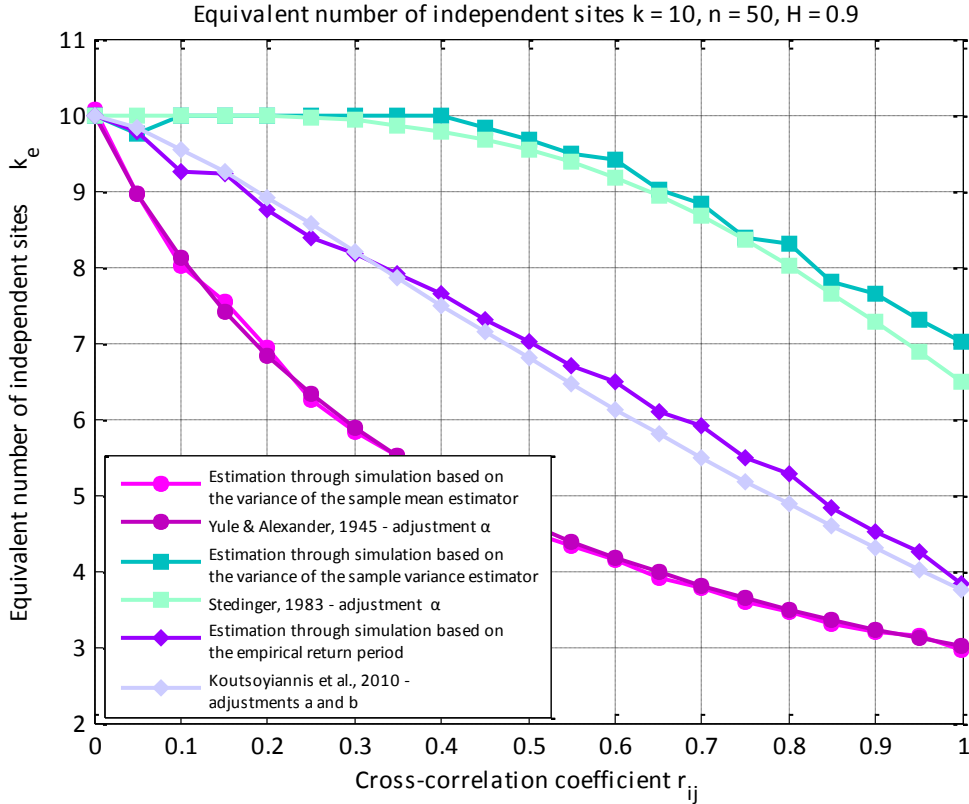


Figure 22: Equivalent number of independent sites as a function of the cross-correlation coefficient r_{ij} between the stations i, j for Hurst exponent $H = 0.9$ and for number of stations $k = 10$

Conclusions – Suggestions for further investigation

The results of the investigations allow us to conclude that all relationships derived show satisfactory agreement with the corresponding estimations through simulation. Special care has been given to the development of these relationships in a manner that the corresponding relationships of serially independent samples is recovered when zero autocorrelation is substituted to the former.

It must be pointed out that in this thesis some simplifying assumptions were made which may affect the applicability of the results. Further analysis should investigate the effects of the following issues

- Different values of intersite correlations
- Different autocorrelation model
- Different series lengths within the region
- Non Gaussian distribution of variables.

1 Εισαγωγή

1.1 Στόχος έρευνας

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας αφορά στη δυνατότητα αξιοποίησης πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων για βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων.

Εκτός του βασικού στόχου που επικεντρώνεται στη διερεύνηση, μέσω προσομοίωσης, της δυνατότητας ενοποίησης πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων καθώς και στη διερεύνηση της συνεπαγόμενης αύξησης της αξιοπιστίας, υπήρξαν και δύο επιμέρους στόχοι. Ο πρώτος έχει να κάνει με τη σύγκριση των εκτιμήσεων της προσομοίωσης με ήδη υπάρχουσες αναλυτικές σχέσεις, ενώ ο δεύτερος αφορά στην προσπάθεια βελτίωσης των ήδη υπάρχουσών ή στην προσαρμογή μίας νέας σχέσης έκφρασης του ισοδύναμου αριθμού σταθμών, ανάλογα με την υφιστάμενη συσχέτιση των υπό εξέταση δειγμάτων.

Η αξιοποίηση πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων με ενοποίηση, στοχεύει στη λεγόμενη «υποκατάσταση του χρόνου από το χώρο»^{*}, δηλαδή στη θεώρηση δειγμάτων από διαφορετικές θέσεις ως ισοδύναμου ενιαίου δείγματος από υποθετικά μεγαλύτερη χρονική διάρκεια παρατηρήσεων (Κουτσογιάννης κ.α., 2010). Είναι γνωστό ότι σε περίπτωση που τα στατιστικά δείγματα των επιμέρους σταθμών είναι στατιστικώς ανεξάρτητα, η ενοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την σημαντική αύξηση της στατιστικής αξιοπιστίας των εκτιμήσεων, αφού το μήκος του ενοποιημένου δείγματος, το οποίο χαρακτηρίζει την αξιοπιστία των στατιστικών εκτιμήσεων, είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους μηκών (μέθοδος σταθμών-ετών) (Κουτσογιάννης, 1997).

Η προσπάθεια προσαρμογής μίας νέας σχέσης έκφρασης του ισοδύναμου αριθμού σταθμών στοχεύει στο να ληφθεί υπόψη τόσο η στοχαστική εξάρτηση που διέπει τις υδρολογικές διαδικασίες, όσο και η δομή της αυτοσυσχέτισης των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων. Ενώ λοιπόν αναμένεται οι εκτιμήσεις της προσομοίωσης να προσεγγίζουν τα αποτελέσματα των αναλυτικών σχέσεων στην περίπτωση στατιστικώς χρονικά ανεξάρτητων δειγμάτων, αναμένεται μεγάλη απόκλιση στην περίπτωση υπάρχουσας ισχυρής δομής

^{*} Επισημαίνεται πως η μέθοδος της αξιοποίησης πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων για βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων προτάθηκε από τον Hazen (1914).

αυτοσυσχέτισης, λόγω αδυναμίας της κλασσικής στατιστικής να λάβει υπόψη τη στοχαστική φύση των υδρολογικών διαδικασιών.

1.2 Μεθοδολογία στοχαστικής – στατιστικής ανάλυσης/προσέγγισης

Προκειμένου να καταστεί δυνατή η διερεύνηση της δυνατότητας αξιοποίησης πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων επελέγη η πραγματοποίηση προσομοίωσης Monte Carlo με τη γένεση τυχαίων αριθμών δεδομένης κατανομής για την αναπαράσταση των υπό εξέταση υδρολογικών δειγμάτων. Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας θεωρήθηκε πως τα υπό εξέταση δείγματα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο όρο 400 και τυπική απόκλιση 100.

Επιχειρήθηκε λοιπόν, να εκτιμηθεί ο ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων αρχικά με την παραδοχή της χρονικής ανεξαρτησίας των υδρολογικών δειγμάτων, δηλαδή με τη θεώρηση μηδενικής αυτοσυσχέτισης για καθένα από τα επιμέρους δείγματα. Στην περίπτωση αυτή η κλασσική στατιστική επιτυγχάνει με ακρίβεια να περιγράψει τη φύση των υδρολογικών διαδικασιών.

Η εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών βασίστηκε στην εκτίμηση της διασποράς της μέσης τιμής καθώς και στην εκτίμηση της διασποράς της δειγματικής διασποράς του ενοποιημένου δείγματος, με προσομοίωση. Για τις δύο αυτές περιπτώσεις υπάρχουν αναλυτικές σχέσεις, οι οποίες δίδουν τον ισοδύναμο αριθμό δειγμάτων ως συνάρτηση της υπάρχουσας ετεροσυσχέτισης και του διαθέσιμου αριθμού δειγμάτων (Yule, 1945 και Stedinger, 1983, αντίστοιχα). Παράλληλα επιχειρήθηκε διερεύνηση της επαύξησης της υδρολογικής πληροφορίας ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος .

Η ίδια διαδικασία, δηλαδή εκτίμηση του ισοδύναμου μήκους βάσει των ανωτέρων εκτιμήσεων με πραγματοποίηση προσομοίωσης Monte Carlo, εφαρμόστηκε και στην περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων ακολουθώντας δύο διαφορετικές προσεγγίσεις σε ό,τι αφορά στη δομή αυτοσυσχέτισης των επιμέρους δειγμάτων. Η πρώτη προσέγγιση αφορά στη γένεση αριθμών με τη χρήση του στάσιμου πολυμεταβλητού μοντέλου αυτοπαλινδρόμησης τάξης 1, MAR(1), το οποίο διατηρεί τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης με μοναδιαίο χρονικό βήμα, μεταξύ μεταβλητών της ίδιας θέσης

(βραχυπρόθεσμη εμμονή - Μαρκοβιανή προσέγγιση). Η δεύτερη προσέγγιση αφορά στη γένεση αριθμών με τη χρήση μοντέλων που αναπαράγουν τη μακροπρόθεσμη εμμονή - φαινόμενο Hurst - που διέπει τις υδρολογικές διαδικασίες (ανεπίξεις απλής ομοιοθεσίας).

1.3 Διάρθρωση εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελείται από επτά κεφάλαια και τέσσερα παραρτήματα. Το παρόν εισαγωγικό κεφάλαιο (Κεφάλαιο 1), οριοθετεί το στόχο της εργασίας και περιγράφει τη μεθοδολογία προσέγγισης που ακολουθήθηκε για την πραγματοποίηση της συγκεκριμένης έρευνας.

Στο Κεφάλαιο 2 πραγματοποιείται μια βιβλιογραφική επισκόπηση της τεχνικής της προσομοίωσης και των ήδη υπαρχόντων στοχαστικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται για την πραγματοποίησή της. Παράλληλα γίνεται αναφορά στις προσπάθειες ποσοτικοποίησης της υδρολογικής πληροφορίας ενοποιημένων δειγμάτων, που έχουν γίνει μέχρι στιγμής και αφορούν στην βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων.

Ακολουθεί, στο Κεφάλαιο 3, εκτίμηση της επαύξεσης της υδρολογικής πληροφορίας με στατιστική ανάλυση των υδρολογικών δειγμάτων που προέκυψαν κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης, με την παραδοχή πως πρόκειται για ανεξάρτητα χρονικά δείγματα, δηλαδή δείγματα μηδενικής αυτοσυσχέτισης.

Η ίδια διαδικασία, της στοχαστικής πλέον ανάλυσης, παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4, για δείγματα εξαρτημένα τόσο χρονικά όσο και χωρικά.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων και πραγματοποιείται σύγκριση των εκτιμήσεων της προσομοίωσης και των αντίστοιχων εκτιμήσεων που δίδουν ήδη υπάρχουσες αναλυτικές σχέσεις.

Ακολουθεί, στο Κεφάλαιο 6, παρουσίαση της προσπάθειας προσαρμογής μίας σχέσης έκφρασης του ισοδύναμου αριθμού σταθμών, του ενοποιημένου πλέον δείγματος, ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης των υδρολογικών δειγμάτων, ανάλογα με το υπό εξέταση στατιστικό μέγεθος.

Στο τελευταίο κεφάλαιο αυτής της εργασίας, Κεφάλαιο 7, συνοψίζονται τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας

Στο Παράρτημα Α παρατίθενται οι αποδείξεις των σχέσεων που χρησιμοποιήθηκαν στα πλαίσια γένεσης αριθμών δεδομένης αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης, για την αναπαράσταση των υπό εξέταση υδρολογικών δειγμάτων.

Στο Παράρτημα Β παρουσιάζονται γραφικά τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων Monte Carlo, σε ό,τι αφορά στην εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων.

Στο Παράρτημα Γ ακολουθεί συγκριτική παρουσίαση των εκτιμήσεων με προσομοίωση και των αντίστοιχων εκτιμήσεων με εφαρμογή ήδη υφιστάμενων σχέσεων του ισοδύναμου αριθμού σταθμών.

Τέλος, στο Παράρτημα Δ παρουσιάζεται γραφικά ο βαθμός προσαρμογής στις εκτιμήσεις της προσομοίωσης των σχέσεων που αναπτύχθηκαν, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, για την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών.

2 Βιβλιογραφική επισκόπηση

Στις σελίδες που ακολουθούν γίνεται μία προσπάθεια επαρκούς αναφοράς στη βιβλιογραφία με ιδιαίτερη έμφαση στην τεχνική της στατιστικής/στοχαστικής ανάλυσης καθώς και στις μέχρι τώρα προσπάθειες ποσοτικοποίησης της υδρολογικής πληροφορίας, η οποία παρέχεται από τη θεώρηση δειγμάτων, από διαφορετικές θέσεις, ως ισοδύναμου ενιαίου δείγματος από υποθετικά μεγαλύτερη χρονική διάρκεια παρατηρήσεων.

2.1 Προσομοίωση Monte Carlo

Με τον όρο προσομοίωση (simulation) εννοούμε την τεχνική μίμησης ενός πραγματικού συστήματος, όπως αυτό εξελίσσεται στο χρόνο (Winston, 1994). Στόχος της προσομοίωσης είναι η μελέτη της συμπεριφοράς ενός συστήματος (με «δειγματοληπτική» τεχνική), όταν η εφαρμογή αναλυτικών ή άλλων αριθμητικών μεθόδων είναι ανέφικτη ή ιδιαίτερα δυσχερής (Κουτσογιάννης, 2007).

Για την πραγματοποίηση της προσομοίωσης χρησιμοποιούνται τα μοντέλα προσομοίωσης (simulation models). Πρόκειται για ένα σύνολο υποθέσεων για τη λειτουργία του συστήματος, εκφρασμένων υπό μορφή μαθηματικών ή λογικών σχέσεων και συνήθως κωδικοποιημένων σε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή (Κουτσογιάννης, 2007).

Τα μοντέλα προσομοίωσης διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Σε στοχαστικά (ή Monte Carlo) ή ντετερμινιστικά και σε διακριτά (οι μεταβλητές κατάστασης αλλάζουν τιμή σε διακριτές χρονικές στιγμές) ή συνεχή.

Η διαδικασία της προσομοίωσης, ως εργαλείο στατιστικής/στοχαστικής ανάλυσης, εισήχθη στην υδρολογία στις αρχές το 20^{ου} αιώνα. Ο Hazen το 1914 χρησιμοποίησε πρώτη φορά συνθετικές χρονοσειρές σε μελέτες αξιοπιστίας υδατικών πόρων στα πλαίσια της προσπάθειας να παράγει συνθετικές χρονοσειρές απορροών από ιστορικές χρονοσειρές διαφορετικών ποταμών, οι οποίες είχαν συνδυαστεί μεταξύ τους μετά από κατάλληλα προσαρμογή, με τη χρήση εμπειρικής μεθόδου (Grygier & Stedinger, 1990).

Η επιστημονική θεμελίωση της στοχαστικής υδρολογίας επιτυγχάνεται τη δεκαετία του 1940, με την εισαγωγή της μεθόδου Monte Carlo^{*}, η οποία αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της υδρολογικής προσομοίωσης. Η μέθοδος αναπτύχθηκε το 1946 από τον Stanislaw Ulam και σύντομα χρησιμοποιήθηκε τόσο από τον Ulam, όσο και από άλλους μεγάλους μαθηματικούς και φυσικούς (John von Neumann, Nicholas Metropolis, Enrico Fermi) του ερευνητικού κέντρου Los Alamos για τον αριθμητικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων που προέκυπταν κατά την επίλυση διαφορικών εξισώσεων που διέπουν το φαινόμενο της διαχύσεως νετρονίων. Η επιστημονική δημοσίευση της μεθόδου ακολουθεί το 1949 από τους Metropolis & Ulam.

Σε ό,τι αφορά στην ανάπτυξη και διάδοση της μεθόδου στις επιστήμες των υδατικών πόρων, το πρώτο καθοριστικό βήμα τοποθετείται το 1954 με τη γέννηση ασυσχέτιστων ετήσιων δεδομένων κανονικής κατανομής για μία θέση ενδιαφέροντος. Ακολουθούν οι εργασίες των Maass et al. (1962) και Thomas & Fiering (1962) που αφορούν στην παραγωγή χρονικά συσχετισμένων δεδομένων σε μη κανονικές κατανομές. Το 1965 ο Beard και αργότερα, το 1967, ο Matalas δημοσιεύουν τις εργασίες τους πάνω στην ταυτόχρονη παραγωγή συσχετισμένων χρονοσειρών για περισσότερες από μία θέσεις ενδιαφέροντος. Το 1970 κυκλοφορεί το κλασικό βιβλίο *Time Series Analysis, Forecasting and Control* (Box & Jenkins, 1970), το οποίο πραγματεύεται την ανάλυση και τη σύνθεση χρονοσειρών, την ταξινόμηση των στοχαστικών μοντέλων και την εφαρμογή τους στην προσομοίωση και την πρόγνωση. Ακολουθεί το 1976 η κυκλοφορία του κλασικού βιβλίου *Systems Approach to Water Management* (Matalas & Wallis, 1976), στο οποίο πραγματοποιείται η κωδικοποίηση των διάφορων μοντέλων πολυμεταβλητής στοχαστικής προσομοίωσης υδρολογικών διεργασιών, ενώ το 1985 κυκλοφορεί το βιβλίο *Random Functions in Hydrology* (Bras &

* Οι πρώτες σκέψεις και προσπάθειες του Ulam για την ανάπτυξη της μεθόδου προέκυψαν το 1946, παίζοντας το παιχνίδι της πασιέντζας, κατά τη διάρκεια της ανάρρωσής του από μία ασθένεια. Στην προσπάθειά του να υπολογίσει την πιθανότητα να κερδίσει στο εν λόγω παιχνίδι διαπίστωσε ότι οι αναλυτικές μέθοδοι παρουσιάζονταν ιδιαίτερα επίπονες και έτσι σκέφτηκε να επαναλάβει το παιχνίδι εκατό φορές και γνωρίζοντας πλέον τον αριθμό των παιχνιδιών που είχε κερδίσει να υπολογίσει αντί της θεωρητικής μία πιθανότητα που βασίζεται στην δειγματοληπτική τεχνική (πειραματική πιθανότητα). Το όνομα Monte Carlo, αναφέρεται στο καζίνο Monte Carlo του Μονακό, το οποίο επισκέπτονταν αρκετά συχνά ο θείος του Ulam (Ulam, 1983).

Rodriguez-Iturbe, 1985), το οποίο εμβάθυνε στην χρήση της στοχαστικής υδρολογίας (Grygier & Stedinger, 1990).

2.1.1 Ορισμοί

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να δοθούν κάποιοι ορισμοί βασικών εννοιών, οι οποίες χρησιμοποιούνται στις σελίδες που ακολουθούν.

Με τον όρο **στοχαστική ανέλιξη** ορίζουμε μια οικογένεια μεταβλητών $X(t)$, όπου t παράμετρος που παίρνει τιμές από ένα κατάλληλο σύνολο T (Paroulis, 1990).

Με τον όρο **στάσιμη στοχαστική ανέλιξη** ορίζουμε την απειροπληθή ακολουθία τυχαίων αριθμών με δείκτη τον χρόνο, της οποίας τα στατιστικά χαρακτηριστικά παραμένουν σταθερά και ανεξάρτητα των τιμών που λαμβάνει ο δείκτης (Paroulis, 1990).

Με τον όρο **χρονοσειρά** ορίζουμε την πραγματοποίηση μίας στοχαστικής ανελίξεως, δηλαδή ένα σύνολο παρατηρήσεων $x(t)$ της $X(t)$, για μεταβαλλόμενο χρόνο t (Paroulis, 1990).

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, δηλαδή η:

$$F(x; t) := P(X(t) \leq x) \quad (2.1)$$

ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής πρώτης τάξης** της ανελίξεως. Αντίστοιχα έχουμε τη συνάρτηση κατανομής δεύτερης τάξης:

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) := P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2) \quad (2.2)$$

και κατ' επέκταση τη συνάρτηση n τάξης:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) := P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n) \quad (2.3)$$

Με παραγωγή των συναρτήσεων κατανομής παίρνουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Μία στοχαστική ανέλιξη είναι στατιστικά ορισμένη αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση κατανομής n τάξης για κάθε τιμή του n (Κουτσογιάννης, 1997).

Ακολούθως ορίζονται οι βασικές ροπές της στοχαστικής ανελίξεως (Κουτσογιάννης, 1997):

- Η μέση τιμή της ανελίξεως, δηλαδή η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής $X(t)$:

$$\mu(t) := E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; t)dt \quad (2.4)$$

- Η αυτοσυνδιασπορά της ανέλιξης, δηλαδή η συνδιασπορά των τυχαίων μεταβλητών $X(t_1)$, και $X(t_2)$:

$$C(t_1, t_2) := Cov[X(t_1), X(t_2)] = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))] \quad (2.5)$$

Σημειώνεται ότι η διασπορά της ανέλιξης, δηλαδή η διασπορά της μεταβλητής $X(t)$, είναι $Var[X(t)] = C(t, t)$. Κατά συνέπεια ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών $X(t_1)$, και $X(t_2)$, ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho(t_1, t_2) := \frac{Cov[X(t_1), X(t_2)]}{\sqrt{Var[X(t_1)]Var[X(t_2)]}} = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1)C(t_2, t_2)}} \quad (2.6)$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται η ετεροσυνδιασπορά δύο ανελιξεων $X(t)$ και $Y(t + \tau^*)$:

$$C_{XY}(t; \tau) := Cov[X(t), Y(t + \tau)] = E[(X(t) - \mu(t))(Y(t + \tau) - \mu(t + \tau))] \quad (2.7)$$

Κατά συνέπεια ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών $X(t)$ και $Y(t + \tau)$, ορίζεται από τη σχέση:

$$r_{XY}(t; \tau) := \frac{Cov[X(t), Y(t + \tau)]}{\sqrt{Var[X(t)]Var[Y(t + \tau)]}} = \frac{C_{XY}(t; \tau)}{\sqrt{C_X(t, t)C_Y(t + \tau, t + \tau)}} \quad (2.8)$$

Με τον όρο **λευκό θόρυβο** εννοούμε μία ακολουθία αμοιβαία ανεξάρτητων μεταβλητών με την ίδια κατανομή (Κουτσογιάννης, 2007).

Με τον όρο **πληθυσμό** θεωρούμε οποιαδήποτε συλλογή αντικειμένων, των οποίων ενδιαφέρουν οι μετρήσιμες ιδιότητες. Με τον όρο **δείγμα** αναφερόμαστε σε ένα σύνολο μετρήσεων για το συγκεκριμένο πληθυσμό (Κουτσογιάννης, 1997).

Δείγμα, στην κλασσική στατιστική, μεγέθους (ή μήκους) n , μίας τυχαίας μεταβλητής X με πυκνότητα πιθανότητας $f(X)$, είναι μία ακολουθία n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, \dots, X_n με κοινή πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$, η οποία ορίζεται στο δειγματικό χώρο $\Omega^n = \Omega x \dots x \Omega$ (Paroulis, 1990). Καθεμία από τις μεταβλητές X_i αντιστοιχεί στις δυνατές εκβάσεις μίας μέτρησης ή παρατήρησης της μεταβλητής X . Αφού εκτελεστούν οι μετρήσεις, για καθεμία μεταβλητή θα έχουμε μία μέτρηση, άρα συνολικά θα έχουμε την

* Όπου τ , η χρονική υστέρηση

αριθμητική ακολουθία x_1, x_2, \dots, x_n , την οποία καλούμε *παρατηρημένο δείγμα* ή απλώς *παρατηρήσεις* (Κουτσογιάννης, 1997).

Με τον όρο **στατιστική συνάρτηση** εννοούμε κάθε συνάρτηση των τυχαίων μεταβλητών του δείγματος, της μορφής $\theta = g(X_1, \dots, X_n)$ (Κουτσογιάννης, 1997).

Με τον όρο **εκτιμήτρια** μίας παραμέτρου n του πληθυσμού εννοούμε μία στατιστική συνάρτηση της μορφής $\theta = g(X_1, \dots, X_n)$, η οποία είναι κατάλληλη για την εκτίμηση αυτής της παραμέτρου (Κουτσογιάννης, 1997).

Μια στατιστική συνάρτηση της μορφής $\theta = g(X_1, \dots, X_n)$ είναι **αμερόληπτη εκτιμήτρια** της παραμέτρου n αν $E[\theta] = n$. Διαφορετικά είναι μεροληπτική εκτιμήτρια και η διαφορά $(E[\theta] - n)$ λέγεται **μεροληψία** (Κουτσογιάννης, 1997).

Μια στατιστική συνάρτηση της μορφής $\theta = g(X_1, \dots, X_n)$ είναι **συνεπής εκτιμήτρια** της παραμέτρου n αν το σφάλμα εκτίμησης $(\theta - n)$ τείνει στο μηδέν με πιθανότητα 1, όταν το n τείνει στο άπειρο. Διαφορετικά είναι ασυνεπής εκτιμήτρια (Κουτσογιάννης, 1997).

2.1.2 Παραδοχή χρονικής ανεξαρτησίας υδρολογικών δειγμάτων (Εφαρμογή κλασσικής στατιστικής)

Στην πιθανοθεωρία και στην στατιστική μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X(t)$ είναι ανεξάρτητη και ομοίως κατανομημένη (IID), αν κάθε μεταβλητή ακολουθεί την ίδια κατανομή $F(x)$ με πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ και είναι ανεξάρτητη* από τις υπόλοιπες. Στην περίπτωση αυτή:

$$C(t_1, t_2) = \rho(t_1, t_2) = 0 \quad (2.9)$$

Όλη η θεωρία της κλασσικής στατιστικής βασίζεται στην ανωτέρω παραδοχή. Επισημαίνεται πως η παραδοχή αυτή σε καμία περίπτωση δεν συνάδει με τη στοχαστική φύση των υδρολογικών χρονοσειρών και αποτυγχάνει να αποδώσει τόσο την βραχυπρόθεσμη, όσο και την μακροπρόθεσμη εμμονή, γνωστή ως φαινόμενο Hurst, που διέπει τις υδρολογικές διαδικασίες. Με την παραδοχή αυτή λοιπόν παρουσιάζονται οι

* Οι μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n της ακολουθίας X_i είναι ανεξάρτητες αν για όλες τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_n ισχύει (Κουτσογιάννης, 1997): $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_{X_1}(x_1; t_1)F_{X_2}(x_2; t_2) \dots F_{X_n}(x_n; t_n)$

τυπικές σημειακές εκτιμήτριες που αναφέρονται σε στατιστικές ροπές που πληθυσμού και είναι ανεξάρτητες της συνάρτησης κατανομής $F(x)$ (Κουτσογιάννης, 1997):

- Εκτιμήτρια δειγματικής μέση τιμής:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.10)$$

Εύκολα αποδεικνύεται πως $E[\bar{X}] = E[X]$ και $Var[\bar{X}] = \frac{Var[X]}{n}$ (αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια).

- Μεροληπτική εκτιμήτρια της διασποράς σ_X^2 του πληθυσμού:

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \quad (2.11)$$

Στην περίπτωση κανονικής κατανομής του πληθυσμού αποδεικνύεται πως:

$$Var[S_X^2] = \frac{2(n-1)\sigma_X^4}{n^2}$$

- Αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς σ_X^2 του πληθυσμού:

$$S_X^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad (2.12)$$

Στην περίπτωση κανονικής κατανομής του πληθυσμού αποδεικνύεται

πως: $Var[S_X^{*2}] = \frac{2\sigma_X^4}{(n-1)}$

- Μεροληπτική εκτιμήτρια της συνδιασποράς σ_{XY} ενός πληθυσμού δύο μεταβλητών X και Y :

$$S_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n} \quad (2.13)$$

- Αμερόληπτη εκτιμήτρια της συνδιασποράς σ_{XY} ενός πληθυσμού δύο μεταβλητών X και Y :

$$S_{*XY}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n-1} \quad (2.14)$$

- Εκτιμήτρια του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{XY} , γνωστή ως δειγματικός συντελεστής συσχέτισης (κατά προσέγγιση αμερόληπτη εκτιμήτρια):

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{S^*_{XY}}{S^*_X S^*_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (2.15)$$

2.1.3 «Μαρκοβιανή» Προσέγγιση

Η ανωτέρω παραδοχή της χρονικής ανεξαρτησίας της στοχαστικής ανέλιξης, όπως προαναφέρθηκε, αποτυγχάνει να αποδώσει τόσο τη βραχυπρόθεσμη (short-term persistence - STP), όσο και τη μακροπρόθεσμη εμμονή (long-term persistence - LTP) που χαρακτηρίζει τις υδρολογικές χρονοσειρές.

Αρκετές προσεγγίσεις έχουν προταθεί με στόχο την αναπαραγωγή του στοχαστικού χαρακτήρα των υδρολογικών διαδικασιών. Ακολουθως παρουσιάζεται η «Μαρκοβιανή» προσέγγιση, η οποία περιγράφει την βραχυπρόθεσμη μνήμη των ιστορικών χρονοσειρών.

Μια ανέλιξη $X(t)$, στην οποία αν είναι γνωστό το παρόν, το μέλλον δεν εξαρτάται από το παρελθόν αλλά μόνο από το παρόν, λέγεται ανέλιξη Markov (Markov chain) (Κουτσογιάννης, 2007). Συμβολικά για $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ και $\tau > 0$:

$$P\{X(t + \tau) \leq x | X(t), X(t_n), \dots, X(t_1)\} = P\{X(t + \tau) \leq x | X(t)\} \quad (2.16)$$

Αν η X είναι στάσιμη ανέλιξη σε διακριτό χρόνο μπορούμε να γράψουμε:

$$X_i = aX_{i-1} + V_i \quad (2.17)$$

Η ακολουθία των V_i , αποτελεί λευκό θόρυβο σε διακριτό χρόνο. Η πιο πάνω σχέση ορίζει το μοντέλο Markov σε διακριτό χρόνο ή αλλιώς μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης (autoregression) τάξης 1 (συμβολικά AR(1)).

Αν μ_X και μ_V , οι μέσες τιμές των X_i και V_i , αντίστοιχα, γ_m η αυτοσυνδιασπορά της X_i για υστέρηση m , σ_V^2 η διασπορά της V_i και μ_{3X} και μ_{3V} οι τρίτες κεντρικές ροπές των X_i και V_i , αντίστοιχα, τότε εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις (Κουτσογιάννης, 2007):

$$Cov[X_1, V_i] = Cov[X_{i-1}, V_i] = 0, \quad (2.18)$$

$$Cov[X_i, V_i] = \sigma_V^2, Cov[X_{i+m}, V_i] = a^m \sigma_V^2 \quad (m > 0)$$

$$\gamma_m = a^m \gamma_0 \quad (\text{ειδικότερα } \gamma_1 = a \gamma_0) \quad (2.19)$$

$$\mu_V = (1 - a)\mu_X, \sigma_V^2 = \gamma_0(1 - a^2), \mu_{3V} = (1 - a^3)\mu_{3X} \quad (2.20)$$

Η συμπεριφορά αυτή που χαρακτηρίζει τις υδρολογικές χρονοσειρές εισάγει αβεβαιότητα στις εκτιμήσεις των διάφορων στατιστικών μεγεθών, με αποτέλεσμα η κλασική στατιστική να αποτυγχάνει να αποδώσει τις πραγματικές τιμές των μεγεθών αυτών με τις κλασσικές στατιστικές εκτιμήτριες, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 2.1.2.

Ακόμη λοιπόν και στην περίπτωση του μοντέλου AR(1), το οποίο αποτελεί την απλούστερη μορφή μοντέλου αναπαραγωγής της βραχυπρόθεσμης εμμονής, η εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης της μέσης τιμής, όπως αυτή προσεγγίζεται με βάση την κλασική στατιστική*, υποεκτιμά την πραγματική τιμή της τυπικής απόκλισης της μέσης τιμής, η οποία στην περίπτωση του μοντέλου AR(1) εκφράζεται ως ακολούθως (Koutsoyiannis, 2002):

$$Std[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{(1 - \rho^2) - 2\rho(1 - \rho^n)/n}{(1 - \rho)^2}} \quad (2.21)$$

Η υποεκτίμηση αυτή υποδηλώνει μείωση του μήκους του δείγματος n της χρονοσειράς. Συγκεκριμένα για να καταστεί προφανής η μείωση αυτή, μπορεί να υπολογιστεί το ισοδύναμο μήκος n' σύμφωνα με τις εκτιμήσεις της κλασικής στατιστικής, ώστε:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{(1 - \rho^2) - 2\rho(1 - \rho^n)/n}{(1 - \rho)^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n'}} \quad (2.22)$$

Για μια χρονοσειρά λοιπόν μήκους n , η οποία παρουσιάζει συμπεριφορά βραχυπρόθεσμης εμμονής, το ισοδύναμο μήκος n' σύμφωνα με τις εκτιμήσεις της κλασικής στατιστικής που αφορούν στην εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της μέσης τιμής, προσεγγίζεται ως ακολούθως:

$$n' = n \frac{(1 - \rho)^2}{(1 - \rho^2) - 2\rho(1 - \rho^n)/n} \quad (2.23)$$

* Σύμφωνα με την κλασική στατιστική $Std[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2.1.4 Ανελίξεις απλής ομοιοθεσίας

Η «Μαρκοβιανή» προσέγγιση, παρόλο που αποδίδει τη βραχυπρόθεσμη μνήμη των ιστορικών χρονοσειρών, αποτυγχάνει να αποδώσει τη μακροπρόθεσμη εμμονή των υδρολογικών διαδικασιών, καθώς οι διατηρούμενες από το μοντέλο αυτοσυσχετίσεις φθίνουν ταχύτατα για χρονικά βήματα μετατόπισης μεγαλύτερα της τάξης του μοντέλου* (στην προκειμένη περίπτωση 1^{ns} τάξης - AR(1)) (Koutsoyiannis, 2002).

Σε αντίθεση λοιπόν, με τις κοινές τυχαίες σειρές λευκού θορύβου, οι υδρολογικές χρονοσειρές έχουν δομή, δηλαδή οι διαδοχικές τιμές των υδρολογικών χρονοσειρών είναι εξαρτημένες μεταξύ τους. Μια ειδική κατηγορία εξάρτησης που παρατηρείται σε μεγάλες χρονικές κλίμακες ανακαλύφθηκε από τον Hurst και έχει γίνει γνωστή με διάφορους όρους όπως εξάρτηση μεγάλης κλίμακας, μακροπρόθεσμη εμμονή ή απλά φαινόμενο Hurst. Ο Hurst μελέτησε μία σειρά γεωφυσικών διεργασιών και παρατήρησε πως παρόλο που σε τυχαίες διεργασίες ομάδες υψηλών ή χαμηλών τιμών είναι δυνατόν να παρατηρηθούν, η τάση τους να εμφανίζονται σε φυσικές διεργασίες είναι μεγαλύτερη (Hurst, 1951). Από τότε έχει διαπιστωθεί πως η συμπεριφορά αυτή είναι σχεδόν πανταχού παρούσα σε διάφορες διεργασίες στη φύση, την τεχνολογία και την κοινωνία. Οι συνέπειες αυτής της συμπεριφοράς είναι πολύ σημαντικές, δεδομένου ότι αυξάνει δραστικά την αβεβαιότητα γύρω από τις σχετικές διεργασίες (Koutsoyiannis, 2005).

Προκειμένου να αποδοθεί η στοχαστική αυτή φύση των υδρολογικών χρονοσειρών και οι εκτιμήσεις των διάφορων στατιστικών μεγεθών να καταστούν συνεπείς με την πραγματικότητα, ο Mandelbrot (1965) εισήγαγε την έννοια του κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου (fractional Gaussian noise – FGN[†]), για την περιγραφή των υδρολογικών χρονοσειρών.

Συγκεκριμένα, ο κλασματικός Γκαουσιανός θόρυβος μπορεί να οριστεί σε διακριτό χρόνο ως μία στάσιμη ανέλιξη, η οποία ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$Z_i^{(k)} - k\mu \triangleq \left(\frac{k}{l}\right)^H (Z_j^{(l)} - l\mu) \quad (2.24)$$

* $\rho_1^{(k)} = \frac{\rho(1-\rho^k)^2}{k(1-\rho^2)-2\rho(1-\rho^k)}$, $\rho_j^{(k)} = \rho_1^{(k)} \rho^{k(j-1)}$, $\rho \equiv \rho_1^{(1)}$, $j \geq 1$ (Koutsoyiannis, 2002)

[†] Εναλλακτικές ονομασίες: ανέλιξεις απλής ομοιοθεσίας, στάσιμα αυξημένα αυτό-όμοιων ανελιξεων (stationary increments of self-similar processes)

όπου το σύμβολο \triangleq σημαίνει ισότητα στην (πεπερασμένης διάστασης από κοινού) κατανομή, i, j, k, l είναι οποιοδήποτε ακέραιοι, μ είναι η μέση τιμή του Z_i^* και H είναι μία σταθερά ($0 < H < 1$), γνωστή ως συντελεστής ή εκθέτης Hurst (Koutsoyiannis, 2002).

Αρκετοί αλγόριθμοι έχουν προταθεί για την αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμοής κατά τη γένεση συνθετικών χρονοσειρών, όπως το σχήμα του συμμετρικού κυλιόμενου μέσου (symmetric moving average - SMA), αλγόριθμοι που στηρίζονται στη λογική τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας καθώς και αλγόριθμοι που στηρίζονται σε μεθόδους διαδοχικού επιμερισμού.

Ακολούθως, αναλύονται το σχήμα του συμμετρικού κυλιόμενου μέσου καθώς και ο αλγόριθμος παραγωγής κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου ως άθροισμα τριών ανεξίξεων AR(1), ο οποίος στηρίζεται στη λογική τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας. Ο δεύτερος αυτός αλγόριθμος θα χρησιμοποιηθεί στη στατιστική ανάλυση, εξαρτημένων χρονικά, υδρολογικών χρονοσειρών για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας.

2.1.4.1 Αλγόριθμος παραγωγής κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου (Λογική τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας)

Η συνθετική αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμοής μίας στάσιμης στοχαστικής ανεξίξεως αποδεικνύεται (Koutsoyiannis, 2002) ότι είναι δυνατή, με την θεώρησή της ως ένα άθροισμα τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας (multiple time-scale fluctuation).

Σύμφωνα με τον συγκεκριμένο αλγόριθμο (Koutsoyiannis, 2002) λοιπόν, η ανέλιξη X_i παράγεται ως άθροισμα τριών ανεξίξεων AR(1): $X_i = A_i + B_i + C_i$, με συντελεστές αυτοσυσχέτισης για υστέρησης 1, αντίστοιχα:

$$\rho = 1.52(H - 0.5)^{1.32}, \varphi = 0.953 - 7.69(1 - H)^{3.85},$$

$$\xi = \begin{cases} 0.932 + 0.087H, & H \leq 0.76 \\ 0.993 + 0.007H, & H > 0.76 \end{cases} \quad (2.25)$$

και διασπορές $(1 - c_1 - c_2)\gamma_0$, $c_1\gamma_0$, $c_2\gamma_0$, αντίστοιχα. Τα c_1 , c_2 εκτιμώνται έτσι ώστε η αυτοσυσχέτιση του αθροίσματος των τριών ανεξίξεων: $\rho_j = (1 - c_1 - c_2)\rho^j + c_1\varphi^j + c_2\xi^j$

* $Z_i^{(k)} := \sum_{l=(i-1)k+1}^{ik} X_l$ είναι η συναθροισμένη ανέλιξη στη κλίμακα k

να ταυτίζεται με τη θεωρητική αυτοσυσχέτιση* του κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου, για υστέρηση 1 και 100.

2.1.4.2 Αλγόριθμος παραγωγής κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου (Σχήμα συμμετρικού κυλιόμενου μέσου)

Το σχήμα του συμμετρικού κυλιόμενου μέσου (symmetric moving average - SMA) έχει εισαχθεί από τον Κουτσογιάννη (Koutsoyiannis, 2000) και μετασχηματίζει μία ακολουθία λευκού θορύβου V_i σε μία ακολουθία με αυτοσυσχέτιση, X_i , κατά τη σχέση:

$$X_i = \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+j} = a_q V_{i-q} + \dots + a_1 V_{i-1} + a_0 V_i + a_1 V_{i+1} + \dots + a_q V_{i+q} \quad (2.26)$$

όπου τα a_j είναι συντελεστές βάρους και ο αριθμός τους, q , είναι θεωρητικά άπειρος, αλλά στην πράξη λαμβάνει μία πεπερασμένη τιμή. Η μέθοδος είναι κατάλληλη για τυχούσα συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Στην περίπτωση του μοντέλου FGN, αποδεικνύεται πως οι συντελεστές βάρους είναι:

$$a_j \approx \frac{\sqrt{(2-2H)\gamma_0}}{3-2H} [(j+1)^{H+0.5} + (j-1)^{H+0.5} - 2j^{H+0.5}], j > 0 \quad (2.27)$$

και ο αναγκαίος αριθμός βαρών:

$$q \geq \max \left[m, \left(\frac{2\beta}{H^2 - 0.25} \right)^{1/(H-1.5)} \right] \quad (2.28)$$

όπου m ο αριθμός των αυτοσυσχετίσεων που πρέπει να διατηρηθούν και β συντελεστής ακρίβειας (π.χ. $\beta = 0.001$) (Κουτσογιάννης, 2007).

Όπως προαναφέρθηκε η στοχαστική συμπεριφορά των υδρολογικών διαδικασιών εισάγει αβεβαιότητα στις εκτιμήσεις των διάφορων στατιστικών μεγεθών, με αποτέλεσμα η κλασική στατιστική να αποτυγχάνει να αποδώσει τις πραγματικές τιμές των μεγεθών αυτών με τις κλασσικές στατιστικές εκτιμήτριες.

Η αβεβαιότητα αυτή, η οποία μπορεί να εκφραστεί με την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της μέσης τιμής (Koutsoyiannis, 2005), σύμφωνα με τη θεωρία της κλασσικής στατιστικής θα υπάκουε στον παρακάτω νόμο:

* $\rho_j^{(k)} = \rho_j = \frac{1}{2} [(j+1)^{2H} + (j-1)^{2H}] - 2j^{2H}, j > 0$

$$StD[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.29)$$

όπου \bar{X} η δειγματική μέση τιμή, σ η τυπική απόκλιση και n η κλίμακα συνάθροισης ή το μέγεθος του δείγματος.

Λόγω της μακροπρόθεσμης εμμονής που διέπει τις υδρολογικές διεργασίες εφαρμόζεται ο παρακάτω τροποποιημένος νόμος για ανελίξεις απλής ομοιοθεσίας (Koutsoyiannis, 2002):

$$StD[\bar{X}] = \frac{\sigma}{n^{1-H}} \quad (2.30)$$

Παρατηρείται σημαντική υποεκτίμηση της τυπικής απόκλισης της μέσης τιμής από την αντίστοιχη εκτιμήτρια, όπως αυτή προσεγγίζεται με βάση την κλασσική στατιστική. Η διαφορά λοιπόν, μεταξύ των δύο εξισώσεων γίνεται πολύ σημαντική για μεγάλες τιμές του συντελεστή H , ενώ για $H = 0.5$ οι δύο εξισώσεις πρακτικά και θεωρητικά ταυτίζονται. Ανάλογες διαφορές παρατηρούνται και σε άλλες συνήθεις στατιστικές εκτιμήτριες.

Η υποεκτίμηση αυτή υποδηλώνει μείωση του μήκους του δείγματος n της χρονοσειράς. Συγκεκριμένα για να καταστεί προφανής η μείωση αυτή, μπορεί να υπολογιστεί το ισοδύναμο μήκος n' σύμφωνα με τις εκτιμήσεις της κλασσικής στατιστικής, ώστε:

$$\frac{\sigma}{n^{1-H}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n'}} \quad (2.31)$$

Για μια χρονοσειρά λοιπόν μήκους n , η οποία παρουσιάζει συμπεριφορά μακροπρόθεσμης εμμονής, το ισοδύναμο μήκος n' σύμφωνα με τις εκτιμήσεις της κλασσικής στατιστικής, που αφορούν στην εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της μέσης τιμής, προσεγγίζεται με ανάλογο τρόπο όπως στην περίπτωση της βραχυπρόθεσμης εμμονής ως:

$$n' = n^{2(1-H)} \quad (2.32)$$

Επισημαίνεται πως η φυσική εξήγηση τόσο της βραχυπρόθεσμης, όσο και της μακροπρόθεσμης εμμονής, έγκειται στην αρχή της μέγιστης εντροπίας. Στην περίπτωση της «Μαρκοβιανής» προσέγγισης η μεγιστοποίηση της εντροπίας σε μία συγκεκριμένη χρονική κλίμακα καταλήγει σε εξάρτηση Markov, ενώ στην περίπτωση που η μεγιστοποίηση γίνει σε πολλαπλές χρονικές κλίμακες καταλήγουμε σε εξάρτηση μακράς κλίμακας (Koutsoyiannis & Montanari, 2007).

2.2 Αξιοποίηση πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων με ενοποίηση διαρκειών

Στην περίπτωση που διατίθενται περισσότερα του ενός δείγματα υδρολογικών χρονοσειρών από διαφορετικούς σταθμούς*, ανακύπτει το ζήτημα της ταυτόχρονης μελέτης του ενοποιημένου πλέον δείγματος για βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων†. Η επαλήθευση της υπόθεσης πως τα επιμέρους δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό ή αποτελούν δείγματα της ίδιας τυχαίας μεταβλητής είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την ενοποίηση και τη δημιουργία δειγμάτων μεγαλύτερου μήκους. Ο έλεγχος της ανωτέρω υπόθεσης πρέπει να γίνεται τόσο εμπειρικά όσο και στατιστικά.

Ο εμπειρικός έλεγχος έγκειται στην διαπίστωση της κλιματικής ομοιογένειας της περιοχής μελέτης (διαπίστωση μη ύπαρξης στατιστικά σημαντικών διαφορών στα στατιστικά χαρακτηριστικά), ενώ ο στατιστικός αφορά στην εφαρμογή της δοκιμής Kruskal - Wallis (1952) για κάθε ομάδα επιμέρους δειγμάτων, η οποία περιγράφεται ακολούθως (Κουτσογιάννης, 1997).

Σε περίπτωση λοιπόν, που τα στατιστικά δείγματα των επιμέρους σταθμών είναι στατιστικώς ανεξάρτητα, η ενοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την σημαντική αύξηση της στατιστικής αξιοπιστίας των εκτιμήσεων, αφού το μήκος του ενοποιημένου δείγματος, το οποίο χαρακτηρίζει την αξιοπιστία των στατιστικών εκτιμήσεων, είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους μηκών (μέθοδος σταθμών-ετών):

$$m = \sum_{j=1}^k n_j \quad (2.33)$$

όπου m το μήκος του ενοποιημένου δείγματος, n_j το μήκος του κάθε επιμέρους δείγματος και k ο αριθμός των δειγμάτων.

Κατατάσσοντας το ενοποιημένο πλέον δείγμα σε φθίνουσα σειρά και αντιστοιχώντας αύξοντες αριθμούς ή βαθμούς (ranks) r_j σε όλες τις m τιμές‡, επανερχόμαστε σε κάθε επιμέρους δείγμα και υπολογίζουμε για κάθε δείγμα το μέσο βαθμό:

* ή και από τον ίδιο σταθμό αλλά για διαφορετικές χρονικές κλίμακες

† όπως στην περίπτωση της εκτιμήσεως των παραμέτρων μιας ενιαίας έκφρασης όμβριων καμπυλών

‡ Στην περίπτωση ύπαρξης ταυτόσημων τιμών, χρησιμοποιείται ο μέσος όρος των αντίστοιχων βαθμών.

$$\bar{r}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{j=1}^k r_j \quad (2.34)$$

Αν όλα τα επιμέρους δείγματα έχουν την ίδια κατανομή, τότε κάθε \bar{r}_j αναμένεται να βρίσκεται πολύ κοντά στην τιμή $(m+1)/2$, διαφορετικά οι τιμές \bar{r}_j θα διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Αυτό οδηγεί στη χρήση της στατιστικής παραμέτρου Kruskal - Wallis (1952), η οποία συνδυάζει τους μέσους βαθμούς από όλα τα δείγματα:

$$h = \frac{12}{m(m+1)} \sum_{j=1}^k n_j \left(\bar{r}_j - \frac{m+1}{2} \right) \quad (2.35)$$

Αν τα επιμέρους δείγματα είναι ανεξάρτητα, η στατιστική συνάρτηση H , της οποίας σημειακή εκτίμηση είναι η παραπάνω τιμή h , ακολουθεί κατανομή χ^2 με $k-1$ βαθμούς ελευθερίας. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατός ο έλεγχος* της υπόθεσης $H = 0^+$, που ισοδυναμεί με την υπόθεση πως όλα τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό. Ακόμη και στην περίπτωση όμως της ύπαρξης στοχαστικής εξάρτησης, παρόλο που δεν είναι δυνατός ο στατιστικός έλεγχος καθώς δεν είναι γνωστή η κατανομή της H , ο στόχος της ελαχιστοποίησης της τιμής h εξακολουθεί να έχει νόημα.

Για να έχει βέβαια νόημα ο παραπάνω στατιστικός έλεγχος, θα πρέπει τα επιμέρους δείγματα που αναφέρονται στην ίδια διάρκεια να είναι στατιστικώς ανεξάρτητα. Η υπόθεση της στατιστικής ανεξαρτησίας ελέγχεται και πάλι τόσο εμπειρικά με την διαπίστωση πως δεν πρόκειται για καταγραφές των ίδιων μεγεθών (π.χ. επεισοδίων βροχής) σε διαφορετικές χωρικές θέσεις, όσο και στατιστικά με τον έλεγχο του κατά πόσο ο συντελεστής συσχέτισης μπορεί να θεωρηθεί μηδέν (Κουτσογιάννης, 1997).

Επισημαίνεται πως η μέθοδος δεν θα πρέπει να εφαρμόζεται ανεπιφύλακτα κυρίως σε μικρά δείγματα και σε περιπτώσεις δειγμάτων σε κοντινές μεταξύ τους αποστάσεις, καθώς η θετική έκβαση του ελέγχου στατιστικής ανεξαρτησίας των εν λόγω δειγμάτων δεν σημαίνει απαραίτητα και την ανεξαρτησία των αντίστοιχων μεταβλητών (Κουτσογιάννης, 1997).

* Ο έλεγχος αυτός είναι *μη παραμετρικός* με την έννοια ότι δεν κάνει καμιά υπόθεση σχετικά με την κατανομή που ακολουθεί η μεταβλητή που περιγράφουν τα προς ενοποίηση δείγματα (Κουτσογιάννης, 1997)

† Για να καταστεί δυνατή η ενοποίηση, θα πρέπει η στατιστική παράμετρος h να είναι μικρότερη της αντίστοιχης κρίσιμης τιμής της h_c .

2.3 Προσπάθειες ποσοτικοποίησης της επαύξησης της υδρολογικής πληροφορίας για βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων

2.3.1 Προσέγγιση με αναλυτικές σχέσεις

Όπως προαναφέρθηκε, εφόσον τα υπό μελέτη στατιστικά δείγματα είναι στατιστικώς ανεξάρτητα, η ενοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την σημαντική αύξηση της στατιστικής αξιοπιστίας των εκτιμήσεων, αφού το μήκος του ενοποιημένου δείγματος, το οποίο χαρακτηρίζει την αξιοπιστία των στατιστικών εκτιμήσεων, είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους μηκών. Ωστόσο η ενοποίηση είναι επιτρεπτή και στην περίπτωση ύπαρξης στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ των επιμέρους δειγμάτων. Στην περίπτωση όμως αυτή η αξιοπιστία δεν αυξάνεται το ίδιο, όπως στην περίπτωση των στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων.

Έστω υδρολογική μεταβλητή X , της οποίας οι μετρήσεις καταγράφονται από k σταθμούς μιας κλιματικά ομογενούς περιοχής και n το διαθέσιμο μήκος δείγματος από κάθε σταθμό (ταυτόχρονα δείγματα μήκους n). Οι εκτιμήσεις της μέσης τιμής (μ_j) και της διασποράς (σ_j^2) του πληθυσμού του j σταθμού με βάση τις τιμές X_{ij} (i είναι η χρονική κλίμακα και j ο εκάστοτε σταθμός) είναι αντίστοιχα (Yevjevich, V, 1972):

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}, \quad s_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_{ij})^2 \quad (2.36)$$

Αν τα υπό μελέτη δείγματα είναι στοχαστικά ασυσχέτιστα (μηδενικός συντελεστής ετεροσυσχέτισης)* και κάθε επιμέρους δείγμα έχει μη στατιστικά σημαντική αυτοσυσχέτιση (ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης τείνει στο μηδέν), είναι δυνατή η ενοποίηση των επιμέρους δειγμάτων και η δημιουργία ενός ενοποιημένου πλέον δείγματος μήκους $n_{cross} = kn$ (μέθοδος σταθμών - ετών). Τα επιμέρους όμως δείγματα είναι πιθανό να είναι στοχαστικά συσχετισμένα (συντελεστής ετεροσυσχέτισης $\neq 0$). Η ενοποίηση των στοχαστικά εξαρτημένων επιμέρους δειγμάτων έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός δείγματος που εμπεριέχει πληροφορία που αντιστοιχεί σε μικρότερο μήκος δείγματος σε σύγκριση με την περίπτωση στατιστικής ανεξαρτησίας: $n_{ecross} < n_{cross} = kn$, όπου n_{ecross} το ισοδύναμο μήκος δείγματος του ενοποιημένου δείγματος, στοχαστικά εξαρτημένων επιμέρους δειγμάτων.

* Περίπτωση που μεταπίπτει στην περίπτωση πλήρως ανεξάρτητων στατιστικών δειγμάτων

Η εκτιμήτρια της μέσης τιμής του ενοποιημένου δείγματος και η διασπορά αυτής εύκολα μπορεί να δειχτεί πως εκφράζονται ως ακολούθως (Yevjevich, V, 1972):

$$\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{X}_j, \quad (2.37)$$

$$var[\bar{X}] = s^2(\bar{X}) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k s_j^2 + \frac{2}{k^2} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=j+1}^k r_{ij} s_i s_j, \quad (2.38)$$

όπου τα \bar{X}_j, s_j^2 εκτιμώνται από τη σχέση (2.36), s_i, s_j είναι οι τυπικές αποκλίσεις του αντίστοιχου ζεύγους των επιμέρους δειγμάτων και r_{ij} ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j .

Στην περίπτωση που κάθε επιμέρους δείγμα έχει μέση τιμή μηδέν και διασπορά s_0^2 (μικρότερη της s_j^2), τότε η μέση τιμή του ενοποιημένου δείγματος είναι επίσης μηδέν (εξ.(2.37)) και ο μέσος συντελεστής ετεροσυσχέτισης εκφράζεται ως (Yevjevich, V, 1972):

$$\bar{r} = \frac{2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=j+1}^k r_{ij}}{k(k-1)} \quad (2.39)$$

Η εξίσωση λοιπόν (2.38) παίρνει την εξής μορφή:

$$s_{(\bar{X})}^2 = \frac{s_0^2}{k} [1 + \bar{r}(k-1)] \quad (2.40)$$

Παρατηρείται (εξ. (2.40)) πως για $\bar{r} = 0$, $s_{(\bar{X})}^2 = \frac{s_0^2}{k}$, και πως για $\bar{r} = 1$, $s_{(\bar{X})}^2 = s_0^2$.

Έστω λοιπόν k_e ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών k στοχαστικά εξαρτημένων υδρολογικών χρονοσειρών, τότε η διασπορά του ενοποιημένου δείγματος ισούται με $s_{(\bar{X})}^2 = \frac{s_0^2}{k_e}$. Εξισώνοντας τη σχέση αυτή με την εξ. (2.40) παίρνουμε:

$$k_e = \frac{k}{1 + \bar{r}(k-1)} \quad (2.41)$$

Θεωρώντας $n_{ecross} = n'_1 + n'_2 + \dots + n'_k$, όπου n'_i η συνεισφορά του σταθμού i , ενώ προφανώς $n'_1 = n$, προκύπτει ότι (Κουτσογιάννης κ.α., 2010):

$$n'_i = \frac{1 - \bar{r}}{[1 + (i-1)\bar{r}][1 + (i-2)\bar{r}]} n \quad (2.42)$$

ή αναδρομικά
$$n'_1 = n, \quad \frac{n'_i}{n'_{i-1}} = \frac{1 + (i - 3)\bar{r}}{1 + (i - 1)\bar{r}} \quad (2.43)$$

Η Σχέση (2.41) αποδίδεται στους Yule and Alexander (Yule, 1945· Matalas and Langbein, 1962· Yevjevich, 1972, σ. 245· National Research Council, 1988, σ. 25· Castellarin et al., 2005).

Στην περίπτωση που $\bar{r} = 0$, $k_e = k$, ενώ για $\bar{r} = 1$, $k_e = 1$ (εξ. (2.41)). Ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών k_e είναι αρκετά ευαίσθητος στις αλλαγές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης \bar{r} και πολύ λιγότερο ευαίσθητος στις μεταβολές του αριθμού των υπό μελέτη δειγμάτων k . Αν ο αριθμός των διαθέσιμων δειγμάτων τείνει στο ∞ , ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών k_e τείνει στην τιμή $\frac{1}{\bar{r}}$. Κατά συνέπεια, υπάρχει ένα ανώτατο όριο στο μέγεθος που μπορεί να φτάσει ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα ήτοι:

$$k_{emax} = 1/\bar{r} \quad (2.44)$$

Ακόμη και για μικρές τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών k_e δεν μπορεί να αυξηθεί αισθητά ακόμη και για μεγάλη αύξηση του αριθμού των διαθέσιμων δειγμάτων. Η ενοποίηση λοιπόν, στοχαστικά εξαρτημένων δειγμάτων, έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός δείγματος που εμπεριέχει πληροφορία που αντιστοιχεί σε μικρότερο μήκος δείγματος (σχεδόν στο μισό) σε σύγκριση με την περίπτωση της στατιστικής ανεξαρτησίας των επιμέρους δειγμάτων, με την προϋπόθεση βέβαια πως τα διαθέσιμα δείγματα δεν είναι χρονικά εξαρτημένα (Yevjevich, V, 1972).

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να εκτιμηθεί ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών με βάση τη διασπορά* της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς s^2 (Stedinger, 1983 – Εξίσωση (35)), η οποία εκφράζεται ως:

$$var[s^2] = \frac{2s_0^4}{k(n-1)} [1 + \bar{r}^2(k-1)] \quad (2.45)$$

και ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών k_e ως:

* Στην περίπτωση στατιστικής ανεξαρτησίας η συγκεκριμένη εκτίμηση με βάση την αντίστοιχη αμερόληπτη εκτιμήτρια εκφράζεται ως: $var[s^2] = \frac{2s_0^4}{k(n-1)}$

$$k_e = \frac{k}{1 + \bar{r}^2(k - 1)} \quad (2.46)$$

Όταν ο αριθμός των διαθέσιμων δειγμάτων τείνει στο άπειρο, ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα τείνει στην τιμή $\frac{1}{\bar{r}^2}$, δηλαδή ένας αριθμός διαθέσιμων δειγμάτων που τείνει στο άπειρο εμπεριέχει τόση πληροφορία, όση $\frac{1}{\bar{r}^2}$ ανεξάρτητα δείγματα (Stedinger, 1983).

Κατ' επέκταση οι σχέσεις (2.42), (2.43) και (2.44), διαφοροποιούνται σε (Κουτσογιάννης κ.α., 2010):

$$n''_i = \frac{1 - \bar{r}^2}{[1 + (i - 1)\bar{r}^2][1 + (i - 2)\bar{r}^2]} n \quad (2.47)$$

ή αναδρομικά
$$n''_1 = n, \quad \frac{n''_i}{n''_{i-1}} = \frac{1 + (i - 3)\bar{r}^2}{1 + (i - 1)\bar{r}^2} \quad (2.48)$$

$$k_{emax} = 1/\bar{r}^2 \quad (2.49)$$

Η σύγκριση των σχέσεων (2.42) και (2.47) καταδεικνύει πως η προσθήκη πληροφορίας είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση των εκτιμήσεων με βάση τη διασπορά της δειγματικής διασποράς σε σχέση με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις με βάση τη διασπορά της μέσης τιμής.

Είναι προφανές πως ανάλογες σχέσεις μπορούν να καταρτιστούν και με βάση τις διασπορές άλλων στατιστικών εκτιμητριών (π.χ. διασπορά της εκτιμήτριας του συντελεστή ασυμμετρίας – Stedinger, 1983 - Εξίσωση (41)). Η επιλογή βέβαια της πλέον κατάλληλης για τη στατιστική ανάλυση, εξαρτάται από το εκάστοτε εξεταζόμενο στατιστικό μέγεθος.

2.3.2 Προσέγγιση με προσομοίωση Monte Carlo

Αρκετές προσπάθειες έχουν γίνει ποσοτικοποίησης της επαύξησης της υδρολογικής πληροφορίας με διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo, πέραν της προσέγγισης με αναλυτικές σχέσεις που παρουσιάστηκε παραπάνω.

Οι Castellarin, Vogel και Matalas (2005), στην προσπάθεια κατάρτισης καμπυλών ακραίων πλημμυρικών επεισοδίων για μία περιοχή (Regional Envelope Curve - REC) με τον προσδιορισμό των αντίστοιχων περιόδων επαναφοράς (πιθανοτική προσέγγιση), αξιολογούν τις εκτιμήσεις με τη διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo, λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση της χωρικής στοχαστικής εξάρτησης στις εκτιμήσεις της περιόδου επαναφοράς.

Το πρόβλημα του προσδιορισμού των περιόδων επαναφοράς των ακραίων πλημμυρικών επεισοδίων για μια περιοχή, στα πλαίσια της εν λόγω έρευνας, ανάγεται στον προσδιορισμό του ισοδύναμου αριθμού στοχαστικά ανεξάρτητων διαθέσιμων δειγμάτων πλημμυρικών παροχών*.

Για να καταστεί αυτό εφικτό διενεργείται προσομοίωση Monte Carlo για τη γένεση 20,000 σετ k τυχαίων κανονικοποιημένων χρονοσειρών παροχής, χρονικά ασυσχέτιστων, κατανομής Gumbel, με αριθμό χρονοσειρών $k = 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200$ και 500, ταυτόχρονων και ίδιου μήκους n και με μέσο συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των χρονοσειρών $\bar{r} = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ και 0.8. Αναπτύσσοντας μία πρώτης τάξης προσέγγιση για την εκτίμηση της διασποράς του κανονικοποιημένου ποσοστημορίου που αντιστοιχεί σε κάθε πιθανότητα υπέρβασης, αποδεικνύεται πως η διασπορά της πιθανότητας υπέρβασης που συνδέεται με το αντίστοιχο ποσοστημόριο καθορίζει και τη διασπορά του αντίστοιχου ποσοστημορίου (Castellarin et al., 2005).

Για κάθε σετ λοιπόν υπολογίζεται η πιθανότητα υπέρβασης της μέγιστης τιμής μεταξύ των k χρονοσειρών, p_M (20,000 πιθανότητες) και εν συνεχεία εκτιμάται η διασπορά της συγκεκριμένης πιθανότητας υπέρβασης. Στην περίπτωση που οι υδρολογικές χρονοσειρές ήταν στοχαστικά ανεξάρτητες η συγκεκριμένη εκτίμηση θα ταυτίζονταν με την αντίστοιχη θεωρητική της τιμή (Loucks et al., 1981):

$$var[p_M] = \frac{k}{(k+2)(k+1)^2} \quad (2.50)$$

Η εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού χρονοσειρών που συνδέεται με την εκτίμηση της πιθανότητας υπέρβασης των καταγραφών των ακραίων πλημμυρικών επεισοδίων μιας περιοχής εκτιμήθηκε με την εύρεση της τιμής k που ικανοποιεί τη σχέση (2.50), για κάθε τιμή της διασποράς της πιθανότητας υπέρβασης όπως προσεγγίστηκε από την προσομοίωση Monte Carlo, για κάθε σετ $[k, n, \bar{r}]$.

Ο ισοδύναμος λοιπόν αριθμός σταθμών \hat{M}_{EC} με βάση την εκτίμηση της διασποράς της περιόδου επαναφοράς της μέγιστης τιμής, με προσομοίωση Monte Carlo προσεγγίζεται ως (Castellarin et al., 2005):

* Στην περίπτωση που τα δείγματα ήταν στοχαστικά ανεξάρτητα η εκτίμηση της περιόδου επαναφοράς γίνεται με βάση την αμερόληπτη ως προς την πιθανότητα υπέρβασης θέση σχεδίασης ή θέση σχεδίασης Weibull (Κουτσογιάννης, 1997).

$$\widehat{M}_{EC} = \frac{k}{1 + \overline{r^\beta}(k-1)}, \quad \beta := 1.4 \frac{(nk)^{0.176}}{(1-r)^{0.376}} \quad (2.51)$$

Επισημαίνεται πως οι εκφράσεις $\overline{r^\beta}$ και $\overline{(1-r)^{0.376}}$ αποτελούν μέσες τιμές των αντίστοιχων συναρτήσεων των συντελεστών ετεροσυσχέτισης. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό του ανωτέρω μοντέλου λαμβάνει υπόψη την πραγματική κατανομή των συντελεστών ετεροσυσχέτισης και το καθιστά κατάλληλο για διάφορες χωρικές κατανομές αυτών.

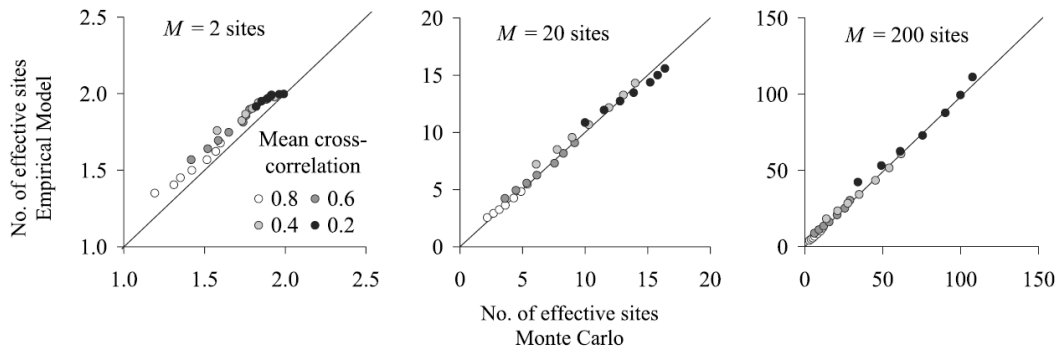
Ο προσδιορισμός της πιθανότητας υπέρβασης με βάση τη θέση σχεδίασης Gringorten (1963)^{*} και την ανωτέρω εκτίμηση λοιπόν για τον υπολογισμό του μήκους του ενοποιημένου δείγματος, προσεγγίζεται με την ακόλουθη εκτιμήτρια, η επάρκεια της οποίας αξιολογήθηκε και πάλι με τη διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo (Castellarin et al, 2005):

$$\hat{p}_{EC} = \frac{0.56}{\widehat{M}_{EC}n + 0.12}, \quad (2.52)$$

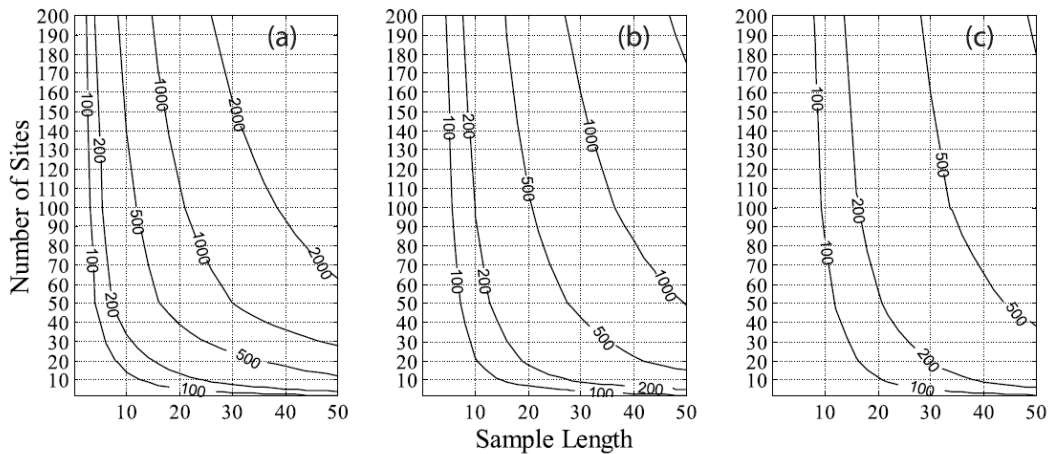
Ακολουθεί σχηματική παρουσίαση (Σχήμα 2.1) του ισοδύναμου αριθμού σταθμών \widehat{M}_{EC} , όπως αυτός εκτιμήθηκε με προσομοίωση Monte Carlo, για διάφορους συντελεστές ετεροσυσχέτισης σε συνάρτηση με τις αντίστοιχες τιμές όπως αυτές προσεγγίζονται από το εμπειρικό μοντέλο (Σχέση (2.51)), ενώ στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζονται γενικευμένες[†] καμπύλες εκτίμησης της επίδρασης της χωρικής στοχαστικής εξάρτησης των διαθέσιμων δειγμάτων στην εκτίμηση της πιθανότητας υπέρβασης των αναμενόμενων ακραίων πλημμυρικών επεισοδίων για μια περιοχή.

^{*} Η θέση σχεδίασης Gringorten παρέχει αμερόληπτες εκτιμήσεις ποσοστημορίων για κατανομή Gumbel (Stendiger et al, 1993).

[†] Για τις εκτιμήσεις χρησιμοποιήθηκε η θέση σχεδίασης Weibull, η οποία δίδει αμερόληπτες εκτιμήσεις πιθανοτήτων υπέρβασης για κάθε κατανομή.



Σχήμα 2.1: Ισοδύναμος αριθμός σταθμών: Εκτιμήσεις προσομοίωσης Monte Carlo σε συνάρτηση με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του εμπειρικού μοντέλου (Πηγή: Castellarin et al., 2005).



Σχήμα 2.2: Περίοδος επαναφοράς (χρόνια) των αναμενόμενων ακραίων πλημμυρικών επεισοδίων ως συνάρτηση του μήκους του δείγματος και του διαθέσιμου αριθμού δειγμάτων, για μέσο συντελεστή ετεροσυσχέτισης: (a) $\bar{r}=0.2$, (b) $\bar{r}=0.4$ και (c) $\bar{r}=0.6$ (Πηγή: Castellarin et al., 2005).

Παρόλο που το συγκεκριμένο μοντέλο αναπτύχθηκε εμπειρικά επιτυγχάνει καταρχάς να αναπαραγάγει, κάτω από την υπόθεση της κλιματικής ομοιογένειας, τη στοχαστική εξάρτηση των διαθέσιμων χρονοσειρών με την παρουσία του εκθέτη β και παράλληλα γενικεύει αυτή την εξάρτηση και για μεγαλύτερους συντελεστές ετεροσυσχέτισης με τον όρο $(1 - r)^{0.376}$. Το πιο σημαντικό βέβαια είναι η ικανοποίηση των οριακών συνθηκών, δηλαδή πως για συντελεστή ετεροσυσχέτισης 0 ή 1 οι εκτιμήσεις προσεγγίζουν τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές (Castellarin et al, 2005).

Παρόμοια προσέγγιση ακολουθείται και από τους Κουτσογιάννη κ.α. (2010), οι παρατηρήσεις των οποίων θα χρησιμοποιηθούν και θα επεκταθούν για τις ανάγκες της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας.

Η εμπειρική περίοδος επαναφοράς της μέγιστης τιμής του δείγματος, με βάση τη θέση σχεδίασης Weibull για δείγμα μεγέθους n , είναι κατά τα γνωστά (Κουτσογιάννης, 1997):

$$T_1 = (n + 1)\Delta \quad (2.53)$$

όπου Δ^* , η βασική χρονική κλίμακα.

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης μελέτης επιχειρήθηκε να βρεθεί το ισοδύναμο μήκος δείγματος $n_{ecross} = n'''_1 + n'''_2 + \dots + n'''_k$, το οποίο κατ' αντιστοιχία θα δώσει την περίοδο επαναφοράς του ενοποιημένου δείγματος ως:

$$T_1 = (n_{ecross} + 1)\Delta \quad (2.54)$$

Με προσομοίωση Monte Carlo λοιπόν, διερευνήθηκε η επαύξηση της πληροφορίας ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς του δείγματος. Συγκριμένα πραγματοποιήθηκε προσομοίωση για δύο τυχαίες μεταβλητές κανονικής κατανομής με μηδενικό συντελεστή αυτοσυσχέτισης (χρονικά ανεξάρτητες), για διάφορες τιμές του συντελεστή της μεταξύ τους ετεροσυσχέτισης. Με βάση τις εκτιμήσεις της προσομοίωσης παρατηρήθηκε πως το ισοδύναμο μήκος n'''_i , το οποίο χαρακτηρίζει την προσθήκη επιπλέον πληροφορίας με βάση το σταθμό i , εκφράζεται ως (Κουτσογιάννης κ.α., 2010):

$$n'''_i \approx \sqrt{1 - r^2}n \quad (2.55)$$

Ο έλεγχος βέβαια, της ακρίβειας της ανωτέρω έκφρασης για τον προσδιορισμό της αντίστοιχης εκτιμήτριας αποτελεί αντικείμενο προς διερεύνηση και στην παρούσα εργασία, για διάφορους αριθμούς δειγμάτων αλλά και για διαφορετικές προσεγγίσεις σε ό,τι αφορά στη δομή της αυτοσυσχέτισης που χαρακτηρίζει τις υδρολογικές χρονοσειρές.

Η παραπάνω προσέγγιση της προσθήκης επιπλέον πληροφορίας μπορεί να γραφεί σε μορφή παρόμοια με την (2.42) ως εξής (Κουτσογιάννης κ.α., 2010):

$$n'''_i \approx \frac{1 - \bar{r}^*}{1 + \bar{r}^*}n \quad (2.56)$$

εφόσον οριστεί:

* Στην παρούσα εργασία έστω 1 έτος

$$\bar{r}^* := \left[\frac{1}{\bar{r}} - \sqrt{\frac{1}{\bar{r}^2} - 1} \right]^2 \quad (2.57)$$

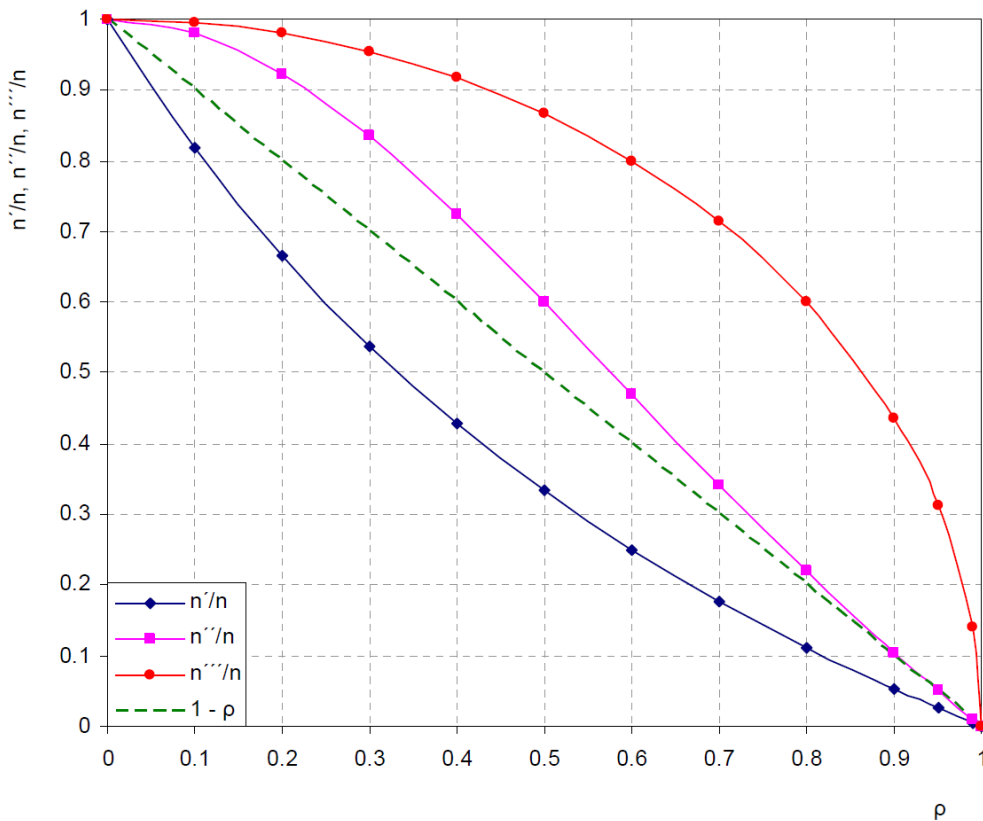
για k λοιπόν μεταβλητές γίνεται η παραδοχή πως προσεγγιστικά θα ισχύει:

$$k_e = \frac{k}{1 + \bar{r}^*(k - 1)} \quad (2.58)$$

ή αναδρομικά
$$n'''_i = \frac{1 - \bar{r}^*}{[1 + (i - 1)\bar{r}^*][1 + (i - 2)\bar{r}^*]} n \quad (2.59)$$

$$k_{emax} = 1/\bar{r}^* \quad (2.60)$$

Ακολουθεί σχηματική παρουσίαση της μεταβολής των ισοδύναμων μηκών n'_i, n''_i, n'''_i ως κλάσμα του πραγματικού μήκους n του δείγματος σε σχέση με τον συντελεστή ετεροσυσχέτισης για δύο συσχετισμένα δείγματα (Σχήμα 2.3). Παρατηρείται πως η προσθήκη επιπλέον πληροφορίας προκύπτει μεγαλύτερη στην περίπτωση που οι εκτιμήσεις γίνονται ως προς την εμπειρική περίοδο αναφοράς σε σύγκριση με τις εκτιμήσεις με βάση τη διασπορά της μέσης τιμής και τη διασπορά της δειγματικής διασποράς.



Σχήμα 2.3: Ισοδύναμο μήκος n'_i, n''_i, n'''_i της πληροφορίας που προσθέτει η δεύτερη μεταβλητή από δείγμα μήκους n στο αρχικό δείγμα επίσης μήκους n , ως συνάρτηση του συντελεστή

ετεροσυσχέτισης των δύο μεταβλητών r (εξισώσεις (2.42), (2.47) και (2.56), αντίστοιχα) (Πηγή: Κουτσογιάννης κ.α., 2010).

Εφόσον λοιπόν αποδοθεί μία εμπειρική περίοδος επαναφοράς $T_1 = (n_{ecross} + 1)\Delta$, στη μεγαλύτερη τιμή του δείγματος, η εμπειρική περίοδος επαναφοράς T_i που αντιστοιχεί στο i μεγαλύτερο στοιχείο του δείγματος ($1 \leq i \leq N$, όπου $N := kn$) προκύπτει ως εξής (Κουτσογιάννης κ.α., 2010):

$$T_i = \frac{N + 1 + 2\alpha}{i + \alpha} \Delta \quad (2.61)$$

όπου α κατάλληλη σταθερά. Η τιμή της σταθεράς α προκύπτει από την ανωτέρω σχέση για $i = 1$, καθώς είναι γνωστή η τιμή $T_1 = (n_{ecross} + 1)\Delta$. Συγκεκριμένα προκύπτει $\alpha = \frac{N - n_{ecross}}{n_{ecross} - 1}$ και τελικώς:

$$T_i = \frac{(N - 1)(n_{ecross} + 1)}{(n_{ecross} - 1)i + N - n_{ecross}} \Delta \quad (2.62)$$

Επισημαίνεται πως η προσομοίωση Monte Carlo πραγματοποιήθηκε με την παραδοχή πως οι μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή. Προφανώς όμως ισχύει και για οποιαδήποτε άλλη κατανομή που προκύπτει ως μονοτονικός μετασχηματισμός της κανονικής κατανομής (πρακτικώς για οποιαδήποτε συνήθη κατανομή), εφόσον βέβαια ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης αναφέρεται στην μετασχηματισμένη και όχι στην αρχική μεταβλητή (Κουτσογιάννης κ.α., 2010). Στην περίπτωση που ο συντελεστής μεταβλητότητας της αρχικής μεταβλητής δεν είναι ιδιαίτερα υψηλός*, ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης $r_{καν}$ της κανονικοποιημένης μεταβλητής δε διαφέρει πολύ από τον συντελεστή ετεροσυσχέτισης $r_{αρχ}$ της αρχικής μεταβλητής. Για παράδειγμα, στην λογαριθμοκανονική κατανομή η αναλυτική σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη εκφράζεται ως (Κουτσογιάννης κ.α., 2010):

$$r_{καν} = \frac{(1 + C_v^2)^{r_{αρχ}} - 1}{C_v^2} \quad (2.63)$$

η οποία για σχετικά μικρό συντελεστή μεταβλητότητας C_v δίνει $r_{καν} = r_{αρχ}$.

* Όπως παρατηρείται στις ετήσιες μέγιστες βροχοπτώσεις στις οποίες, ανεξαρτήτως χρονικής κλίμακας, ο συντελεστής μεταβλητότητας σπάνια ξεπερνά την τιμή 0.5

3 Στατιστική ανάλυση, ανεξάρτητων χρονικά, υδρολογικών δειγμάτων – Εφαρμογή κλασσικής στατιστικής

Ο ουσιαστικός σκοπός αυτής της εργασίας, όπως έχει ήδη αναφερθεί, επικεντρώνεται στη διερεύνηση, μέσω προσομοίωσης, της δυνατότητας ενοποίησης πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων καθώς και στη διερεύνηση της συνεπαγόμενης αύξησης της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων. Προκειμένου να καταστεί αυτό δυνατό, η μεθοδολογία στατιστικής ανάλυσης που υιοθετήθηκε παρουσιάζεται αναλυτικά στη συνέχεια.

Πρωταρχικός στόχος είναι η έκφραση του προβλήματος, δηλαδή η δημιουργία ενός στοχαστικού μοντέλου που θα αναπαριστά τη φύση των υπό εξέταση μεταβλητών με ένα σύνολο υποθέσεων για τη λειτουργία του συστήματος.

Έστω τυχαία στάσιμη μεταβλητή $X_i(t)$, η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή (ή κατανομή Gauss) με μέσο όρο μ_X και τυπική απόκλιση σ_X με $i = 1, 2, \dots, k$. Επισημαίνεται πως στη φάση αυτή γίνεται η παραδοχή πως η μεταβλητή $X_i(t)$, η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή, είναι μία ακολουθία n **ανεξάρτητων** τυχαίων μεταβλητών $X_i(t_1), X_i(t_2), \dots, X_i(t_n)$ με κοινή πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ (παραδοχή χρονικής ανεξαρτησίας - μηδενικός συντελεστής αυτοσυσχέτισης - IID*). Η συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής, για μία μεταβλητή X με μέσο όρο μ_X και τυπική απόκλιση σ_X , εκφράζεται ως (Κουτσογιάννης, 1997):

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx \quad (3.1)$$

και η αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ ως:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (3.2)$$

Η μεταβλητή $X_i(t)$ λοιπόν, αντιπροσωπεύει τις διαθέσιμες υδρολογικές χρονοσειρές από διαφορετικές θέσεις (έστω k) και έστω r_{ij} ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j . Η σχέση που συνδέει τις μεταβλητές του προβλήματος (πολυμεταβλητό πρόβλημα) εκφράζεται ως εξής:

* Independent Identically Distributed - IID

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}X_j(t) + V_i(t) \quad (3.3)$$

όπου a_{ij} , συντελεστής που εκφράζει την εξάρτηση του σταθμού i από το σταθμό j και $V_i(t)$, όρος που εκφράζει το λευκό θόρυβο, δηλαδή πρόκειται για ασυσχέτιστες μεταξύ τους μεταβλητές που ακολουθούν δεδομένη κατανομή (για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας κανονική).

Προκειμένου λοιπόν, να εκφραστεί το πρόβλημα της διερεύνησης της δυνατότητας ενοποίησης υδρολογικών δειγμάτων για αύξηση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων θα πρέπει καταρχάς να δημιουργηθούν υδρολογικές χρονοσειρές, οι οποίες θα αντιπροσωπεύουν τα υπό εξέταση υδρολογικά δείγματα. Οι χρονοσειρές αυτές θα αποτελούν πραγματοποιήσεις της τυχαίας μεταβλητής $X_i(t)$, όπως αυτή περιγράφηκε ανωτέρω. Για κάθε λοιπόν σταθμό i (έστω k στον αριθμό) δημιουργούνται 10,000 χρονοσειρές (10,000 πραγματοποιήσεις της ανέλιξης $X_i(t)$), λαμβάνοντας υπόψη τη μεταξύ τους συσχέτιση με εφαρμογή της σχέσης (3.3). Συγκεκριμένα, για το σταθμό $i = 1$ δημιουργούνται 10,000 τυχαίες χρονοσειρές $X_1(t)$ που ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_X = 400$ και τυπική απόκλιση $\sigma_X = 100$, μήκους $n = 50$. Για τους υπόλοιπους σταθμούς λοιπόν, οι αντίστοιχες 10,000 χρονοσειρές θα προκύψουν με εφαρμογή της σχέσης (3.3).

Ανακεφαλαιώνοντας τα δεδομένα*, οι παράμετροι προς προσδιορισμό καθώς και οι παραδοχές που έγιναν στα πλαίσια επίλυσης του ανωτέρω προβλήματος συνοψίζονται στα εξής:

➤ Παραδοχές

- ✓ Η ανέλιξη $X_i(t)$ ακολουθεί κανονική κατανομή
- ✓ Η ανέλιξη $X_i(t)$ είναι στάσιμη
- ✓ Η ανέλιξη $X_i(t)$ είναι ακολουθία n **ανεξάρτητων** τυχαίων μεταβλητών $X_i(t_1), X_i(t_2), \dots, X_i(t_n)$ με κοινή πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ (παραδοχή χρονικής ανεξαρτησίας - μηδενικός συντελεστής αυτοσυσχέτισης - IID)
- ✓ Οι λευκός θόρυβος $V_i(t)$ ακολουθεί κανονική κατανομή
- ✓ Ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης r_{ij} είναι κοινός για κάθε ζεύγος i, j

* «Δεδομένα», από την άποψη πως επελέγησαν οι τιμές τους από τη συγγραφέα για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας

➤ Δεδομένα

- ✓ Στατιστικά χαρακτηριστικά ανέλιξης $X_i(t)$, ήτοι $\mu_X = 400, \sigma_X = 100$
- ✓ Μήκος χρονοσειρών, $n = 50$
- ✓ Αριθμός σταθμών, $k = 2, 3, \dots, 10$
- ✓ Ακρίβεια - Αριθμός πραγματοποιήσεων ανέλιξης $X_i(t)$ ανά σταθμό, ακρίβεια = 10,000

➤ Παράμετροι προς προσδιορισμό

- ✓ Συντελεστές a_{ij}
- ✓ Στατιστικά χαρακτηριστικά λευκών θορύβων (μέση τιμή μ_{V_i} , τυπική απόκλιση σ_{V_i}) για τον προσδιορισμό των αντίστοιχων χρονοσειρών, οι οποίες θα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_{V_i} και τυπική απόκλιση σ_{V_i}

Οι διάφορες εκτιμήσεις που θα ακολουθήσουν θα πραγματοποιηθούν για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j . Συγκεκριμένα το βήμα μεταβολής του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} , οι οριακές τιμές του οποίου είναι μηδέν και ένα, θεωρήθηκε 0.05.

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών a_{ij} παρουσιάζεται ακολούθως η διαδικασία υπολογισμού για αριθμό σταθμών $k = 2$. Οι αντίστοιχες αποδείξεις για $k > 2$ παρατίθενται στο παράρτημα Α.

Για $k = 2$ λοιπόν, διερευνάται η ενοποίηση **δύο** δειγμάτων από διαφορετικές θέσεις, τα οποία εκφράζονται από τις εξής δύο ανελιξεις:

$$\begin{cases} X_1(t) \\ X_2(t) = a_{21}X_1(t) + V_2(t) \text{ (σχέση (3.3))} \end{cases} \quad (3.4)$$

Έστω μεταβλητές:

$$\begin{cases} Z_{X_1} = X_1(t) - \mu_X \\ Z_{X_2} = X_2(t) - \mu_X \\ E_{V_2} = V_2(t) - \mu_{V_2} \end{cases} \quad (3.5)$$

Είναι προφανές πως:

και
$$\stackrel{(3.5)}{\implies} \begin{cases} \mu_{Z_{X_1}} = \mu_{Z_{X_2}} = 0 \\ \mu_{E_{V_2}} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\stackrel{(3.5)}{\implies} \begin{cases} \sigma_{Z_{X_1}} = \sigma_{Z_{X_2}} = \sigma_X \\ \sigma_{E_{V_2}} = \sigma_{V_2} \end{cases}$$

Αφαιρώντας από την (3.4) με τις αντίστοιχες μέσες τιμές προκύπτει:

$$\begin{aligned} \stackrel{(3.4)}{\implies} \begin{cases} X_1(t) - \mu_X \\ X_2(t) - \mu_X = \alpha_{21}X_1(t) - \alpha_{21}\mu_X + V_2(t) - \mu_{V_2} \end{cases} & \stackrel{(3.5)}{\iff} \\ \stackrel{(3.5)}{\iff} \begin{cases} Z_{X_1} \\ Z_{X_2} = \alpha_{21}Z_{X_1} + E_{V_2} \end{cases} & \end{aligned} \quad (3.7)$$

Εν συνεχεία υπολογίζεται η ετεροσυνδιασπορά των ανεξίτηλων $X_1(t), X_2(t)$ με εφαρμογή της σχέσης (2.7), για υστέρηση $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} \stackrel{(2.7)}{\implies} Cov[X_1(t), X_2(t)] &= E[(X_1(t) - \mu_X)(X_2(t) - \mu_X)] \stackrel{(3.5)}{\iff} \\ &\stackrel{(3.5)}{\iff} Cov[X_1(t), X_2(t)] = E[Z_{X_1}, Z_{X_2}] \stackrel{(3.7)}{\iff} \\ &\stackrel{(3.7)}{\iff} Cov[X_1(t), X_2(t)] = E[Z_{X_1}(\alpha_{21}Z_{X_1} + E_{V_2})] \\ &\iff Cov[X_1(t), X_2(t)] = E[\alpha_{21}Z_{X_1}^2] + E[Z_{X_1}E_{V_2}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Δεδομένου πως οι μεταβλητές $X_1(t), V_2(t)$ είναι ασυσχέτιστες* ισχύει:

$$\begin{aligned} Cov[X_1(t), V_2(t)] &= 0 \stackrel{(2.7)}{\iff} E[(X_1(t) - \mu_X)(V_2(t) - \mu_{V_2})] = 0 \stackrel{(3.5)}{\iff} \\ &\stackrel{(3.5)}{\iff} E[Z_{X_1}E_{V_2}] = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Η σχέση (3.8) λοιπόν, γίνεται:

$$\begin{aligned} Cov[X_1(t), X_2(t)] &= E[\alpha_{21}Z_{X_1}^2] + E[Z_{X_1}E_{V_2}] \stackrel{(3.9)}{\iff} \\ &\stackrel{(3.9)}{\iff} Cov[X_1(t), X_2(t)] = E[\alpha_{21}Z_{X_1}^2] + 0 \iff \\ \iff Cov[X_1(t), X_2(t)] &= \alpha_{21}E[Z_{X_1}^2] \stackrel{E[Z_{X_1}^2]=E[(X_1(t)-\mu_X)^2]=\sigma_X^2}{\iff} \\ \stackrel{E[Z_{X_1}^2]=E[(X_1(t)-\mu_X)^2]=\sigma_X^2}{\iff} &Cov[X_1(t), X_2(t)] = \alpha_{21}\sigma_X^2 \iff \\ \iff \alpha_{21} &= \frac{Cov[X_1(t), X_2(t)]}{\sigma_X^2} \stackrel{(2.8)}{\iff} \\ &\stackrel{(2.8)}{\iff} \alpha_{21} = r_{21} = r \end{aligned} \quad (3.10)$$

Σε ό,τι αφορά στον προσδιορισμό των στατιστικών χαρακτηριστικών των λευκών θορύβων $V_i(t)$, η διαδικασία που ακολουθήθηκε παρατίθεται ακολούθως για αριθμό

* Όπως καταδεικνύει και η μορφή της σχέσης (3.4)

σταθμών $k = 2$, ενώ οι αντίστοιχες αποδείξεις για $k > 2$, όμοια με παραπάνω, παρατίθενται στο παράρτημα Α.

Με βάση την (3.4) λοιπόν, υπολογίζονται οι αντίστοιχες μέσες τιμές, ήτοι:

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{(3.4)}{\implies} \begin{cases} E[X_1(t)] = \mu_{X_1} \\ E[X_2(t)] = E[\alpha_{21}X_1(t)] + E[V_2(t)] \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{X_2} = \alpha_{21}\mu_{X_1} + \mu_{V_2} \end{cases} \xleftrightarrow{\mu_{X_1} = \mu_{X_2} = \mu_X} \\
 & \xleftrightarrow{\mu_{X_1} = \mu_{X_2} = \mu_X} \begin{cases} \mu_X \\ \mu_X = \alpha_{21}\mu_X + \mu_{V_2} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \mu_{V_2} = (1 - \alpha_{21})\mu_X
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Εν συνεχεία υπολογίζεται η αυτοσυνδιασπορά της ανέλιξης Z_{X_2} , με εφαρμογή της σχέσης (2.5) για $t_1 = t_2$ (πρόκειται ουσιαστικά για τη διασπορά της εν λόγω ανέλιξης):

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(2.5)}{\implies} Cov[Z_{X_2}] = Cov[Z_{X_2}Z_{X_2}] \\
& = E\left[(Z_{X_2} - \mu_{Z_{X_2}})(Z_{X_2} - \mu_{Z_{X_2}})\right] \stackrel{(3.6)}{\iff} \\
& \stackrel{(3.6)}{\iff} Cov[Z_{X_2}] = E[(Z_{X_2} - 0)(Z_{X_1} - 0)] = E[Z_{X_2}Z_{X_1}] \stackrel{(3.7)}{\iff} \\
& \stackrel{(3.7)}{\iff} Cov[Z_{X_2}] = E[Z_{X_2}(\alpha_{21}Z_{X_1} + E_{V_2})] \\
& \iff Cov[Z_{X_2}] = \alpha_{21}E[Z_{X_2}Z_{X_1}] + E[Z_{X_2}E_{V_2}] \stackrel{\substack{E[Z_{X_2}Z_{X_1}] = \sigma_{X_1X_2}, (3.8) \\ Cov[Z_{X_2}] = \sigma_X^2}}{\iff} \\
& \stackrel{\substack{E[Z_{X_2}Z_{X_1}] = \sigma_{X_1X_2}, (3.8) \\ Cov[Z_{X_2}] = \sigma_X^2}}{\iff} \sigma_X^2 = \alpha_{21}\sigma_{X_1X_2} + E[Z_{X_2}E_{V_2}] \stackrel{(3.7)}{\iff} \\
& \stackrel{(3.7)}{\iff} \sigma_X^2 = \alpha_{21}\sigma_{X_1X_2} + E[(\alpha_{21}Z_{X_1} + E_{V_2})E_{V_2}] \iff \tag{3.12} \\
& \iff \sigma_X^2 = \alpha_{21}\sigma_{X_1X_2} + \alpha_{21}E[Z_{X_1}E_{V_2}] + E[E_{V_2}^2] \stackrel{E[Z_{X_1}E_{V_2}] = 0, (3.9)}{\iff} \\
& \stackrel{E[Z_{X_1}E_{V_2}] = 0, (3.9)}{\iff} \sigma_X^2 = \alpha_{21}\sigma_{X_1X_2} + E[E_{V_2}^2] \stackrel{E[E_{V_2}^2] = \sigma_{V_2}^2}{\iff} \\
& \stackrel{E[E_{V_2}^2] = \sigma_{V_2}^2}{\iff} \sigma_X^2 = \alpha_{21}\sigma_{X_1X_2} + \sigma_{V_2}^2 \stackrel{\epsilon\pi i \frac{1}{\sigma_X^2}}{\iff} \\
& \stackrel{\epsilon\pi i \frac{1}{\sigma_X^2}}{\iff} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = \alpha_{21} \frac{\sigma_{X_1X_2}}{\sigma_X^2} + \frac{\sigma_{V_2}^2}{\sigma_X^2} \stackrel{(2.8)}{\iff} \\
& \stackrel{(2.8)}{\iff} 1 = \alpha_{21} r_{12} + \frac{\sigma_{V_2}^2}{\sigma_X^2} r_{12} = r \\
& \stackrel{r_{12} = r}{\iff} \sigma_{V_2} = \sigma_X \sqrt{1 - \alpha_{21} r}
\end{aligned}$$

Με βάση τις σχέσεις (3.11) και (3.12) λοιπόν, προσδιορίζεται η μέση τιμή μ_{V_2} και η τυπική απόκλιση σ_{V_2} , αντίστοιχα του λευκού θορύβου $V_2(t)$, για αριθμό σταθμών $k = 2$.

Με τον προσδιορισμό των συντελεστών a_{ij} καθώς και των στατιστικών χαρακτηριστικών των λευκών θορύβων $V_i(t)$, καθίσταται πλέον δυνατή η διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo για τη δημιουργία υδρολογικών χρονοσειρών, οι οποίες θα αντιπροσωπεύουν τα υπό εξέταση υδρολογικά δείγματα (εφαρμογή σχέσης (3.3)).

Επισημαίνεται πως δεδομένου του υπολογιστικού όγκου των αναλύσεων* (10,000 πραγματοποιήσεις της ανέλιξης $X_i(t)$ για κάθε σταθμό), η χρήση του υπολογιστικού

* Ο αριθμός των πραγματοποιήσεων της ανέλιξης $X_i(t)$, ο οποίος εκφράζει την ακρίβεια των αναλύσεων, επιβάλλεται να είναι αυτής της τάξης μεγέθους για βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων.

φύλλου Excel για την πραγματοποίηση της προσομοίωσης καθίσταται ιδιαίτερα δυσχερής. Επελέγη λοιπόν, για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας η στατιστική ανάλυση να πραγματοποιηθεί σε υπολογιστικό περιβάλλον γλώσσας προγραμματισμού Matlab, με την ανάπτυξη του αντίστοιχου κώδικα Η/Υ.

Όπως προαναφέρθηκε, ο ουσιαστικός στόχος αυτής της εργασίας είναι η διερεύνηση της δυνατότητας επαύξησης της υδρολογικής πληροφορίας με ενοποίηση υδρολογικών δειγμάτων από διαφορετικές θέσεις, η οποία εκφράζεται σε όρους ισοδύναμου μήκους του ενοποιημένου δείγματος. Για την επίτευξη του ανωτέρω στόχου ακολουθεί στατιστική ανάλυση των υδρολογικών χρονοσειρών που δημιουργήθηκαν κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης με σκοπό την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών. Η εκτίμηση αυτή θα γίνει με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής, τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς ενώ παράλληλα θα πραγματοποιηθεί και εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του δείγματος.

Ακολουθεί περιγραφή των ανωτέρω προσεγγίσεων που αφορούν στην εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού στοχαστικά ανεξάρτητων σταθμών του ενοποιημένου δείγματος με σκοπό τη διερεύνηση της επαύξησης της υδρολογικής πληροφορίας.

3.1 Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας - Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της μέσης τιμής

Σε ό,τι αφορά στην προσέγγιση με προσομοίωση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών του ενοποιημένου δείγματος με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής, η διαδικασία που ακολουθήθηκε συνοψίζεται ως εξής:

Όπως προαναφέρθηκε, κάθε επιμέρους δείγμα αντιπροσωπεύεται από 10,000 πραγματοποιήσεις της ανέλιξης $X_i(t)$. Για κάθε επιμέρους δείγμα (k στον αριθμό) και για κάθε πραγματοποίηση αυτού λοιπόν, εκτιμάται η μέση τιμή με χρήση της αντίστοιχης εκτιμήτριας*, με εφαρμογή της σχέσης (2.10) (10,000 μέσες τιμές για κάθε σταθμό). Ακολούθως προσδιορίζεται για κάθε σταθμό η διασπορά των 10,000 εκτιμήσεων της μέσης τιμής (Σχέση (2.12) για 10,000 τιμές). Σύμφωνα με την κλασσική στατιστική, η θεωρητική τιμή της ανωτέρω εκτίμησης προσεγγίζεται από την ακόλουθη εκτιμήτρια:

* Εκτιμήτρια δειγματικής μέσης τιμής – αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια

$$Var[\overline{X_i(t)}] = \frac{Var[X_i(t)]}{n} = \frac{\sigma_X^2}{n} \quad (3.13)$$

Στην περίπτωση της χρονικής ανεξαρτησίας των υδρολογικών δειγμάτων (μηδενική αυτοσυσχέτιση για κάθε σταθμό) είναι προφανές πως η εκτίμηση της προσομοίωσης σε ό,τι αφορά στην εκτίμηση της διασποράς της μέσης τιμής θα ταυτίζεται με τη θεωρητική τιμή της (Σχέση (3.13)). Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, το ισοδύναμο μήκος κάθε σταθμού, το οποίο εκφράζει την αντίστοιχη υδρολογική πληροφορία, ταυτίζεται με το πραγματικό μήκος του δείγματος.

Ακολουθεί ενοποίηση των διαθέσιμων υδρολογικών δειγμάτων μήκους n και σχηματισμός ενός ενιαίου δείγματος μήκους kn , όπου k ο αριθμός των επιμέρους δειγμάτων. Για το ενοποιημένο δείγμα (για το οποίο είναι διαθέσιμες 10,000 χρονοσειρές, των οποίων εκτιμάται η μέση τιμή) προσδιορίζεται ομοίως με παραπάνω η διασπορά των 10,000 εκτιμήσεων της μέσης τιμής. Σύμφωνα με την κλασσική στατιστική, η αντίστοιχη θεωρητική τιμή εκφράζεται ως (Σχέση (3.13)):

$$Var[\overline{Z_k(t)}] = \frac{Var[Z_k(t)]}{kn} = \frac{\sigma_Z^2}{kn} = \frac{\sigma^2}{kn}, \quad (3.14)$$

όπου $Z_k(t)$ μεταβλητή που εκφράζει το ενοποιημένο δείγμα για $k = 2 \div 10$.

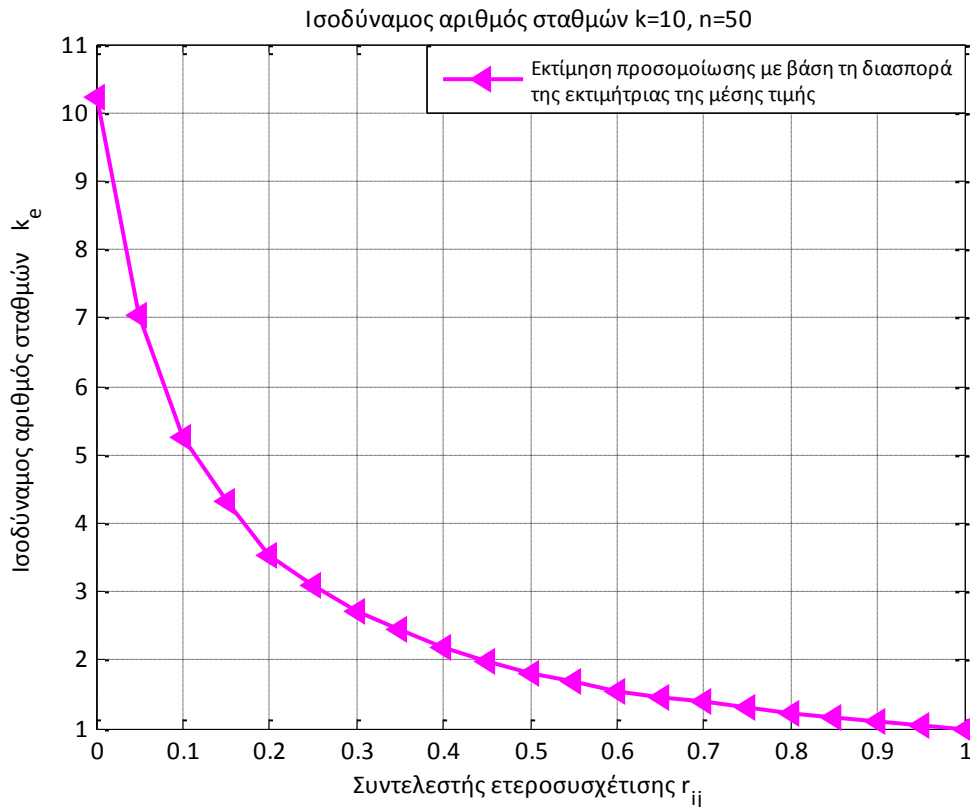
Στην περίπτωση που οι επιμέρους σταθμοί είναι ασυσχέτιστοι* ($r_{ij} = 0$) είναι δυνατή η ενοποίηση των επιμέρους δειγμάτων και η δημιουργία ενός ενοποιημένου πλέον δείγματος μήκους $n_{cross} = kn$ (εδάφιο 2.2, σχέση (2.33)). Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, η εκτίμηση με προσομοίωση της διασποράς της εκτιμήτριας της μέσης τιμής ταυτίζεται με τη θεωρητική της τιμή (σχέση (3.14)). Ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των επιμέρους δειγμάτων όμως είναι πολύ πιθανό να είναι διάφορος του μηδενός. Η διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής του ενοποιημένου δείγματος λοιπόν, για $r_{ij} \neq 0$, υποεκτιμάται από την αντίστοιχη θεωρητική της προσέγγιση, όπως αποδεικνύουν και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης. Η υποεκτίμηση αυτή, η οποία υποδηλώνει μείωση της παρεχόμενης από τη μεταβλητή $Z_k(t)$, υδρολογικής πληροφορίας, μπορεί να εκφραστεί σε όρους ισοδύναμου μήκους (στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων) n_{cross} , ως εξής:

* η οποία μεταπίπτει στην περίπτωση των στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων

$$\begin{aligned} \stackrel{(3.14)}{\implies} \text{Var}[\overline{Z_k(t)}]_{simulation} &= \frac{\sigma^2}{n_{cross}} \implies \\ \implies n_{cross} &= \frac{\sigma^2}{\text{Var}[\overline{Z_k(t)}]_{simulation}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ο ισοδύναμος λοιπόν αριθμός, στοχαστικά ανεξάρτητων, δειγμάτων k_e που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα προσδιορίζεται διαιρώντας το ισοδύναμο μήκος του ενοποιημένου δείγματος n_{cross} με το μήκος του κάθε επιμέρους σταθμού n . Αφού λοιπόν προσδιορίστηκε για το ενοποιημένο δείγμα τρόπος έκφρασης του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e (Σχέση (3.15)), διενεργείται προσομοίωση Monte Carlo για τη γένεση υδρολογικών δειγμάτων και εκτιμάται κάθε φορά ο ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων, για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j . Συγκεκριμένα το βήμα μεταβολής του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} , οι οριακές τιμές του οποίου είναι μηδέν και ένα, θεωρήθηκε 0.05.

Ακολουθεί σχηματική παρουσίαση του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e , που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j και για αριθμό σταθμών $k = 10$, όπως αυτός προέκυψε κατά τη διενέργεια προσομοιώσεων Monte Carlo (Σχήμα 3.1). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Β.



Σχήμα 3.1: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j

3.2 Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας – Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της δειγματικής διασποράς

Τα παραπάνω βασίζουν τις εκτιμήσεις στη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής του ενοποιημένου δείγματος. Η ίδια προσέγγιση ακολουθείται και σε ό,τι αφορά στην εκτίμηση της επαύξησης της υδρολογικής πληροφορίας με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς του ενοποιημένου δείγματος. Κατά τα γνωστά, για κάθε επιμέρους δείγμα και για κάθε πραγματοποίηση αυτού εκτιμάται η δειγματική διασπορά με χρήση της αντίστοιχης εκτιμήτριας, με εφαρμογή της σχέσης (2.12) (10,000 μέσες διασπορές για κάθε σταθμό). Ακολούθως προσδιορίζεται για κάθε σταθμό η διασπορά των 10,000 εκτιμήσεων της δειγματικής διασποράς (Σχέση (2.12) για 10,000 τιμές). Σύμφωνα με την κλασική στατιστική η θεωρητική προσέγγιση της ανωτέρω εκτίμησης εκφράζεται ως:

$$Var[S_X^{*2}] = \frac{2\sigma_X^4}{(n-1)} \quad (3.16)$$

Όπως και κατά την εκτίμηση με βάση τη διασπορά της μέσης τιμής, στην περίπτωση της χρονικής ανεξαρτησίας των υδρολογικών δειγμάτων η εκτίμηση με προσομοίωση της διασποράς της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς θα ταυτίζεται με την αντίστοιχη θεωρητική της τιμή (Σχέση (3.16)). Συνακόλουθα το ισοδύναμο μήκος κάθε σταθμού, το οποίο εκφράζει την αντίστοιχη υδρολογική πληροφορία, ταυτίζεται με το πραγματικό μήκος του δείγματος.

Εν συνεχεία, για το ενοποιημένο πλέον δείγμα, για το οποίο είναι διαθέσιμες 10,000 χρονοσειρές, εκτιμώνται καταρχάς οι διασπορές των χρονοσειρών αυτών με εφαρμογή της σχέσης (3.16). Ακολουθεί κατά τα γνωστά εκτίμηση της διασποράς των 10,000 προσεγγίσεων της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς. Σύμφωνα με την κλασική στατιστική η θεωρητική τιμή της ανωτέρω εκτίμησης, για μήκος δείγματος kn , εκφράζεται ως (Σχέση (3.16)):

$$Var[S_{Z_k}^{*2}] = \frac{2\sigma_Z^4}{kn - 1} = \frac{2\sigma^4}{kn - 1} \quad (3.17)$$

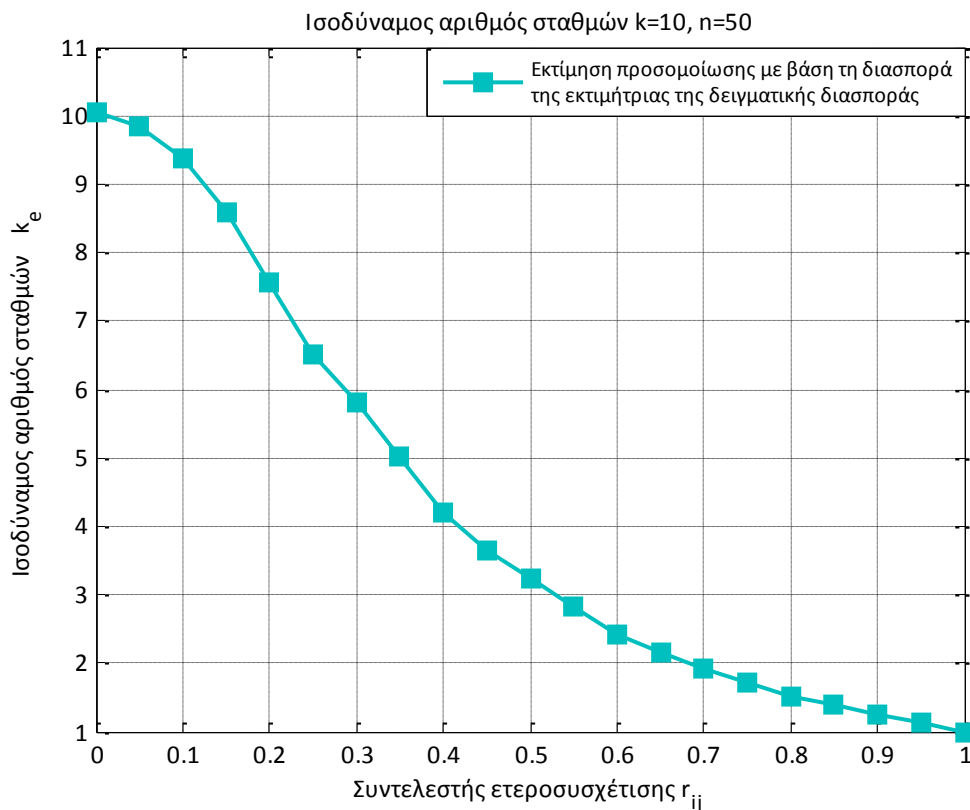
όπου $Z_k(t)$ μεταβλητή που εκφράζει το ενοποιημένο δείγμα για $k = 2 \div 10$.

Όπως και στην περίπτωση εκτίμησης της διασποράς της εκτιμήτριας της μέσης τιμής του ενοποιημένου δείγματος, για $r_{ij} \neq 0$ η εκτίμηση της διασποράς της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς με εφαρμογή της (3.17) υποεκτιμά την πραγματική τιμή της όπως αυτή προσεγγίζεται με τη διενέργεια προσομοίωσης. Η υποεκτίμηση αυτή μπορεί να εκφραστεί σε όρους ισοδύναμου αριθμού (στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων) k_e , με ανάλογο τρόπο με πριν, ως εξής:

$$\begin{aligned} \stackrel{(3.17)}{\implies} Var[S_{Z_k}^{*2}]_{simulation} &= \frac{2\sigma^4}{k_e n - 1} \implies \\ \implies k_e &= \frac{2\sigma^4}{Var[S_{Z_k}^{*2}]_{simulation} n} + \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Με τη διενέργεια προσομοίωσης λοιπόν, για τη γένεση υδρολογικών δειγμάτων και για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , εκτιμώνται κάθε φορά οι αντίστοιχες τιμές του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e , ο οποίος χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα.

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, σε ό,τι αφορά στην εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j και για αριθμό σταθμών $k = 10$, παρουσιάζονται γραφικά στο ακόλουθο σχήμα (Σχήμα 3.2). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Β.



Σχήμα 3.2: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j

3.3 Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς

Στο σημείο αυτό, στα πλαίσια κάποιων πρωταρχικών παρατηρήσεων* που έγιναν από τους Κουτσογιάννη κ.α., 2010, ακολουθείται μία διαφορετική προσέγγιση για την εκτίμηση, με προσομοίωση, του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος. Η εκτίμηση αυτή τη φορά θα γίνει ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος. Η διαδικασία λοιπόν, που ακολουθήθηκε συνοψίζεται ως εξής.

* αναφορά στις οποίες γίνεται στο εδάφιο 2.3.2

Για κάθε επιμέρους δείγμα (k στον αριθμό) και για κάθε πραγματοποίηση αυτού, εκτιμάται η αντίστοιχη μέγιστη και ελάχιστη τιμή (10,000 μέγιστες και 10,000 ελάχιστες τιμές για κάθε σταθμό).

Για κάθε σταθμό και για κάθε μία από τις 10,000 μέγιστες και 10,000 ελάχιστες τιμές εκτιμώνται οι αντίστοιχες πιθανότητες μη υπέρβασης ($F_{X_{imax}}$ και $F_{X_{imin}}$, αντίστοιχα) με βάση την κανονική αθροιστική κατανομή, η συνάρτηση της οποίας εκφράζεται από τη σχέση (3.1), με μέσο όρο $\mu_X = 400$ και τυπική απόκλιση $\sigma_X = 100$. Ακολούθως προσδιορίζεται για κάθε σταθμό η μέση τιμή των 10,000 εκτιμήσεων της πιθανότητας μη υπέρβασης, τόσο για τις μέγιστες, όσο και για τις ελάχιστες τιμές. Η εκτίμηση με προσομοίωση λοιπόν, για κάθε σταθμό της περιόδου επαναφοράς* της μέγιστης τιμής γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Για συμμετρική κατανομή } F_{X_{imin}}=F_{1X_{imax}}} \left\{ \begin{aligned} T_{i,simulationa} &= \frac{1}{F_{1X_{imax}}} = \frac{1}{1 - [F_{X_{imax}}]} \\ T_{i,simulationb} &= \frac{1}{F_{1X_{imax}}} = \frac{1}{[F_{X_{imin}}]} \end{aligned} \right. \quad (3.19) \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} T_{i,simulation} &= \frac{T_{i,simulationa} + T_{i,simulationb}}{2} \\ \mu E[T_{i,simulation}] &= \frac{\sum_{i=1}^k T_{i,simulation}}{k} \end{aligned} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{όπου} \\ F_X, F_{1X} \text{ οι πιθανότητες υπέρβασης} \\ \text{και μη υπέρβασης, αντίστοιχα} \\ T_{i,simulationa} \text{ η εκτίμηση της περιόδου επαναφοράς της} \\ \text{μέγιστης τιμής του δείγματος } i, \text{ με βάση τις μέγιστες τιμές} \\ T_{i,simulationb} \text{ η εκτίμηση της περιόδου επαναφοράς της} \\ \text{μέγιστης τιμής του δείγματος } i, \text{ με βάση τις ελάχιστες τιμές} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Παράλληλα, για δείγμα μεγέθους n η εμπειρική περίοδος επαναφοράς της μέγιστης τιμής του δείγματος μπορεί να εκφραστεί ως εξής (Σχέση (2.53)):

$$T_{iexpected} = n + 1 \quad (3.20)$$

Στην περίπτωση της χρονικής ανεξαρτησίας των υδρολογικών δειγμάτων είναι προφανές πως η ανωτέρω εκτίμηση πρέπει να ταυτίζεται με την αντίστοιχη εκτίμηση με προσομοίωση (Σχέση (3.19)). Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, το ισοδύναμο μήκος κάθε σταθμού, το οποίο εκφράζει την αντίστοιχη υδρολογική πληροφορία, ταυτίζεται με το πραγματικό μήκος του δείγματος.

* $T = \frac{1}{F_1} = \frac{1}{1-F}$ όπου F_1, F οι πιθανότητες υπέρβασης και μη υπέρβασης αντίστοιχα (Κουτσογιάννης, 1997)

Εν συνεχεία για το ενοποιημένο πλέον δείγμα, για το οποίο είναι διαθέσιμες 10,000 χρονοσειρές, εκτιμώνται καταρχάς οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές των χρονοσειρών αυτών. Ακολουθεί κατά τα γνωστά εκτίμηση των πιθανοτήτων μη υπέρβασης των 10,000 προσεγγίσεων της μέγιστης και των 10,000 προσεγγίσεων της ελάχιστης τιμής ($F_{Z_{kmax}}$ και $F_{Z_{kmin}}$, αντίστοιχα) και εκτίμηση της μέσης τιμής αυτών.

Η εκτίμηση με προσομοίωση λοιπόν της περιόδου επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος γίνεται ως εξής:

$$\text{Για συμμετρική κατανομή } F_{Z_{kmin}} = F_{1Z_{kmax}} \rightarrow \begin{cases} T_{ksimulationa} = \frac{1}{F_{1Z_{kmax}}} = \frac{1}{1 - [F_{Z_{kmax}}]} \\ T_{ksimulationb} = \frac{1}{F_{1Z_{kmax}}} = \frac{1}{[F_{Z_{kmin}}]} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$T_{ksimulation} = \frac{T_{ksimulationa} + T_{ksimulationb}}{2}$$

όπου $\left\{ \begin{array}{l} Z_k \text{ μεταβλητή που εκφράζει το ενοποιημένο δείγμα για } k = 2 \div 10 \\ F_{Z_k}, F_{1Z_k} \text{ οι πιθανότητες μη υπέρβασης} \\ \text{και υπέρβασης, αντίστοιχα} \\ T_{ksimulationa} \text{ η εκτίμηση της περιόδου επαναφοράς της} \\ \text{μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος,} \\ \text{με βάση τις μέγιστες τιμές} \\ T_{ksimulationb} \text{ η εκτίμηση της περιόδου επαναφοράς της} \\ \text{μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος,} \\ \text{με βάση τις ελάχιστες τιμές} \end{array} \right.$

Με βάση τη σχέση (3.20) η εμπειρική περίοδος επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου πλέον δείγματος, για μήκος δείγματος kn μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

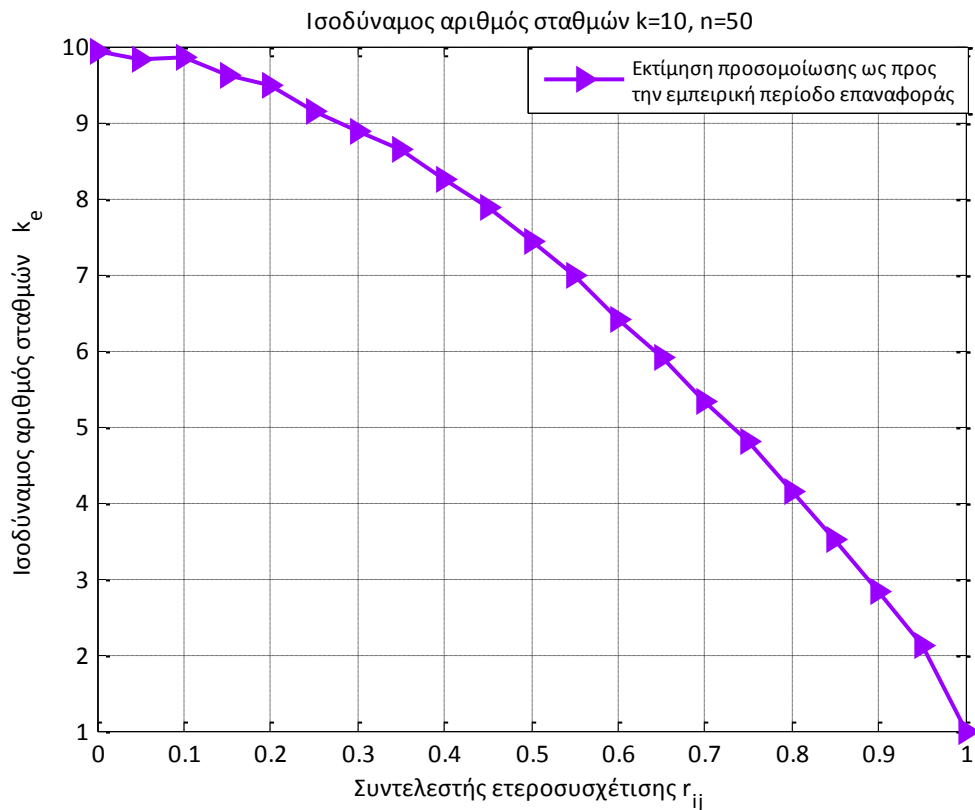
$$T_{kexpected} = kn + 1 \quad (3.22)$$

Η εκτίμηση της περιόδου επαναφοράς του ενοποιημένου δείγματος με εφαρμογή της (3.22) υπερεκτιμά της πραγματική της τιμή, όπως αυτή προσεγγίζεται με προσομοίωση για $r_{ij} \neq 0$. Συνεπώς για $r_{ij} \neq 0$, η πληροφορία που χαρακτηρίζει τη μεταβλητή $Z_k(t)$ αντιστοιχεί σε μικρότερο μήκος δείγματος $n_{cross} < kn$. Ο ισοδύναμος λοιπόν, αριθμός δειγμάτων k_e , ο οποίος χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα, εκτιμάται ως εξής:

$$\begin{aligned} \stackrel{(3.22)}{\implies} T_{ksimulation} &= k_e n + 1 \implies \\ \implies k_e &= \frac{T_{ksimulation}}{n} - \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Κατά τα γνωστά, με τη διενέργεια προσομοίωσης για τη γένεση υδρολογικών δειγμάτων και για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών

i, j , εκτιμώνται κάθε φορά οι αντίστοιχες τιμές του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e (σχέση (3.23)). Ακολουθεί σχηματική παρουσίαση (Σχήμα 3.3) του k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , για $k = 10$. Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Β.



Σχήμα 3.3: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j

Επισημαίνεται ωστόσο στο σημείο αυτό, πως η παραδοχή της χρονικής ανεξαρτησίας των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων, στην οποία στηρίχτηκε η διαδικασία της προσομοίωσης που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο, σε καμία περίπτωση δεν προσιδιάζει στη μακροπρόθεσμη εμμονή που χαρακτηρίζει τις υδρολογικές χρονοσειρές.

4 Στατιστική ανάλυση, εξαρτημένων χρονικά, υδρολογικών δειγμάτων

Η παραδοχή της χρονικής ανεξαρτησίας της στοχαστικής ανέλιξης $X_i(t)$, όπως προαναφέρθηκε, αποτυγχάνει να αποδώσει τόσο τη βραχυπρόθεσμη (short-term persistence - STP), όσο και τη μακροπρόθεσμη εμμονή (long-term persistence - LTP) που χαρακτηρίζει τις υδρολογικές χρονοσειρές.

Αρκετές προσεγγίσεις έχουν προταθεί με στόχο την αναπαραγωγή του στοχαστικού χαρακτήρα των υδρολογικών διαδικασιών (κάποιες από τις οποίες παρουσιάζονται στο Εδάφιο 2.1). Για την έκφραση λοιπόν, του προβλήματος της διερεύνησης της δυνατότητας αξιοποίησης πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων (πολυμεταβλητό πρόβλημα), με τη δημιουργία του αντίστοιχου στοχαστικού μοντέλου, επελέγη να υιοθετηθεί καταρχάς η «Μαρκοβιανή» προσέγγιση. Η «Μαρκοβιανή» προσέγγιση όμως, παρόλο που αποδίδει τη βραχυπρόθεσμη μνήμη των ιστορικών χρονοσειρών, αποτυγχάνει να αποδώσει τη μακροπρόθεσμη εμμονή των υδρολογικών διαδικασιών, καθώς οι διατηρούμενες από το μοντέλο αυτοσυσχετίσεις φθίνουν ταχύτατα για χρονικά βήματα μετατόπισης μεγαλύτερα της τάξης του μοντέλου (Εδάφιο 2.1.3).

Αρκετοί αλγόριθμοι έχουν προταθεί για την αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής κατά τη γένεση συνθετικών χρονοσειρών, όπως το σχήμα του συμμετρικού κυλιόμενου μέσου (symmetric moving average - SMA), αλγόριθμοι που στηρίζονται στη λογική τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας καθώς και αλγόριθμοι που στηρίζονται σε μεθόδους διαδοχικού επιμερισμού.

Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας κατά τη στατιστική ανάλυση, εξαρτημένων χρονικά, υδρολογικών χρονοσειρών θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος παραγωγής κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου ως άθροισμα τριών ανεξίτηλων $AR(1)$, ο οποίος στηρίζεται στη λογική τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας.

Ακολουθεί παρουσίαση της στατιστικής ανάλυσης που πραγματοποιήθηκε, εξαρτημένων χρονικά, υδρολογικών δειγμάτων με την υιοθέτηση των δύο ανωτέρων προσεγγίσεων για την έκφραση της στοχαστικής φύσης των υδρολογικών δειγμάτων.

4.1 Μαρκοβιανή προσέγγιση

Έστω λοιπόν, τυχαία στάσιμη μεταβλητή $X_i(t)$, η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή (ή κατανομή Gauss) με μέσο όρο μ_X και τυπική απόκλιση σ_X με $i = 1, 2, \dots, k$. Η μεταβλητή αυτή αντιπροσωπεύει τις διαθέσιμες υδρολογικές χρονοσειρές από διαφορετικές θέσεις (k στον αριθμό) και έστω r_{ij} ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j (Για $i = 1, 2, \dots, k \rightarrow j = 1, 2, \dots, i$ με $k = 2 \div 10$). Σύμφωνα με τη «Μαρκοβιανή» προσέγγιση η διατύπωση του αντίστοιχου πολυμεταβλητού μοντέλου - Στάσιμο μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης τάξης 1 (AR(1)) - είναι η εξής (Κουτσογιάννης, 2007):

$$X^t = aX^{t-1} + bV^t$$

ή

$$X_i^t = \sum_{j=1}^i a_{ij}X_j^{t-1} + \sum_{j=1}^i b_{ij}V_j^t \quad (4.1)$$

όπου:

t δείκτης που συμβολίζει τη χρονική θέση

X^t διάνυσμα k προς γέννηση στοχαστικών μεταβλητών της περιόδου t , εξαρτημένων μεταξύ τους και με τις αντίστοιχες μεταβλητές προηγούμενων περιόδων

V^t διάνυσμα k βοηθητικών τυχαίων μεταβλητών της περιόδου t , ανεξάρτητων μεταξύ τους και από τις μεταβλητές X και V προηγούμενων περιόδων και

a, b μητρώα παραμέτρων μεγέθους $k \times k$, ήτοι:

$$X^t = \begin{bmatrix} X_1^t \\ X_2^t \\ \vdots \\ X_k^t \end{bmatrix}, V^t = \begin{bmatrix} V_1^t \\ V_2^t \\ \vdots \\ V_k^t \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Συνεπώς αν είναι γνωστό το παρόν, το μέλλον δεν εξαρτάται από το παρελθόν αλλά μόνο από το παρόν. Επισημαίνεται πως στο ανωτέρω μοντέλο διατηρείται το ελάχιστο

σύνολο ουσιωδών στατιστικών παραμέτρων που περιλαμβάνει τις ακόλουθες κατηγορίες (Κουτσογιάννης, 2007):

- Παράμετροι των περιθώριων συναρτήσεων κατανομής κάθε μεταβλητής
 - ✓ Μέσες τιμές των μεταβλητών
 - ✓ Διασπορές των μεταβλητών
 - ✓ Συντελεστές ασυμμετρίας των μεταβλητών (και, κατά συνέπεια, τρίτες ροπές)
- Παράμετροι των από κοινού συναρτήσεων κατανομής των μεταβλητών
 - ✓ Συντελεστές ετεροσυσχέτισης με μηδενικό χρονικό βήμα μεταξύ μεταβλητών διαφορετικής θέσης
 - ✓ Συντελεστές αυτοσυσχέτισης με μοναδιαίο χρονικό βήμα μεταξύ μεταβλητών της ίδιας θέσης – Περίπτωση επίλυσης με θεώρηση διαγώνιου μητρώου a
 - ✓ Συντελεστές αυτοσυσχέτισης με μοναδιαίο χρονικό βήμα μεταξύ καθεμιάς μεταβλητής και όλων των άλλων μεταβλητών – Περίπτωση επίλυσης με θεώρηση πλήρους μητρώου a

Προκειμένου λοιπόν, να εκφραστεί το πρόβλημα της διερεύνησης της δυνατότητας ενοποίησης υδρολογικών δειγμάτων για αύξηση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων θα πρέπει καταρχάς να δημιουργηθούν υδρολογικές χρονοσειρές, οι οποίες θα αντιπροσωπεύουν τα υπό εξέταση υδρολογικά δείγματα. Οι χρονοσειρές αυτές θα αποτελούν πραγματοποιήσεις της τυχαίας μεταβλητής $X_i(t)$, όπως αυτή περιγράφηκε ανωτέρω («Μαρκοβιανή προσέγγιση»). Για κάθε λοιπόν σταθμό i (k στον αριθμό) δημιουργούνται 10,000 χρονοσειρές (10,000 πραγματοποιήσεις της ανέλιξης $X_i(t)$), λαμβάνοντας υπόψη τόσο τη μεταξύ τους συσχέτιση, όσο και τη δομή αυτοσυσχέτισης του κάθε σταθμού με την εφαρμογή της σχέσης (3.3).

Ανακεφαλαιώνοντας τα δεδομένα*, οι παράμετροι προς προσδιορισμό καθώς και οι παραδοχές που έγιναν στα πλαίσια επίλυσης του ανωτέρω προβλήματος συνοψίζονται στα εξής:

- Παραδοχές
 - ✓ Η ανέλιξη $X_i(t)$ ακολουθεί κανονική κατανομή
 - ✓ Η ανέλιξη $X_i(t)$ είναι στάσιμη

* «Δεδομένα», από την άποψη πως επελέγησαν οι τιμές τους από τη συγγραφέα για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας

- ✓ Η δομή της αυτοσυσχέτισης της ανέλιξης $X_i(t)$ εκφράζεται με βάση τη «Μαρκοβιανή» προσέγγιση
- ✓ Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1 ρ_1 , είναι ίδιος για όλες τις θέσεις ενδιαφέροντος (ομογενές πεδίο)
- ✓ Οι λευκός θόρυβος $V_i(t)$ ακολουθεί κανονική κατανομή
- ✓ Ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης r_{ij} είναι κοινός για κάθε ζεύγος i, j (ομογενές πεδίο)

➤ Δεδομένα

- ✓ Στατιστικά χαρακτηριστικά ανέλιξης $X_i(t)$, ήτοι $\mu_X = 400$, $\sigma_X = 100$
- ✓ Μήκος χρονοσειρών, $n = 50$
- ✓ Αριθμός σταθμών, $k = 2, 3, \dots, 10$
- ✓ Ακρίβεια – Αριθμός πραγματοποιήσεων ανέλιξης $X_i(t)$ ανά σταθμό, ακρίβεια = 10,000

➤ Παράμετροι προς προσδιορισμό

- ✓ Μητρώο παραμέτρων a_{ij}
- ✓ Μητρώο παραμέτρων b_{ij}
- ✓ Μέση τιμή λευκών θορύβων $\mu_{V_i}^*$, για τον προσδιορισμό των αντίστοιχων χρονοσειρών, οι οποίες θα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_{V_i} και τυπική απόκλιση $\sigma_{V_i} = 1$

Οι διάφορες εκτιμήσεις που θα ακολουθήσουν θα πραγματοποιηθούν για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j . Συγκεκριμένα το βήμα μεταβολής του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} , οι οριακές τιμές του οποίου είναι μηδέν και ένα, θεωρήθηκε 0.05. Σε ό,τι αφορά στο συντελεστή αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1 ρ_1 , οποίος εκφράζει την αυτοσυσχέτιση της ανέλιξης $X_i(t)$, οι εκτιμήσεις θα γίνουν για διάφορες τιμές αυτού καθώς είναι προφανές πως η «ένταση» της αυτοσυσχέτισης των χρονοσειρών θα επηρεάζει και την αντίστοιχη υδρολογική πληροφορία τις χαρακτηρίζει. Συγκεκριμένα εξετάστηκαν, σε ό,τι αφορά στο συντελεστή αυτοσυσχέτισης, οι τιμές

* Η παράμετρος b_{ij} εισήχθη με σκοπό τη χρήση του λευκού θορύβου με τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα, $\sigma_{V_i} = 1$

$\rho_1 = 0.2, 0.4, 0.6$ και 0.8 . Οι οριακές τιμές αναφέρονται στις περιπτώσεις χρονικά ασυσχέτιστων* και ισχυρώς χρονικά συσχετισμένων† χρονοσειρών, αντίστοιχα.

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών αυτοσυσχέτισης a_{ij} , κατόπιν απλών αλγεβρικών υπολογισμών, προκύπτει η σχέση (Κουτσογιάννης, 2007):

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Πλήρες μητρώο παραμέτρων}} a_{ij} &= \text{Cov}[X_i^t, X_j^{t-1}] \{ \text{Cov}[X_i^{t-1}, X_j^{t-1}] \}^{-1} \\ &\xrightarrow{\text{Διαγώνιο μητρώο παραμέτρων } i=j} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$a_{ij} = \text{diag}(\text{Cov}[X_1^t, X_1^{t-1}]/\text{Var}[X_1^{t-1}], \dots, \text{Cov}[X_k^t, X_k^{t-1}]/\text{Var}[X_k^{t-1}])$$

Για τις ανάγκες τις παρούσας εργασίας επελέγη, για τον προσδιορισμό των συντελεστών a_{ij} , η εναλλακτική απλουστευμένη περίπτωση του διαγώνιου μητρώου παραμέτρων (Σχέση (4.3)). Επισημαίνεται πως για στάσιμο μοντέλο AR(1), οι παραπάνω εξισώσεις εφαρμόζονται κατά αναλογία μία μόνο φορά, δεδομένου ότι οι παράμετροι παραμένουν σταθερές. Στην περίπτωση που εξετάζουμε (εναλλακτική απλουστευμένη περίπτωση διαγώνιου μητρώου) $a_{ij} = a_{11} = a_{22} = \dots = a_{kk} = \text{Cov}[X_i^t, X_i^{t-1}]/\text{Var}[X_i^{t-1}] = \rho_1$.

Σε ό,τι αφορά στον προσδιορισμό του μητρώου παραμέτρων b_{ij} , ο υπολογισμός του έγκειται στον υπολογισμό του γινομένου $c = b_{ij}(b_{ij})^T$, όπου $(b_{ij})^T$ το ανάστροφο του μητρώου b_{ij} . Το γινόμενο λοιπόν, $b_{ij}(b_{ij})^T$ εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση (Κουτσογιάννης, 2007):

$$b_{ij}(b_{ij})^T = \text{Cov}[X_i^t, X_j^t] - a_{ij} \text{Cov}[X_i^{t-1}, X_j^{t-1}] (a_{ij})^T$$

$$\xrightarrow{\text{Για στάσιμη ανέλιξη}} \text{Cov}[X_i^t, X_j^t] = \text{Cov}[X_i^{t-1}, X_j^{t-1}],$$

όπου $\text{Cov}[X_i^t, X_i^t], \text{Cov}[X_i^{t-1}, X_i^{t-1}]$ τα μητρώα συνδιασπορών των ανελιξεων X_i και X_j για χρονικές θέσεις $t, (t - 1)$, αντίστοιχα

$$(4.4)$$

με $\text{Cov}[X_i^t, X_j^t] \Rightarrow$

$$\text{Cov}[X_i^t, X_j^t] = \begin{bmatrix} \text{Cov}[X_1^t, X_1^t] & \text{Cov}[X_1^t, X_2^t] & \dots & \text{Cov}[X_1^t, X_k^t] \\ \text{Cov}[X_2^t, X_1^t] & \text{Cov}[X_2^t, X_2^t] & \dots & \text{Cov}[X_2^t, X_k^t] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[X_k^t, X_1^t] & \text{Cov}[X_k^t, X_2^t] & \dots & \text{Cov}[X_k^t, X_k^t] \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{ij}=r}^{(2.8)}$$

* Μετάπτωση στην περίπτωση χρονικά ανεξάρτητων χρονοσειρών

† Περιπτώσεις χρονοσειρών με $\rho_1 > 0.8$ σπάνια συναντώνται στη φύση

$$\stackrel{(2.8)}{\implies} \underset{r_{ij}=r}{Cov}[X_i^t, X_j^t] = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & r\sigma_X^2 & \dots & r\sigma_X^2 \\ r\sigma_X^2 & \sigma_X^2 & \dots & r\sigma_X^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\sigma_X^2 & r\sigma_X^2 & \dots & \sigma_X^2 \end{bmatrix}$$

Ο προσδιορισμός του μητρώου b_{ij} από την παραπάνω σχέση (Σχέση (4.4)) είναι γνωστός ως εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας του c . Το πρόβλημα αυτό στη γενική του μορφή γράφεται $b(b)^T = c$, όπου b ο προς προσδιορισμό άγνωστος πίνακας (γνωστός και ως τετραγωνική ρίζα του πίνακα c και c ο συμμετρικός πίνακας του οποίου ζητείται η τετραγωνική ρίζα.

Το παραπάνω πρόβλημα είναι αδύνατο (δεν έχει καμία λύση) στην περίπτωση που ο πίνακας c είναι μη θετικά ορισμένος, και αόριστο (έχει άπειρες λύσεις) στην περίπτωση που ο πίνακας c είναι θετικά ορισμένος. Στην δεύτερη των περιπτώσεων, υφίστανται δύο αρκετά διαδεδομένοι αλγόριθμοι για τον προσδιορισμό δύο διαφορετικών εν γένει λύσεων (Κουτσογιάννης, 2007):

- Αποσύνθεση σε κάτω τριγωνικό μητρώο με τον αλγόριθμο Cholesky
- Αποσύνθεση σε πλήρες μητρώο με χρήση των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα c (αλγόριθμος Jacobi).

Πρόσφατα, προτάθηκε ένας γενικευμένος αλγόριθμος προσδιορισμού μίας βέλτιστης λύσης του πίνακα b (Koutsoyiannis, 1999), για c είτε θετικά ορισμένο (ακριβής λύση) είτε όχι (προσεγγιστική λύση).

Από την σχέση (4.4) συνεπώς, υπολογίζεται το γινόμενο $c = b_{ij}(b_{ij})^T$ η εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας του οποίου, για τον προσδιορισμό των παραμέτρων b_{ij} , πραγματοποιείται με χρήση του αλγόριθμου Cholesky.

Για τη γένεση λοιπόν χρονοσειρών, οι οποίες θα αντιπροσωπεύουν τα υπό εξέταση υδρολογικά δείγματα, με εφαρμογή της (4.1) απομένει ο προσδιορισμός της μέσης τιμής των λευκών θορύβων μ_{γ_i} (Η τυπική απόκλιση των λευκών θορύβων σ_{γ_i} ισούται με τη μονάδα). Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τον προσδιορισμό των εν λόγω τιμών παρατίθεται ακολούθως για $k = 2$. Για $k > 2$, η απόδειξη των αντίστοιχων σχέσεων παρατίθεται στο παράρτημα Α.

Για $k = 2$ διερευνάται η ενοποίηση **δύο** δειγμάτων από διαφορετικές θέσεις, τα οποία εκφράζονται από τις εξής δύο ανελίξεις:

$$\xrightarrow{(4.1) \text{ για } k=2} \begin{cases} X_1^t = a_{11}X_1^{t-1} + b_{11}V_1^t \\ X_2^t = a_{22}X_2^{t-1} + a_{21}X_1^{t-1} + b_{22}V_2^t + b_{21}V_1^t \end{cases} \quad (4.5)$$

Από την (4.5) προσδιορίζονται (για αριθμό σταθμών $k = 2$) οι μέσες τιμές μ_{V_1} και μ_{V_2} των λευκών θορύβων V_1^t και V_2^t , αντίστοιχα, ως εξής:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(4.5)} & \begin{cases} E[X_1^t] = a_{11}E[X_1^{t-1}] + b_{11}E[V_1^t] \\ E[X_2^t] = a_{22}E[X_2^{t-1}] + a_{21}E[X_1^{t-1}] + b_{22}E[V_2^t] + b_{21}E[V_1^t] \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mu_{X_1} = a_{11}\mu_{X_1} + b_{11}\mu_{V_1} \\ \mu_{X_2} = a_{22}\mu_{X_2} + a_{21}\mu_{X_1} + b_{22}\mu_{V_2} + b_{21}\mu_{V_1} \end{cases} \xleftrightarrow{\mu_{X_1}=\mu_{X_2}} \\ \xleftrightarrow{\mu_{X_1}=\mu_{X_2}=\mu_X} & \begin{cases} \mu_X = a_{11}\mu_X + b_{11}\mu_{V_1} \\ \mu_X = a_{22}\mu_X + a_{21}\mu_X + b_{22}\mu_{V_2} + b_{21}\mu_{V_1} \end{cases} \Leftrightarrow \quad (4.6) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mu_{V_1} = \frac{\mu_X(1 - a_{11})}{b_{11}} \\ \mu_{V_2} = \frac{\mu_X(1 - a_{22} - a_{21}) - b_{21}\mu_{V_1}}{b_{22}} \end{cases} \end{aligned}$$

Με τον προσδιορισμό των συντελεστών a_{ij}, b_{ij} καθώς και των μέσων τιμών των λευκών θορύβων V_i^t , καθίσταται πλέον δυνατή η διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo για τη δημιουργία υδρολογικών χρονοσειρών, οι οποίες θα αντιπροσωπεύουν τα υπό εξέταση υδρολογικά δείγματα (εφαρμογή σχέσης (4.1)).

Ακολουθεί στατιστική ανάλυση των υδρολογικών χρονοσειρών που δημιουργήθηκαν κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης, με σκοπό την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών. Όπως και στην περίπτωση των χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων, η εκτίμηση αυτή θα γίνει με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας μέσης τιμής, τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς ενώ παράλληλα θα πραγματοποιηθεί και εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του δείγματος.

Η περιγραφή των ανωτέρω προσεγγίσεων, που αφορούν στην εκτίμηση του ισοδύναμου μήκους του ενοποιημένου δείγματος με σκοπό τη διερεύνηση της επαύξησης της υδρολογικής πληροφορία, πραγματοποιείται στα εδάφια που ακολουθούν (Εδάφια 4.1.1, 4.1.2 και 4.1.3, αντίστοιχα).

Προτού όμως πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε ανάλυση οφείλει να ληφθεί υπόψη η αδυναμία των κλασικών στατιστικών εκτιμητριών να αποδώσουν τις πραγματικές τιμές των διάφορων στατιστικών μεγεθών στην περίπτωση χρονοσειρών χρονικά εξαρτημένων (εδάφια 2.1.3 και 2.1.4). Η στοχαστική φύση των υδρολογικών χρονοσειρών εισάγει λοιπόν, αβεβαιότητα στις εκτιμήσεις τόσο της διασποράς, όσο και της τυπικής απόκλισης*, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως εξής (Koutsoyiannis, 2010):

$$\begin{aligned}\mu_{S_X^{*2}} &= \frac{E[S_X^{*2}] - \sigma^2}{\sigma^2} \\ \mu_{S_X^*} &= \frac{E[S_X^*] - \sigma}{\sigma}\end{aligned}\quad (4.7)$$

όπου $\mu_{S_X^{*2}}$, $\mu_{S_X^*}$ οι (σχετικές) μεροληψίες της εκτιμήτριας της διασποράς και της τυπικής απόκλισης, αντίστοιχα, $E[S_X^{*2}]$ η αναμενόμενη† τιμή της εκτιμήτριας της διασποράς και $E[S_X^*]$ η αναμενόμενη τιμή της εκτιμήτριας της τυπικής απόκλισης

Για κάθε επιμέρους δείγμα (k στον αριθμό) και για κάθε πραγματοποίηση αυτού λοιπόν, εκτιμάται η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και η διασπορά με χρήση της αντίστοιχης εκτιμήτριας της κλασικής στατιστικής. Εν συνεχεία εκτιμάται η μέση τιμή αυτών. Με βάση τις εκτιμήσεις αυτές (μέσες τιμές διασποράς και τυπικής απόκλισης) υπολογίζονται οι αντίστοιχες μεροληψίες με εφαρμογή της (4.7) και διορθώνονται με τις τιμές αυτές οι 10,000 προσεγγίσεις της διασποράς και της τυπικής απόκλισης ως εξής:

$$\begin{aligned}S_{X\text{ unbiased}}^{*2} &= \frac{S_{X\text{ biased}}^{*2}}{1 + \mu_{S_X^{*2}}} \\ S_{X\text{ unbiased}}^* &= \frac{S_{X\text{ biased}}^*}{1 + \mu_{S_X^*}}\end{aligned}\quad (4.8)$$

όπου $S_{X\text{ unbiased}}^{*2}$, $S_{X\text{ unbiased}}^*$ οι αμερόληπτες εκτιμήσεις της διασποράς και της τυπικής απόκλισης, αντίστοιχα και $S_{X\text{ biased}}^{*2}$, $S_{X\text{ biased}}^*$ οι μεροληπτικές εκτιμήσεις της διασποράς και της τυπικής απόκλισης, αντίστοιχα. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και για το ενοποιημένο δείγμα.

* Η εκτιμήτρια της μέσης τιμής είναι αμερόληπτη

† Σύμφωνα με τις εκτιμήσεις της κλασικής στατιστικής

4.1.1 Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας – Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της μέσης τιμής

Για την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων, με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής του ενοποιημένου δείγματος, η διαδικασία είναι ανάλογη με την περίπτωση των χρονικά ανεξάρτητων δειγμάτων.

Συγκεκριμένα για κάθε επιμέρους δείγμα εκτιμάται κατά τα γνωστά η διασπορά των 10,000 εκτιμήσεων της μέσης τιμής της ανέλιξης $X_i(t)$. Στην περίπτωση όμως αυτή η ανωτέρω εκτίμηση (έστω $Var[\overline{X_i(t)}]_{simulation}$), λόγω της υπάρχουσας αυτοσυσχέτισης, υποεκτιμάται από την αντίστοιχη θεωρητική της τιμή (Σχέση (3.13)). Η υποεκτίμηση αυτή μπορεί να εκφραστεί, σε όρους ισοδύναμου* μήκους $n_{i\text{auto}}$, ως εξής:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(3.13)} Var[\overline{X_i(t)}]_{simulation} &= \frac{Var[X_i(t)]}{n_{i\text{auto}}} = \frac{\sigma_X^2}{n_{i\text{auto}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow n_{i\text{auto}} &= \frac{\sigma_X^2}{Var[\overline{X_i(t)}]_{simulation}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Συνεπώς, για το ενοποιημένο δείγμα η θεωρητική εκτιμήτρια της διασποράς της μέσης τιμής (Σχέση (3.14)) τροποποιείται ως εξής:

$$\xrightarrow{(3.14)} Var[\overline{Z_k(t)}] = \frac{Var[Z_k(t)]}{kn_{\text{auto}}} = \frac{\sigma_Z^2}{kn_{\text{auto}}} = \frac{\sigma^2}{kn_{\text{auto}}} \quad (4.10)$$

όπου n_{auto} η μέση τιμή των ισοδύναμων μηκών $n_{i\text{auto}}$, των k προς ενοποίηση δειγμάτων.

Η παραπάνω τροποποιημένη εκτίμηση είναι πλέον συνεπής με την αντίστοιχη εκτίμηση της προσομοίωσης[†] για την περίπτωση που οι επιμέρους σταθμοί είναι ασυσχέτιστοι ($r_{ij} = 0$). Η υποεκτίμηση της διασποράς της μέσης τιμής από την (4.10) για $r_{ij} \neq 0$, μπορεί να εκφραστεί σε όρους ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e , με τρόπο ανάλογο με την περίπτωση των χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων, ήτοι

* Χρονικά ανεξάρτητων δειγμάτων

[†] Δεν απαιτείται διόρθωση λόγω μεροληψίας. Η θεωρητική τιμή της εν λόγω εκτίμησης είναι (Koutsoyiannis, 2002):

$$\frac{\sigma^2}{kn_{\text{auto}}}, \text{ όπου } \begin{cases} n_{\text{auto}} = n'_{\text{Markov}} = n \frac{(1-\rho)^2}{(1-\rho^2)-2\rho(1-\rho^n)/n} & \text{Μαρκοβιανή προσέγγιση} \\ n_{\text{auto}} = n'_{\text{Hurst}} = n^{2(1-H)} & \text{Ανελιξίες Απλής Ομοιοθεσίας} \end{cases}$$

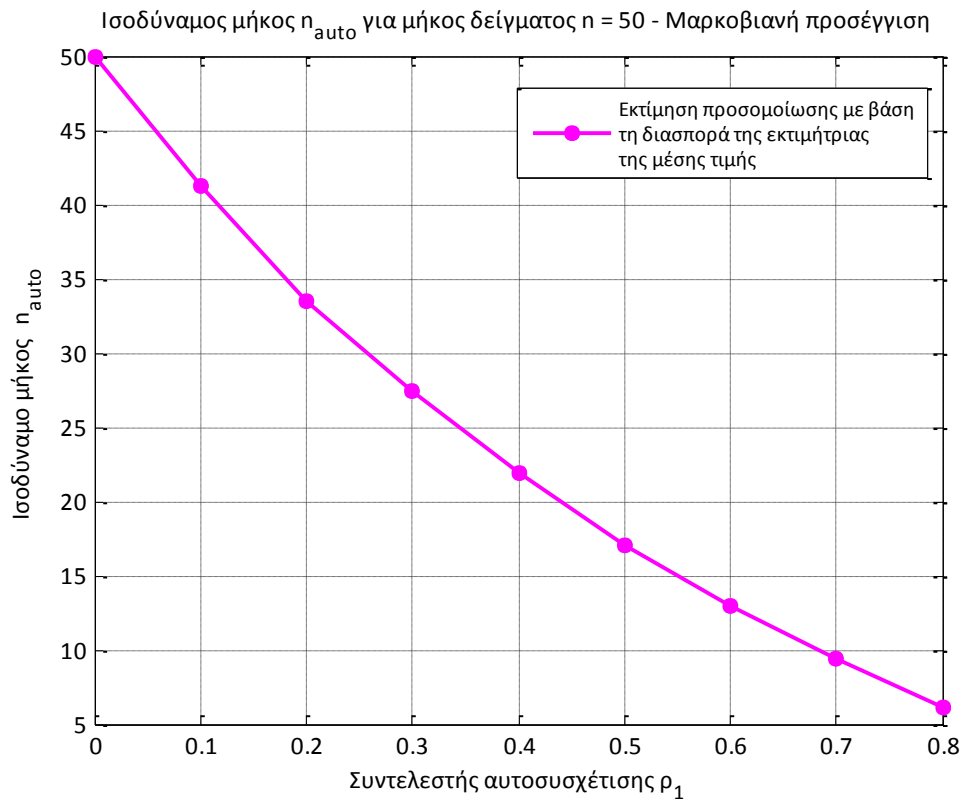
$$(3.15) \stackrel{(4.10)}{\implies} k_e = k \frac{Var[\overline{Z_k(t)}]_{expected}}{Var[\overline{Z_k(t)}]_{simulation}} \quad (4.11)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n_{auto} Var[\overline{Z_k(t)}]_{simulation}}$$

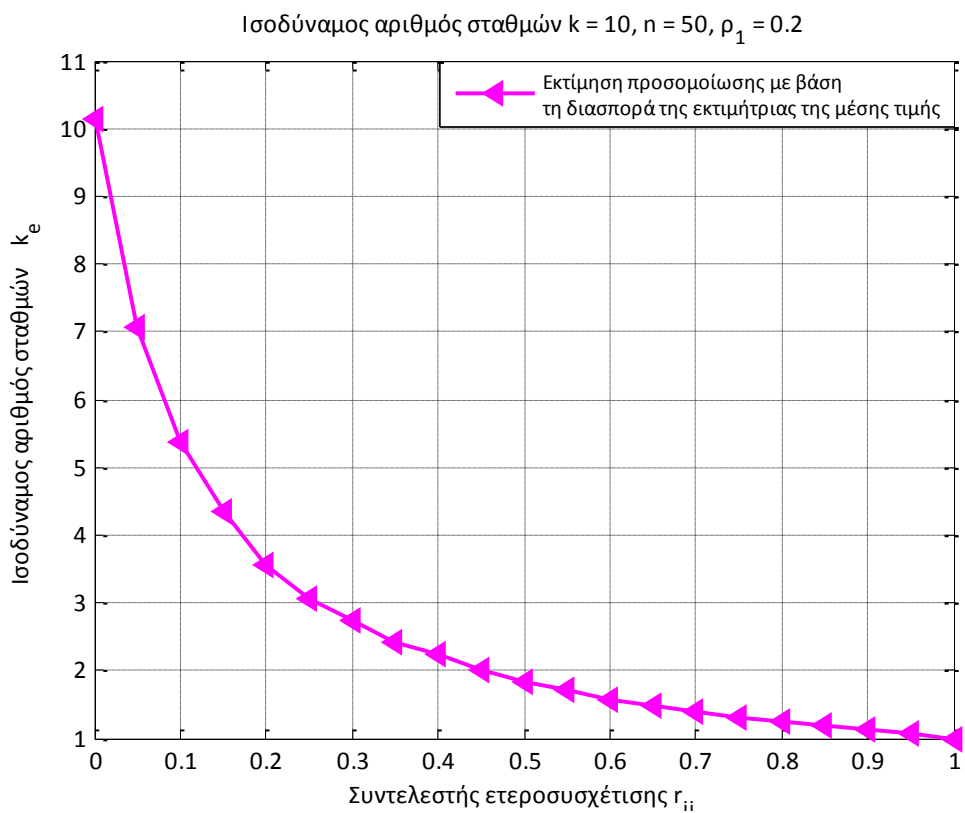
όπου $Var[\overline{Z_k(t)}]_{expected}$ η τροποποιημένη θεωρητική εκτίμηση της διασποράς της μέσης τιμής και $Var[\overline{Z_k(t)}]_{simulation}$ η αντίστοιχη εκτίμηση της προσομοίωσης.

Ακολουθεί, με διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo για τη γένεση υδρολογικών δειγμάτων, εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος (Σχέση (4.11)), για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , αλλά και για διάφορες τιμές του συντελεστή αυτοσυσχέτισης των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων. Συγκεκριμένα το βήμα μεταβολής του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} , οι οριακές τιμές του οποίου είναι μηδέν και ένα, θεωρήθηκε 0.05. Σε ό,τι αφορά στο συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 , δοκιμάστηκαν οι τιμές $\rho_1 = 0.2, 0.4, 0.6$ και 0.8 .

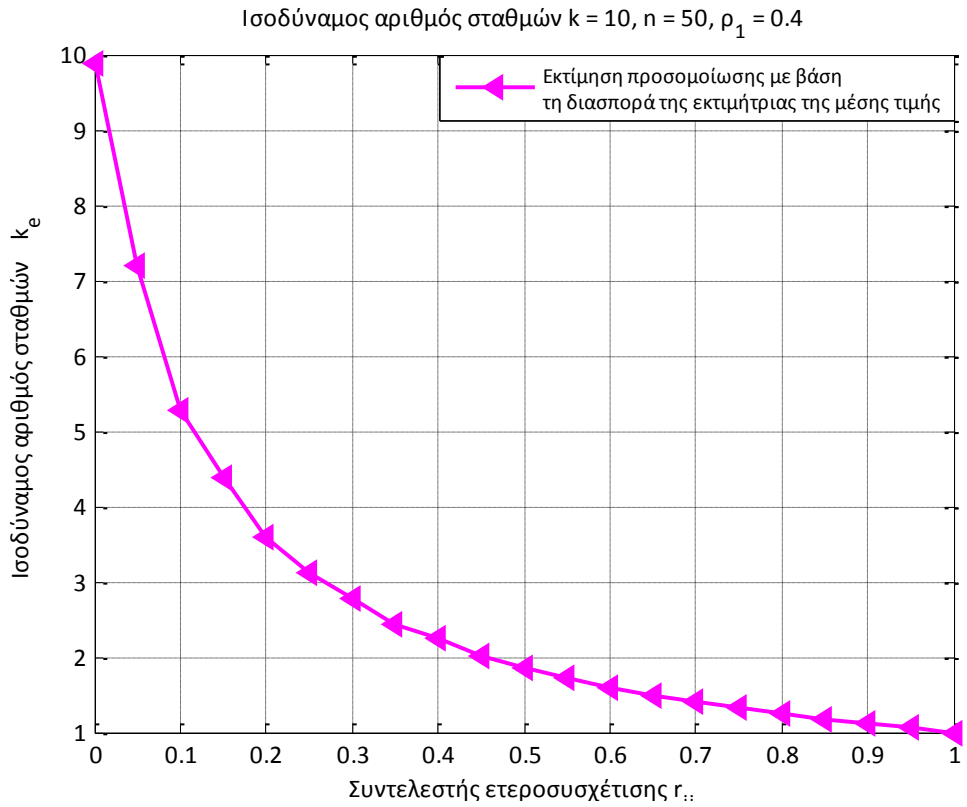
Ακολουθεί σχηματική παρουσίαση της εκτίμησης του ισοδύναμου μήκους n_{auto} ως προς το συντελεστή αυτοσυσχέτισης καθώς και της εκτίμησης του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων $\rho_1 = 0.2, 0.4, 0.6$ και 0.8 (Σχήμα 4.1 και Σχήματα 4.2, 4.3, 4.4 και 4.5, αντίστοιχα για αριθμό σταθμών $k = 10$). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Β.



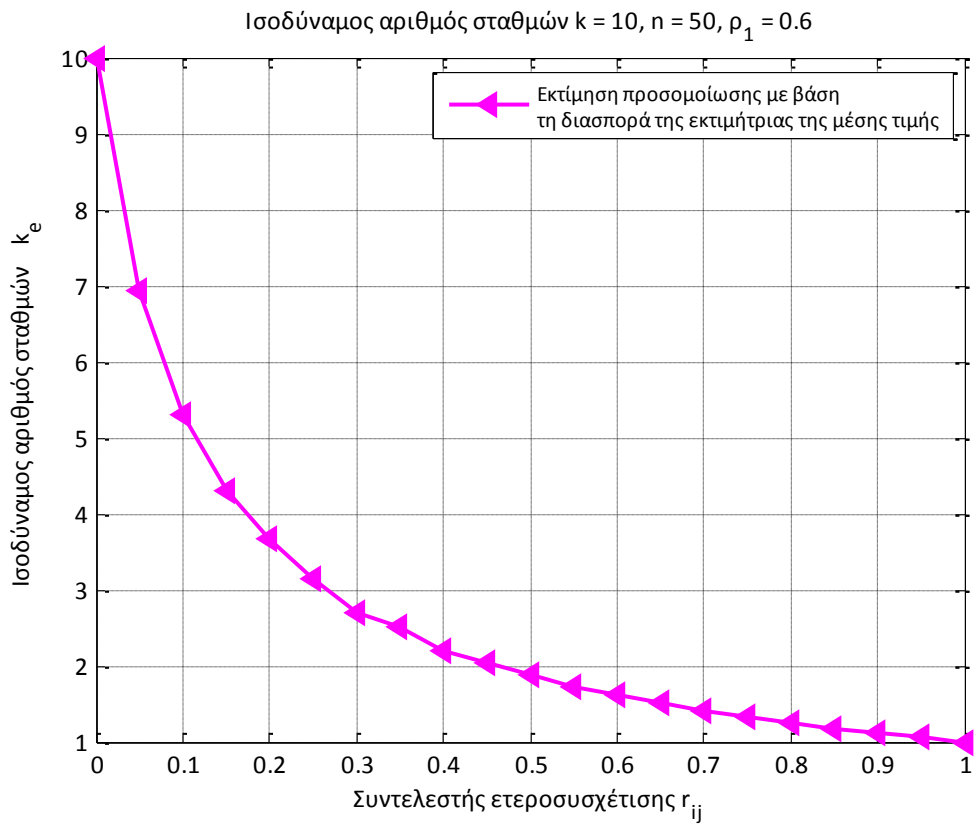
Σχήμα 4.1: Ισοδύναμο μήκος n_{auto} ως συνάρτηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 για μήκος δείγματος $n = 50$



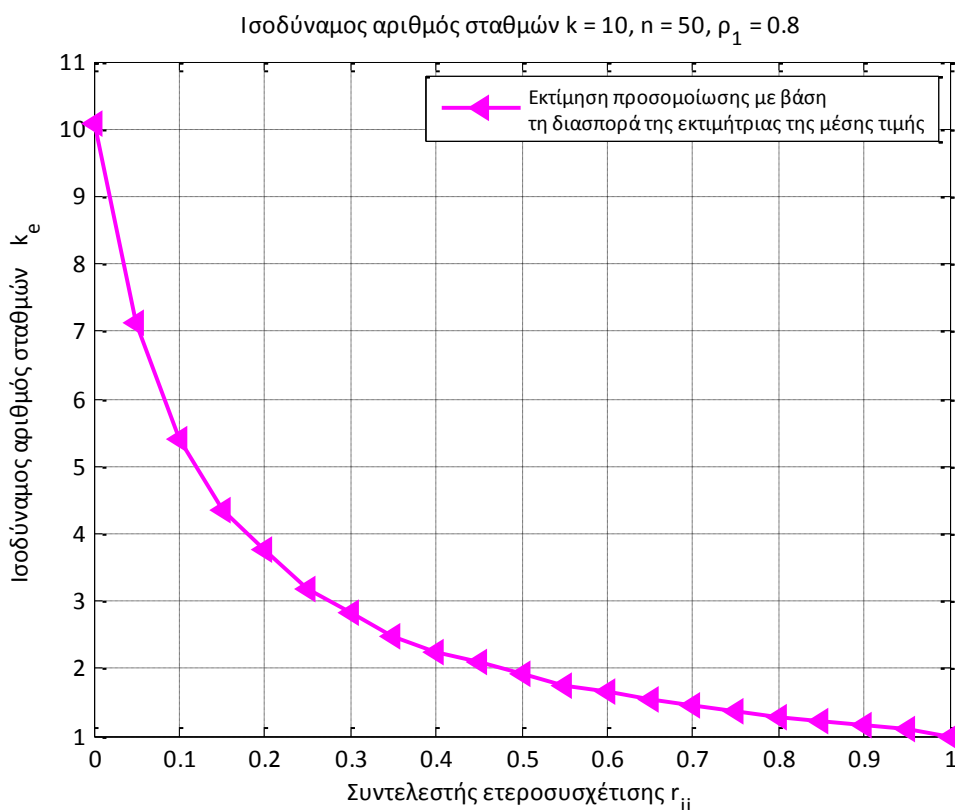
Σχήμα 4.2: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$



Σχήμα 4.3: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$



Σχήμα 4.4: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$



Σχήμα 4.5: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$

Στα ανωτέρω σχήματα, παρατηρείται πως η εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος, ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι ανεξάρτητη της αυτοσυσχέτισης που χαρακτηρίζει τις προς ενοποίηση υδρολογικές χρονοσειρές. Συνεπώς, αν για κάθε δείγμα προσδιοριστεί το ισοδύναμο μήκος $n_{i\text{auto}}$ χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων, και με βάση την προσέγγιση αυτή εκτιμηθεί ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα, η εξεταζόμενη περίπτωση μεταπίπτει στην περίπτωση στατιστικής ανάλυσης χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων (Εδάφιο 3.1), σε ό,τι αφορά στα αποτελέσματα των εκτιμήσεων.

4.1.2 Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας – Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της δειγματικής διασποράς

Τα παραπάνω βασίζουν τις εκτιμήσεις στη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής του ενοποιημένου δείγματος. Η ίδια προσέγγιση ακολουθείται και σε ό,τι αφορά στην εκτίμηση της επαύξησης της υδρολογικής πληροφορίας με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς του ενοποιημένου δείγματος.

Για κάθε επιμέρους δείγμα κατά τα γνωστά, εκτιμάται η διασπορά των 10,000 διορθωμένων* προσεγγίσεων της δειγματικής διασποράς. Και στην περίπτωση αυτή όμως, η ανωτέρω εκτίμηση (έστω $Var[S_X^{*2}]_{simulation}$), λόγω της υφιστάμενης αυτοσυσχέτισης, υποεκτιμάται από την αντίστοιχη θεωρητική της προσέγγιση (Σχέση (3.16)). Η υποεκτίμηση αυτή εκφράζεται και εδώ, σε όρους ισοδύναμου μήκους n_{iauto} , ως εξής:

$$\begin{aligned} \stackrel{(3.16)}{\implies} Var[S_X^{*2}]_{simulation} &= \frac{2\sigma_X^4}{(n_{iauto} - 1)} \implies \\ \implies n_{iauto} &= \frac{2\sigma_X^4}{Var[S_X^{*2}]_{simulation}} + 1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Για το ενοποιημένο δείγμα λοιπόν, η θεωρητική εκτιμήτρια της διασποράς της δειγματικής διασποράς (Σχέση (3.17)) τροποποιείται ως εξής:

$$Var[S_{Z_k}^{*2}] = \frac{2\sigma_Z^4}{kn_{auto} - 1} = \frac{2\sigma^4}{kn_{auto} - 1} \quad (4.13)$$

όπου n_{auto} η μέση τιμή των ισοδύναμων μηκών n_{iauto} , των k προς ενοποίηση δειγμάτων.

Η παραπάνω τροποποιημένη εκτίμηση είναι πλέον συνεπής με την αντίστοιχη εκτίμηση της προσομοίωσης† για την περίπτωση που οι επιμέρους σταθμοί είναι ασυσχέτιστοι ($r_{ij} = 0$). Για $r_{ij} \neq 0$ όμως, η (4.13) υποεκτιμά την πραγματική τιμή της διασποράς της δειγματικής διασποράς, όπως καταδεικνύουν και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης. Η υποεκτίμηση αυτή εκφράζεται και σε αυτή την περίπτωση σε όρους ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e , ήτοι

$$(3.18) \stackrel{(4.13)}{\implies} k_e = \frac{2\sigma^4}{Var[S_{Z_k}^{*2}]_{simulation} n_{auto}} + \frac{1}{n_{auto}} \quad (4.14)$$

όπου $Var[S_{Z_k}^{*2}]_{simulation}$ η εκτίμηση της διασποράς της δειγματικής διασποράς, του ενοποιημένου δείγματος, με προσομοίωση.

Ακολουθεί κατά τα γνωστά, εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος (Σχέση (4.14)), για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , αλλά και για διάφορες τιμές του συντελεστή αυτοσυσχέτισης των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων. Όμοια με την περίπτωση

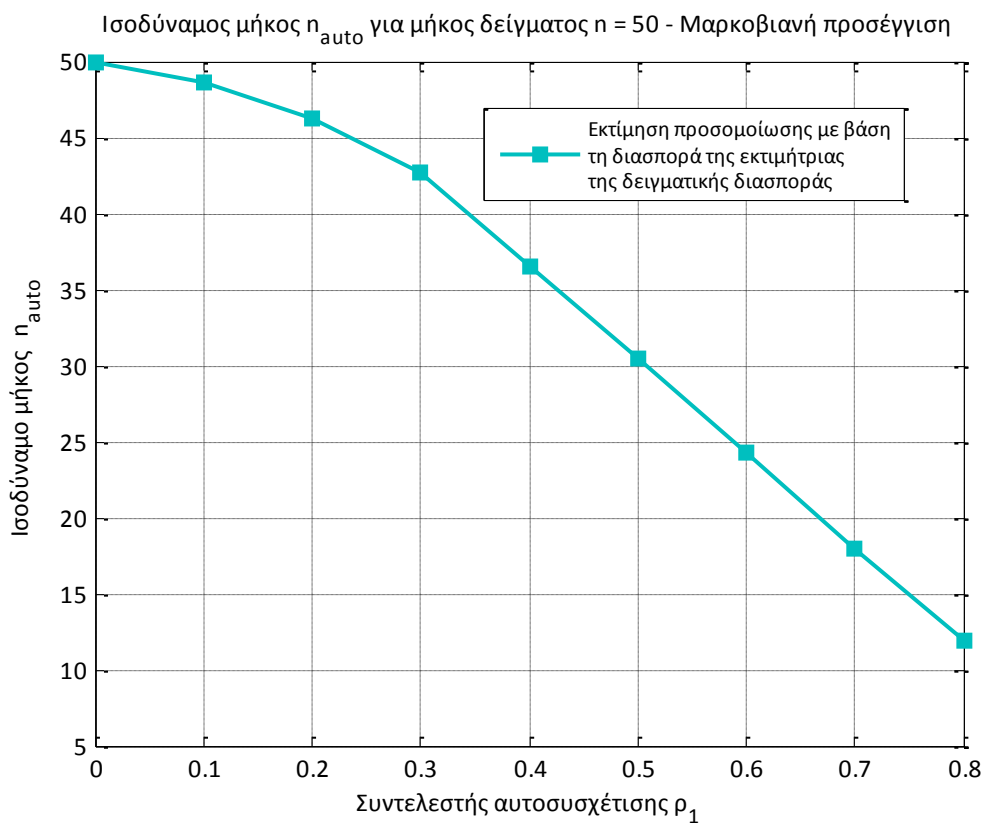
* Λόγω μεροληψίας (Σχέση (4.8))

† Αφού πρώτα αυτή διορθωθεί λόγω μεροληψίας, η εκτίμηση της οποίας θα γίνει με διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo για $r_{ij} = 0$

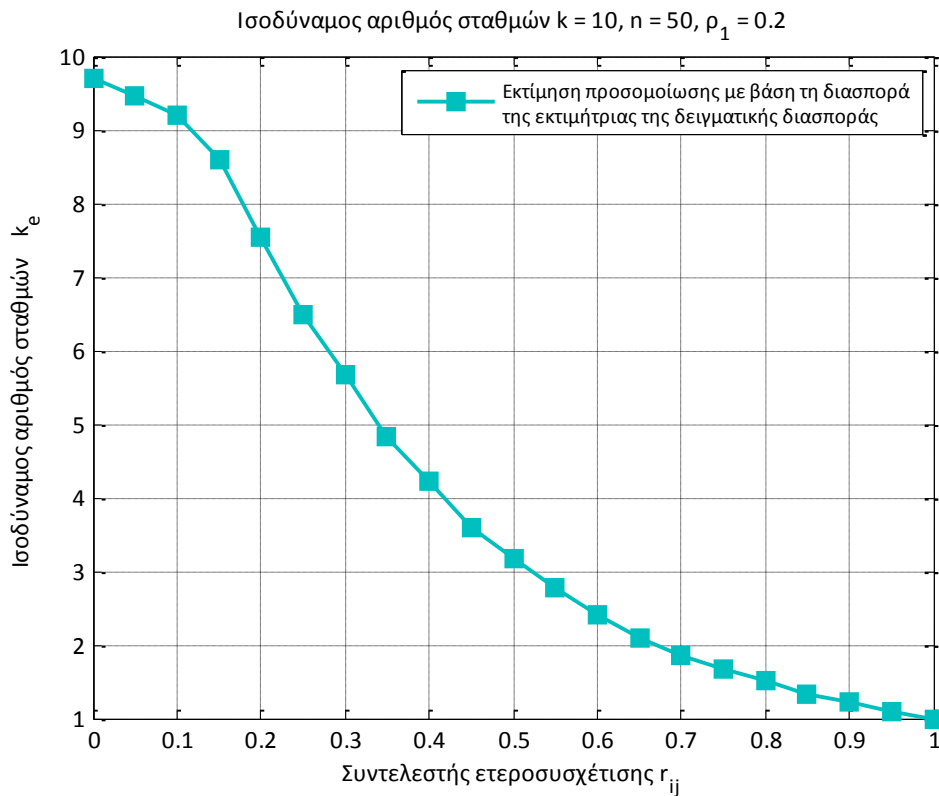
εκτίμησης με βάση τη διασπορά της μέσης τιμής, το βήμα μεταβολής του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} , οι οριακές τιμές του οποίου είναι μηδέν και ένα, θεωρήθηκε 0.05. Σε ό,τι αφορά στο συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 , δοκιμάστηκαν οι τιμές $\rho_1 = 0.2, 0.4, 0.6$ και 0.8 .

Ακολουθεί σχηματική παρουσίαση της εκτίμησης του ισοδύναμου μήκους n_{auto} ως προς το συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 (Σχήμα 4.6).

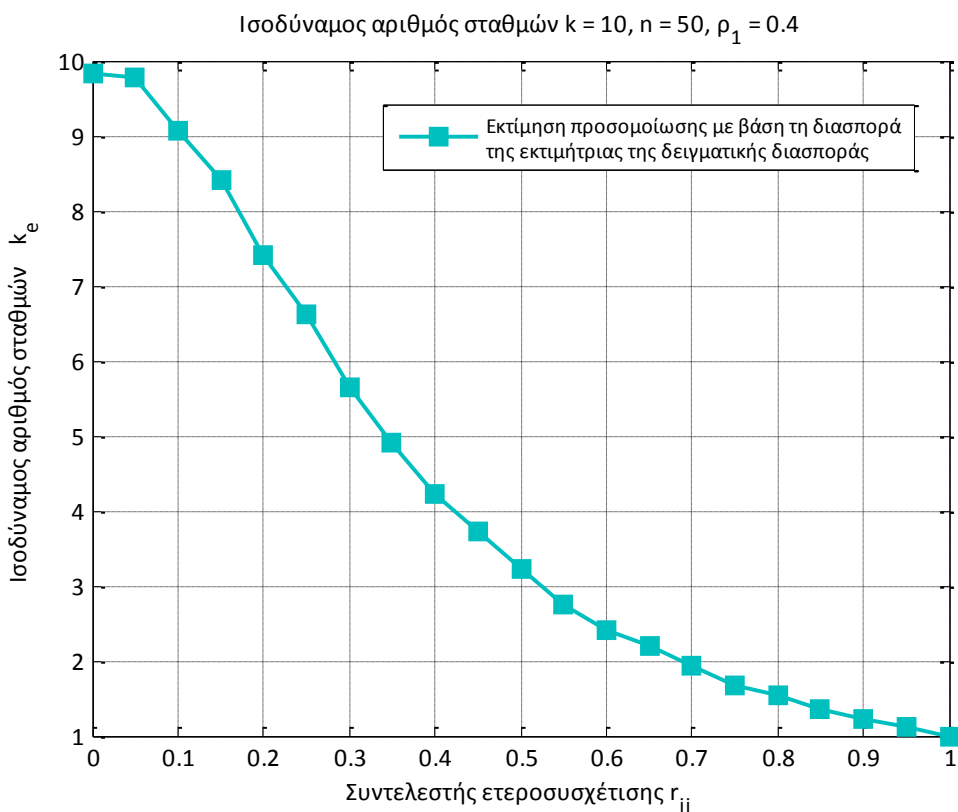
Η σχηματική παρουσίαση των ανωτέρω εκτιμήσεων ($k_e = f(r_{ij})$), δίδεται στα σχήματα που ακολουθούν για αριθμό σταθμών $k = 10$ (Σχήματα 4.7, 4.8, 4.9 και 4.10). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Β.



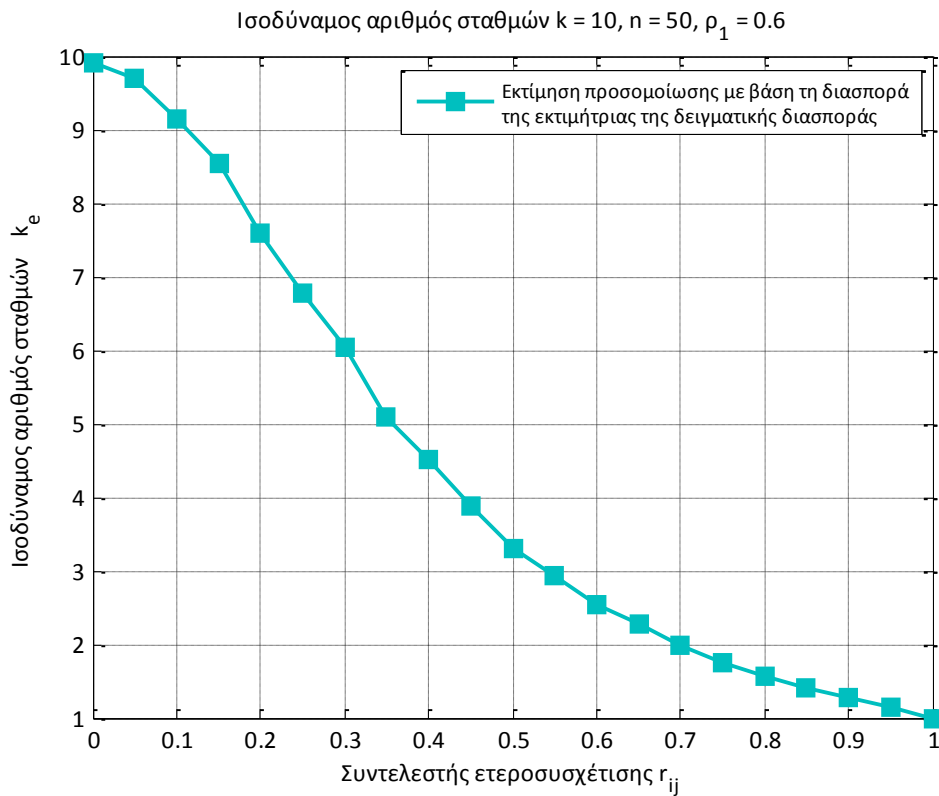
Σχήμα 4.6: Ισοδύναμο μήκος n_{auto} ως συνάρτηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 για μήκος δείγματος $n = 50$



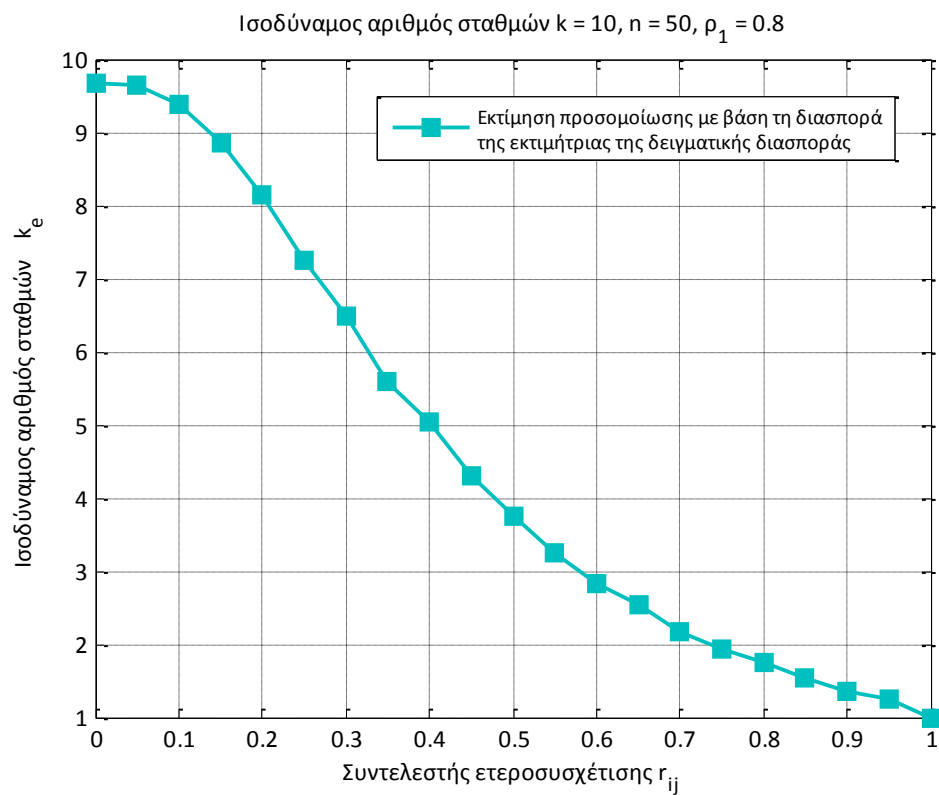
Σχήμα 4.7: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$



Σχήμα 4.8: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$



Σχήμα 4.9: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$



Σχήμα 4.10: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$

Παρατηρείται λοιπόν, στα ανωτέρω σχήματα πως οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος, για την ίδια τιμή του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν κατά τη στατιστική ανάλυση χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων ($\rho_1 = 0$). Η κατάσταση βέβαια αυτή, γίνεται αισθητή για τιμές του συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 > 0.4$. Περαιτέρω ανάλυση, επί του συγκεκριμένου ζητήματος, ακολουθεί στο κεφάλαιο 5.

4.1.3 Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς

Σε ό,τι αφορά τέλος στην εκτίμηση του ισοδύναμου μήκους ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος, αυτή τροποποιείται με αντίστοιχο τρόπο με παραπάνω (Εδάφια 4.1.1 και 4.1.2), ώστε να ληφθεί υπόψη η δομή της αυτοσυσχέτισης των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων.

Κατά τα γνωστά (Εδάφιο 3.3), για κάθε επιμέρους δείγμα (k στον αριθμό) και για κάθε πραγματοποίηση αυτού, εκτιμάται η αντίστοιχη μέγιστη και ελάχιστη τιμή (10,000 μέγιστες και 10,000 ελάχιστες τιμές για κάθε σταθμό).

Για κάθε σταθμό και για κάθε μία από τις 10,000 μέγιστες και 10,000 ελάχιστες τιμές εκτιμώνται οι αντίστοιχες πιθανότητες μη υπέρβασης ($F_{X_{imax}}$ και $F_{X_{imin}}$, αντίστοιχα) με βάση την κανονική αθροιστική κατανομή. Ακολούθως προσδιορίζεται για κάθε σταθμό η μέση τιμή των 10,000 εκτιμήσεων της πιθανότητας μη υπέρβασης, τόσο για τις μέγιστες, όσο και για τις ελάχιστες τιμές. Η εκτίμηση με προσομοίωση λοιπόν, για κάθε σταθμό της περιόδου επαναφοράς της μέγιστης τιμής $T_{i,simulation}$, γίνεται με εφαρμογή της (3.19).

Ωστόσο, η αντίστοιχη θεωρητική εκτιμήτρια της περιόδου επαναφοράς της μέγιστης τιμής (Σχέση (3.20)) υπερεκτιμά την πραγματική της τιμή, καθώς δεν λαμβάνει υπόψη τη χρονική εξάρτηση των υδρολογικών δειγμάτων. Συνεπώς, η πληροφορία που χαρακτηρίζει τη μεταβλητή $X_i(t)$ αντιστοιχεί σε μικρότερο μήκος δείγματος (έστω n_{iauto}), ήτοι:

$$\begin{aligned} \stackrel{(3.20)}{\implies} \begin{cases} T_{i,expected} = n + 1 \\ T_{i,simulation} = n_{iauto} + 1 \end{cases} & \Rightarrow \\ \stackrel{(3.20)}{\implies} n_{iauto} = T_{i,simulation} - 1 & \end{aligned} \quad (4.15)$$

Εν συνεχεία για το ενοποιημένο πλέον δείγμα, εκτιμάται με προσομοίωση με αντίστοιχο τρόπο η περίοδος επαναφοράς $T_{ksimulation}$, της μέγιστης τιμής αυτού (Σχέση

(3.21)). Για το ενοποιημένο δείγμα λοιπόν, η θεωρητική εκτιμήτρια της περιόδου επαναφοράς της μέγιστης τιμής (Σχέση (3.22)) τροποποιείται ως εξής:

$$T_{kexpected} = kn_{auto} + 1 \quad (4.16)$$

όπου n_{auto} η μέση τιμή των ισοδύναμων μηκών n_{iauto} , των k προς ενοποίηση δειγμάτων και $T_{kexpected}$ η τροποποιημένη θεωρητική εκτιμήτρια της περιόδου επαναφοράς.

Με διενέργεια προσομοίωσης παρατηρήθηκε πως η παραπάνω τροποποιημένη εκτίμηση δεν προσεγγίζει την αντίστοιχη εκτίμηση της προσομοίωσης για την περίπτωση που οι επιμέρους σταθμοί είναι ασυσχέτιστοι ($r_{ij} = 0$), όπως αρχικά ήταν αναμενόμενο (Συγκεκριμένα είναι μεγαλύτερη). Επελέγη λοιπόν, για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας να εκφραστεί το ισοδύναμο μήκος n_{auto} κάθε σταθμού ως εξής:

$$n_{auto} := \frac{(T_{ksimulation/r_{ij}=0} - 1)}{k} \quad (4.17)$$

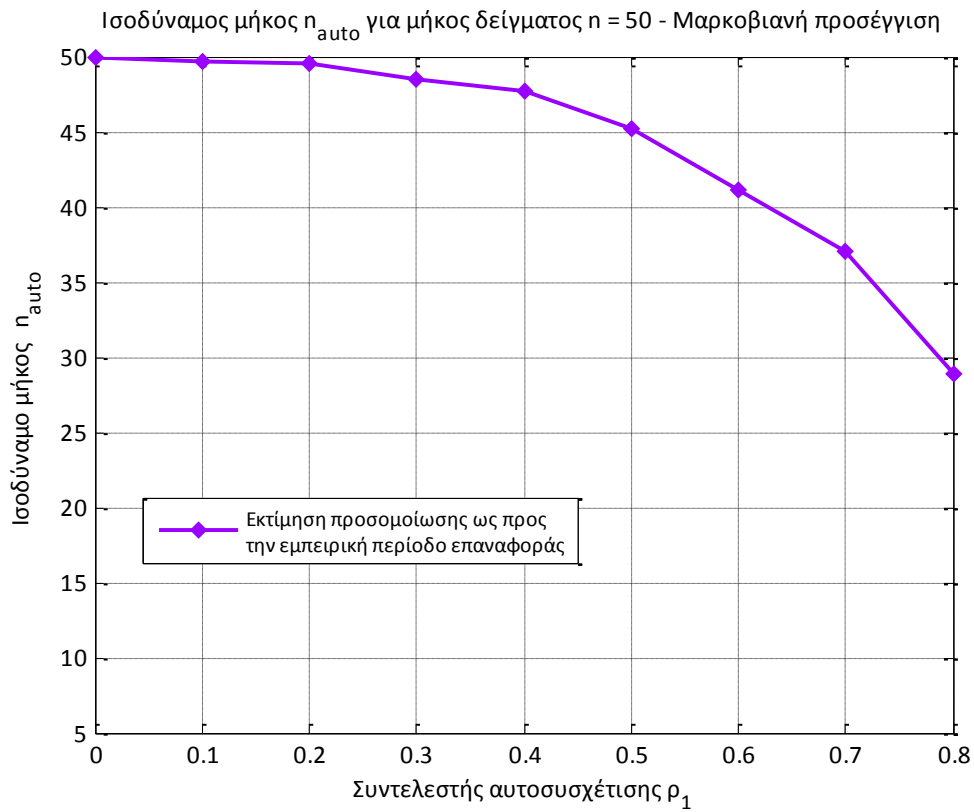
Όπου $T_{ksimulation/r_{ij}=0}$ η εκτίμηση, με προσομοίωση, της περιόδου επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος, για $r_{ij} = 0$.

Ο ισοδύναμος λοιπόν, αριθμός δειγμάτων k_e , ο οποίος χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα, εκτιμάται ως εξής:

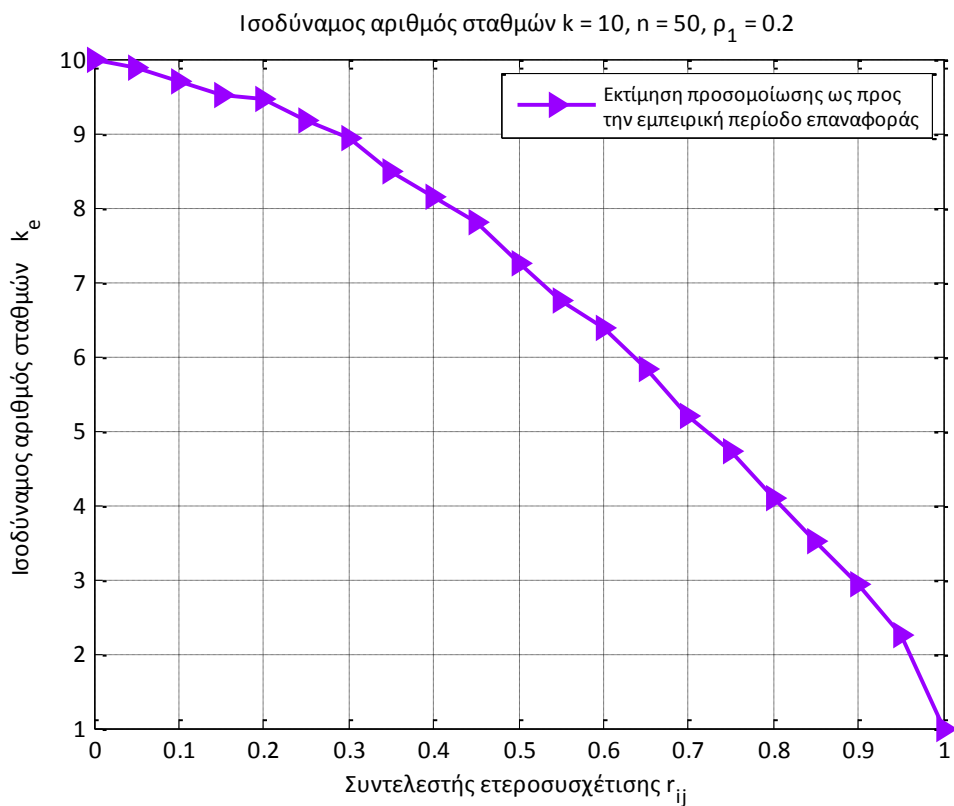
$$k_e = \frac{T_{ksimulation} - 1}{n_{auto}} \quad (4.18)$$

Κατά τα γνωστά, με τη διενέργεια προσομοίωσης για τη γένεση υδρολογικών δειγμάτων και για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j αλλά και για διάφορες τιμές του συντελεστή αυτοσυσχέτισης, εκτιμώνται κάθε φορά οι αντίστοιχες τιμές του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e (Σχέση (4.18)).

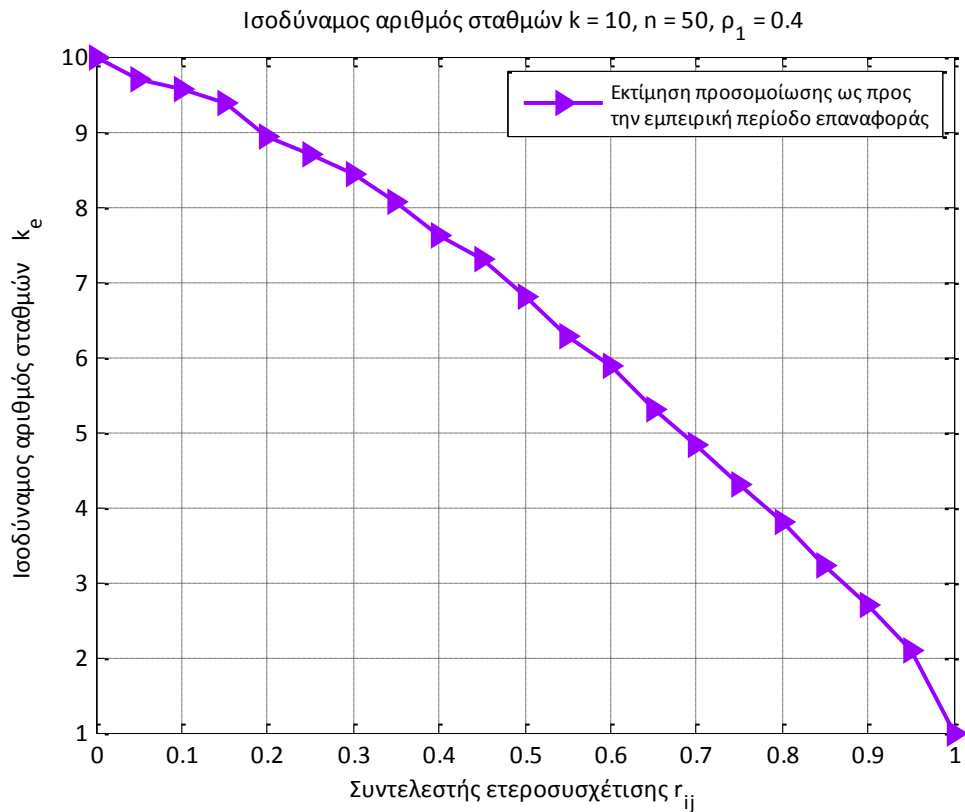
Ακολουθεί σχηματική παρουσίαση της εκτίμησης του ισοδύναμου μήκους n_{auto} ως προς το συντελεστή αυτοσυσχέτισης καθώς της εκτίμησης του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων $\rho_1 = 0.2, 0.4, 0.6$ και 0.8 (Σχήμα 4.11 και Σχήματα 4.12, 4.13, 4.14 και 4.15, αντίστοιχα για $k = 10$). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Β.



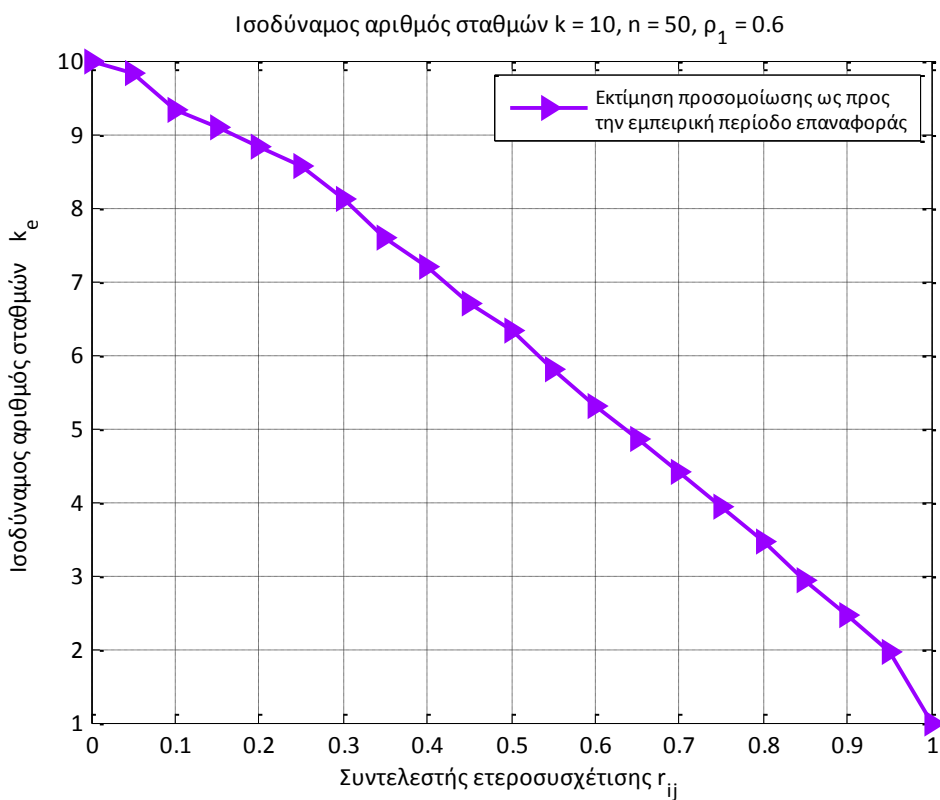
Σχήμα 4.11: Ισοδύναμο μήκος n_{auto} ως συνάρτηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 για μήκος δείγματος $n = 50$



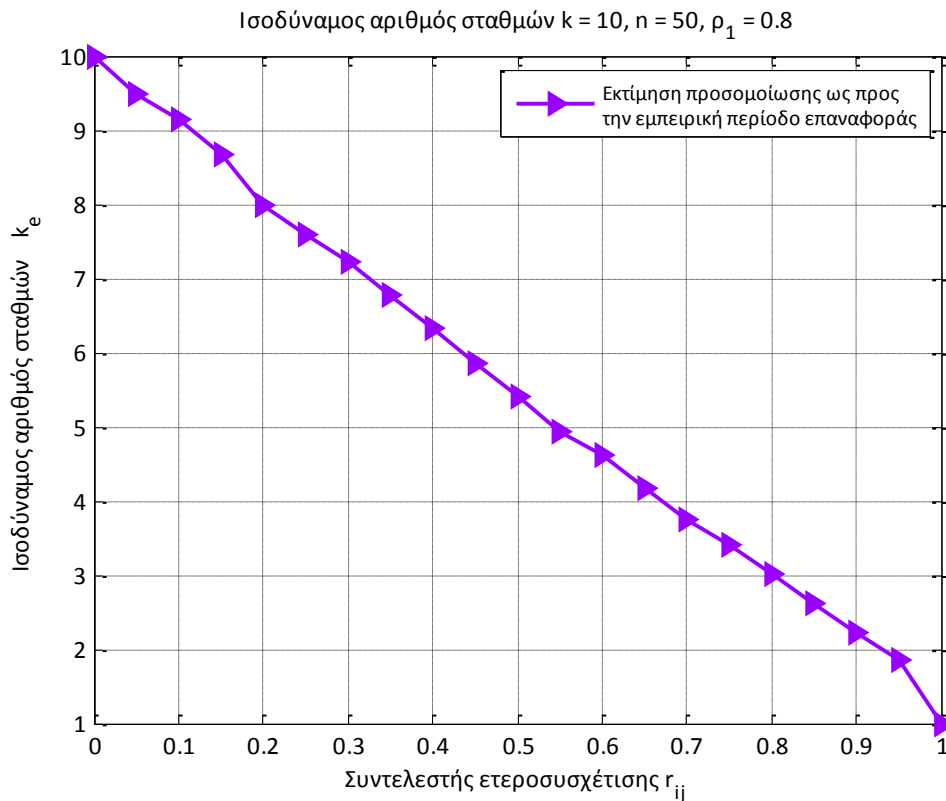
Σχήμα 4.12: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$



Σχήμα 4.13: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$



Σχήμα 4.14: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$



Σχήμα 4.15: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$

Παρατηρείται λοιπόν, στα ανωτέρω σχήματα πως οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος, για την ίδια τιμή του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι αισθητά μικρότερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν κατά τη στατιστική ανάλυση, χρονικά ανεξάρτητων, υδρολογικών δειγμάτων ($\rho_1 = 0$). Περαιτέρω ανάλυση, επί του συγκεκριμένου ζητήματος, ακολουθεί στο κεφάλαιο 5.

4.2 Ανελίξεις Απλής Ομοιοθεσίας

Στο σημείο αυτό, επισημαίνεται πως παρόλο που η ανωτέρω προσέγγιση λαμβάνει υπόψη τη χρονική εξάρτηση των υδρολογικών χρονοσειρών, αποδίδοντας τη βραχυπρόθεσμη μνήμη αυτών, αποτυγχάνει να αποδώσει τη μακροπρόθεσμη εμμονή που τις χαρακτηρίζει.

Προκειμένου να αποδοθεί η στοχαστική αυτή φύση των υδρολογικών χρονοσειρών, θα χρησιμοποιηθεί, κατά τη στατιστική ανάλυση, ο αλγόριθμος παραγωγής κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου ως άθροισμα τριών ανελίξεων AR(1), ο οποίος στηρίζεται στη λογική τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας (Εδάφιο 2.1.4.1).

Έστω λοιπόν, τυχαία στάσιμη μεταβλητή X_i^t , η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο όρο μ_X και τυπική απόκλιση σ_X με $i = 1, 2, \dots, k$. Η μεταβλητή αυτή αντιπροσωπεύει τις διαθέσιμες υδρολογικές χρονοσειρές από διαφορετικές θέσεις (k στον αριθμό) και έστω r_{ij} ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j (Για $i = 1, 2, \dots, k \rightarrow j = 1, 2, \dots, i$ με $k = 2 \div 10$). Η τυχαία λοιπόν ανέλιξη X_i^t παράγεται ως άθροισμα τριών ανεξάρτητων AR(1), ήτοι:

$$X_i^t = X_i^{*t} + \mu_X = A_i^t + B_i^t + C_i^t + \mu_X \quad (4.19)$$

όπου A_i^t, B_i^t, C_i^t τρεις ανεξάρτητες AR(1), οποίες εκφράζονται ως εξής (Σχέση (4.1)) :

$$\begin{aligned} A_i^t &= \sum_{j=1}^i a_{Aij} A_j^{t-1} + \sum_{j=1}^i b_{Aij} V_{Aj}^t \\ B_i^t &= \sum_{j=1}^i a_{Bij} B_j^{t-1} + \sum_{j=1}^i b_{Bij} V_{Bj}^t \\ C_i^t &= \sum_{j=1}^i a_{Cij} C_j^{t-1} + \sum_{j=1}^i b_{Cij} V_{Cj}^t \end{aligned} \quad (4.20)$$

με συντελεστές αυτοσυσχέτισης για υστέρησης 1, αντίστοιχα (Σχέση (2.25)):

$$\xrightarrow{(2.25)} \begin{cases} a_{A11} = \rho = 1.52(H - 0.5)^{1.32} \\ a_{B11} = \varphi = 0.953 - 7.69(1 - H)^{3.85} \\ a_{C11} = \xi = \begin{cases} 0.932 + 0.087H, & H \leq 0.76 \\ 0.993 + 0.007H, & H > 0.76 \end{cases} \end{cases} \quad (4.21)$$

Οι μέσες τιμές και οι διασπορές των τριών ανεξάρτητων AR(1) εκφράζονται ως (Koutsoyiannis, 2002):

$$\begin{aligned} \mu_{A_i} &= \mu_{B_i} = \mu_{C_i} = 0 \\ \sigma_{A_i}^2 &= (1 - c_1 - c_2)\sigma_X^2 \\ \sigma_{B_i}^2 &= c_1\sigma_X^2 \\ \sigma_{C_i}^2 &= c_2\sigma_X^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

όπου τα c_1, c_2 εκτιμώνται έτσι ώστε η αυτοσυσχέτιση του αθροίσματος των τριών ανεξάρτητων $\rho_j = (1 - c_1 - c_2)\rho^j + c_1\varphi^j + c_2\xi^j$, να ταυτίζεται με τη θεωρητική αυτοσυσχέτιση* του κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου, για υστέρηση 1 και 100.

Επισημαίνεται ότι η θεώρηση πως $\mu_{A_i} = \mu_{B_i} = \mu_{C_i} = 0^\dagger$, δεν δημιουργεί κάποιο πρόβλημα στη συνθετική αναπαραγωγή της μέσης τιμής της ανέλιξης X_i^t , αφού η γραμμικότητα της εκτιμήτριας που διέπει τη μέση τιμή επιτρέπει με εφαρμογή του γραμμικού μετασχηματισμού, $X_i^t = X_i^{*t} + \mu_X$ την αναπαραγωγή αυτής. Η μεταβλητή X_i^t έχει συνεπώς, όμοια στατιστικά χαρακτηριστικά με τη μεταβλητή X_i^{*t} , αλλά μέση τιμή μ_X .

Τα υπό εξέταση υδρολογικά δείγματα συνεπώς, θα αποτελούν πραγματοποιήσεις της τυχαίας μεταβλητής X_i^t , όπως αυτή περιγράφηκε ανωτέρω. Για κάθε λοιπόν σταθμό i (κ στον αριθμό) δημιουργούνται 10,000 χρονοσειρές (10,000 πραγματοποιήσεις της ανέλιξης X_i^t), λαμβάνοντας υπόψη τόσο τη μεταξύ τους συσχέτιση, όσο και τη δομή αυτοσυσχέτισης του κάθε σταθμού με εφαρμογή της σχέσης (4.19).

Ανακεφαλαιώνοντας τα δεδομένα[‡], οι παράμετρο προς προσδιορισμό καθώς και οι παραδοχές που έγιναν στα πλαίσια επίλυσης του ανωτέρω προβλήματος συνοψίζονται στα εξής:

➤ Παραδοχές

- ✓ Η ανέλιξη X_i^t ακολουθεί κανονική κατανομή
- ✓ Η ανέλιξη X_i^t είναι στάσιμη
- ✓ Η δομή αυτοσυσχέτισης της ανέλιξης X_i^t είναι συμβατή με τη λογική αναπαραγωγής της μακροπρόθεσμης εμμονής, που χαρακτηρίζει τις ανεξάρτητες απλής ομοιοθεσίας
- ✓ Ο συντελεστής Hurst είναι κοινός για όλες τις θέσεις ενδιαφέροντος (πεδίο ομογενές)
- ✓ Οι λευκοί θόρυβος X_i^t ακολουθεί κανονική κατανομή

* $\rho_j^{(k)} = \rho_j = \frac{1}{2}[(j+1)^{2H} + (j-1)^{2H}] - 2j^{2H}, j > 0$

† Κατά συνέπεια, και οι αντίστοιχοι λευκοί θόρυβοι έχουν μηδενική μέση τιμή, αλλά και η ανέλιξη X_i^t , ήτοι: $E[V_A^t] = E[V_B^t] = E[V_C^t] = 0, E[X_i^{*t}] = 0$

‡ «Δεδομένα», από την άποψη πως επελέγησαν οι τιμές τους από τη συγγραφέα για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας

- ✓ Ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης r_{ij} είναι κοινός για κάθε ζεύγος i, j (πεδίο ομογενές)

➤ Δεδομένα

- ✓ Στατιστικά χαρακτηριστικά ανέλιξης X_i^t , ήτοι: $\mu_X = 400$, $\sigma_X = 100$
- ✓ Μήκος χρονοσειρών, $n = 50$
- ✓ Αριθμός σταθμών, $k = 2, 3, \dots, 10$
- ✓ Ακρίβεια – Αριθμός πραγματοποιήσεων ανέλιξης X_i^t ανά σταθμό, ακρίβεια = 10,000

➤ Παράμετροι προς προσδιορισμό

- ✓ Μητρώα παραμέτρων a_{Aij} , a_{Bij} και a_{Cij}
- ✓ Μητρώα παραμέτρων b_{Aij} , b_{Bij} και b_{Cij}
- ✓ Μέση τιμή λευκών θορύβων λευκών θορύβων $\mu_{V_i}^*$, για τον προσδιορισμό των αντίστοιχων χρονοσειρών, οι οποίες θα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_{V_i} και τυπική απόκλιση $\sigma_{V_i} = 1$

Οι διάφορες εκτιμήσεις που θα ακολουθήσουν θα πραγματοποιηθούν και στην ανάλυση αυτή, για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j . Συγκεκριμένα το βήμα μεταβολής του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} , οι οριακές τιμές του οποίου είναι μηδέν και ένα, θεωρήθηκε 0.05. Σε ο,τι αφορά στις τιμές του συντελεστή Hurst, ο οποίος εκφράζει την αυτοσυσχέτιση της ανέλιξης X_i^t , οι εκτιμήσεις θα γίνουν για διάφορες τιμές αυτού καθώς είναι προφανές πως η «ένταση» της αυτοσυσχέτισης των χρονοσειρών θα επηρεάζει και την αντίστοιχη υδρολογική πληροφορία τις χαρακτηρίζει. Συγκεκριμένα ο συντελεστής Hurst θα παίρνει τις τιμές $H = 0.55, 0.6, 0.7, 0.8$ και 0.9 .

Σε ό,τι αφορά στον προσδιορισμό των συντελεστών αυτοσυσχέτισης a_{Aij} , a_{Bij} και a_{Cij} των ανελιξεων A_i^t , B_i^t , C_i^t , αντίστοιχα, έγινε και εδώ η παραδοχή πως τα αντίστοιχα μητρώα είναι διαγώνια (Σχέση (4.3) – εναλλακτική απλουστευμένη περίπτωση), λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη πως οι εν λόγω ανελιξεις είναι στάσιμες, ήτοι

* Η παράμετρος b_{ij} εισήχθη με σκοπό τη χρήση του λευκού θορύβου με τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα, $\sigma_{V_i} = 1$

$$(4.3) \begin{cases} a_{Aij} = a_{A11} = a_{A22} = \dots = a_{Akk} = Cov[A_i^t, A_i^{t-1}] / Var[A_i^{t-1}] = \rho \\ a_{Bij} = a_{B11} = a_{B22} = \dots = a_{Bkk} = Cov[B_i^t, B_i^{t-1}] / Var[B_i^{t-1}] = \varphi \\ a_{Cij} = a_{C11} = a_{C22} = \dots = a_{Ckk} = Cov[C_i^t, C_i^{t-1}] / Var[C_i^{t-1}] = \xi \end{cases} \quad (4.23)$$

Η διαδικασία προσδιορισμού των μητρώων παραμέτρων b_{Aij} , b_{Bij} και b_{Cij} έγκειται στον υπολογισμό των γινομένων $c_A = b_{Aij}(b_{Aij})^T$, $c_B = b_{Bij}(b_{Bij})^T$ και $c_C = b_{Cij}(b_{Cij})^T$, αντίστοιχα (Σχέση (4.4)), η οποία έχει περιγραφεί αναλυτικά στο εδάφιο 4.1.

Για τη γένεση λοιπόν χρονοσειρών, οι οποίες θα αντιπροσωπεύουν τα υπό εξέταση υδρολογικά δείγματα, με εφαρμογή της (4.19) απομένει ο προσδιορισμός της μέσης τιμής των λευκών θορύβων $\mu_{V_{Ai}}$, $\mu_{V_{Bi}}$ και $\mu_{V_{Ci}}$ των ανεξίξεων A_i^t , B_i^t , C_i^t , αντίστοιχα (Η τυπική απόκλιση όλων των μεταβλητών του λευκού θορύβου ισούται με τη μονάδα, ήτοι $\sigma_{V_{Ai}} = \sigma_{V_{Bi}} = \sigma_{V_{Ci}} = 1$). Η διαδικασία, που ακολουθήθηκε για τον προσδιορισμό των εν λόγω τιμών, έχει επίσης αναπτυχθεί στο εδάφιο 4.1* και οι αποδείξεις των αντίστοιχων σχέσεων παρατίθενται στο παράρτημα Α.

Κατά τα γνωστά, ακολουθεί στατιστική ανάλυση των υδρολογικών χρονοσειρών που δημιουργήθηκαν κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης, με σκοπό την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών. Η εκτίμηση αυτή, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις που εξετάστηκαν, θα γίνει με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας μέσης τιμής, τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς ενώ παράλληλα θα πραγματοποιηθεί και εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του δείγματος.

Προτού όμως πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε ανάλυση, οφείλει και σε αυτή την περίπτωση να ληφθεί υπόψη η αδυναμία των κλασικών στατιστικών εκτιμητριών να αποδώσουν τις πραγματικές τιμές των διάφορων στατιστικών μεγεθών στην περίπτωση χρονοσειρών, χρονικά εξαρτημένων (εδάφια 2.1.3 και 2.1.4). Η στοχαστική αυτή φύση των υδρολογικών χρονοσειρών εισάγει αβεβαιότητα στις εκτιμήσεις, τόσο της διασποράς, όσο και της τυπικής απόκλισης. Η αβεβαιότητα αυτή μάλιστα, στην προσέγγιση που εξετάζουμε, είναι ακόμη μεγαλύτερη από εκείνη που εισάγεται στις εκτιμήσεις στατιστικών χαρακτηριστικών ανεξίξεων τύπου Markov.

Συνεπώς, προκειμένου να ληφθεί υπόψη η αβεβαιότητα που εισάγεται στις εκτιμήσεις, όπως και στην περίπτωση ανάλυσης ανεξίξεων τύπου Markov (Εδάφιο 4.1),

* Οι ανεξίξεις A_i^t , B_i^t , C_i^t είναι ανεξίξεις AR(1)

ακολουθείται η εξής διαδικασία. Για κάθε επιμέρους δείγμα (k στον αριθμό) και για κάθε πραγματοποίηση αυτού, εκτιμάται η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και η διασπορά με χρήση της αντίστοιχης εκτιμήτριας της κλασσικής στατιστικής. Εν συνεχεία, εκτιμάται η μέση τιμή αυτών. Με βάση τις εκτιμήσεις αυτές (μέσες τιμές διασποράς και τυπικής απόκλισης), υπολογίζονται οι αντίστοιχες μεροληψίες με εφαρμογή της σχέσης (4.7) και διορθώνονται με τις τιμές αυτές οι 10,000 προσεγγίσεις της διασποράς και της τυπικής απόκλισης (Σχέση (4.8)). Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και για το ενοποιημένο δείγμα.

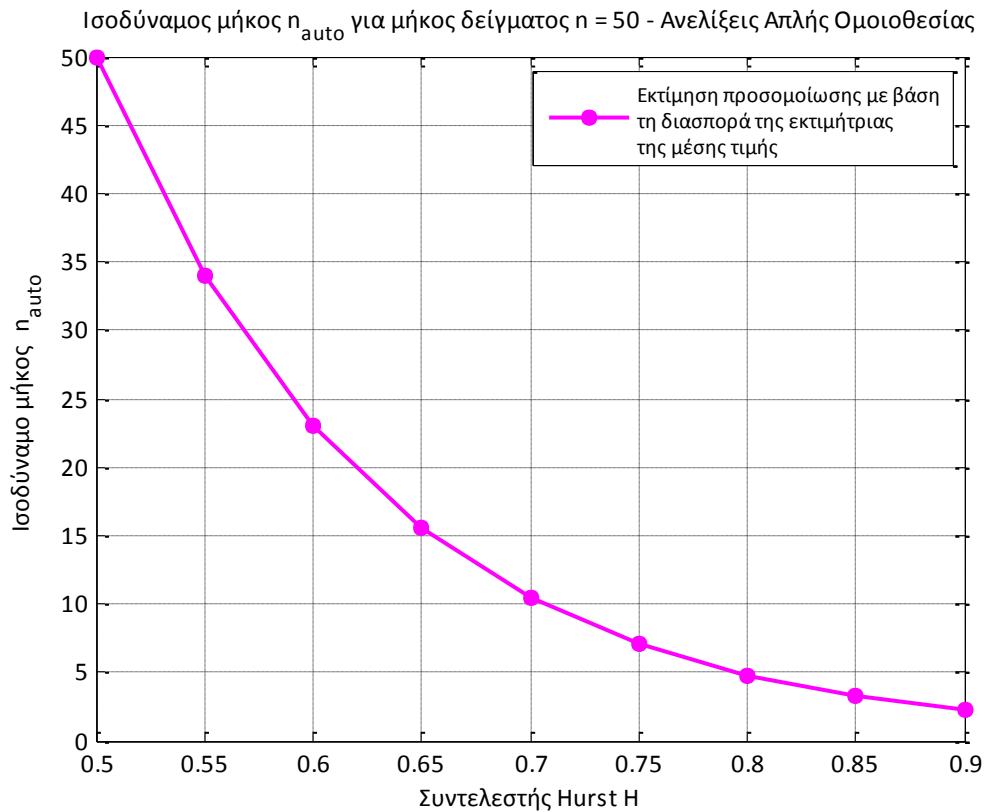
Η περιγραφή των προσεγγίσεων και των αντίστοιχων αποτελεσμάτων, που αφορούν στην εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα, πραγματοποιείται στα εδάφια που ακολουθούν (Εδάφια 4.2.1, 4.2.2 και 4.2.3, αντίστοιχα).

4.2.1 Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας – Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της μέσης τιμής

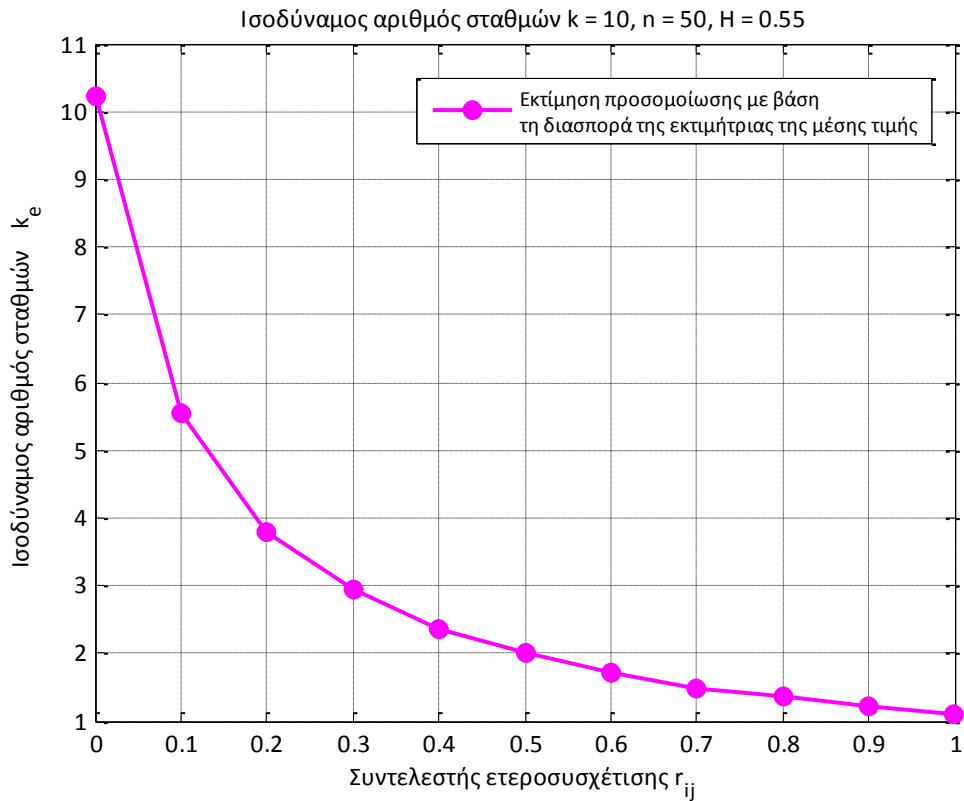
Για την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων, με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της μέση τιμής του ενοποιημένου δείγματος, η διαδικασία ανάλυσης είναι πανομοιότυπη με την περίπτωση των χρονικά εξαρτημένων δειγμάτων, με μορφή εξάρτησης τύπου Markov (Εδάφιο 4.1.1). Στην περίπτωση των ανεξίτηλων απλής ομοιοθεσίας που εξετάζουμε, η παράμετρος που θα μεταβάλλεται για τη διερεύνηση της επιρροής της έντασης της αυτοσυσχέτισης στις διάφορες εκτιμήσεις, θα είναι ο συντελεστής Hurst.

Ακολουθεί κατά τα γνωστά συνεπώς, με διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo για τη γένεση υδρολογικών δειγμάτων, εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος (Σχέση (4.11)), για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , αλλά και για διάφορες τιμές του συντελεστή Hurst των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων. Συγκεκριμένα το βήμα μεταβολής του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} , οι οριακές τιμές του οποίου είναι μηδέν και ένα, θεωρήθηκε 0.05. Σε ό,τι αφορά στο συντελεστή Hurst, δοκιμάστηκαν οι τιμές $H = 0.55, 0.6, 0.7, 0.8$ και 0.9 .

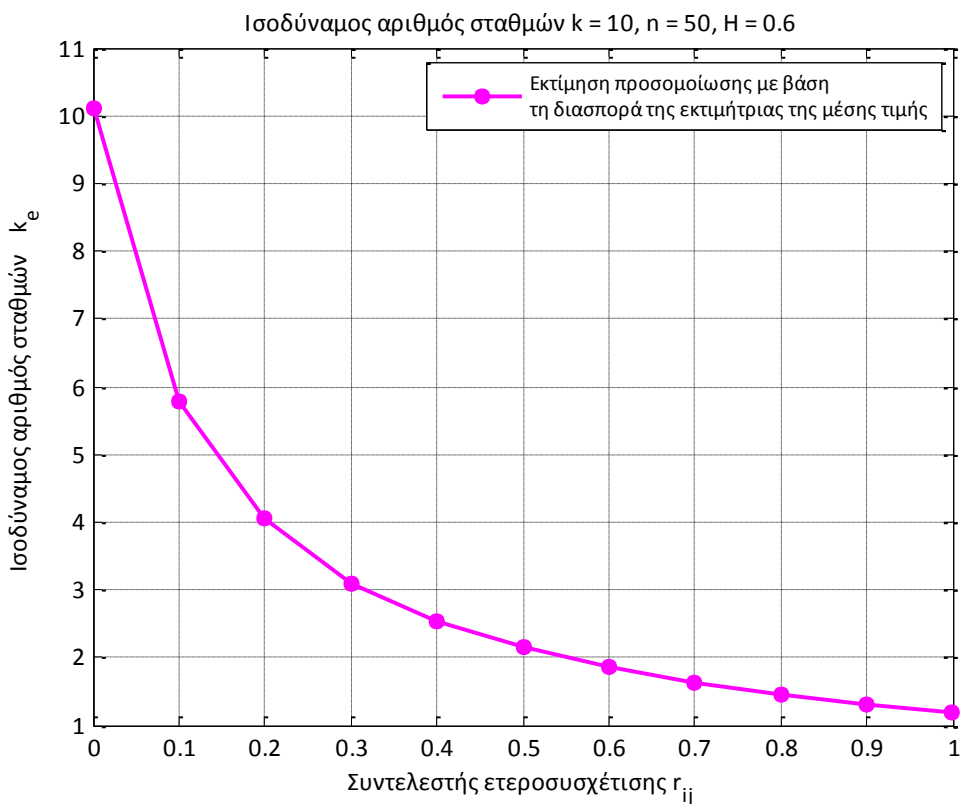
Η σχηματική παρουσίαση της εκτίμησης του ισοδύναμου μήκους n_{auto} ως προς το συντελεστή αυτοσυσχέτισης καθώς και της εκτίμησης του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55, 0.6, 0.7, 0.8$ και 0.9 , δίδεται στα ακόλουθα σχήματα (Σχήμα 4.16 και Σχήματα 4.17, 4.18, 4.19, 4.20 και 4.21, αντίστοιχα για αριθμό σταθμών $k = 10$). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα.



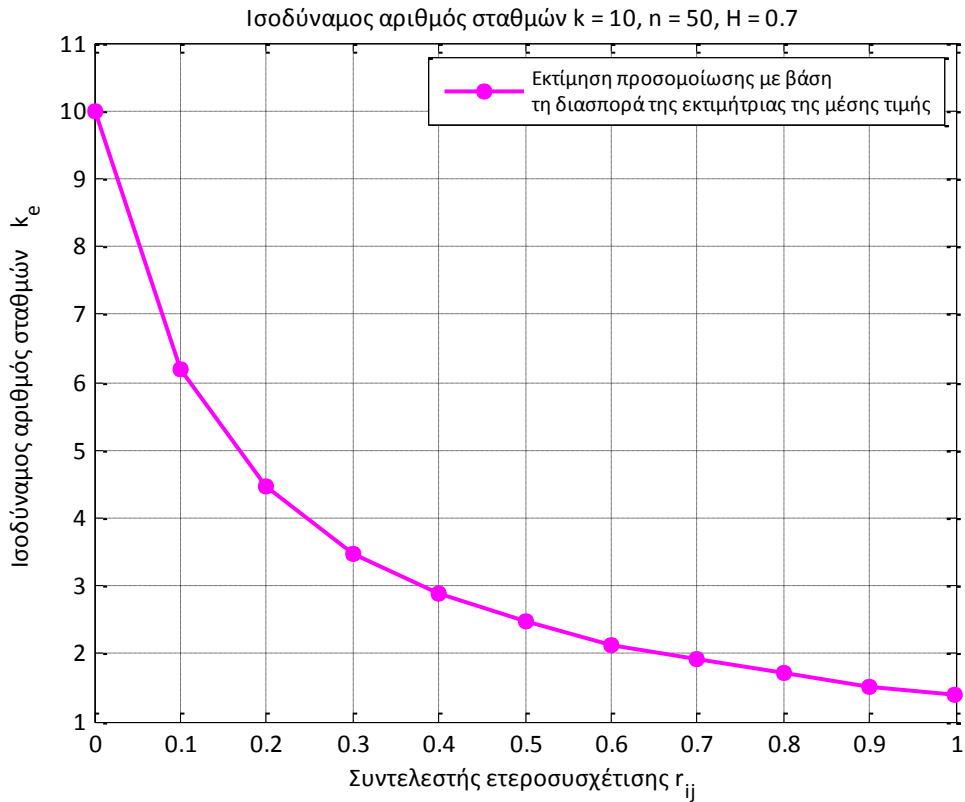
Σχήμα 4.16: Ισοδύναμο μήκος n_{auto} ως συνάρτηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 για μήκος δείγματος $n = 50$



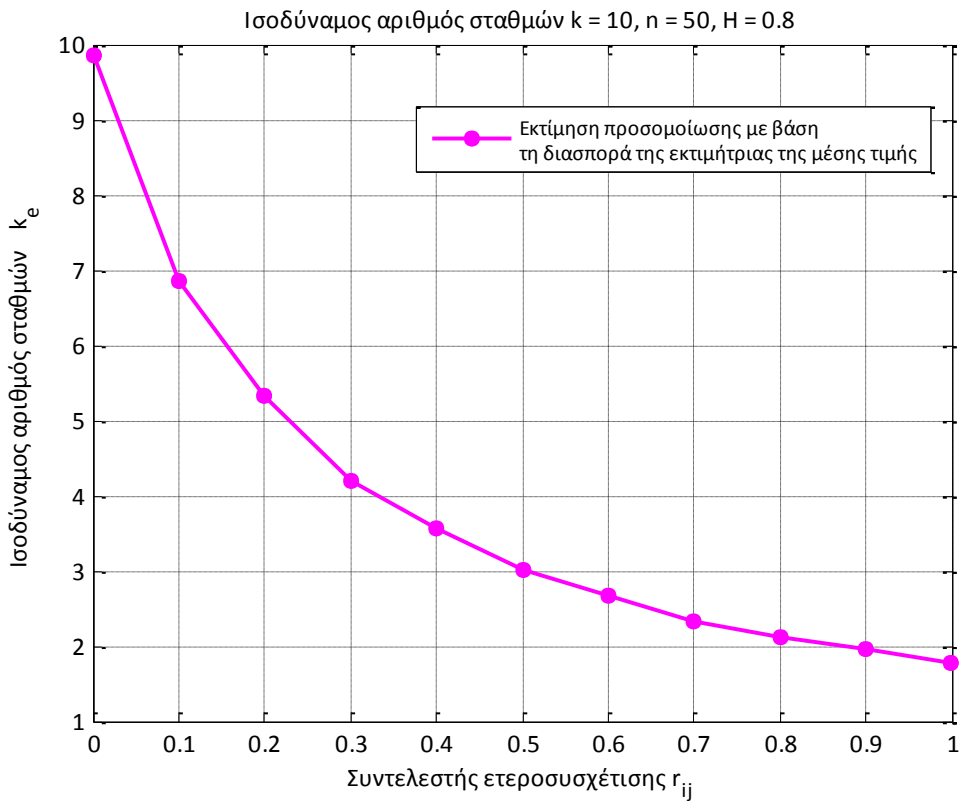
Σχήμα 4.17: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



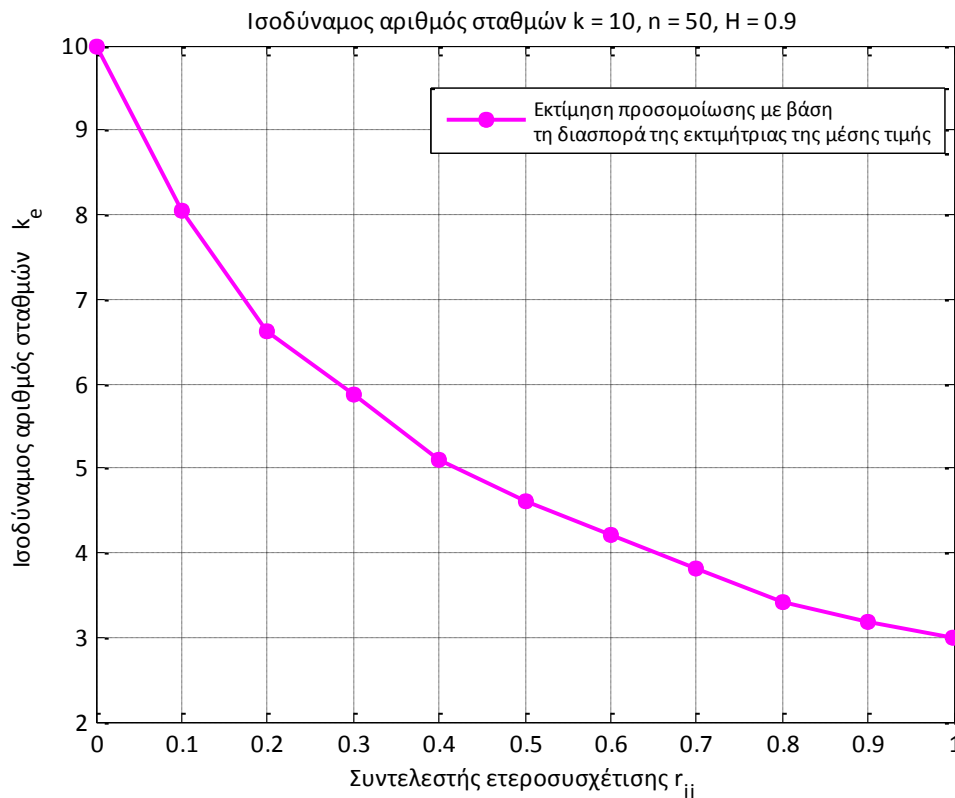
Σχήμα 4.18: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 4.19: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 4.20: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 4.21: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

Παρατηρείται λοιπόν, στα ανωτέρω σχήματα πως οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος, για την ίδια τιμή του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι αισθητά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν κατά τη στατιστική ανάλυση, τόσο ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων ($H = 0.5$), όσο και χρονικά εξαρτημένων με μορφή εξάρτησης τύπου Markov. Μάλιστα, για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και συντελεστή ετεροσυσχέτισης $r_{ij} = 1$, ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος τείνει στο τρία.

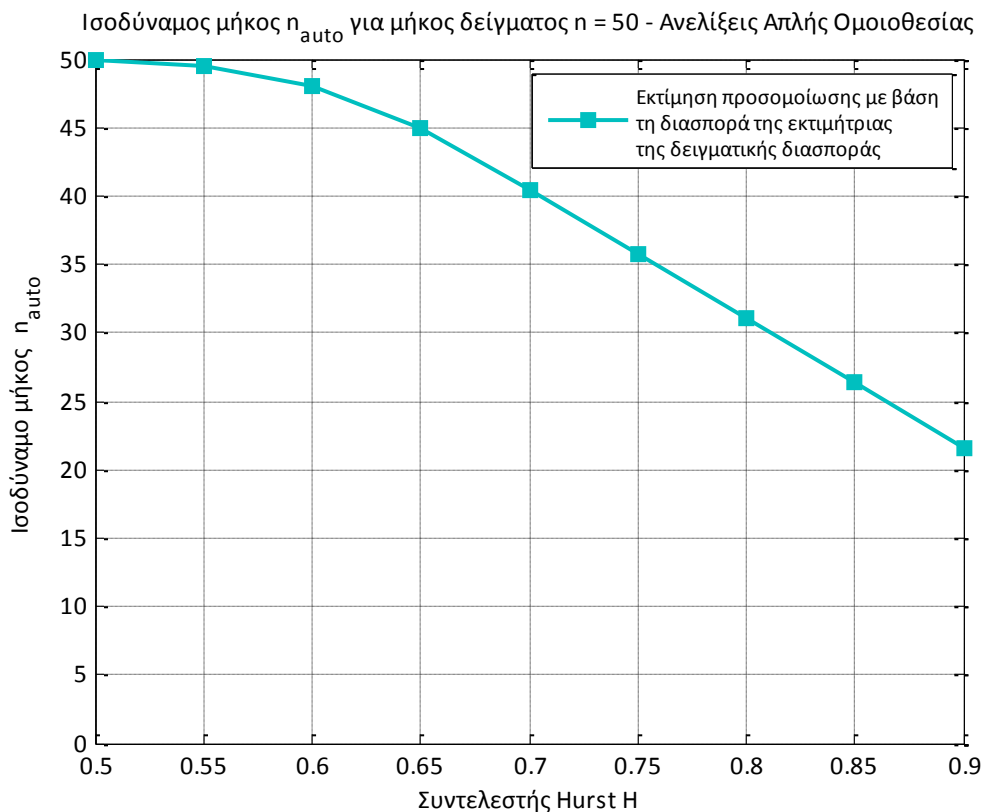
4.2.2 Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας – Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της δειγματικής διασποράς

Όπως και παραπάνω, για την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων, με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς του ενοποιημένου δείγματος, η διαδικασία ανάλυσης είναι πανομοιότυπη με την περίπτωση των χρονικά εξαρτημένων δειγμάτων, με μορφή εξάρτησης τύπου Markov (Εδάφιο 4.1.2).

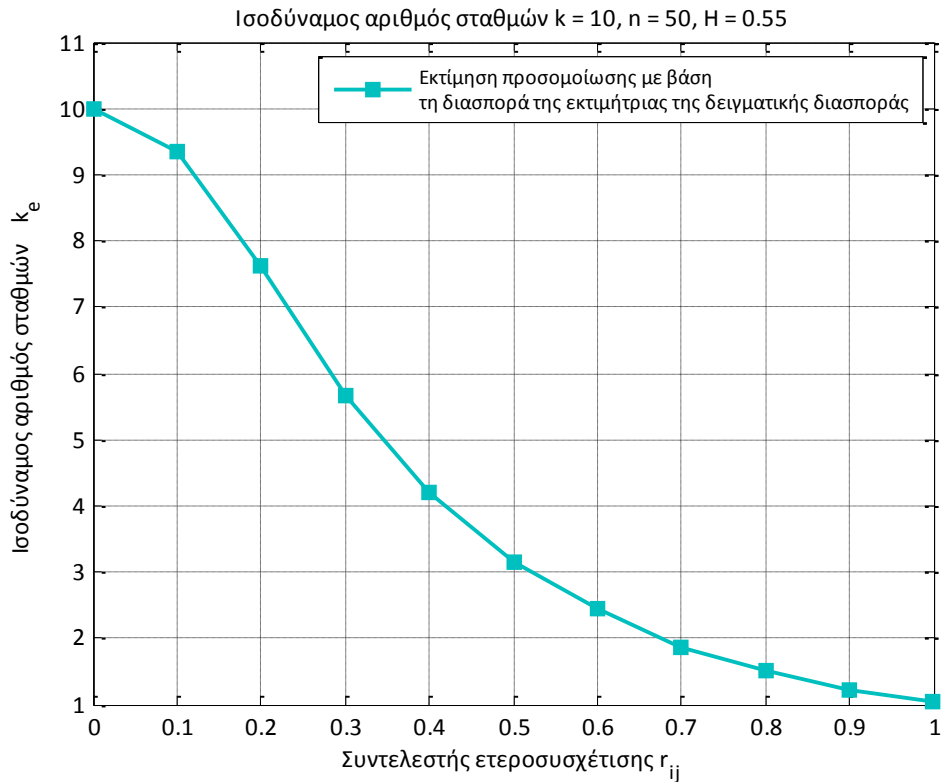
Ακολουθεί κατά τα γνωστά συνεπώς, με διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo για τη γένεση υδρολογικών δειγμάτων, εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του

ενοποιημένου δείγματος (Σχέση (4.14)), για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , αλλά και για διάφορες τιμές του συντελεστή Hurst των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων.

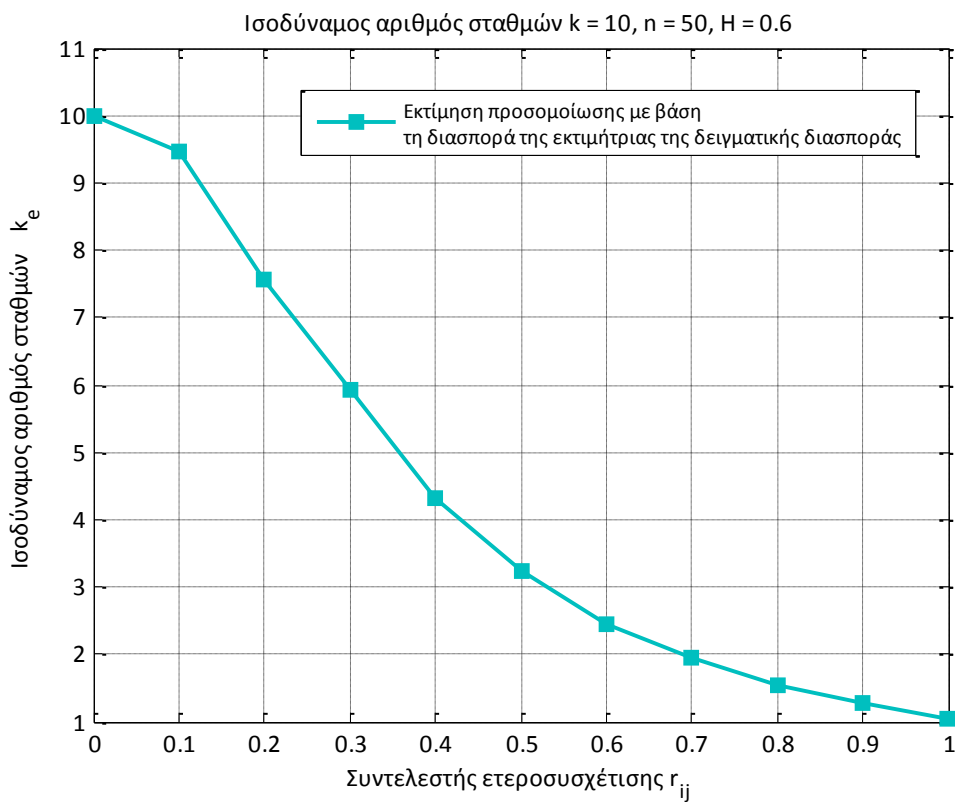
Η σχηματική παρουσίαση της εκτίμησης του ισοδύναμου μήκους n_{auto} ως προς το συντελεστή αυτοσυσχέτισης καθώς και της εκτίμησης του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55, 0.6, 0.7, 0.8$ και 0.9 , δίδεται στα ακόλουθα σχήματα (Σχήμα 4.22 και Σχήματα 4.23, 4.24, 4.25, 4.26 και 4.27, αντίστοιχα για αριθμό σταθμών $k = 10$). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Β.



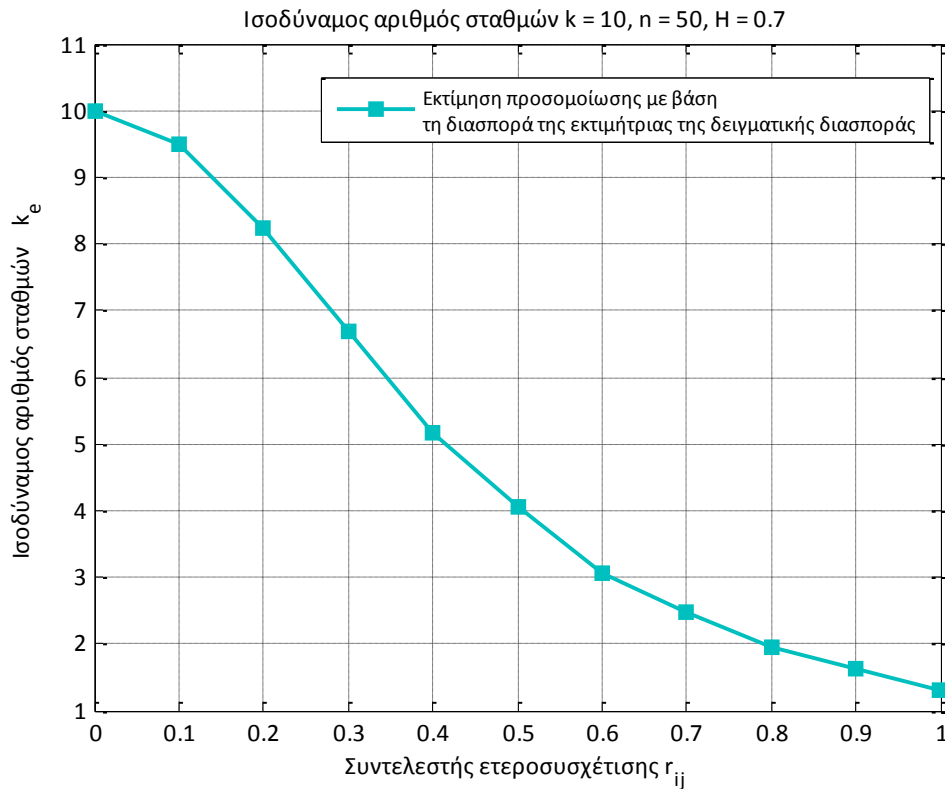
Σχήμα 4.22: Ισοδύναμο μήκος n_{auto} ως συνάρτηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 για μήκος δείγματος $n = 50$



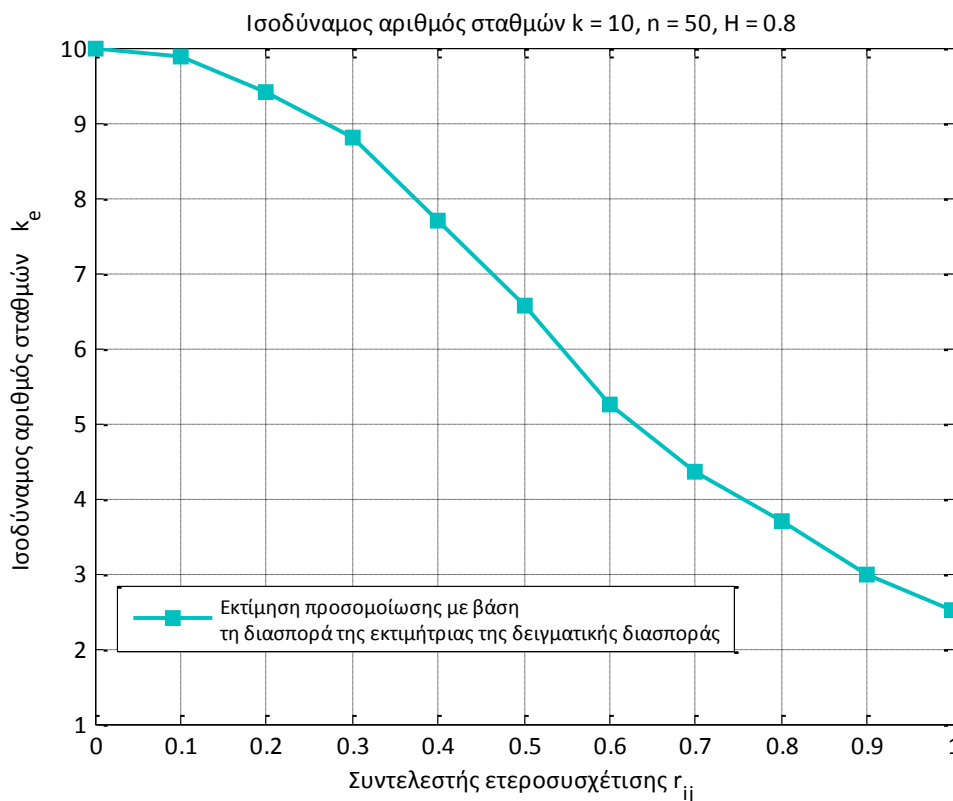
Σχήμα 4.23: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



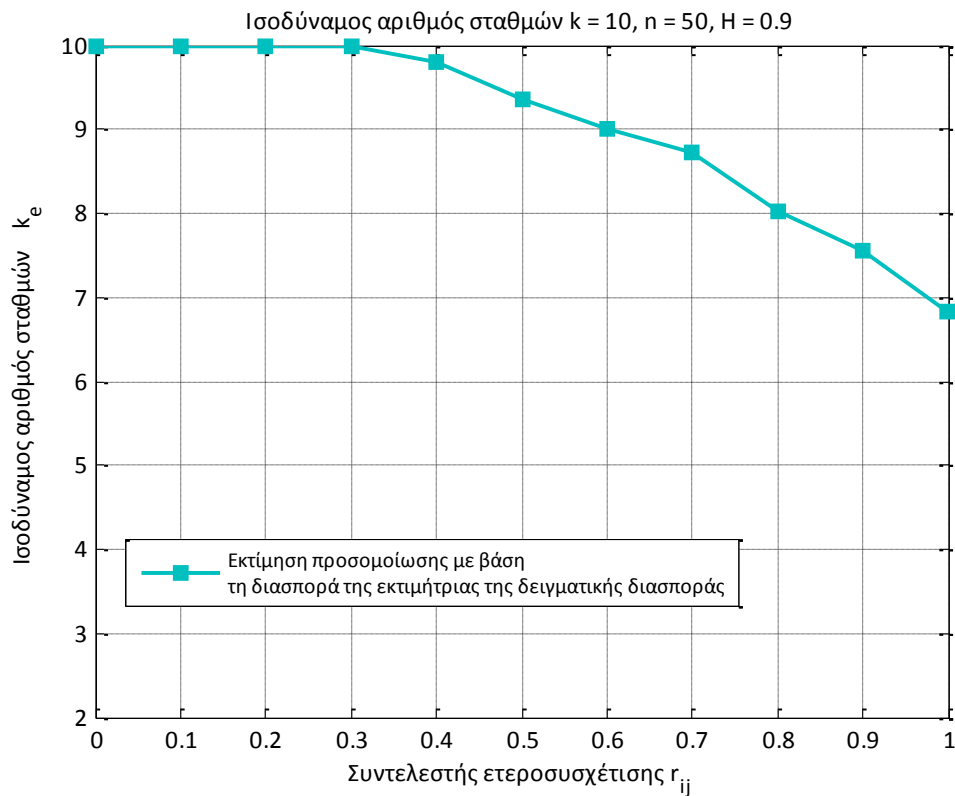
Σχήμα 4.24: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 4.25: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 4.26: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



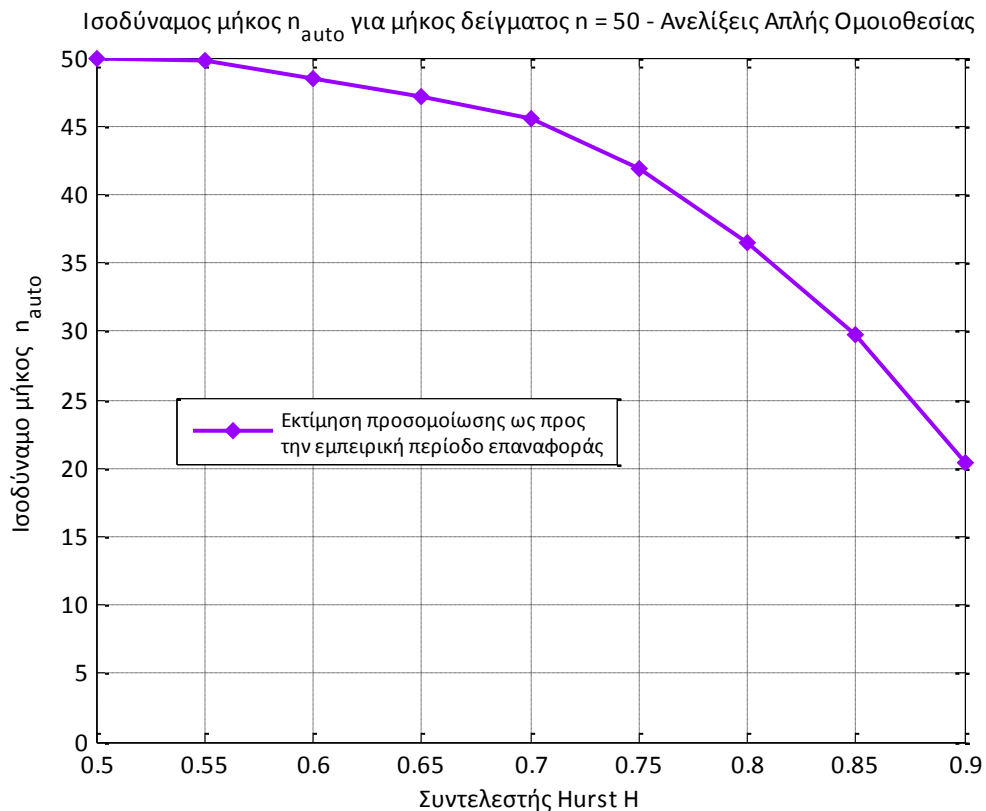
Σχήμα 4.27: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

Παρατηρείται πως και σε αυτήν την περίπτωση, οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος, για την ίδια τιμή του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι αισθητά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν κατά τη στατιστική ανάλυση, τόσο ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων ($H = 0.5$), όσο και χρονικά εξαρτημένων με μορφή εξάρτησης τύπου Markov. Μάλιστα, για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και συντελεστή ετεροσυσχέτισης $r_{ij} = 1$, ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος τείνει στο εφτά.

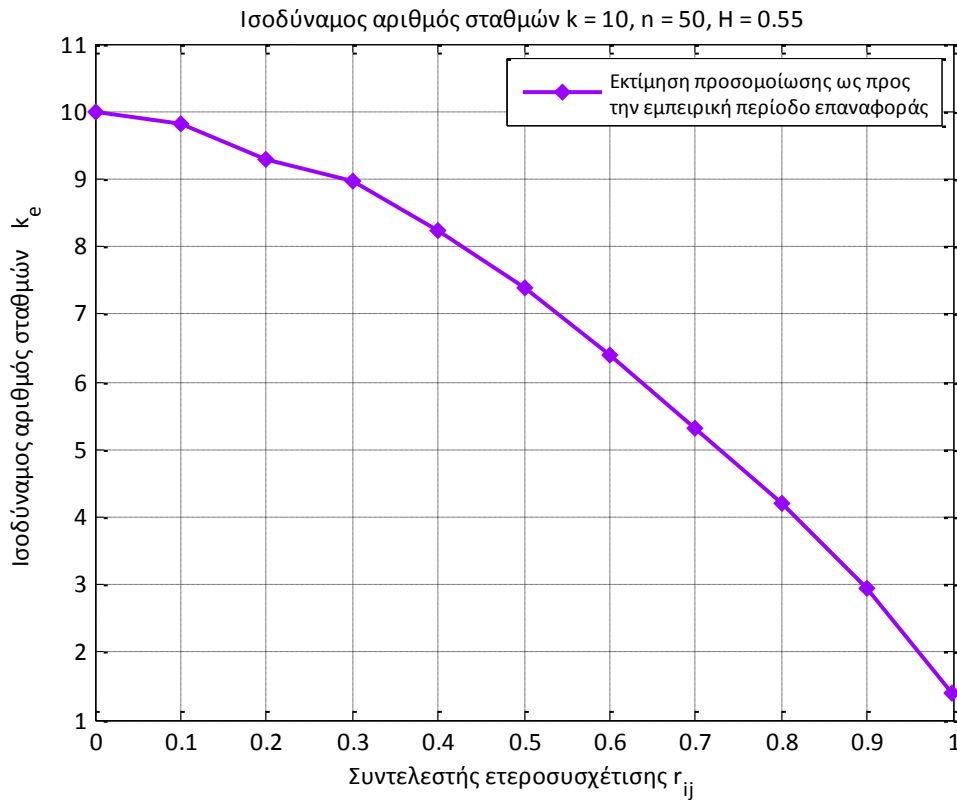
4.2.3 Διερεύνηση επαύξησης υδρολογικής πληροφορίας ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς

Κατά τα γνωστά (Εδάφιο 4.1.3), σε ό,τι αφορά στην εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς, ακολουθεί διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo για τη γένεση υδρολογικών δειγμάτων και εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος (Σχέση (4.18)), για διάφορες τιμές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , αλλά και για διάφορες τιμές του συντελεστή Hurst των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων.

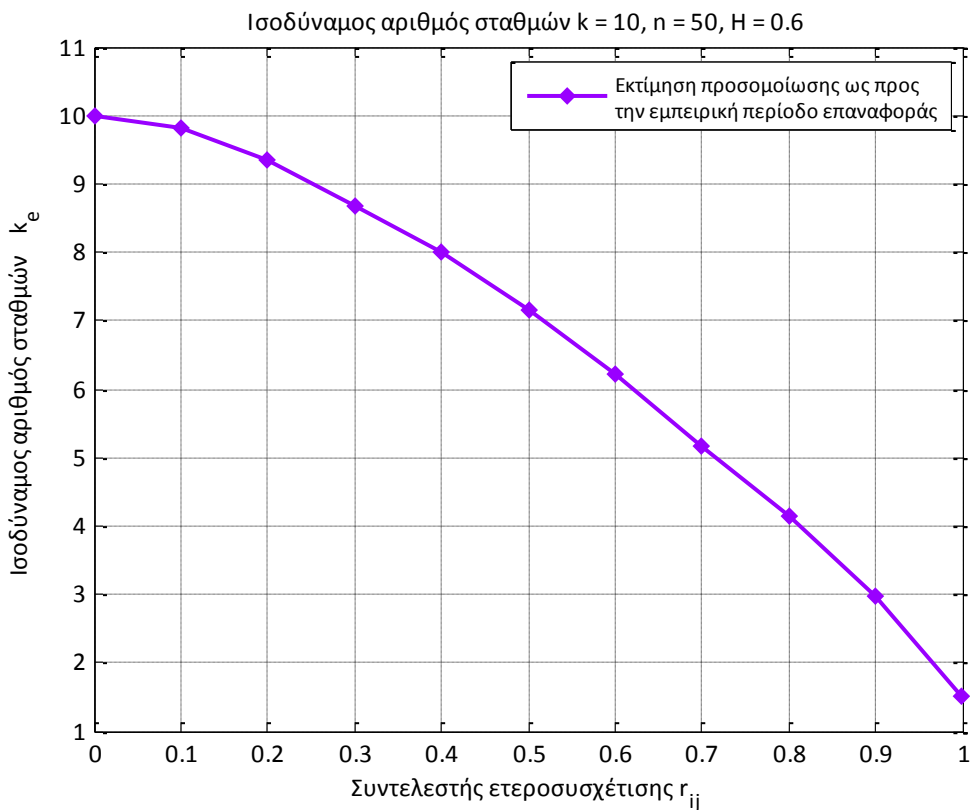
Η σχηματική παρουσίαση της εκτίμησης του ισοδύναμου μήκους n_{auto} ως προς το συντελεστή αυτοσυσχέτισης καθώς και της εκτίμησης του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55, 0.6, 0.7, 0.8$ και 0.9 , δίδεται στα ακόλουθα σχήματα (Σχήμα 4.28 και Σχήματα 4.29, 4.30, 4.31, 4.32 και 4.33, αντίστοιχα για αριθμό σταθμών $k = 10$). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα.



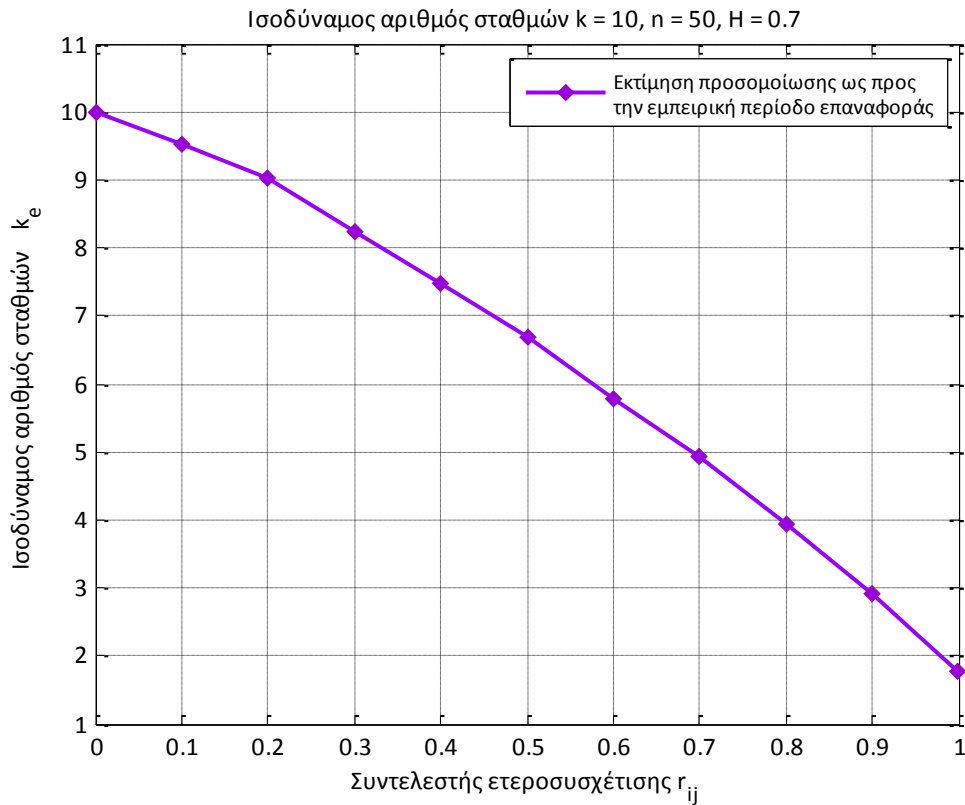
Σχήμα 4.28: Ισοδύναμο μήκος n_{auto} ως συνάρτηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 για μήκος δείγματος $n = 50$



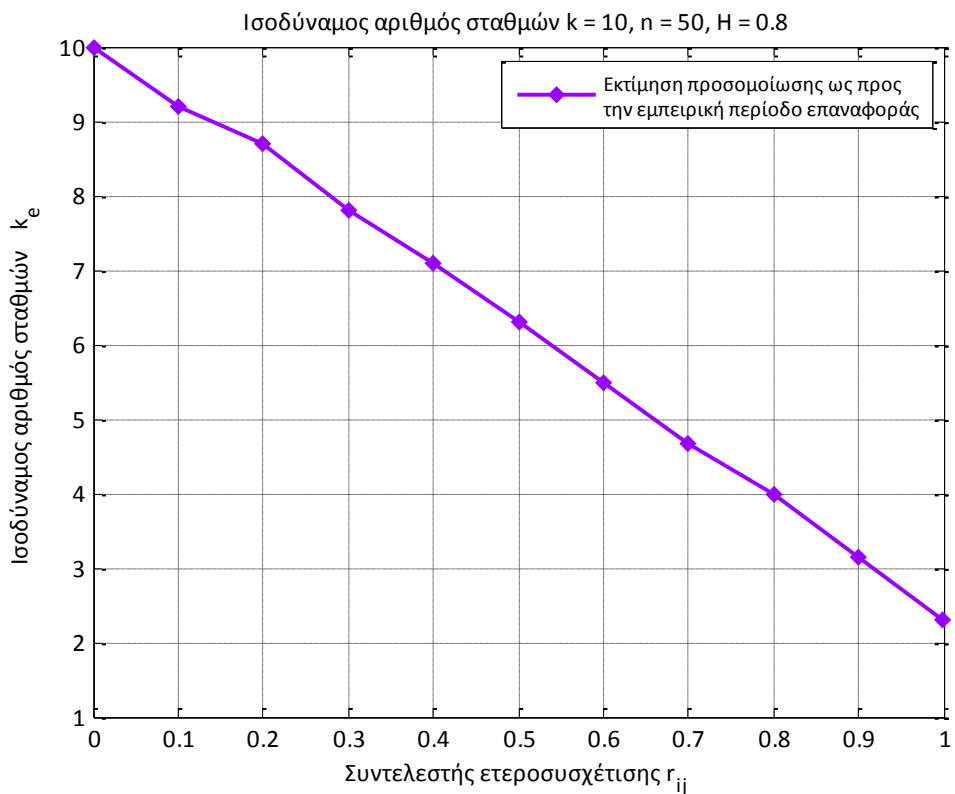
Σχήμα 4.29: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



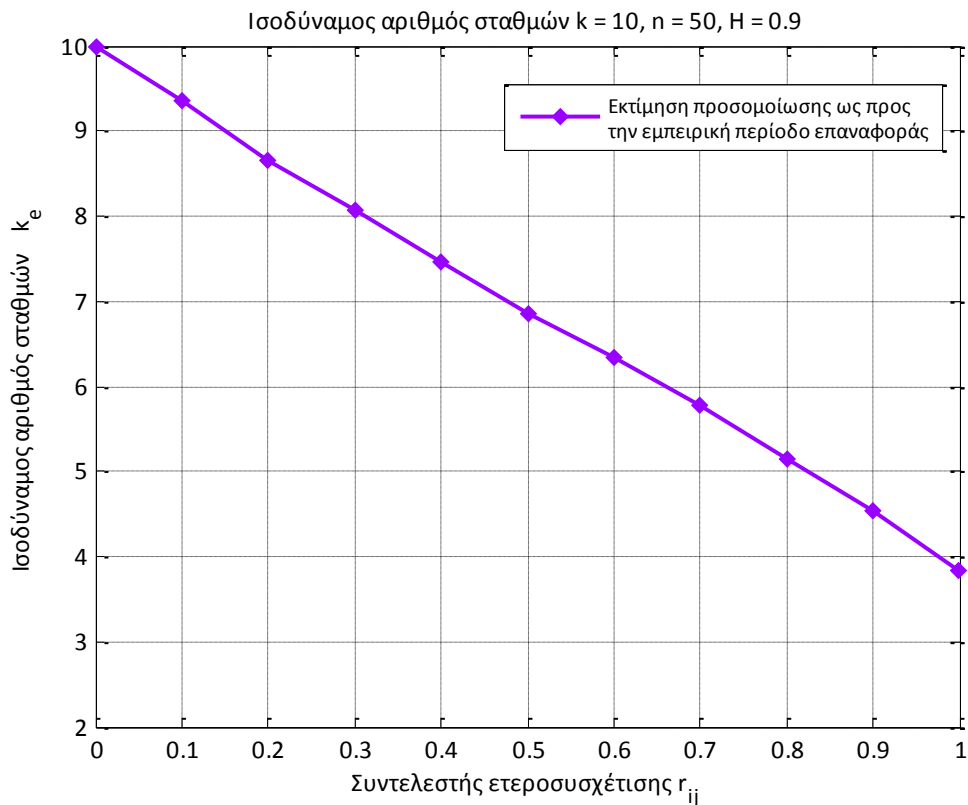
Σχήμα 4.30: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 4.31: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 4.32: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 4.33: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

Αυξανόμενου του συντελεστή Hurst λοιπόν, παρατηρείται πως για μικρούς συντελεστές ετεροσυσχέτισης r_{ij} , οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e , για την ίδια τιμή του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν κατά τη στατιστική ανάλυση, τόσο ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων ($H = 0.5$), όσο και χρονικά εξαρτημένων με μορφή εξάρτησης τύπου Markov. Για $r_{ij} > 0.5$ η κατάσταση αντιστρέφεται και οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων είναι γενικά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις περιπτώσεων χρονοσειρών μηδενικής αυτοσυσχέτισης.

5 Σύγκριση εκτιμήσεων προσομοίωσης Monte Carlo και αναλυτικών σχέσεων

Όπως προαναφέρθηκε, η έρευνα που πραγματοποιείται στα πλαίσια αυτής της εργασίας αφορά στη δυνατότητα αξιοποίησης πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων για βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων. Για τη διερεύνηση της δυνατότητας αυτής, επελέγη ως μεθοδολογία προσέγγισης η διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo. Ωστόσο, για τις δύο πρώτες εκτιμήσεις* που εξετάστηκαν υφίστανται αντίστοιχες αναλυτικές σχέσεις, οι οποίες αποδίδουν τον ισοδύναμο αριθμό σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα, ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης (Yule, 1945 και Stedinger, 1983, αντίστοιχα - Εδάφιο 2.3.1).

Συνεπώς, στην περίπτωση των χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων είναι προφανές πως τα αποτελέσματα της προσομοίωσης αναμένεται να έρχονται σε απόλυτη συμφωνία με εκείνα των αντίστοιχων αναλυτικών σχέσεων. Σε αντίθεση όμως, με τις κοινές τυχαίες σειρές λευκού θορύβου, οι υδρολογικές χρονοσειρές έχουν δομή, δηλαδή οι διαδοχικές τιμές των υδρολογικών χρονοσειρών είναι εξαρτημένες μεταξύ τους. Ένας από τους βασικούς λοιπόν στόχους αυτής της εργασίας είναι και η προσπάθεια να ληφθεί υπόψη στις εκτιμήσεις, ο στοχαστικός αυτός χαρακτήρας των υδρολογικών χρονοσειρών.

Δεδομένου ότι οι ήδη υπάρχουσες αναλυτικές σχέσεις αναφέρονται σε χρονοσειρές χρονικά ανεξάρτητες, σε πρώτη φάση επιχειρείται να ελεγχθεί με προσομοίωση η ισχύς των εν λόγω σχέσεων και σε περιπτώσεις χρονοσειρών χρονικά εξαρτημένων και εν συνεχεία (Κεφάλαιο 6) γίνεται προσπάθεια προσαρμογής αυτών, όπου αυτό κρίνεται απαραίτητο, ώστε να ληφθεί υπόψη η εμμονή που χαρακτηρίζει τις υδρολογικές χρονοσειρές. Παράλληλα, η ίδια προσέγγιση ακολουθείται και σε ό,τι αφορά στην εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς με βάση τις εκτιμήσεις με προσομοίωση των Κουτσογιάννη κ.α. (2010), οι παρατηρήσεις των οποίων θα χρησιμοποιηθούν και θα επεκταθούν για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας.

Για κάθε μοντέλο που αναπτύχθηκε ακολουθεί λοιπόν, συγκριτική παρουσίαση των αναλυτικών εκτιμήσεων του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e και των αντίστοιχων

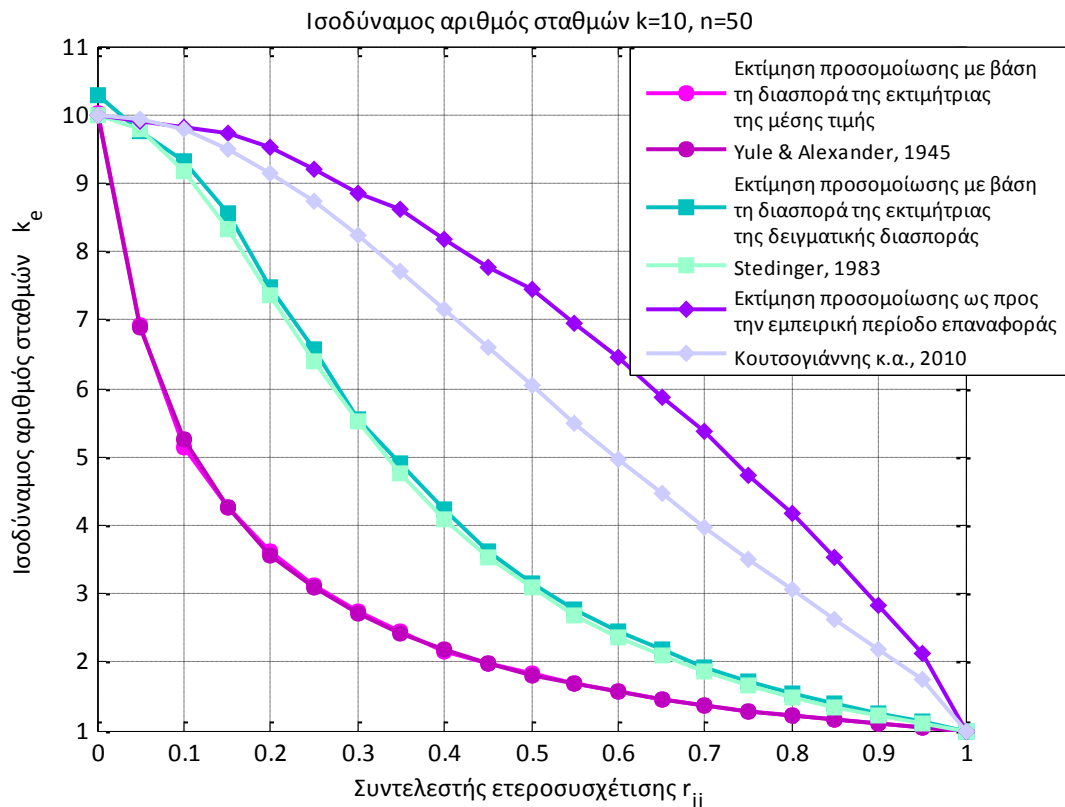
* Εκτίμηση με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής και τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς

εκτιμήσεων με προσομοίωση, ανάλογα με την υφιστάμενη συσχέτιση των υπό εξέταση υδρολογικών δειγμάτων. Η σύγκριση στην περίπτωση της εκτίμησης ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς θα γίνει με βάση τη (2.58), η μορφή της οποίας προέκυψε επίσης με προσομοίωση (Κουτσογιάννης κ.α., 2010).

5.1 Περίπτωση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων

Για την περίπτωση των ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων, η εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων του ενοποιημένου δείγματος εκφράζεται από τις σχέσεις (2.41) (Yule, 1945), (2.46) (Stedinger, 1983) και (2.58) (Κουτσογιάννης κ.α., 2010), οι οποίες βασίζονται στις εκτιμήσεις στη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής, στη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς και στην εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος, αντίστοιχα.

Για την περίπτωση αυτή λοιπόν, ακολουθεί συγκριτική παρουσίαση των εκτιμήσεων βάσει των σχέσεων (2.41), (2.46) και (2.58) και των αντίστοιχων εκτιμήσεων με προσομοίωση που πραγματοποιηθήκαν στο πλαίσιο αυτής της εργασίας και παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3, για αριθμό σταθμών $k = 10$ (Σχήμα 5.1). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Γ.



Σχήμα 5.1: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 10$

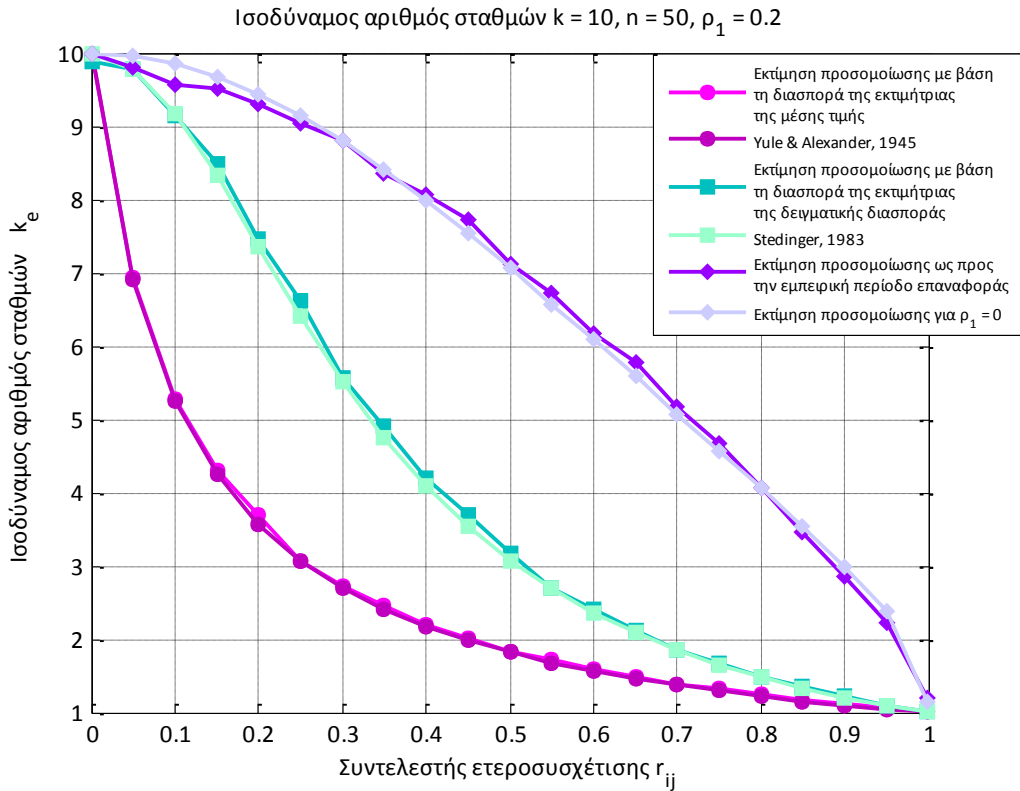
Παρατηρείται πως σε ό,τι αφορά στις εκτιμήσεις με προσομοίωση με βάση τις διασπορές των εκτιμητριών της μέσης τιμής και της δειγματικής διασποράς, αυτές έρχονται σε πλήρη συμφωνία με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις των σχέσεων (2.41) και (2.46) όπως ήταν αναμενόμενο άλλωστε, καθώς πρόκειται για σχέσεις που έχουν αποδειχθεί αναλυτικά και αναφέρονται σε χρονοσειρές χρονικά ανεξάρτητες. Σε ό,τι αφορά τώρα στην εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος, παρατηρείται πως για αριθμό σταθμών $k > 4$, οι εκτιμήσεις με βάση τη (2.58) είναι αισθητά μικρότερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις όπως αυτές προέκυψαν με διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo. Επισημαίνεται βέβαια, πως η μορφή της (2.58) * προέκυψε με διενέργεια προσομοίωσης για αριθμό σταθμών $k = 2$, περίπτωση για την οποία παρατηρείται πολύ καλή προσαρμογή της σχέσης στα αποτελέσματα της προσομοίωσης (ιδέ Παράρτημα Γ).

* Η περιγραφή για τον τρόπο που προέκυψε η σχέση (2.58) παρουσιάζεται αναλυτικότερα στο εδάφιο 2.3.2

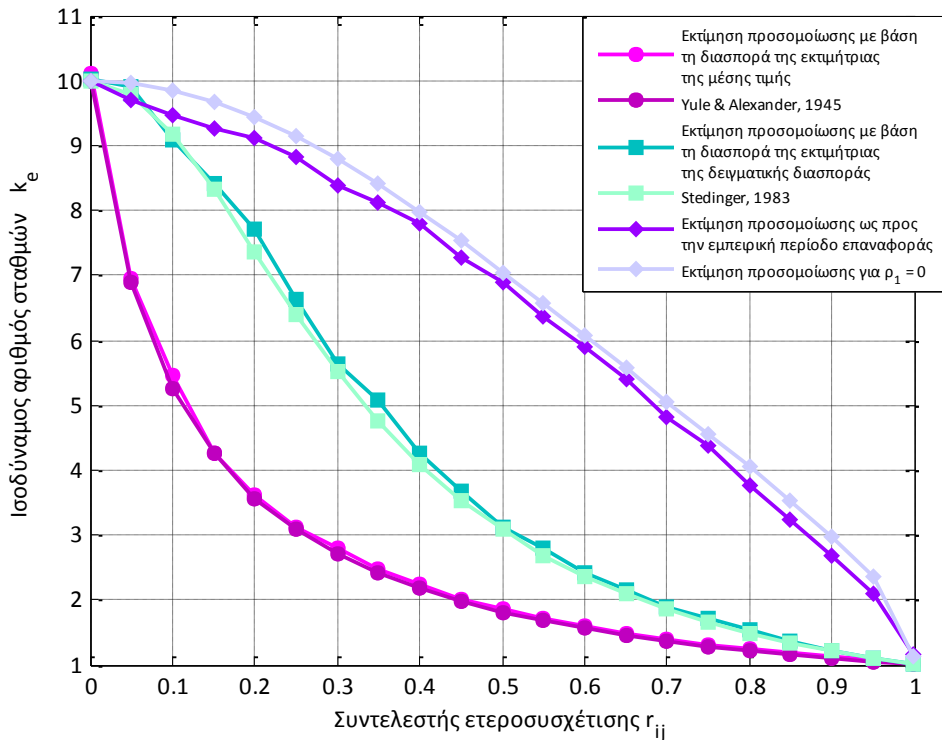
5.2 Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων («Μαρκοβιανή» προσέγγιση)

Όμοια με παραπάνω, ακολουθεί συγκριτική παρουσίαση των εκτιμήσεων βάσει των σχέσεων (2.41) και (2.46) και των αντίστοιχων εκτιμήσεων με προσομοίωση, για χρονοσειρές χρονικά εξαρτημένες τώρα, με μορφή εξάρτησης τύπου Markov. Σε ό,τι αφορά στις εκτιμήσεις της προσομοίωσης ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος η σύγκριση πραγματοποιήθηκε με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν με προσομοίωση κατά τη στατιστική ανάλυση, χρονικά ανεξάρτητων, υδρολογικών δειγμάτων ($\rho_1 = 0$). Η σύγκριση με τη σχέση (2.58) στην παρούσα φάση δεν έχει νόημα, καθώς αυτή υπερεκτιμά τις αντίστοιχες προσεγγίσεις με προσομοίωση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e , ακόμη και στην περίπτωση χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων (Σχήμα 5.1).

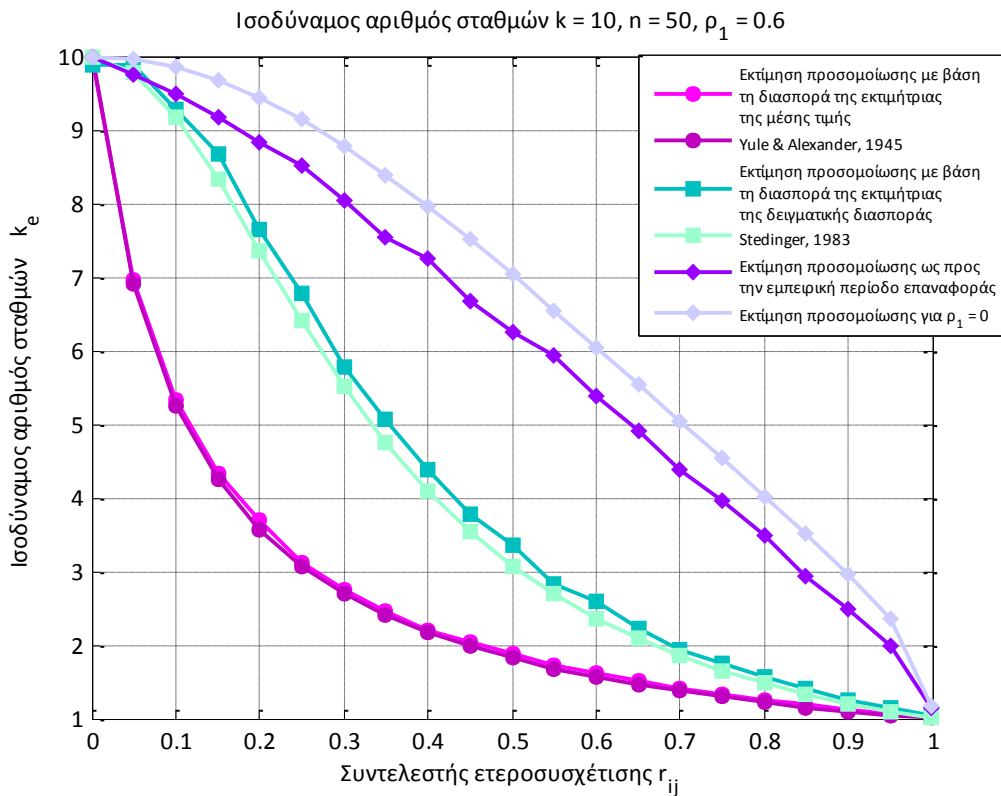
Συγκεκριμένα λοιπόν, παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων $\rho_1 = 0.2, 0.4, 0.6$ και 0.8 και για αριθμό σταθμών $k = 10$ (Σχήματα 5.2, 5.3, 5.4 και 5.5, αντίστοιχα). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Γ.



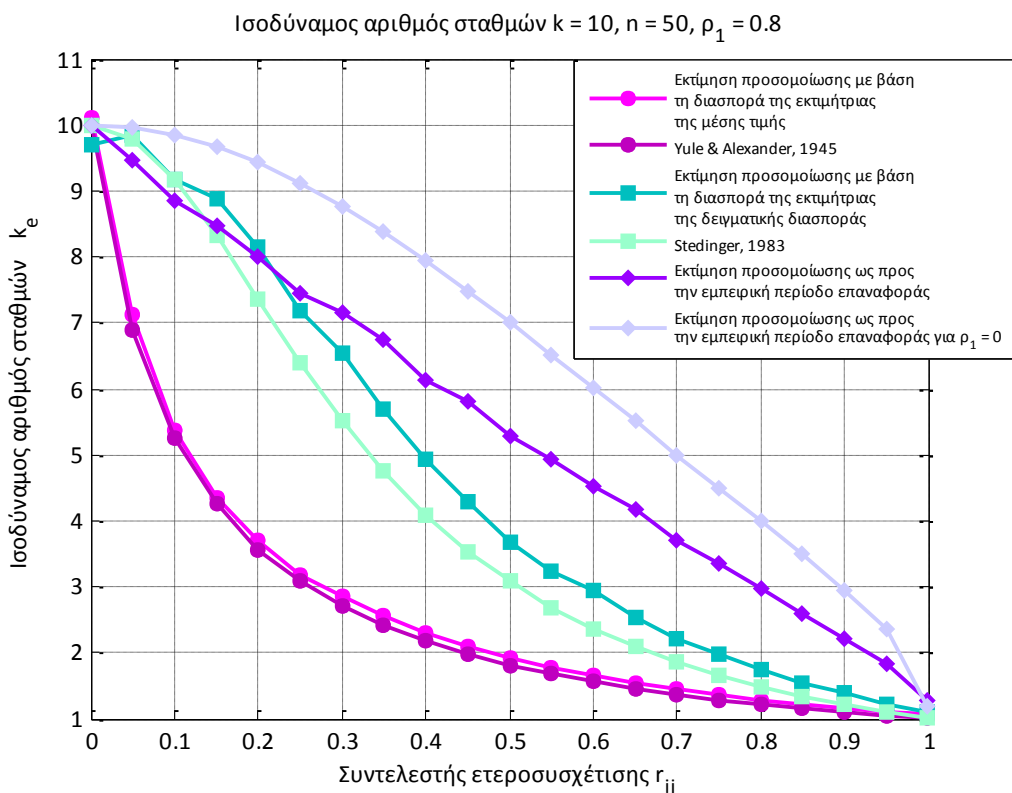
Σχήμα 5.2: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$
 Ισοδύναμος αριθμός σταθμών $k = 10, n = 50, \rho_1 = 0.4$



Σχήμα 5.3: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$



Σχήμα 5.4: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$



Σχήμα 5.5: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$

Καταρχάς, σε ό,τι αφορά στις εκτιμήσεις της προσομοίωσης με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής, στα ανωτέρω σχήματα, παρατηρείται πως η εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος, ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης, μπορεί να θεωρηθεί με καλή προσέγγιση ανεξάρτητη της αυτοσυσχέτισης που χαρακτηρίζει τις προς ενοποίηση υδρολογικές χρονοσειρές. Δεν απαιτείται λοιπόν, τροποποίηση της (2.41) για την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα στην περίπτωση χρονοσειρών χρονικά εξαρτημένων, με μορφή εξάρτησης τύπου Markov. Συνεπώς, αν για κάθε δείγμα προσδιοριστεί το ισοδύναμο μήκος $n_{i\text{auto}}$, χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων, και με βάση την προσέγγιση αυτή εκτιμηθεί ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα, η εξεταζόμενη περίπτωση μεταπίπτει στην περίπτωση στατιστικής ανάλυσης χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων, σε ό,τι αφορά στα αποτελέσματα των εκτιμήσεων και καθίσταται πλέον δυνατή η εφαρμογή της (2.41).

Για τις εκτιμήσεις της προσομοίωσης με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς παρατηρείται πως οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e , για την ίδια τιμή του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της σχέσης (2.46). Η κατάσταση βέβαια αυτή, γίνεται αισθητή για τιμές του συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 > 0.4$. Στην περίπτωση συνεπώς, χρονοσειρών χρονικά εξαρτημένων, με μορφή εξάρτησης τύπου Markov απαιτείται τροποποίηση της (2.46) για την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e , ώστε να ληφθεί υπόψη η βραχυπρόθεσμη εμμονή που χαρακτηρίζει τις εν λόγω χρονοσειρές.

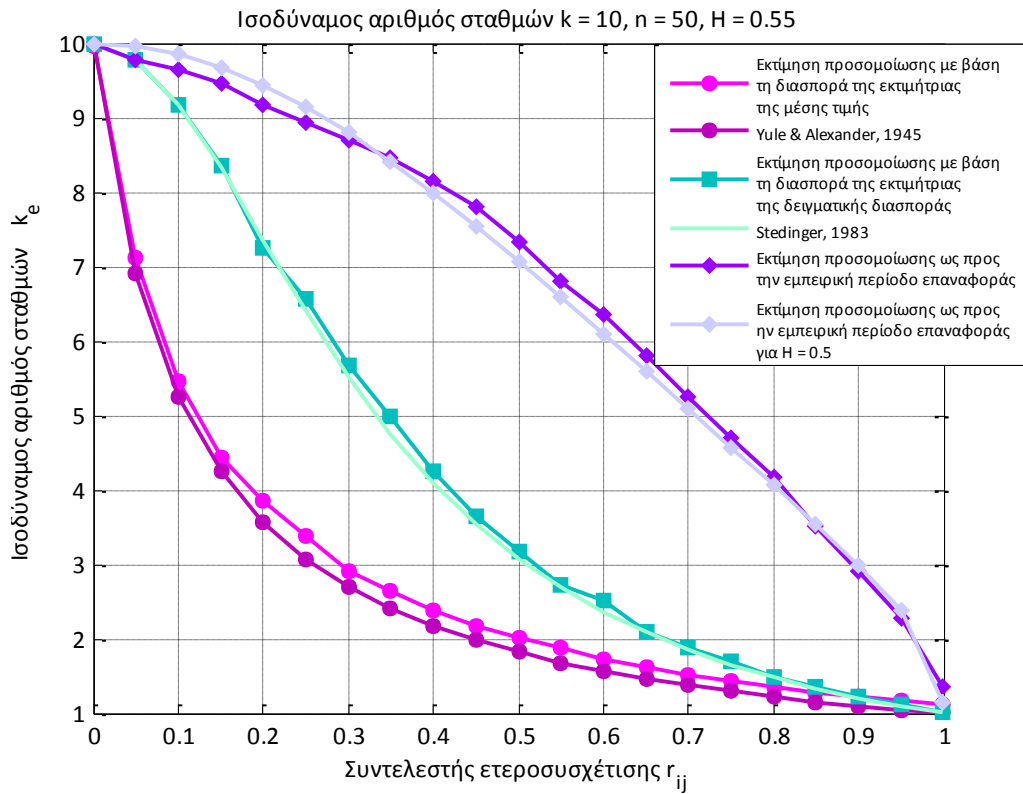
Τέλος, σε ό,τι αφορά στις εκτιμήσεις της προσομοίωσης ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος, η σύγκριση πραγματοποιήθηκε με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν με προσομοίωση κατά τη στατιστική ανάλυση, χρονικά ανεξάρτητων, υδρολογικών δειγμάτων ($\rho_1 = 0$). Από την παραπάνω σύγκριση λοιπόν, παρατηρείται (Σχήματα 5.2, 5.3, 5.4 και 5.5) πως οι εκτιμήσεις, για την ίδια τιμή του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι αισθητά μικρότερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν κατά τη στατιστική ανάλυση υδρολογικών δειγμάτων μηδενικής αυτοσυσχέτισης. Η κατάσταση αυτή, γίνεται πιο έντονη καθώς αυξάνεται ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης των υπό εξέταση υδρολογικών δειγμάτων.

Μάλιστα, για $\rho_1 > 0.6$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τη συσχέτιση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών και του συντελεστή ετεροσυσχέτισης προσεγγίζει την ευθεία. Καταλήγουμε συνεπώς, στο συμπέρασμα πως απαιτείται καταρχάς τροποποίηση της (2.58), ώστε να έρχεται σε συμφωνία με τις εκτιμήσεις της προσομοίωσης για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0$, και εν συνεχεία τροποποίηση αυτής ώστε να λαμβάνει υπόψη τη βραχυπρόθεσμη μνήμη που παρουσιάζουν οι χρονοσειρές που εξετάζουμε.

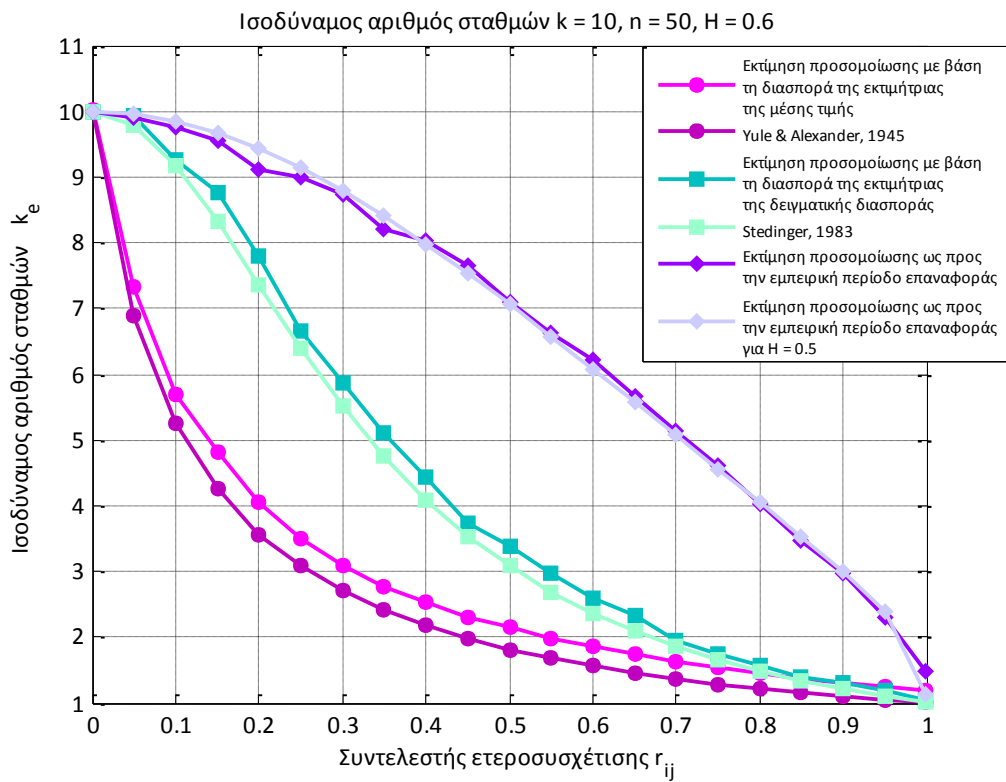
5.3 Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων (Ανεξίξεις Απλής Ομοιοθεσίας)

Σε ότι αφορά στην περίπτωση υδρολογικών δειγμάτων χρονικά εξαρτημένων με μορφή εξάρτησης συμβατή με την εξάρτηση που χαρακτηρίζει τις ανεξίξεις απλής ομοιοθεσίας, κατά τα γνωστά, ακολουθεί συγκριτική παρουσίαση των εκτιμήσεων βάσει των σχέσεων (2.41) και (2.46) και των αντίστοιχων εκτιμήσεων με προσομοίωση. Για την εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος και πάλι η σύγκριση πραγματοποιήθηκε με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν με προσομοίωση, κατά τη στατιστική ανάλυση χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων ($\rho_1 = 0$).

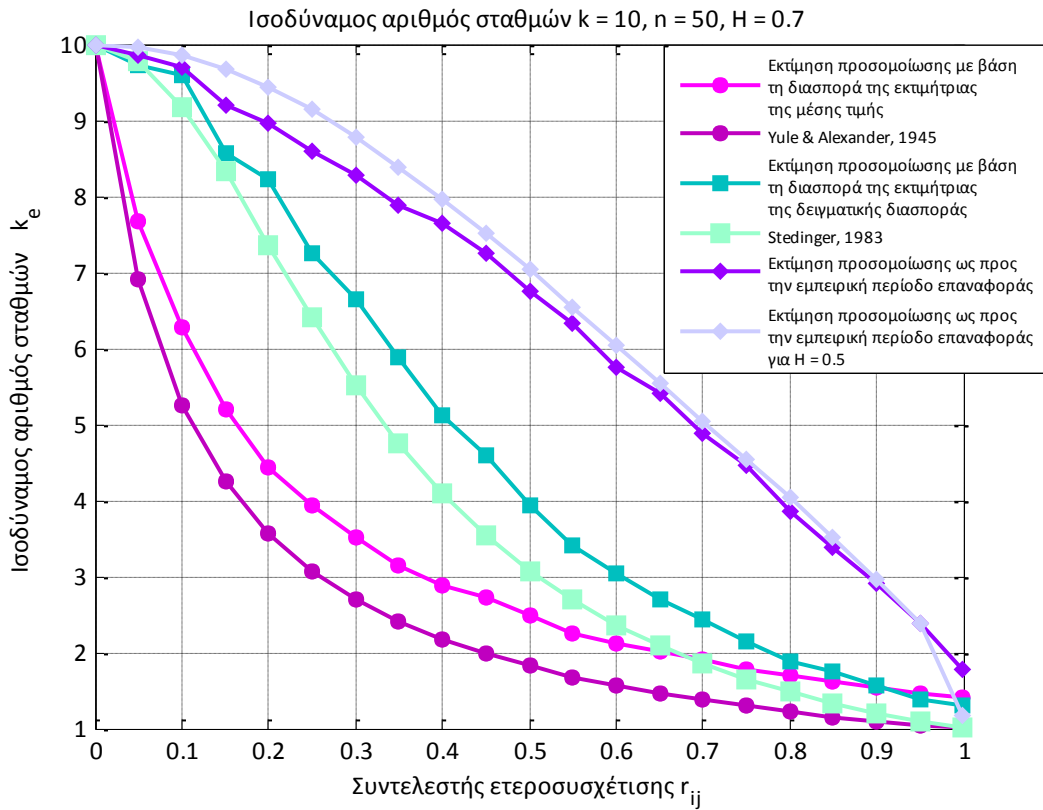
Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55, 0.6, 0.7, 0.8$ και 0.9 και για αριθμό σταθμών $k = 10$ (Σχήματα 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 και 5.10, αντίστοιχα). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Γ.



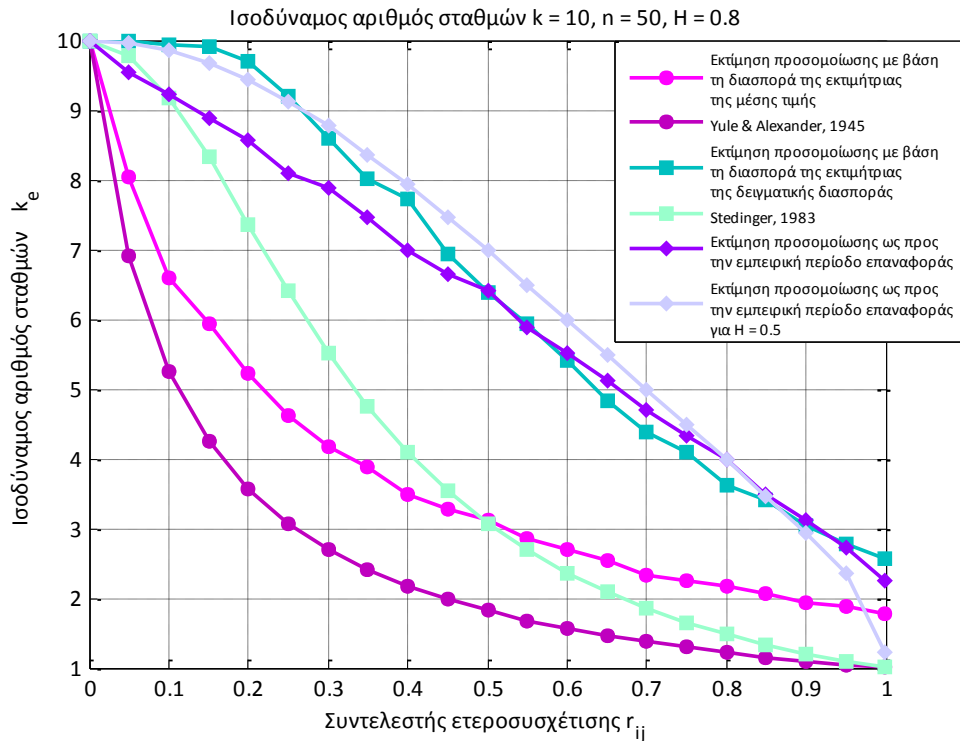
Σχήμα 5.6: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



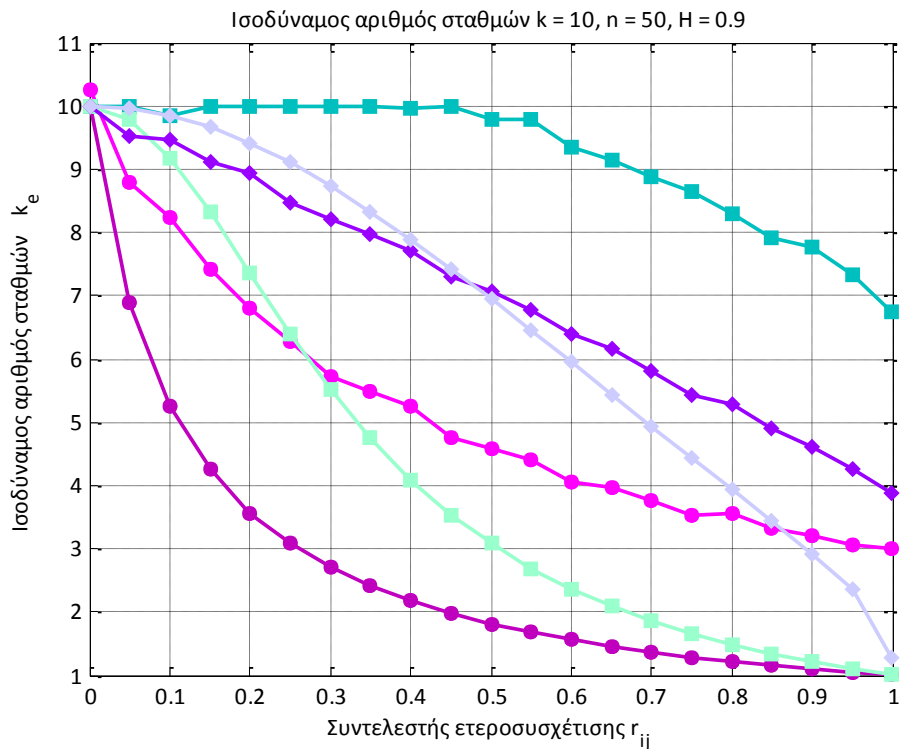
Σχήμα 5.7: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 5.8: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 5.9: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 5.10* : Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

Για την περίπτωση των εκτιμήσεων με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής, παρατηρείται πως αυξανόμενου του συντελεστή Hurst οι εκτιμήσεις με προσομοίωση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος, για την ίδια τιμή του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι αισθητά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν κατά τη στατιστική ανάλυση, τόσο ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων ($H = 0.5$), όσο και χρονικά εξαρτημένων με μορφή εξάρτησης τύπου Markov. Η εκτίμηση συνεπώς, με βάση τη (2.41) καθίσταται πλέον ανέφικτη καθώς αυτή υποεκτιμά σημαντικά τις πραγματικές τιμές του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων, όπως αυτές προσεγγίζονται με διενέργεια προσομοίωσης, και για μικρές ακόμη τιμές του συντελεστή Hurst (Σχήματα 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 και 5.10). Μάλιστα, για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και συντελεστή ετεροσυσχέτισης $r_{ij} = 1$ ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος τείνει στο τρία με βάση τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, ενώ η αντίστοιχη εκτίμηση με εφαρμογή της (2.41) είναι ένας σταθμός[†]. Κατά συνέπεια, απαιτείται τροποποίηση της (2.41) ώστε να ληφθεί υπόψη η μακροπρόθεσμη εμμονή που

* Το υπόμνημα του σχήματος 5.10 είναι όμοιο με τα υπομνήματα των σχημάτων 5.6, 5.7, 5.8 και 5.9

† Υπενθυμίζεται πως ο ισοδύναμος αριθμός στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων αναφέρεται σε δείγματα μεγέθους $n_{i\text{auto}}$

χαρακτηρίζει τις υδρολογικές χρονοσειρές και η συνεπαγόμενη αβεβαιότητα που εισάγεται στις εκτιμήσεις.

Για τις εκτιμήσεις της προσομοίωσης με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς και σε αυτήν την περίπτωση, παρατηρείται πως οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e , για την ίδια τιμή του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι σημαντικά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της σχέσης (2.46) (Σχήματα 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 και 5.10). Μάλιστα, οι εν λόγω εκτιμήσεις είναι σημαντικά μεγαλύτερες και από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν κατά τη στατιστική ανάλυση χρονικά εξαρτημένων υδρολογικών δειγμάτων, με μορφή εξάρτησης τύπου Markov. Παράλληλα, παρατηρείται πως για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και συντελεστή ετεροσυσχέτισης $r_{ij} = 1$, ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος τείνει στο επτά (για αριθμό σταθμών $k = 10$). Δηλαδή, για υψηλές τιμές του συντελεστή Hurst, η εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων με βάση τη διασπορά της δειγματικής διασποράς είναι πολύ λιγότερο ευαίσθητη στις μεταβολές του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} . Και στην περίπτωση αυτή συνεπώς, η χρήση της αντίστοιχης αναλυτικής σχέσης καθίσταται ανέφικτη και απαιτείται τροποποίηση αυτής.

Σε ό,τι αφορά τέλος στις εκτιμήσεις της προσομοίωσης ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος, η σύγκριση πραγματοποιήθηκε και εδώ με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν με προσομοίωση κατά τη στατιστική ανάλυση χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων ($H = 0.5$). Από την παραπάνω σύγκριση λοιπόν (Σχήματα 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 και 5.10), συνάγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα. Για τιμές συντελεστή Hurst $H < 0.7$, παρατηρείται πως οι εκτιμήσεις, για την ίδια τιμή του συντελεστή ετεροσυσχέτισης, είναι αισθητά μικρότερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που προέκυψαν κατά τη στατιστική ανάλυση υδρολογικών δειγμάτων μηδενικής αυτοσυσχέτισης (Σχήματα 5.6 και 5.7 - όμοια με την περίπτωση χρονοσειρών χρονικά εξαρτημένων, με μορφή εξάρτησης τύπου Markov). Η κατάσταση αυτή διαφοροποιείται αυξανόμενου του συντελεστή Hurst. Για συντελεστές λοιπόν $H > 0.7$ και για μικρούς συντελεστές ετεροσυσχέτισης, οι εκτιμήσεις είναι γενικά μικρότερες από τις εκτιμήσεις που αφορούν χρονοσειρές μηδενικής αυτοσυσχέτισης. Αντίθετα, για υψηλούς συντελεστές ετεροσυσχέτισης οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων είναι

γενικά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις περιπτώσεων χρονοσειρών μηδενικής αυτοσυσχέτισης. Μάλιστα, για $H > 0.7$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τη συσχέτιση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών και του συντελεστή ετεροσυσχέτισης προσεγγίζει την ευθεία (Σχήματα 5.8, 5.9 και 5.10). Καταλήγουμε και εδώ συνεπώς, στο συμπέρασμα πως απαιτείται καταρχάς τροποποίηση της (2.58) ώστε να έρχεται σε συμφωνία με τις εκτιμήσεις της προσομοίωσης για συντελεστή Hurst $H = 0.5$ και εν συνεχεία τροποποίηση αυτής, ώστε να λαμβάνει υπόψη τη μακροπρόθεσμη μνήμη που παρουσιάζουν οι χρονοσειρές που εξετάζουμε.

6 Προσαρμογή σχέσης έκφρασης ισοδύναμου αριθμού σταθμών ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης των υδρολογικών δειγμάτων

Στο πλαίσιο της διερεύνησης της δυνατότητας αξιοποίησης πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων για βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων στο σημείο αυτό, επιχειρείται να τροποποιηθούν οι εκφράσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα, ώστε να ληφθεί υπόψη η αβεβαιότητα που εισάγει στις εκτιμήσεις η στοχαστική φύση των υδρολογικών χρονοσειρών. Παράλληλα, για την περίπτωση των ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων επιχειρείται να τροποποιηθεί η έκφραση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών με βάση την εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς (Σχέση (2.58) - Κουτσογιάννης κ.α., 2010), ώστε οι εκτιμήσεις αυτού να έρχονται σε συμφωνία με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις της προσομοίωσης.

Ακολουθεί λοιπόν, για κάθε περίπτωση υδρολογικών χρονοσειρών που εξετάστηκε και για κάθε προσέγγιση εκτίμησης του ισοδύναμου αριθμού σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα, παρουσίαση των τροποποιήσεων των αντίστοιχων σχέσεων, η τελική μορφή των οποίων προέκυψε με διενέργεια διαδοχικών προσομοιώσεων Monte Carlo.

6.1 Περίπτωση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων

Όπως προαναφέρθηκε, η εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού δειγμάτων του ενοποιημένου δείγματος εκφράζεται από τις σχέσεις (2.41) (Yule, 1945), (2.46) (Stedinger, 1983) και (2.58) (Κουτσογιάννης κ.α., 2010), οι οποίες βασίζονται στις εκτιμήσεις στη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής, στη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς και στην εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος, αντίστοιχα. Για τις περιπτώσεις των εκτιμήσεων με βάση τις διασπορές των εκτιμητριών της μέσης τιμής και της δειγματικής διασποράς, όπως καταδεικνύουν και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης (Εδάφιο 5.1), οι εκφράσεις των σχέσεων (2.41) και (2.46) δεν απαιτούν κάποια τροποποίηση καθώς πρόκειται για σχέσεις που έχουν αποδειχθεί αναλυτικά και αναφέρονται σε χρονοσειρές χρονικά ανεξάρτητες.

Σε ό,τι αφορά στην εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς της μέγιστης τιμής του ενοποιημένου δείγματος με βάση τη σχέση (2.58), όπως αναλυτικά παρουσιάστηκε στο εδάφιο 5.1, απαιτείται τροποποίηση αυτής καθώς για αριθμό σταθμών

$k > 4$ υποεκτιμά τις αντίστοιχες προσεγγίσεις, με προσομοίωση, του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος (Σχήμα 5.1).

Στο σημείο αυτό, υπενθυμίζεται πως η σχέση (2.58) εκφράζεται ως (Κουτσογιάννης κ.α., 2010):

$$k_e = \frac{k}{1 + \bar{r}^*(k - 1)} \quad (6.1)$$

όπου \bar{r}^* , μετασχηματισμένη μεταβλητή με την ακόλουθη μορφή :

$$\bar{r}^* := \left[\frac{1}{\bar{r}} - \sqrt{\frac{1}{\bar{r}^2} - 1} \right]^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{r}^2}}{1 + \sqrt{1 - \bar{r}^2}} \quad (6.2)$$

όπου \bar{r} ο μέσος συντελεστής ετεροσυσχέτισης των υπό εξέταση υδρολογικών δειγμάτων (Στην περίπτωση βέβαια που εξετάζουμε το πεδίο θεωρείται ομογενές, οπότε $\bar{r} = r_{ij}$).

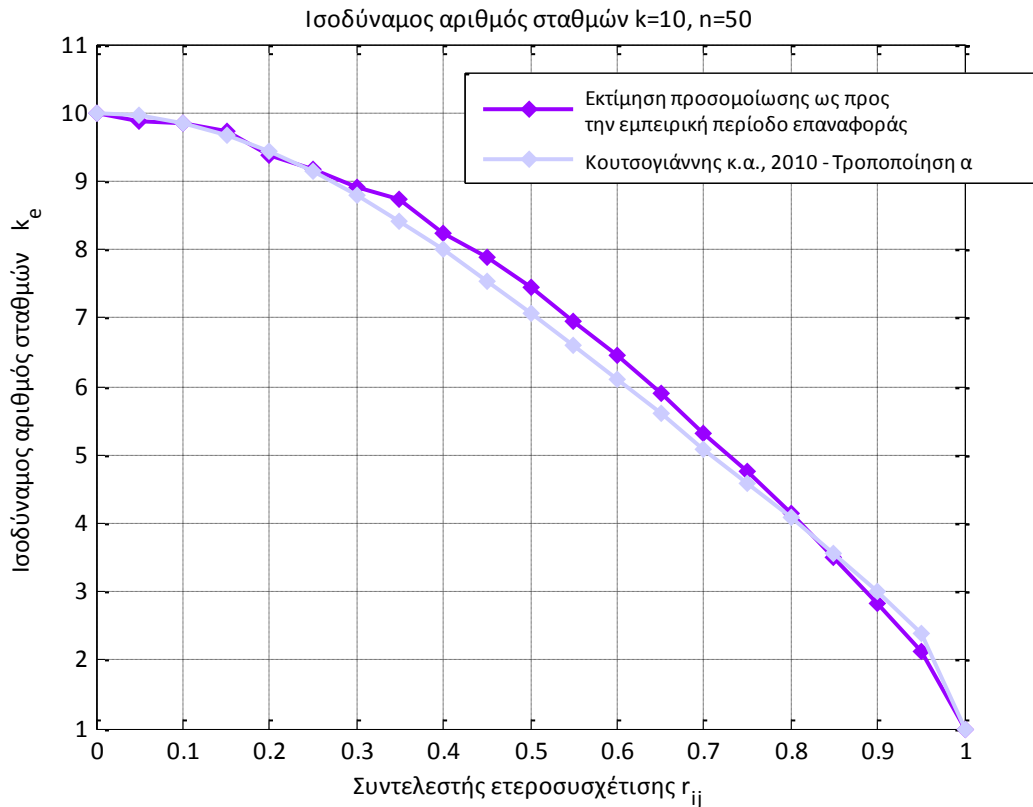
Με διενέργεια, λοιπόν, διαδοχικών προσομοιώσεων Monte Carlo προέκυψε πως η σχέση (2.58) πρέπει να τροποποιηθεί ως ακολούθως, ώστε να προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό τις αντίστοιχες εκτιμήσεις της προσομοίωσης ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς του ενοποιημένου δείγματος, ήτοι

$$\bar{r}^{**} := \frac{1 - (1 - \bar{r}^2)^\alpha}{1 + (1 - \bar{r}^2)^\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (6.3)$$

όπου k ο αριθμός των υπό μελέτη υδρολογικών δειγμάτων. Κατά συνέπεια η σχέση (6.1) εκφράζεται πλέον ως:

$$k_e = \frac{k}{1 + \bar{r}^{**}(k - 1)} \quad (6.4)$$

Ακολουθεί σχηματική παρουσίαση του βαθμού προσαρμογής της ανωτέρω σχέσης στις εκτιμήσεις της προσομοίωσης, για αριθμό σταθμών $k = 10$ (Σχήμα 6.1). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Δ.



Σχήμα 6.1: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 10$

Παρατηρείται ικανοποιητική προσαρμογή της σχέσης (6.4)* στις αντίστοιχες προσεγγίσεις της προσομοίωσης, σε ό,τι αφορά στην εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e του ενοποιημένου δείγματος ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς, τόσο για $k = 10$ (Σχήμα 6.1), όσο και για $k = 2 \div 9$ (βλ. Παράρτημα Δ).

6.2 Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων («Μαρκοβιανή» προσέγγιση)

Για την περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων, με μορφή εξάρτησης τύπου Markov, η διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo έδειξε πως απαιτείται τροποποίηση των σχέσεων (2.46) και (6.4)[†] (για τις εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς και ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς, αντίστοιχα), ώστε να ληφθεί υπόψη η βραχυπρόθεσμη μνήμη που παρουσιάζουν χρονοσειρές τέτοιου τύπου.

* «Κουτσογιάννης κ.α., 2010 - Τροποποίηση α»

† Θεωρώντας πως αυτή πλέον, προσεγγίζει ικανοποιητικά τις εκτιμήσεις της προσομοίωσης για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0$.

Με διενέργεια λοιπόν, διαδοχικών προσομοιώσεων Monte Carlo και κατόπιν ελέγχου πληθώρας σχέσεων προέκυψαν οι ακόλουθες εκφράσεις (Σχέσεις (6.5) και (6.6)), οι οποίες αποτελούν ουσιαστικά τροποποιήσεις των σχέσεων (2.46) και (6.4), αντίστοιχα.

$$k_e = \frac{k}{1 + \bar{r}^b(k-1)}, \quad b = (2 + \rho_1/3) \quad (6.5)$$

$$k_e = \frac{k}{1 + \bar{r}^{***}(k-1)} \quad (6.6)$$

όπου η μετασχηματισμένη μεταβλητή \bar{r}^{***} εκφράζεται πλέον ως:

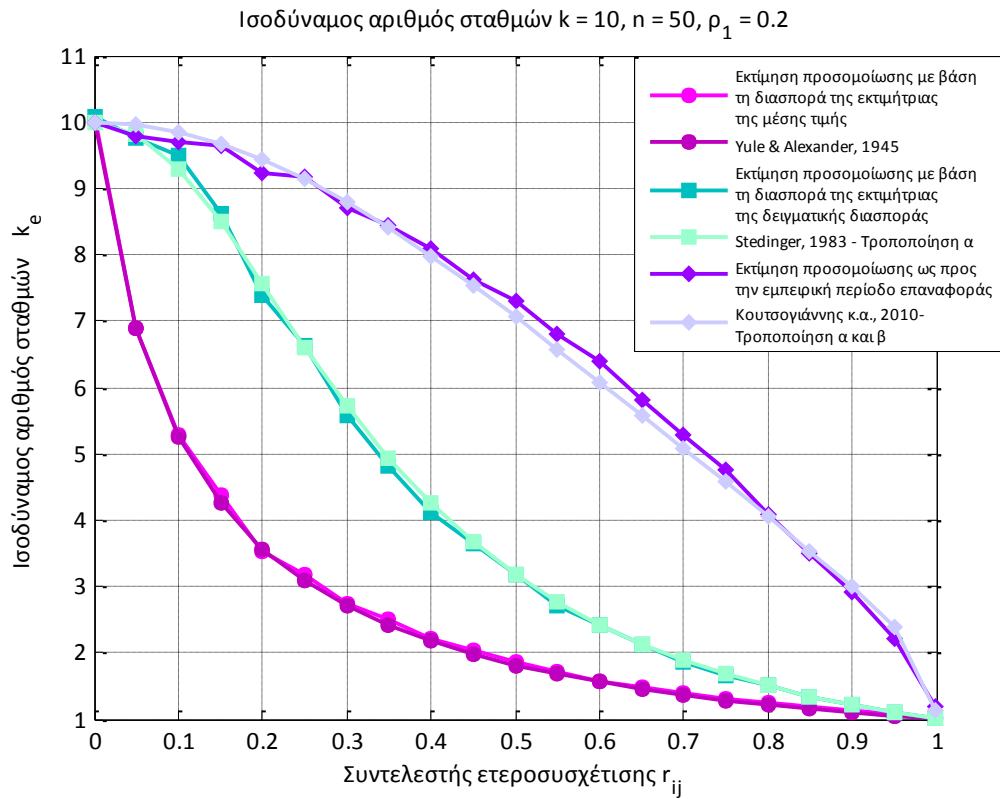
$$\bar{r}^{***} := \frac{1 - (1 - \bar{r}^l)^\alpha}{1 + (1 - \bar{r}^l)^\alpha}, \quad l = 2(1 - \rho_1^4) \quad (6.7)$$

με $\alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}$ (Σχέση (6.4)).

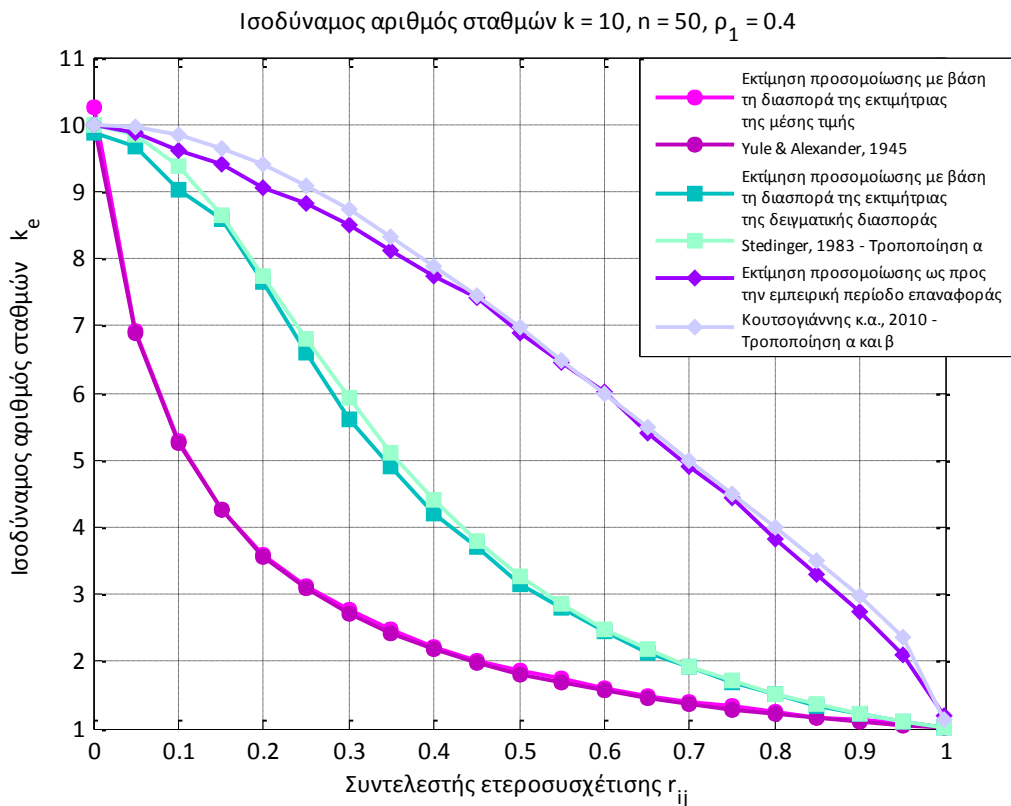
Επισημαίνεται πως δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση ώστε, τόσο η σχέση (6.5), όσο και η σχέση (6.6) να καταλήγουν στις σχέσεις (2.46) και (6.4), αντίστοιχα, σε περιπτώσεις χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων.

Ακολούθως, παρουσιάζεται ο βαθμός προσαρμογής των σχέσεων (6.5) και (6.6) στις αντίστοιχες εκτιμήσεις της προσομοίωσης για συντελεστή αυτοσυσχέτισης των επιμέρους υδρολογικών δειγμάτων $\rho_1 = 0.2, 0.4, 0.6$ και 0.8 και για αριθμό σταθμών $k = 10$ (Σχήματα 6.2, 6.3, 6.4 και 6.5). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Δ.

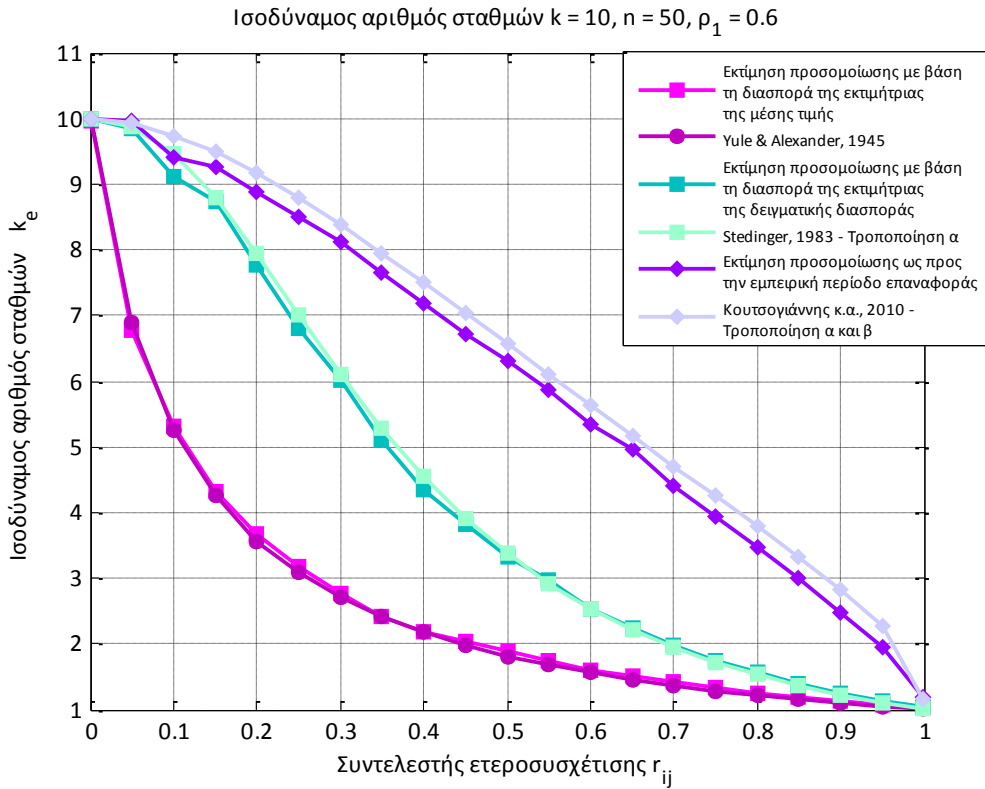
Στα υπομνήματα των ακόλουθων διαγραμμάτων η γραφική παράσταση της σχέσης (6.5), η οποία αποτελεί τροποποίηση της σχέσεως (2.46), επισημαίνεται ως «Stendiger, 1983 - Τροποποίηση α». Αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της σχέσης (6.6), η οποία αποτελεί τροποποίηση της σχέσεως (6.4), επισημαίνεται ως «Κουτσογιάννης κ.α., 2010 - Τροποποίηση α και β»



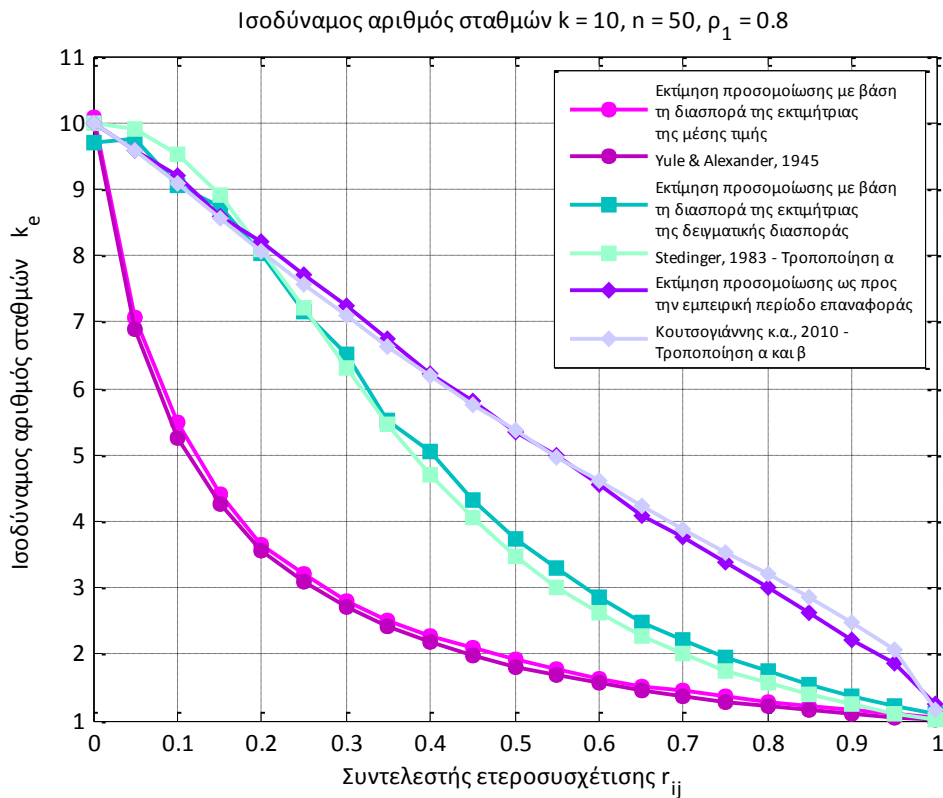
Σχήμα 6.2: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 6.3: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 6.4: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 6.5: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

Παρατηρείται στα ανωτέρω σχήματα λοιπόν, ικανοποιητική προσαρμογή των σχέσεων (2.46) και (6.4) στις αντίστοιχες εκτιμήσεις της προσομοίωσης. Παράλληλα και για αριθμό σταθμών $k = 2 \div 9$, οι εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e με χρήση των εν λόγω σχέσεων προσεγγίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις αντίστοιχες εκτιμήσεις της προσομοίωσης (βλ. Παράρτημα Δ).

6.3 Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων (Ανελίζεις Απλής Ομοιοθεσίας)

Για την περίπτωση υδρολογικών δειγμάτων χρονικά εξαρτημένων, με μορφή εξάρτησης συμβατή με την εξάρτηση που χαρακτηρίζει τις ανελίζεις απλής ομοιοθεσίας, τα αποτελέσματα της προσομοίωσης (Εδάφιο 5.3) έδειξαν πως απαιτείται τροποποίηση όλων των σχέσεων που αφορούν στην εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα. Το γεγονός αυτό, ενδεχομένως να οφείλεται στην αυξημένη αβεβαιότητα που εισάγει στις εκτιμήσεις η μακροπρόθεσμη εμμονή που χαρακτηρίζει τις εν λόγω χρονοσειρές.

Προκειμένου να εκφραστεί και εν συνεχεία να ληφθεί υπόψη η αδυναμία των σχέσεων (2.41), (2.46) και (6.4)* να αποδώσουν ικανοποιητικές προσεγγίσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα διενεργήθηκε και πάλι, προσομοίωση Monte Carlo.

Με διενέργεια λοιπόν, διαδοχικών προσομοιώσεων Monte Carlo και κατόπιν ελέγχου πληθώρας σχέσεων προέκυψαν οι ακόλουθες εκφράσεις για τις εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e (Σχέσεις (6.8), (6.9) και (6.10)), οι οποίες αποτελούν ουσιαστικά τροποποιήσεις των σχέσεων (2.41), (2.46) και (6.4), αντίστοιχα.

$$k_e = \frac{k}{1 + \alpha \bar{r}(k-1)}, \quad \alpha = (1 - \rho_1) \quad (6.8)$$

$$k_e = \frac{k}{1 + a \bar{r}^b (k-1)}, \quad \begin{cases} a = (1 - \rho_1^2 - \rho_{100}) \\ b = 2 * \rho_1^c \\ c = 4 - 4H^2 - 2\rho_{100} \end{cases} \quad (6.9)$$

$$k_e = \frac{k}{1 + \bar{r}^{***}(k-1)} \quad (6.10)$$

όπου η μετασχηματισμένη μεταβλητή \bar{r}^{***} εκφράζεται πλέον ως:

* Θεωρώντας πως αυτή πλέον, προσεγγίζει ικανοποιητικά τις εκτιμήσεις της προσομοίωσης για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0$.

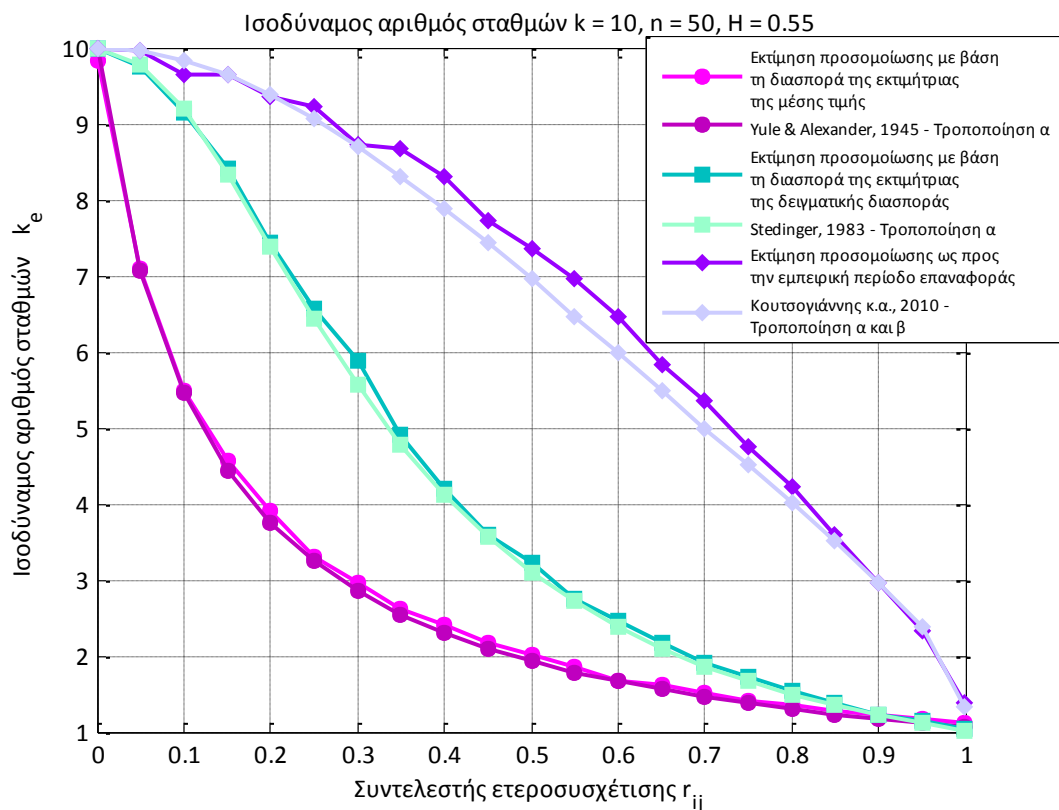
$$\bar{r}^{***} := \frac{1 - (1 - l_1 \bar{r}^{l_2})^\alpha}{1 + (1 - l_1 \bar{r}^{l_2})^\alpha}, \quad \begin{cases} l_1 = \sqrt{1 - \rho_1^2} \\ l_2 = 2 - \rho_1 - \rho_{100} \end{cases} \quad (6.11)$$

με $\alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}$ (Σχέση (6.4)).

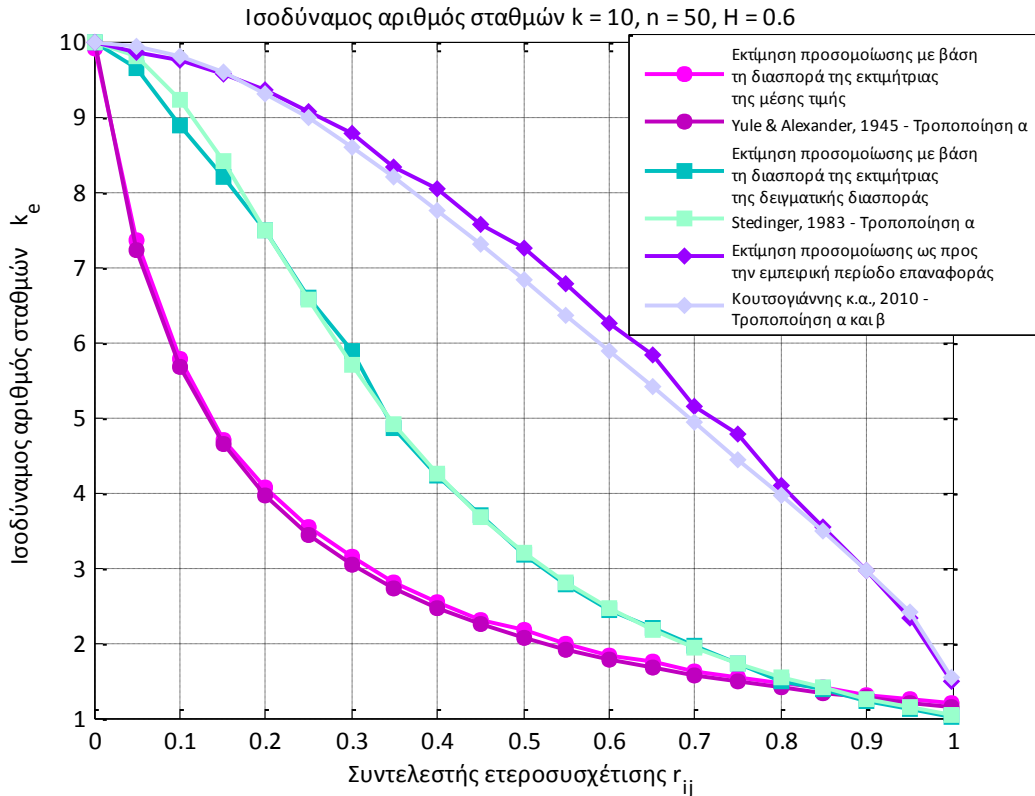
Επισημαίνεται πως οι παραπάνω σχέσεις αναπτύχθηκαν εμπειρικά. Ωστόσο, δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση ώστε οι σχέσεις (6.8), (6.9) και (6.10) να καταλήγουν στις σχέσεις (2.41), (2.46) και (6.4), αντίστοιχα, σε περιπτώσεις χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων.

Ακολούθως, παρουσιάζεται ο βαθμός προσαρμογής των σχέσεων (6.8), (6.9) και (6.10) στις αντίστοιχες εκτιμήσεις της προσομοίωσης για συντελεστή Hurst $H = 0.55, 0.6, 0.7, 0.8$ και 0.9 και για αριθμό σταθμών $k = 10$ (Σχήματα 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 και 6.10). Τα αντίστοιχα σχήματα για $k = 2 \div 9$ παρατίθενται στο παράρτημα Δ.

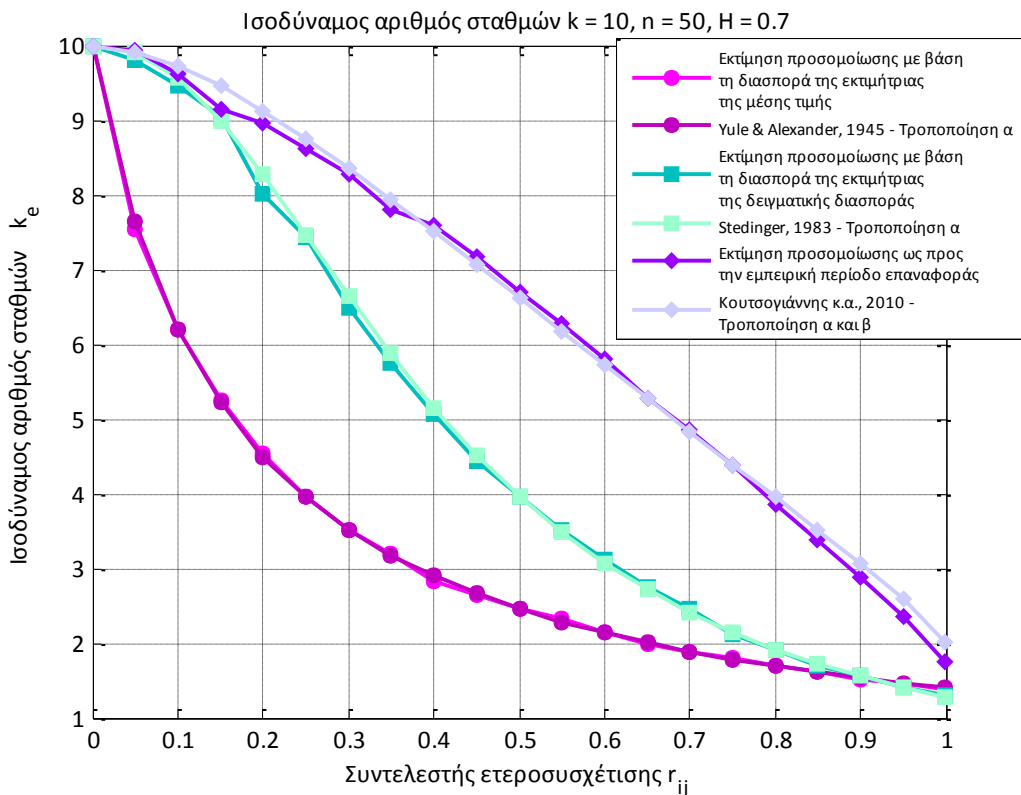
Στα υπομνήματα των ακόλουθων διαγραμμάτων οι γραφικές παραστάσεις των σχέσεων (6.8), (6.9) και (6.10) επισημαίνονται ως «Yule, 1945 - Τροποποίηση α», «Stedinger, 1983 - Τροποποίηση α» και «Κουτσογιάννης κ.α., 2010 - Τροποποίηση α και β», αντίστοιχα.



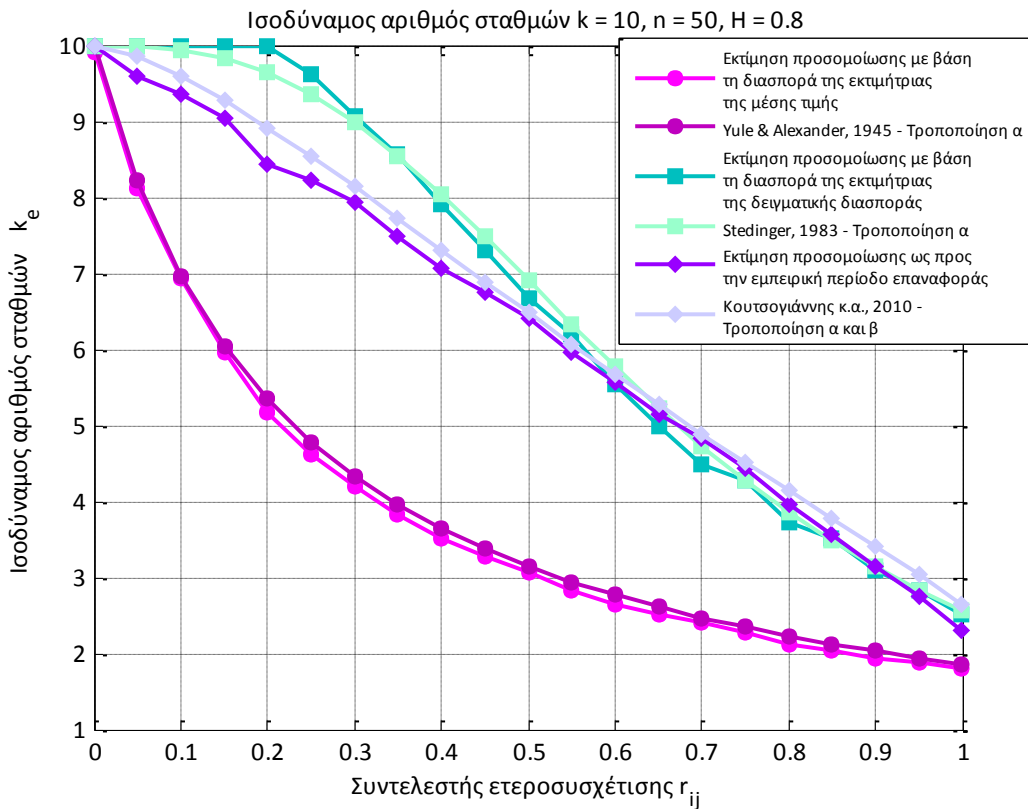
Σχήμα 6.6: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



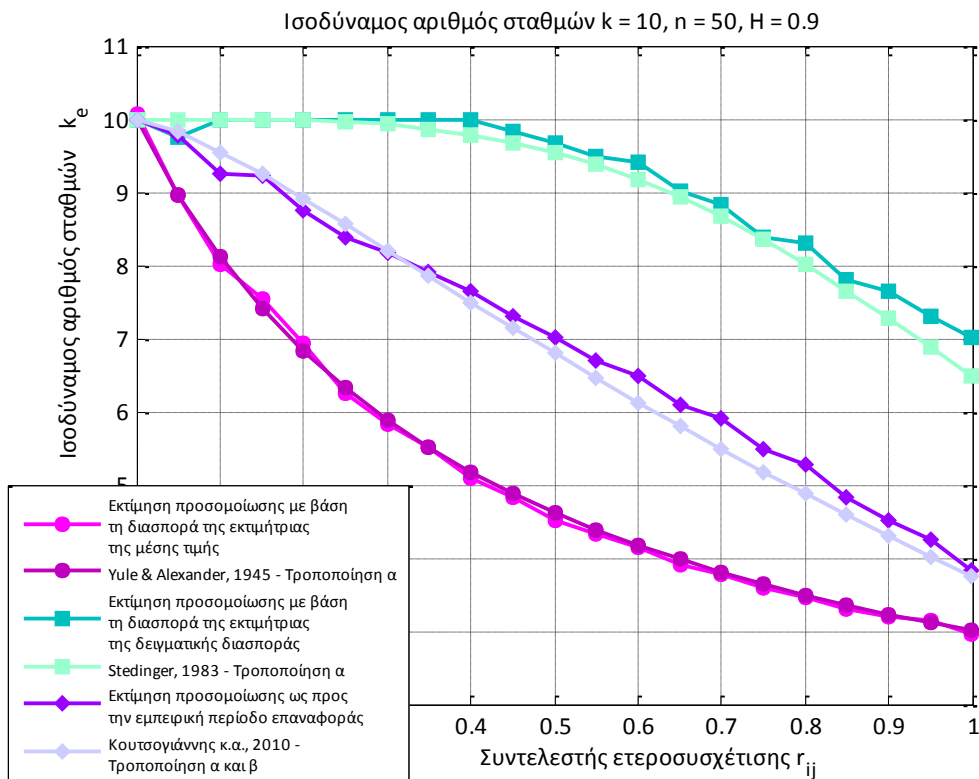
Σχήμα 6.7: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 6.8: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 6.9: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα 6.10: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

7 Συμπεράσματα – Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, επιχειρήθηκε να διερευνηθεί και εν συνεχεία να ποσοτικοποιηθεί η δυνατότητα αξιοποίησης υδρολογικών δειγμάτων από διαφορετικές θέσεις, με τη θεώρησή τους ως ισοδύναμου ενιαίου δείγματος από υποθετικά μεγαλύτερη χρονική διάρκεια παρατηρήσεων, για βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων. Παράλληλα, επιχειρήθηκε να εντοπιστεί και να εκφραστεί η αδυναμία της κλασσικής στατιστικής να αποδώσει τη στοχαστική φύση των υδρολογικών διαδικασιών, ώστε να ληφθεί υπόψη η αβεβαιότητα που εισάγει στις εκτιμήσεις η απλοποιητική θεώρηση υδρολογικών δειγμάτων χρονικά ανεξάρτητων.

Η ποσοτικοποίηση της ταυτόχρονης χρήσης δειγμάτων από διαφορετικές θέσεις, της λεγόμενης «υποκατάστασης του χρόνου από το χώρο» (Κουτσογιάννης κ.α., 2010), βασίστηκε στη διενέργεια προσομοίωσης Monte Carlo για τον προσδιορισμό των υπό εξέταση υδρολογικών δειγμάτων και εκφράζεται σε όρους ισοδύναμου αριθμού στοχαστικά ανεξάρτητων σταθμών k_e του ενοποιημένου πλέον δείγματος. Για την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e υιοθετήθηκαν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις, οι οποίες στηρίζουν τις εκτιμήσεις τους στις διασπορές της μέσης τιμής και της δειγματικής διασποράς, αλλά και στην εμπειρική περίοδο επαναφοράς του ενοποιημένου δείγματος. Οι προσεγγίσεις αυτές αφορούν στις θεωρήσεις δειγμάτων χρονικά ανεξάρτητων, καθώς και δειγμάτων χρονικά εξαρτημένων, με μορφή εξάρτησης τύπου Markov και μορφή εξάρτησης συμβατή με την εξάρτηση που χαρακτηρίζει τις ανελίξεις απλής ομοιοθεσίας.

Για την περίπτωση δειγμάτων χρονικά ανεξάρτητων και για τις εκτιμήσεις με βάση τις διασπορές των εκτιμητριών της μέσης τιμής και της δειγματικής διασποράς, η προσομοίωση έδειξε πως οι αντίστοιχες αναλυτικές σχέσεις (Yule, 1945 και Stedinger, 1983, αντίστοιχα) παρέχουν ακριβείς εκτιμήσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα. Το γεγονός αυτό βέβαια ήταν αναμενόμενο, καθώς πρόκειται για σχέσεις που έχουν αποδειχθεί αναλυτικά και αναφέρονται σε χρονοσειρές χρονικά ανεξάρτητες. Σε ό,τι αφορά στην απόπειρα έκφρασης του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς, η σχέση (2.58) (Κουτσογιάννης κ.α., 2010), κατόπιν τροποποίησης (Σχέση (6.4)), θεωρείται πως παρουσιάζει ικανοποιητική

προσαρμογή στις αντίστοιχες εκτιμήσεις της προσομοίωσης για αριθμό σταθμών $k = 2 \div 10$.

Στην περίπτωση δειγμάτων χρονικά εξαρτημένων με μορφή εξάρτησης τύπου Markov, τα αποτελέσματα της προσομοίωσης καταδεικνύουν πως ενώ η σχέση (2.41) (Yule, 1945) επαρκεί για την εκτίμηση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e , οι σχέσεις (2.46) (Stedinger, 1983) και (6.4) (Κουτσογιάννης κ.α., 2010 - Τροποποίηση α) απαιτούν τροποποίηση, ώστε να ληφθεί υπόψη η βραχυπρόθεσμη μνήμη που χαρακτηρίζει ανελιξείς με αυτήν τη μορφή εξάρτησης. Οι αντίστοιχες σχέσεις λοιπόν, που αναπτύχθηκαν εμπειρικά στην παρούσα εργασία ώστε να ληφθεί υπόψη η χρονική εξάρτηση αυτού του τύπου (Σχέσεις (6.5) και (6.6)), παρέχουν ικανοποιητικές προσεγγίσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} για αριθμό σταθμών $k = 2 \div 10$.

Σε ό,τι αφορά τέλος στην περίπτωση υδρολογικών δειγμάτων χρονικά εξαρτημένων με μορφή εξάρτησης ανελιξεων απλής ομοιοθεσίας, λόγω της αυξημένης αβεβαιότητας που χαρακτηρίζει τις ανελιξείς αυτές, οι ήδη υπάρχουσες εκφράσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e (Σχέσεις (2.41), (2.46) και (6.4))^{*} αδυνατούν να αποδώσουν τη μακροπρόθεσμη εμμονή που χαρακτηρίζει ανελιξείς με τη συγκεκριμένη μορφή εξάρτησης. Για να αποκατασταθεί λοιπόν συνέπεια μεταξύ των εκτιμήσεων της προσομοίωσης και των αντίστοιχων εκφράσεων του ισοδύναμου αριθμού σταθμών, πραγματοποιήθηκε τροποποίηση των σχέσεων (2.41), (2.46) και (6.4). Οι αντίστοιχες σχέσεις που αναπτύχθηκαν (Σχέσεις (6.9), (6.10) και (6.10)) παρουσιάζουν ικανοποιητική προσαρμογή στις εκτιμήσεις της προσομοίωσης για αριθμό σταθμών $k = 10$. Ωστόσο, για μικρές τιμές του k απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση καθώς παρατηρούνται αποκλίσεις των εκτιμήσεων δια των εν λόγω σχέσεων από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις της προσομοίωσης.

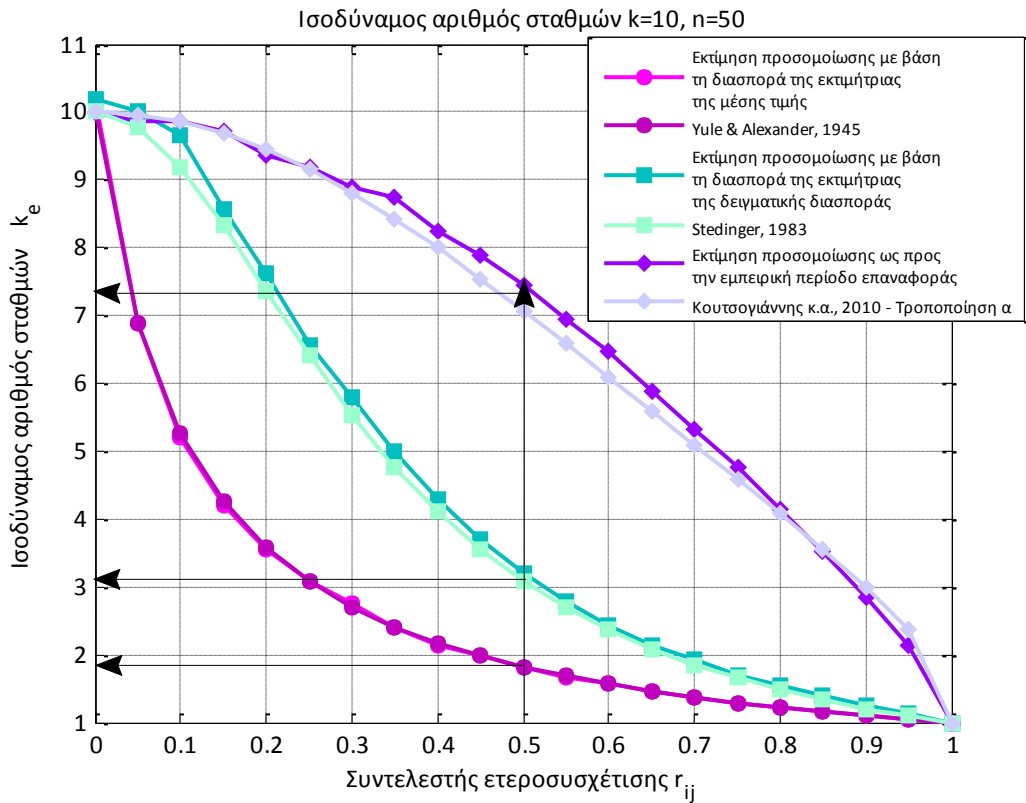
Επισημαίνεται πως όλες οι σχέσεις που αναπτύχθηκαν, αν και αναπτύχθηκαν εμπειρικά, επιτυγχάνουν καταρχάς να αναπαραγάγουν τη μορφή της εξάρτησης που χαρακτηρίζει τα προς ενοποίηση υδρολογικά δείγματα και παράλληλα να γενικεύουν αυτή την εξάρτηση και για μεγαλύτερους συντελεστές ετεροσυσχέτισης. Σε ό,τι αφορά στις περιπτώσεις οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τη χρονική εξάρτηση των υδρολογικών

^{*} Εκτιμήσεις βάσει των διασπορών των εκτιμητριών της μέσης τιμής και της δειγματικής διασποράς και εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς, αντίστοιχα

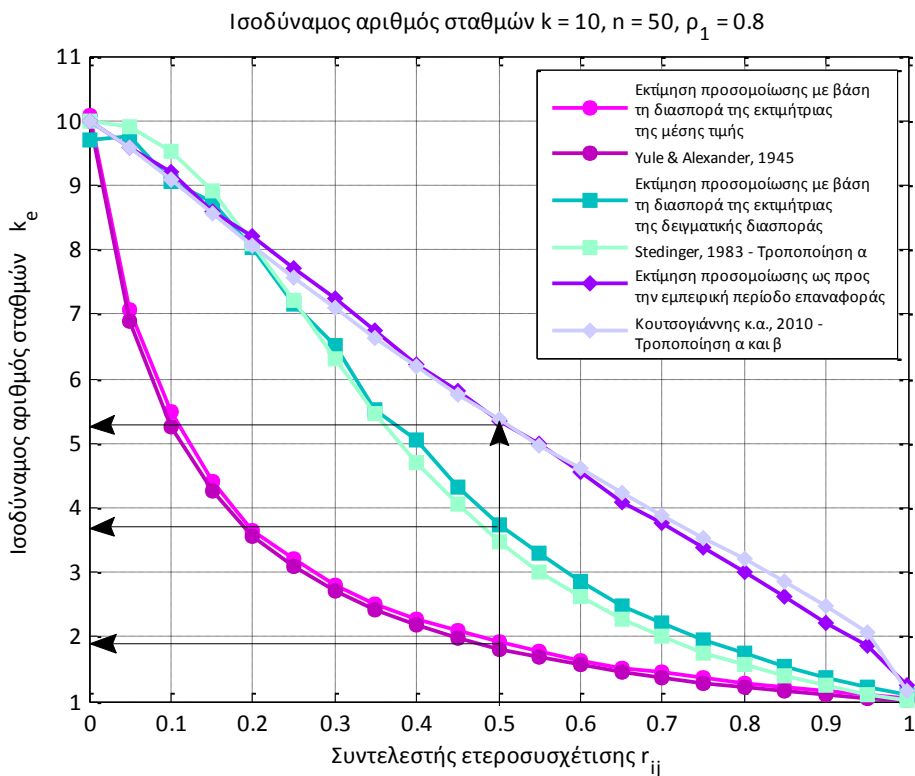
δειγμάτων, δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή ώστε όλες οι εκφράσεις του ισοδύναμου αριθμού σταθμών να μεταπίπτουν στις αντίστοιχες εκφράσεις της περίπτωσης χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων σε περίπτωση μηδενικής αυτοσυσχέτισης αυτών.

Εφόσον διατίθενται συνεπώς περισσότερα του ενός υδρολογικά δείγματα από διάφορους σταθμούς μιας κλιματικά ομογενούς περιοχής, ή και από τον ίδιο σταθμό για διαφορετικές χρονικές κλίμακες, προκύπτει το ζήτημα της ταυτόχρονης μελέτης του συνόλου των δειγμάτων με σκοπό τη βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων. Η αντιστοίχιση στο ενοποιημένο δείγμα αριθμού σταθμών k , του ισοδύναμου αριθμού στοχαστικά ανεξάρτητων σταθμών k_e , αποδίδει λοιπόν μια πιο ρεαλιστική εικόνα της πληροφορίας που το χαρακτηρίζει.

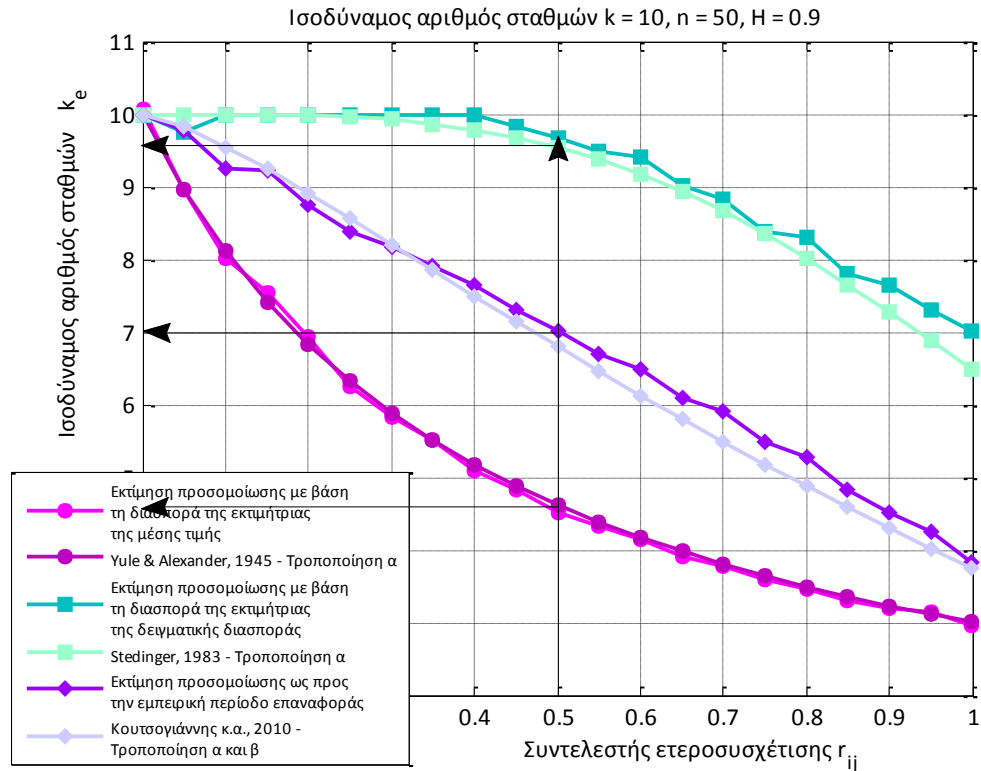
Για παράδειγμα, για αριθμό σταθμών $k = 10$ και μήκος δείγματος $n = 50$ η πραγματική πληροφορία που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα για τις περιπτώσεις των ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων και των εξαρτημένων με μορφή εξάρτησης Markov (για $\rho_1 = 0.8$) και μορφή εξάρτησης ανεξίτητων απλής ομοιοθεσίας (για $H = 0.9$), προκύπτει σύμφωνα με τον τρόπο που περιγράφεται στα διαγράμματα που ακολουθούν (Σχήματα 7.1, 7.2 και 7.3).



Σχήμα 7.1: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 10$ - Ανεξάρτητα χρονικά υδρολογικά δείγματα



Σχήμα 7.2: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$ - «Μαρκοβιανή» προσέγγιση



Σχήμα 7.3: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$ - Ανεξίτηλοι Απλής Ομοιοθεσίας

Στο Σχήμα 7.1 παρατηρείται πως για την περίπτωση των ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων η πραγματική πληροφορία που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα για συντελεστή ετεροσυσχέτισης $r_{ij} = 0.5$, αντιστοιχεί σε ισοδύναμο αριθμό σταθμών $k_e = 1.8$, $k_e = 3.1$ και $k_e = 7.2$ για τις εκτιμήσεις με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής, τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς και με βάση την εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς, αντίστοιχα.

Αντίστοιχα, για την περίπτωση των εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων, με μορφή εξάρτησης Markov για $\rho_1 = 0.8$ (Σχήμα 7.2) η πραγματική πληροφορία που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα αντιστοιχεί σε ισοδύναμο αριθμό σταθμών $k_e = 1.8$, $k_e = 3.7$ και $k_e = 5.2$ για τις εκτιμήσεις με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής, τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς και με βάση την εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς, αντίστοιχα. Στην περίπτωση όμως αυτή ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών αναφέρεται σε δείγματα μεγέθους $n_{auto} = 6$, $n_{auto} = 12$ και $n_{auto} = 28$, αντίστοιχα (Σχήματα 4.1, 4.6 και 4.11).

Η παραπάνω εικόνα διαφοροποιείται τελείως για περιπτώσεις δειγμάτων με μορφή εξάρτησης ανεξάρτητων απλής ομοιοθεσίας, για $H = 0.9$ (Σχήμα 7.3). Η πραγματική πληροφορία που χαρακτηρίζει το ενοποιημένο δείγμα σε αυτή την περίπτωση, εκφρασμένη σε όρους ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e για τις περιπτώσεις των εκτιμήσεων με βάση τη διασπορά της εκτιμήτριας της μέσης τιμής, τη διασπορά της εκτιμήτριας της δειγματικής διασποράς και με βάση την εκτίμηση ως προς την εμπειρική περίοδο επαναφοράς είναι $k_e = 4.8$, $k_e = 9.8$ και $k_e = 7.0$, αντίστοιχα. Και στην περίπτωση αυτή, ο ισοδύναμος αριθμός σταθμών αναφέρεται σε δείγματα μεγέθους $n_{auto} = 2.5$, $n_{auto} = 23$ και $n_{auto} = 20$, αντίστοιχα (Σχήματα 4.16, 4.22 και 4.28).

Ολοκληρώνοντας, επισημαίνεται πως στα πλαίσια της διερεύνησης της δυνατότητας αξιοποίησης πολλαπλών υδρολογικών δειγμάτων με ενοποίηση, έγιναν ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές οι οποίες ενδεχομένως να επηρεάζουν και τη δυνατότητα εφαρμογής των αποτελεσμάτων. Ενδεικτικά αναφέρονται κάποια ζητήματα τα οποία απαιτούν περαιτέρω διερεύνηση. Καταρχάς σε ό,τι αφορά στο μοντέλο της χωρικής εξάρτησης των υδρολογικών δειγμάτων, η απλοποιητική θεώρηση κοινών συντελεστών ετεροσυσχέτισης, η οποία υιοθετήθηκε στην παρούσα εργασία, εισάγει επιπλέον αβεβαιότητα στις εκτιμήσεις. Ομοίως και σε ό,τι αφορά στο μοντέλο αυτοσυσχέτισης. Παράλληλα, οφείλει να υιοθετηθεί μία πιο ρεαλιστική αντιμετώπιση σε ό,τι αφορά στα μήκη των υπό εξέταση υδρολογικών δειγμάτων. Τέλος, η προσομοίωση Monte Carlo έγινε για περιθώρια κατανομή των μεταβλητών κανονική αλλά προφανώς ισχύει και για κάθε άλλη κατανομή που προκύπτει ως μονοτονικός μετασχηματισμός της κανονικής κατανομής, (πρακτικώς για οποιαδήποτε κατανομή) εφόσον ο συντελεστής ρ_1 αναφέρεται στη μετασχηματισμένη (και όχι στην αρχική μεταβλητή).

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Κουτσογιάννης, Δ. (1997), Στατιστική Υδρολογία, Έκδοση 4, 312 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <https://itia.civil.ntua.gr/en/docinfo/122/>).
- Κουτσογιάννης, Δ., Α. Ευστρατιάδης και Ν. Μαμάσης (2001), Υδρολογική μελέτη πλημμυρών, Παροχή Υπηρεσιών Συμβούλου για τα Έργα Αποσελέμη, Εργοδότης: Υπουργείο Περιβάλλοντος, Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων, Μελετητής: Κοινοπραξία Αποσελέμη, Αθήνα.
- Κουτσογιάννης, Δ.(2007), *Σημειώσεις Στοχαστικών Μεθόδων στους Υδατικούς Πόρους*, Έκδοση 3, 100 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://www.itia.ntua.gr/el/docinfo/207/>).
- Κουτσογιάννης, Δ., Ι. Μαρκόνης, Α. Κουκουβίνος Α, Σ. Μ. Παπαλεξίου, Ν. Μαμάσης και Π. Δημητριάδης (2010), Υδρολογική μελέτη ισχυρών βροχοπτώσεων στη λεκάνη του Κηφισού, Εργοδότης: Διεύθυνση Μελετών Έργων Οδοποιίας της ΓΓΔΕ του π. ΥΠΕΧΩΔΕ στα Συμπράττοντα Γραφεία: Εξάρχου Νικολόπουλος Μπενσασσών Σύμβουλοι Μηχανικοί, Denco Σύμβουλοι Μηχανικοί, Γ. Καραβοκύρης και Συνεργάτες Σύμβουλοι Μηχανικοί, Γ. & Μ. Καφετζόπουλος, Δ. Μπενάκης και Σια, Λ. Μπενσασσών, Ν. Γκόγκος, Γ. Σκαμπέλος, Μελετητής: Α. Νικολόπουλος, Αθήνα.
- Barnes, F. B. (1954), Storage required for a city water supply, J. Inst. Eng. Australia, 26(9) 198-203.
- Beard, L. R. (1965), Use of interrelated records to simulate streamflow, Proc. ASCE, J. Hydraul. Div., 91(HY5), 13-22.
- Box, G.E.P. & Jenkins, G.M. (1970), Time Series Analysis; Forecasting and control, Holden Day.
- Bras, R. L. and Rodriguez-Iturbe, I. (1985), Random functions and hydrology, Addison-Wesley.
- Castellarin, A., R. M. Vogel, and N. C. Matalas (2005), Probabilistic behavior of a regional envelope curve, *Water Resour. Res.*, 41, W06018, doi:10.1029/2004WR003042 (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://engineering.tufts.edu/cee/people/vogel/publications/behavior-curve.pdf>).

- Eckhardt R. (1987), STAN ULAM, JOHN VON NEUMANN, *and the MONTE CARLO METHOD*, *Los Alamos Science Special Issue*.
- Gringorten, I. I. (1963), A plotting rule for extreme probability paper, *J. Geophys. Res.*, 68(3), 813– 814.
- Grygier, J.C. & Stedinger, J.R. (1990), SPIGOT, A synthetic streamflow generation software package, Technical description, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY., Version 2.5, (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://www.informaworld.com/smpp/ftinterface~content=a713826714~fulltext=713240930~frm=content>).
- Hamed, K. H. (2009), Effect of persistence on the significance of Kendall’s tau as a measure of correlation between natural time series, *The European Physical Journal*, 174 (1), 65-79 (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://www.springerlink.com/content/4711np3602082g83/>).
- Hazen, A. (1914), Storage to be provided in impounding reservoirs for municipal water supply, *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, 77, 1539– 1640.
- Hirsch, R. M., Helsel, D. R., Cohn, T. A., and Gilroy, E. J. (1993) Statistical analysis of hydrological data, *Handbook of Hydrology*, D. R. Maidment (ed.), McGraw-Hill.
- Hurst, H. E. (1951) Long term storage capacities of reservoirs. *Trans. ASCE* 116, 776–808.
- Koutsoyiannis, D. (1999), Optimal decomposition of covariance matrices for multivariate stochastic models in hydrology, *Water Resources Research* 35(4), 1219-1229.
- Koutsoyiannis, D., (2000). A generalized mathematical framework for stochastic simulation and forecast of hydrologic time series *Water Resources Research*, 36(6), 1519-1534 (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <https://itia.civil.ntua.gr/en/docinfo/18/>).
- Koutsoyiannis, D. (2002), The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy, *Hydrological Sciences Journal*, 47 (4), 573–595 (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://www.itia.ntua.gr/en/docinfo/511/>).
- Koutsoyiannis, D. (2003), Hydrological statistics for engineering design in a varying climate, *EGS-AGU-EUG Joint Assembly, Geophysical Research Abstracts, Vol. 5*, Nice, European Geophysical Society (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://www.itia.ntua.gr/en/docinfo/565/>).
- Koutsoyiannis, D. (2005), Hydrologic persistence and the Hurst phenomenon, *Water Encyclopedia, Vol. 4, Surface and Agricultural Water*, edited by J. H. Lehr and J. Keeley,

- 210–221, Wiley, New York (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://www.itia.ntua.gr/en/docinfo/612/>).
- Koutsoyiannis, D., and A. Montanari (2007), Statistical analysis of hydroclimatic time series: Uncertainty and insights, *Water Resources Research*, 43 (5), W05429, doi:10.1029/2006WR005592 (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://www.itia.ntua.gr/en/docinfo/781/>).
- Koutsoyiannis, D. (2010), Memory in climate and things not to be forgotten (Invited talk), *11th International Meeting on Statistical Climatology*, Edinburgh, International Meetings on Statistical Climatology, University of Edinburgh.
- Kruskal, W. and Wallis A. (1952), Use of Ranks in One-Criterion Variance Analysis, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 47, No. 260. (Dec., 1952), pp. 583-621 (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://www.jstor.org/pss/2280779>).
- Langousis, A., and D. Koutsoyiannis (2006), A stochastic methodology for generation of seasonal time series reproducing overyear scaling behaviour, *Journal of Hydrology*, 322, 138–154 (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://www.itia.ntua.gr/en/docinfo/599/>).
- Loucks, D. P., J. R. Stedinger, and D. A. Haith (1981), *Water Resources System Planning and Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N. J.
- Maass, A., M. M. Hufschmidt, R. Dorfman, H. A. Thomas, Jr., S. A. Marglin, and G. M. Fair (1962), *Design of Water Resource Systems*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Mandelbrot, B. B. (1965) Une classe de processus stochastiques homothétiques a soi: application à la loi climatologique de H. E. Hurst. *C. R. Acad. Sci. Paris* 260, 3284–3277.
- Matalas, N. C., and W. B. Langbein (1962) Information content of the mean, *J. Geophys. Res.*, 67(9), 3441–3448.
- Matalas, N. C. (1967), Mathematical assessment of synthetic hydrology, *Water Resour. Res.*, 3(4), 937-945.
- Matalas, N.C. and Wallis, J.R. (1976), Generation of synthetic flow sequences, in *Systems approach to water management*, A.K. Biswas editor, McGraw Hill.
- Metropolis, N. (1987), "The beginning of the Monte Carlo method". *Los Alamos Science* (1987 Special Issue dedicated to Stanislaw Ulam): 125–130. (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://library.lanl.gov/la-pubs/00326866.pdf>).

- Metropolis, N. (1989), The beginning of the Monte Carlo method, in *From cardinals to chaos*, ed. by N. G. Cooper, Cambridge University, NY.
- National Research Council (1988), *Estimating Probabilities of Extreme Floods: Methods and Recommended Research*, National Academy Press, Washington, D.C.
- Papalexiou, S.M., D. Koutsoyiannis, and A. Montanari (2010), Mind the bias!, *STAHY Official Workshop: Advances in statistical hydrology*, Taormina, Italy, International Association of Hydrological Sciences.
- Papoulis, A. (1990), *Probability and Statistics*, Prentice-Hall.
- Stedinger, J. R. (1983), Estimating a regional flood frequency distribution, *Water Resour. Res.*, 19, 503– 510.
- Stedinger, J. R., R. M. Vogel, and E. Foufoula-Georgiou (1993), Frequency analysis of extreme events, in *Handbook of Hydrology*, edited by D. A. Maidment, chap. 18, pp. 18.1–18.66, McGraw-Hill, New York.
- Thomas, H. A., and M. B. Fiering (1962), Mathematical synthesis of streamflow sequences for the analysis of river basins by simulation, in *Design of Water Resource Systems*, by A. Maass, M. M. Hufschmidt, R. Dorfman, H. A. Thomas, Jr., S. A. Marglin, and G. M. Fair, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Ulam, S. (1983) *Adventures of a Mathematician*. New York: Charles Scribner's Sons.
- Winston, W, L. (1994), *Operations Research, Applications and Algorithms*, 3rd ed., Duxbury, Belmont (Διαθέσιμο στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://www.informaworld.com/smpp/ftinterface~content=a713826714~fulltext=713240930~frm=content>).
- Yevjevich, V. (1972) *Probability and Statistics in Hydrology*. Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA.
- Yule, G. U. (1945), A method of studying time series based on their internal correlations, *J. R. Stat. Soc.*, 108, 208– 225.

Παράρτημα Α - Αποδείξεις σχέσεων

Προσδιορισμός συντελεστών α_{ij}

Για λόγους πληρότητας στο σημείο αυτό παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τον προσδιορισμό των συντελεστών α_{ij} , οι οποίοι εκφράζουν την εξάρτηση του σταθμού i από το σταθμό j και οι οποίοι χρησιμοποιούνται κατά τη στατιστική ανάλυση, ανεξάρτητων χρονικά, υδρολογικών χρονοσειρών (Κεφάλαιο 3, σχέση (3.3)).

Για $i = 2, \dots, k \rightarrow j = 1, \dots, (i - 1)$ με $k = 2 \div 10$ λοιπόν, διερευνάται η ενοποίηση έως και **δέκα** δειγμάτων από διαφορετικές θέσεις, τα οποία εκφράζονται από τις εξής k ανελίξεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(t) \\ X_2(t) = \alpha_{21}X_1(t) + V_2(t) \text{ (σχέση (3.3))} \\ \vdots \\ X_i(t) = \alpha_{i1}X_1(t) + \alpha_{i2}X_2(t) + \dots + \alpha_{i(i-1)}X_{i-1}(t) + V_i(t) \text{ (σχέση (3.3))} \\ \vdots \\ X_k(t) = \alpha_{k1}X_1(t) + \alpha_{k2}X_2(t) + \dots + \alpha_{k(k-1)}X_{k-1}(t) + V_k(t) \text{ (σχέση (3.3))} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Έστω μεταβλητές:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{X_1} = X_1(t) - \mu_X \\ Z_{X_2} = X_2(t) - \mu_X \\ \vdots \\ Z_{X_i} = X_i(t) - \mu_X \\ \vdots \\ Z_{X_k} = X_k(t) - \mu_X \\ E_{V_2} = V_2(t) - \mu_{V_2} \\ E_{V_3} = V_3(t) - \mu_{V_3} \\ \vdots \\ E_{V_i} = V_i(t) - \mu_{V_i} \\ \vdots \\ E_{V_k} = V_k(t) - \mu_{V_k} \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Είναι προφανές πως:

$$\text{και} \quad \stackrel{(\text{A.2})}{\implies} \left\{ \begin{array}{l} \mu_{Z_{X_1}} = \mu_{Z_{X_2}} = \dots = \mu_{Z_{X_i}} = \dots = \mu_{Z_{X_k}} = 0 \\ \mu_{E_{V_2}} = \mu_{E_{V_3}} = \dots = \mu_{E_{V_i}} = \dots = \mu_{E_{V_k}} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

$$\stackrel{(A.2)}{\implies} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{Z_{X_1}} = \sigma_{Z_{X_2}} = \dots = \sigma_{Z_{X_i}} = \dots = \sigma_{Z_{X_k}} = \sigma_X \\ \sigma_{E_{V_2}} = \sigma_{V_2} \\ \sigma_{E_{V_3}} = \sigma_{V_3} \\ \vdots \\ \sigma_{E_{V_i}} = \sigma_{V_i} \\ \vdots \\ \sigma_{E_{V_k}} = \sigma_{V_k} \end{array} \right.$$

Αφαιρώντας από την (A.1) με τις αντίστοιχες μέσες τιμές προκύπτει:

$$\stackrel{(A.1)}{\implies} \left\{ \begin{array}{l} X_1(t) - \mu_X \\ X_2(t) - \mu_X = \alpha_{21}X_1(t) - \alpha_{21}\mu_X + V_2(t) - \mu_{V_2} \\ \vdots \\ X_i(t) - \mu_X = \alpha_{i1}(X_1(t) - \mu_X) + \alpha_{i2}(X_2(t) - \mu_X) + \dots \stackrel{(A.2)}{\iff} \\ \dots + \alpha_{i(i-1)}(X_{i-1}(t) - \mu_X) + (V_i(t) - \mu_{V_i}) \\ \vdots \\ X_k(t) - \mu_X = \alpha_{k1}(X_1(t) - \mu_X) + \alpha_{k2}(X_2(t) - \mu_X) + \dots \\ \dots + \alpha_{k(k-1)}(X_{k-1}(t) - \mu_X) + (V_k(t) - \mu_{V_k}) \end{array} \right. \quad (A.4)$$

$$\stackrel{(A.2)}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} Z_{X_1} \\ Z_{X_2} = \alpha_{21}Z_{X_1} + E_{V_2} \\ \vdots \\ Z_{X_i} = \alpha_{i1}Z_{X_1} + \alpha_{i2}Z_{X_2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}Z_{X_{i-1}} + E_{V_i} \\ \vdots \\ Z_{X_k} = \alpha_{k1}Z_{X_1} + \alpha_{k2}Z_{X_2} + \dots + \alpha_{k(k-1)}Z_{X_{k-1}} + E_{V_k} \end{array} \right.$$

Εν συνεχεία υπολογίζεται η ετεροσυνδιασπορά των ανεξίτηλων i, j $[X_i(t), X_j(t)]$ για $i \neq j^*$ με εφαρμογή της σχέσης (2.7), για υστέρηση $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} \stackrel{(2.7)}{\implies} Cov[X_i(t), X_j(t)] &= E[(X_i(t) - \mu_X)(X_j(t) - \mu_X)] \stackrel{(A.2)}{\iff} \\ &\stackrel{(A.2)}{\iff} Cov[X_i(t), X_j(t)] = E[Z_{X_i}, Z_{X_j}] \stackrel{(A.4)}{\iff} \\ &\stackrel{(A.4)}{\iff} Cov[X_i(t), X_j(t)] \\ &= E[(\alpha_{i1}Z_{X_1} + \alpha_{i2}Z_{X_2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}Z_{X_{i-1}} + E_{V_i})Z_{X_j}] \iff \\ &\iff Cov[X_i(t), X_j(t)] \\ &= E[\alpha_{i1}Z_{X_1}Z_{X_j}] + E[\alpha_{i2}Z_{X_2}Z_{X_j}] + \dots \\ &\quad + E[\alpha_{i(i-1)}Z_{X_{i-1}}Z_{X_j}] + E[Z_{X_j}E_{V_i}] \end{aligned} \quad (A.5)$$

Δεδομένου πως οι μεταβλητές $X_j(t), V_i(t)$ είναι ασυσχέτιστες* ισχύει:

* Για $i \neq j$ είναι προφανές πως $Cov[X_i(t), X_j(t)] = \sigma_X^2$ (σχέση (2.7))

$$\begin{aligned}
Cov[X_j(t), V_i(t)] &= 0 \stackrel{(2.7)}{\iff} E[(X_j(t) - \mu_X)(V_i(t) - \mu_{V_i})] = 0 \stackrel{(A.2)}{\iff} \\
&\stackrel{(A.2)}{\iff} E[Z_{X_j} E_{V_i}] = 0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Η σχέση (A.5) λοιπόν, γίνεται:

$$\begin{aligned}
&Cov[X_i(t), X_j(t)] \\
&= E[\alpha_{i1} Z_{X_1} Z_{X_j}] + E[\alpha_{i2} Z_{X_2} Z_{X_j}] + \dots \\
&+ E[\alpha_{i(i-1)} Z_{X_{i-1}} Z_{X_j}] + E[Z_{X_j} E_{V_i}] \stackrel{(A.6)}{\iff} \\
&\stackrel{(A.6)}{\iff} Cov[X_i(t), X_j(t)] \\
&= E[\alpha_{i1} Z_{X_1} Z_{X_j}] + E[\alpha_{i2} Z_{X_2} Z_{X_j}] + \dots \\
&+ E[\alpha_{i(i-1)} Z_{X_{i-1}} Z_{X_j}] + 0 \iff \\
&\iff Cov[X_i(t), X_j(t)] \\
&= \alpha_{i1} E[Z_{X_1} Z_{X_j}] + \alpha_{i2} E[Z_{X_2} Z_{X_j}] + \dots \\
&+ \alpha_{i(i-1)} E[Z_{X_{i-1}} Z_{X_j}] \stackrel{(A.2), (2.7)}{\iff} \\
&\stackrel{(A.2), (2.7)}{\iff} Cov[X_i(t), X_j(t)] \\
&= \alpha_{i1} Cov[X_1(t), X_j(t)] \\
&+ \alpha_{i2} Cov[X_2(t), X_j(t)] + \dots \\
&+ \alpha_{i(i-1)} Cov[X_{i-1}(t), X_j(t)] \stackrel{\epsilon\pi i \frac{1}{\sigma_X^2}}{\iff} \\
&\stackrel{\epsilon\pi i \frac{1}{\sigma_X^2}}{\iff} \frac{Cov[X_i(t), X_j(t)]}{\sigma_X^2} \\
&= \alpha_{i1} \frac{Cov[X_1(t), X_j(t)]}{\sigma_X^2} \\
&+ \alpha_{i2} \frac{Cov[X_2(t), X_j(t)]}{\sigma_X^2} + \dots \\
&+ \alpha_{i(i-1)} \frac{Cov[X_{i-1}(t), X_j(t)]}{\sigma_X^2} \stackrel{(2.8)}{\iff} \\
&\stackrel{(2.8)}{\iff} r_{ij} = \alpha_{i1} r_{1j} + \alpha_{i2} r_{2j} + \dots + \alpha_{i(i-1)} r_{(i-1)j}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

* Όπως καταδεικνύει και η μορφή της σχέσης (A. 1)

$$\begin{cases} r_{ij} = r & i \neq j \\ r_{ij} = 1 & i = j \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Δεδομένου ότι για κάθε $i = 2, \dots, k \rightarrow j = 1, \dots, (i - 1)$, δημιουργείται για κάθε i , ένα γραμμικό σύστημα $(i - 1)$ εξισώσεων με $(i - 1)$ αγνώστους (Σχέση (A.7)), από το οποίο προσδιορίζονται για κάθε σταθμό οι συντελεστές α_{ij} (λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (A.8)).

Προσδιορισμός στατιστικών χαρακτηριστικών λευκών θορύβων (περίπτωση χρονικά ανεξάρτητων υδρολογικών δειγμάτων)

Στα πλαίσια της δημιουργίας υδρολογικών χρονοσειρών, για την έκφραση του προβλήματος της ενοποίησης δειγμάτων, κατά τη στατιστική ανάλυση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών, δημιουργούνται και χρονοσειρές λευκού θορύβου ((Κεφάλαιο 3, σχέση (3.3)) τα στατιστικά χαρακτηριστικά των οποίων (μέση τιμή μ_{V_i} και τυπική απόκλιση σ_{V_i}) προσδιορίζονται ως εξής:

Όπως προαναφέρθηκε για $i = 2, \dots, k \rightarrow j = 1, \dots, (i - 1)$ με $k = 2 \div 10$. Με βάση την (A.1) λοιπόν, υπολογίζονται οι αντίστοιχες μέσες τιμές, ήτοι:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{(A.1)} \begin{cases} E[X_1(t)] = \mu_{X_1} \\ E[X_2(t)] = E[\alpha_{21}X_1(t)] + E[V_2(t)] \\ \vdots \\ E[X_i(t)] = E[\alpha_{i1}X_1(t)] + E[\alpha_{i2}X_2(t)] + \dots + E[\alpha_{i(i-1)}X_{i-1}(t)] + E[V_i(t)] \\ \vdots \\ E[X_k(t)] = E[\alpha_{k1}X_1(t)] + E[\alpha_{k2}X_2(t)] + \dots + E[\alpha_{k(k-1)}X_{k-1}(t)] + E[V_k(t)] \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{X_2} = \alpha_{21}\mu_{X_1} + \mu_{V_2} \\ \vdots \\ \mu_{X_i} = \alpha_{i1}\mu_{X_1} + \alpha_{i2}\mu_{X_2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}\mu_{X_{i-1}} + \mu_{V_i} \\ \vdots \\ \mu_{X_k} = \alpha_{k1}\mu_{X_1} + \alpha_{k2}\mu_{X_2} + \dots + \alpha_{k(k-1)}\mu_{X_{k-1}} + \mu_{V_k} \end{cases} \xleftrightarrow{\mu_{X_1} = \mu_{X_2} = \dots = \mu_{X_i} = \dots = \mu_{X_k} = \mu_X} \\ & \xleftrightarrow{\mu_{X_1} = \mu_{X_2} = \dots = \mu_{X_i} = \dots = \mu_{X_k} = \mu_X} \begin{cases} \mu_X = \alpha_{21}\mu_X + \mu_{V_2} \\ \vdots \\ \mu_X = \alpha_{i1}\mu_X + \alpha_{i2}\mu_X + \dots + \alpha_{i(i-1)}\mu_X + \mu_{V_i} \\ \vdots \\ \mu_X = \alpha_{k1}\mu_X + \alpha_{k2}\mu_X + \dots + \alpha_{k(k-1)}\mu_X + \mu_{V_k} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mu_{V_i} = \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\right) \mu_X \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Εν συνεχεία υπολογίζεται η αυτοσυνδιασπορά της ανέλιξης Z_{X_i} , με εφαρμογή της σχέσης (2.5) για $t_1 = t_2$ (πρόκειται ουσιαστικά για τη διασπορά της εν λόγω ανέλιξης):

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(2.5)}{\implies} Cov[Z_{X_i}] = Cov[Z_{X_i}Z_{X_i}] = E\left[(Z_{X_i} - \mu_{Z_{X_i}})(Z_{X_i} - \mu_{Z_{X_i}})\right] \stackrel{(A.3)}{\iff} \\
& \stackrel{(A.3)}{\iff} Cov[Z_{X_i}] = E[(Z_{X_i} - 0)(Z_{X_i} - 0)] = E[Z_{X_i}Z_{X_i}] \stackrel{(A.4)}{\iff} \\
& \stackrel{(A.4)}{\iff} Cov[Z_{X_i}] = E[Z_{X_i}(\alpha_{i1}Z_{X_1} + \alpha_{i2}Z_{X_2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}Z_{X_{i-1}} + E_{V_i})] \\
& \iff Cov[Z_{X_i}] = \alpha_{i1}E[Z_{X_i}Z_{X_1}] + \alpha_{i2}E[Z_{X_i}Z_{X_2}] + \dots + \alpha_{i(i-1)}E[Z_{X_i}Z_{X_{i-1}}] \\
& \quad + E[Z_{X_i}E_{V_i}] \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} E[Z_{X_i}Z_{X_j}] = \sigma_{X_i X_j}, \text{ (A.2)} \\ Cov[Z_{X_i}] = \sigma_X^2 \end{array} \right.}{\iff} \\
& \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} E[Z_{X_i}Z_{X_j}] = \sigma_{X_i X_j}, \text{ (A.5)} \\ Cov[Z_{X_i}] = \sigma_X^2 \end{array} \right.}{\iff} \sigma_X^2 \\
& \quad = \alpha_{i1}\sigma_{X_i X_1} + \alpha_{i2}\sigma_{X_i X_2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}\sigma_{X_i X_{i-1}} + E[Z_{X_i}E_{V_i}] \stackrel{(A.4)}{\iff} \\
& \stackrel{(A.4)}{\iff} \sigma_X^2 = \alpha_{i1}\sigma_{X_i X_1} + \alpha_{i2}\sigma_{X_i X_2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}\sigma_{X_i X_{i-1}} + E[(\alpha_{i1}Z_{X_1} \\
& \quad + \alpha_{i2}Z_{X_2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}Z_{X_{i-1}} + E_{V_i})E_{V_i}] \iff \\
& \iff \sigma_X^2 = \alpha_{i1}\sigma_{X_i X_1} + \alpha_{i2}\sigma_{X_i X_2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}\sigma_{X_i X_{i-1}} + \alpha_{i1}E[Z_{X_1}E_{V_i}] \\
& \quad + \alpha_{i2}E[Z_{X_2}E_{V_i}] + \dots + \alpha_{i(i-1)}E[Z_{X_{i-1}}E_{V_i}] + E[E_{V_i}^2] \\
& \quad \stackrel{E[Z_{X_j}E_{V_i}] = 0, \text{ (A.6)}}{\iff} \\
& \stackrel{E[Z_{X_j}E_{V_i}] = 0, \text{ (A.6)}}{\iff} \sigma_X^2 \\
& \quad = \alpha_{i1}\sigma_{X_i X_1} + \alpha_{i2}\sigma_{X_i X_2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}\sigma_{X_i X_{i-1}} + E[E_{V_i}^2] \\
& \quad \stackrel{E[E_{V_i}^2] = \sigma_{V_i}^2}{\iff} \\
& \stackrel{E[E_{V_i}^2] = \sigma_{V_i}^2}{\iff} \sigma_X^2 = \alpha_{i1}\sigma_{X_i X_1} + \alpha_{i2}\sigma_{X_i X_2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}\sigma_{X_i X_{i-1}} + \sigma_{V_i}^2 \stackrel{\frac{\varepsilon\pi i}{\sigma_X^2}}{\iff} \\
& \stackrel{\frac{\varepsilon\pi i}{\sigma_X^2}}{\iff} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = \alpha_{i1} \frac{\sigma_{X_i X_1}}{\sigma_X^2} + \alpha_{i2} \frac{\sigma_{X_i X_2}}{\sigma_X^2} + \dots + \alpha_{i(i-1)} \frac{\sigma_{X_i X_{i-1}}}{\sigma_X^2} + \frac{\sigma_{V_i}^2}{\sigma_X^2} \stackrel{(2.8)}{\iff} \\
& \stackrel{(2.8)}{\iff} 1 = \alpha_{i1}r_{i1} + \alpha_{i2}r_{i2} + \dots + \alpha_{i(i-1)}r_{i(i-1)} + \frac{\sigma_{V_i}^2}{\sigma_X^2} \stackrel{r_{i1}=r_{i2}=\dots=r_{i(i-1)}=r}{\iff}
\end{aligned}
\tag{A.10}$$

$$\overleftrightarrow{r_{i1}=r_{i2}=\dots=r_{i(i-1)}=r} \sigma_{V_i} = \sigma_X \sqrt{1 - r \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}}$$

Με εφαρμογή των σχέσεων (A.9) και (A.10) λοιπόν, προσδιορίζονται για κάθε σταθμό η μέση τιμή μ_{V_i} και η τυπική απόκλιση σ_{V_i} , αντίστοιχα του λευκού θορύβου $V_i(t)$.

Προσδιορισμός στατιστικών χαρακτηριστικών λευκών θορύβων (περίπτωση χρονικά εξαρτημένων υδρολογικών δειγμάτων)

Ανάλογα με την περίπτωση των ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών δειγμάτων, κατά τη στατιστική ανάλυση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών, δημιουργούνται και χρονοσειρές λευκού θορύβου κανονικής κατανομής με $\sigma_{V_i} = 1$ ((Κεφάλαιο 4, σχέση (4.1)), οι μέσες τιμές των οποίων προσδιορίζονται ως εξής:

Για $i = 1, 2, \dots, k \rightarrow j = 1, 2, \dots, i$ με $k = 2 \div 10$, διερευνάται η ενοποίηση έως και **δέκα** δειγμάτων από διαφορετικές θέσεις, τα οποία εκφράζονται από τις εξής k ανελίξεις:

$$(4.1) \left\{ \begin{array}{l} X_1^t = a_{11}X_1^{t-1} + b_{11}V_1^t \\ X_2^t = a_{21}X_1^{t-1} + a_{22}X_2^{t-1} + b_{21}V_1^t + b_{22}V_2^t \\ \vdots \\ X_i^t = a_{i1}X_1^{t-1} + a_{i2}X_2^{t-1} + \dots + a_{ii}X_i^{t-1} + b_{i1}V_1^t + b_{i2}V_2^t + \dots + b_{ii}V_i^t \\ \vdots \\ X_k^t = a_{k1}X_1^{t-1} + a_{k2}X_2^{t-1} + \dots + a_{kk}X_k^{t-1} + b_{k1}V_1^t + b_{k2}V_2^t + \dots + b_{kk}V_k^t \end{array} \right. \quad (A.11)$$

Από την (A.11) προσδιορίζονται οι μέσες τιμές μ_{V_i} των λευκών θορύβων V_i^t , ως εξής:

$$(A.11) \left\{ \begin{array}{l} E[X_1^t] = a_{11}E[X_1^{t-1}] + b_{11}E[V_1^t] \\ E[X_2^t] = a_{21}E[X_1^{t-1}] + a_{22}E[X_2^{t-1}] + b_{21}E[V_1^t] + b_{22}E[V_2^t] \\ \vdots \\ E[X_i^t] = a_{i1}E[X_1^{t-1}] + a_{i2}E[X_2^{t-1}] + \dots + a_{ii}E[X_i^{t-1}] + b_{i1}E[V_1^t] + b_{i2}E[V_2^t] + \dots + b_{ii}E[V_i^t] \\ \vdots \\ E[X_k^t] = a_{k1}E[X_1^{t-1}] + a_{k2}E[X_2^{t-1}] + \dots + a_{kk}E[X_k^{t-1}] + b_{k1}E[V_1^t] + b_{k2}E[V_2^t] + \dots + b_{kk}E[V_k^t] \end{array} \right. \quad (A.12)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_{X_1} = a_{11}\mu_{X_1} + b_{11}\mu_{V_1} \\ \mu_{X_2} = a_{21}\mu_{X_1} + a_{22}\mu_{X_2} + b_{21}\mu_{V_1} + b_{22}\mu_{V_2} \\ \vdots \\ \mu_{X_i} = a_{i1}\mu_{X_1} + a_{i2}\mu_{X_2} + \dots + a_{ii}\mu_{X_i} + b_{i1}\mu_{V_1} + b_{i2}\mu_{V_2} + \dots + b_{ii}\mu_{V_i} \\ \vdots \\ \mu_{X_k} = a_{k1}\mu_{X_1} + a_{k2}\mu_{X_2} + \dots + a_{kk}\mu_{X_k} + b_{k1}\mu_{V_1} + b_{k2}\mu_{V_2} + \dots + b_{kk}\mu_{V_k} \end{array} \right.$$

$$\overleftrightarrow{\mu_{X_1}=\mu_{X_2}=\dots=\mu_{X_i}=\dots=\mu_{X_k}=\mu_X}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_X = a_{11}\mu_X + b_{11}\mu_{V_1} \\ \mu_X = a_{21}\mu_X + a_{22}\mu_X + b_{21}\mu_{V_1} + b_{22}\mu_{V_2} \\ \vdots \\ \mu_X = a_{i1}\mu_X + a_{i2}\mu_X + \dots + a_{ii}\mu_X + b_{i1}\mu_{V_1} + b_{i2}\mu_{V_2} + \dots + b_{ii}\mu_{V_i} \\ \vdots \\ \mu_X = a_{k1}\mu_X + a_{k2}\mu_X + \dots + a_{kk}\mu_{X_k} + b_{k1}\mu_{V_1} + b_{k2}\mu_{V_2} + \dots + b_{kk}\mu_{V_k} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

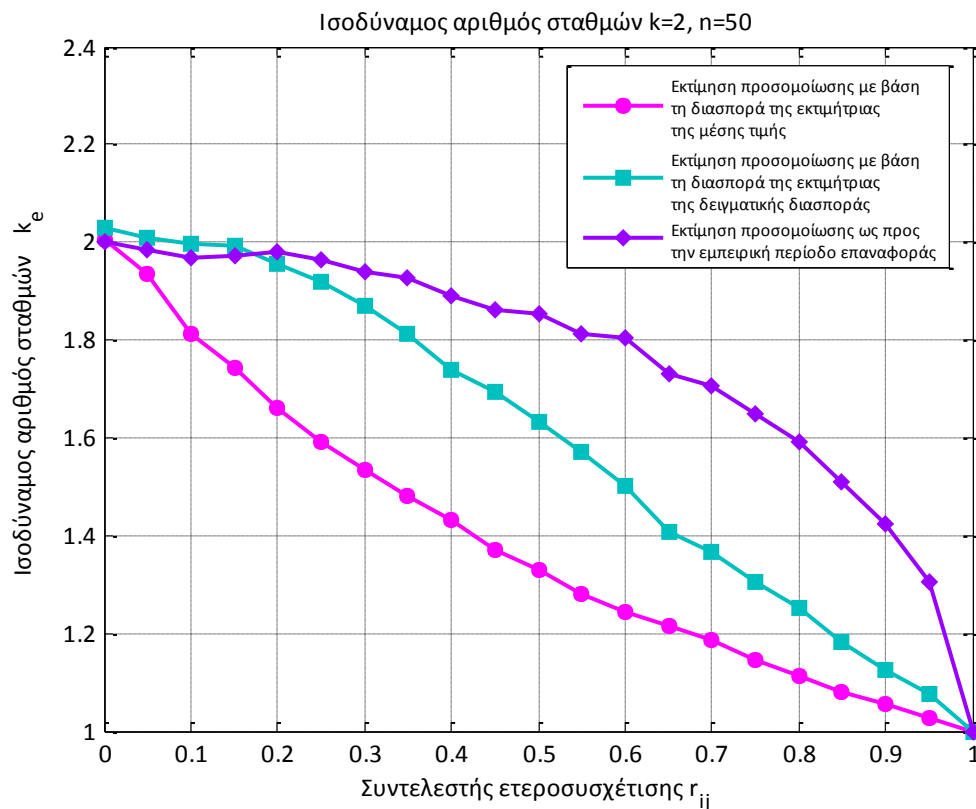
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_{V_1} = \frac{\mu_X(1 - a_{11})}{b_{11}} \\ \mu_{V_2} = \frac{\mu_X(1 - a_{22} - a_{21}) - b_{21}\mu_{V_1}}{b_{22}} \\ \vdots \\ \mu_{V_i} = \frac{\mu_X(1 - \sum_{j=1}^i a_{ij}) - \sum_{j=1}^i b_{ij}\mu_{V_j}}{b_{ii}} \\ \vdots \\ \mu_{V_k} = \frac{\mu_X(1 - \sum_{j=1}^k a_{kj}) - \sum_{j=1}^k b_{kj}\mu_{V_j}}{b_{kk}} \end{array} \right.$$

Παράρτημα Β - Αποτελέσματα προσομοιώσεων Monte Carlo

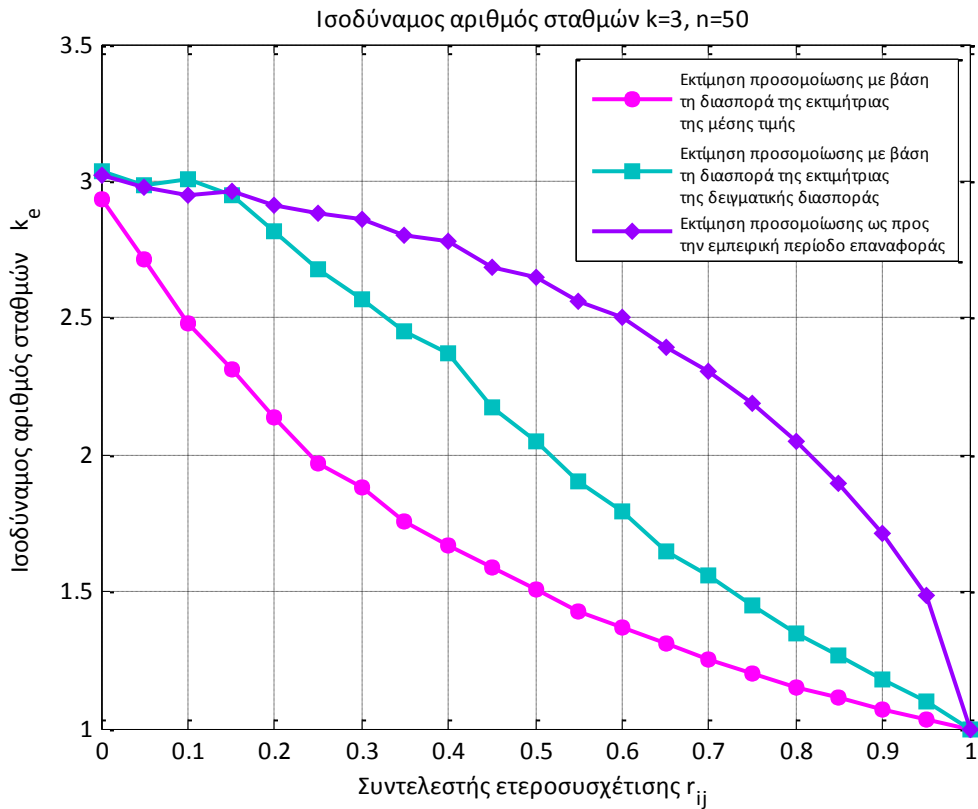
Γραφική απεικόνιση ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j

Στο σημείο αυτό παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων σε ό,τι αφορά στην εκτίμηση με προσομοίωση του ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e , για διαθέσιμο αριθμό δειγμάτων $k = 2 \div 10$, τόσο για την περίπτωση ανεξάρτητων, όσο και για την περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικά δειγμάτων.

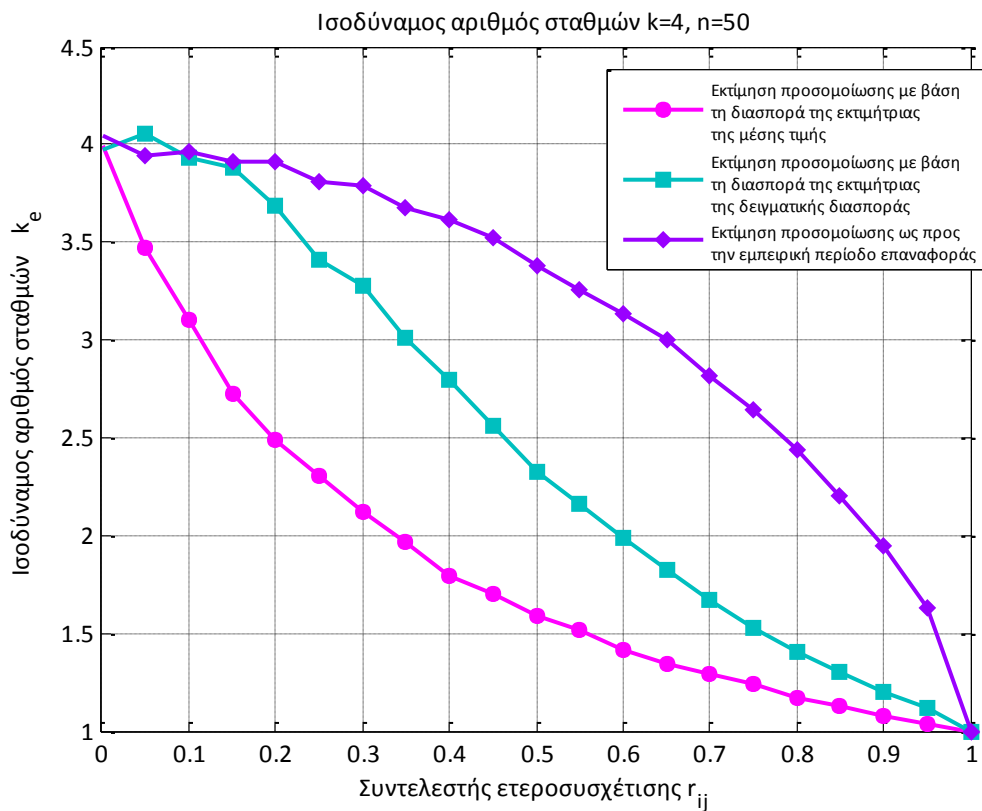
Περίπτωση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών



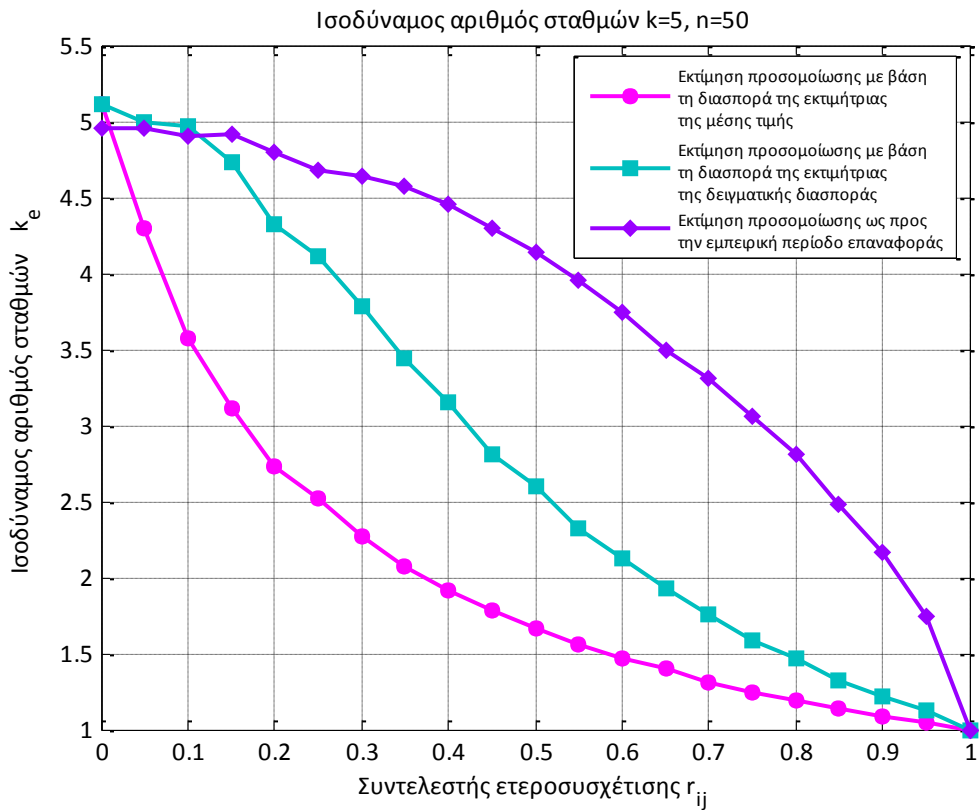
Σχήμα Β.1: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 2$



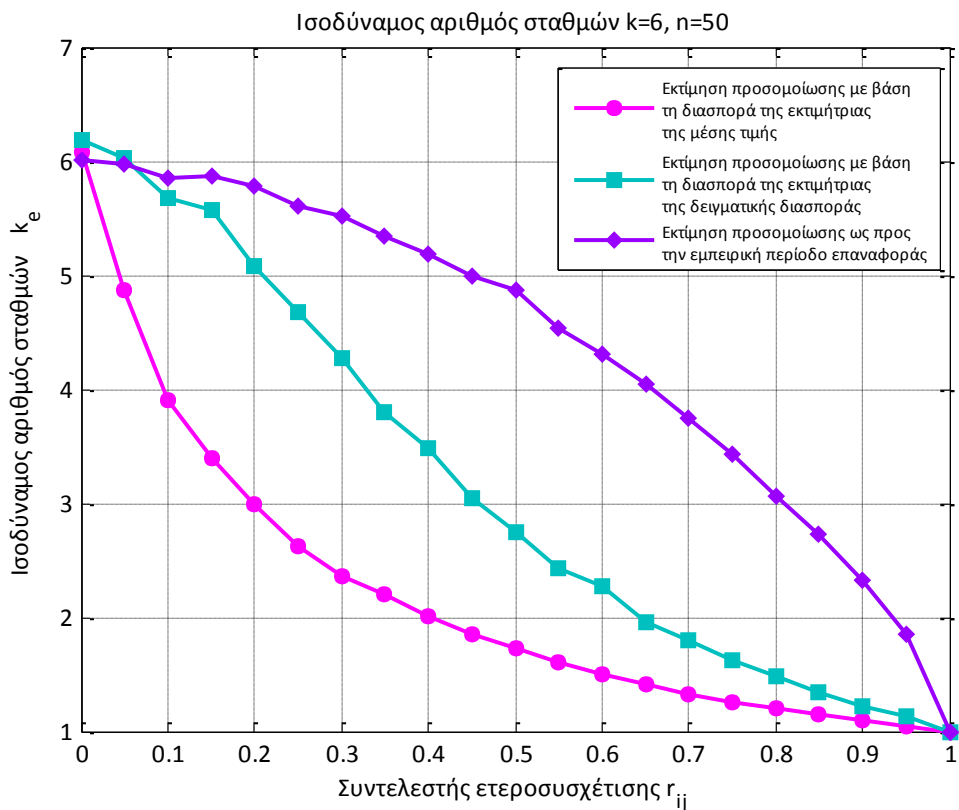
Σχήμα Β.2: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 3$



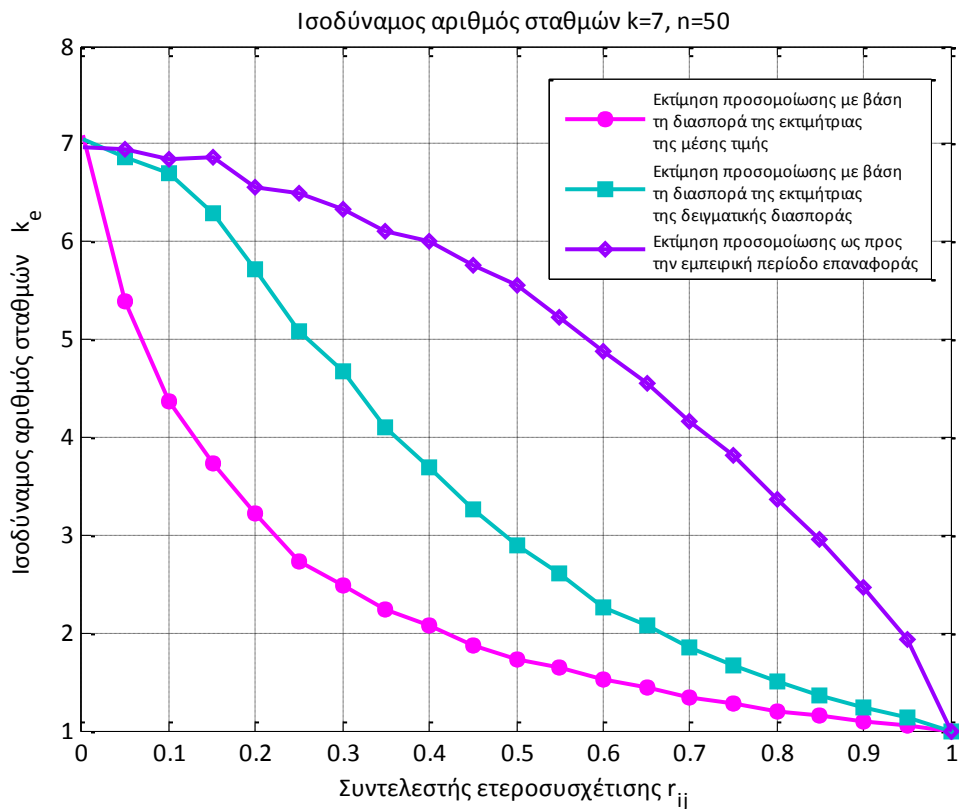
Σχήμα Β.3: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 4$



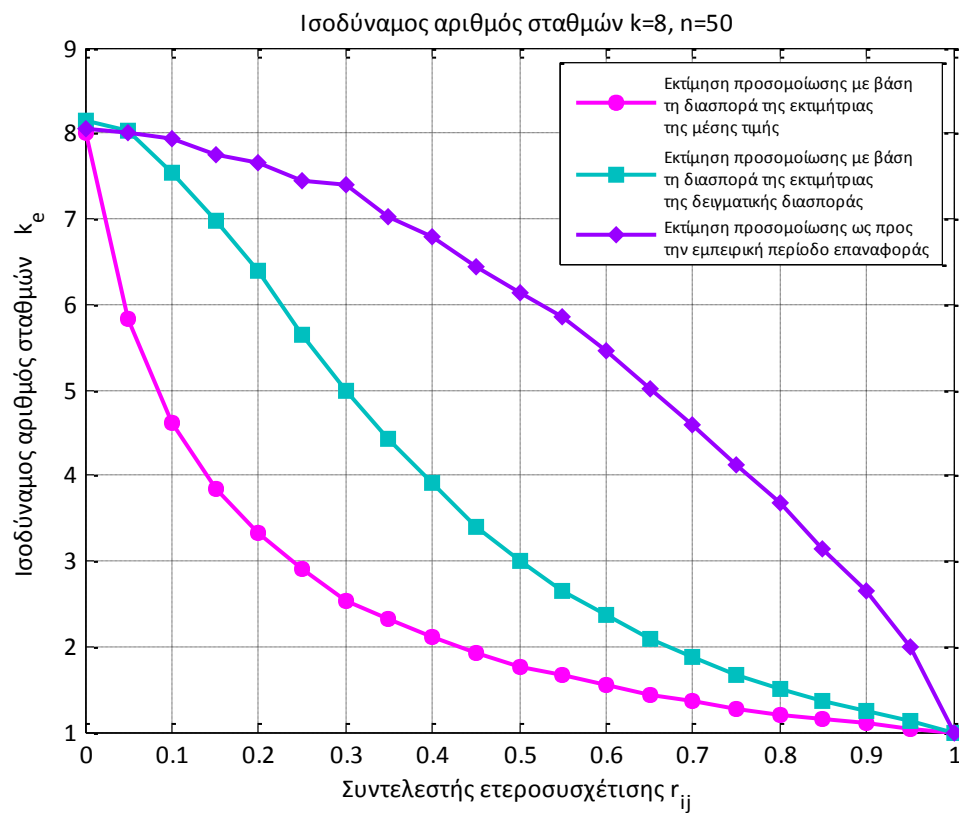
Σχήμα Β.4: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 5$



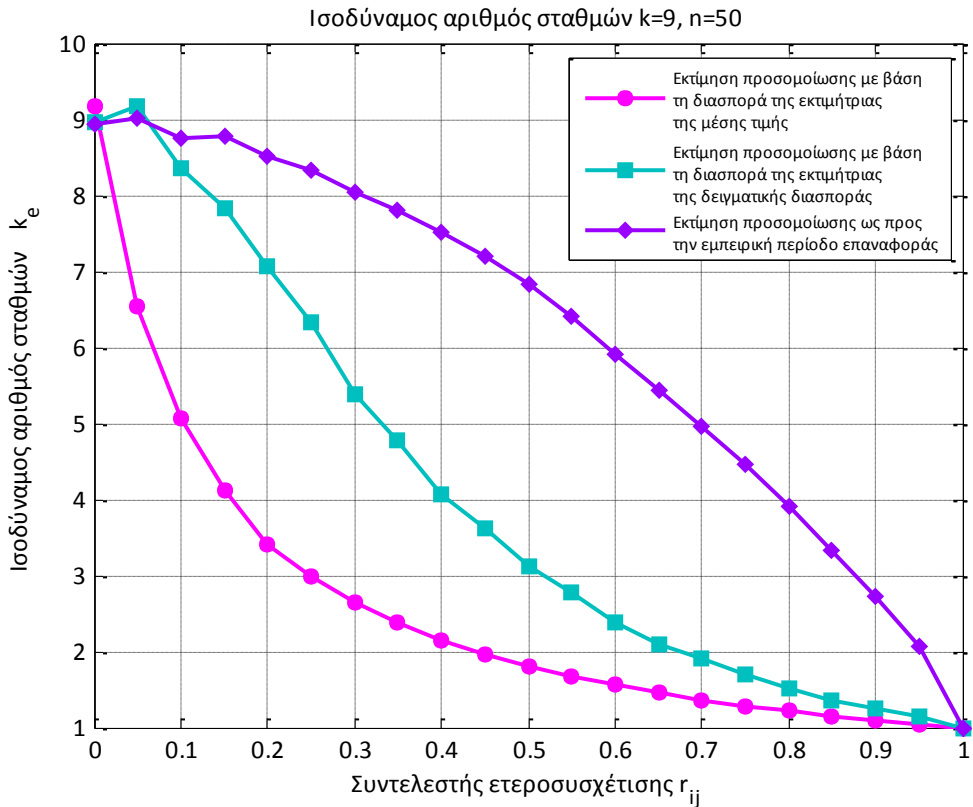
Σχήμα Β.5: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 6$



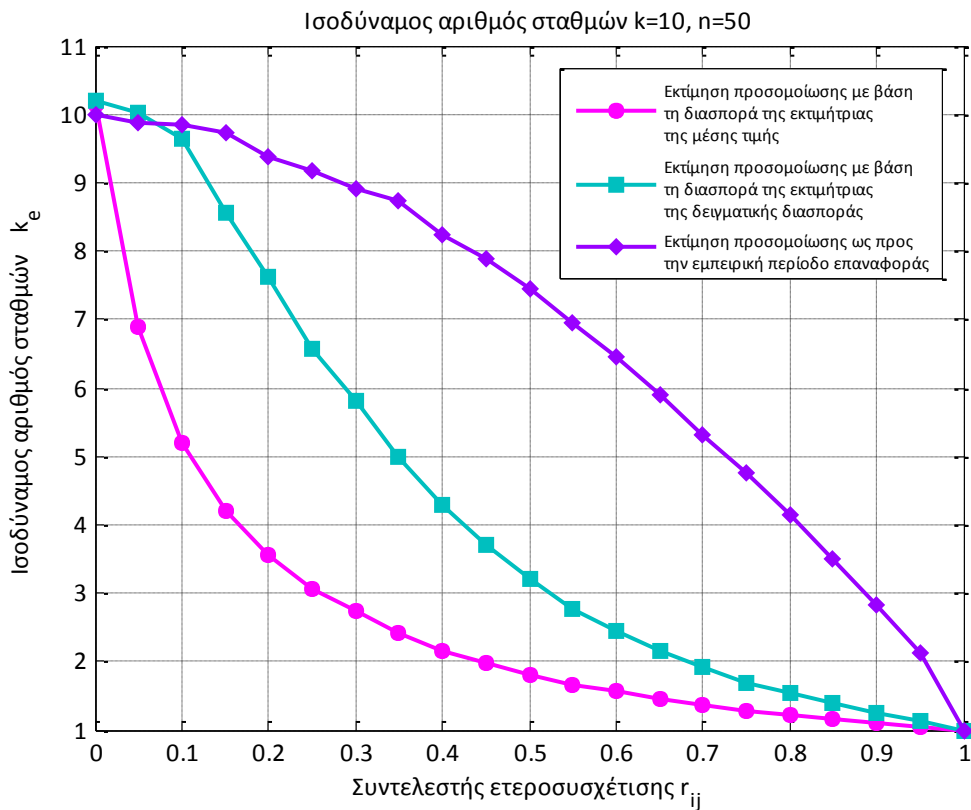
Σχήμα Β.6: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 7$



Σχήμα Β.7: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 8$

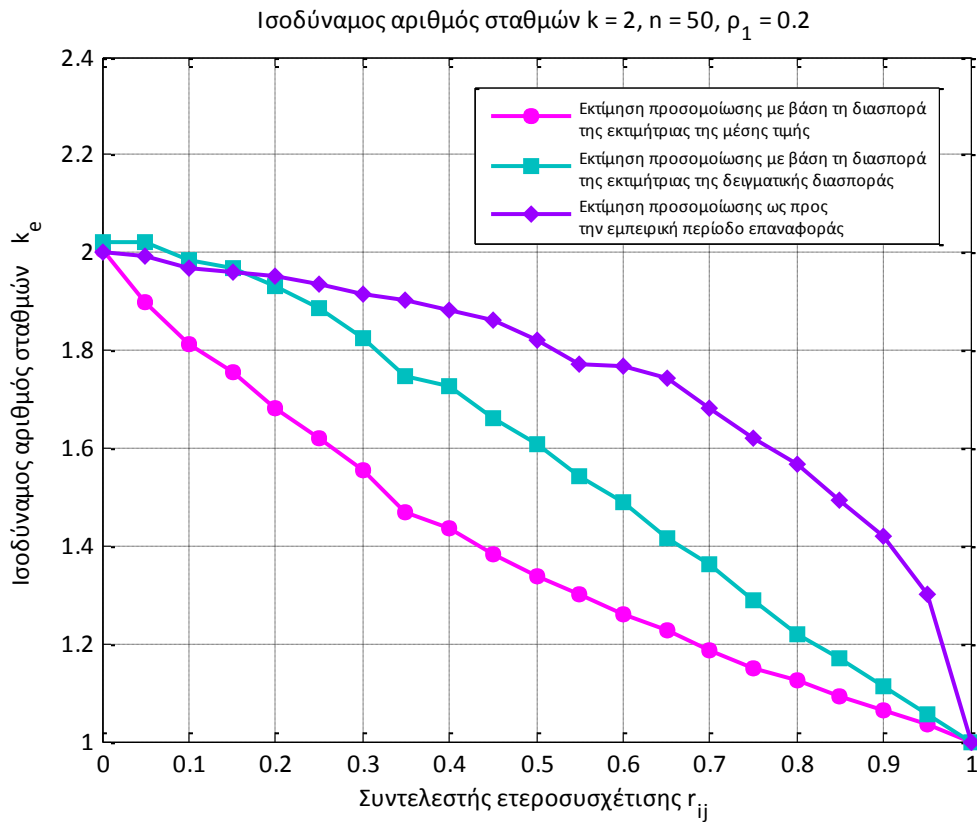


Σχήμα Β.8: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 9$

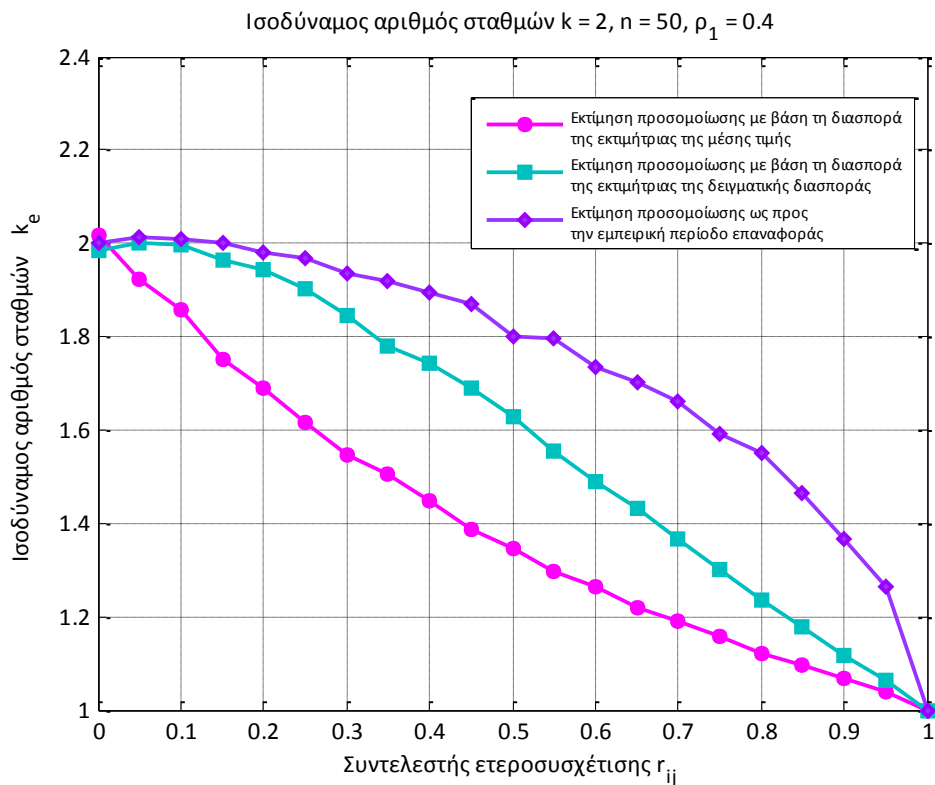


Σχήμα Β.9: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 10$

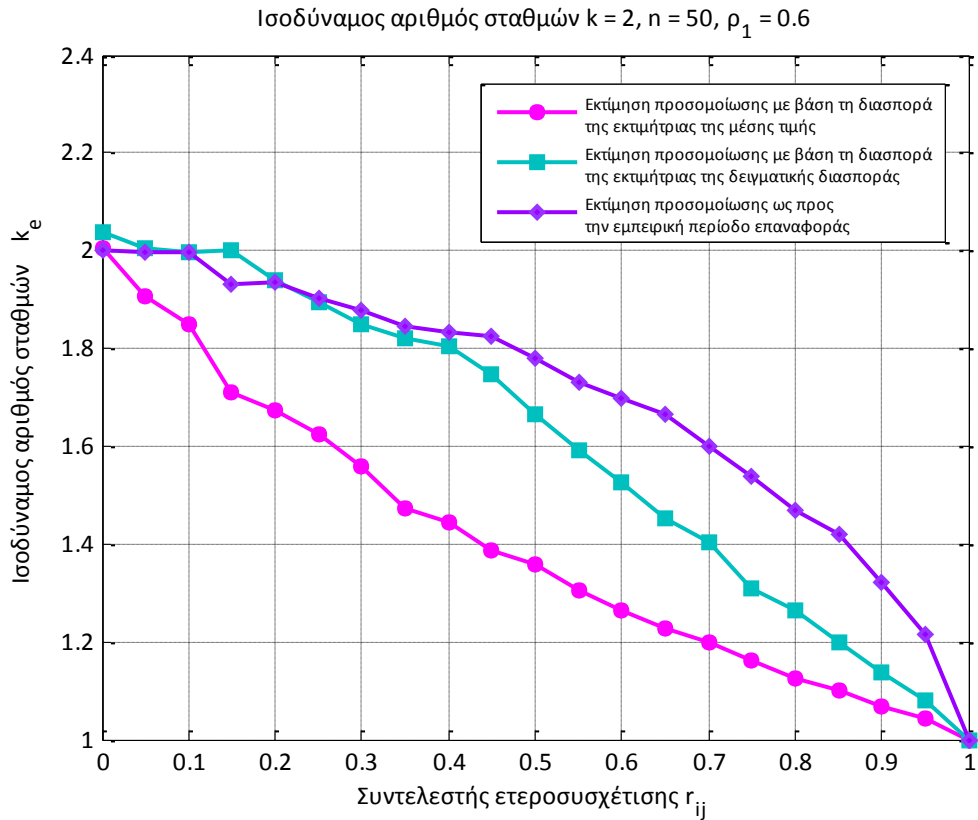
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών («Μαρκοβιανή» προσέγγιση)



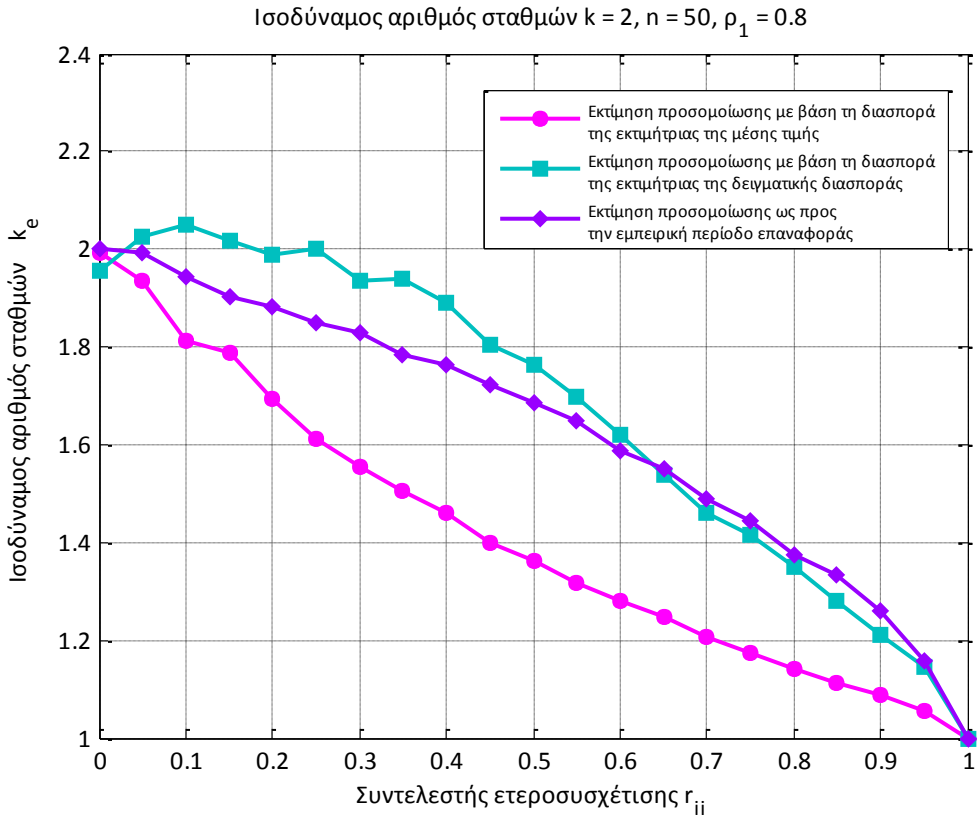
Σχήμα Β.10: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



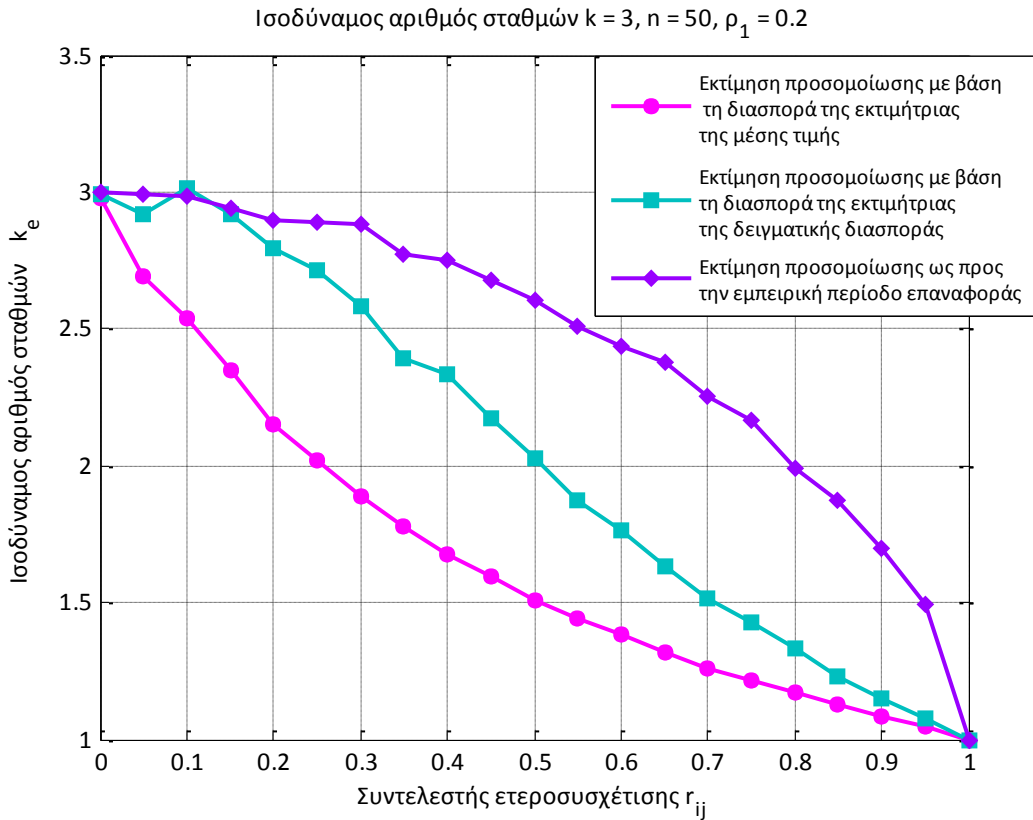
Σχήμα Β.11: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



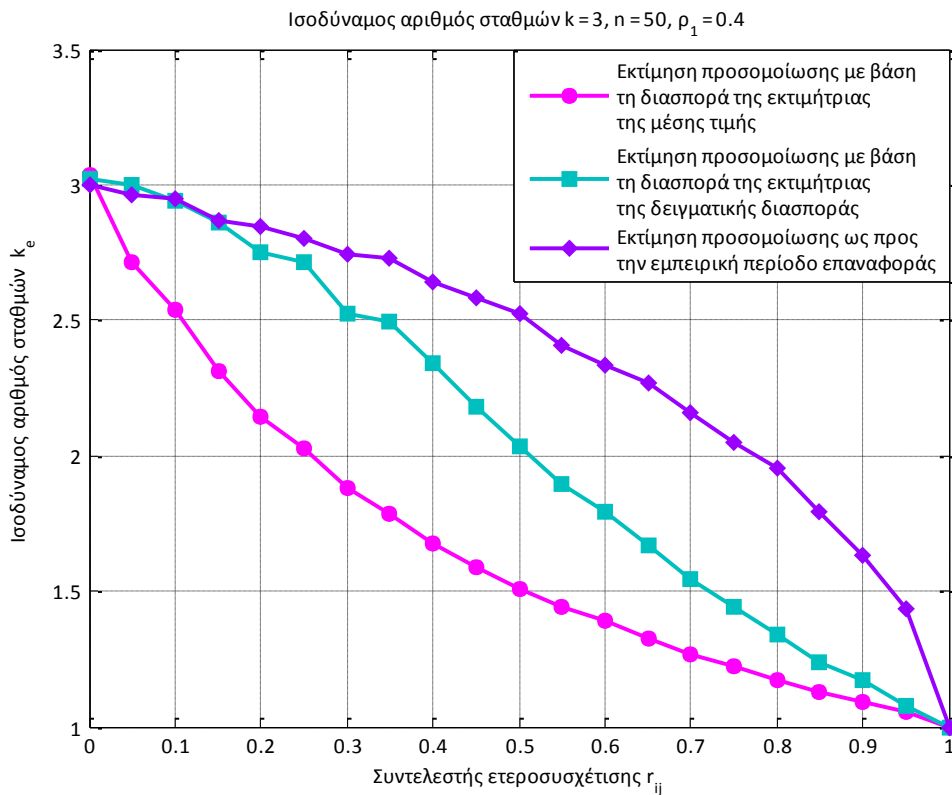
Σχήμα Β.12: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



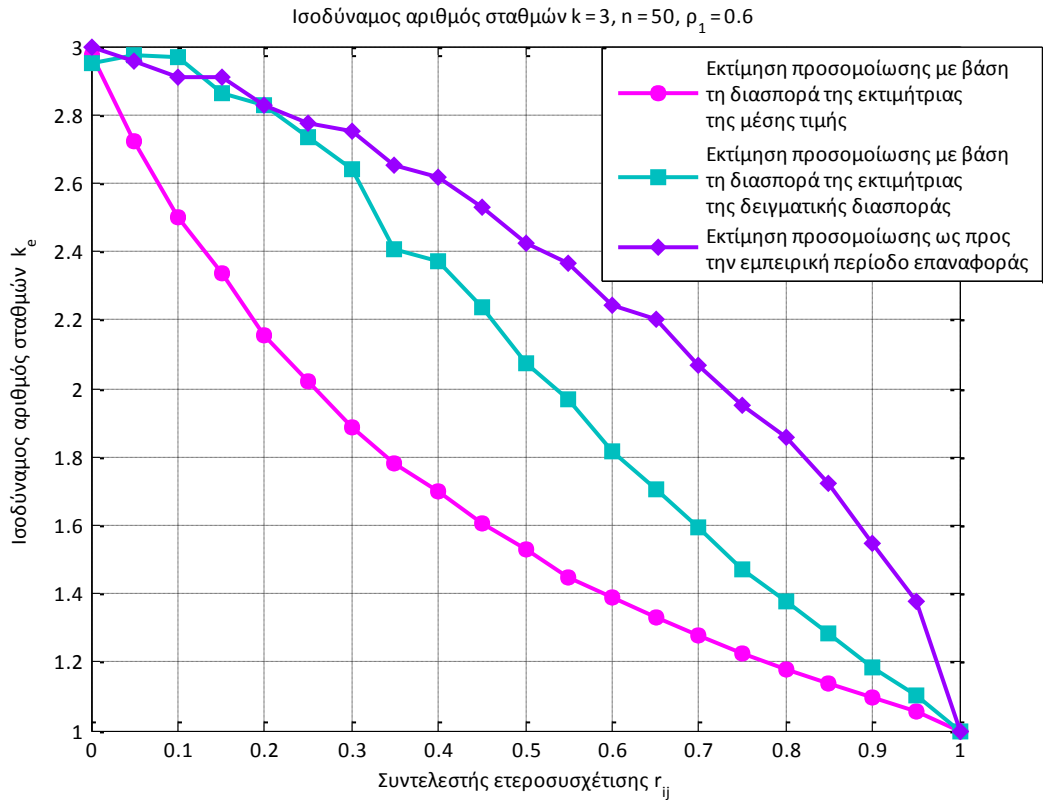
Σχήμα Β.13: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



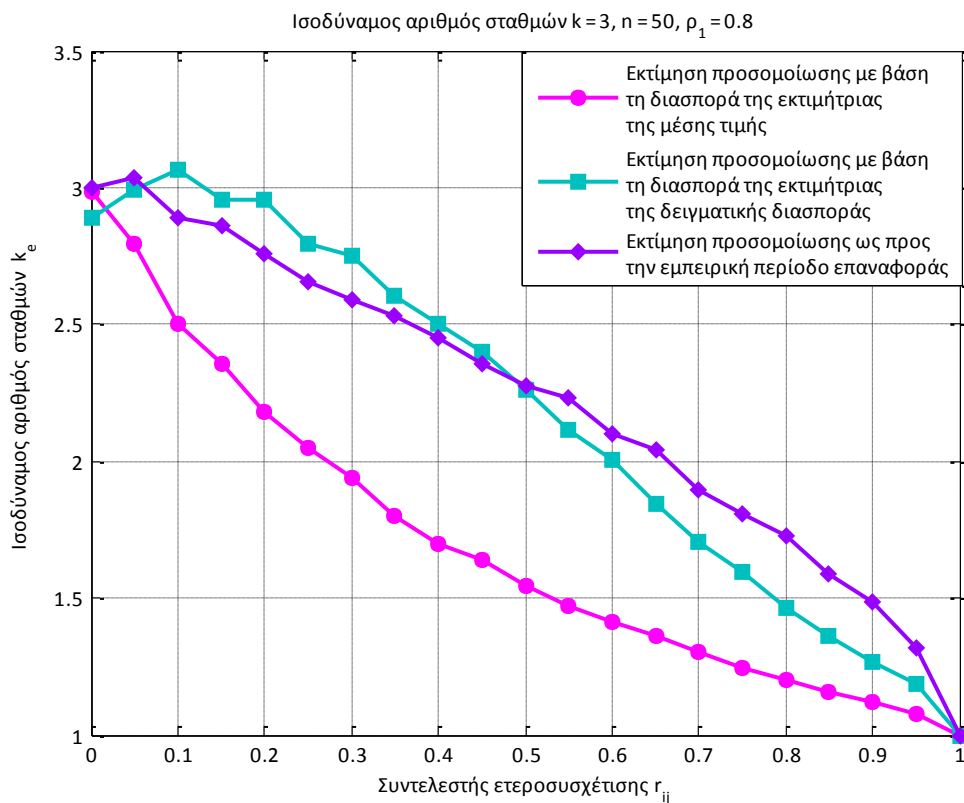
Σχήμα Β.14: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



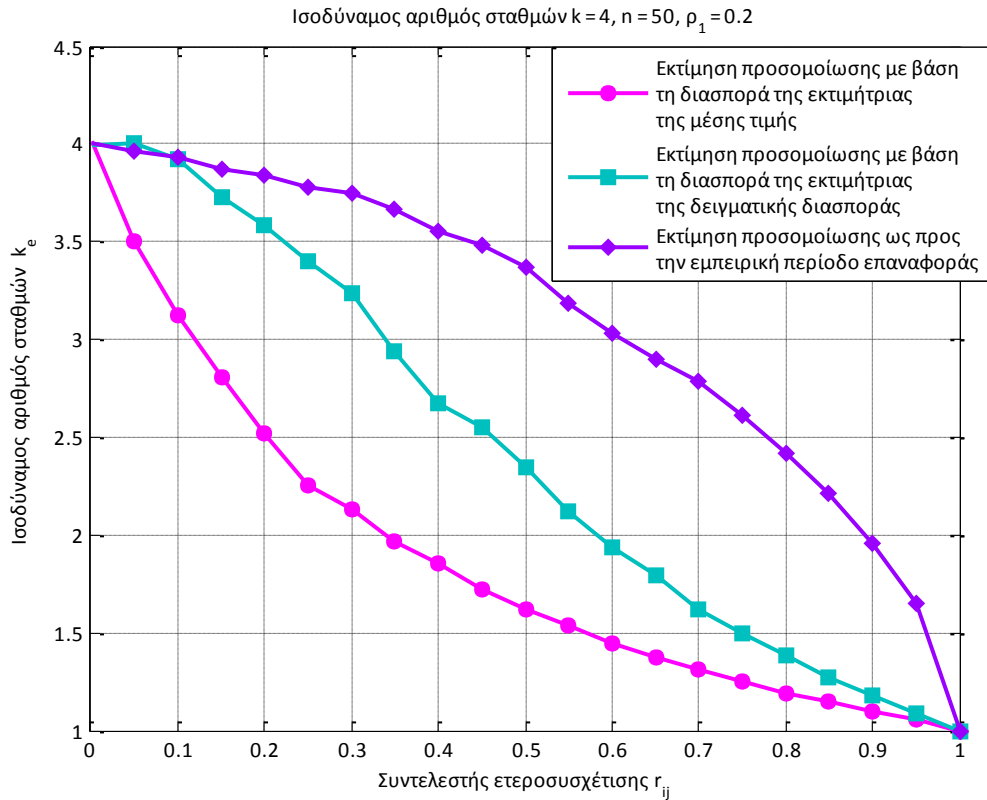
Σχήμα Β.15: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



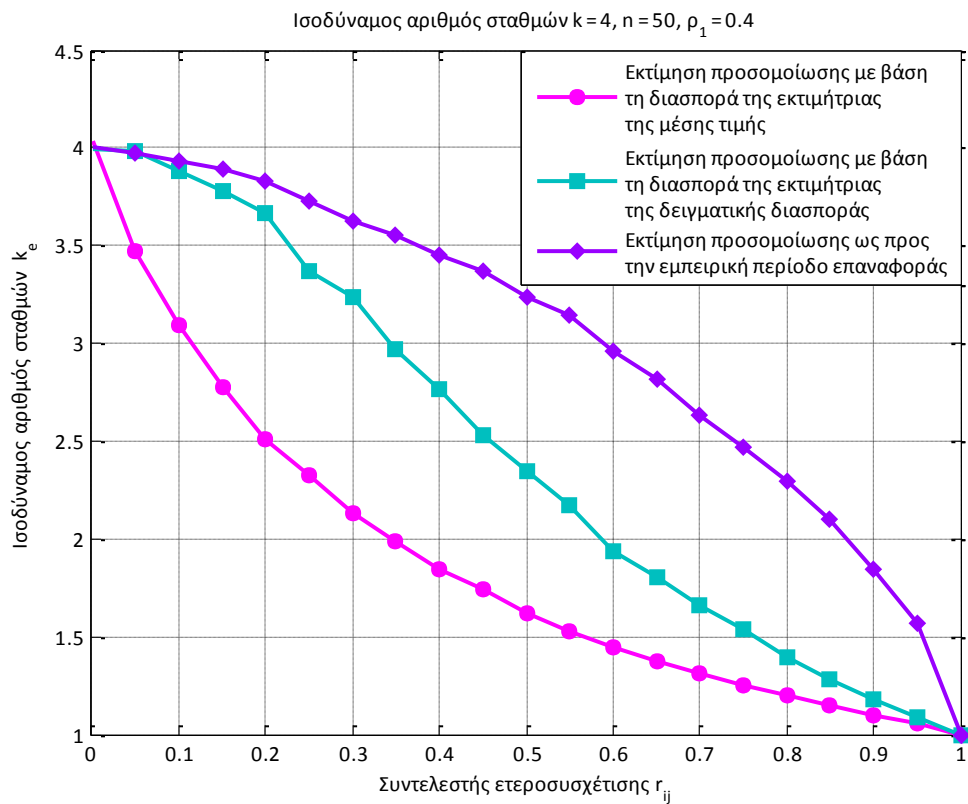
Σχήμα Β.16: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



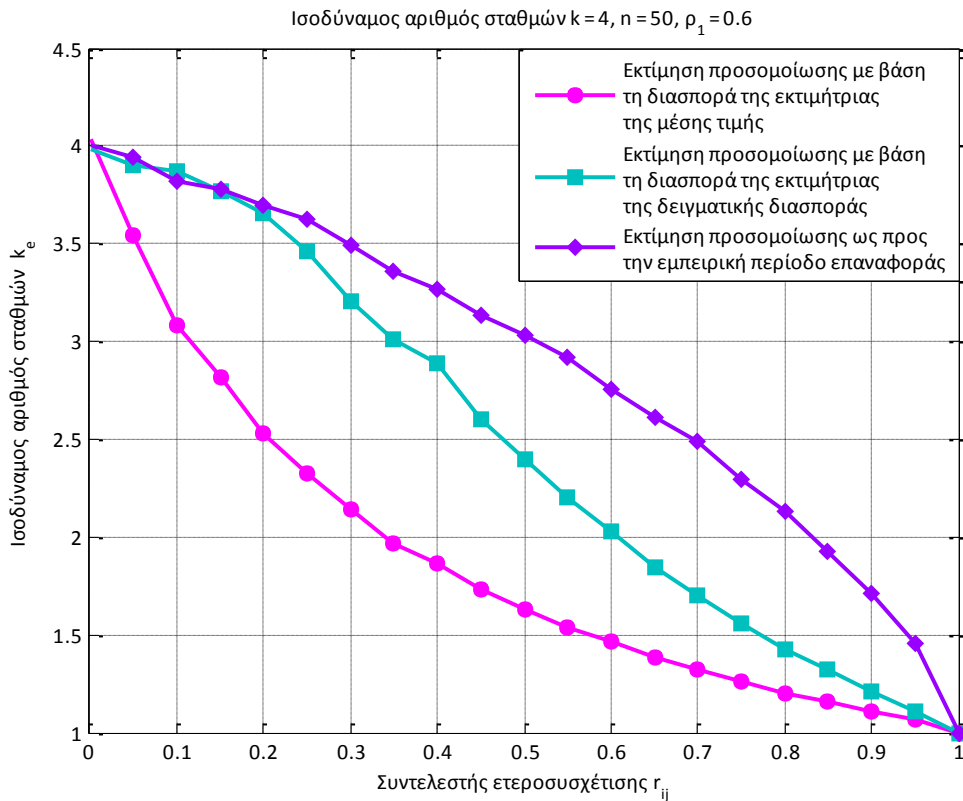
Σχήμα Β.17: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



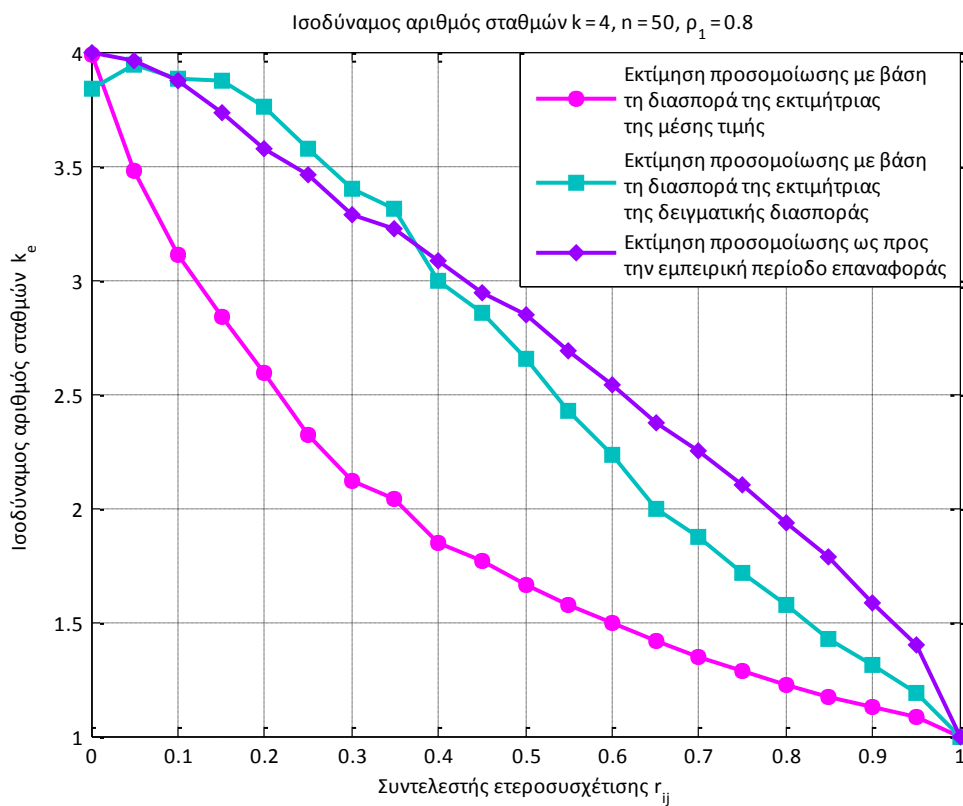
Σχήμα Β.18: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



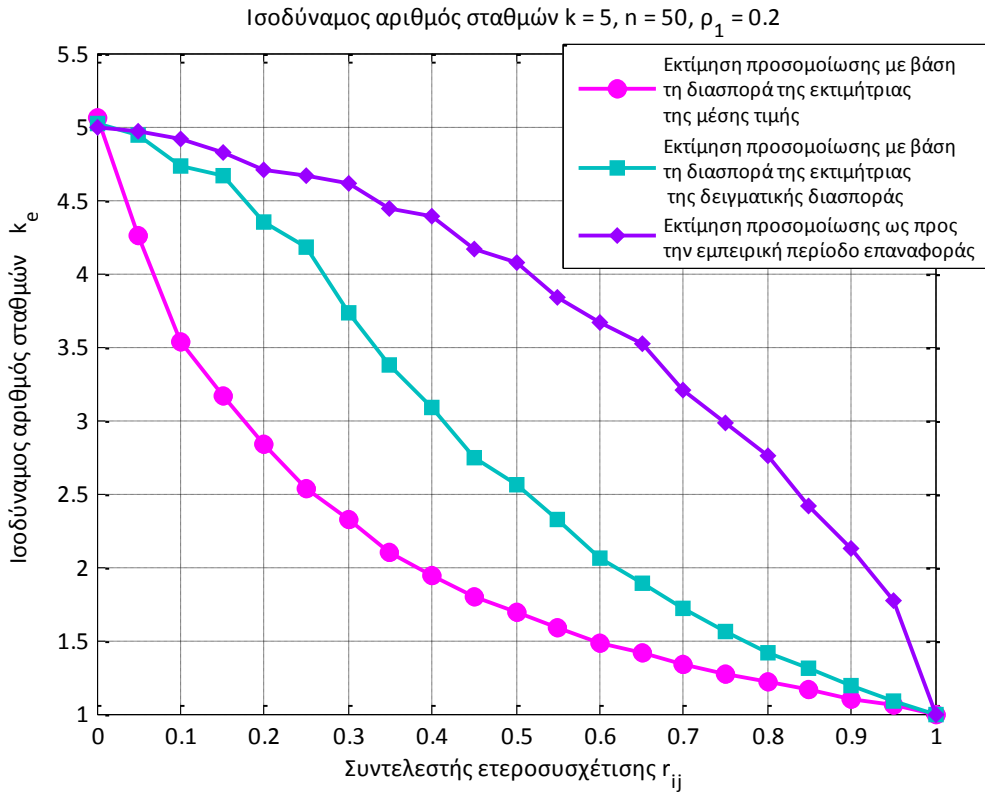
Σχήμα Β.19: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



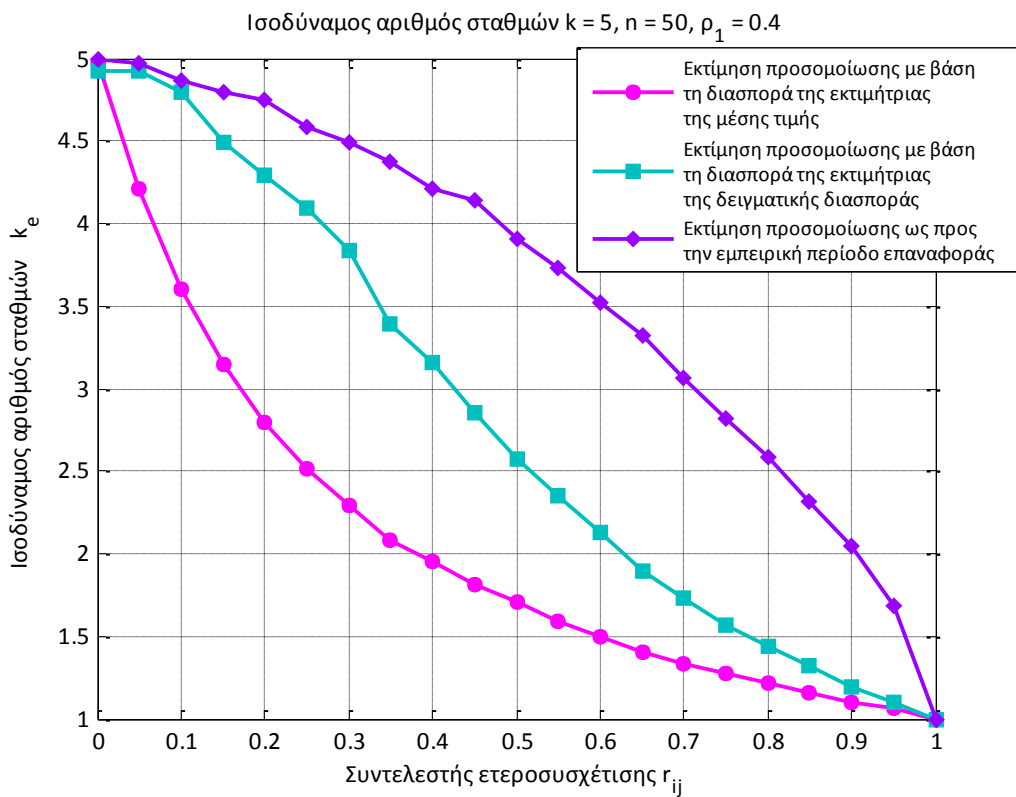
Σχήμα Β.20: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



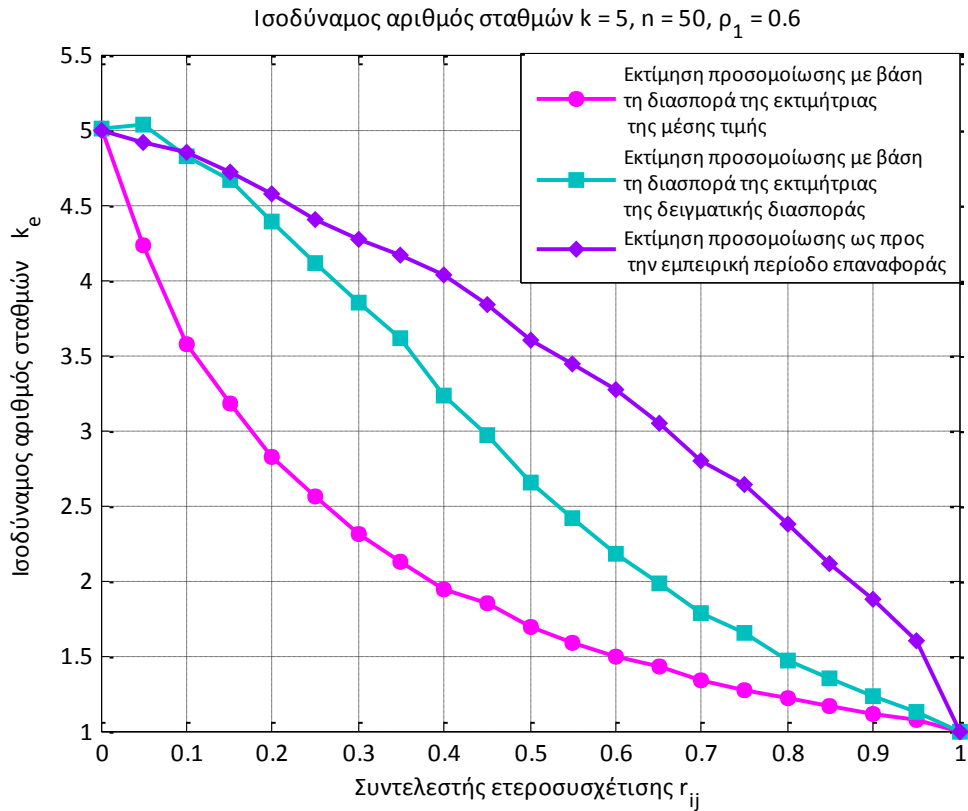
Σχήμα Β.21: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



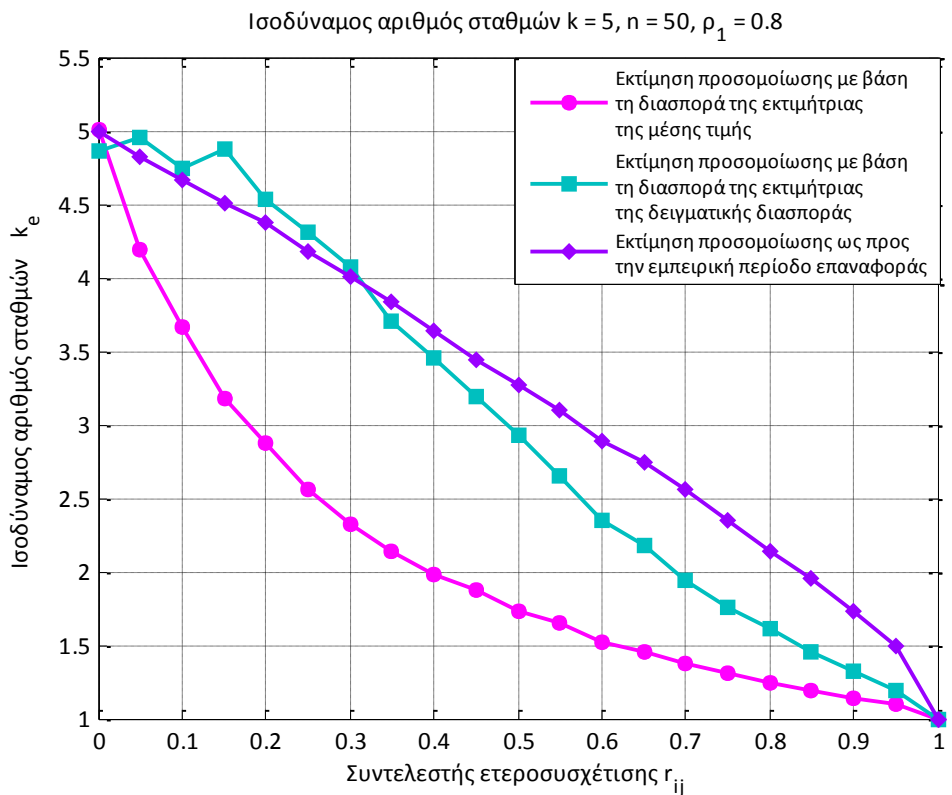
Σχήμα Β.22: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



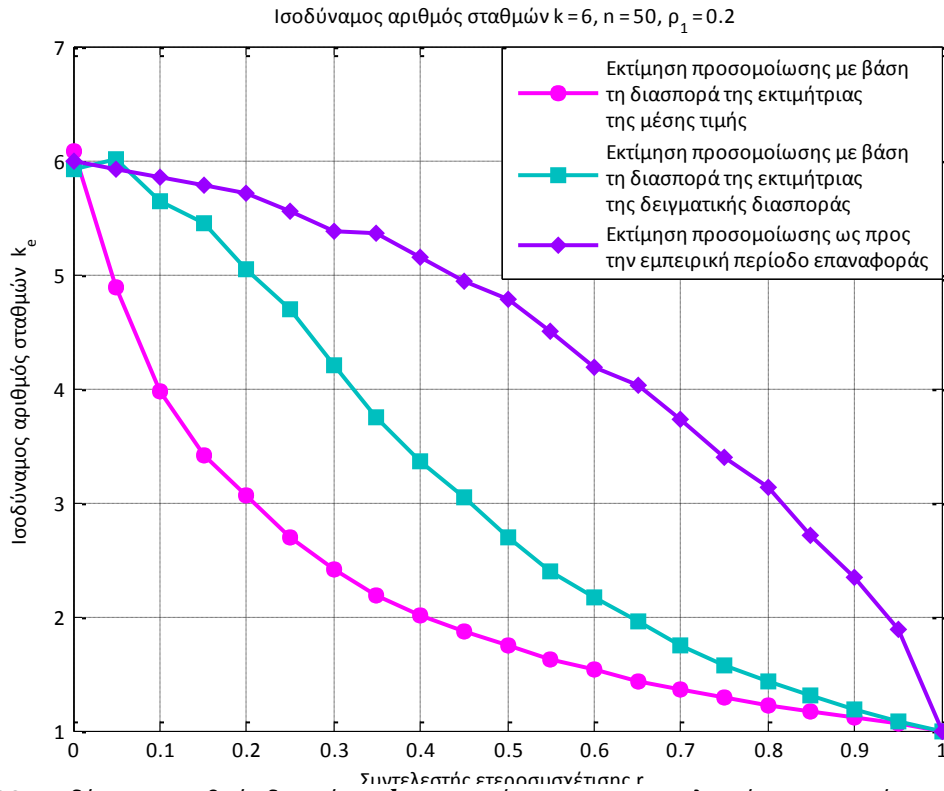
Σχήμα Β.23: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



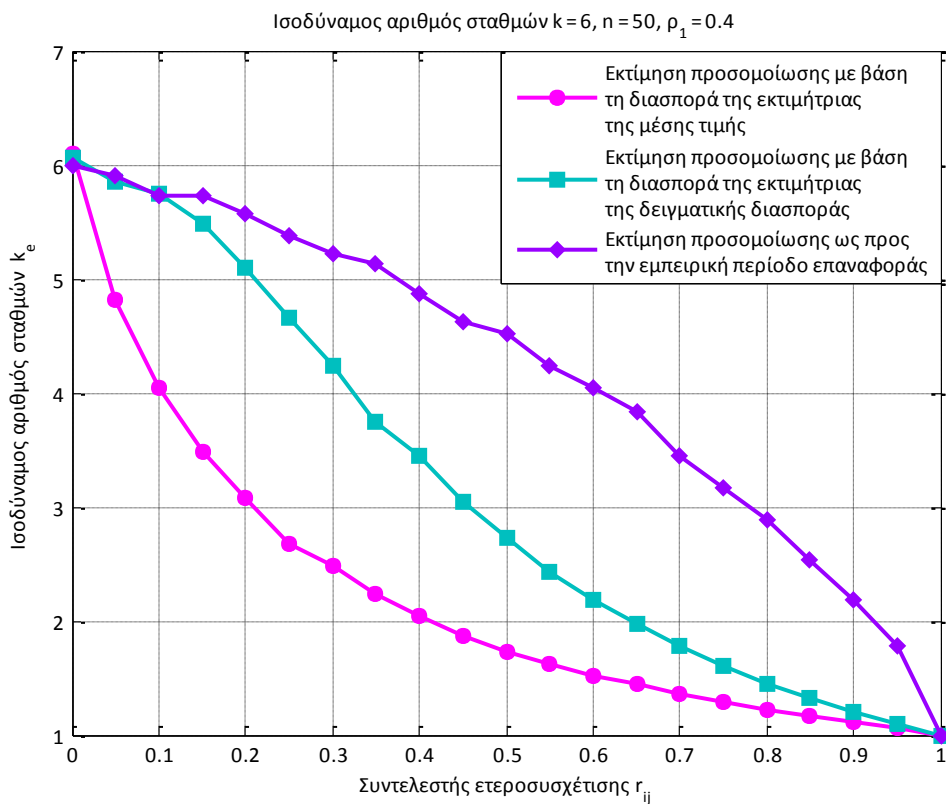
Σχήμα B.24: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



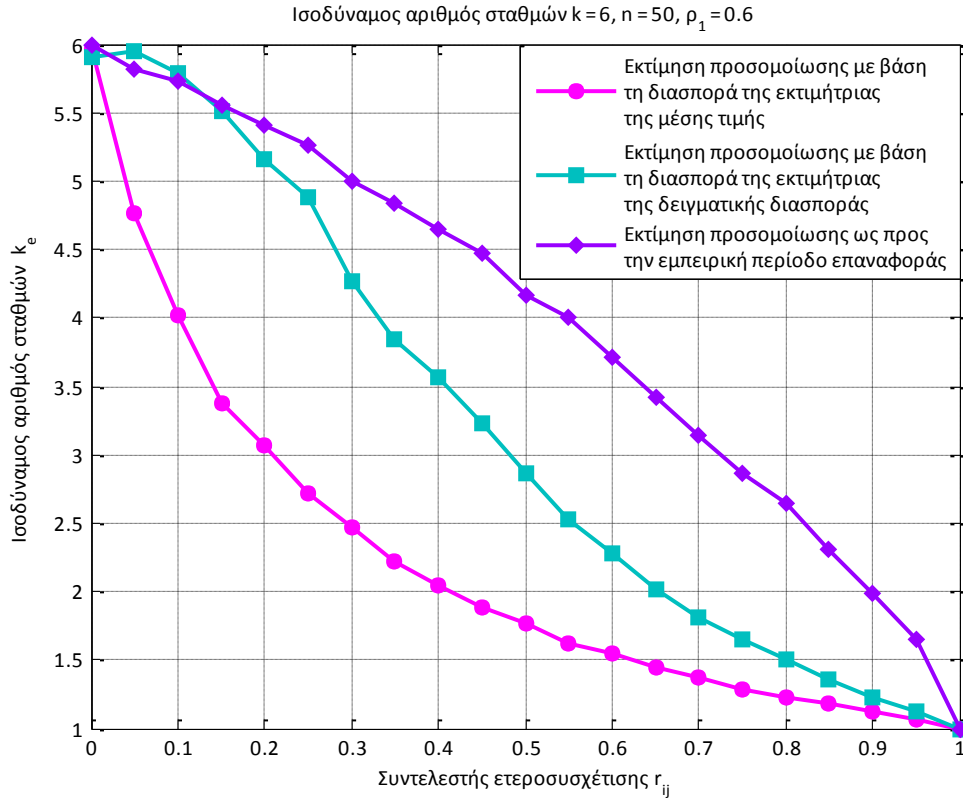
Σχήμα B.25: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



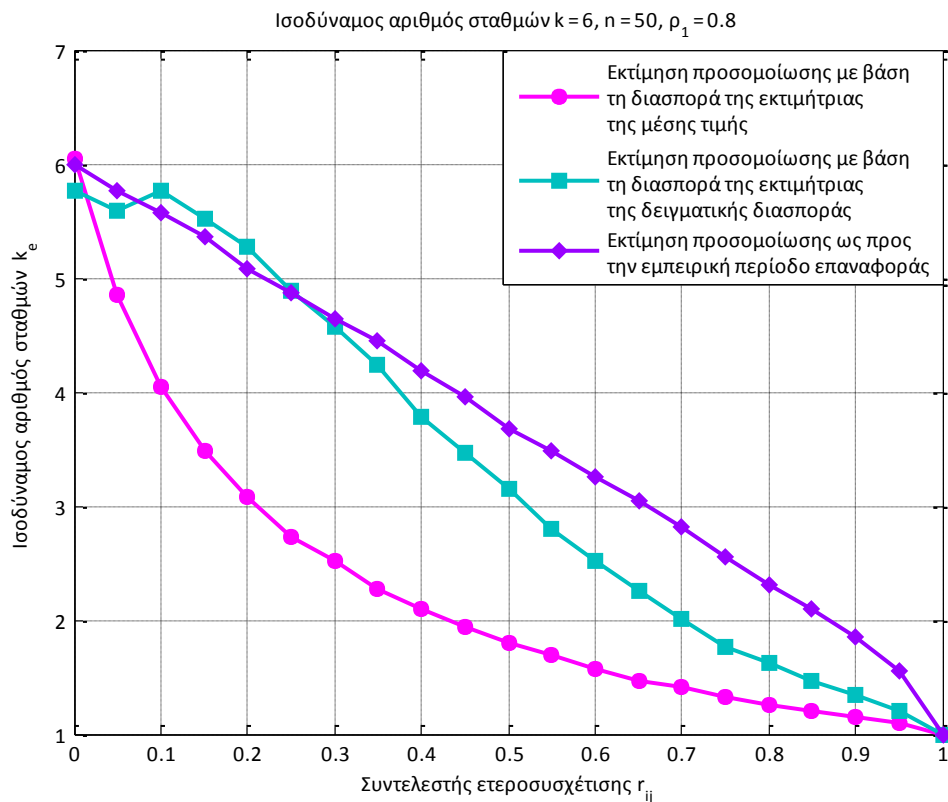
Σχήμα B.26: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



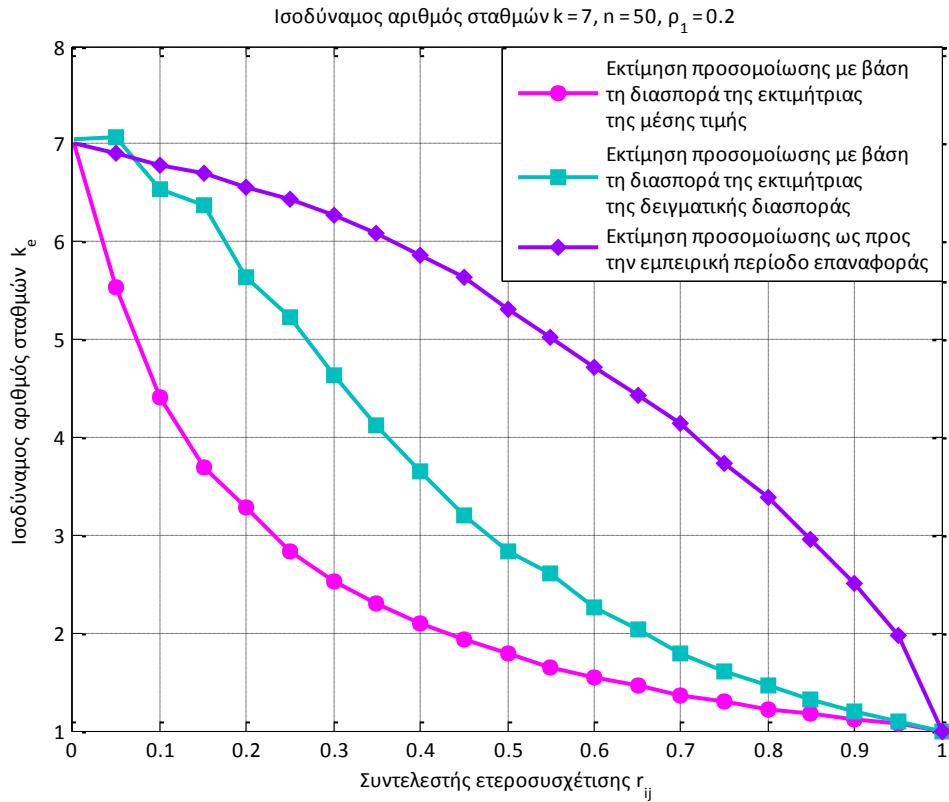
Σχήμα B.27: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



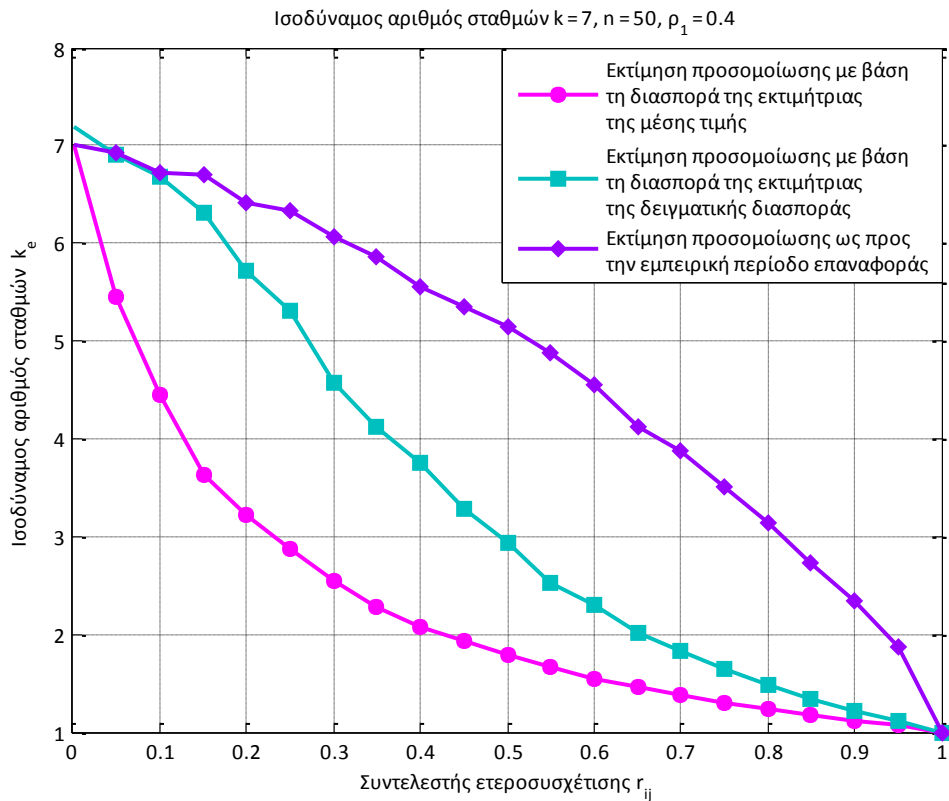
Σχήμα Β.28: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



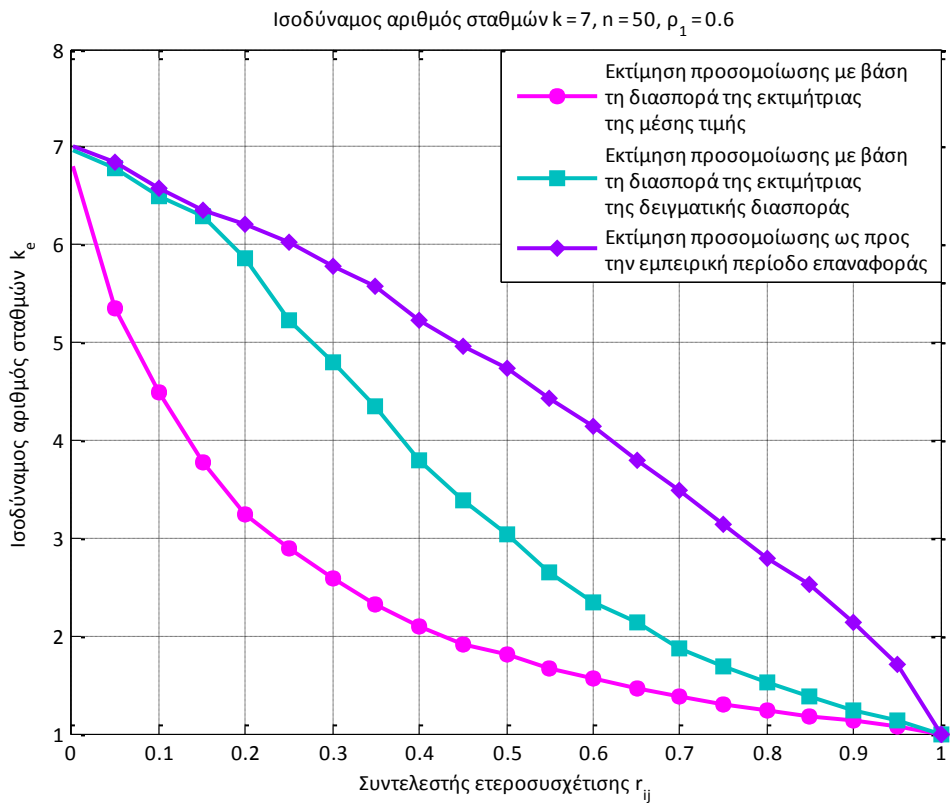
Σχήμα Β.29: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



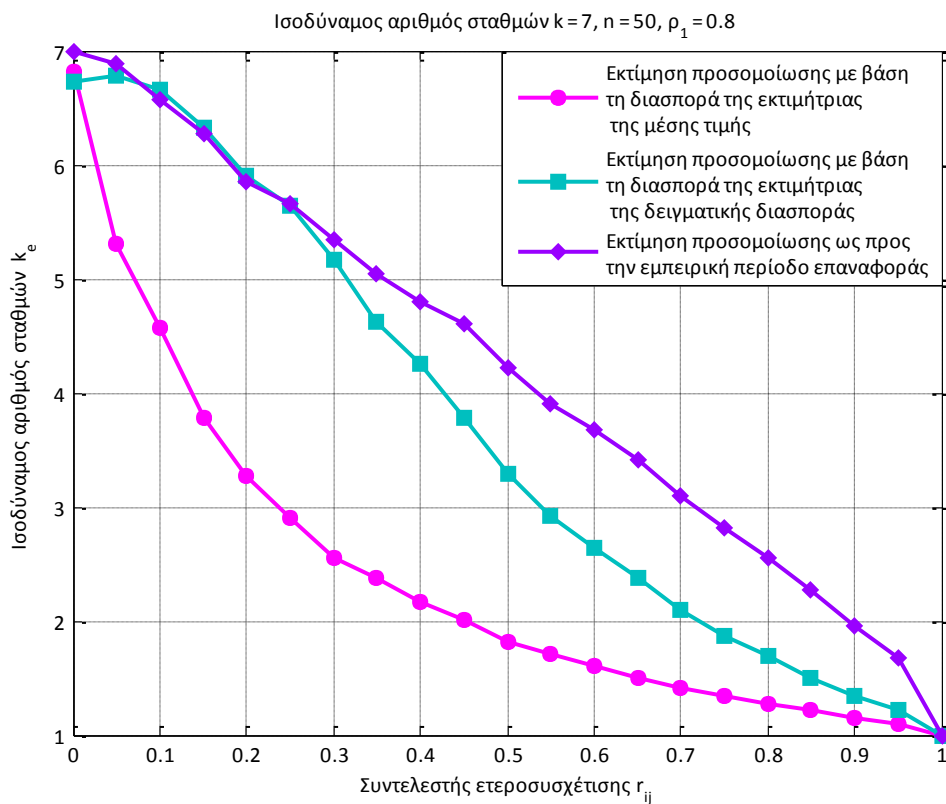
Σχήμα Β.30: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



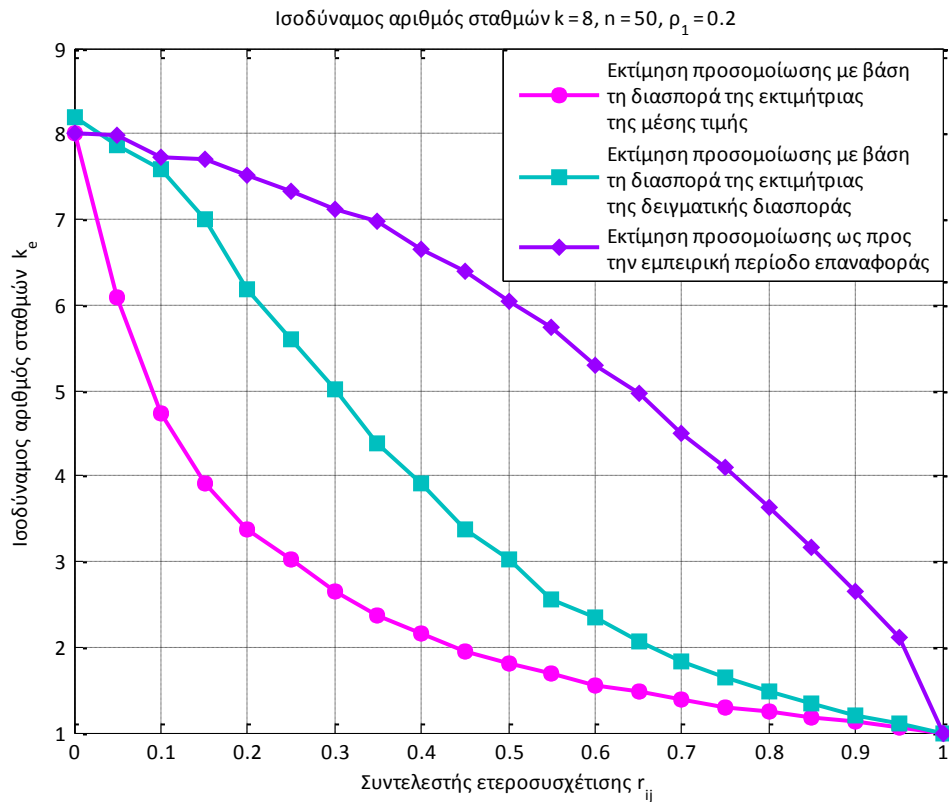
Σχήμα Β.31: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



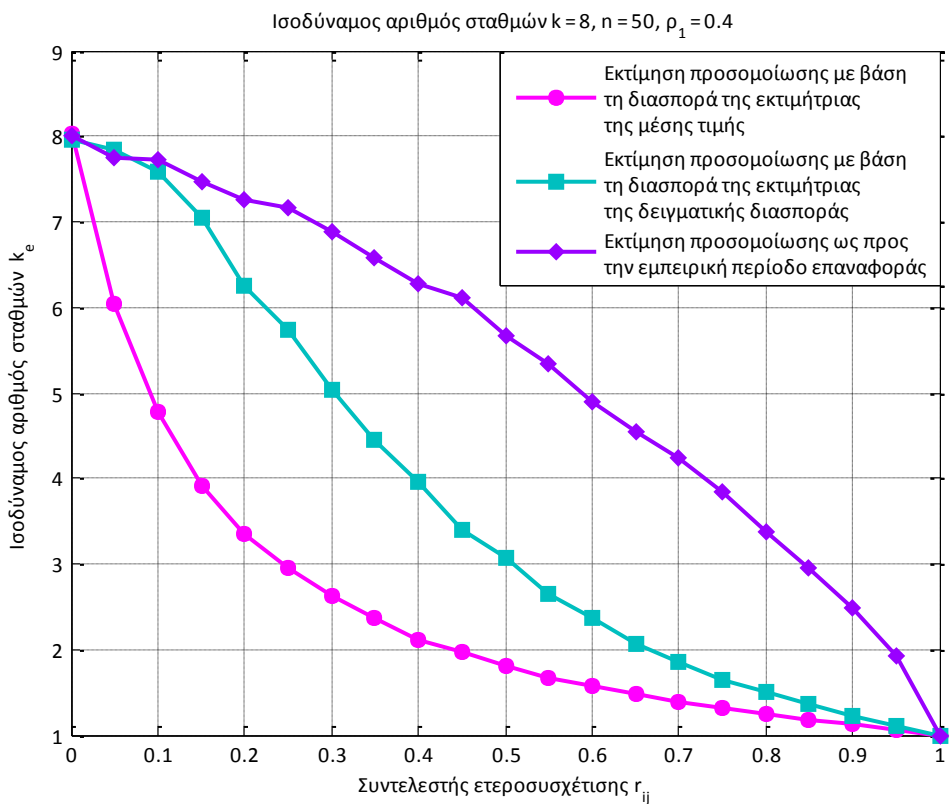
Σχήμα Β.32: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



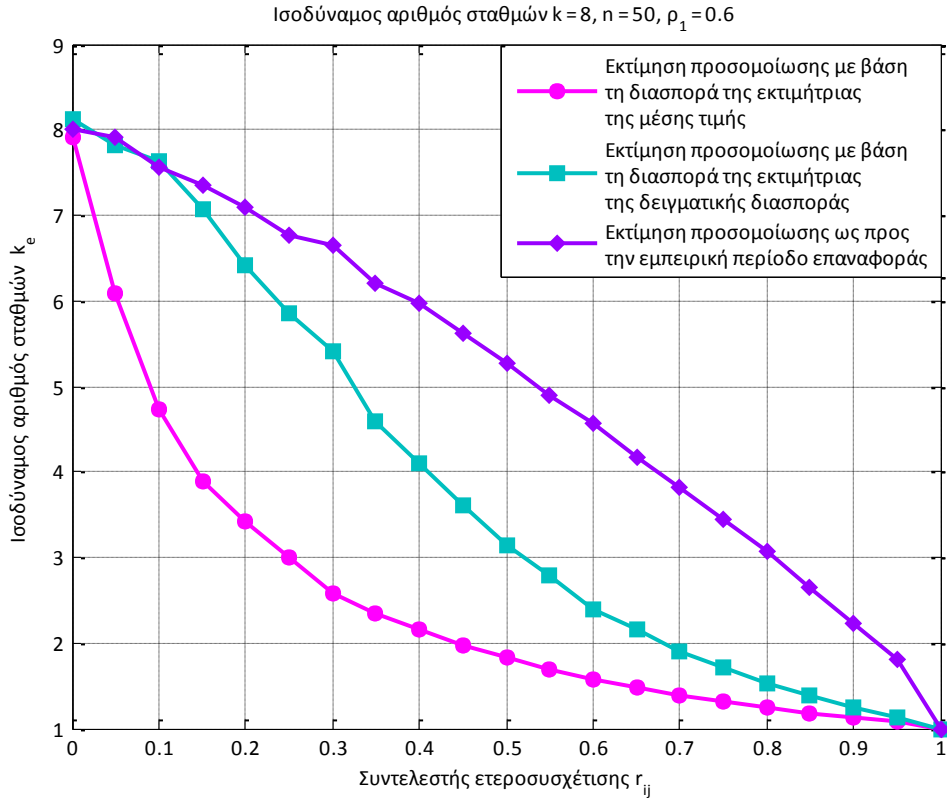
Σχήμα Β.33: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



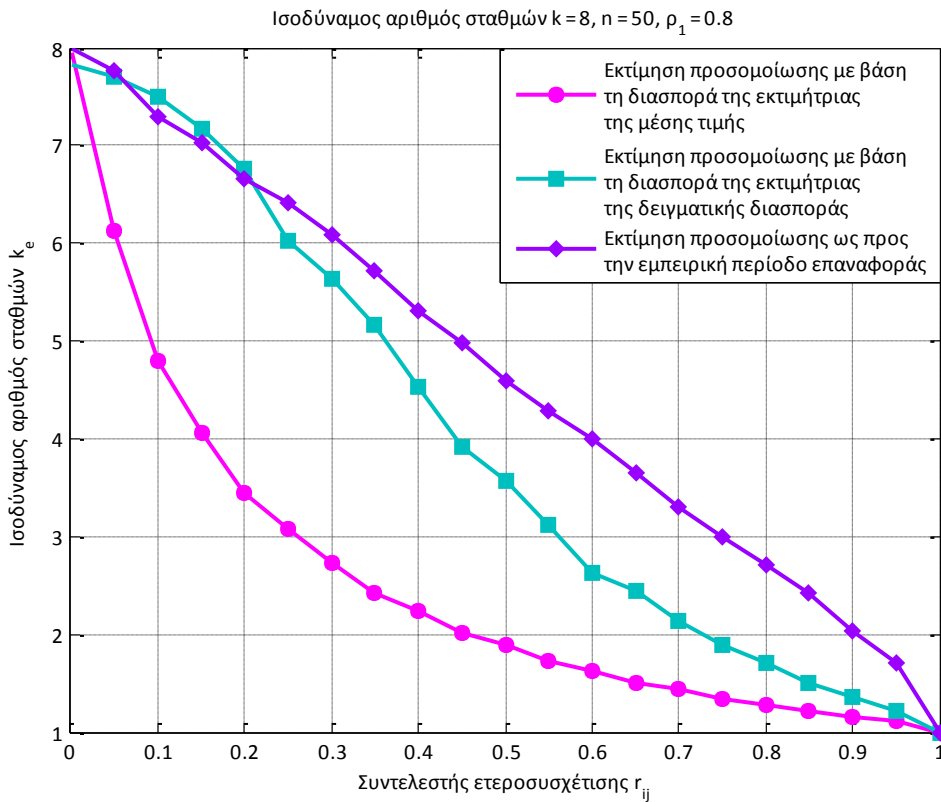
Σχήμα B.34: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



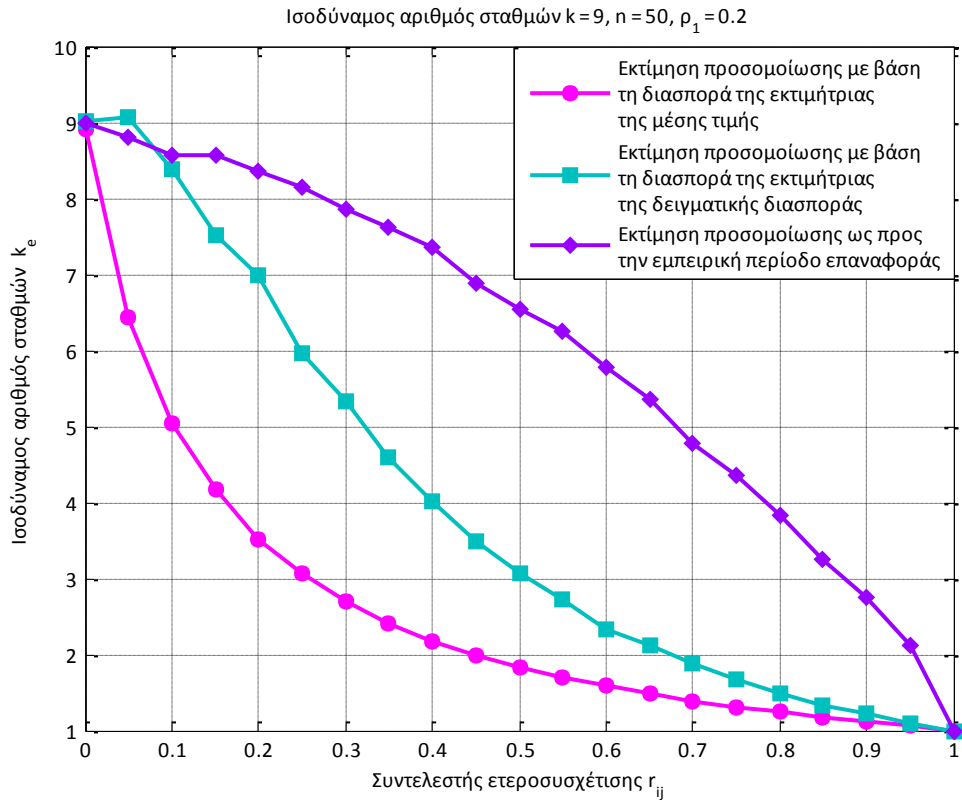
Σχήμα B.35: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



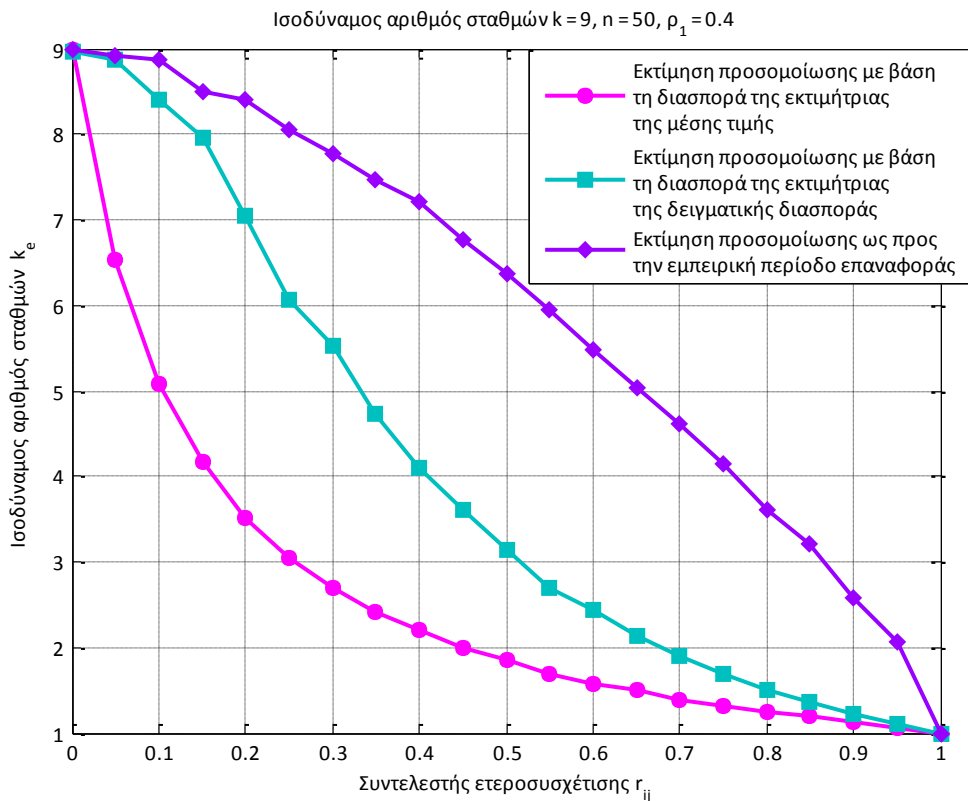
Σχήμα Β.36: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



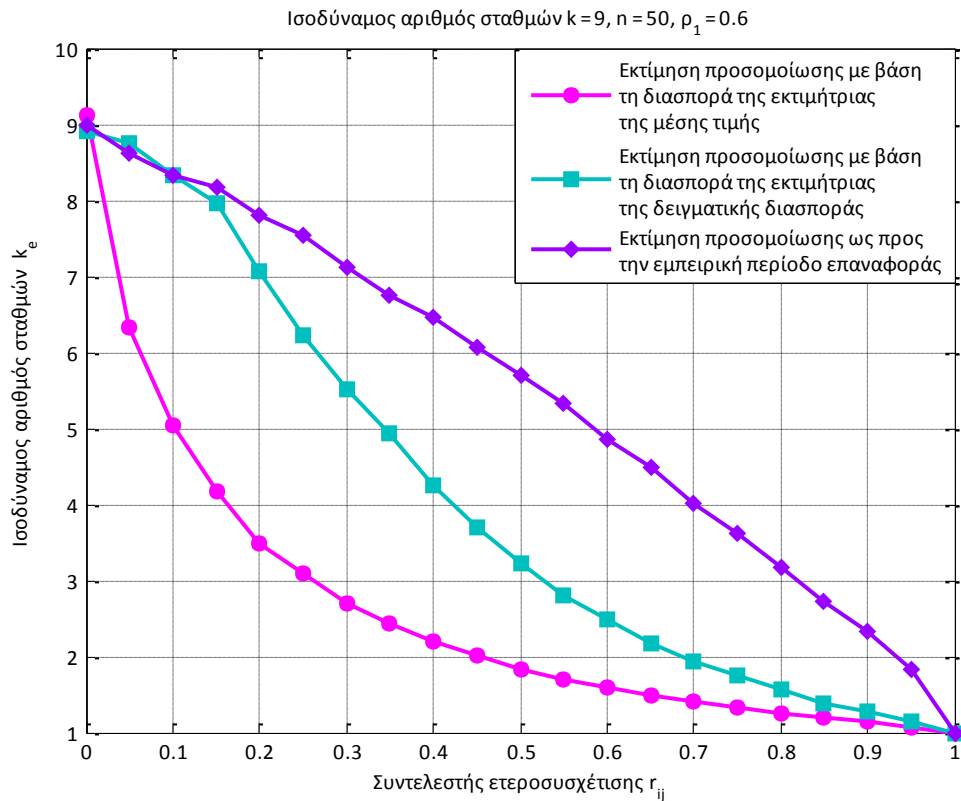
Σχήμα Β.37: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



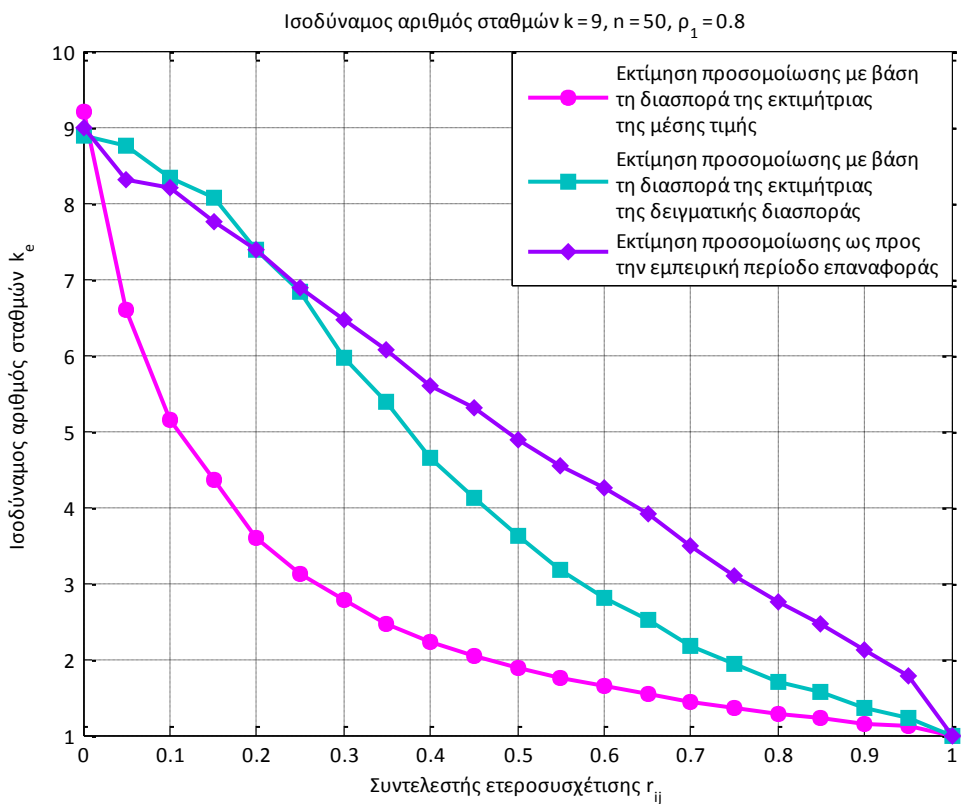
Σχήμα Β.38: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



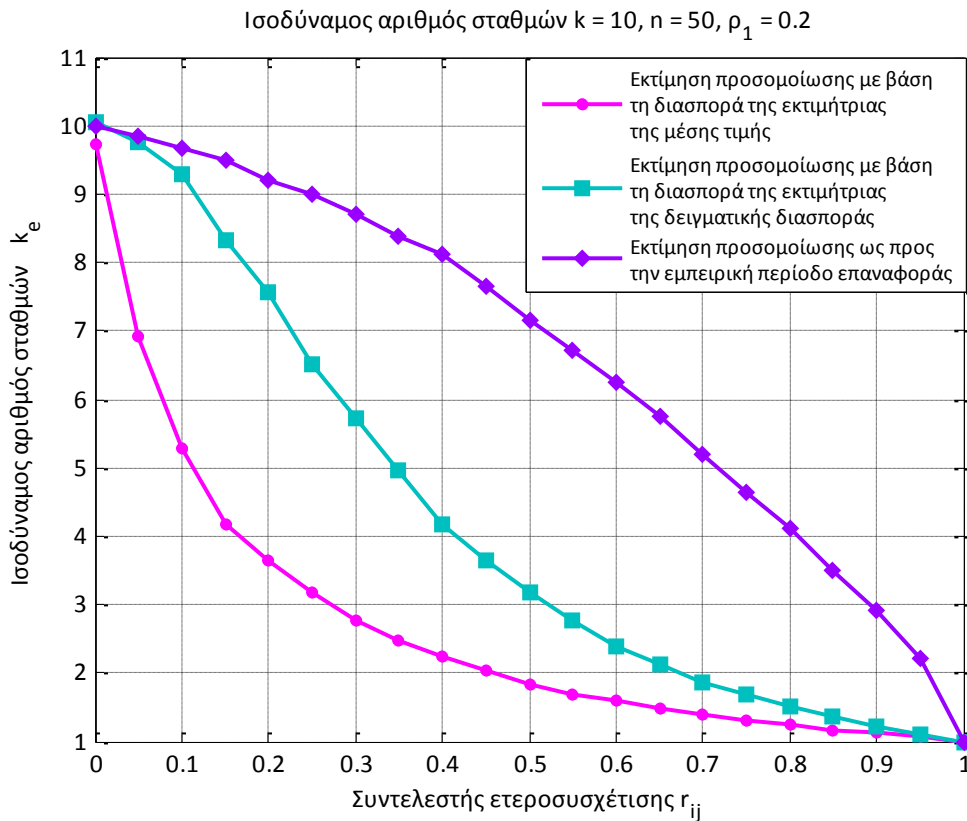
Σχήμα Β.39: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ για αριθμό σταθμών $k = 9$



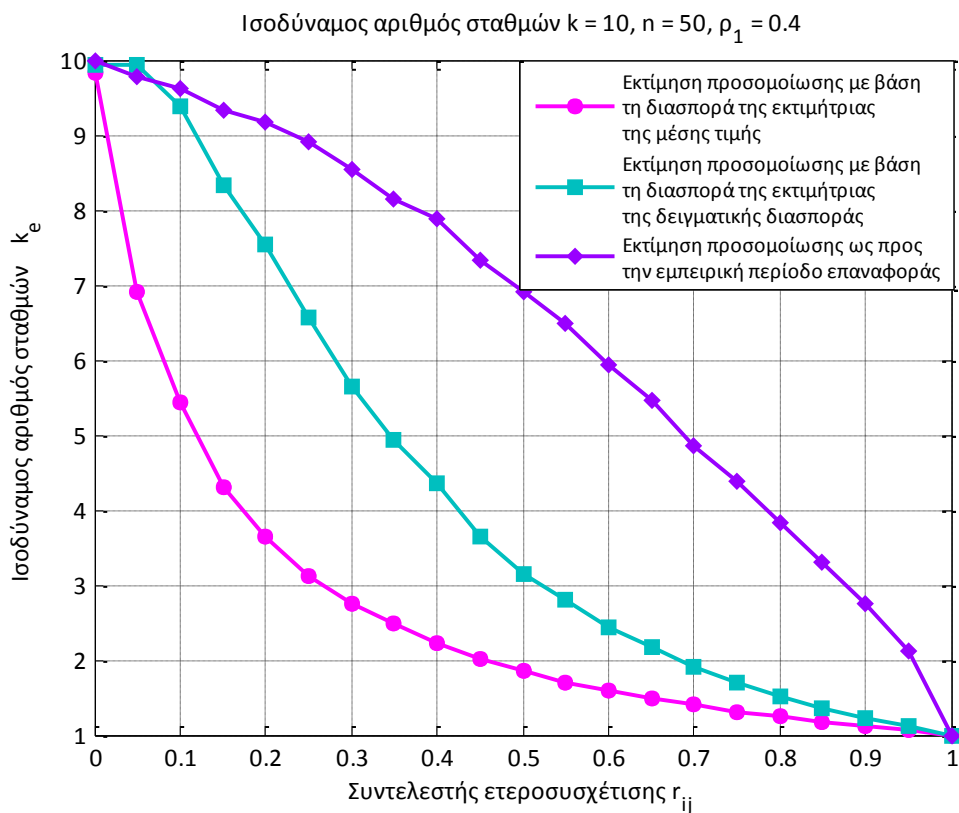
Σχήμα Β.40: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ για αριθμό σταθμών $k = 9$ (



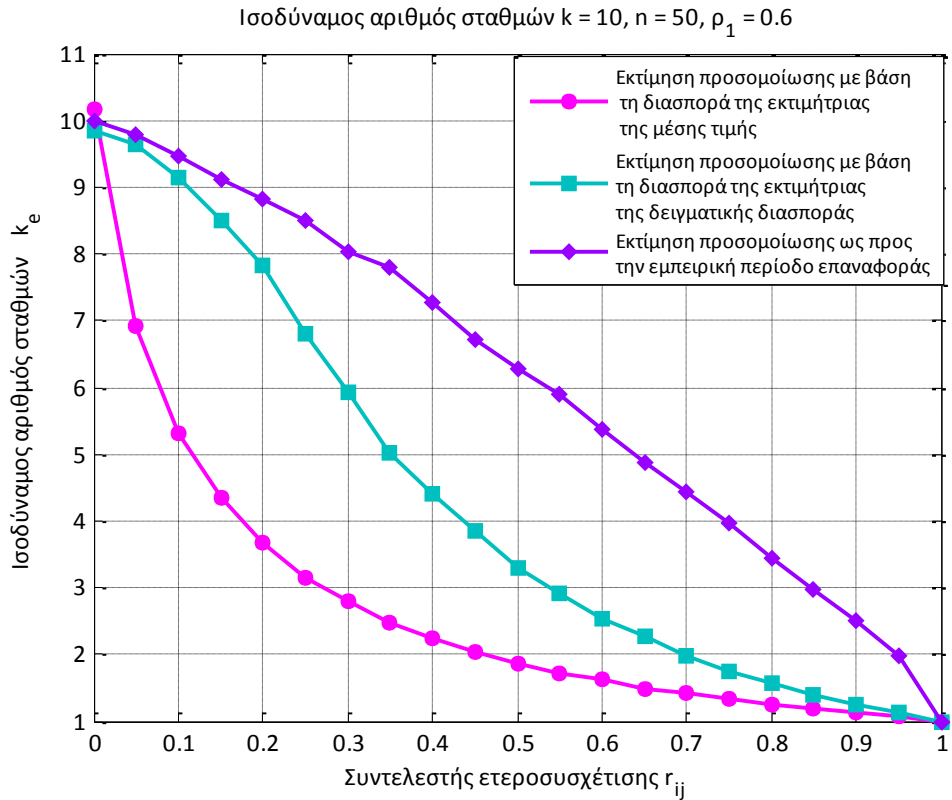
Σχήμα Β.41: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ για αριθμό σταθμών $k = 9$



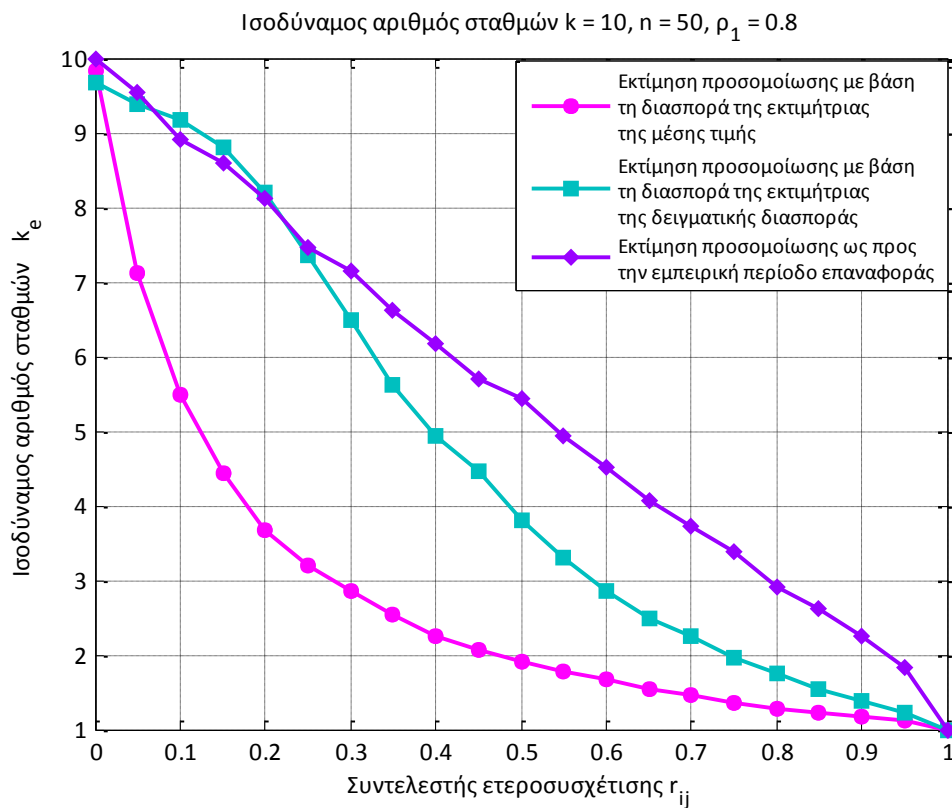
Σχήμα Β.42: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα Β.43: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

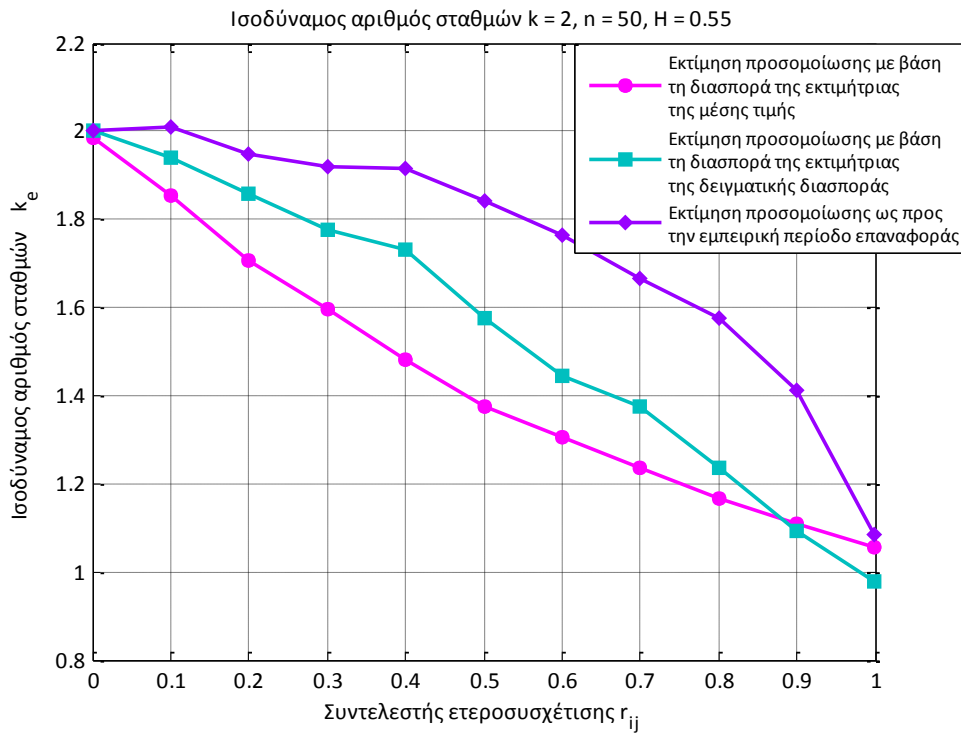


Σχήμα B.44: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

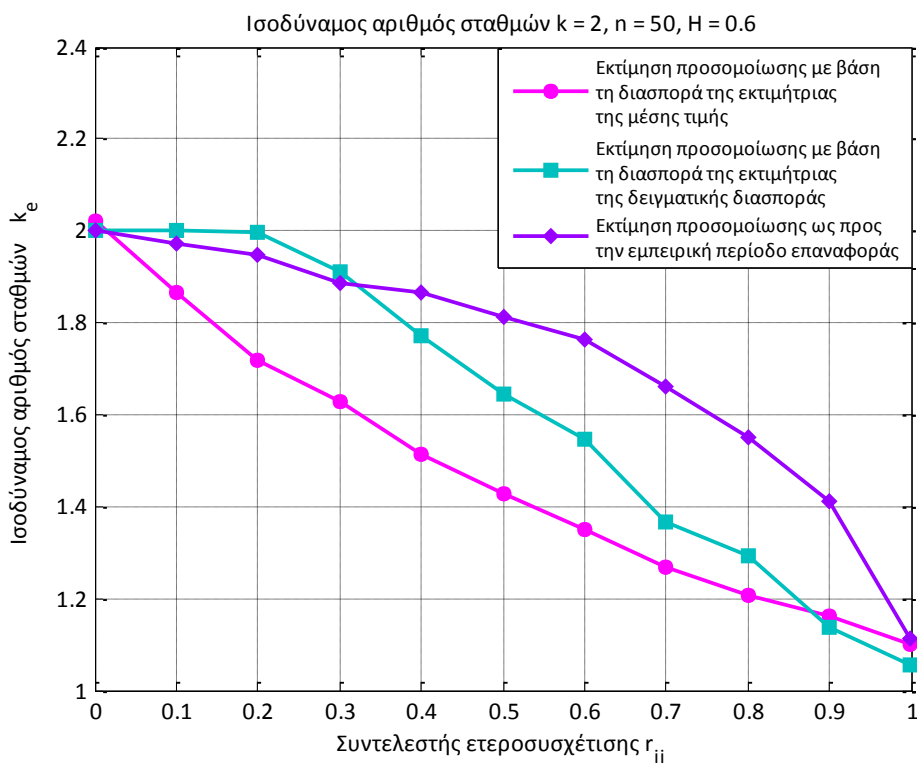


Σχήμα B.45: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

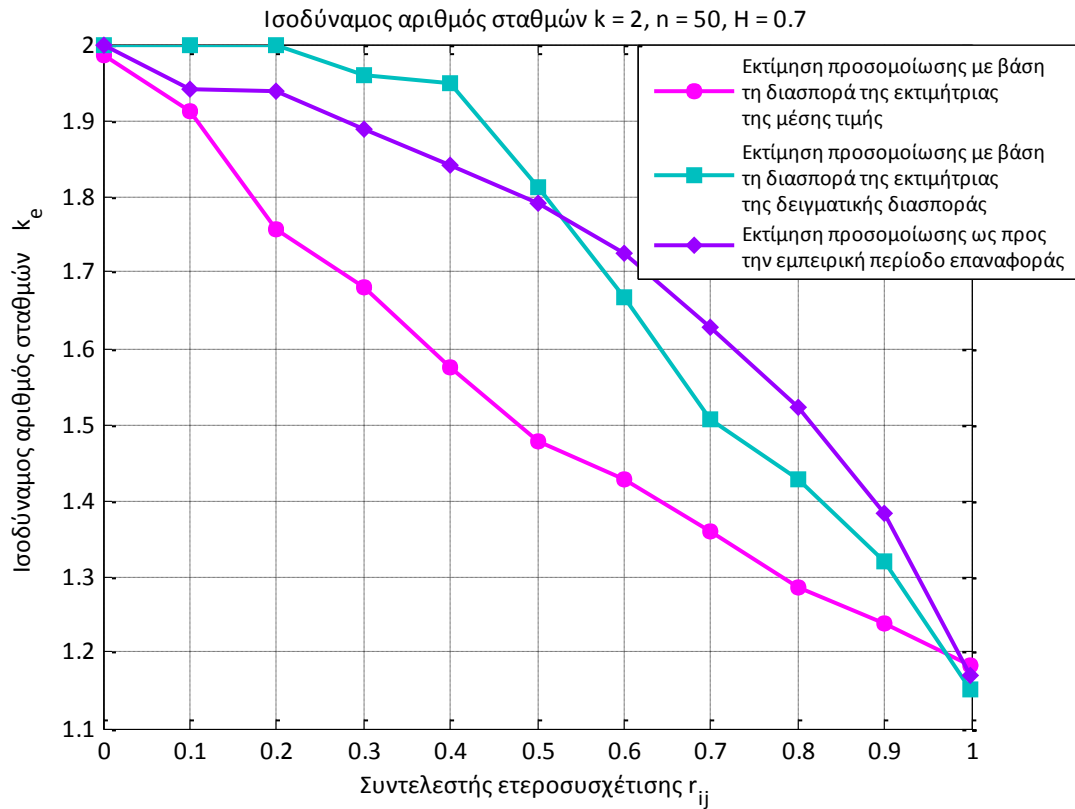
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών (Ανεπίξεις Απλής Ομοιοθεσίας)



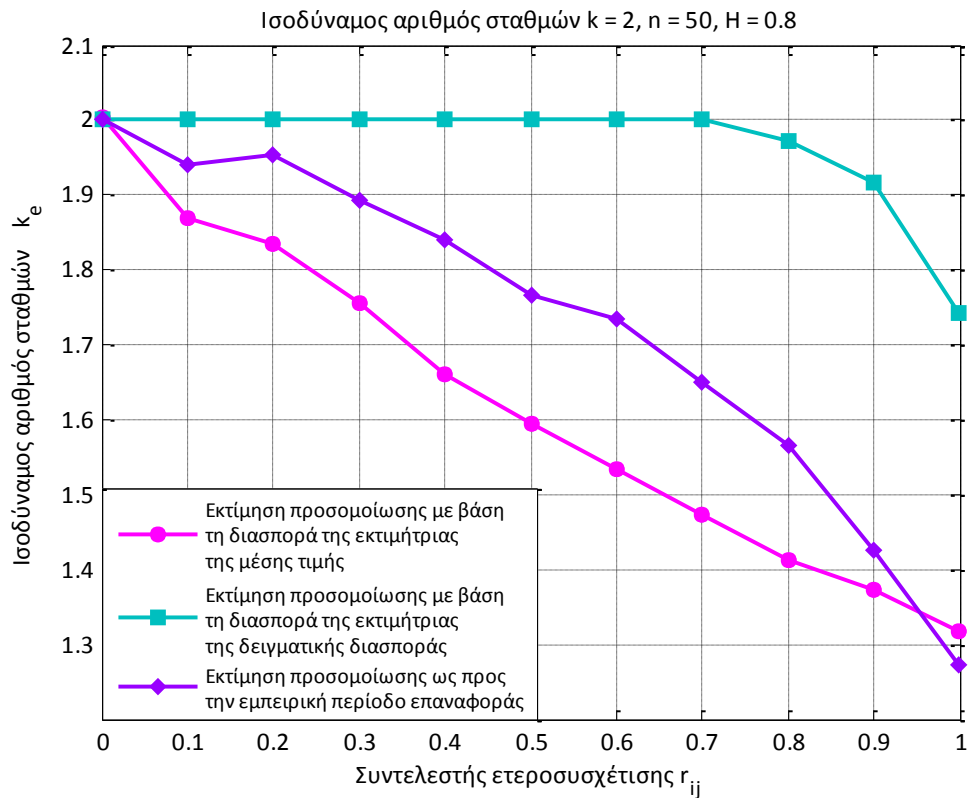
Σχήμα Β.46: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



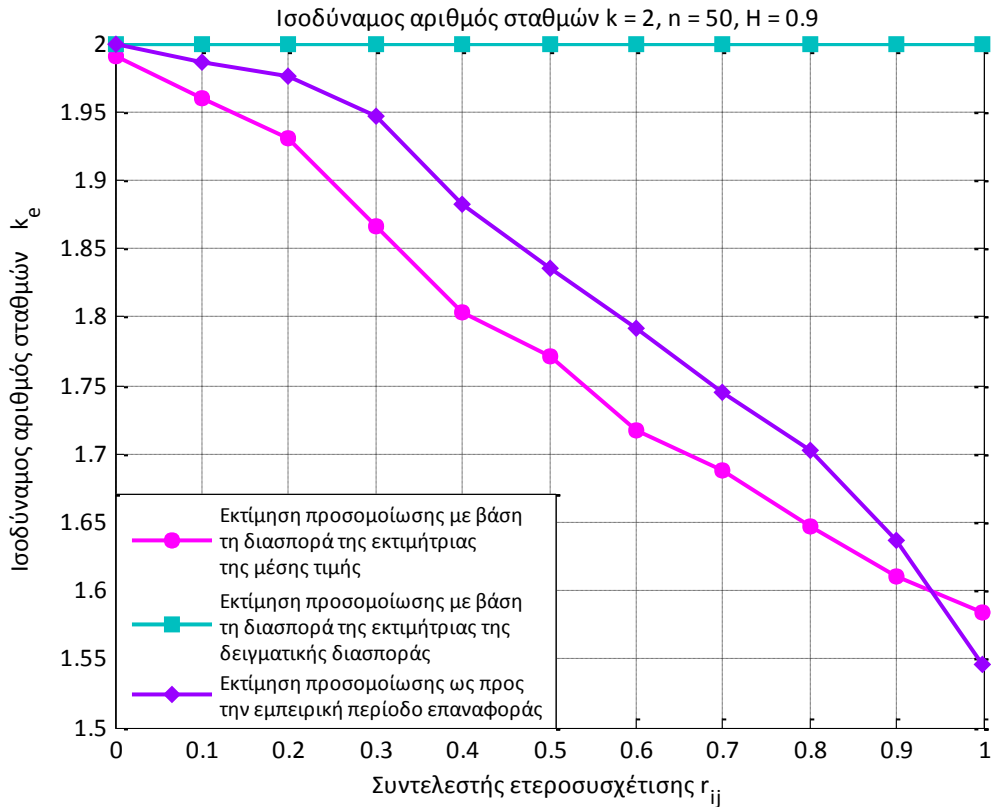
Σχήμα Β.47: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



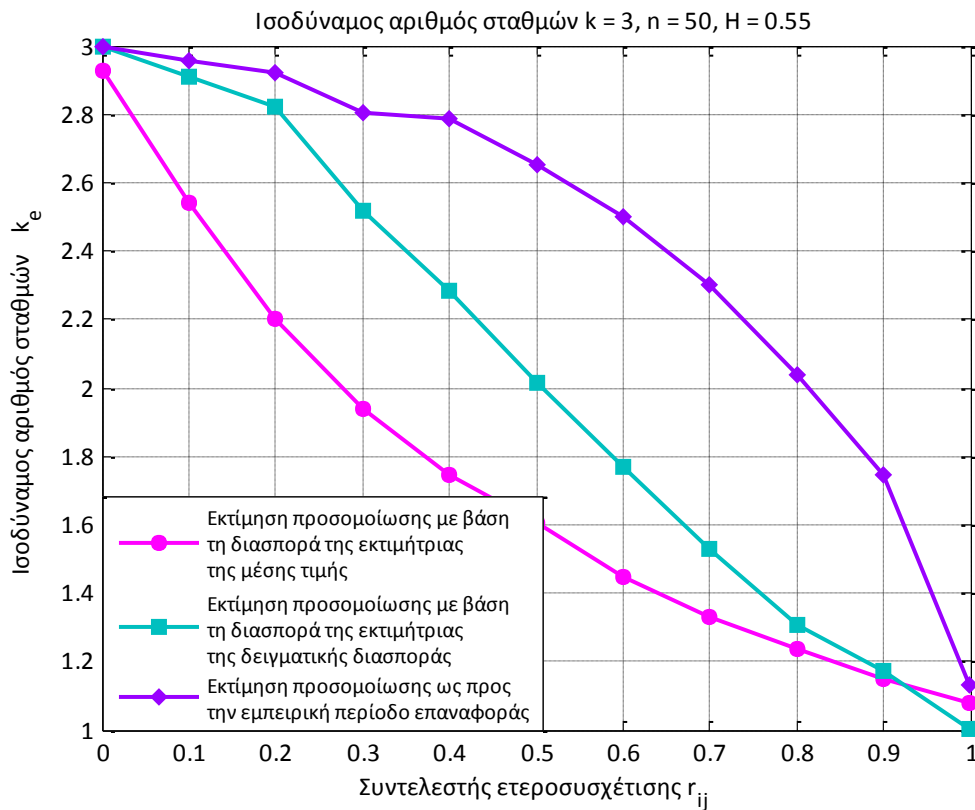
Σχήμα Β.48: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



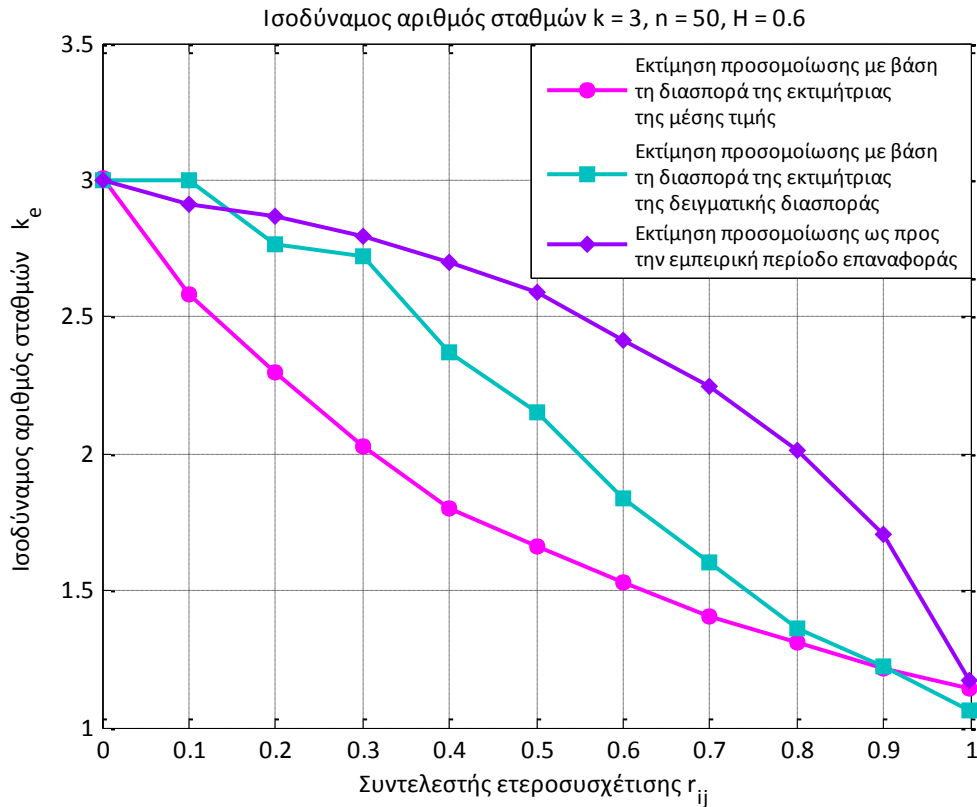
Σχήμα Β.49: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



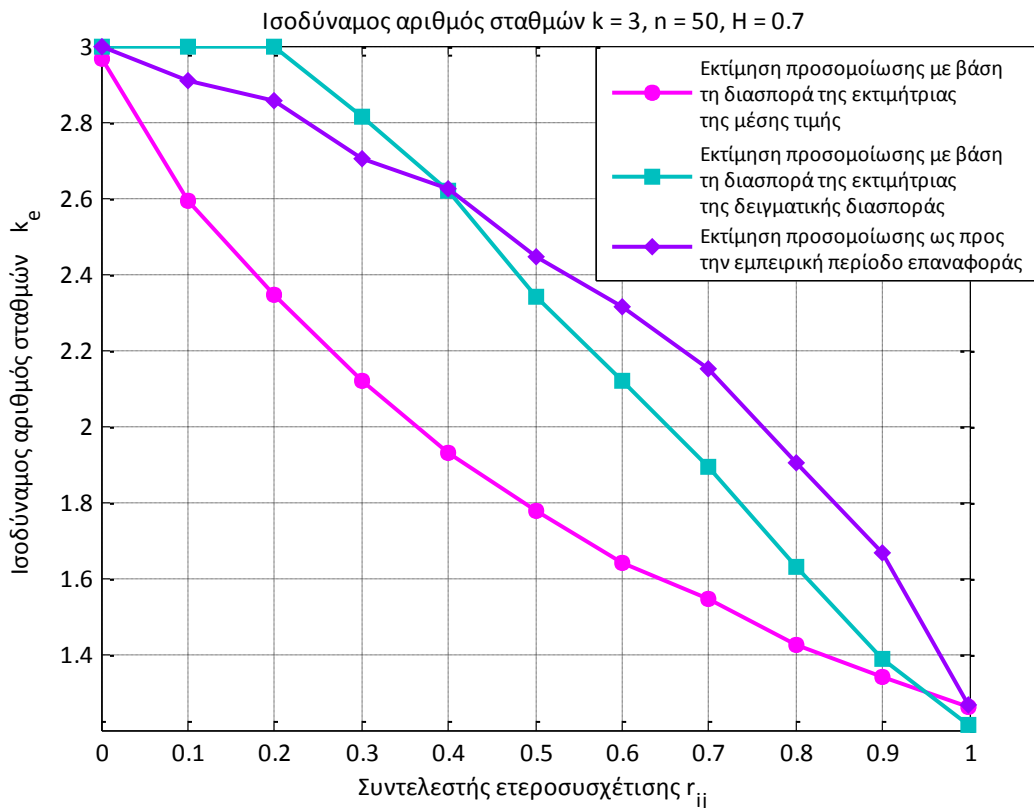
Σχήμα Β.50: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



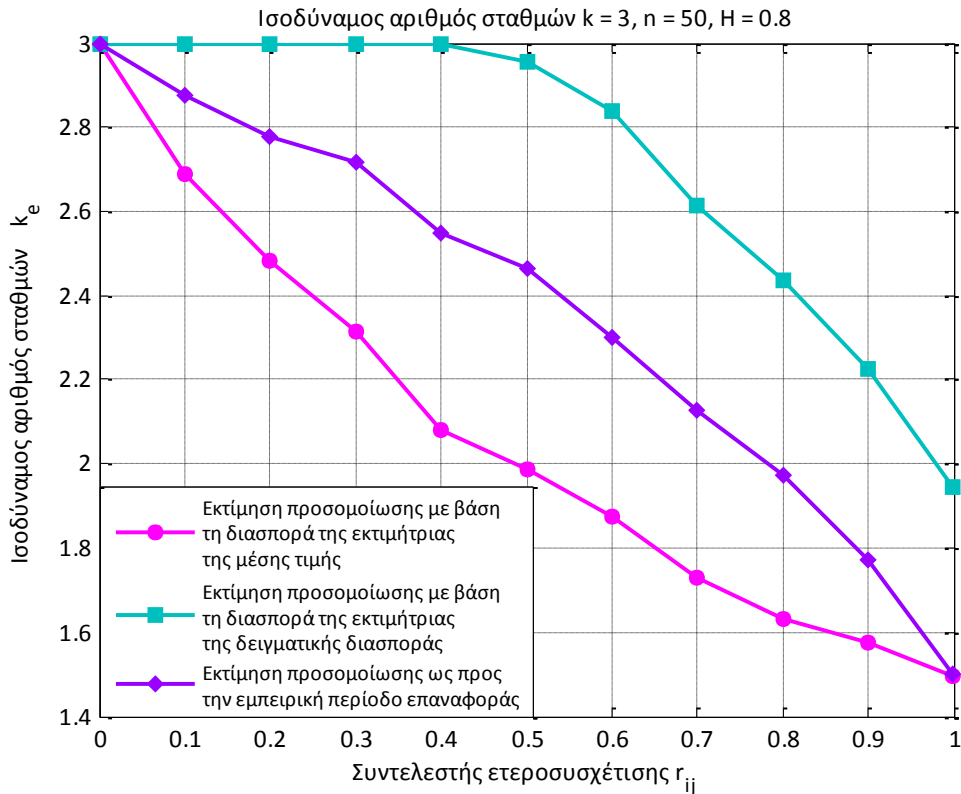
Σχήμα Β.51: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



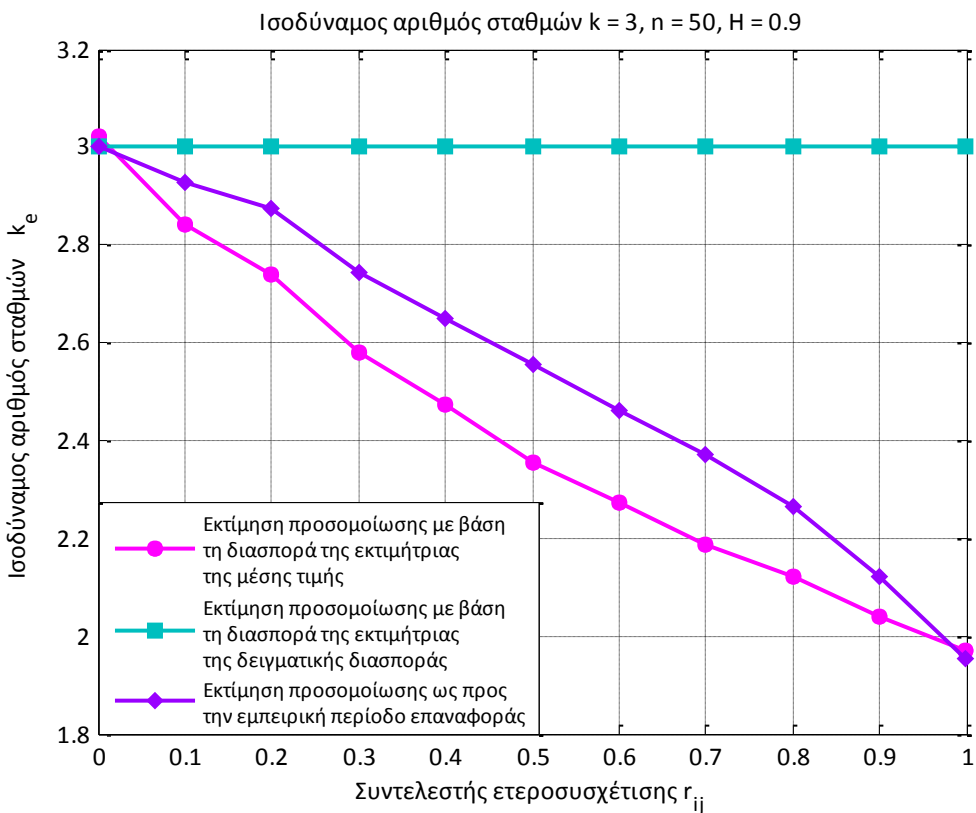
Σχήμα B.52: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



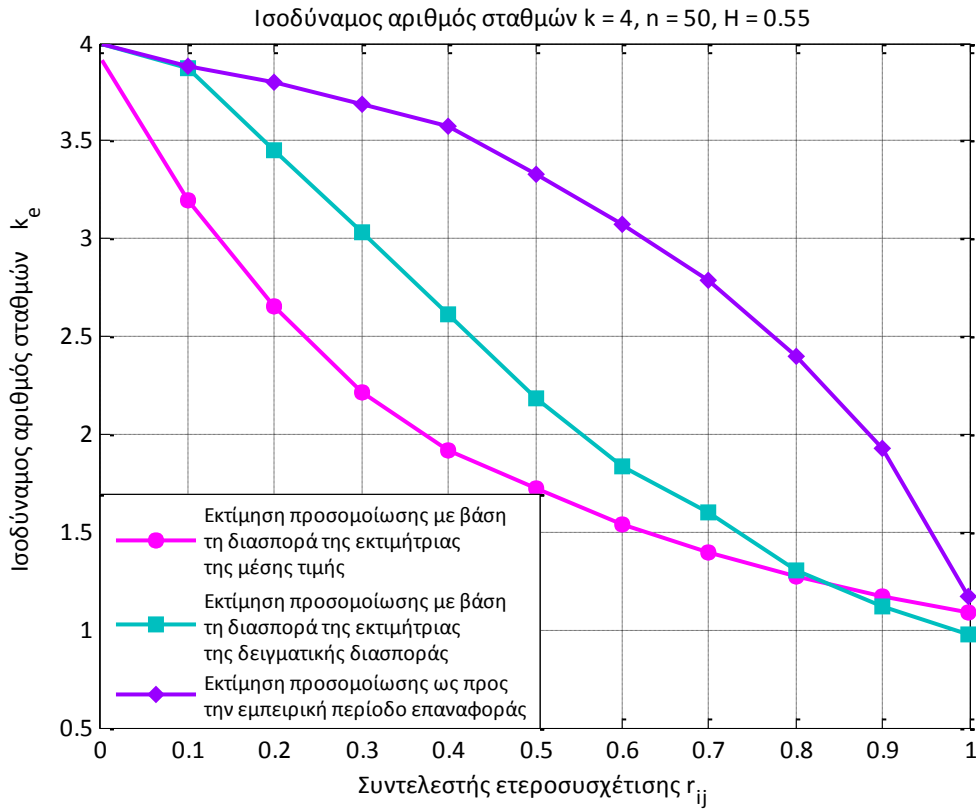
Σχήμα B.53: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



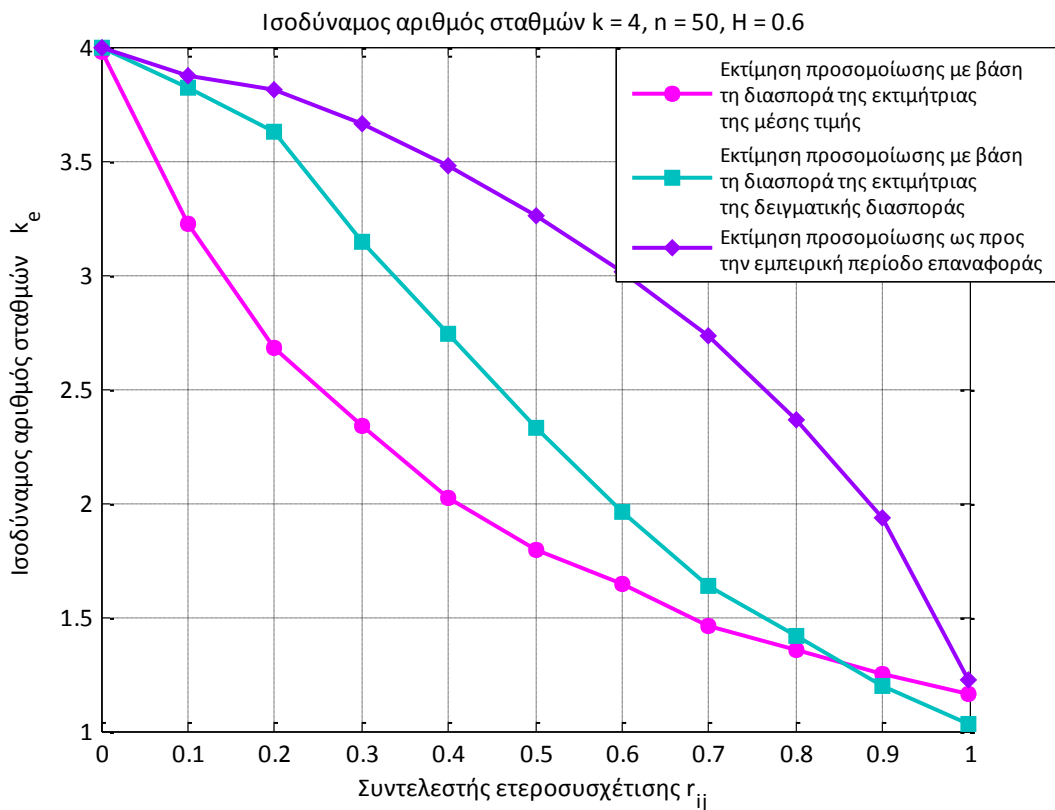
Σχήμα B.54: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



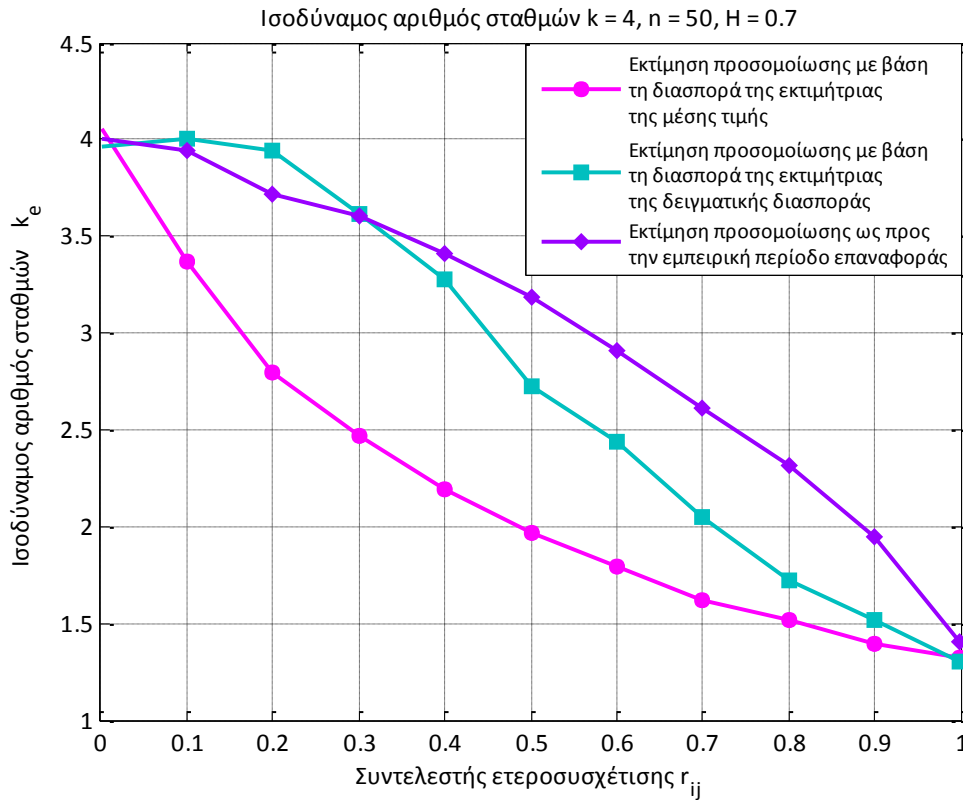
Σχήμα B.55: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



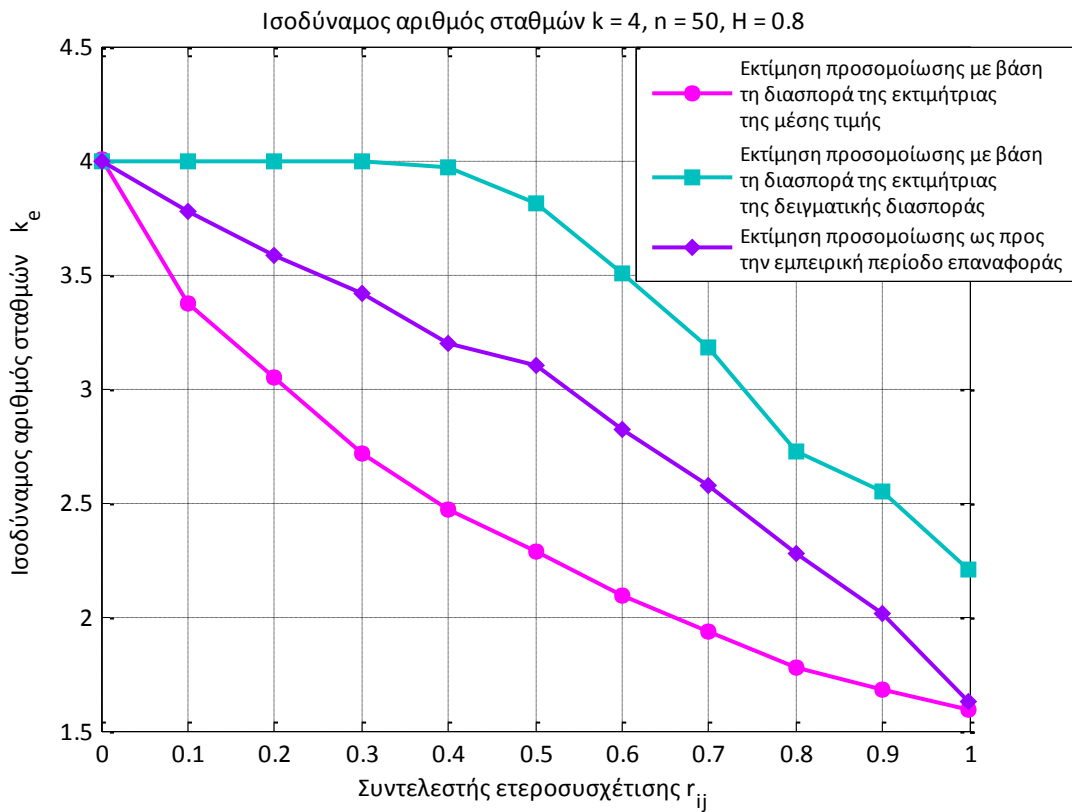
Σχήμα Β.56: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



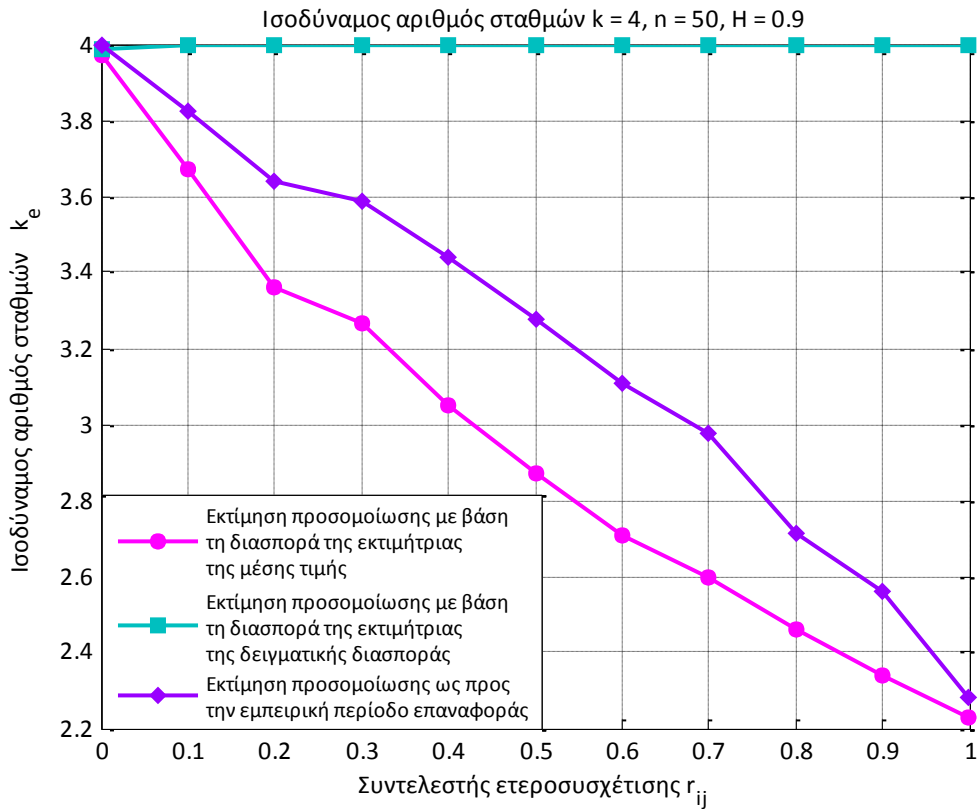
Σχήμα Β.57: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



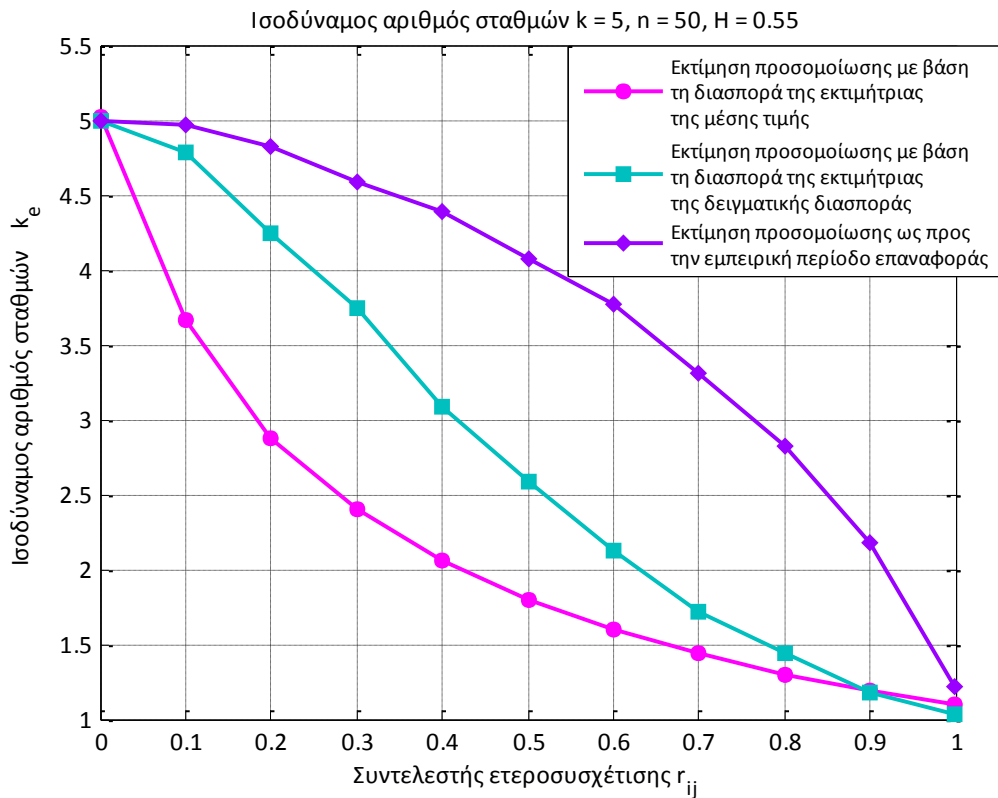
Σχήμα Β.58: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



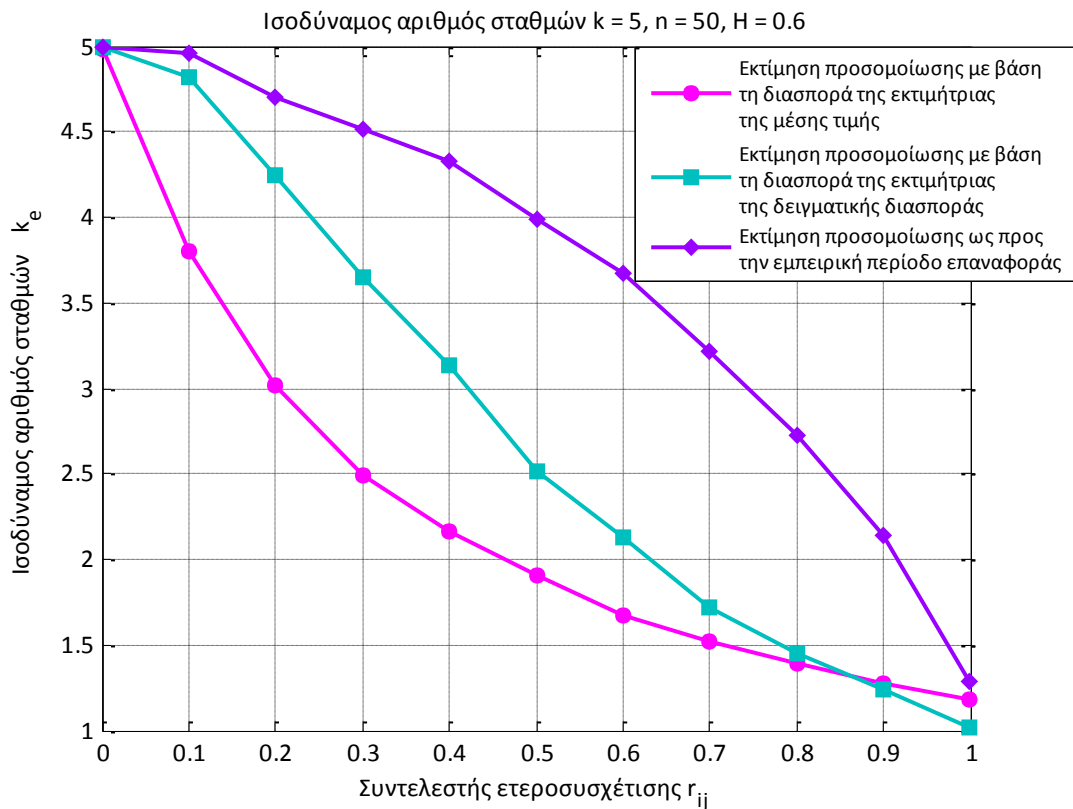
Σχήμα Β.59: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



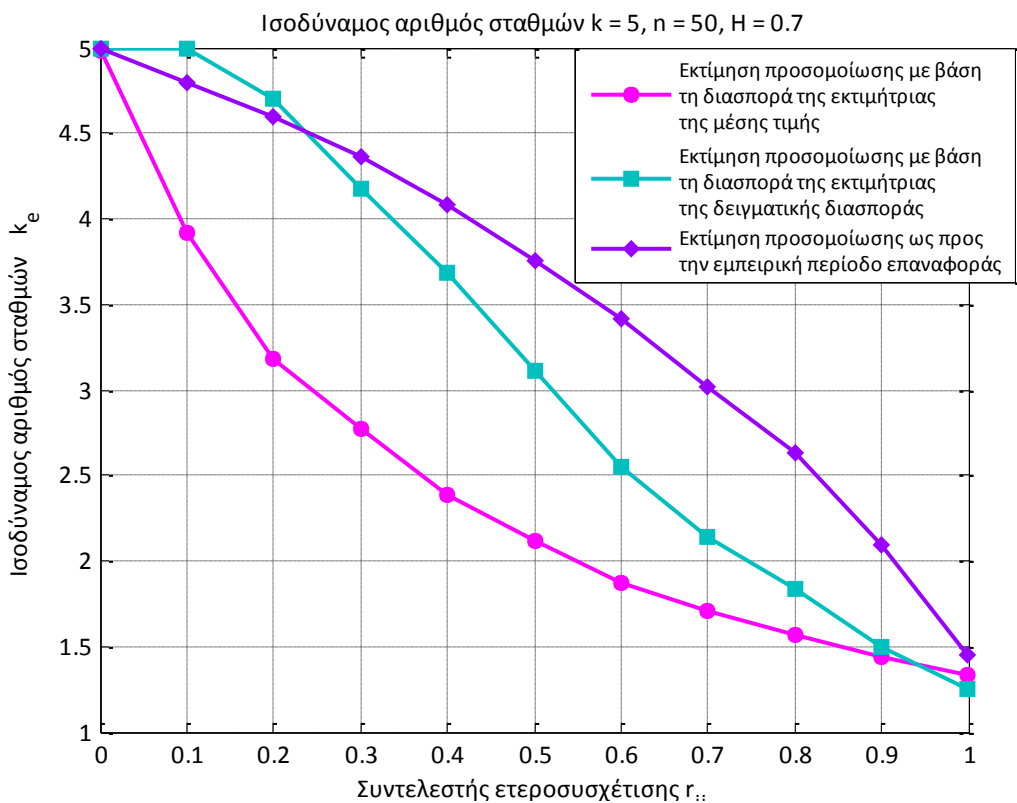
Σχήμα Β.60: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



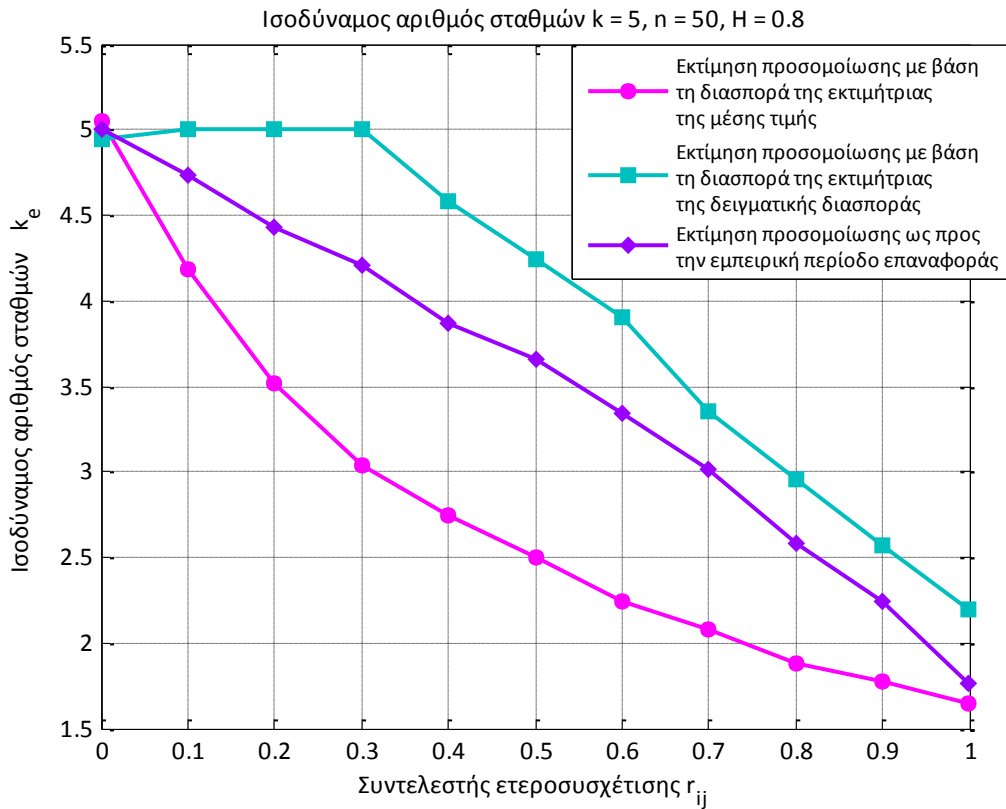
Σχήμα Β.61: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



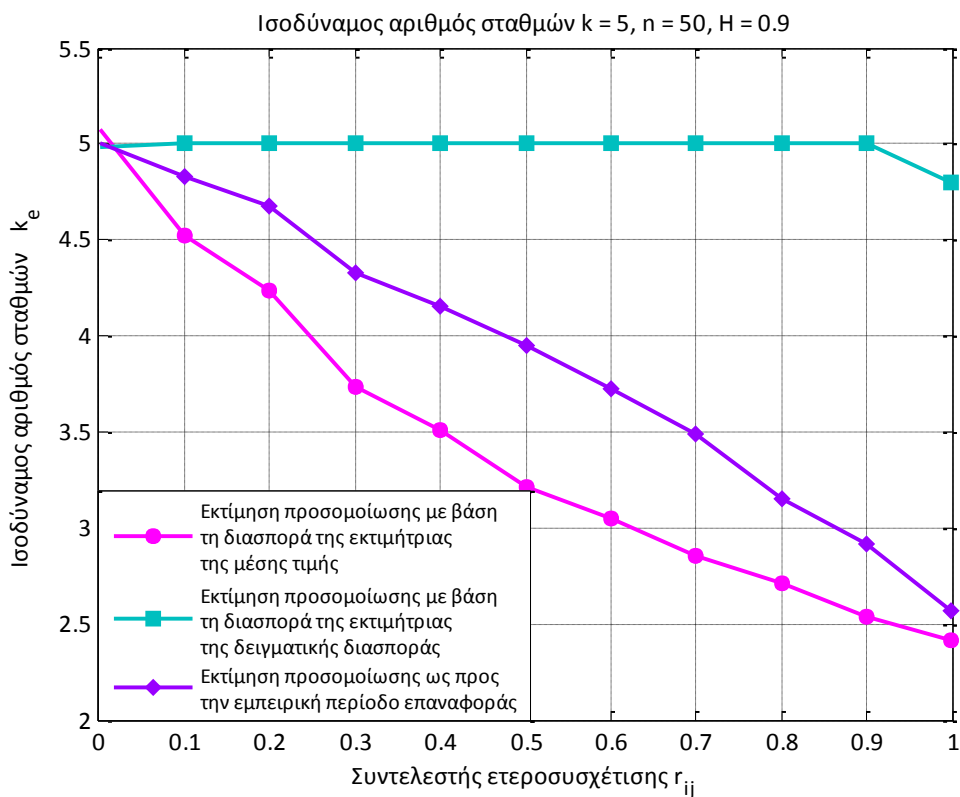
Σχήμα B.62: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



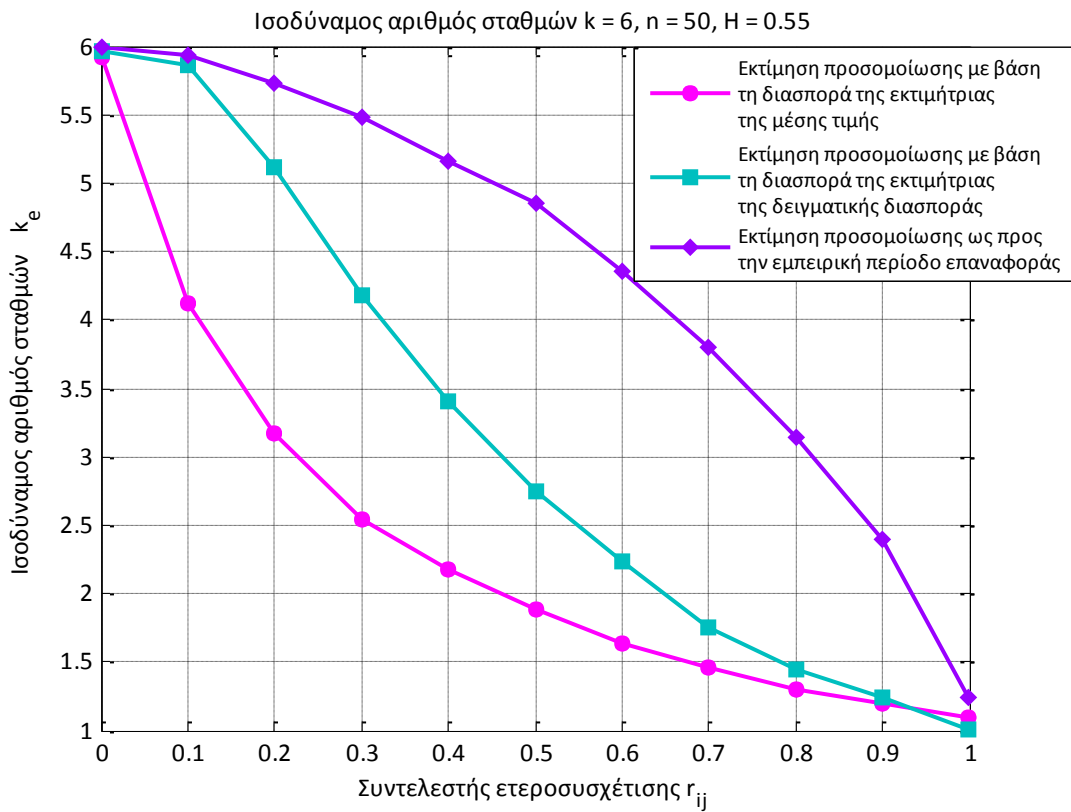
Σχήμα B.63: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



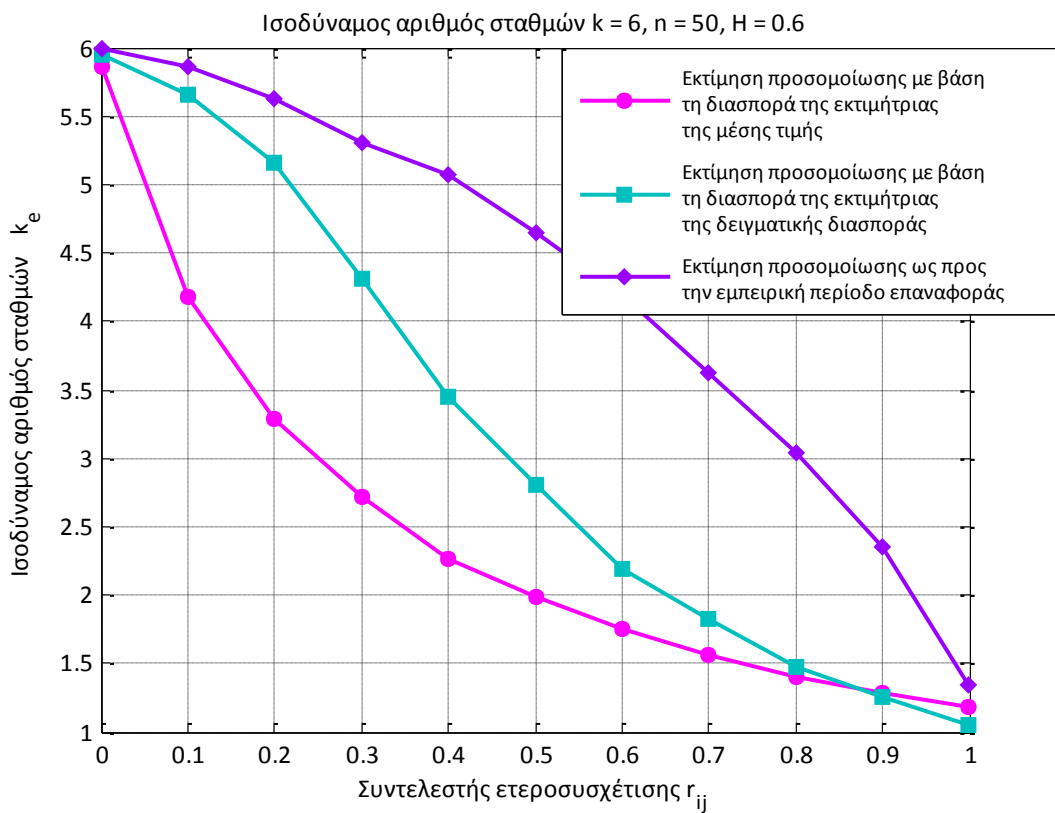
Σχήμα B.64: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



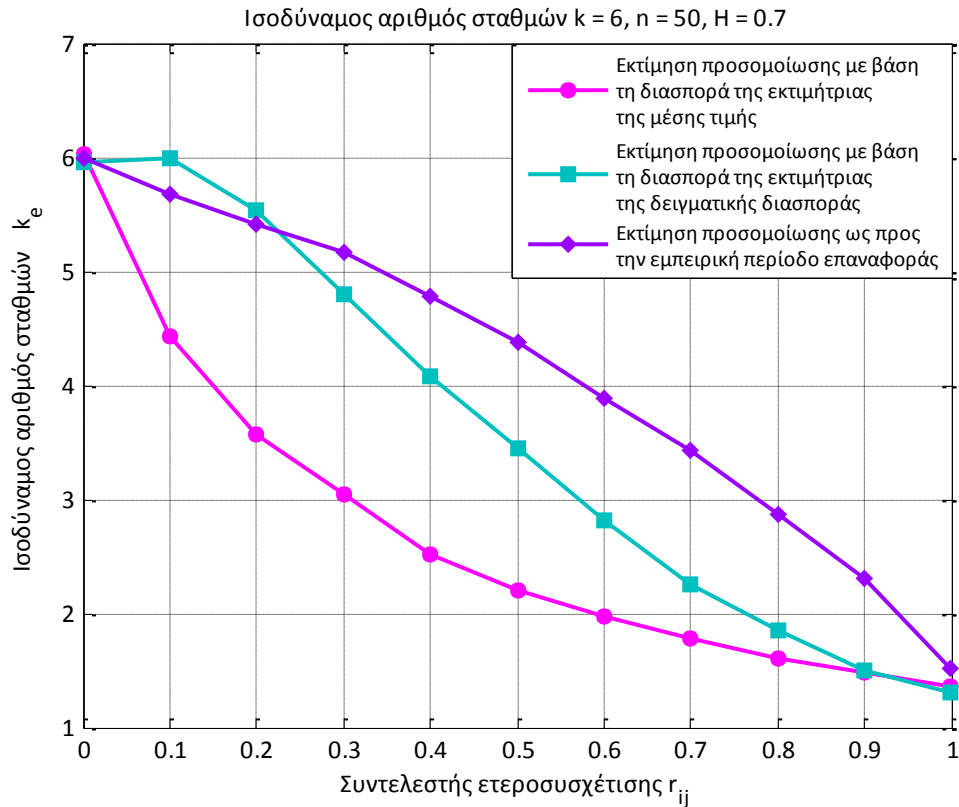
Σχήμα B.65: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



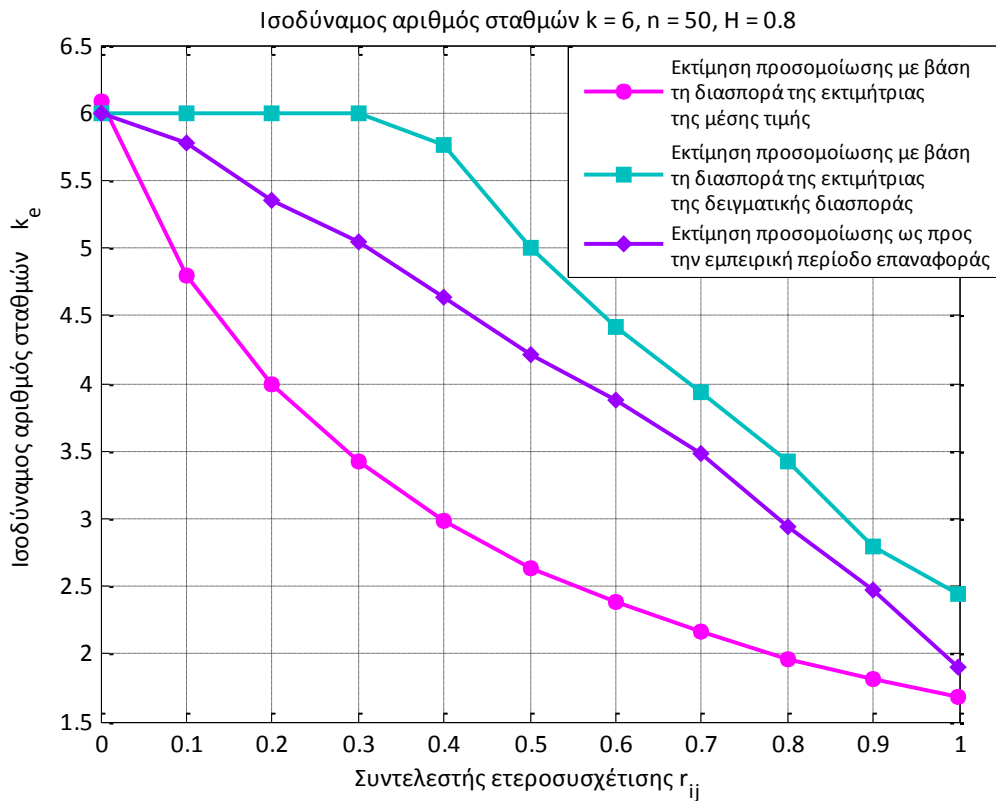
Σχήμα Β.66: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



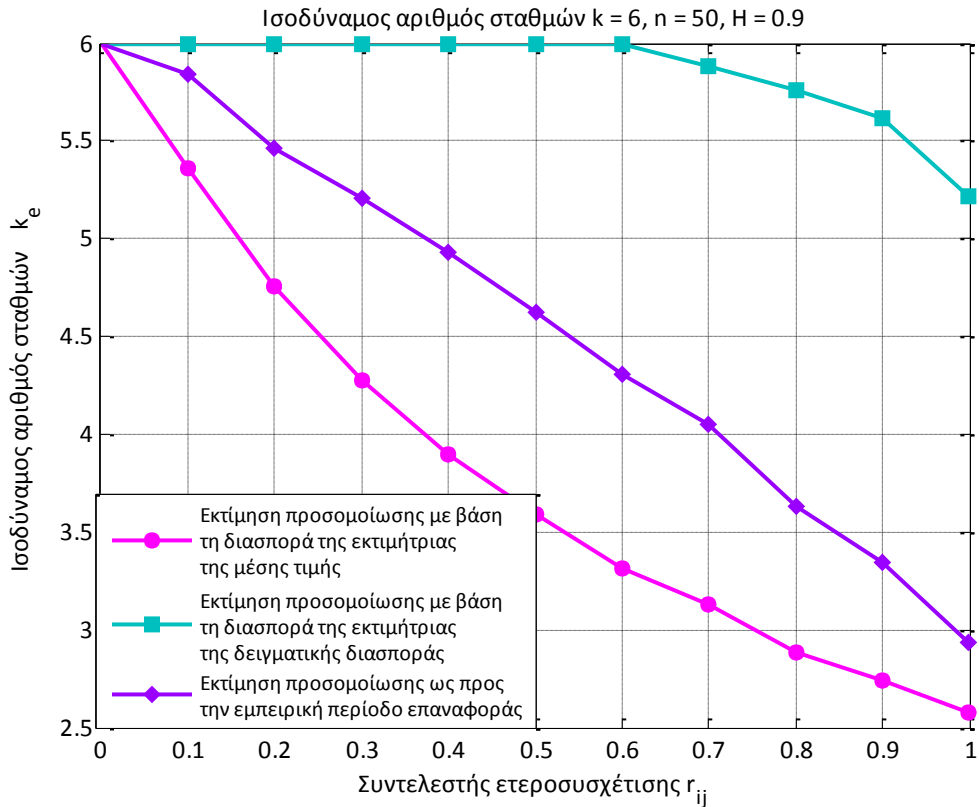
Σχήμα Β.67: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



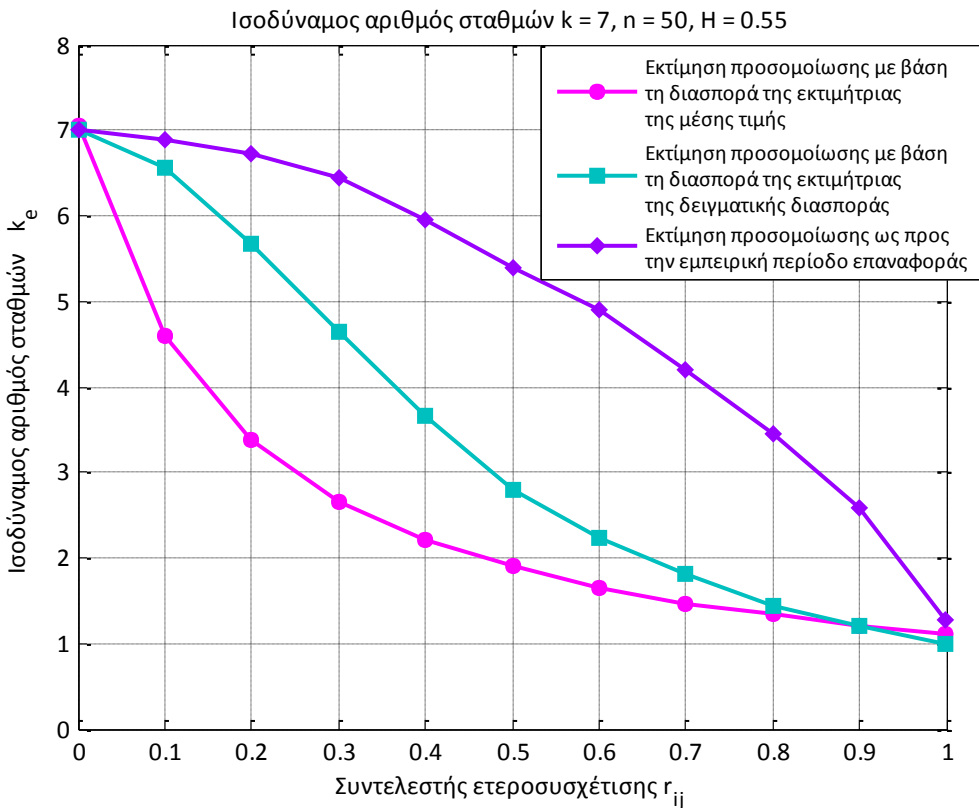
Σχήμα Β.68: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



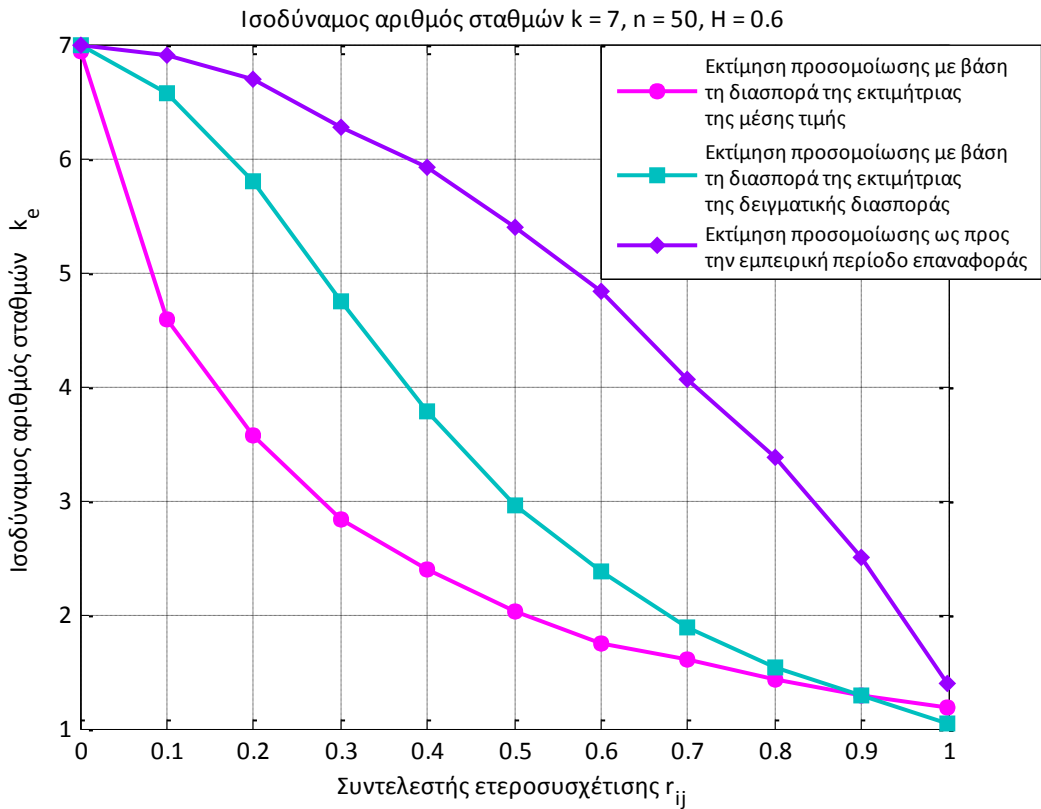
Σχήμα Β.69: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



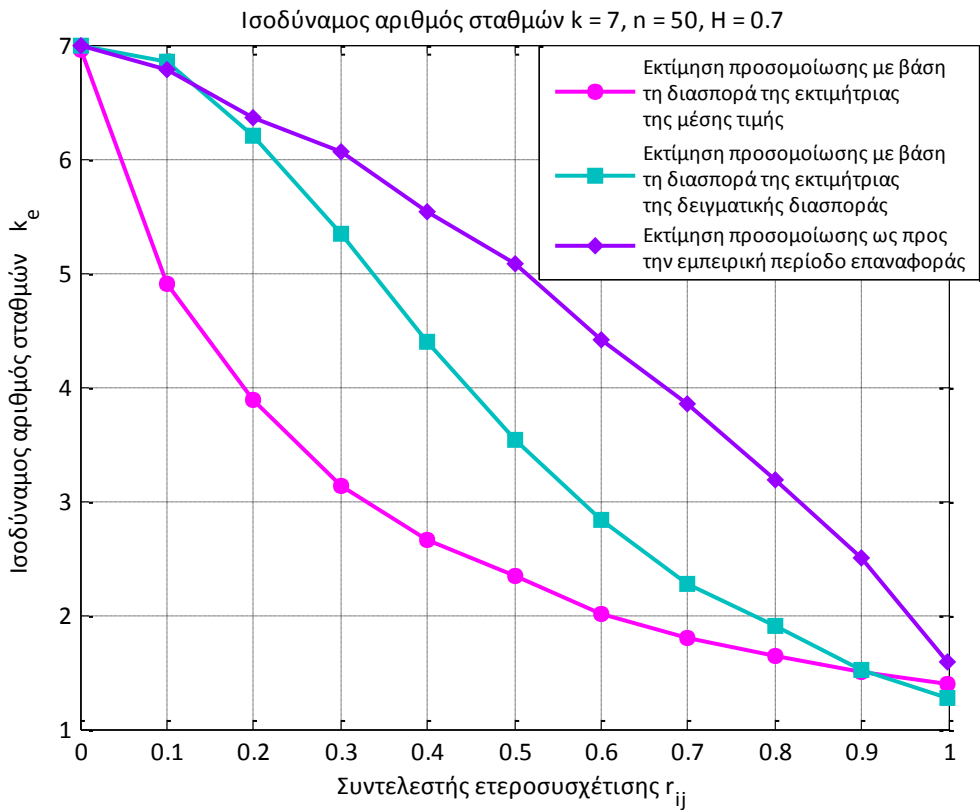
Σχήμα Β.70: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



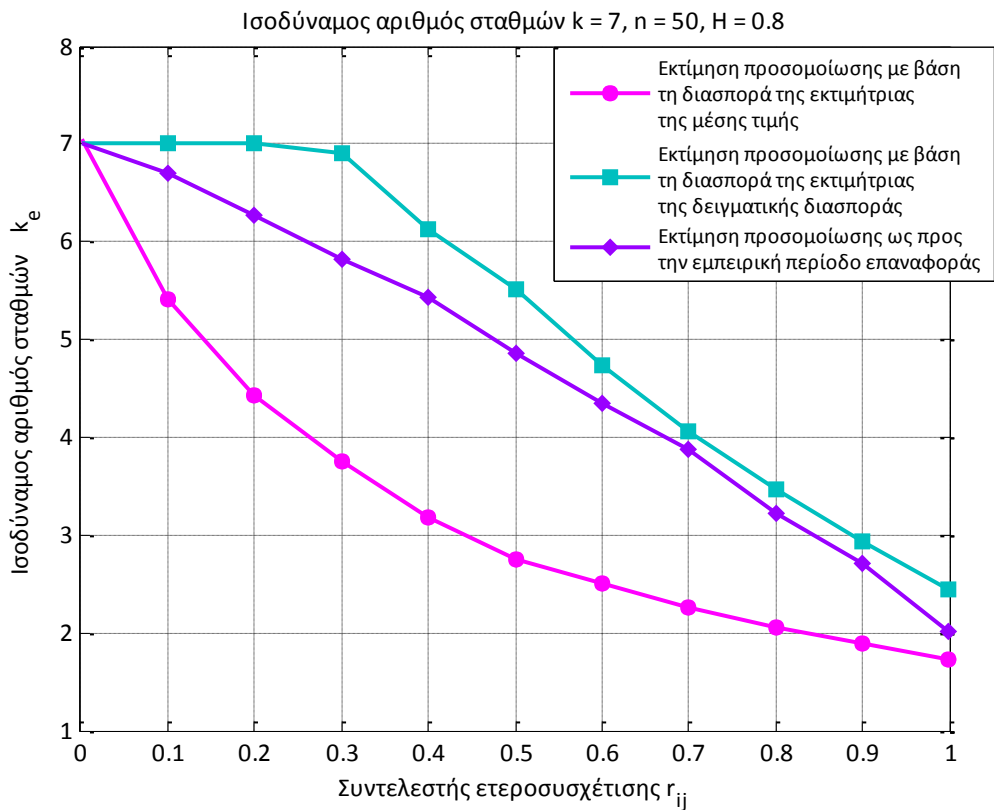
Σχήμα Β.71: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



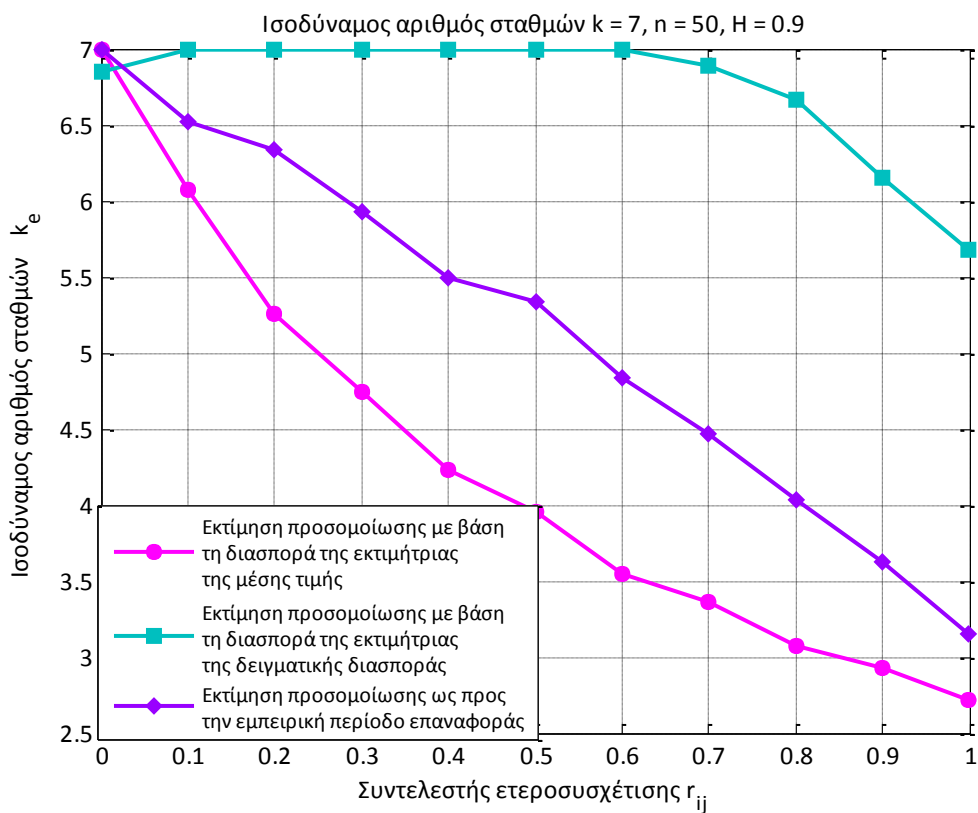
Σχήμα Β.72: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



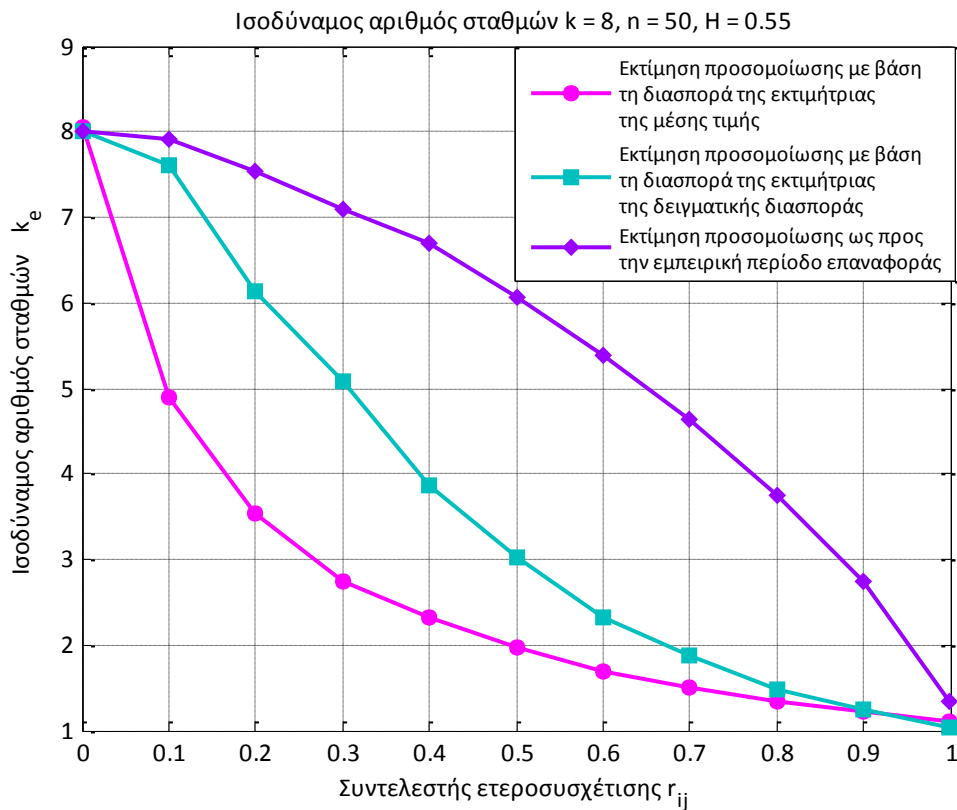
Σχήμα Β.73: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



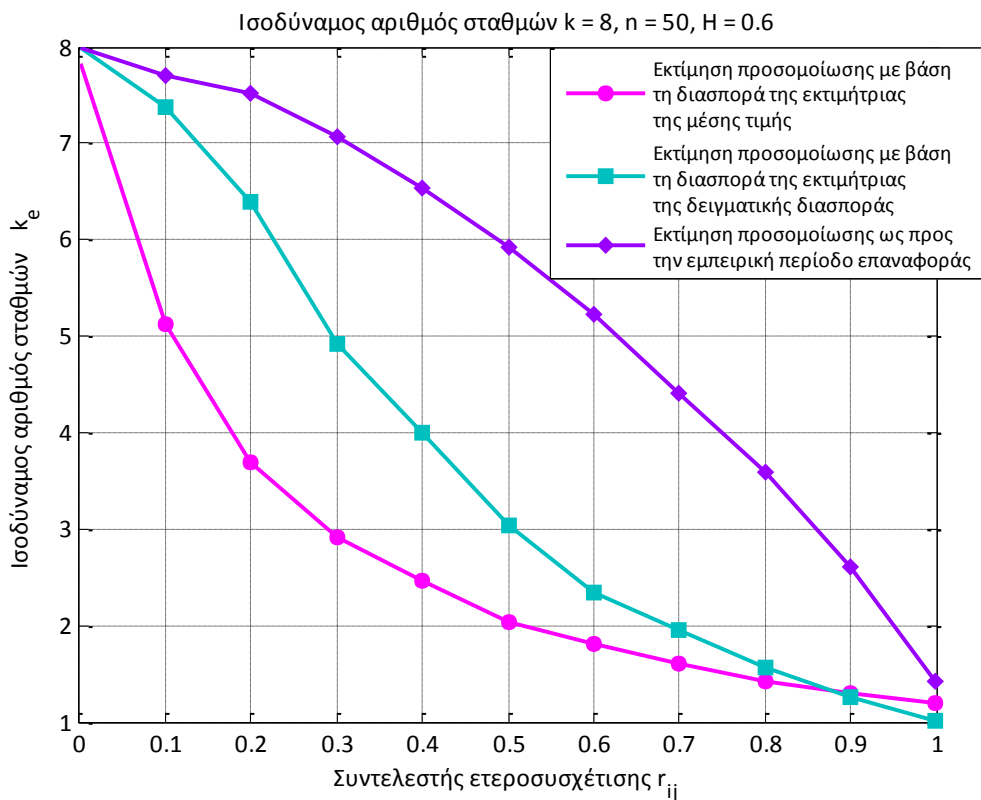
Σχήμα Β.74: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



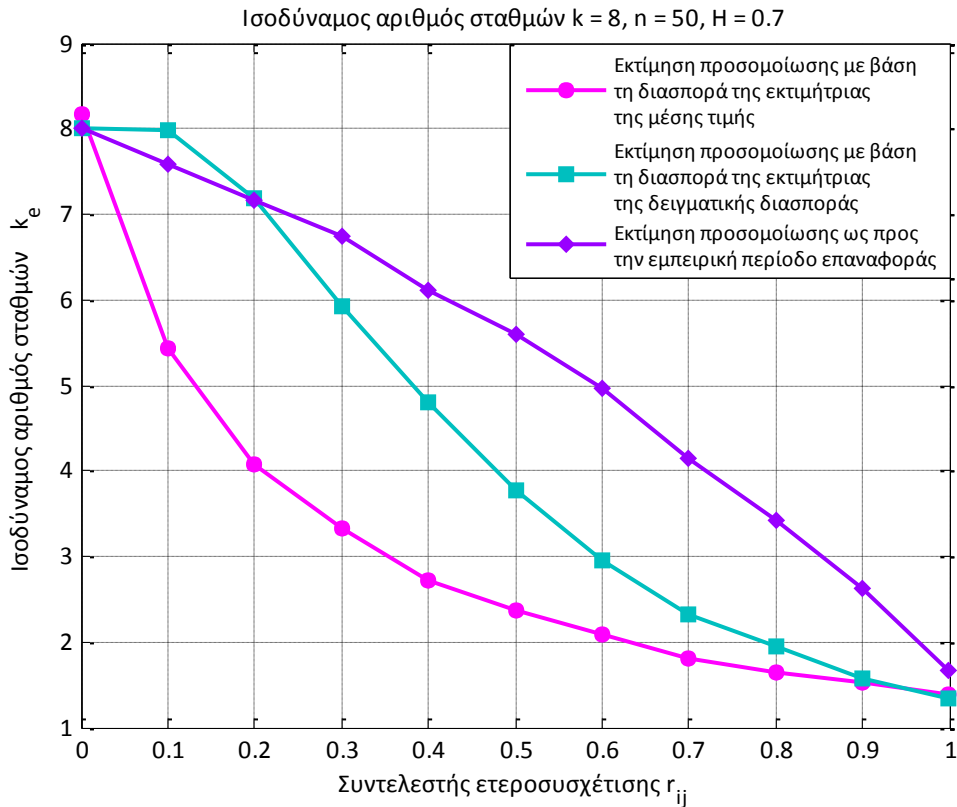
Σχήμα Β.75: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



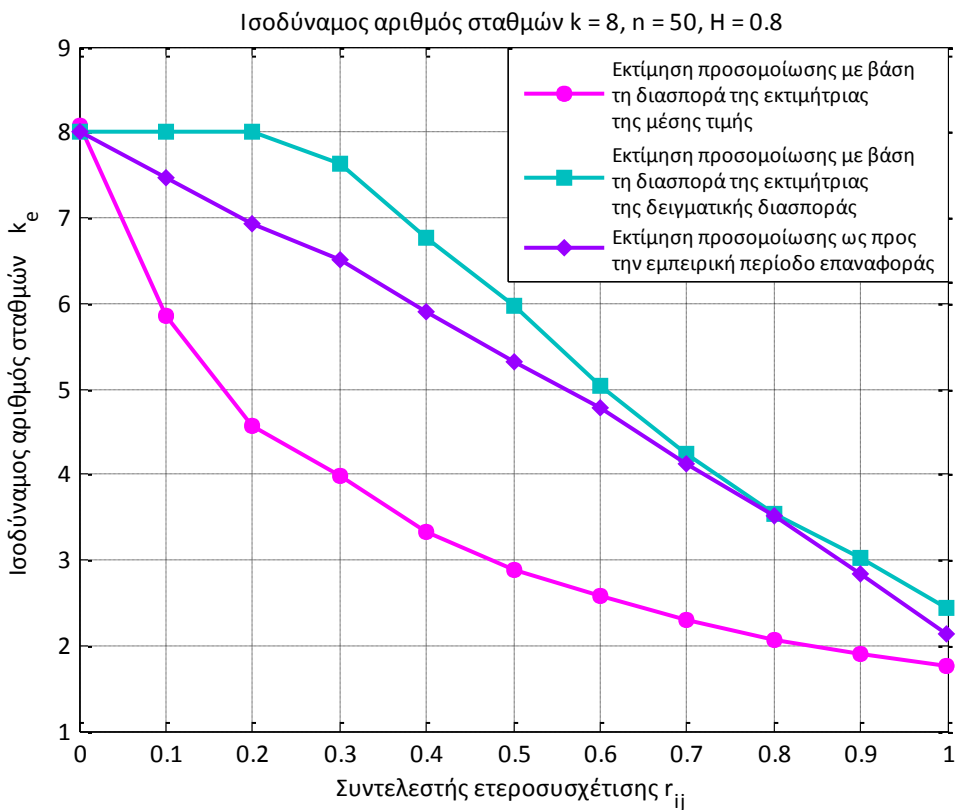
Σχήμα B.76: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



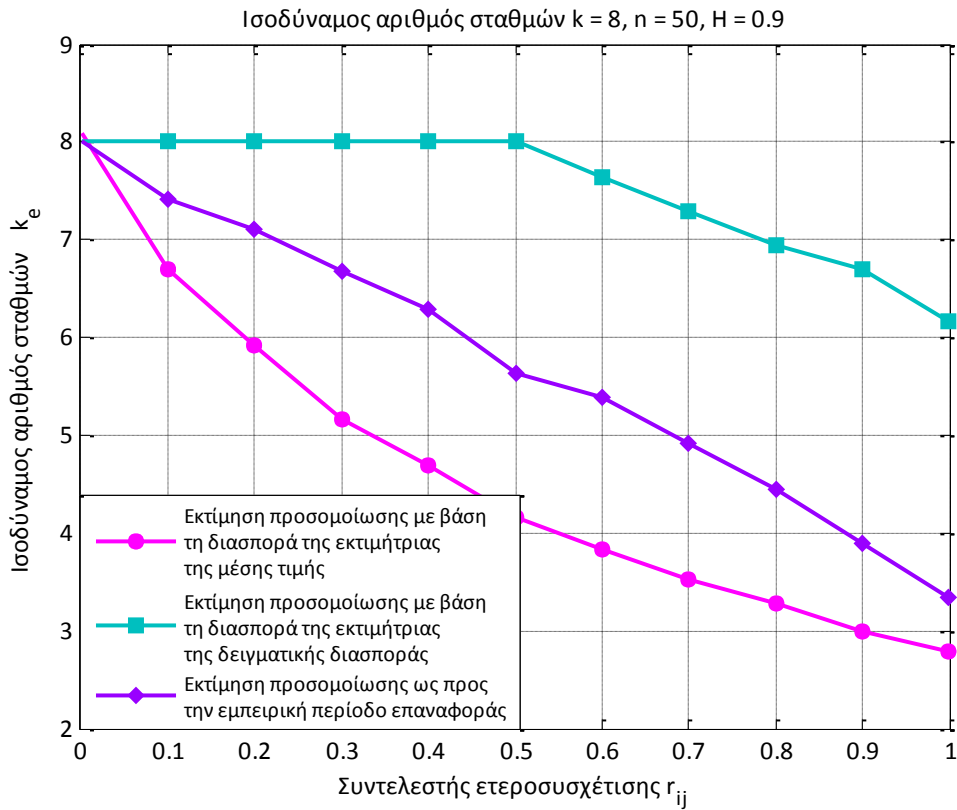
Σχήμα B.77: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



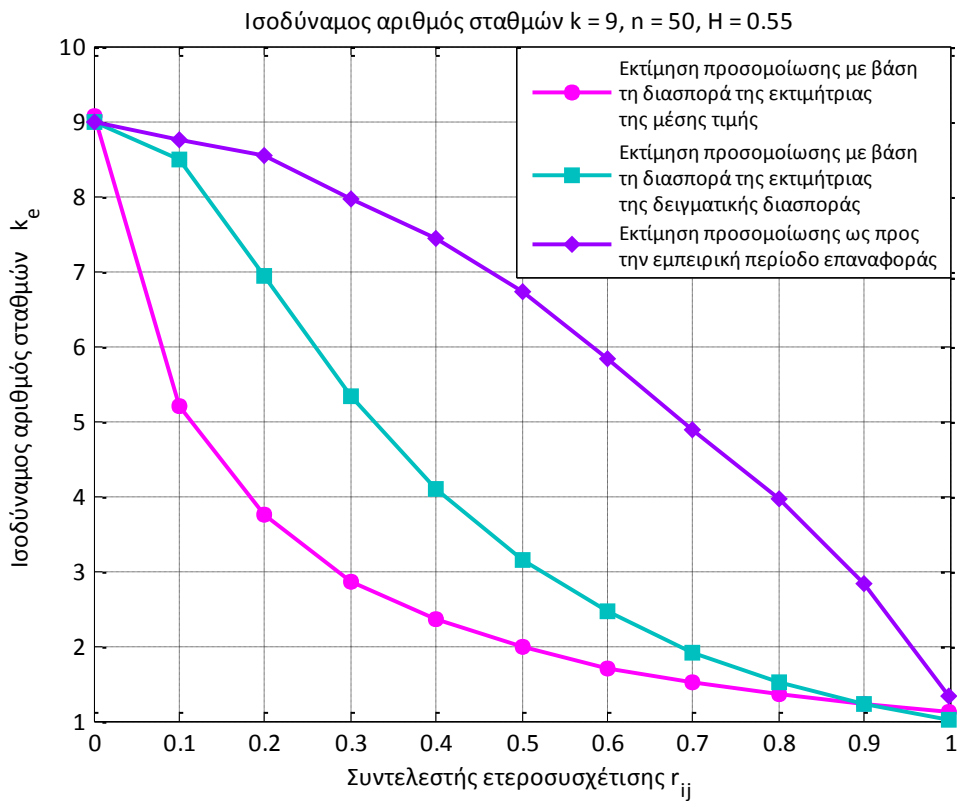
Σχήμα Β.78: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



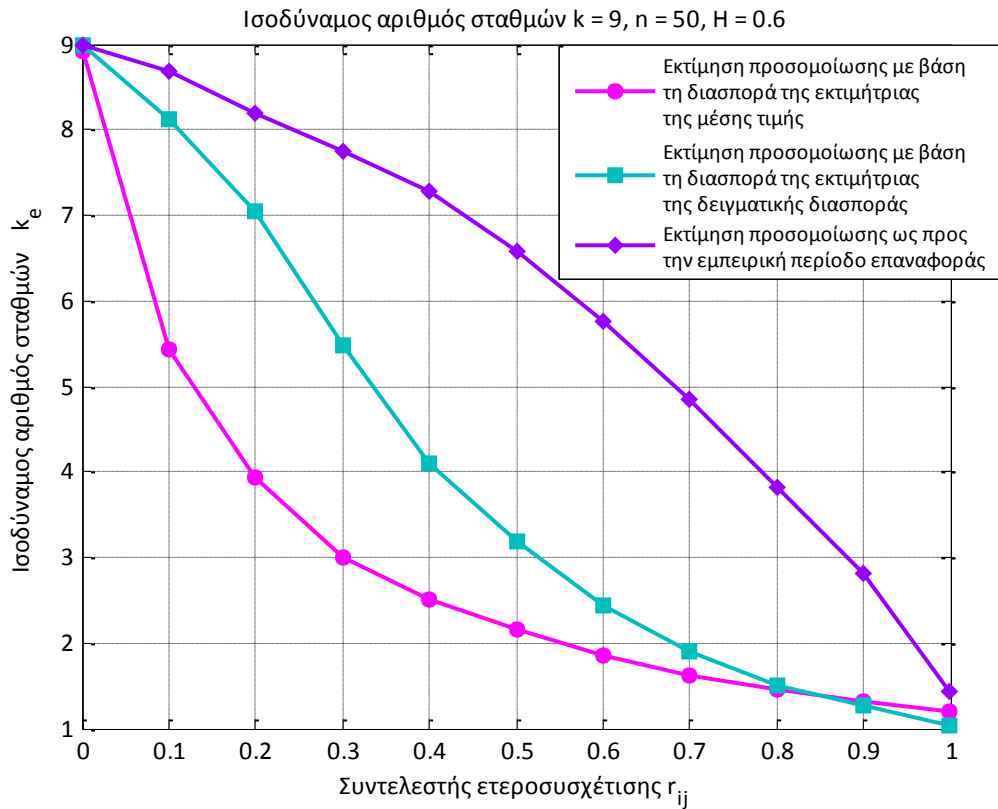
Σχήμα Β.79: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



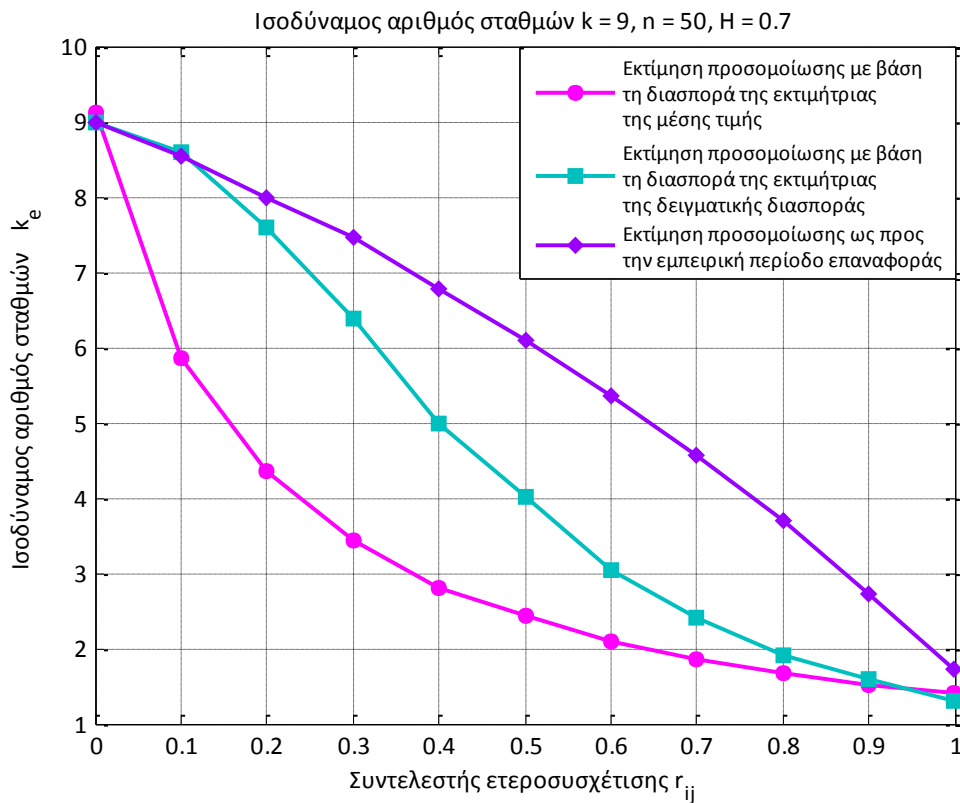
Σχήμα Β.80: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



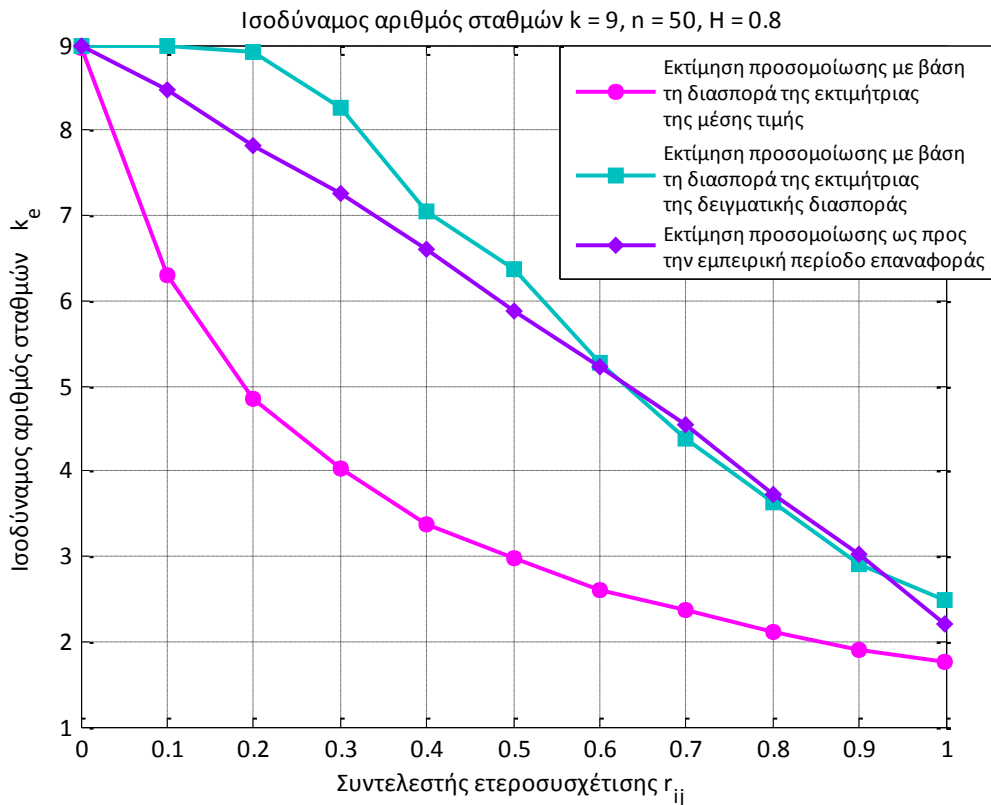
Σχήμα Β.81: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



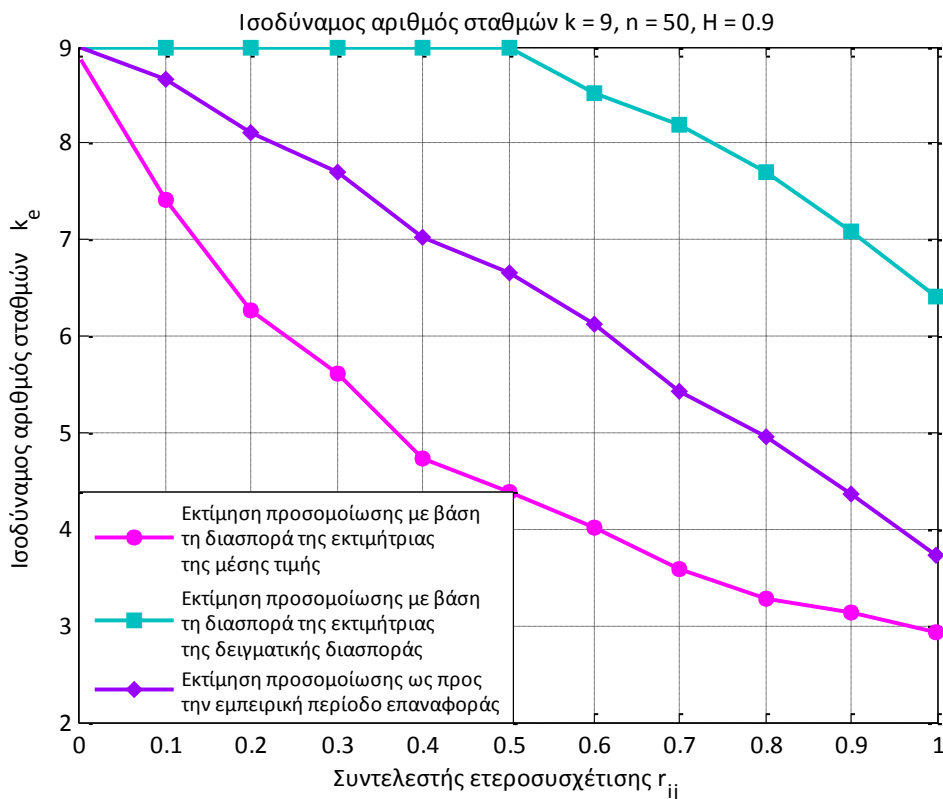
Σχήμα Β.82: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



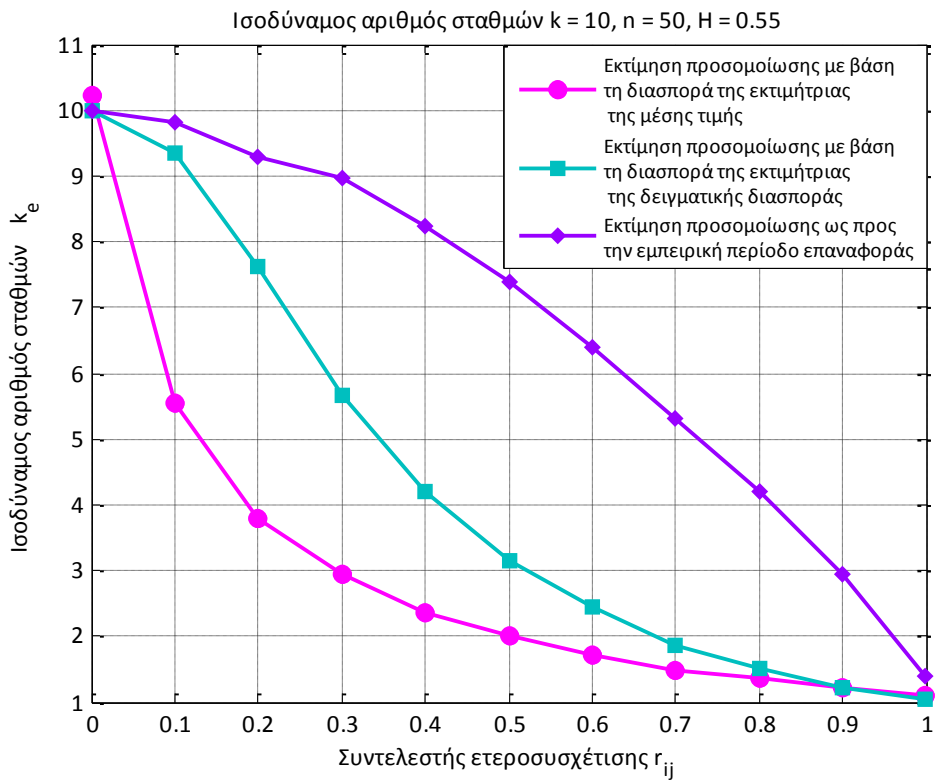
Σχήμα Β.83: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



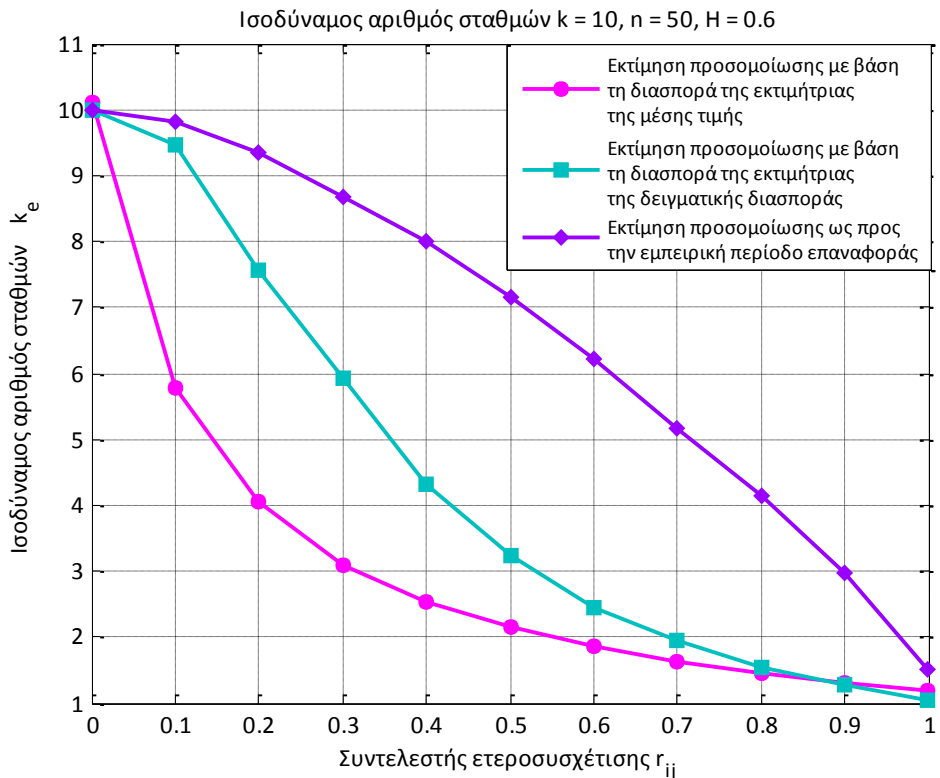
Σχήμα Β.84: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



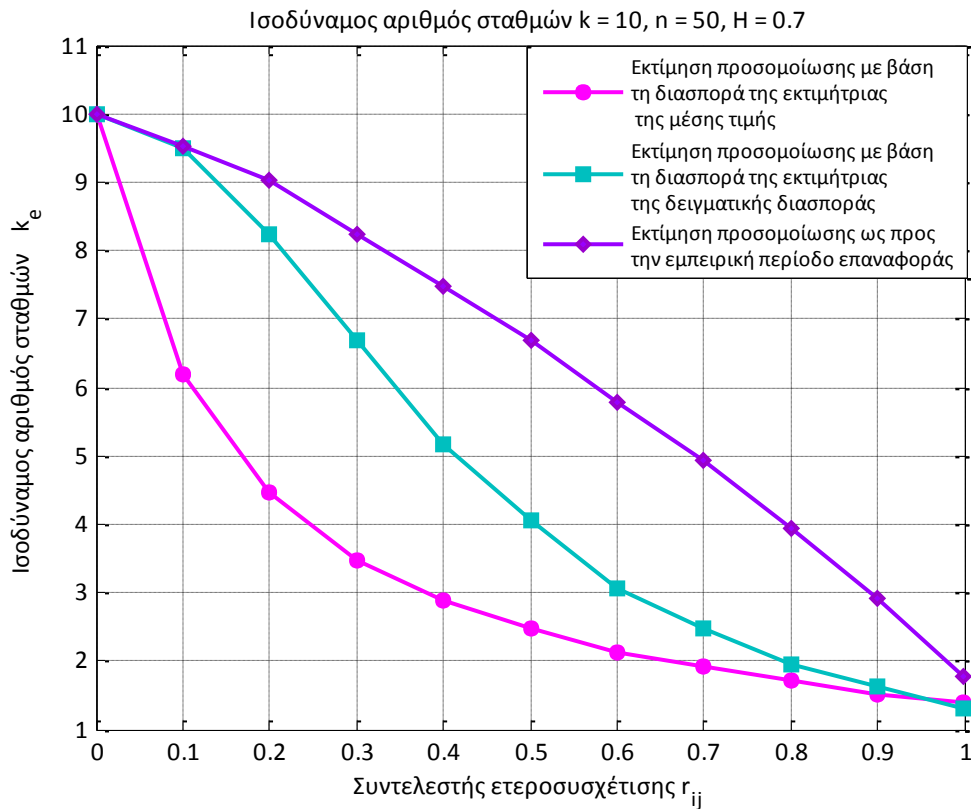
Σχήμα Β.85: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



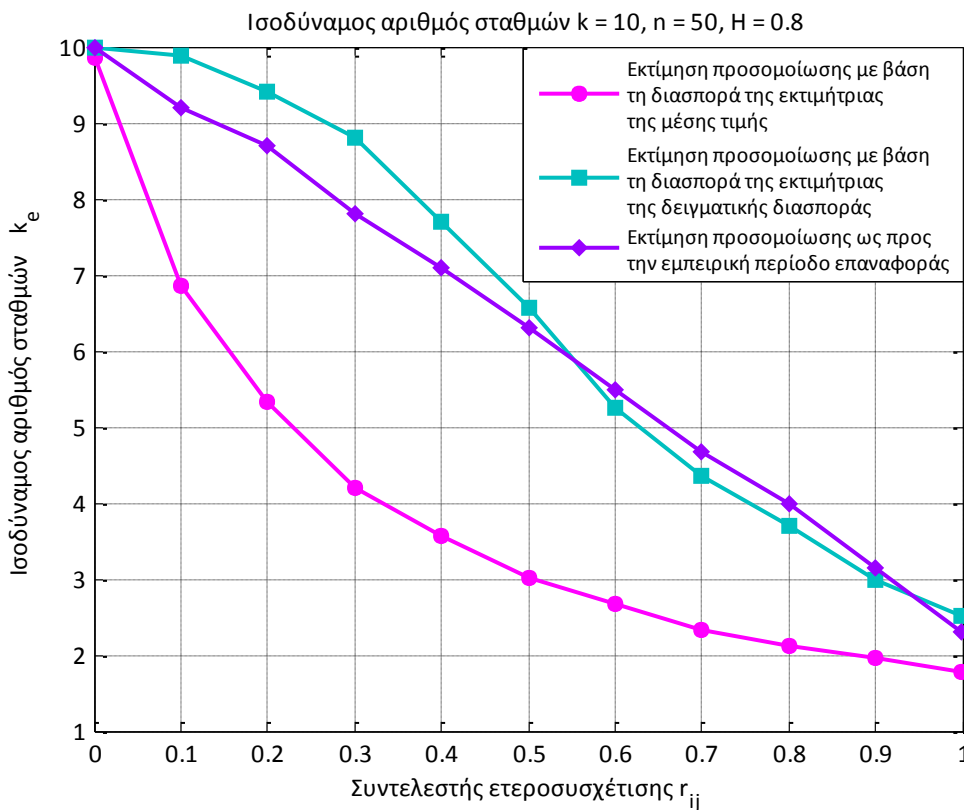
Σχήμα Β.86: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



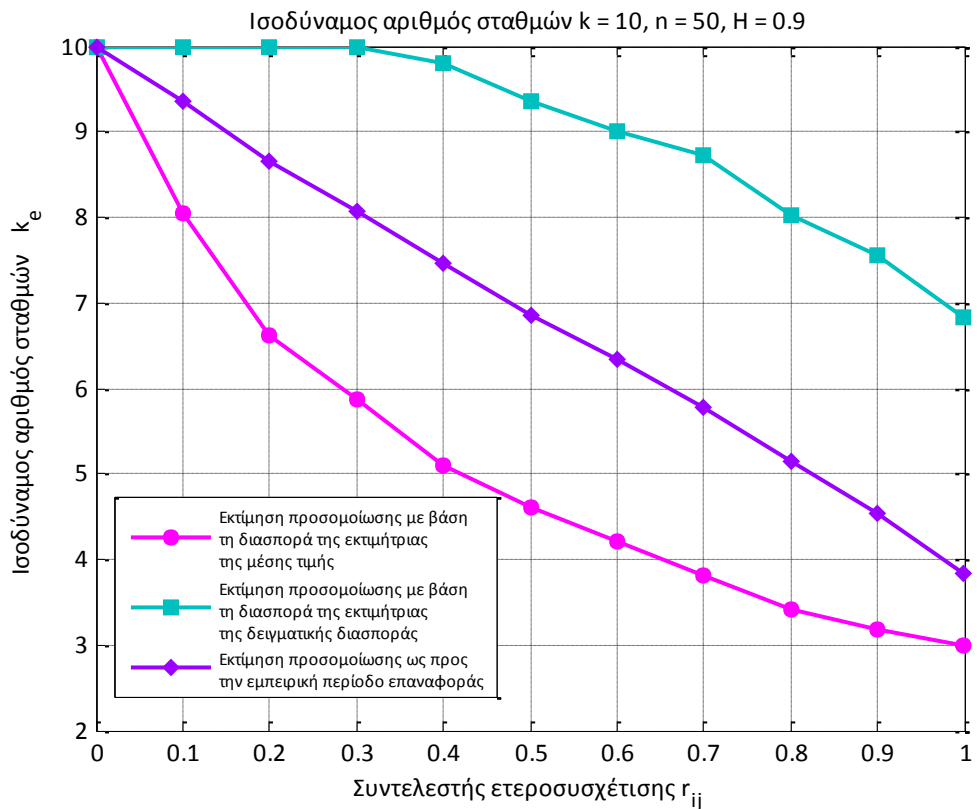
Σχήμα Β.87: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα Β.88: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα Β.89: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

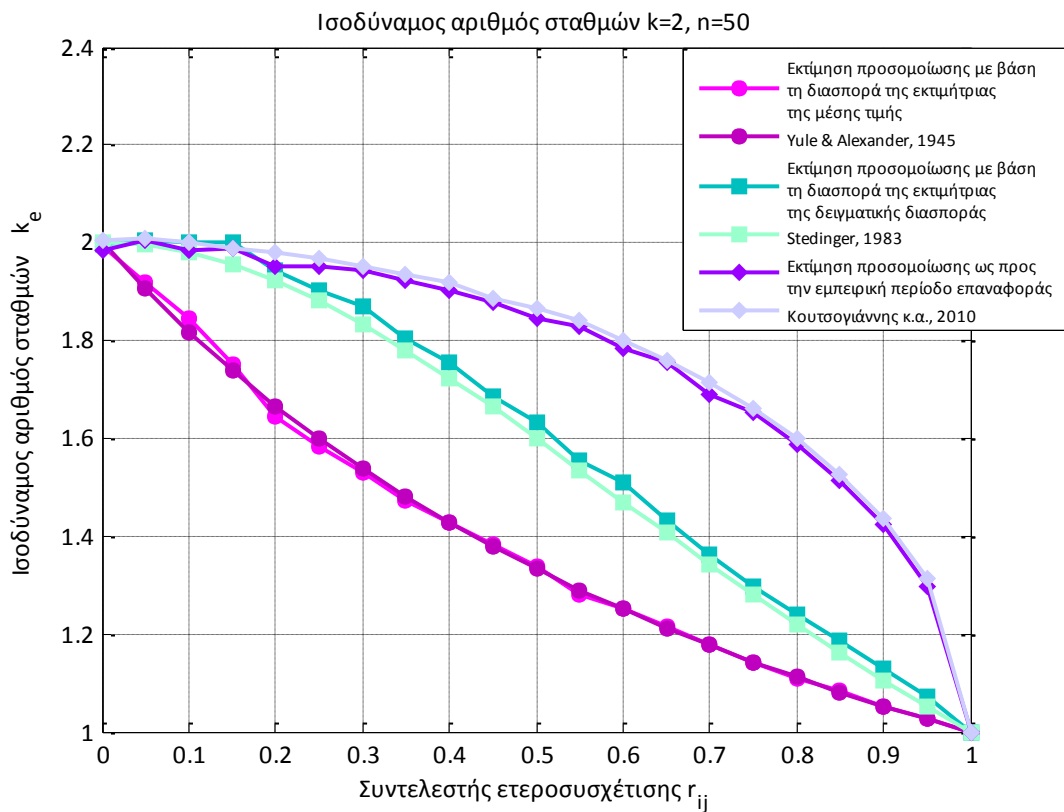


Σχήμα Β.90: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

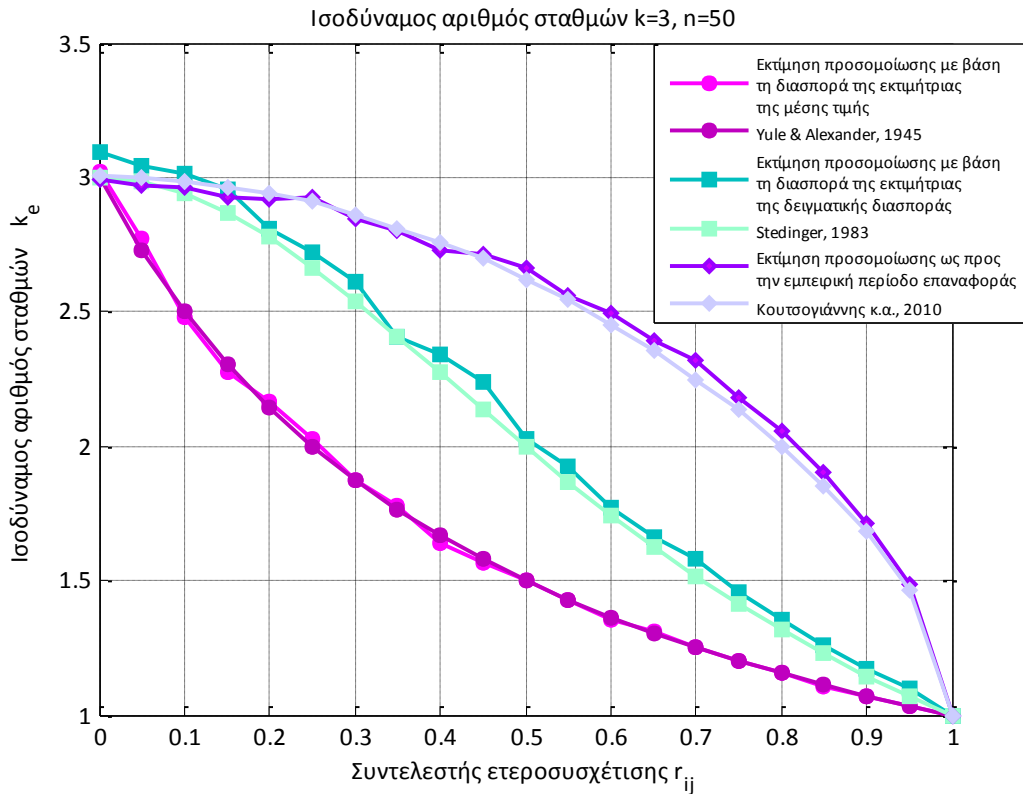
Παράρτημα Γ - Συγκριτική παρουσίαση εκτιμήσεων προσομοίωσης και ήδη υφιστάμενων σχέσεων

Γραφική απεικόνιση ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j

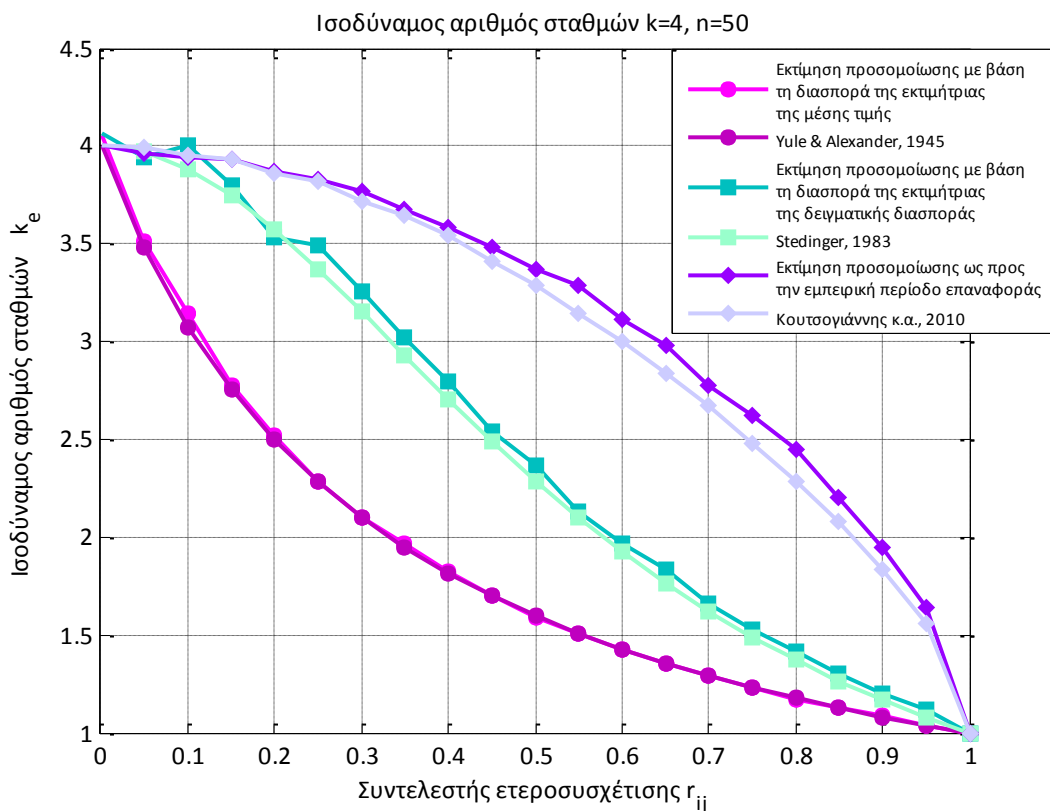
Περίπτωση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών



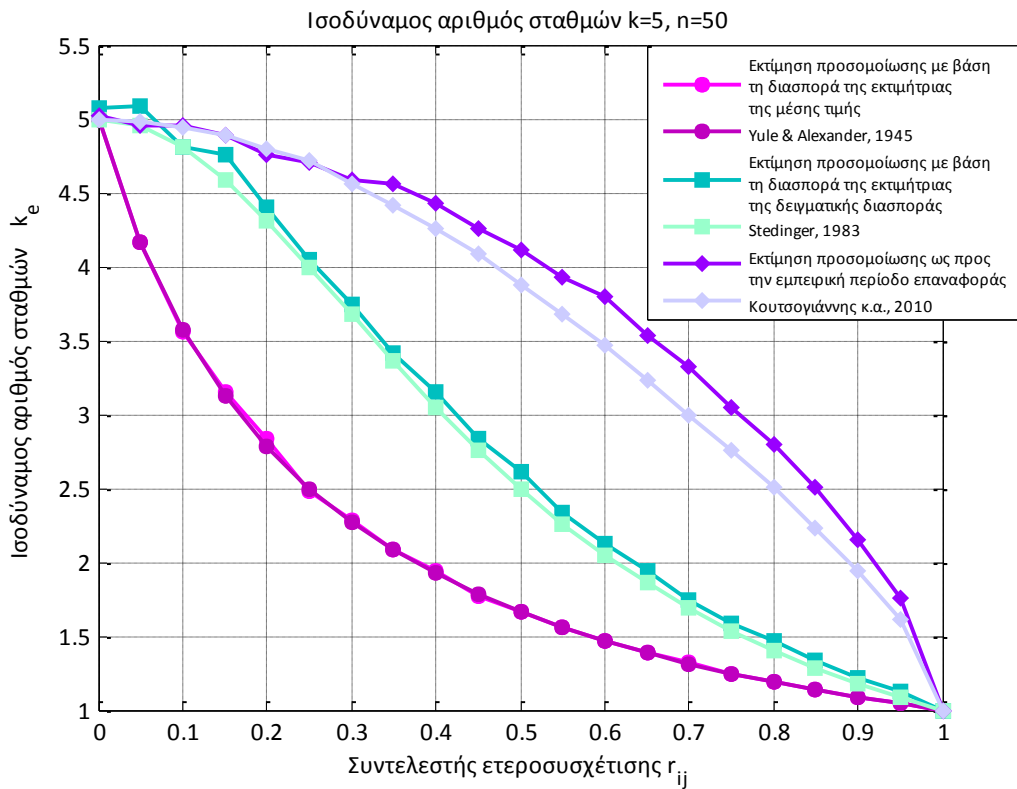
Σχήμα Γ.1: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 2$



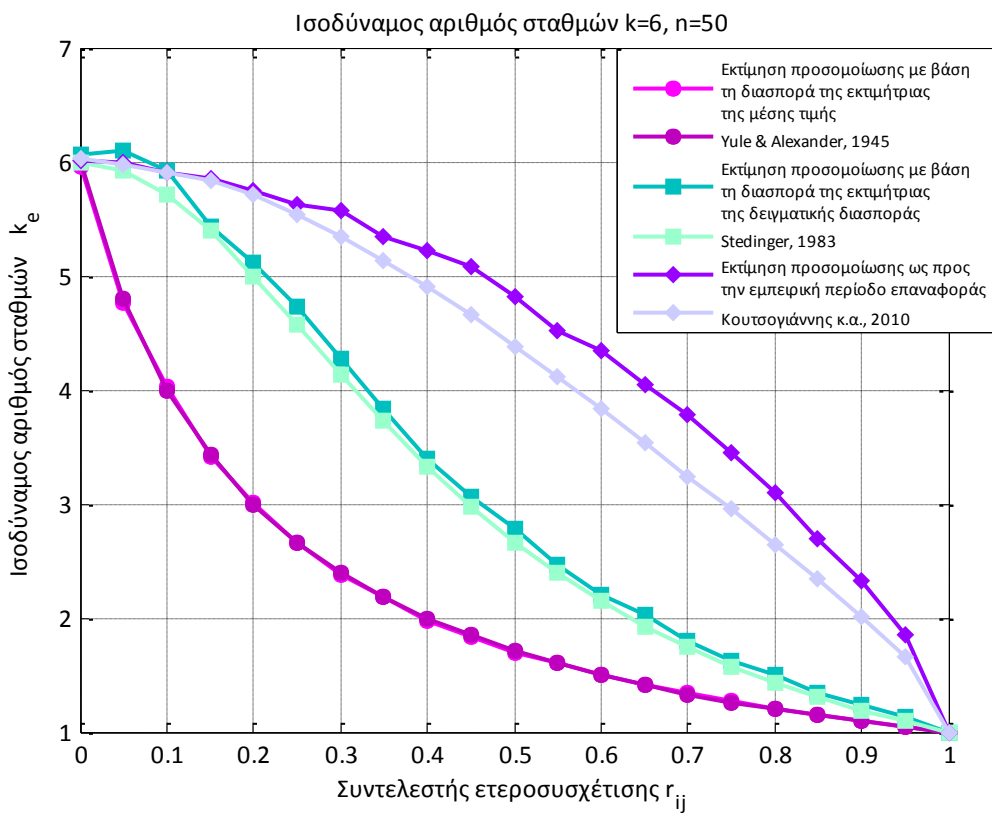
Σχήμα Γ.2: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 3$



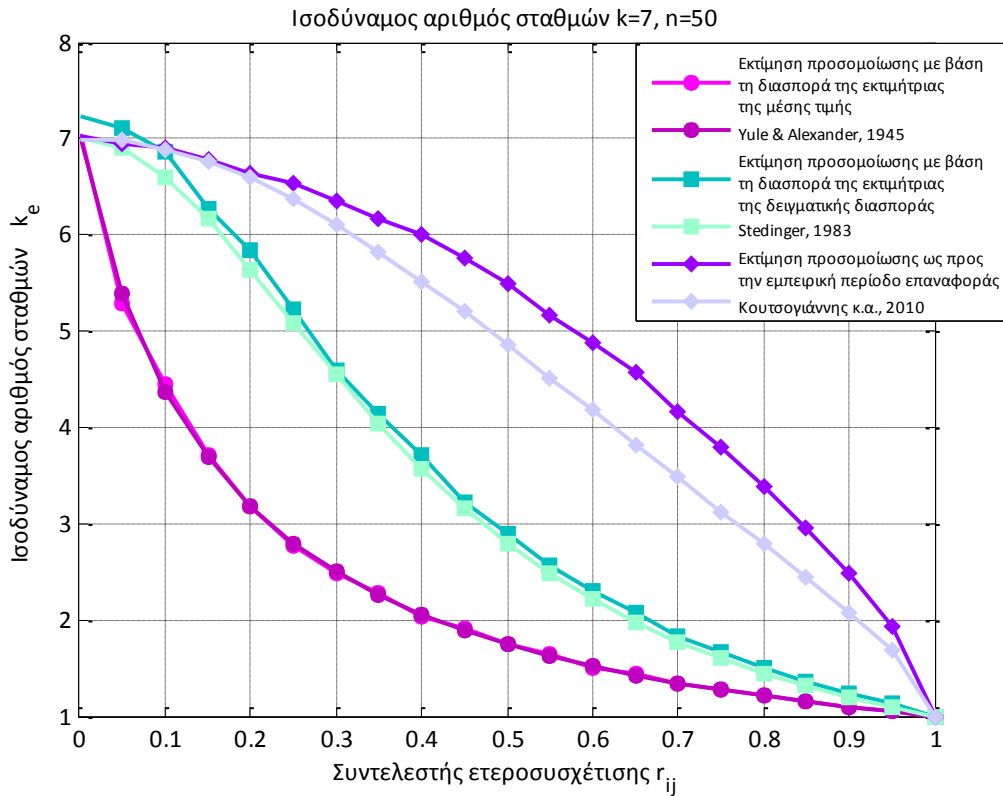
Σχήμα Γ.3: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 4$



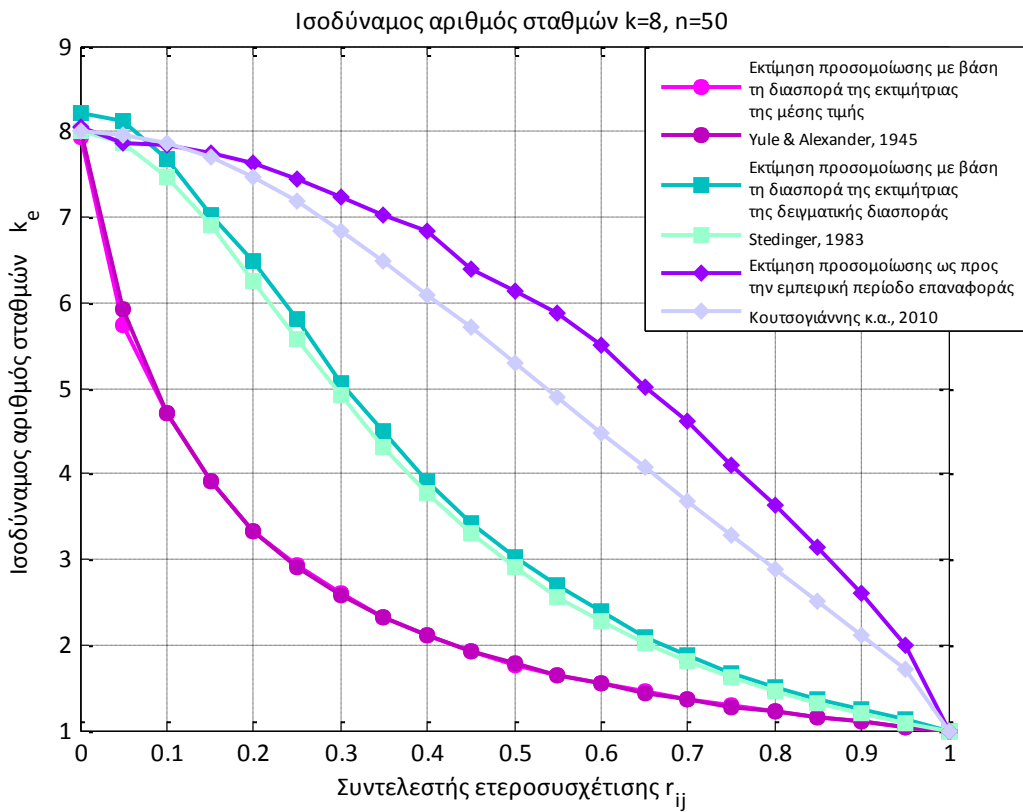
Σχήμα Γ.4: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 5$



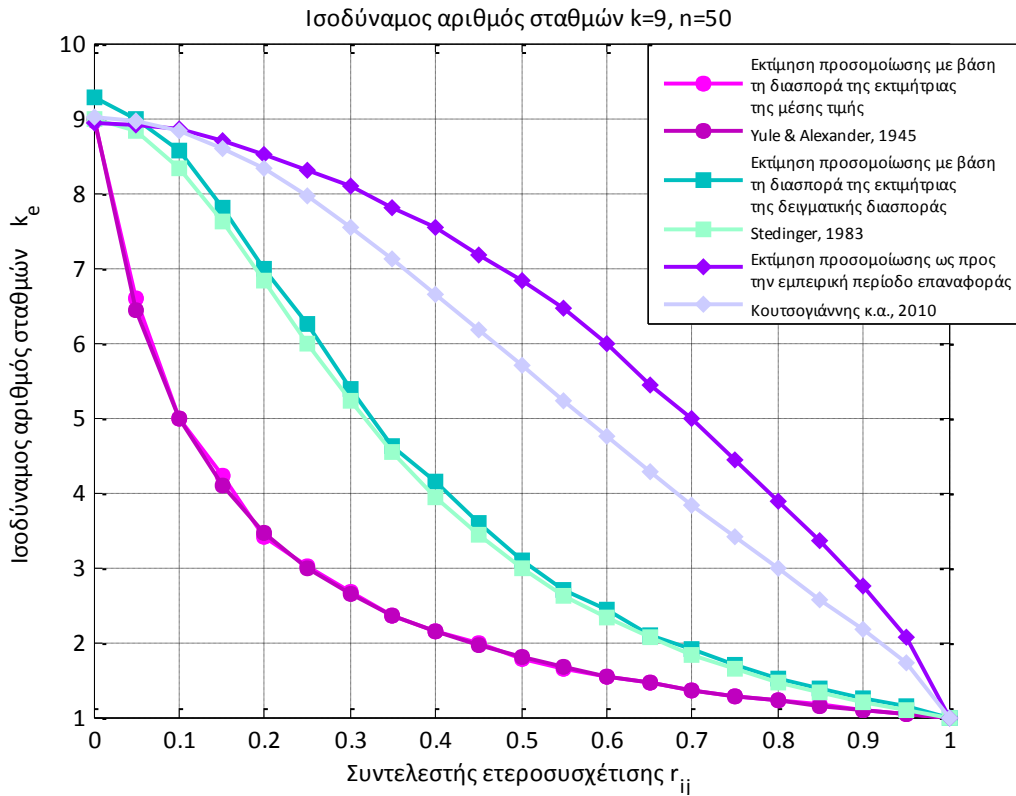
Σχήμα Γ.5: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 6$



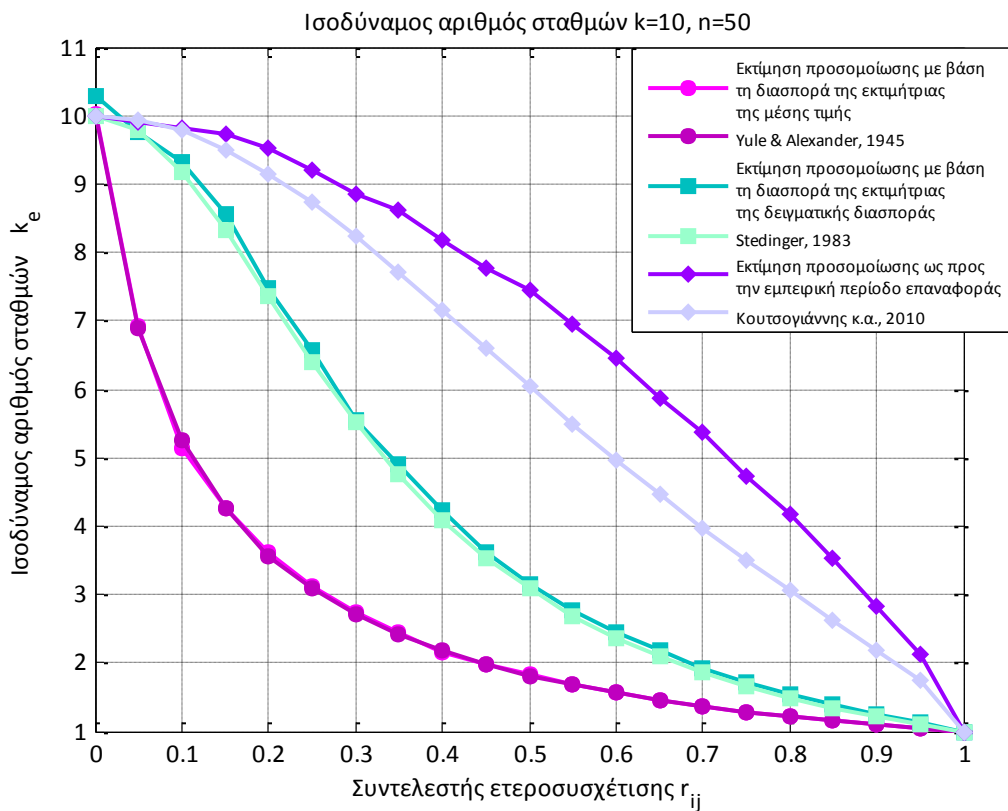
Σχήμα Γ.6: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 7$



Σχήμα Γ.7: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 8$

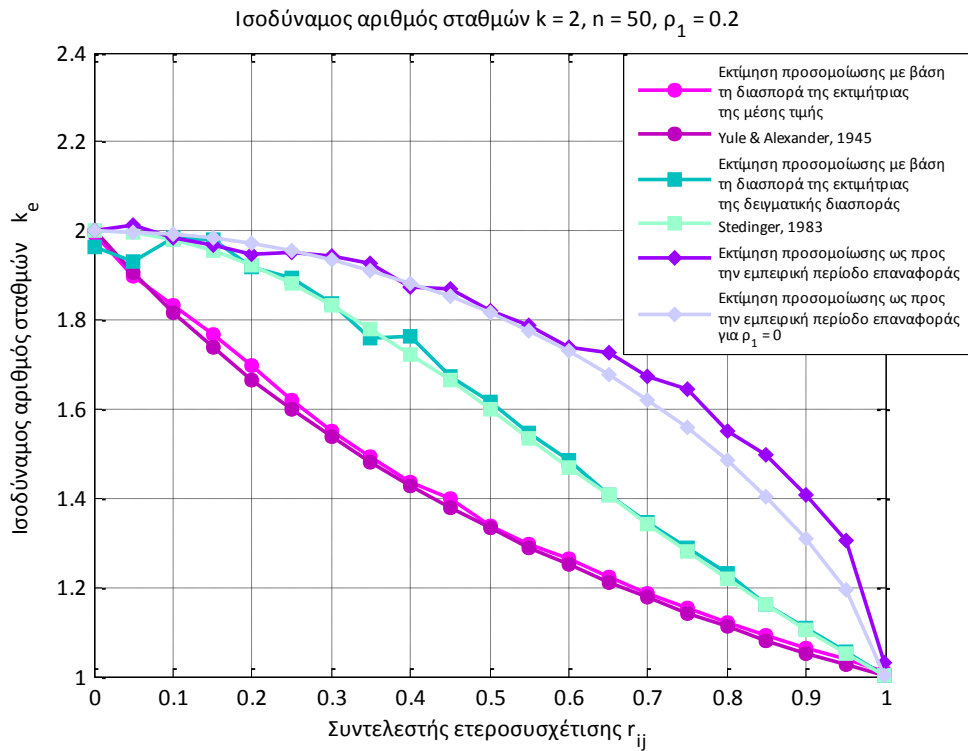


Σχήμα Γ.8: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 9$

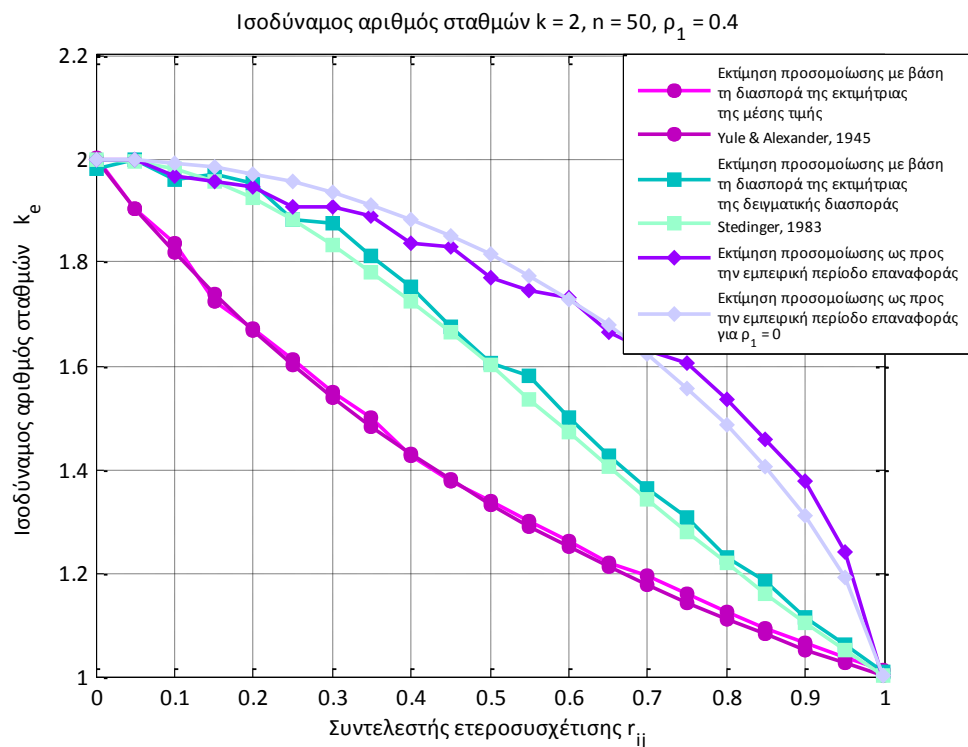


Σχήμα Γ.9: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 10$

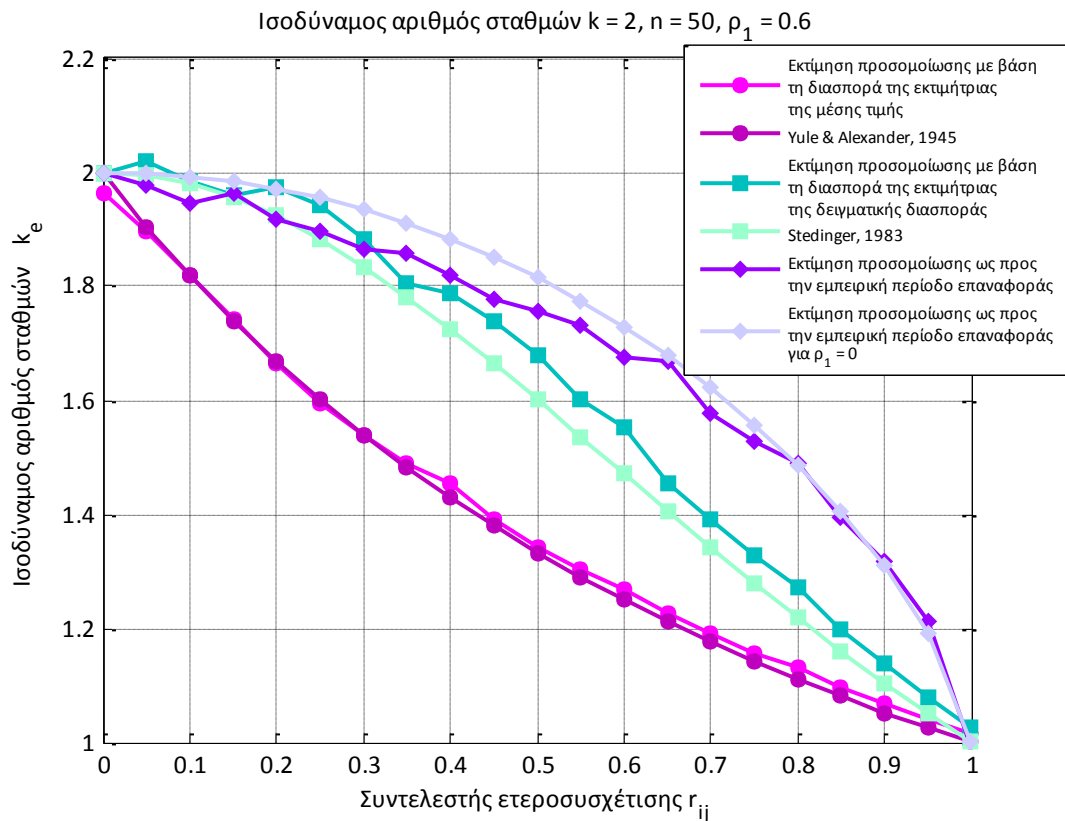
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών («Μαρκοβιανή» προσέγγιση)



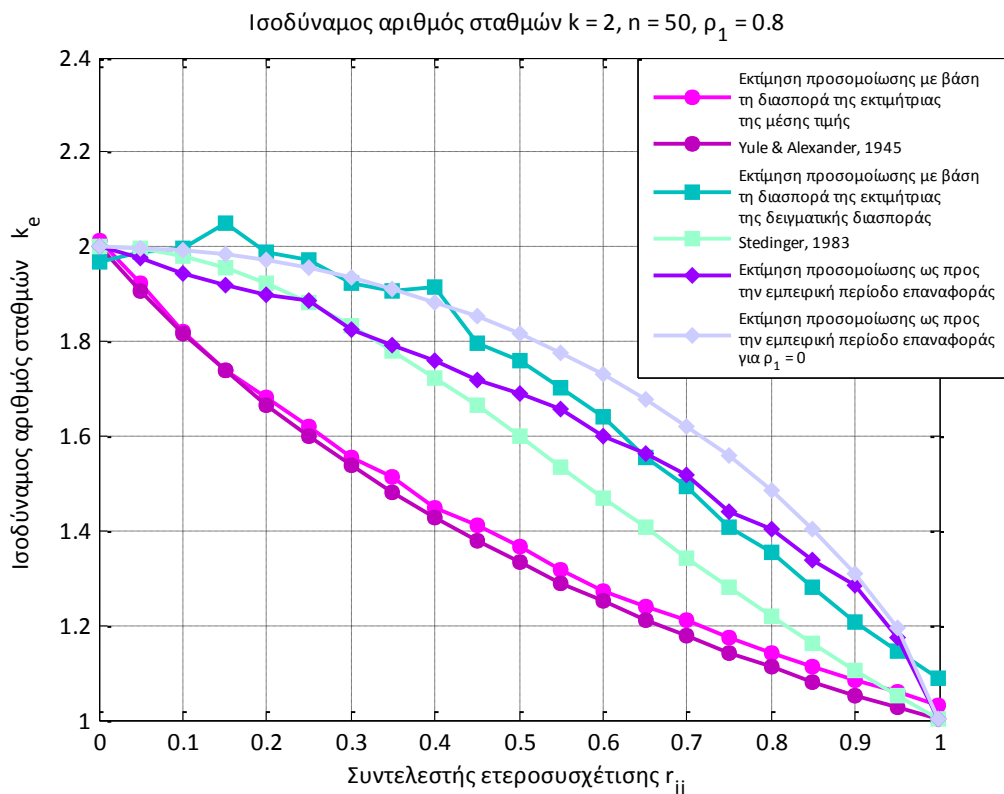
Σχήμα Γ.10: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



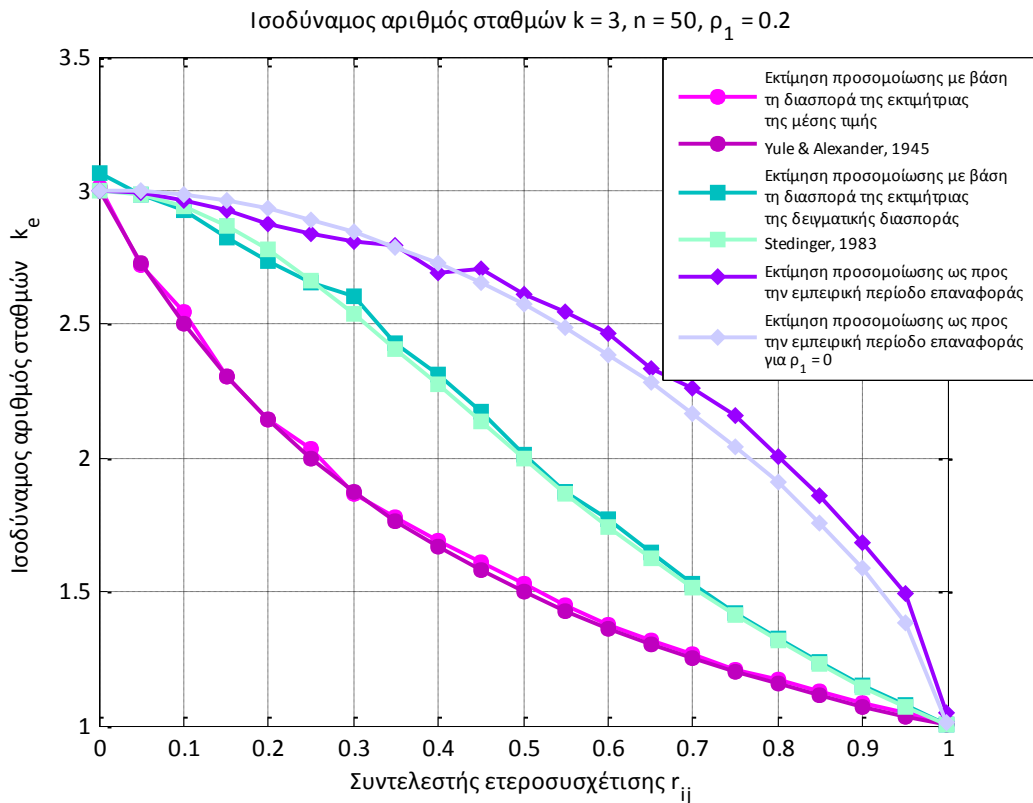
Σχήμα Γ.11: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



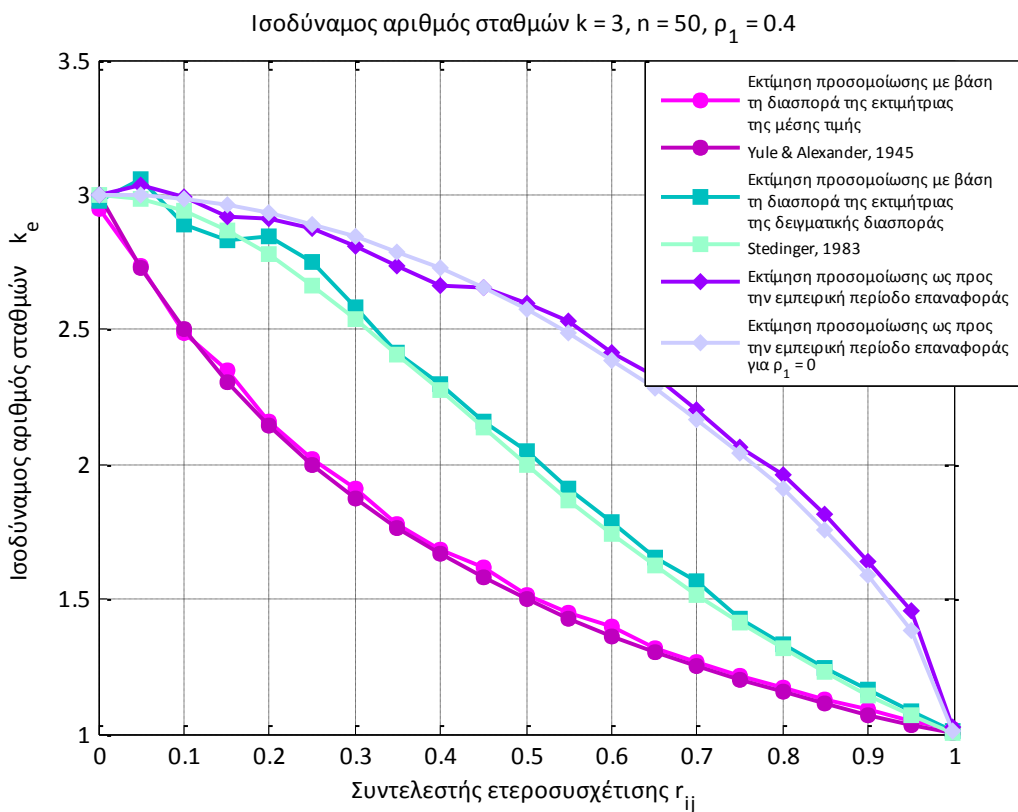
Σχήμα Γ.12: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



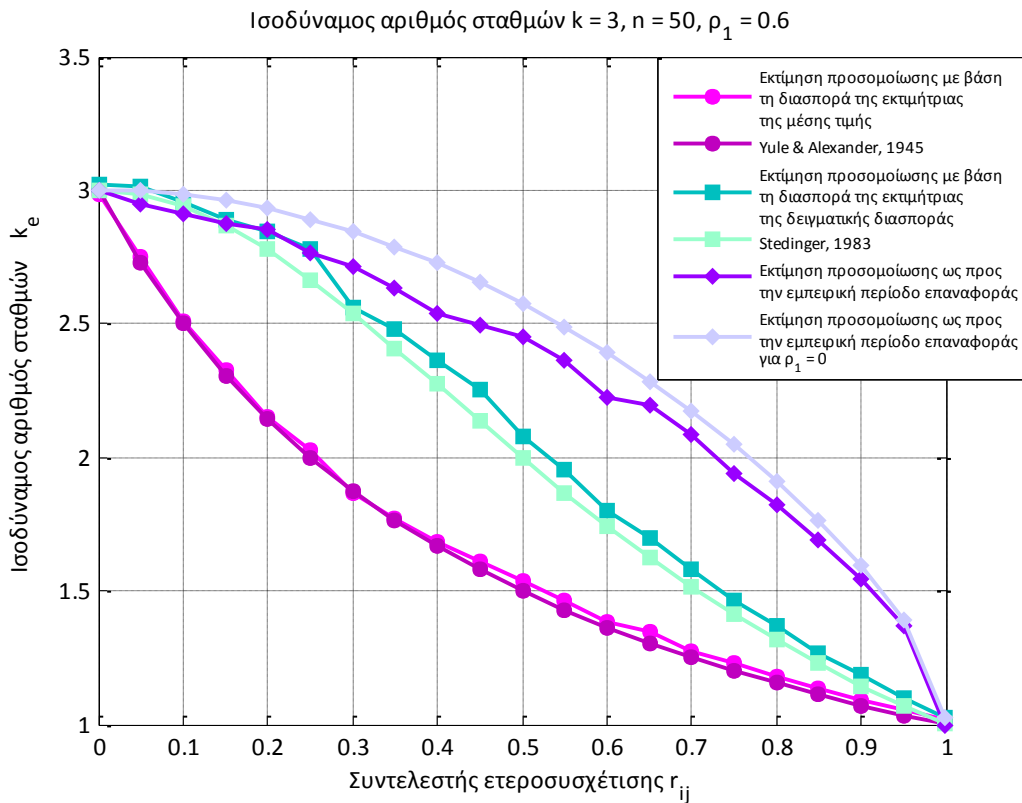
Σχήμα Γ.13: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



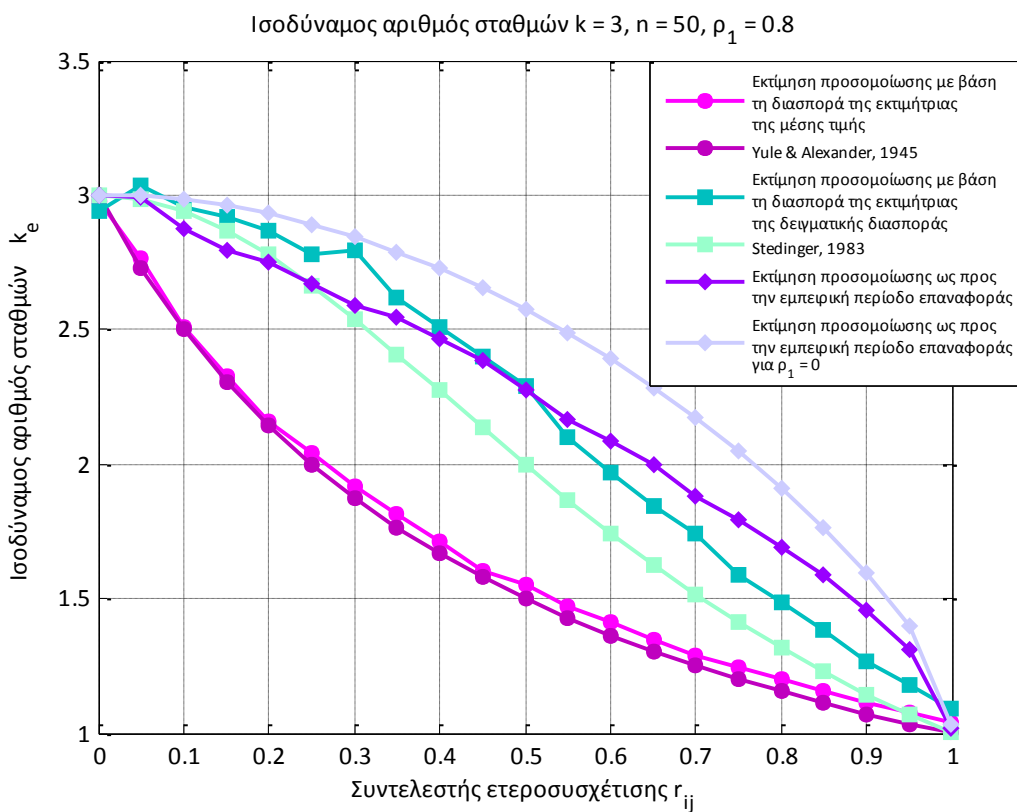
Σχήμα Γ.14: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



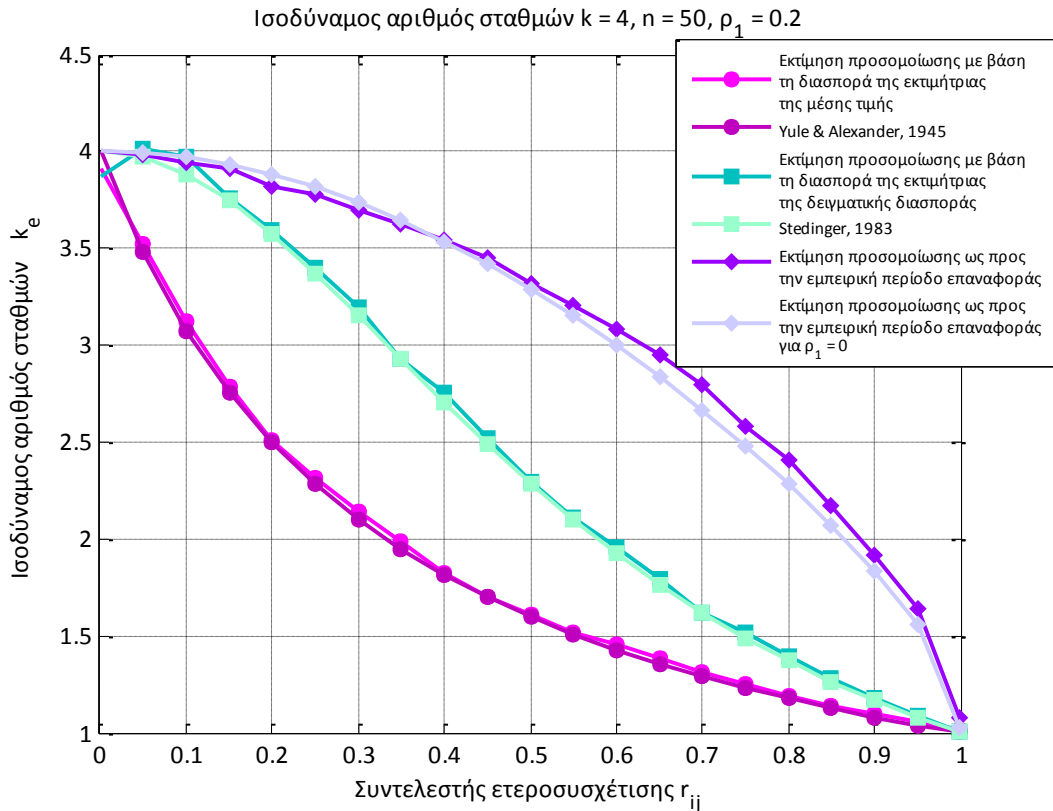
Σχήμα Γ.15: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



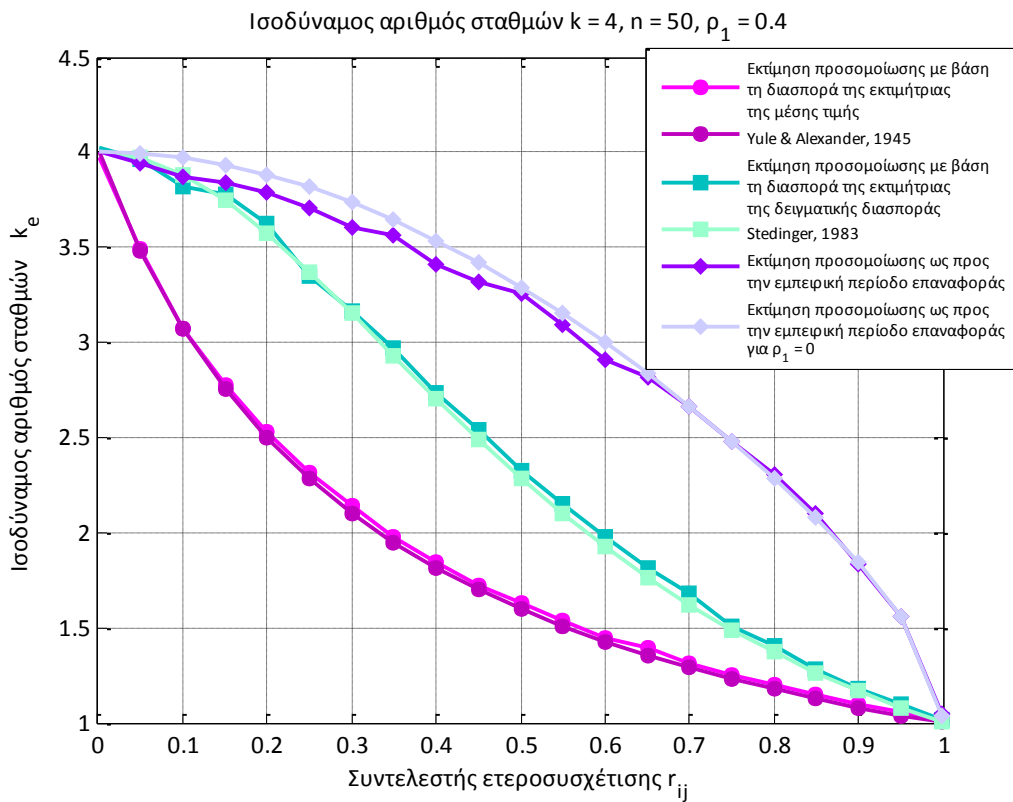
Σχήμα Γ.16: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



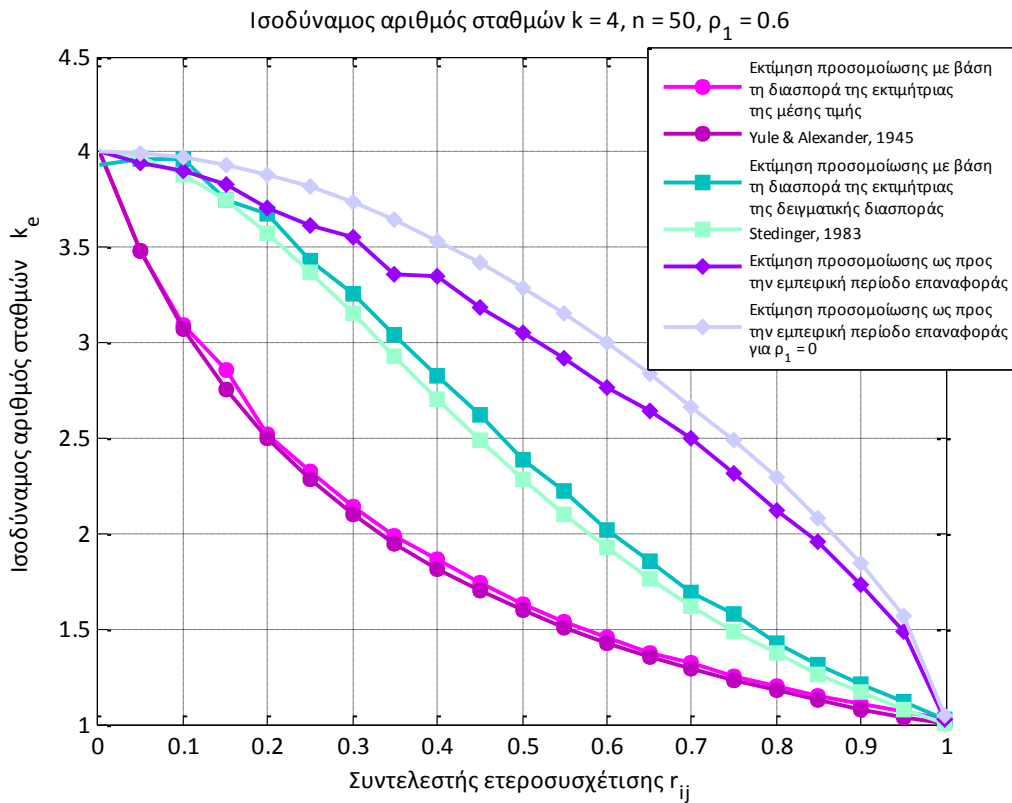
Σχήμα Γ.17: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



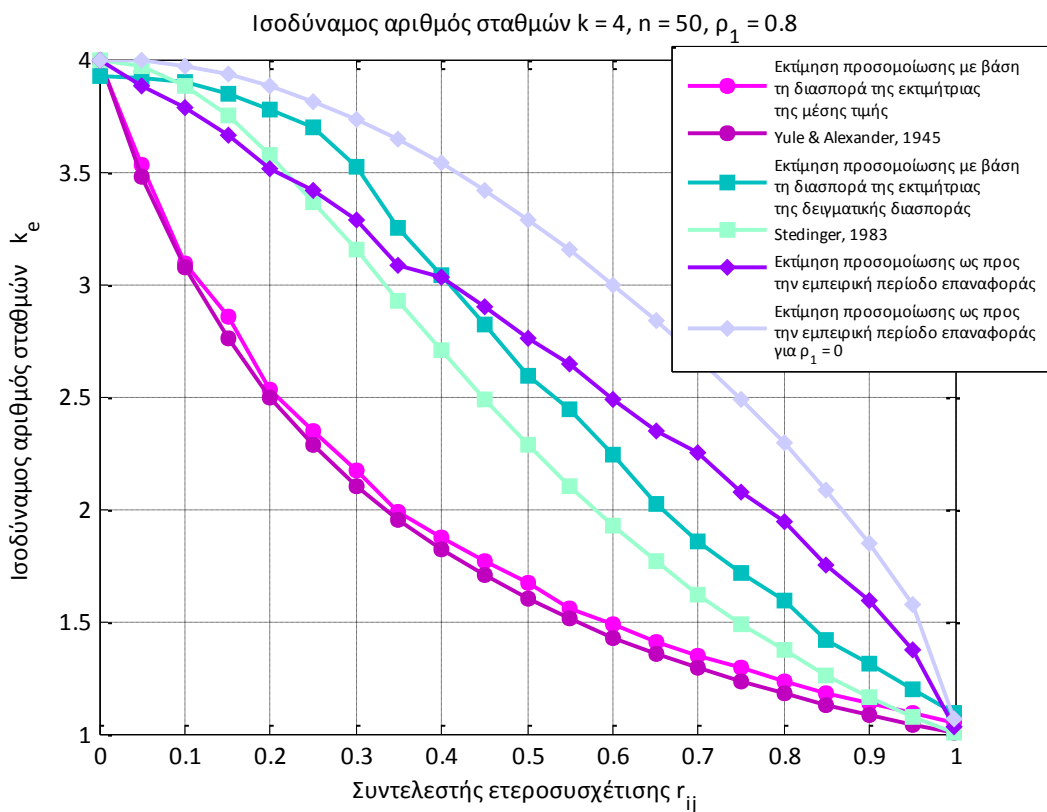
Σχήμα Γ.18: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



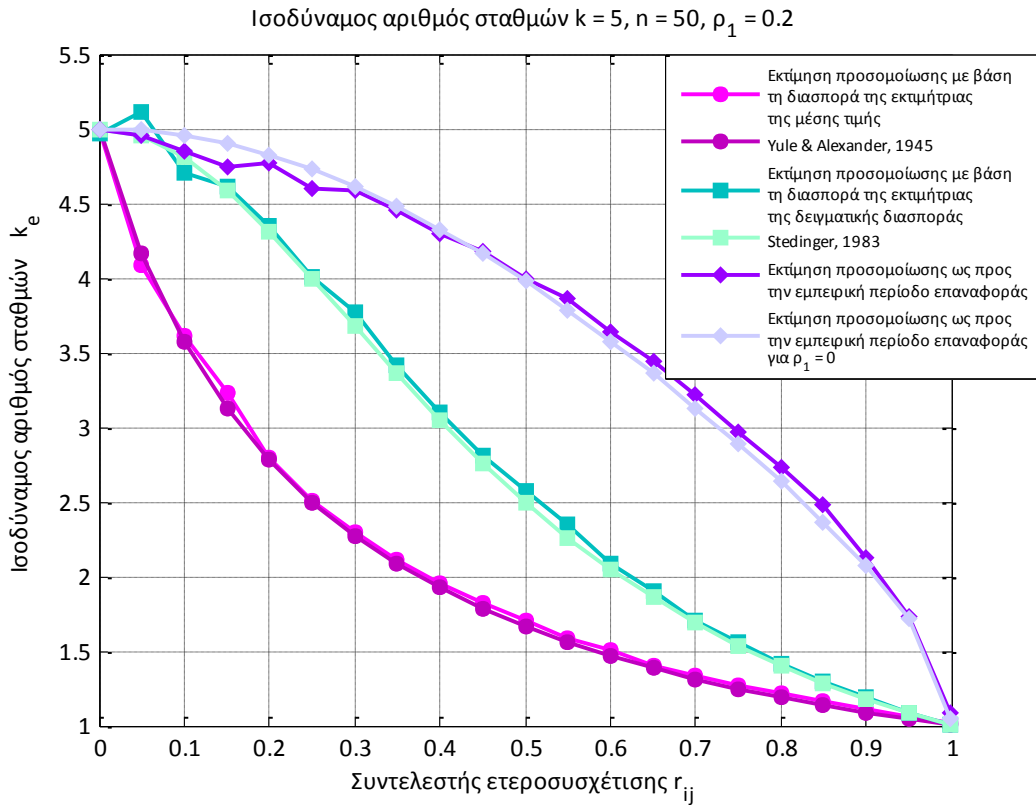
Σχήμα Γ.19: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



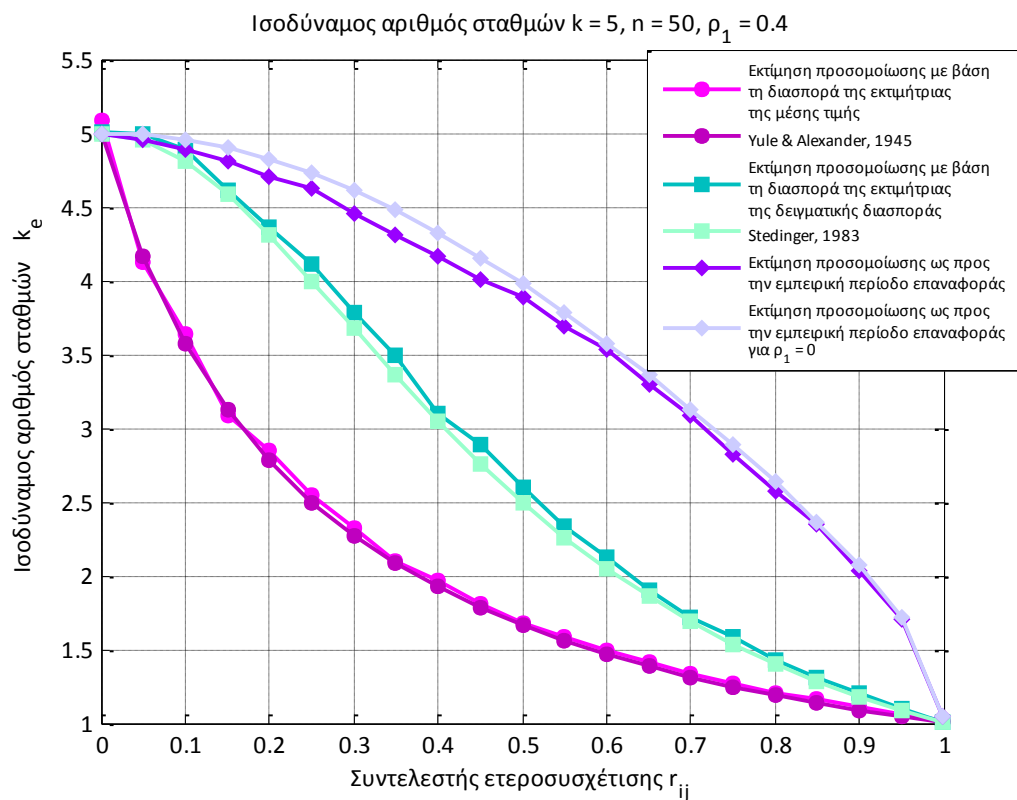
Σχήμα Γ.20: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



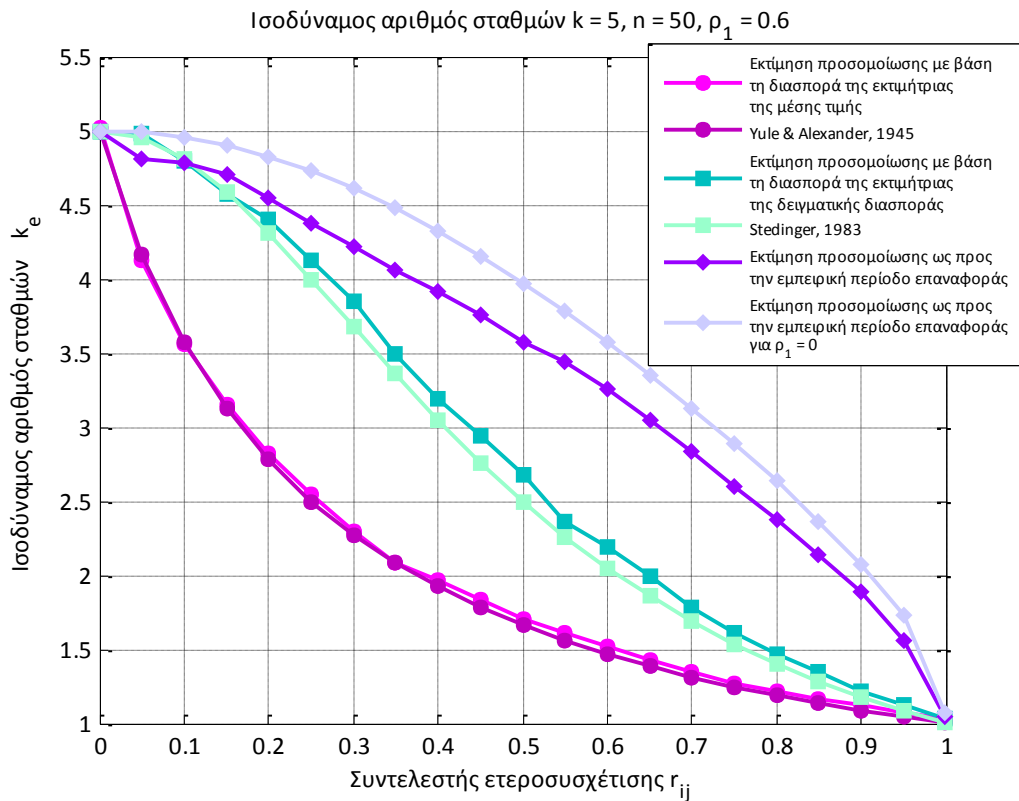
Σχήμα Γ.21: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



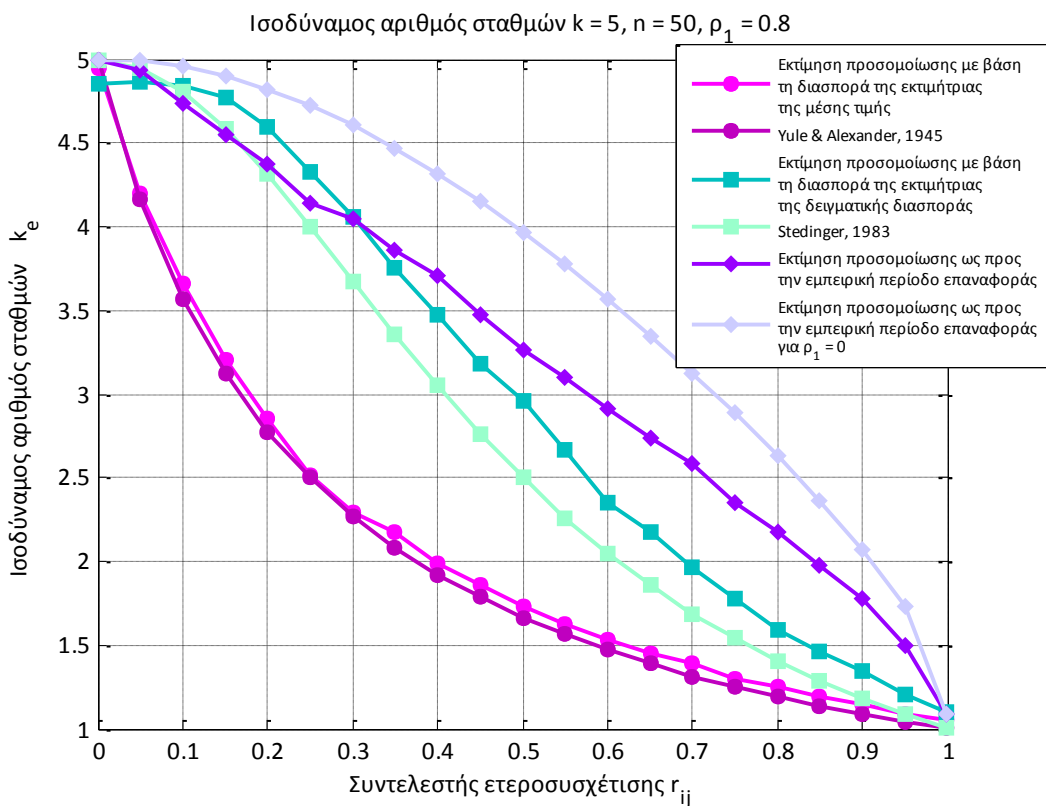
Σχήμα Γ.22: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



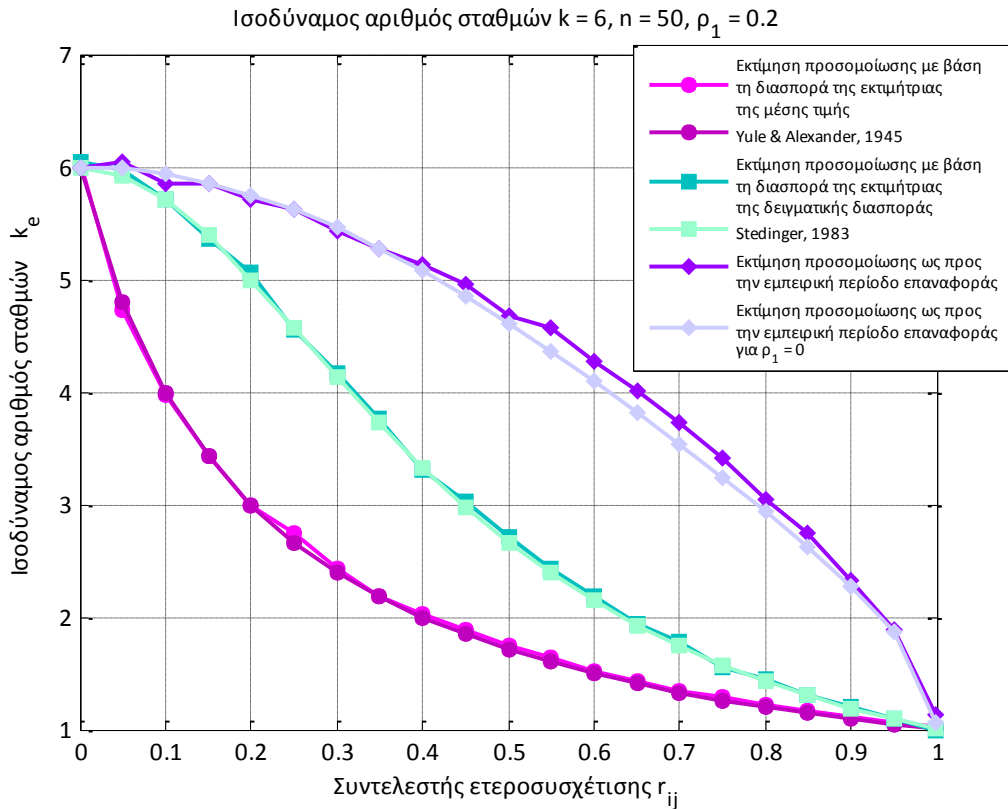
Σχήμα Γ.23: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



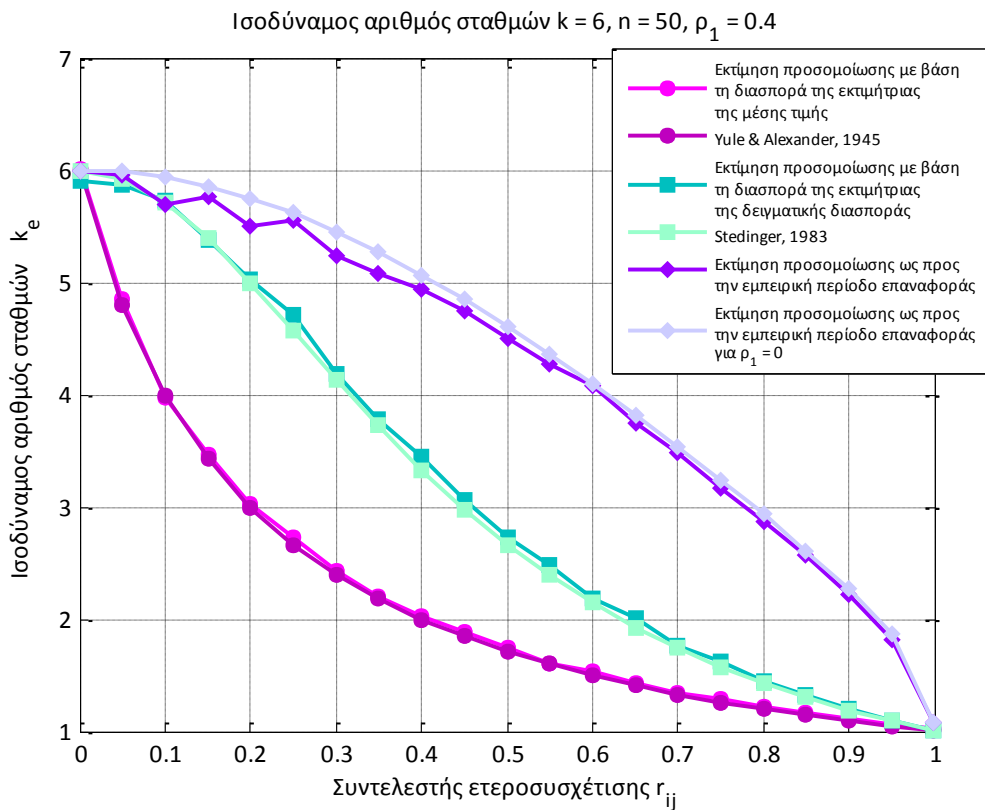
Σχήμα Γ.24: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



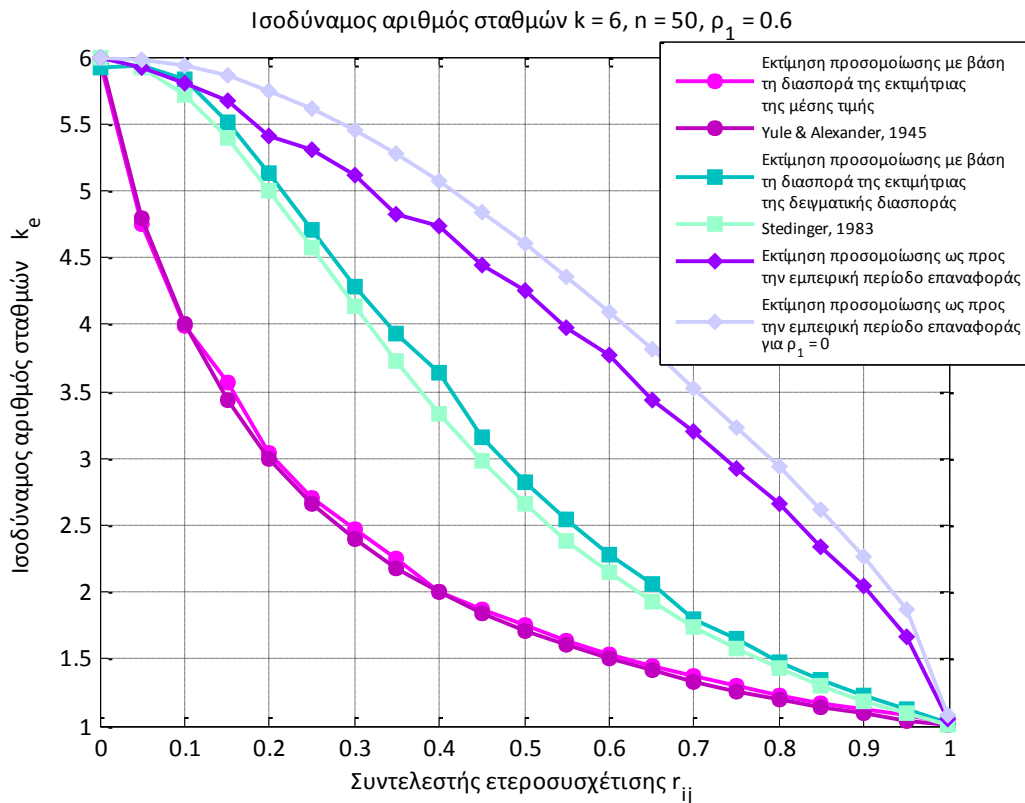
Σχήμα Γ.25: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



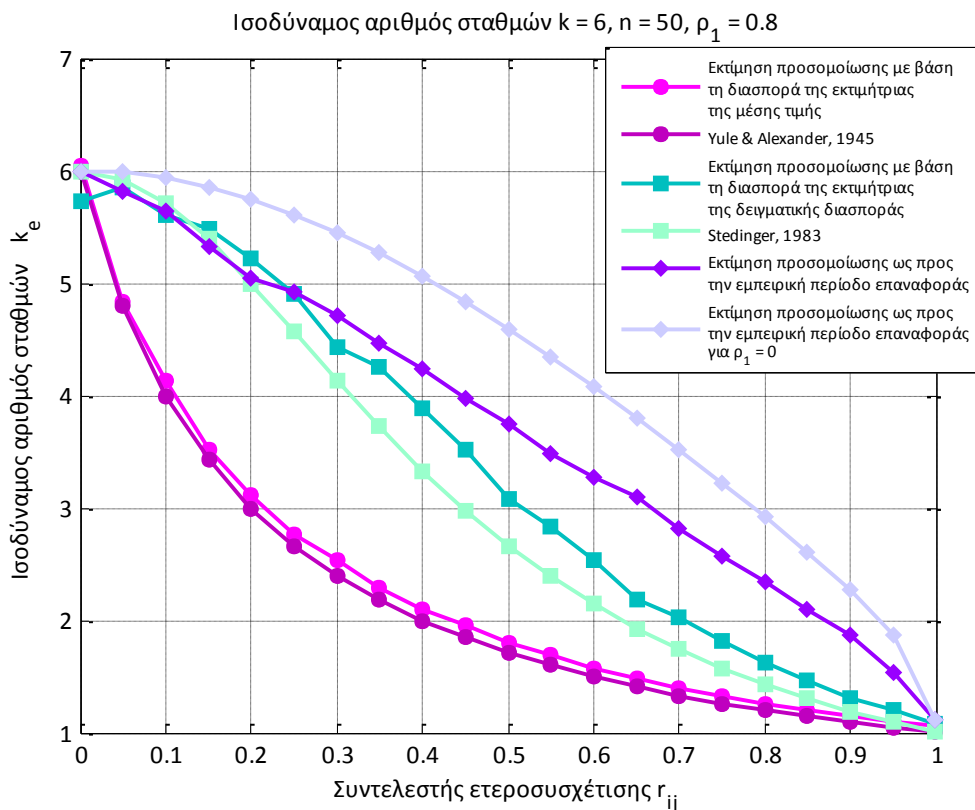
Σχήμα Γ.26: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



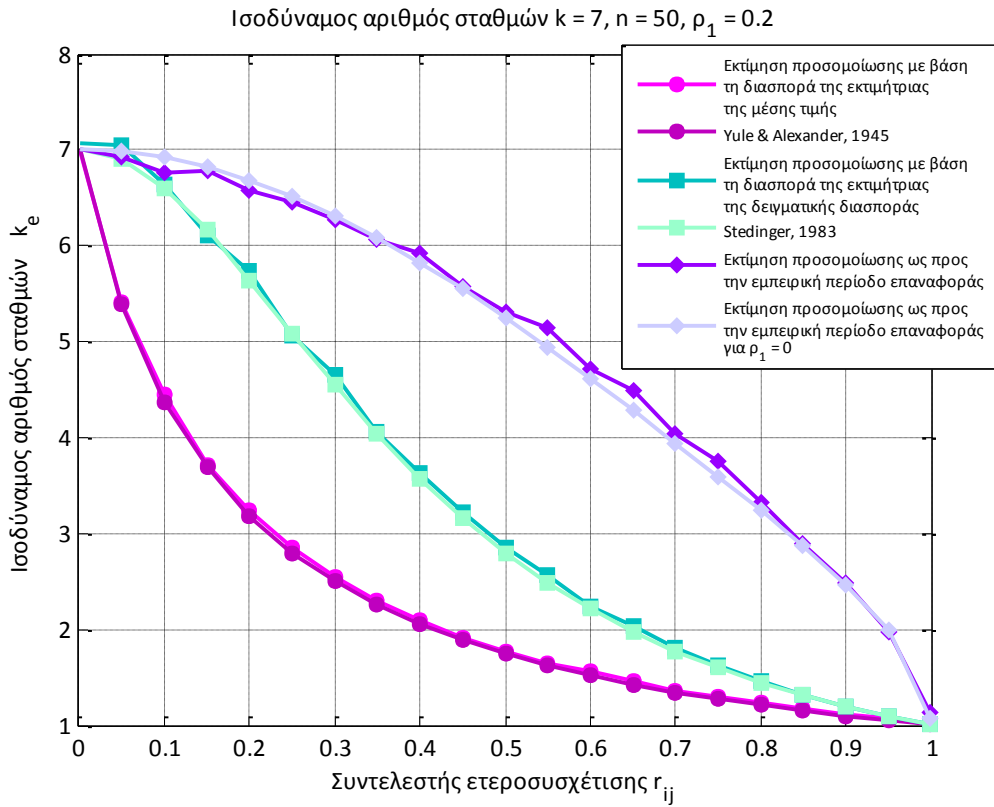
Σχήμα Γ.27: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



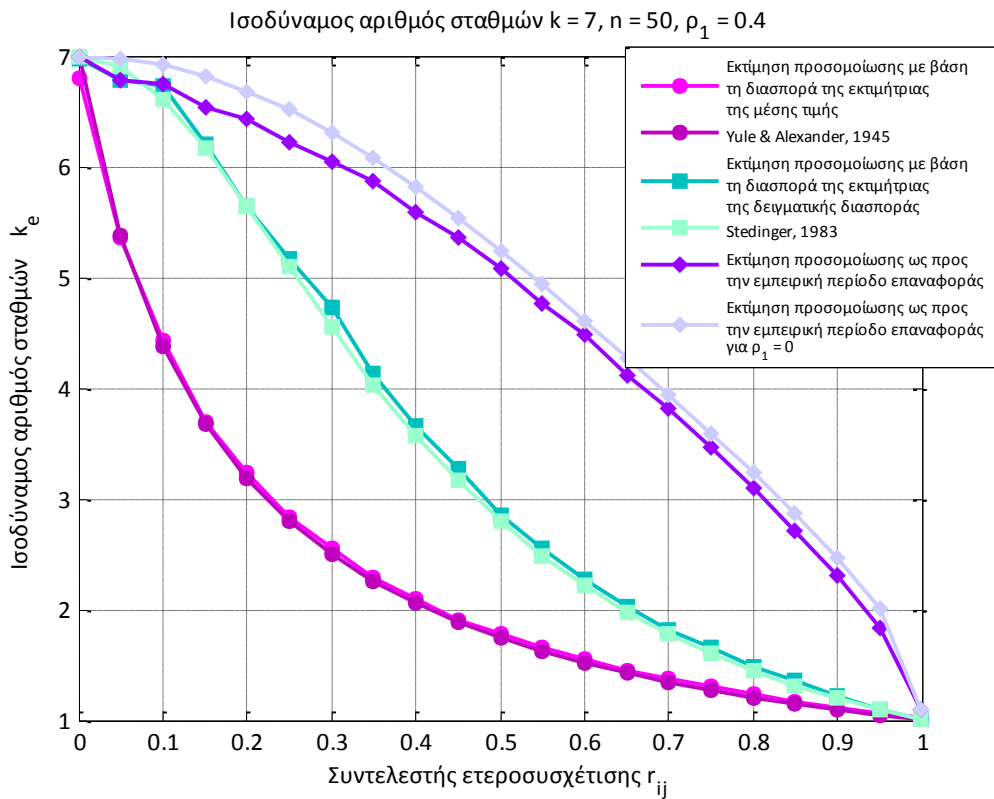
Σχήμα Γ.28: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



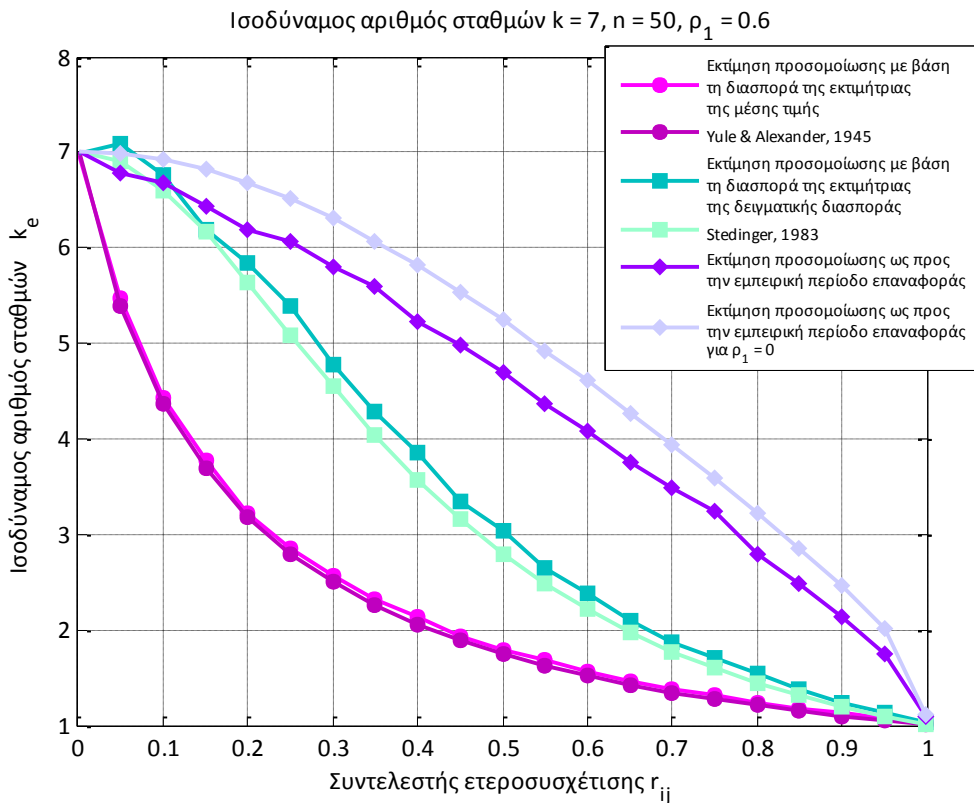
Σχήμα Γ.29: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



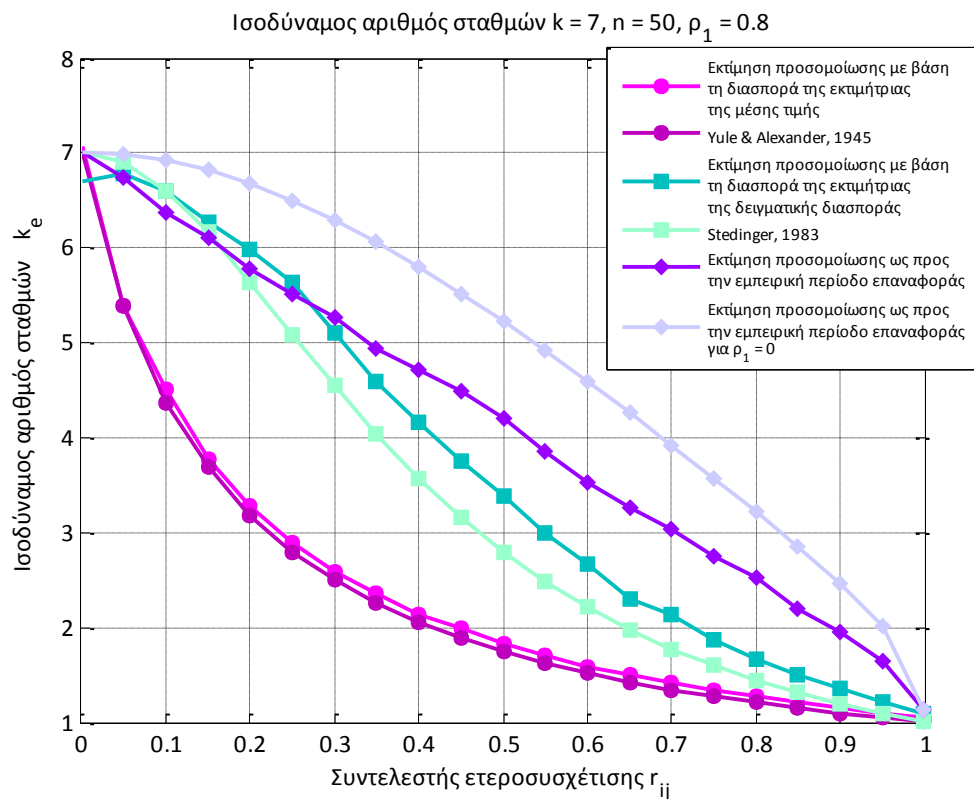
Σχήμα Γ.30: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



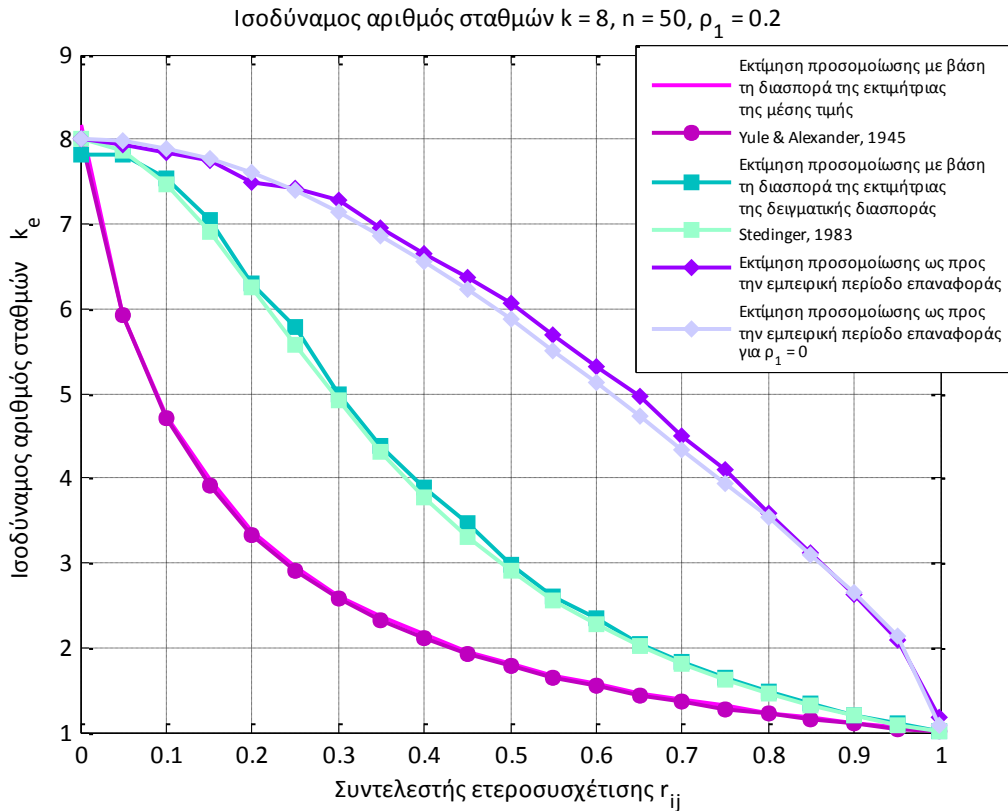
Σχήμα Γ.31: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



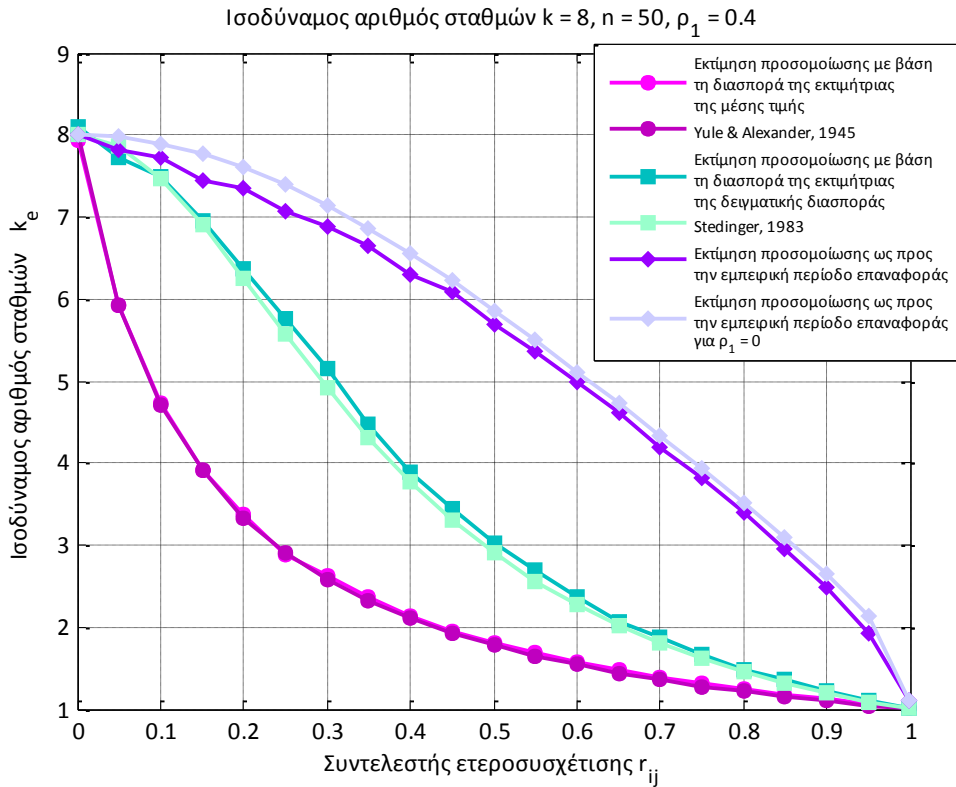
Σχήμα Γ.32: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



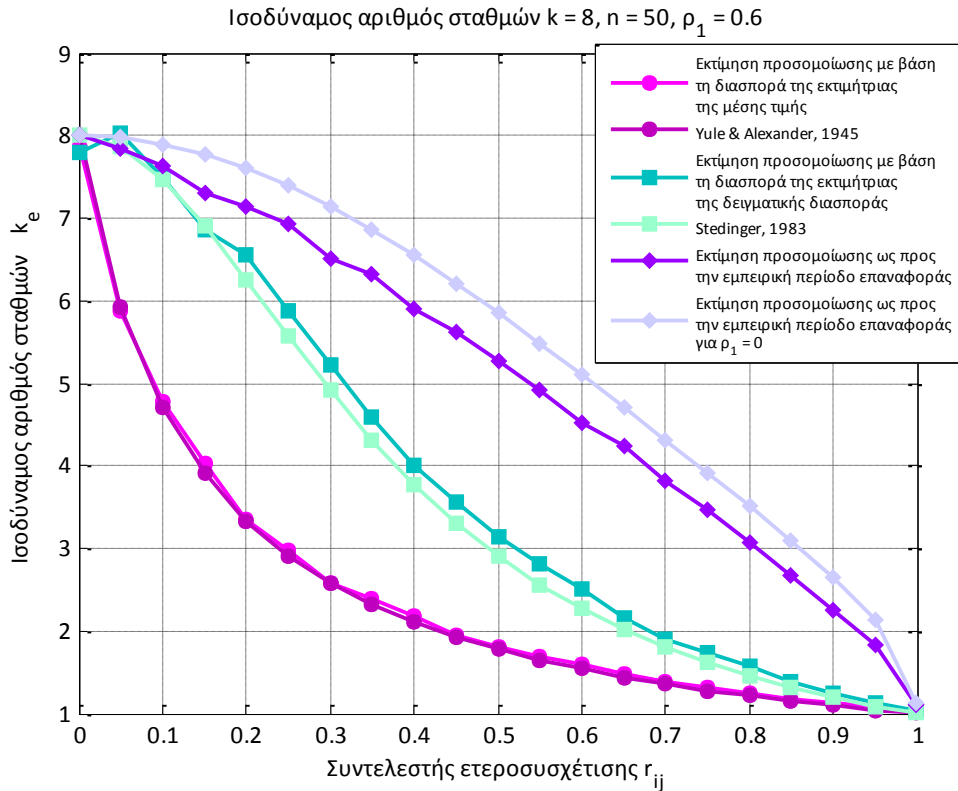
Σχήμα Γ.33: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



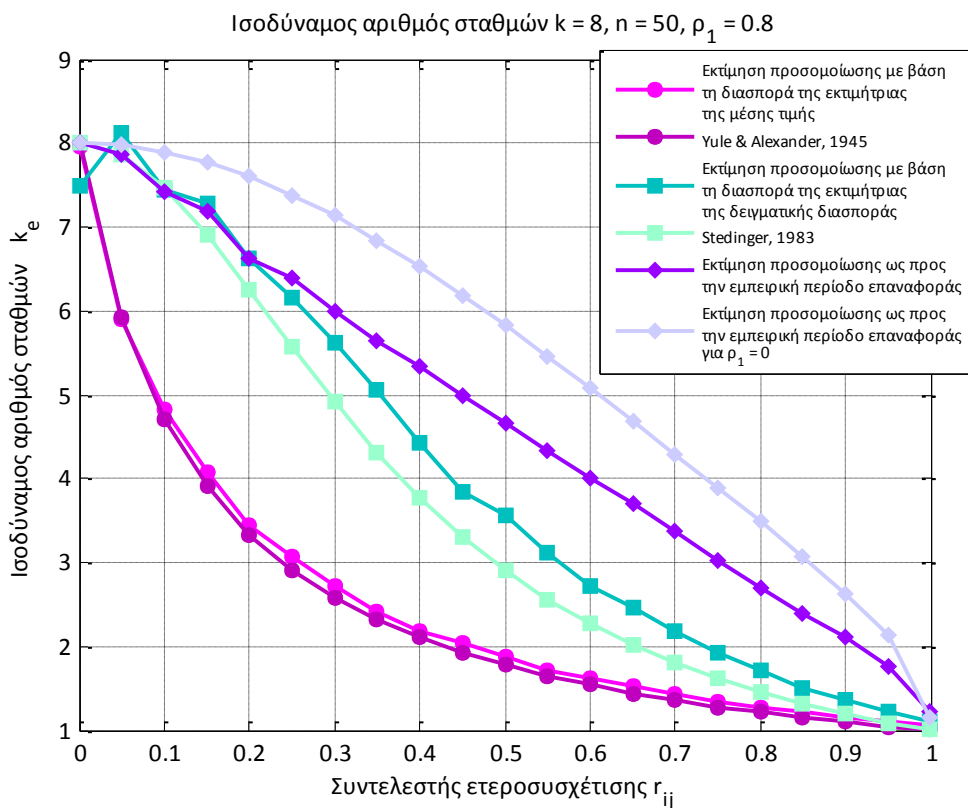
Σχήμα Γ.34: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



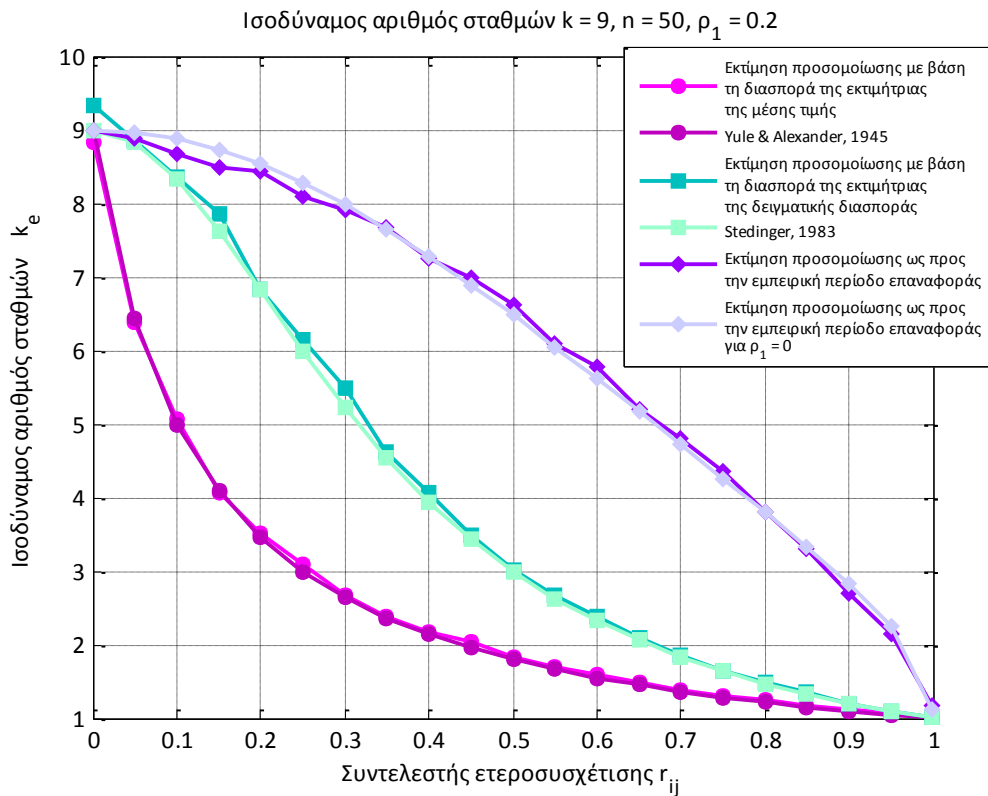
Σχήμα Γ.35: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



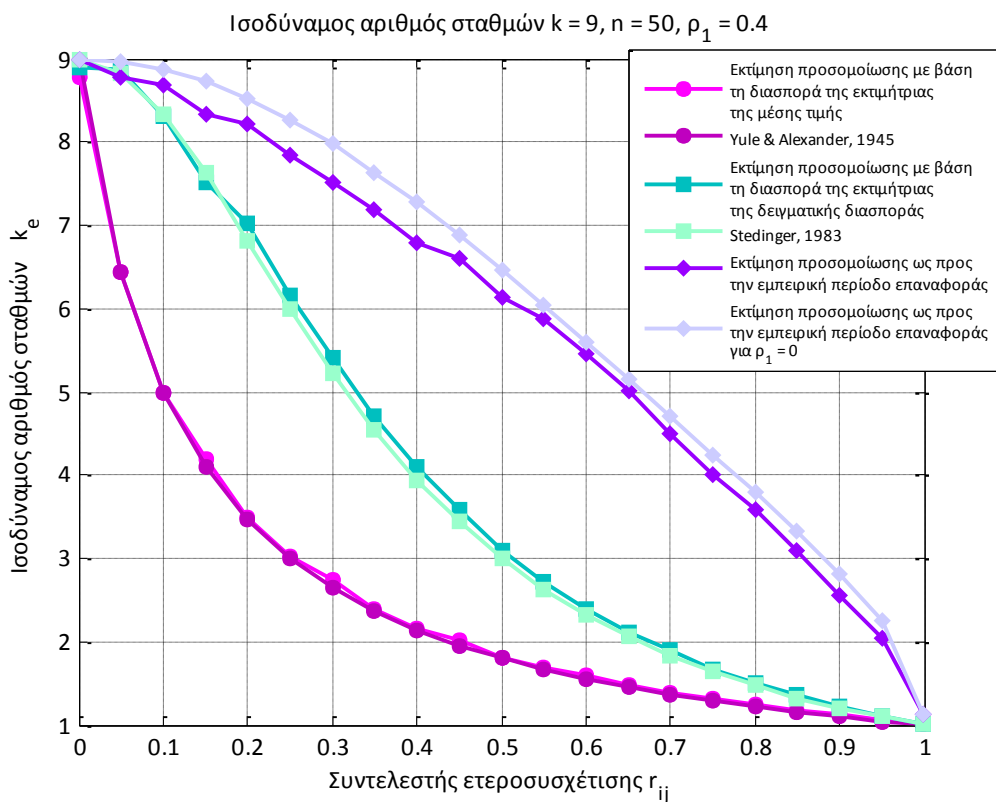
Σχήμα Γ.36: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



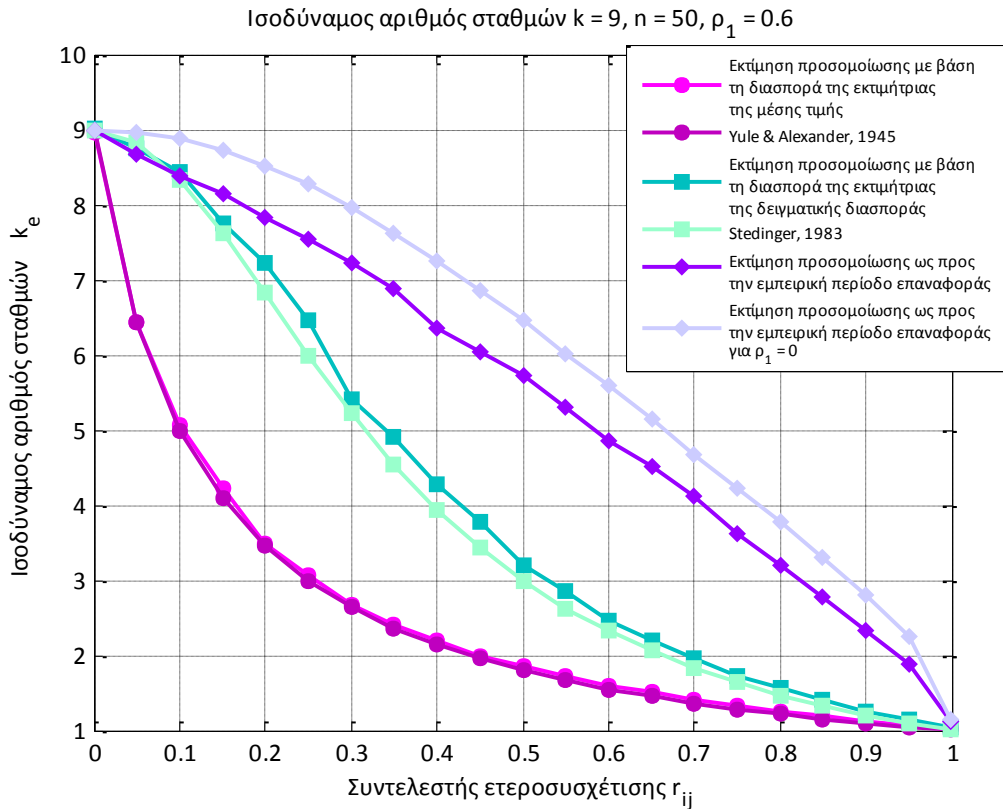
Σχήμα Γ.37: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



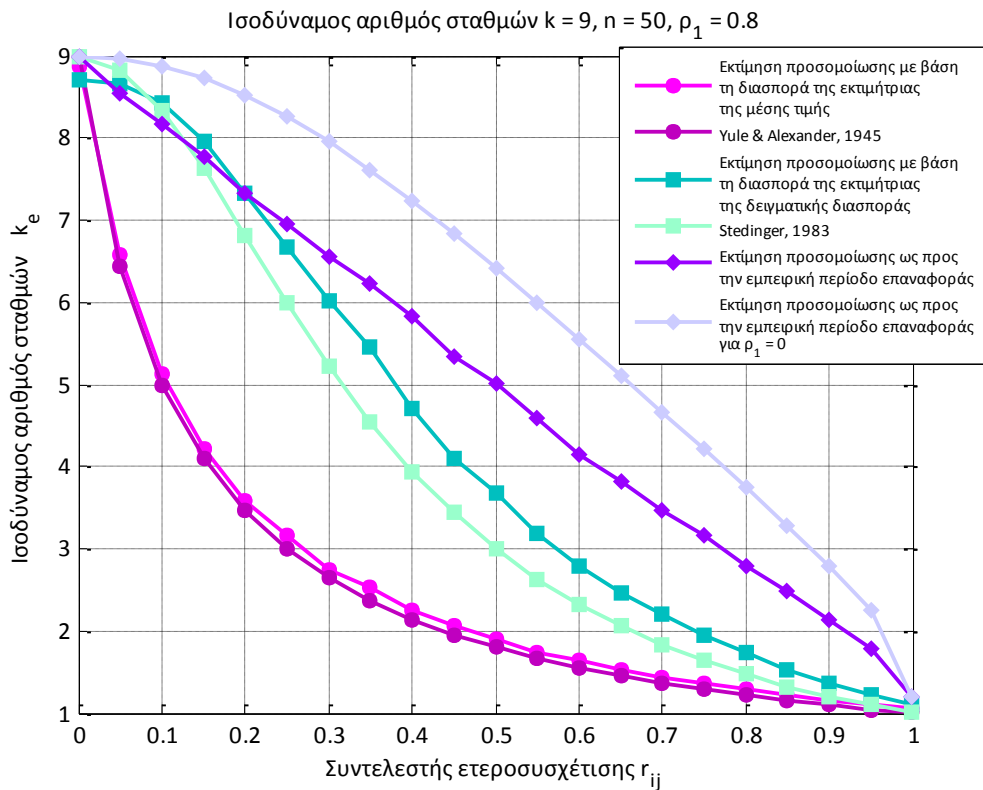
Σχήμα Γ.38: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



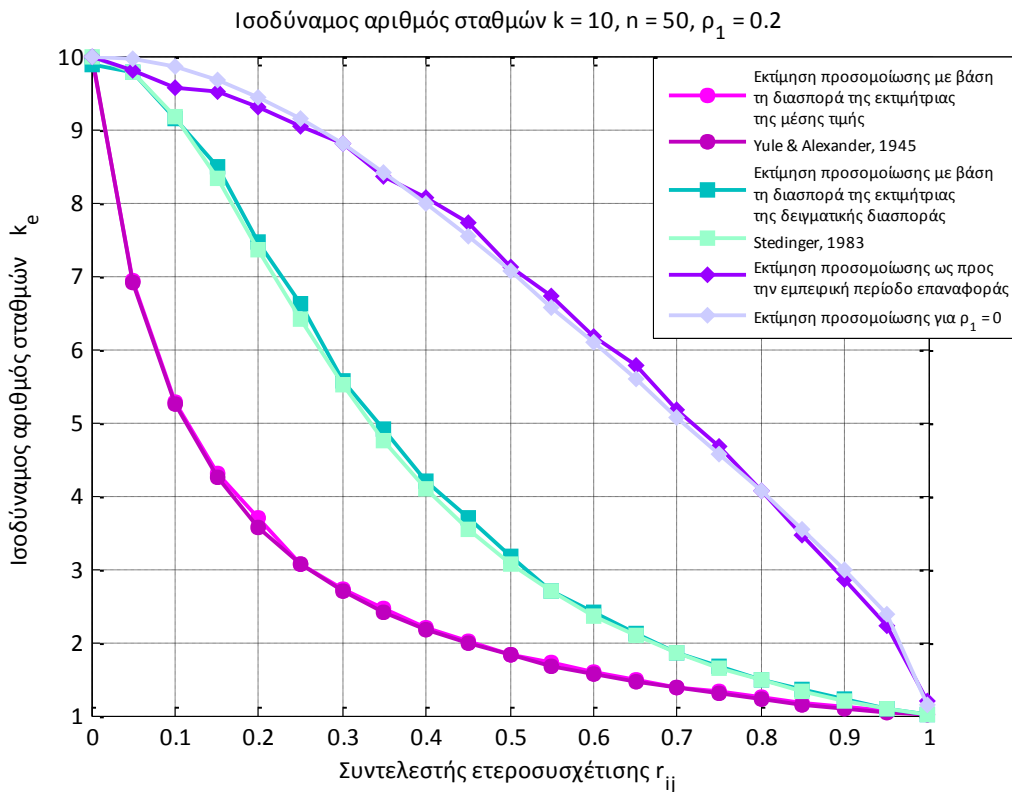
Σχήμα Γ.39: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



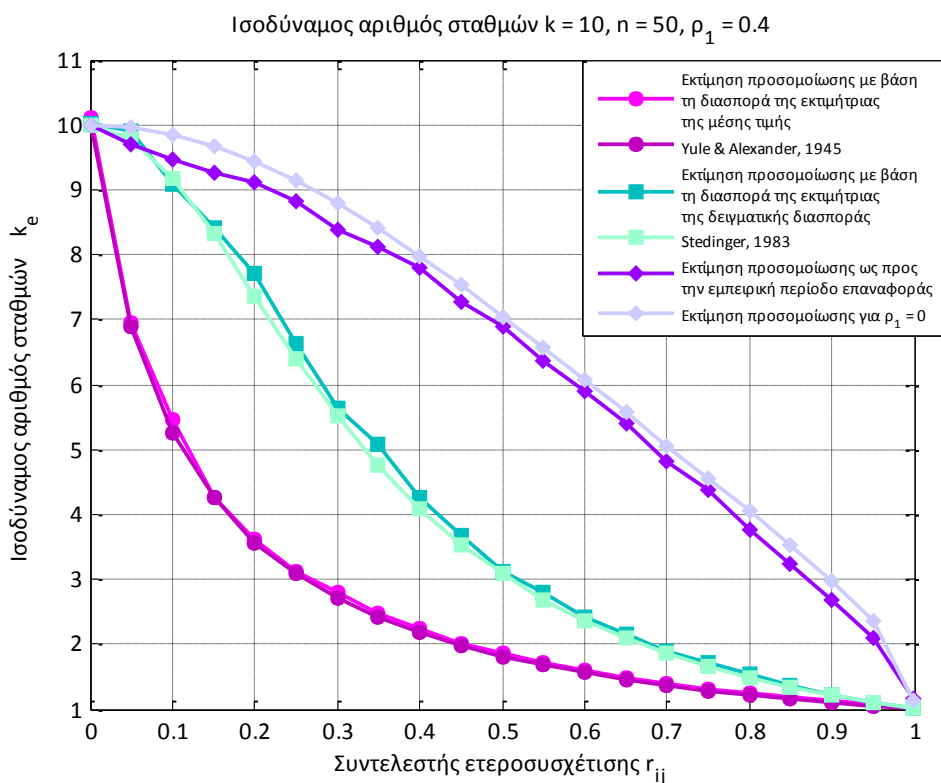
Σχήμα Γ.40: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



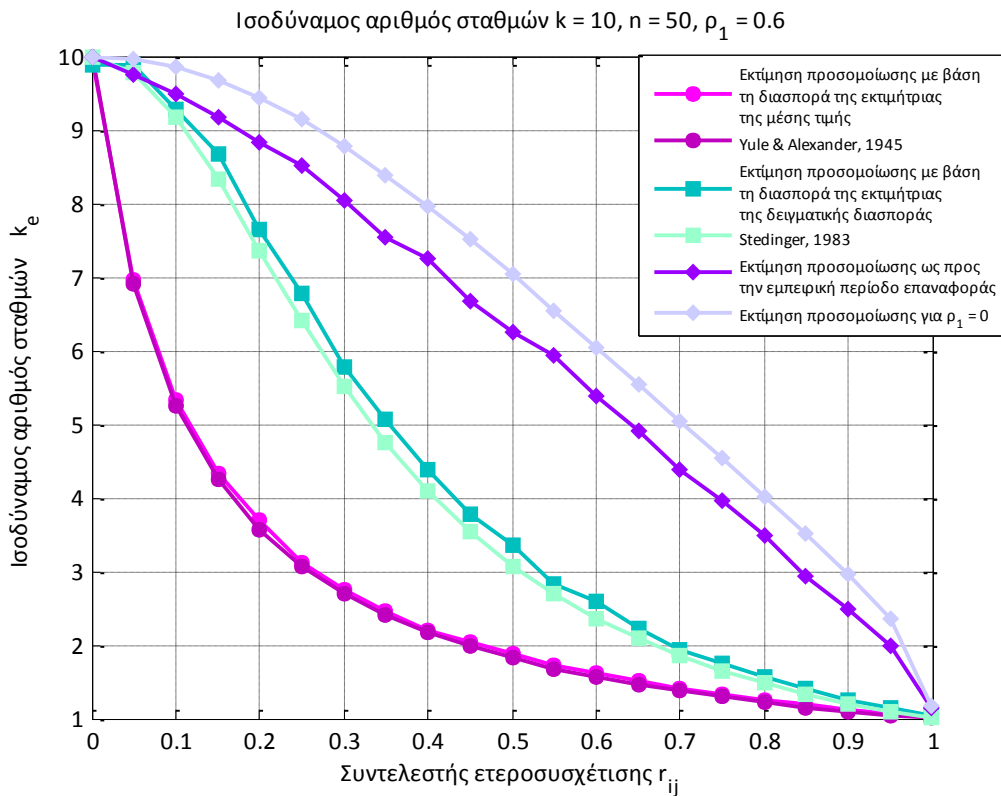
Σχήμα Γ.41: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



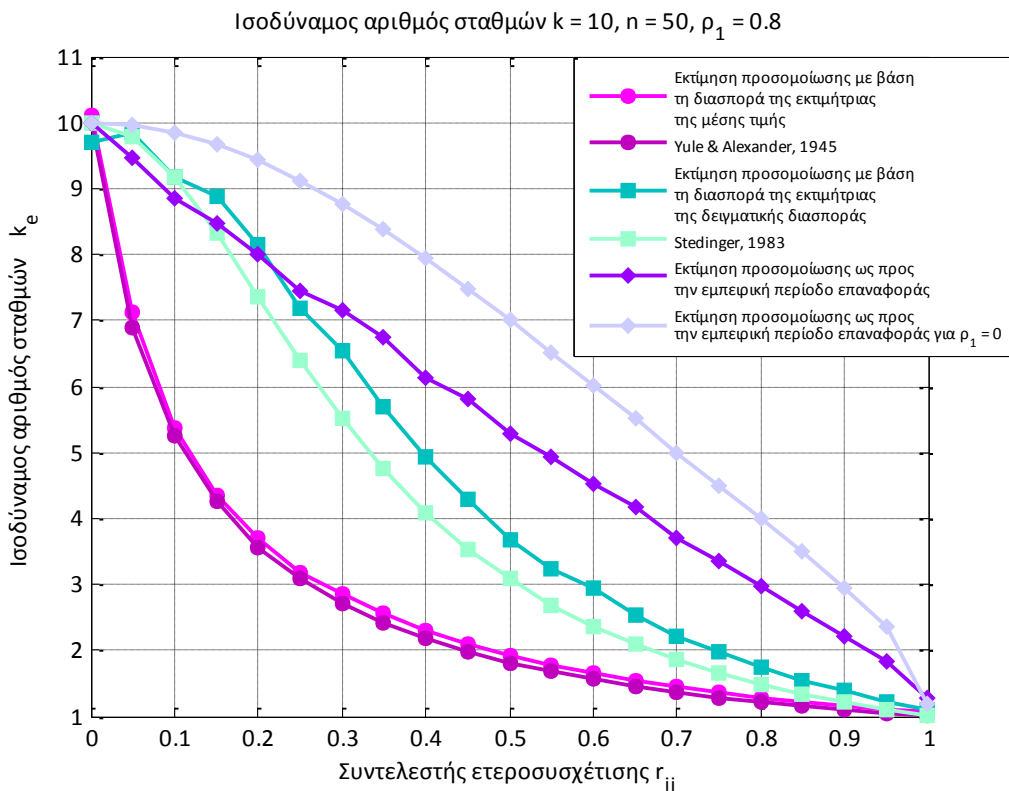
Σχήμα Γ.42: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα Γ.43: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

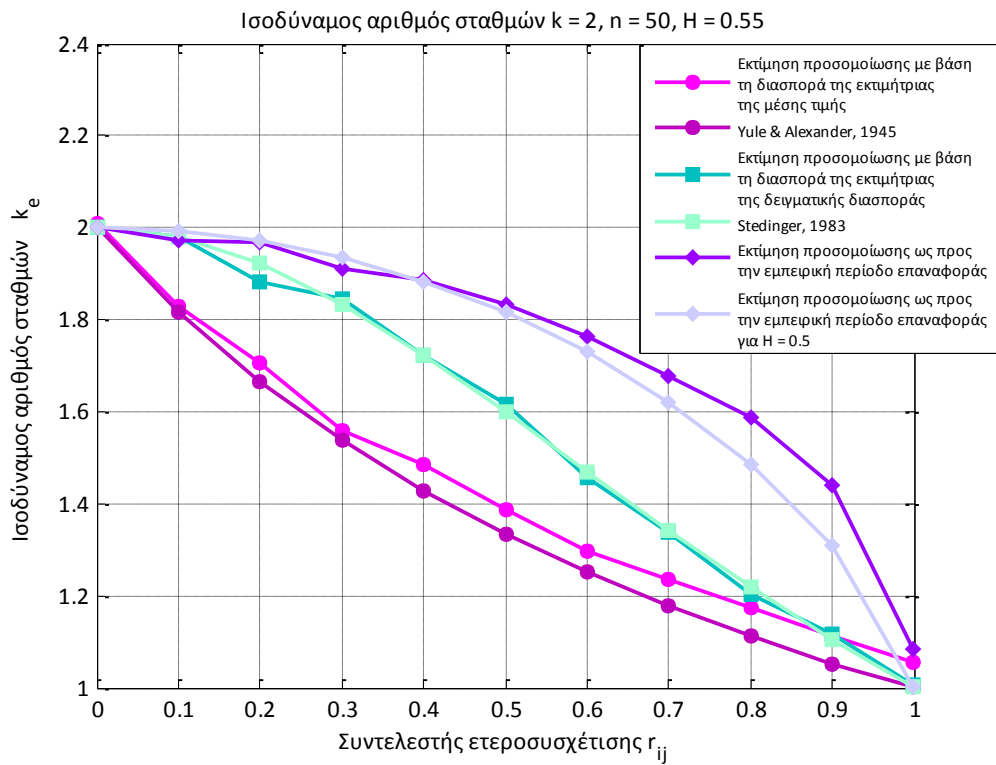


Σχήμα Γ.44: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

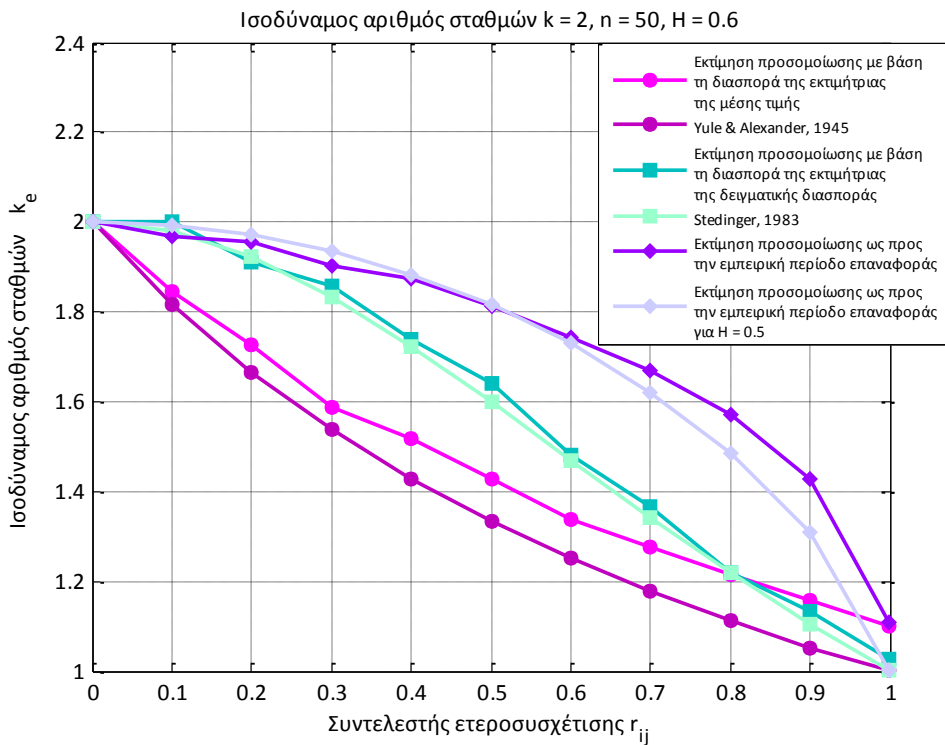


Σχήμα Γ.45: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

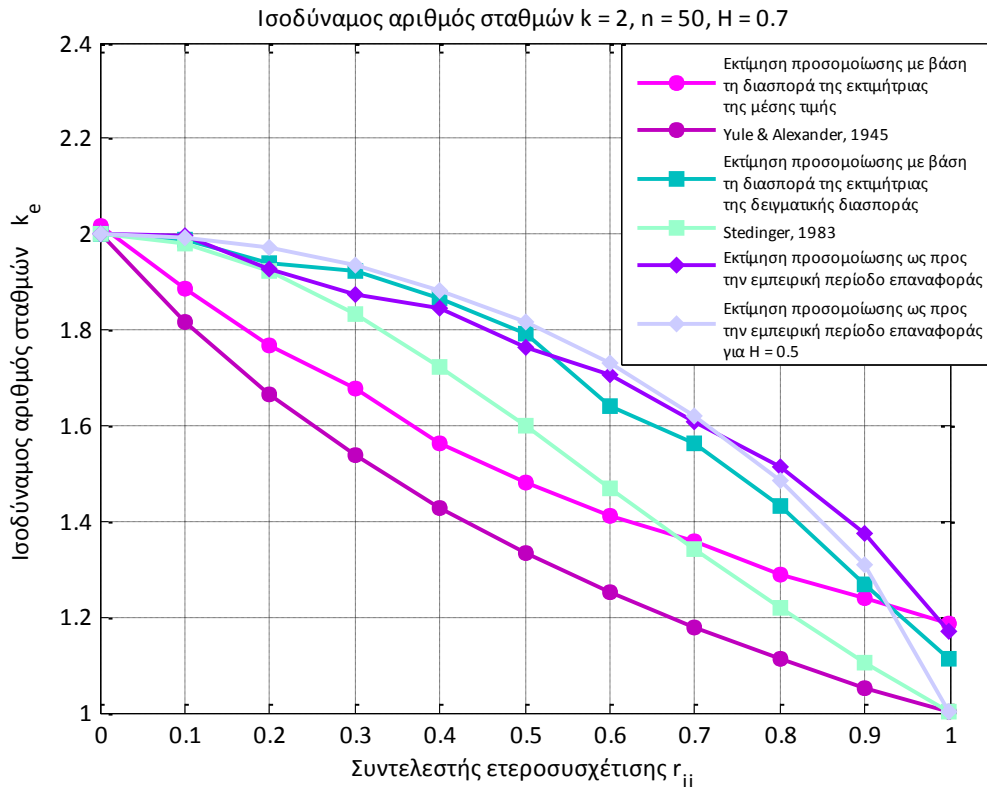
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών (Ανεπίξεις Απλής Ομοιοθεσίας)



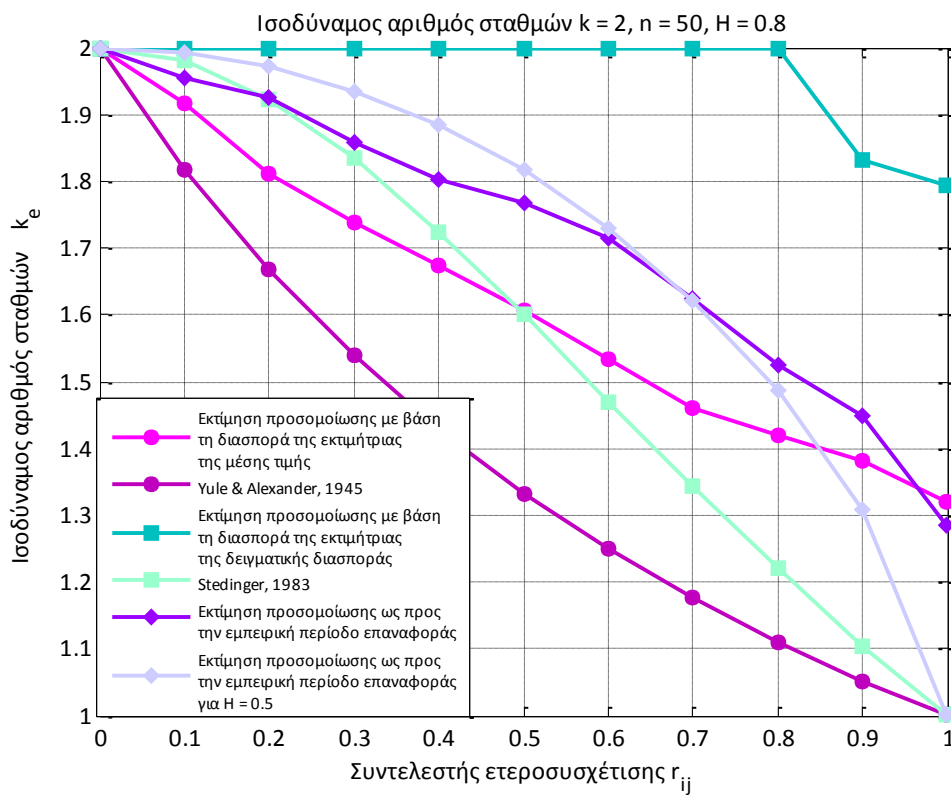
Σχήμα Γ.46: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



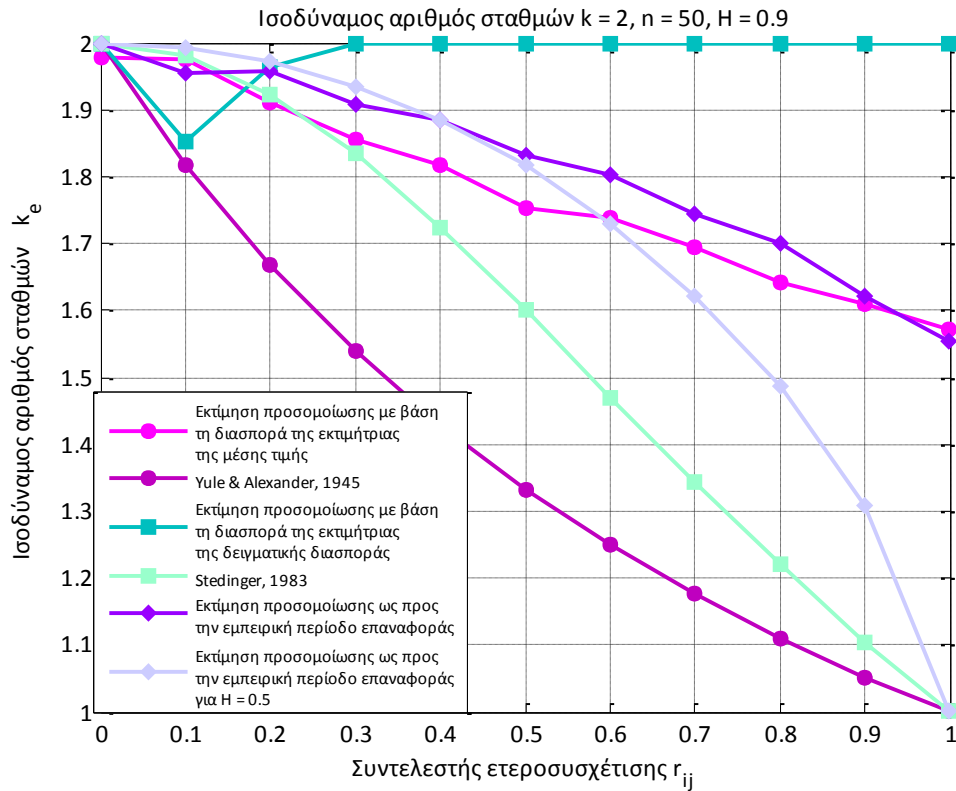
Σχήμα Γ.47: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



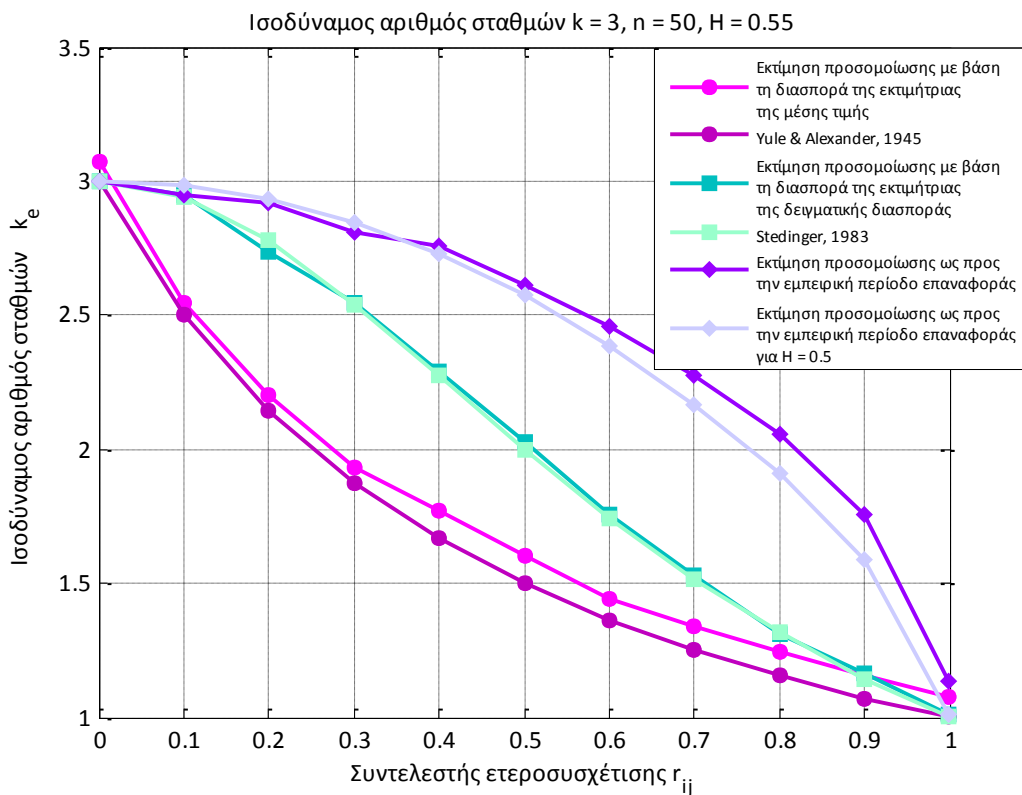
Σχήμα Γ.48: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



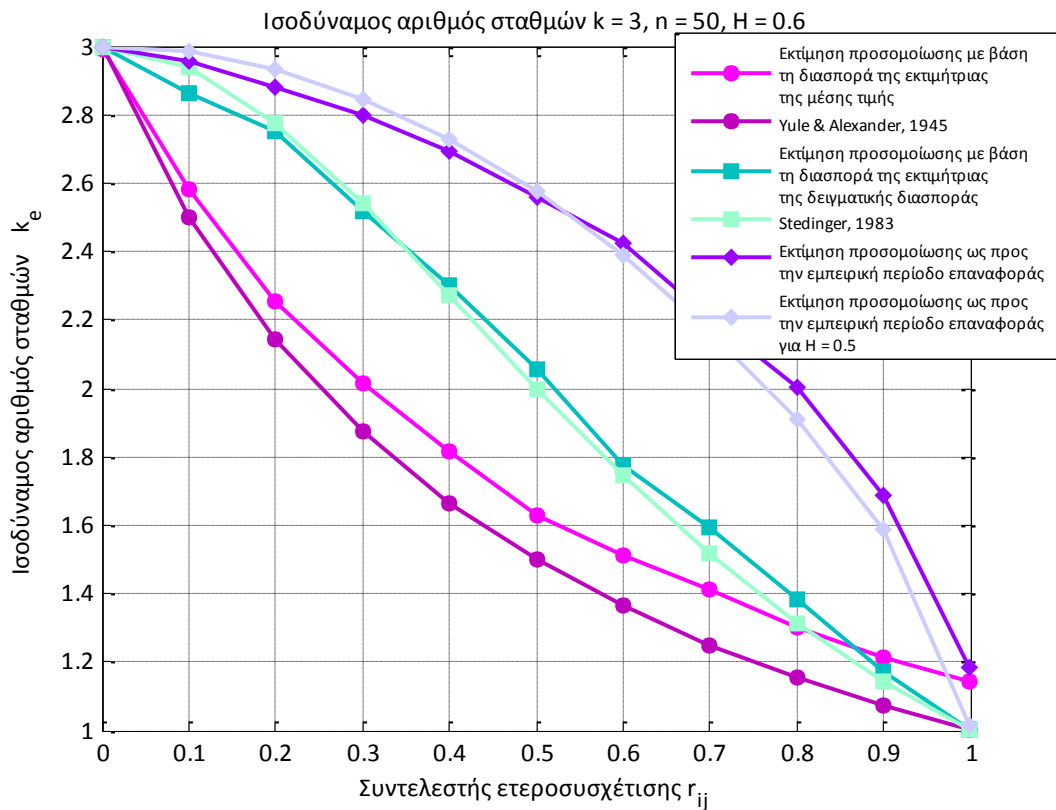
Σχήμα Γ.49: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



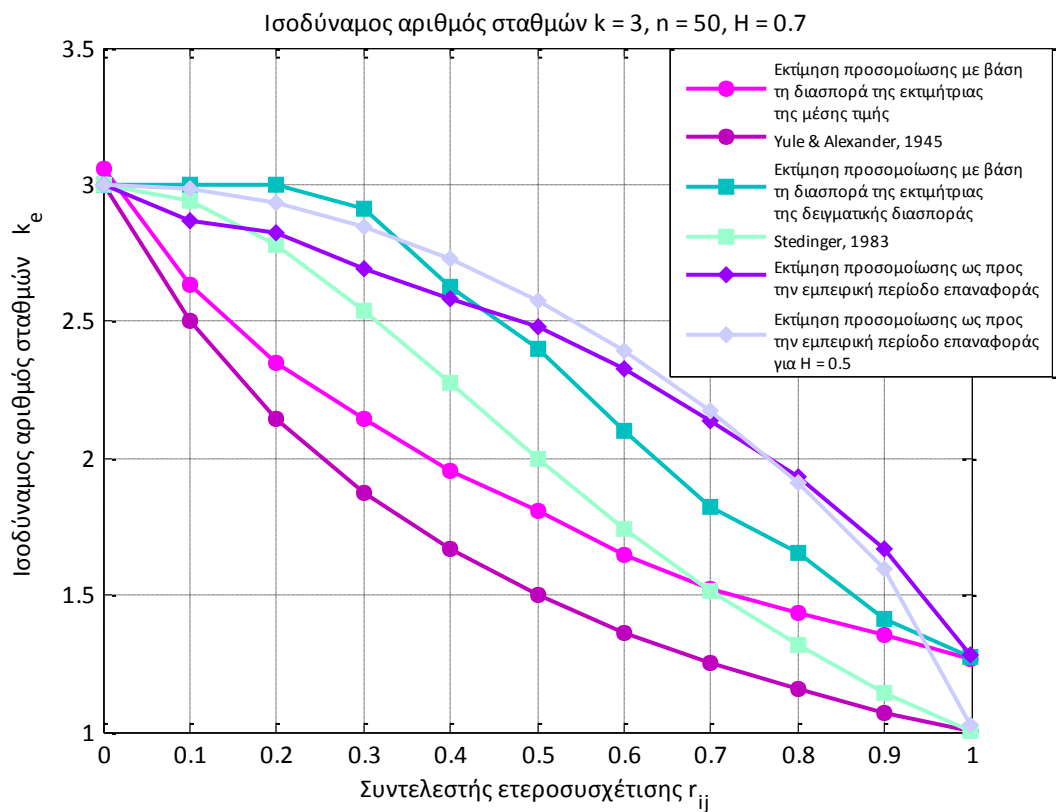
Σχήμα Γ.50: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



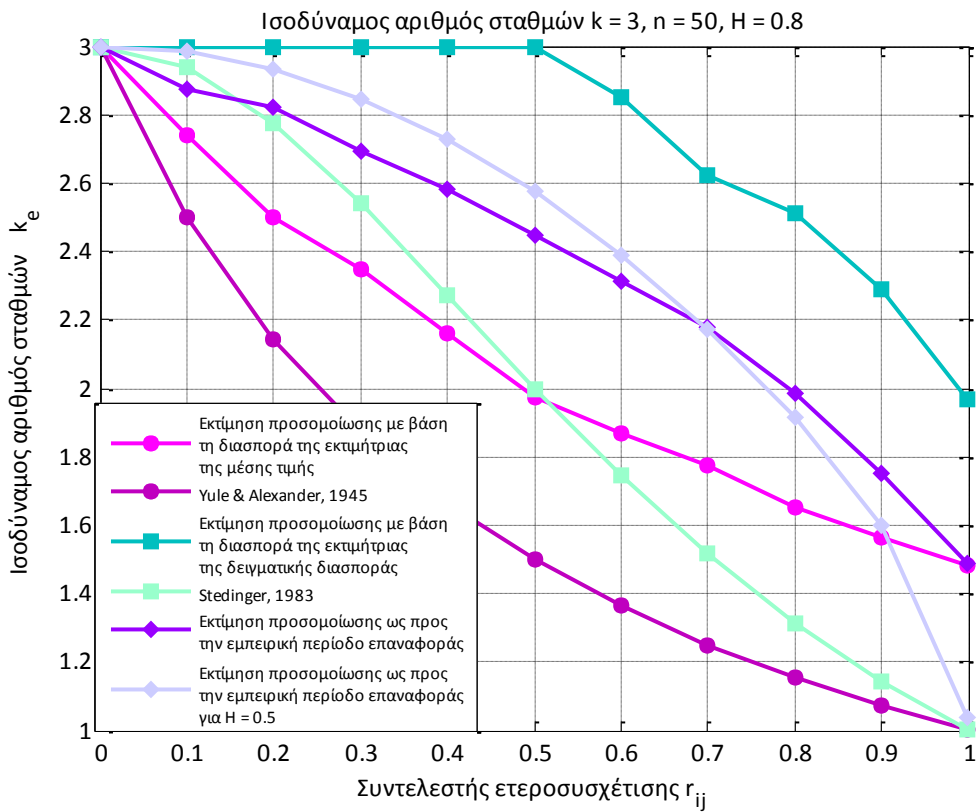
Σχήμα Γ.51: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



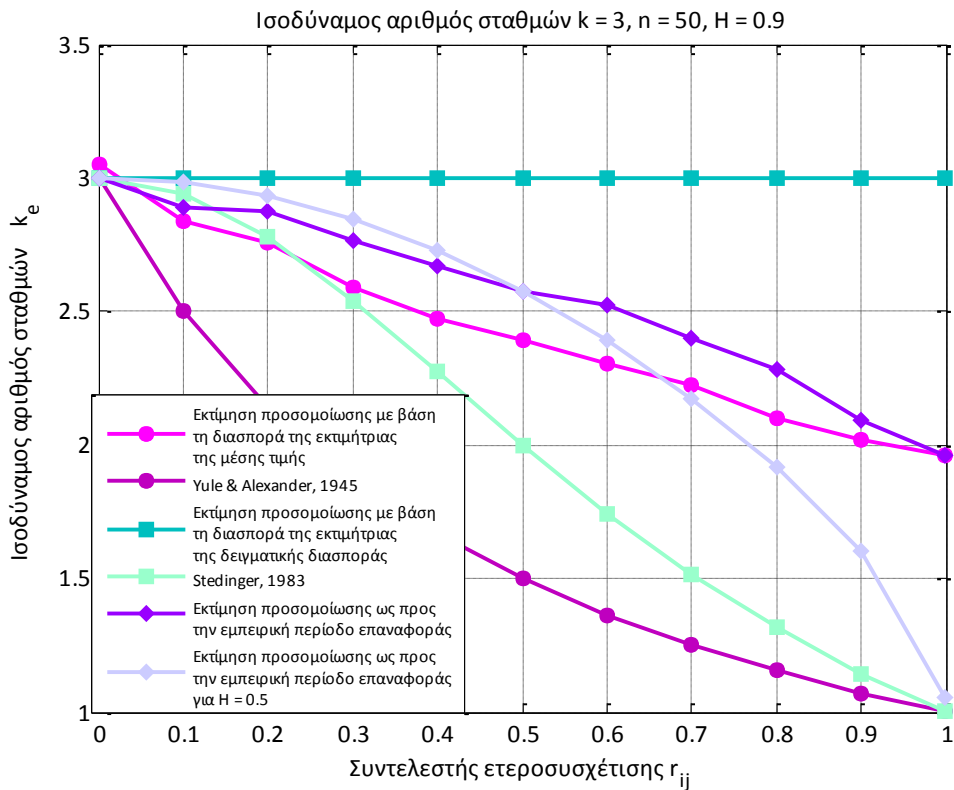
Σχήμα Γ.52: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



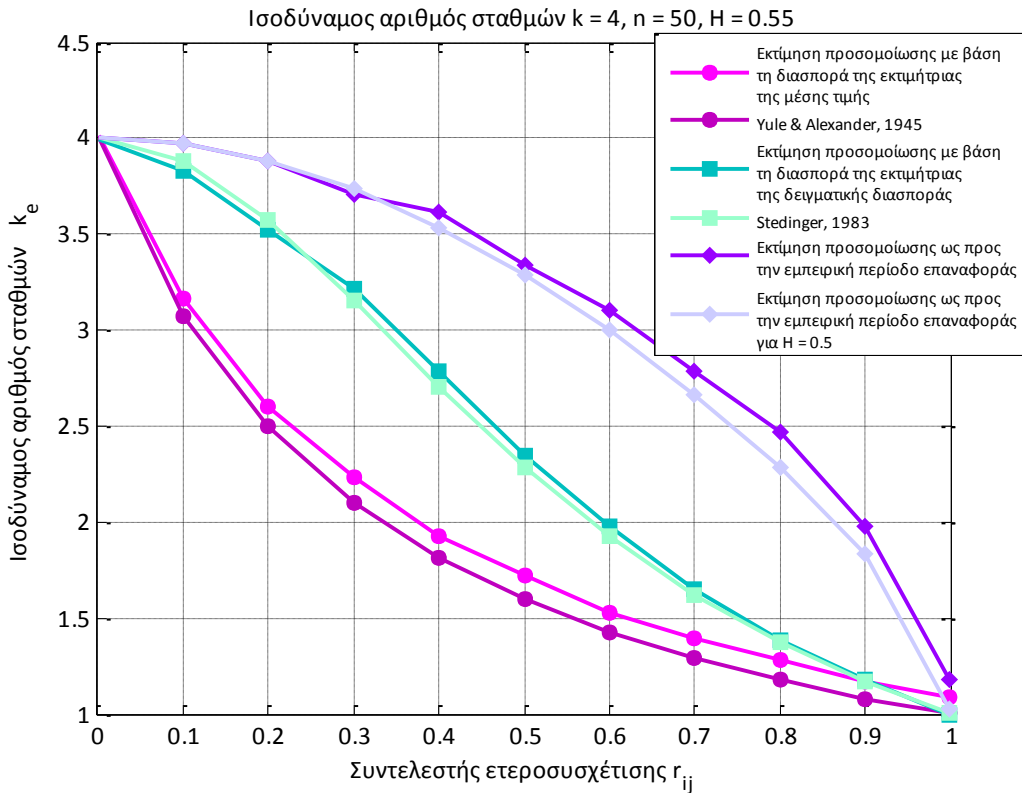
Σχήμα Γ.53: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



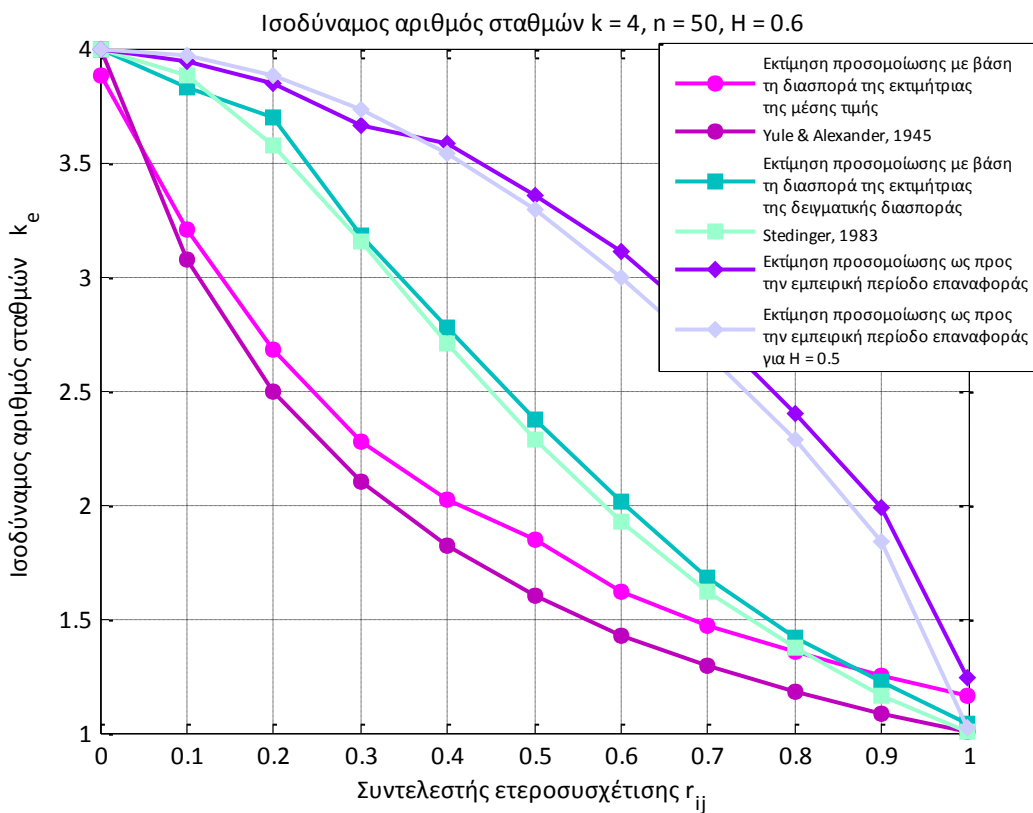
Σχήμα Γ.54: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



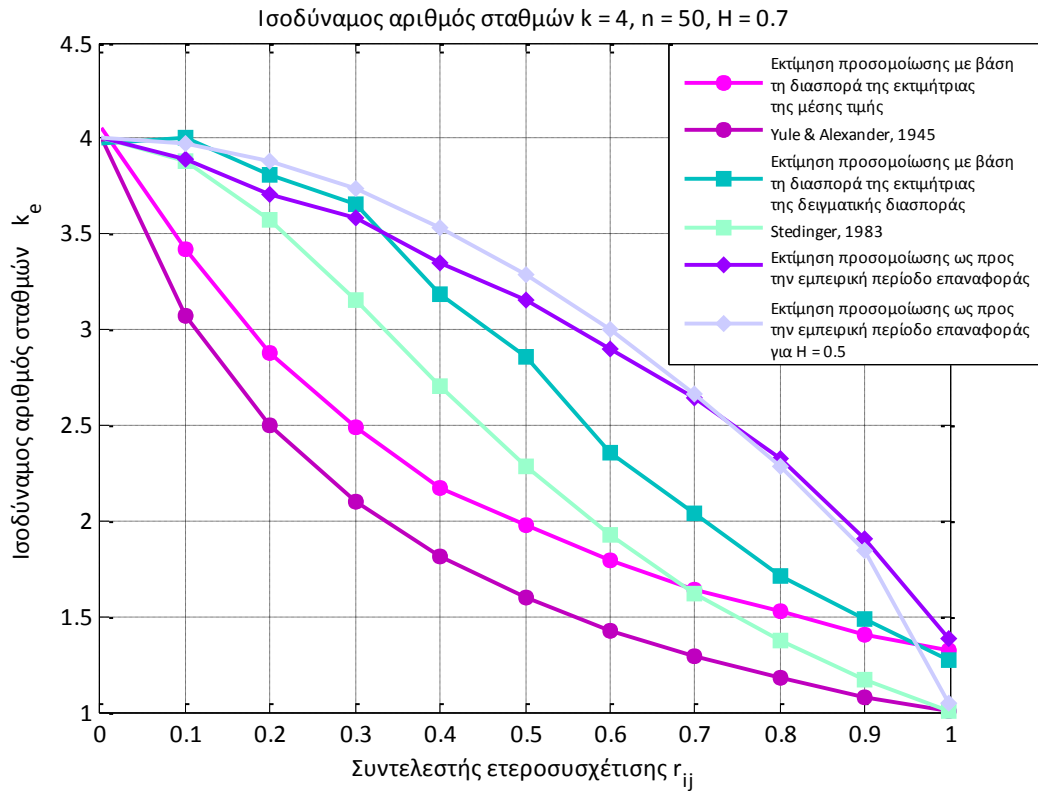
Σχήμα Γ.55: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



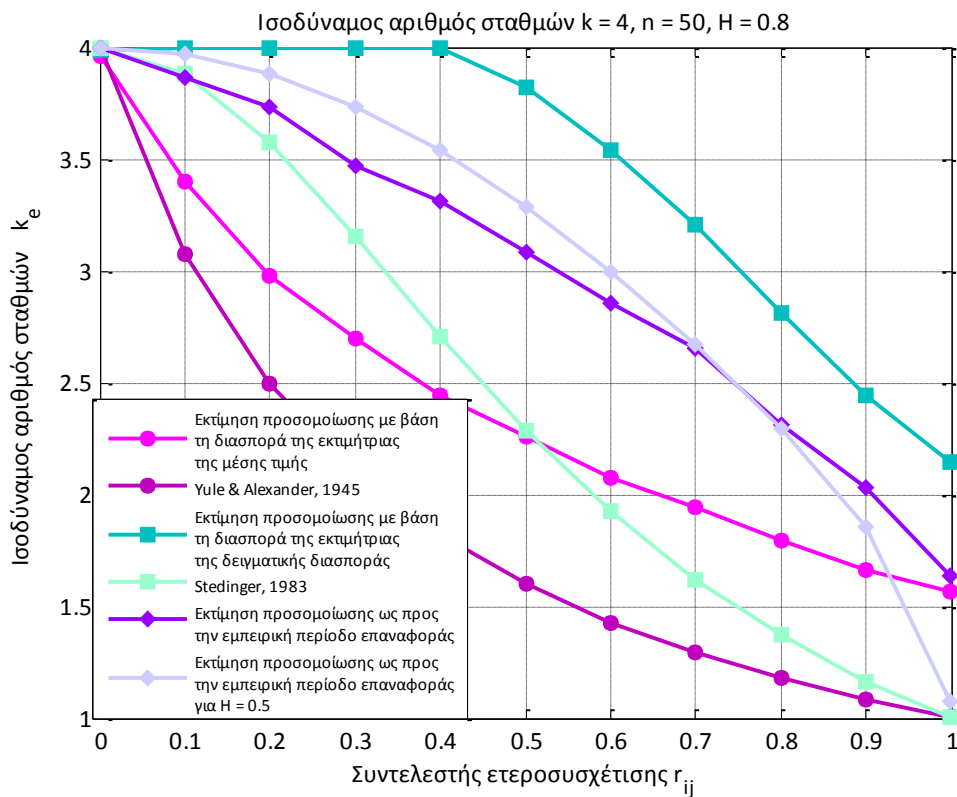
Σχήμα Γ.56: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



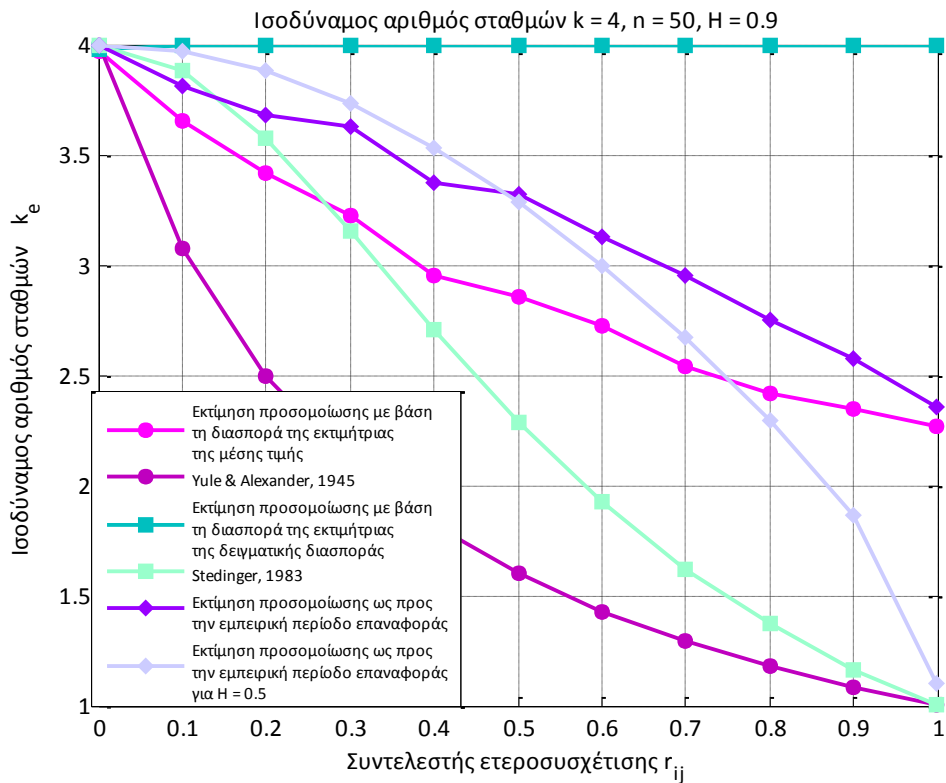
Σχήμα Γ.57: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



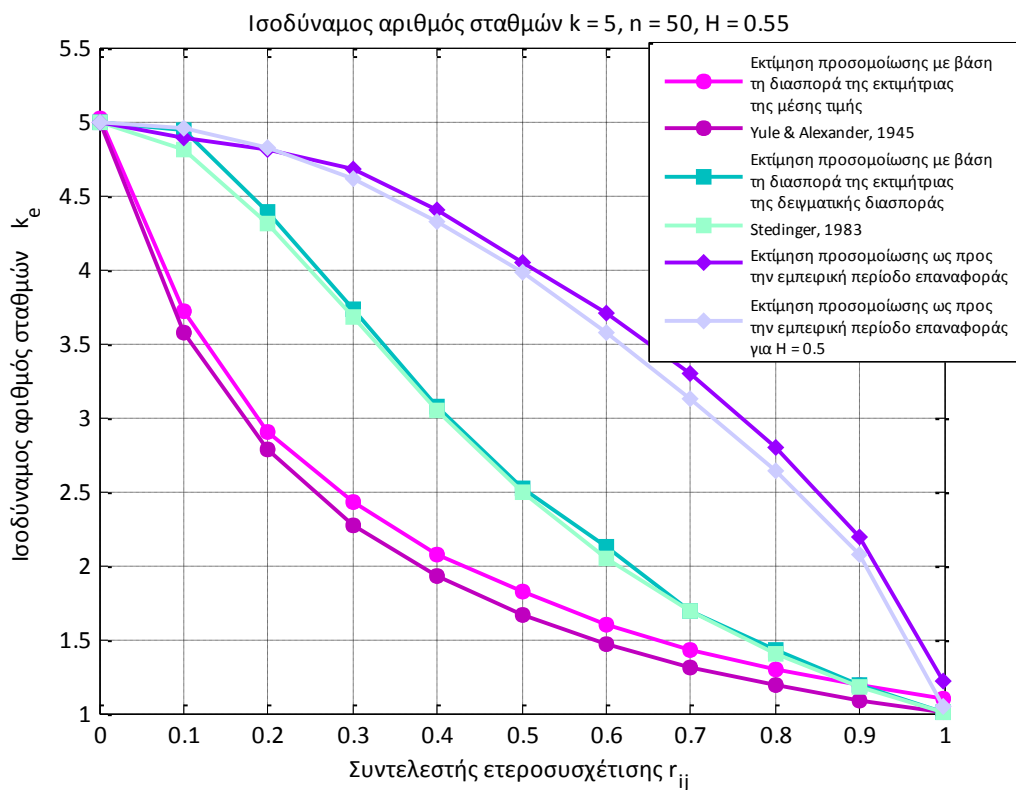
Σχήμα Γ.58: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



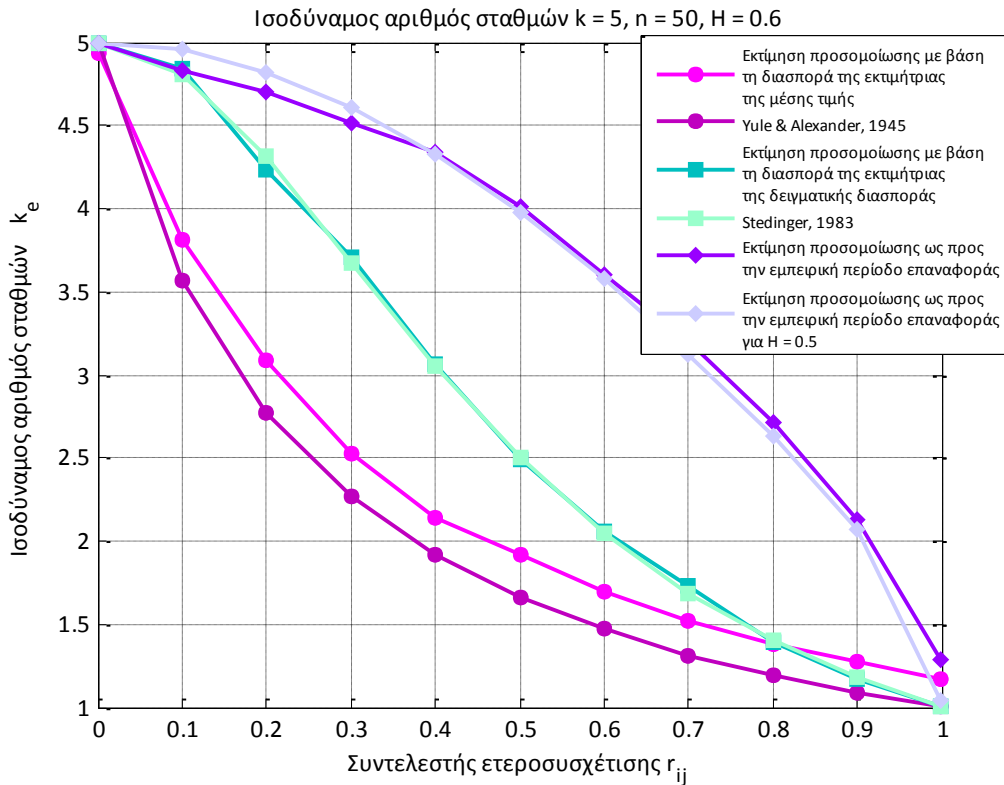
Σχήμα Γ.59: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



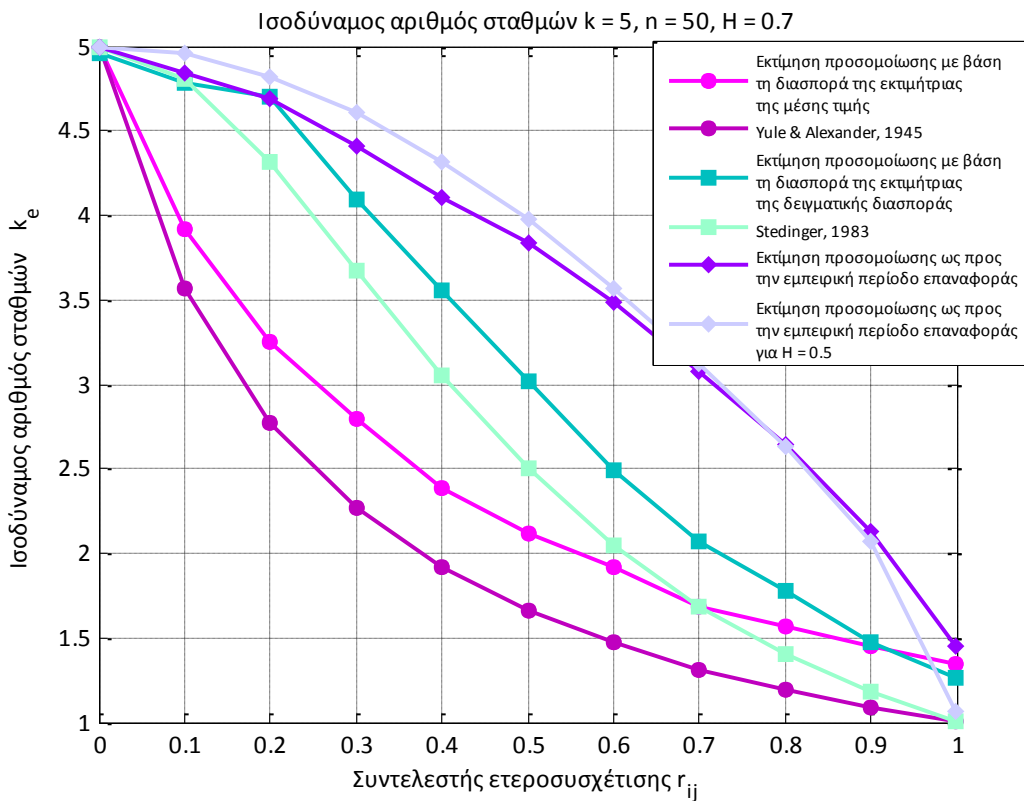
Σχήμα Γ.60: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



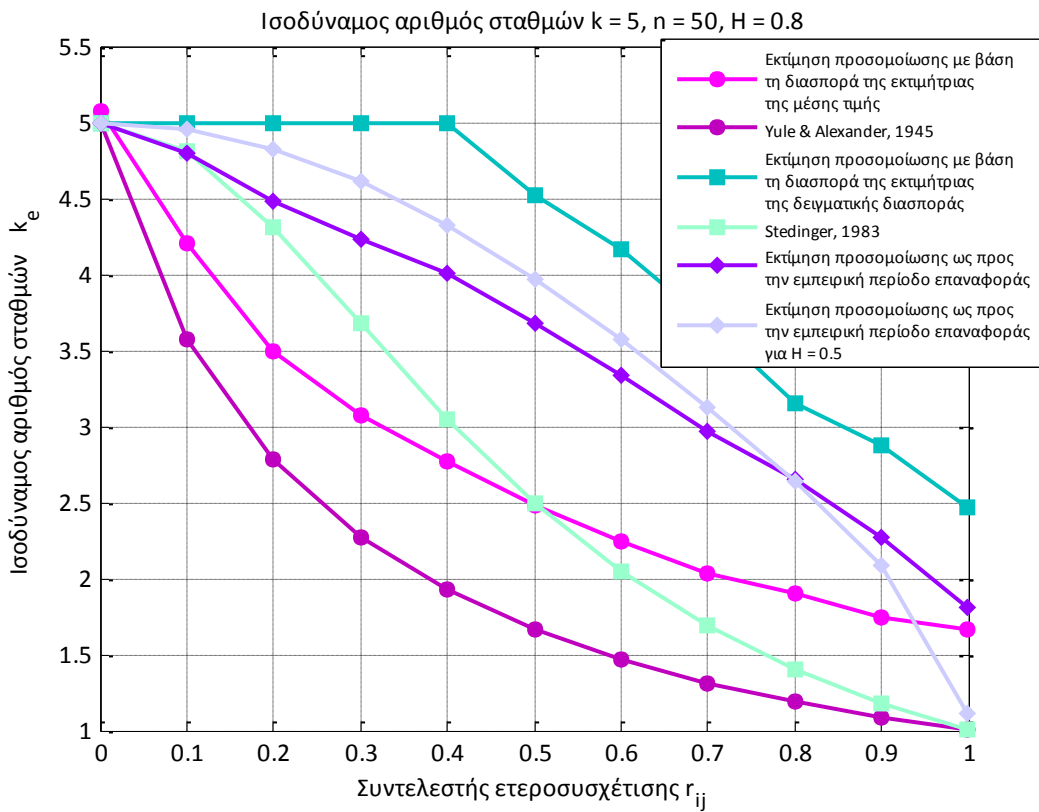
Σχήμα Γ.61: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



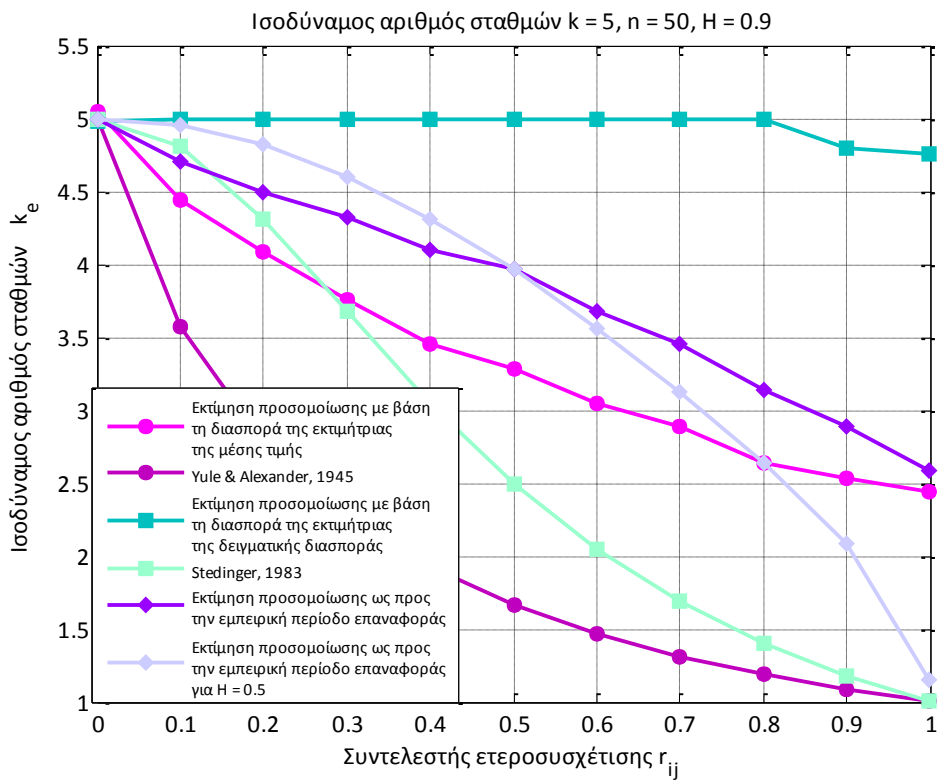
Σχήμα Γ.62: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



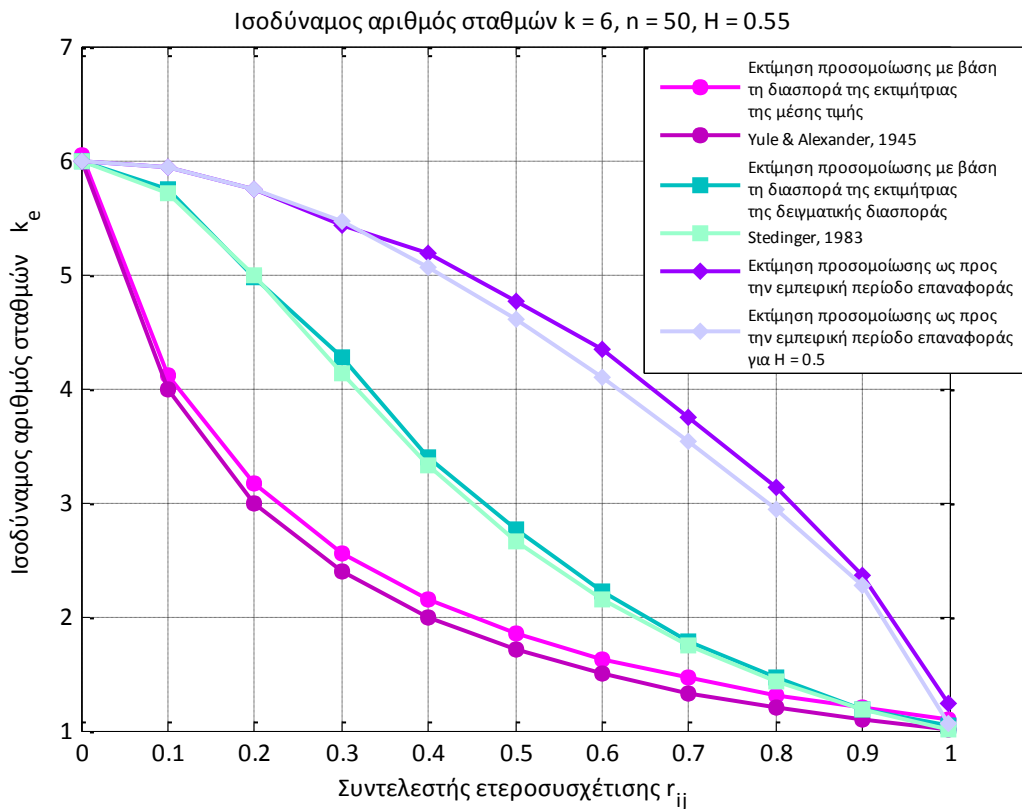
Σχήμα Γ.63: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



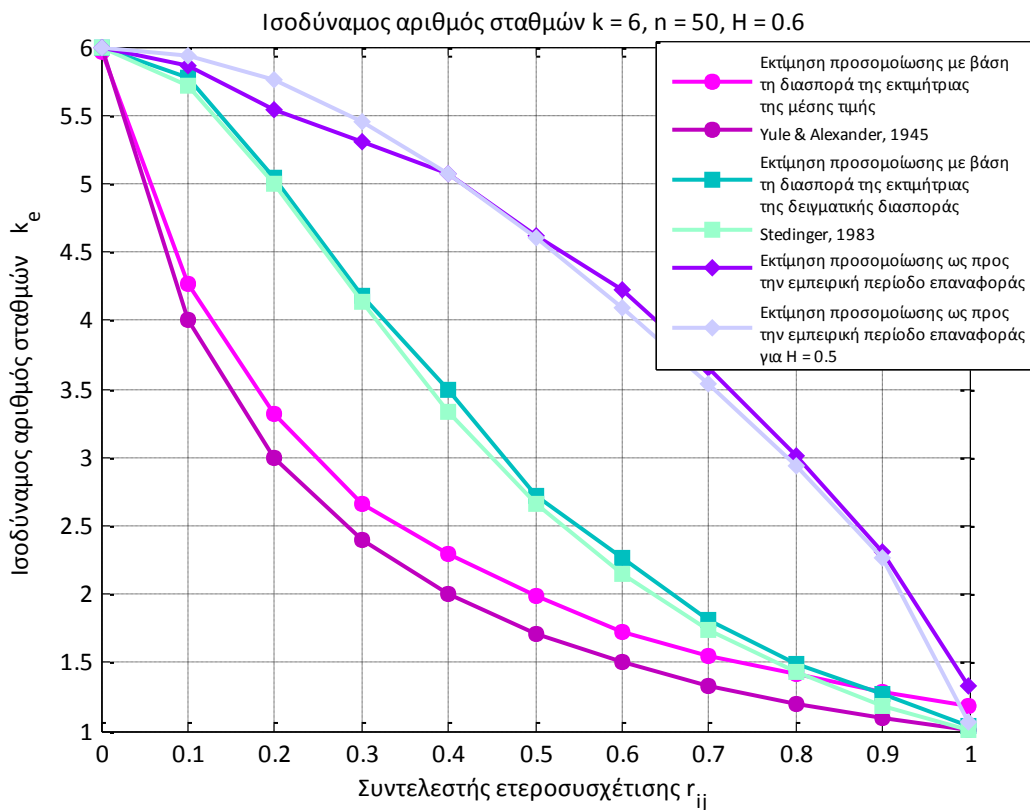
Σχήμα Γ.64: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



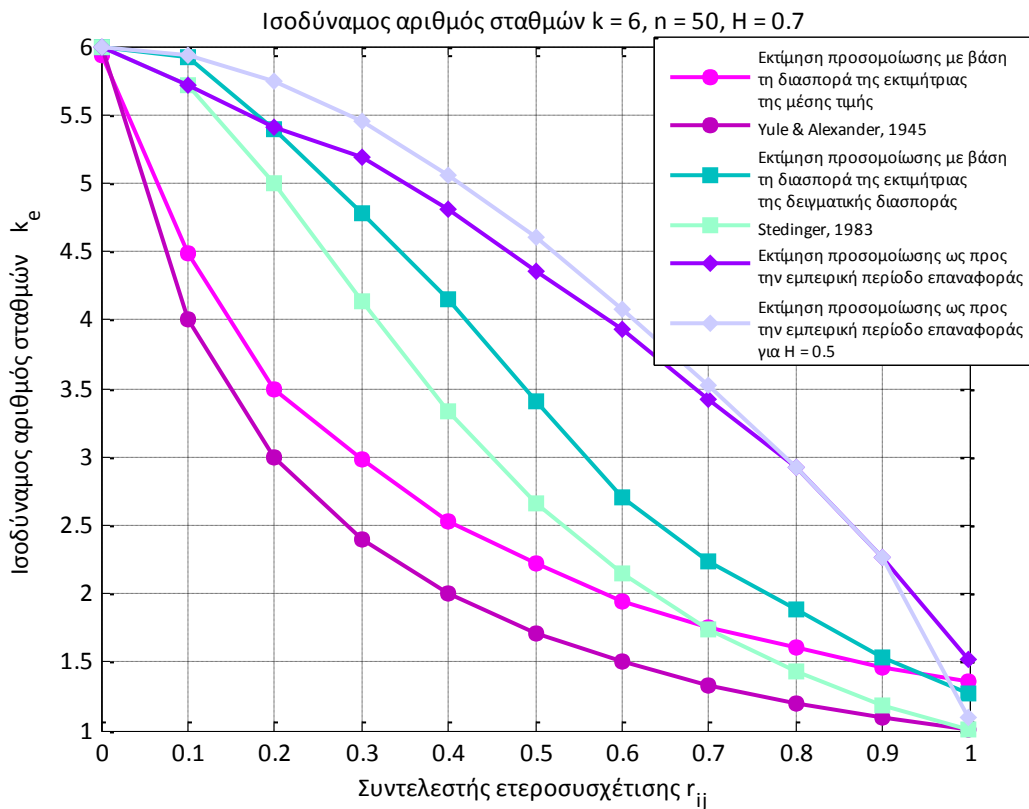
Σχήμα Γ.65: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



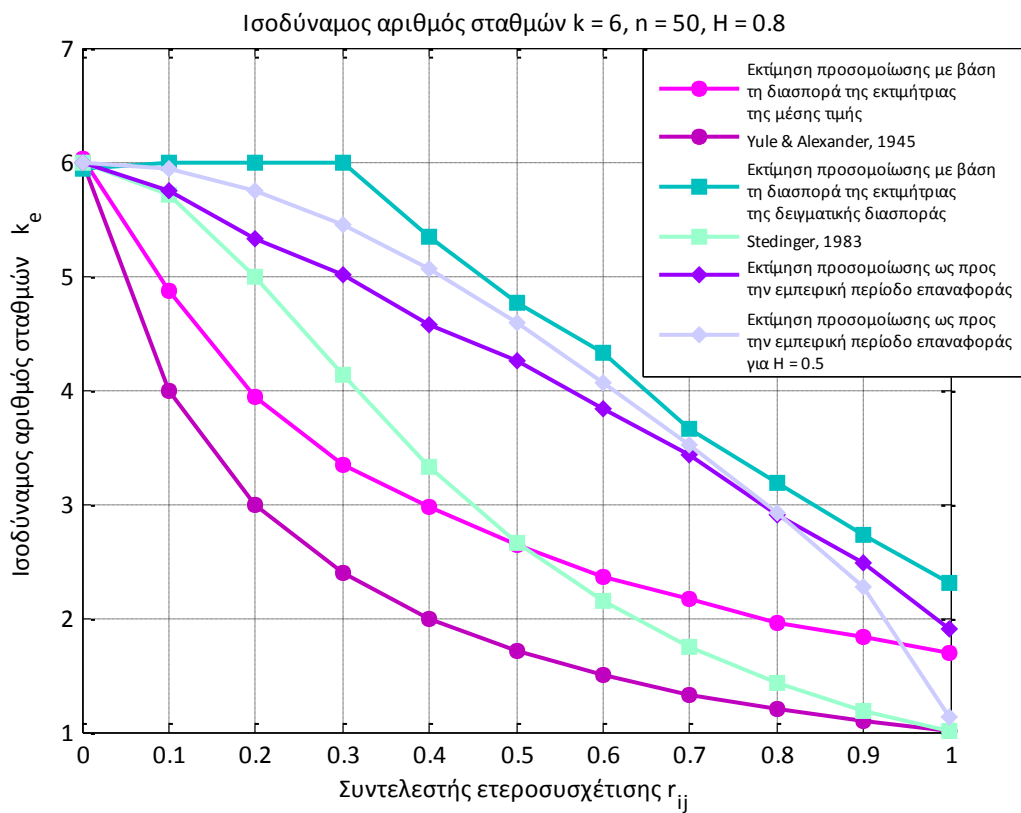
Σχήμα Γ.66: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



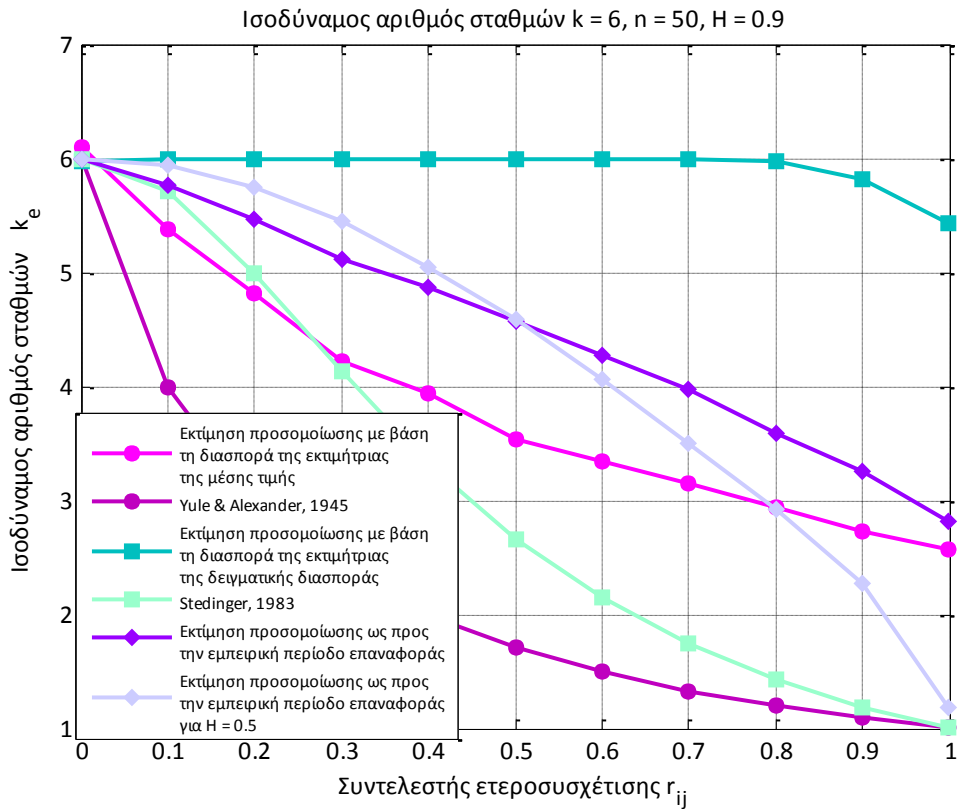
Σχήμα Γ.67: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



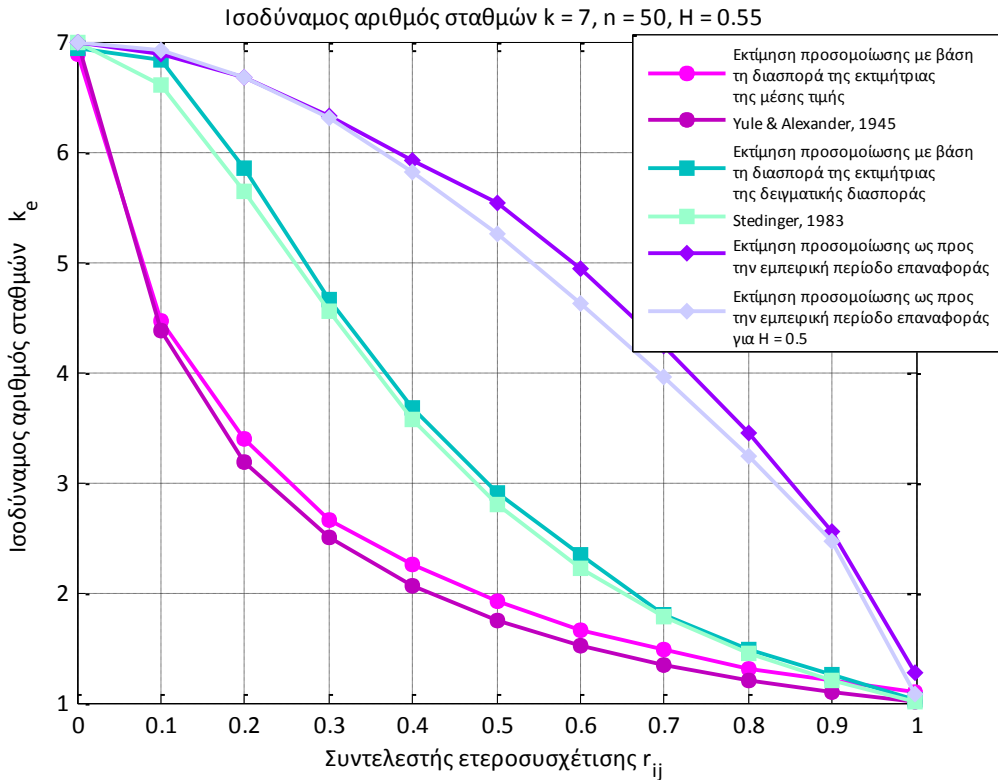
Σχήμα Γ.68: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



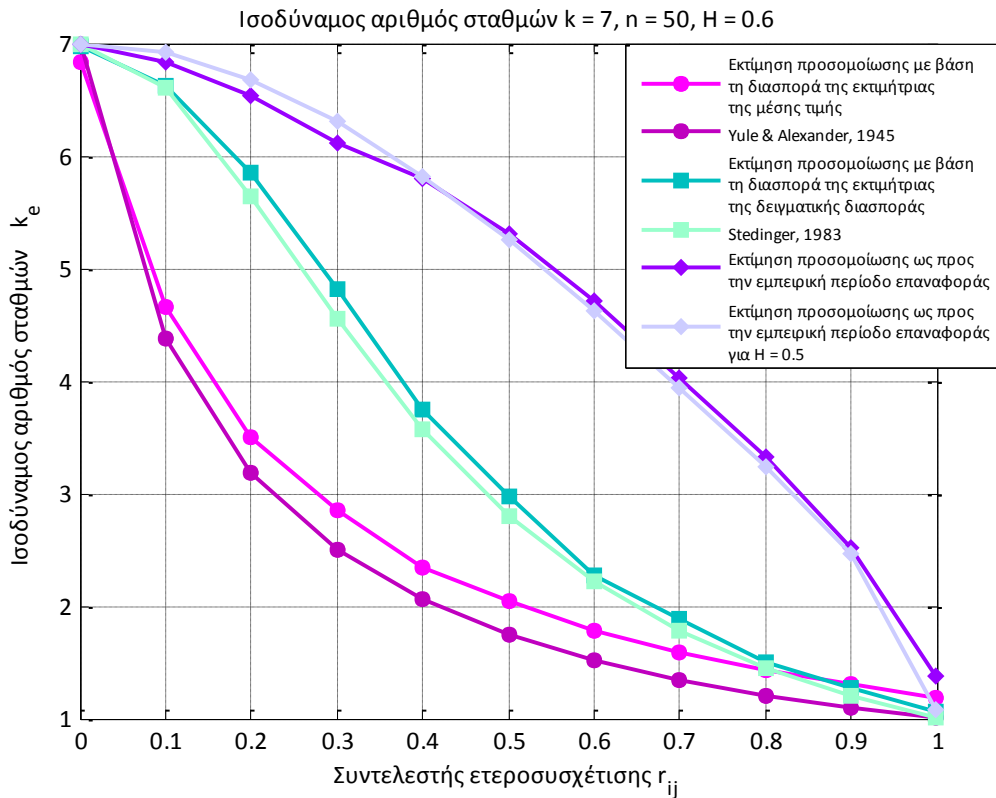
Σχήμα Γ.69: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



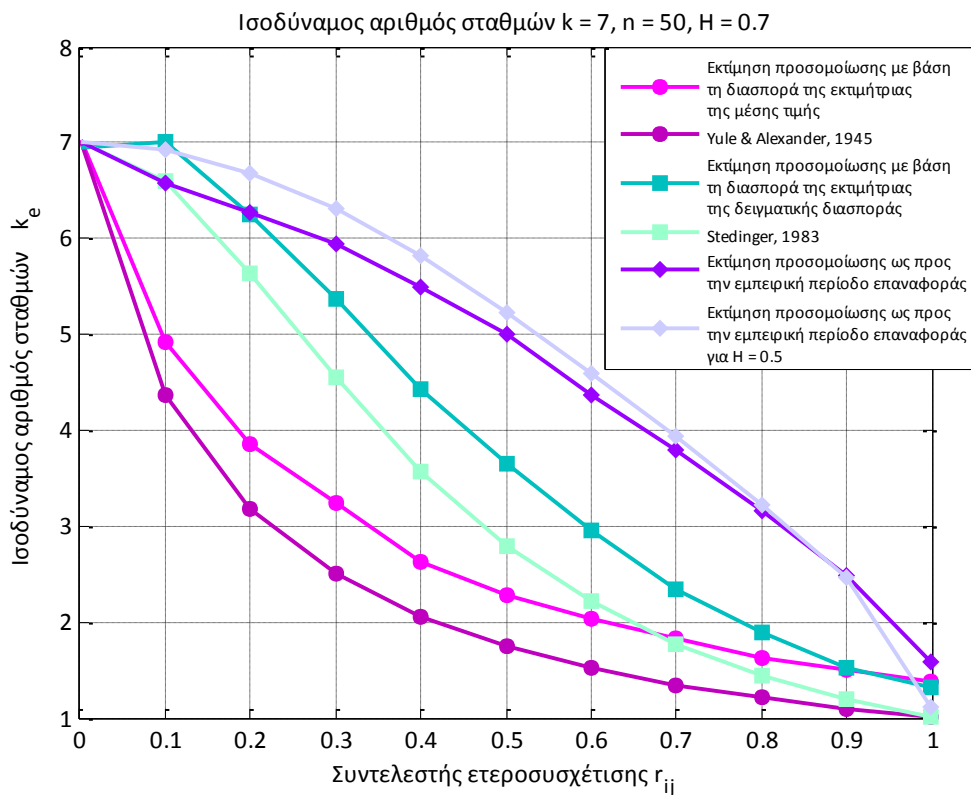
Σχήμα Γ.70: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



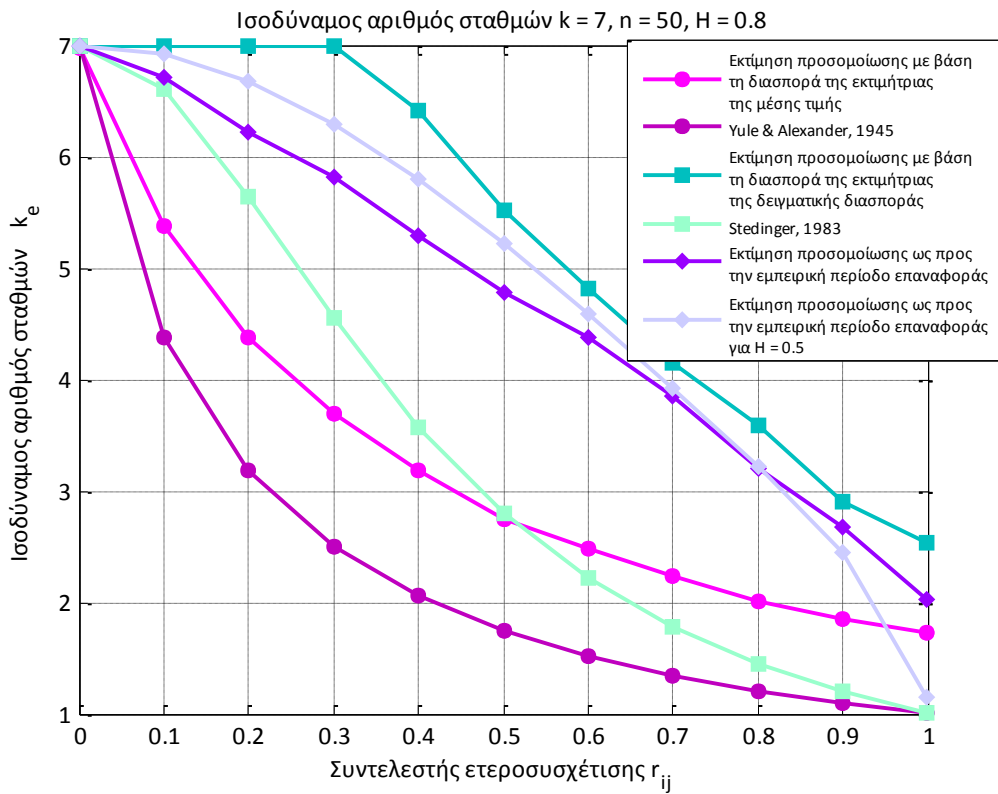
Σχήμα Γ.71: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



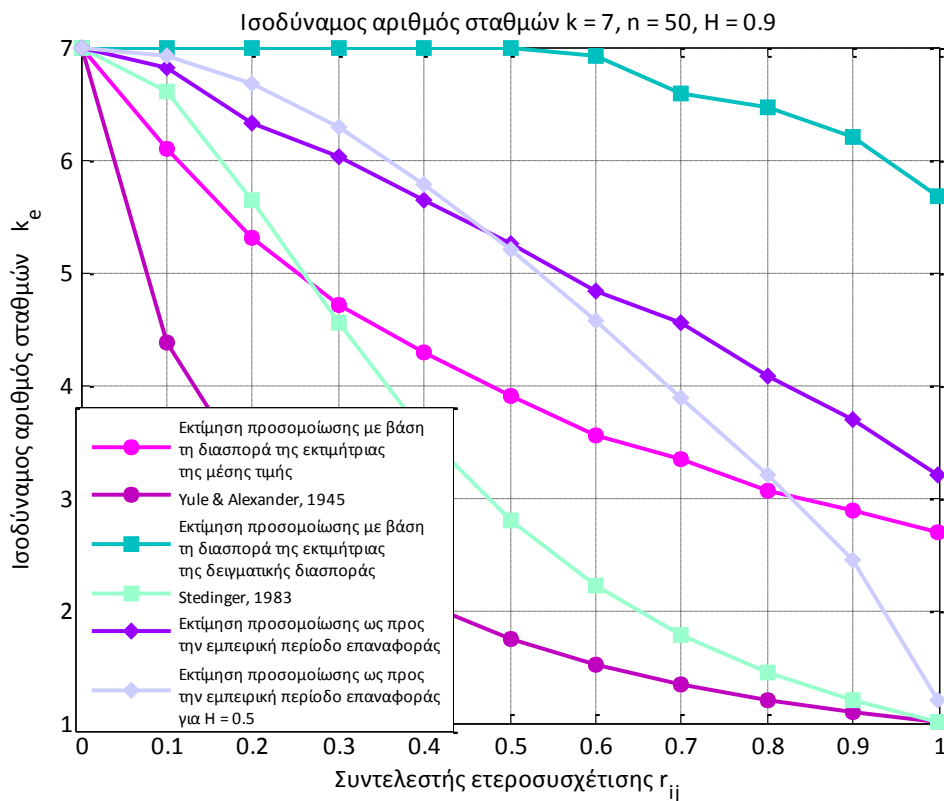
Σχήμα Γ.72: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



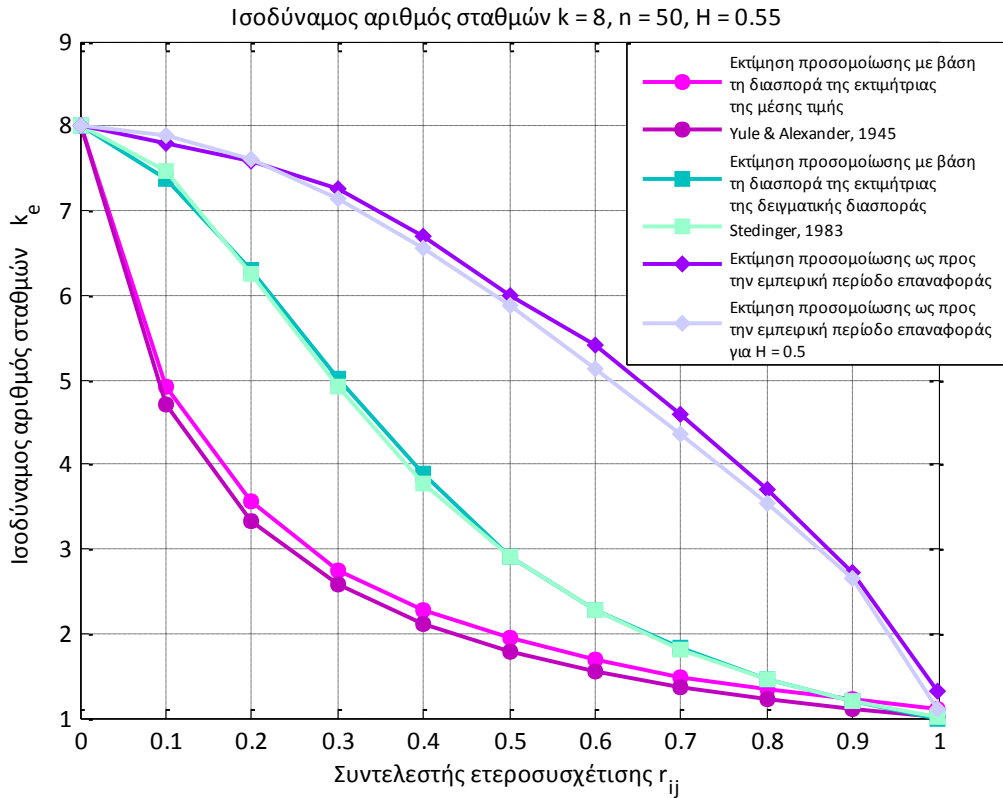
Σχήμα Γ.73: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



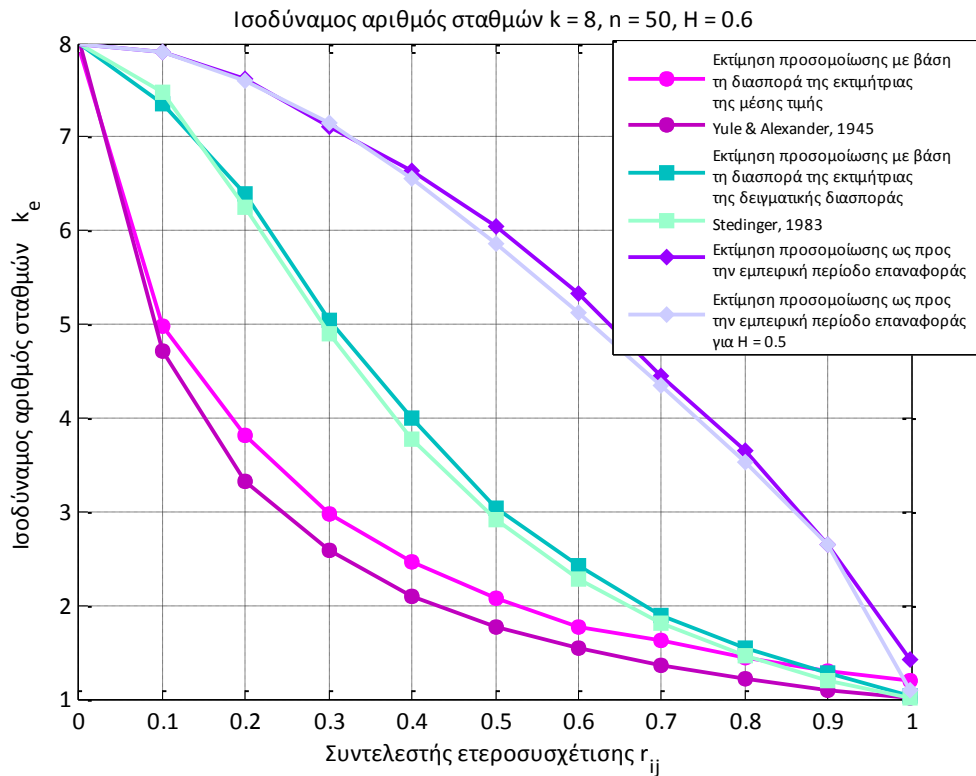
Σχήμα Γ.74: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



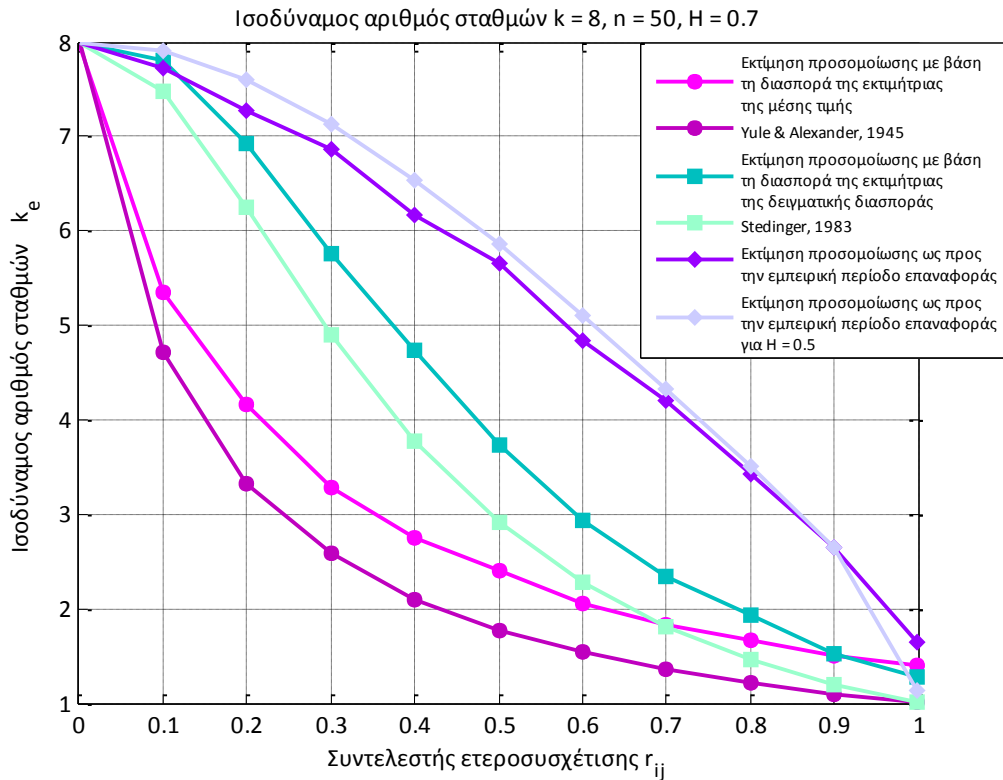
Σχήμα Γ.75: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



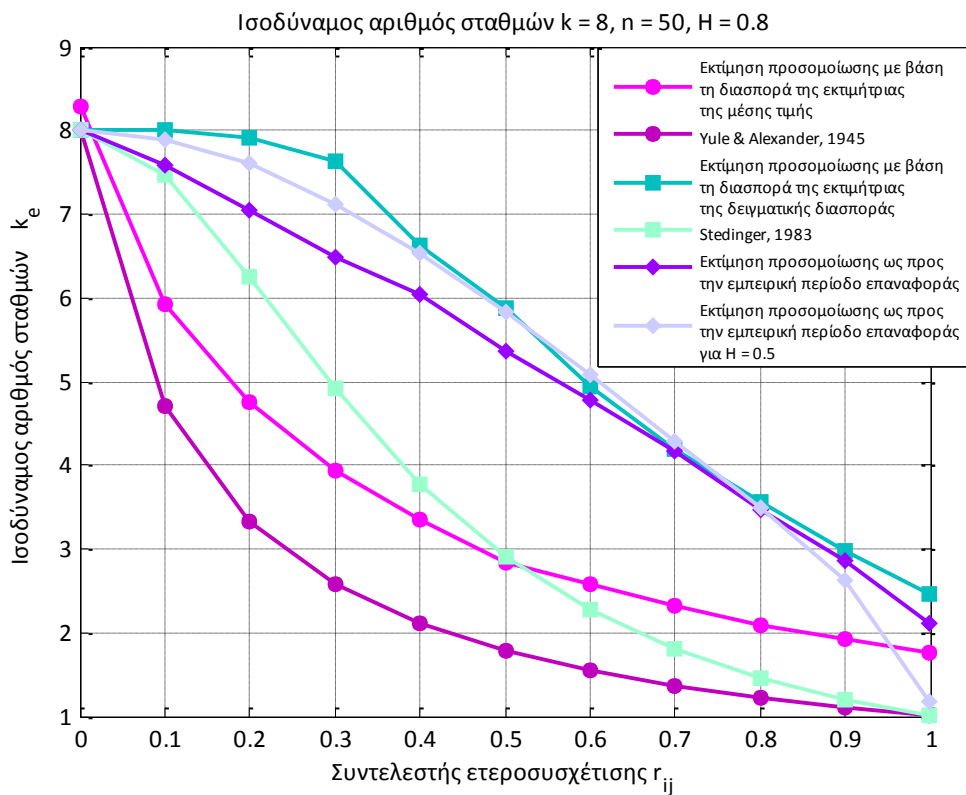
Σχήμα Γ.76: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



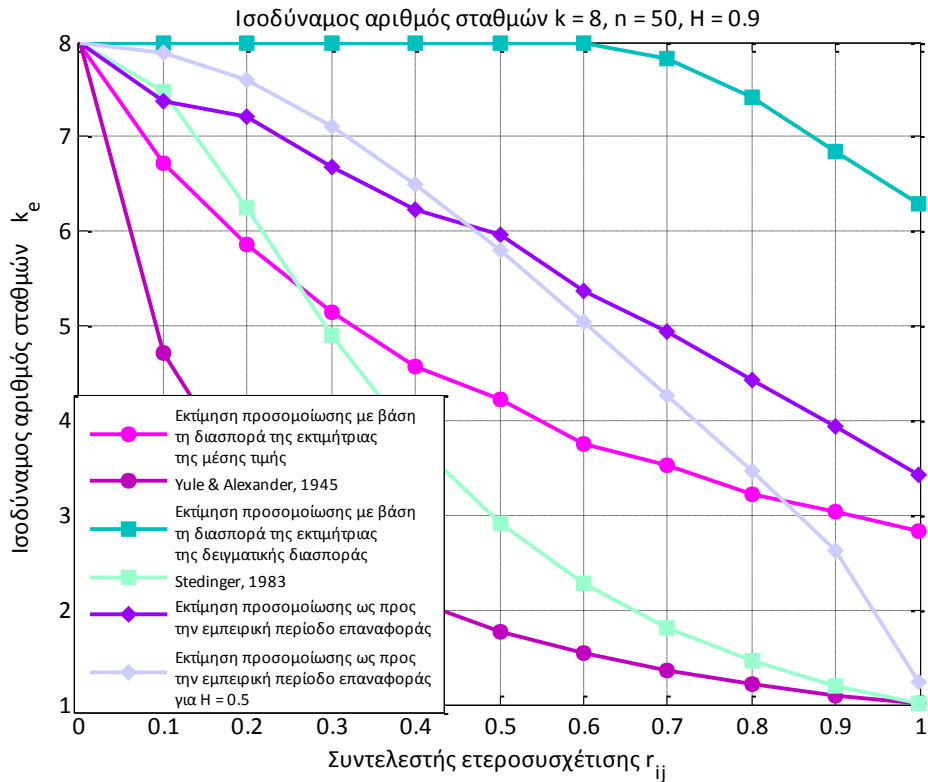
Σχήμα Γ.77: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



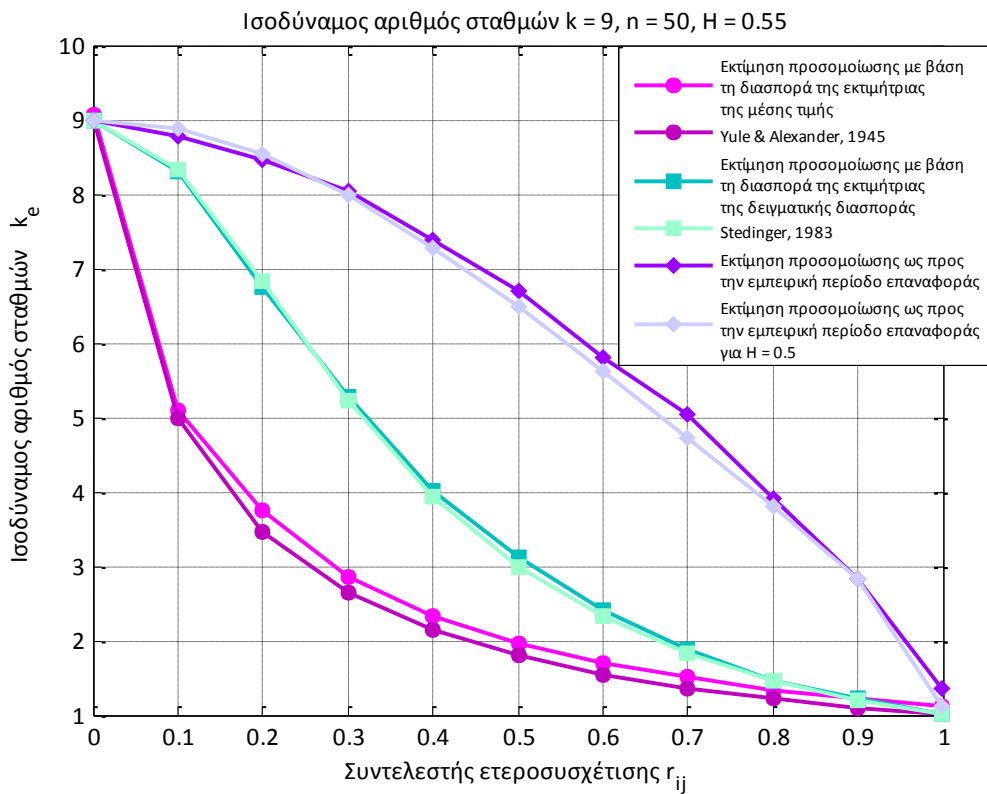
Σχήμα Γ.78: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



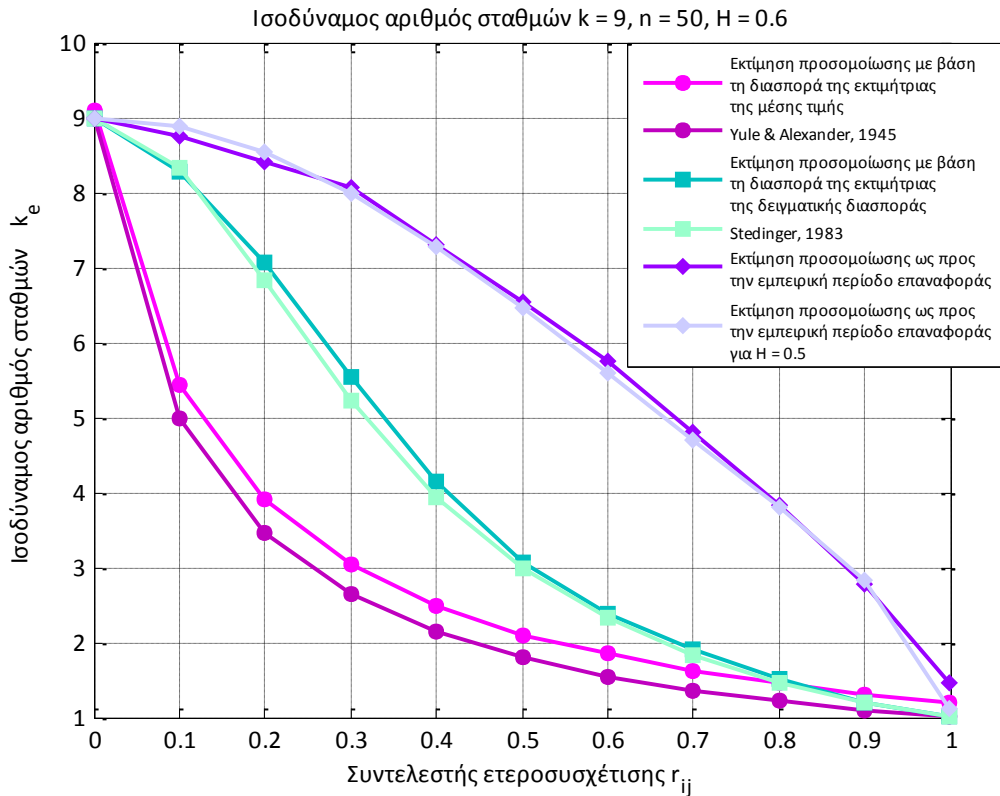
Σχήμα Γ.79: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



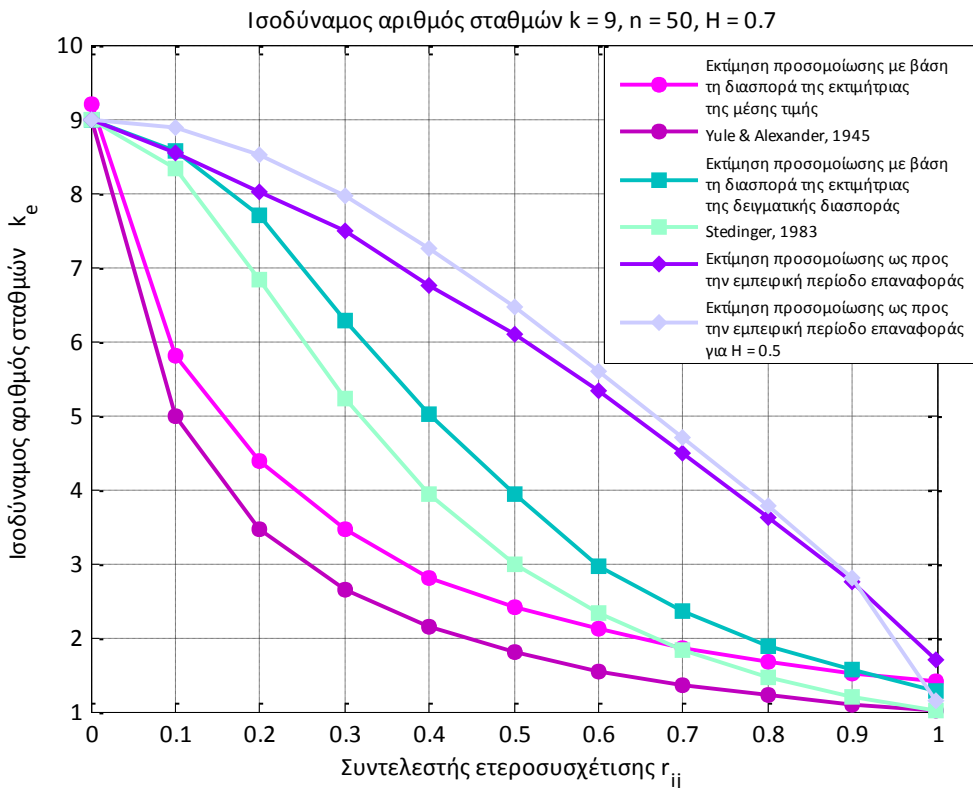
Σχήμα Γ.80: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



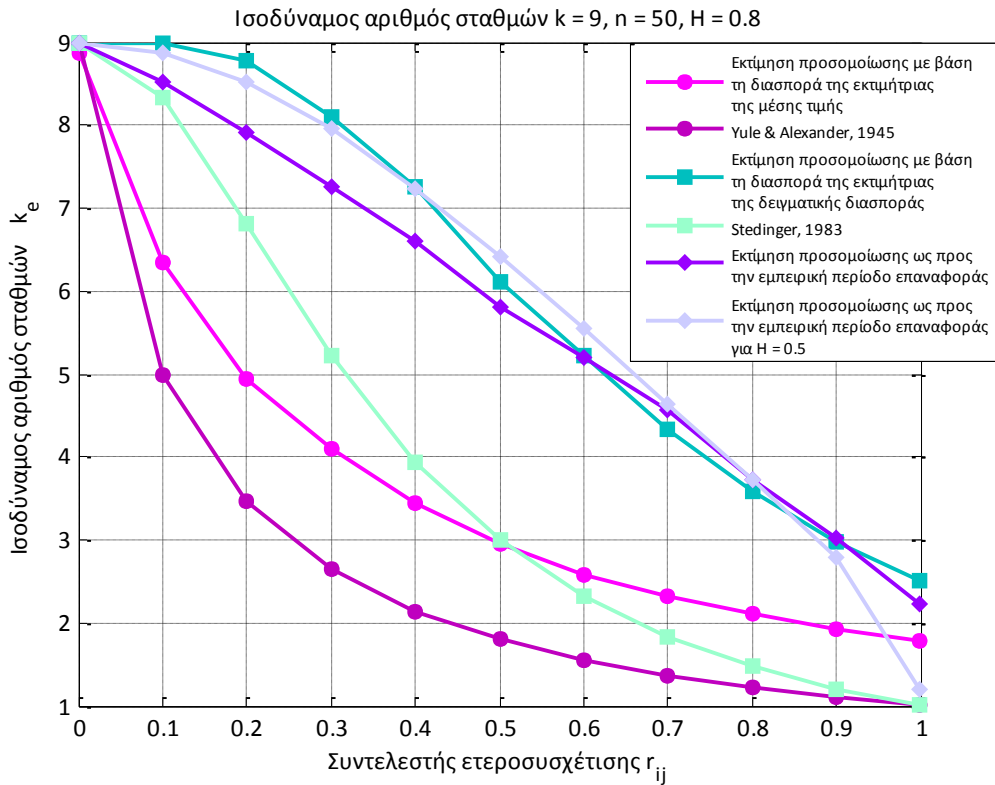
Σχήμα Γ.81: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



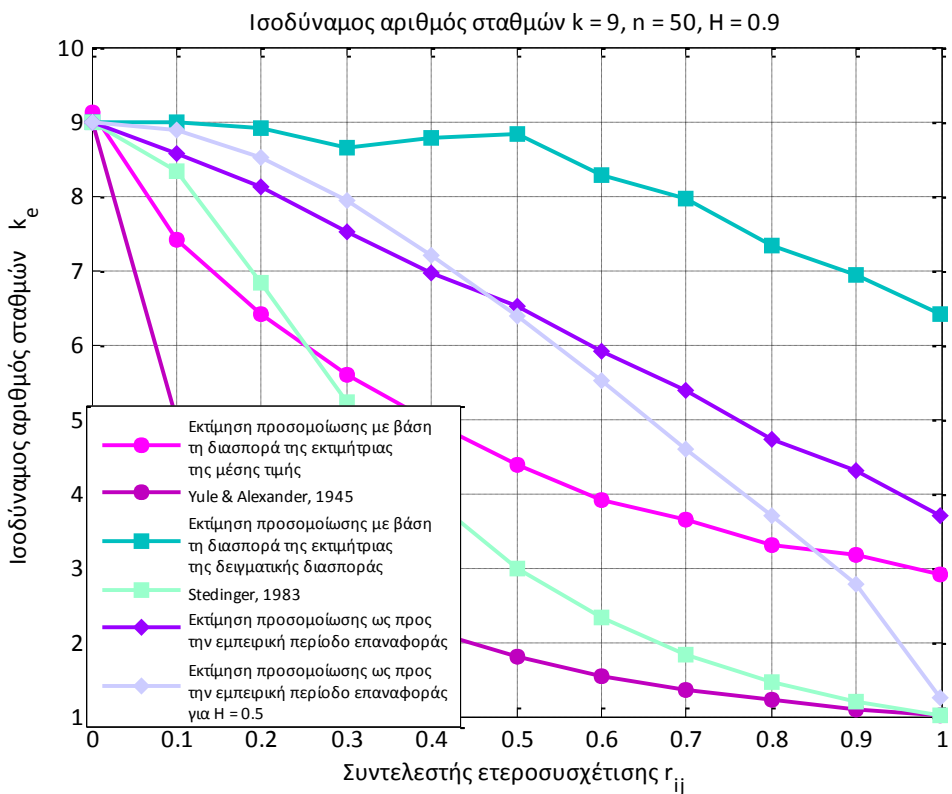
Σχήμα Γ.82: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



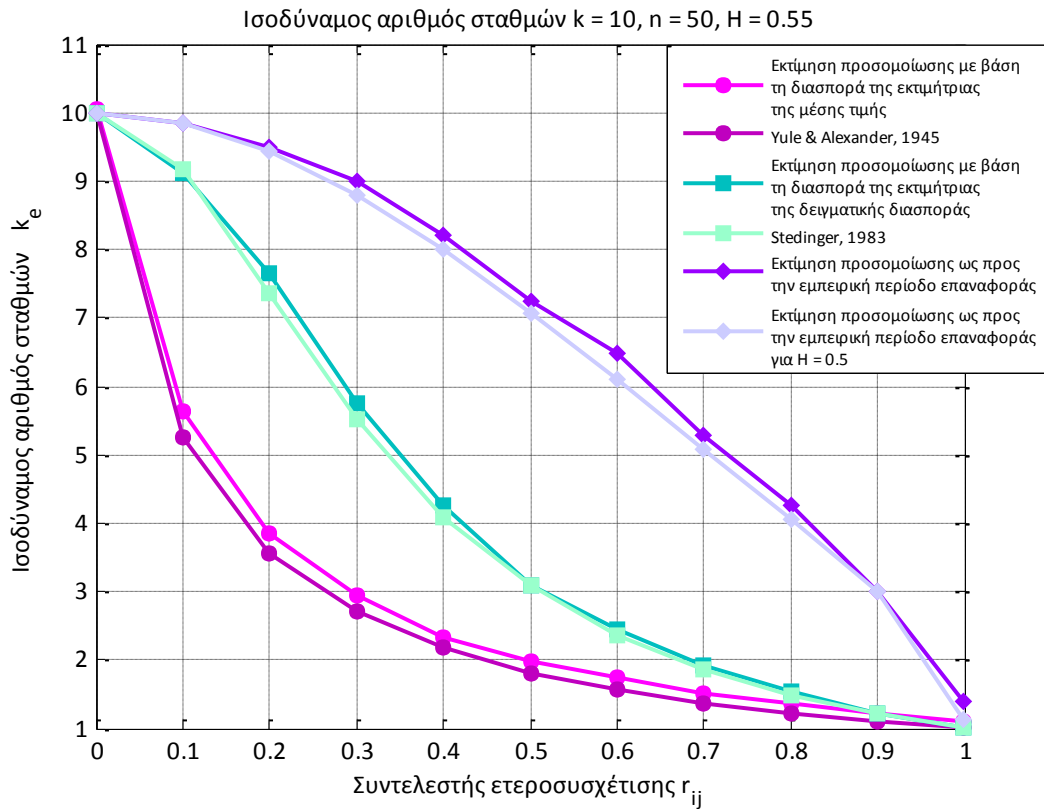
Σχήμα Γ.83: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



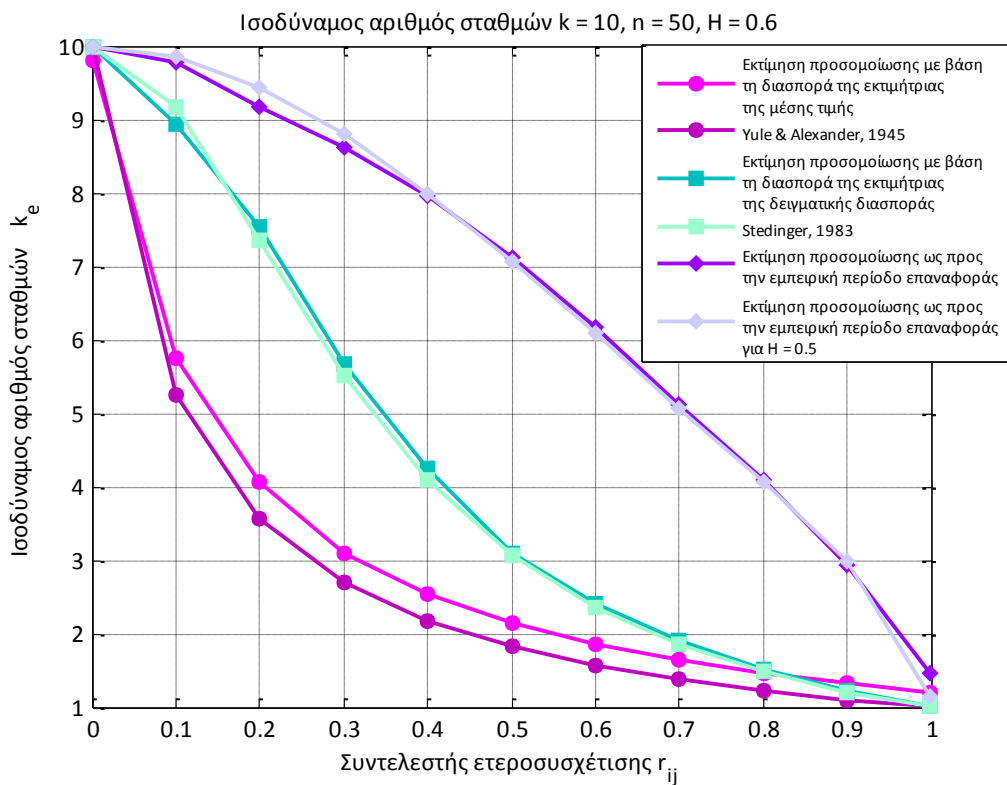
Σχήμα Γ.84: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



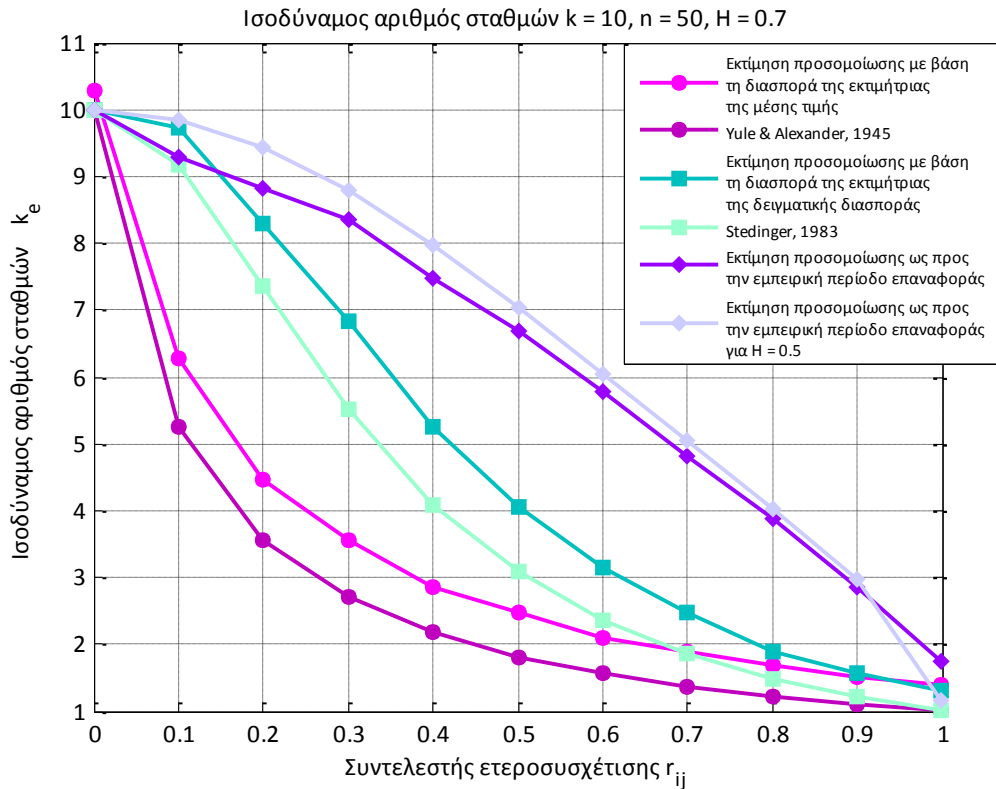
Σχήμα Γ.85: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



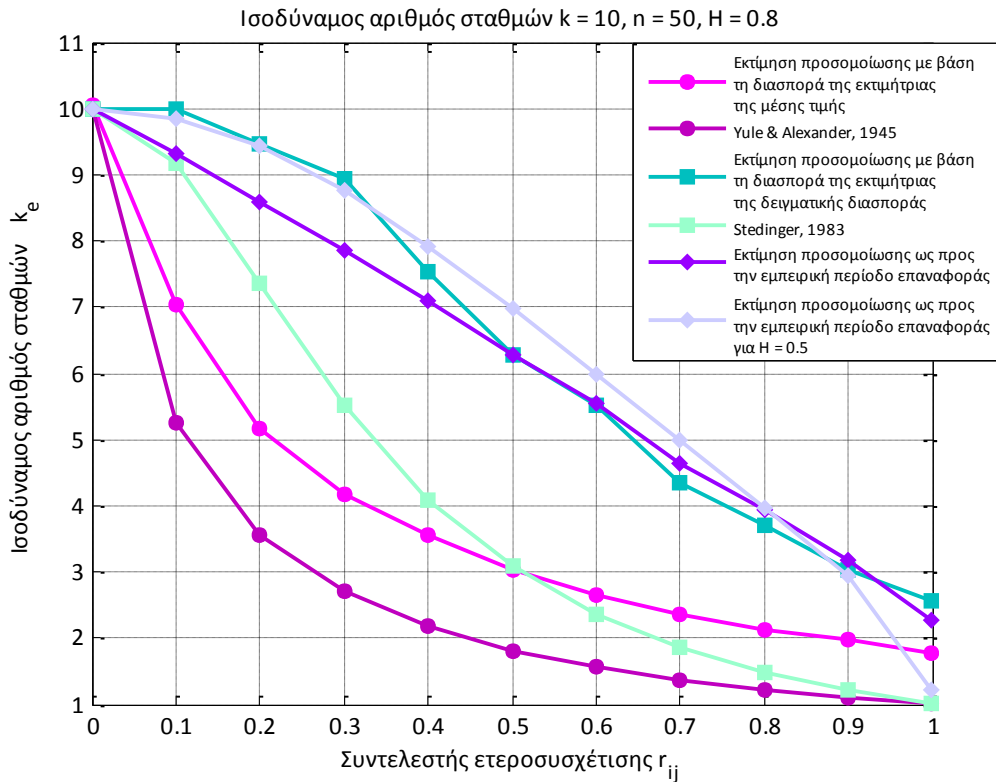
Σχήμα Γ.86: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



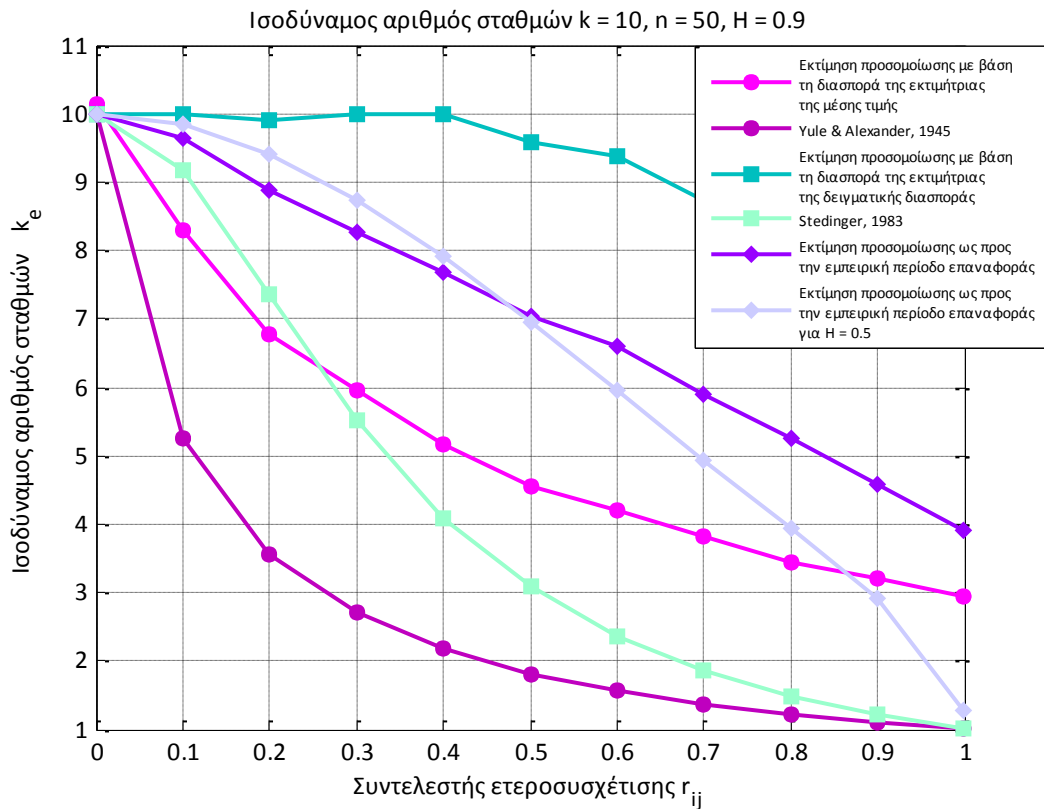
Σχήμα Γ.87: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα Γ.88: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα Γ.89: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

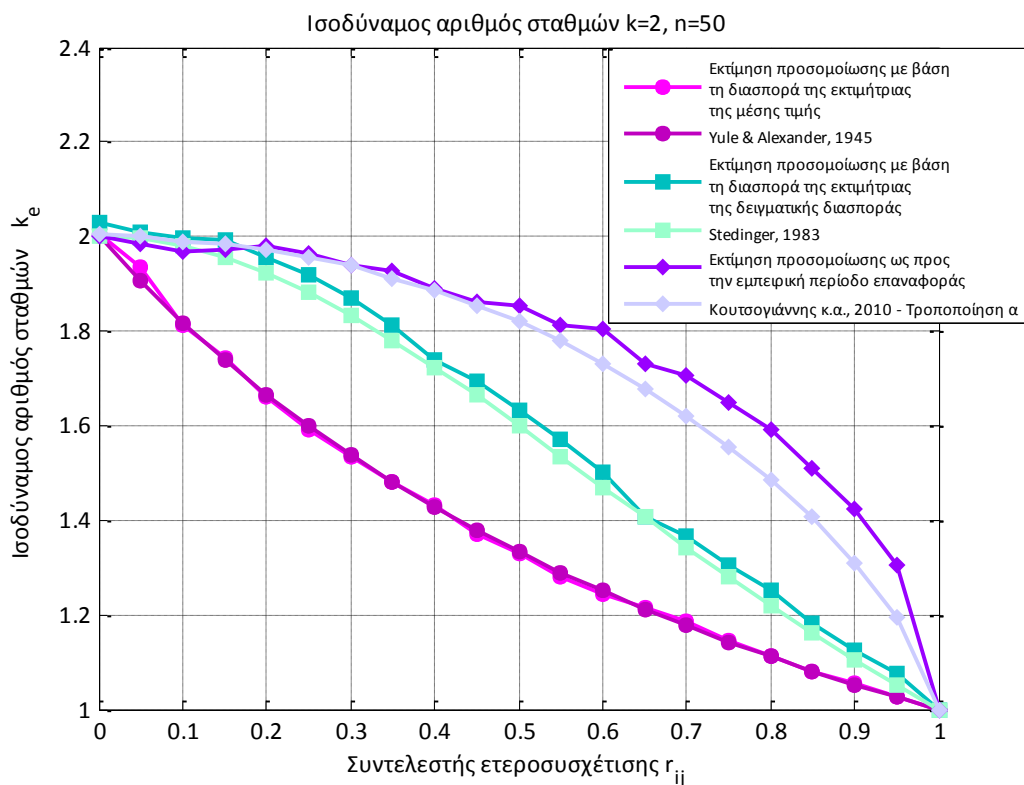


Σχήμα Γ.90: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

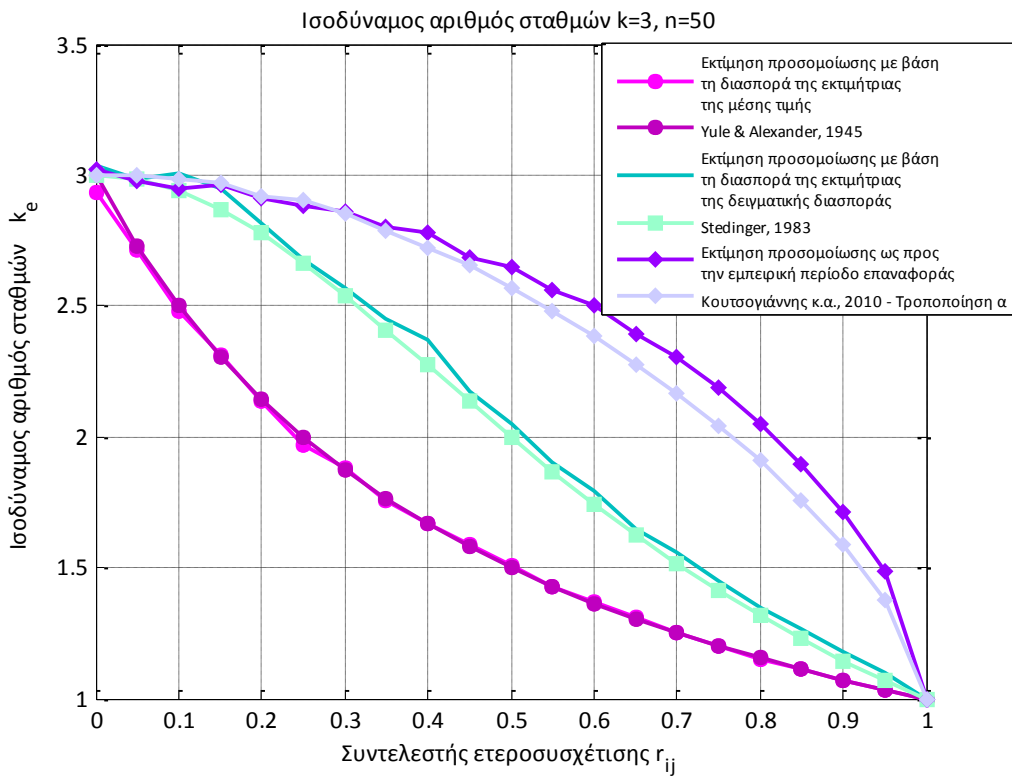
**Παράρτημα Δ - Αποτελέσματα προσπάθειας προσαρμογής σχέσης έκφρασης
ισοδύναμου αριθμού σταθμών ως προς το συντελεστή ετεροσυσχέτισης
των υδρολογικών δειγμάτων**

Γραφική απεικόνιση ισοδύναμου αριθμού σταθμών k_e ως προς το συντελεστή
ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j

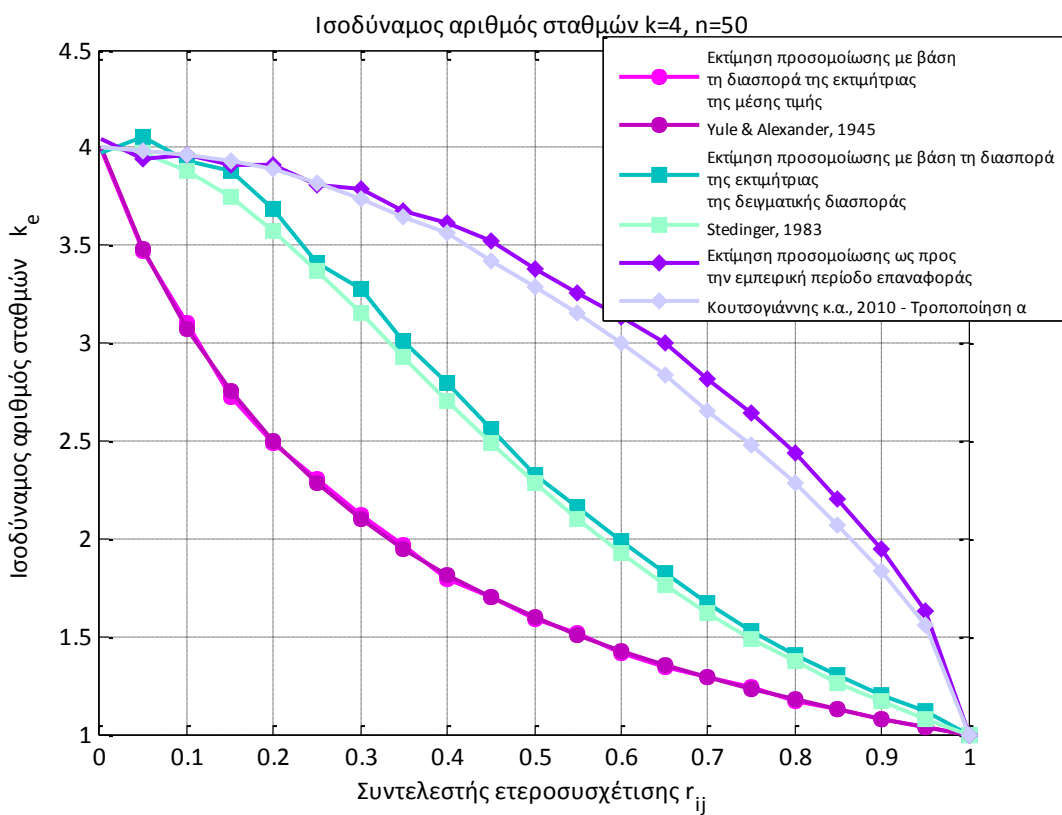
Περίπτωση ανεξάρτητων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών



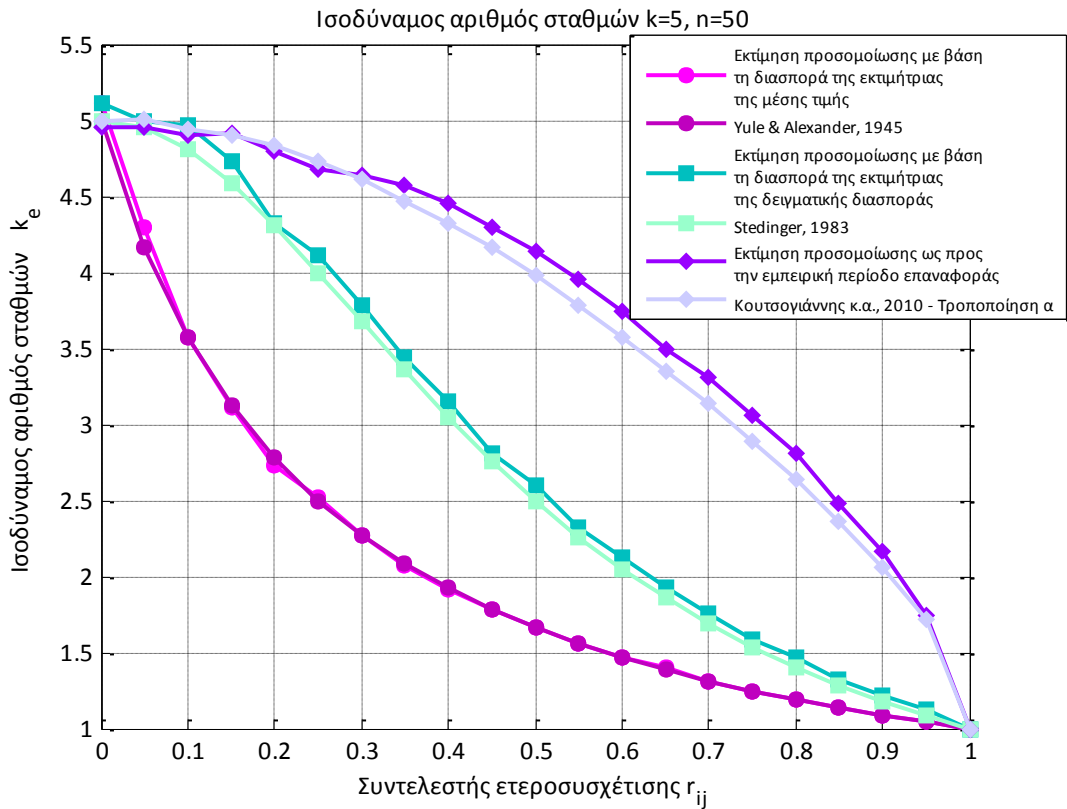
Σχήμα Δ.1: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 2$



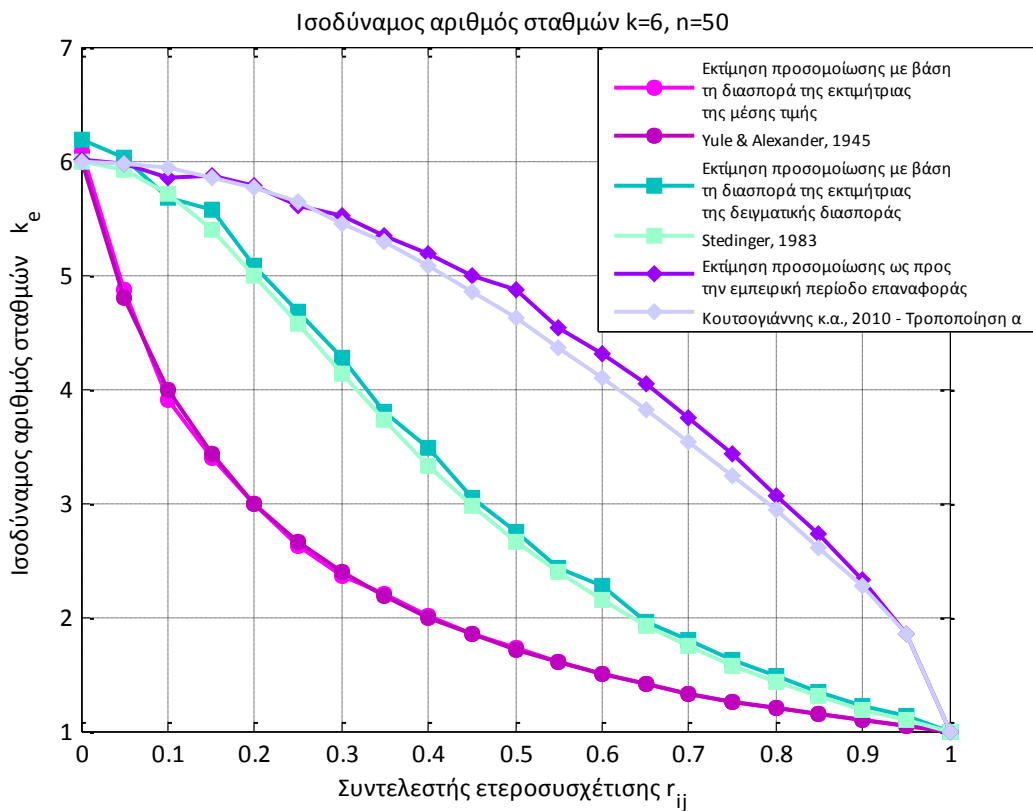
Σχήμα Δ.2: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 3$



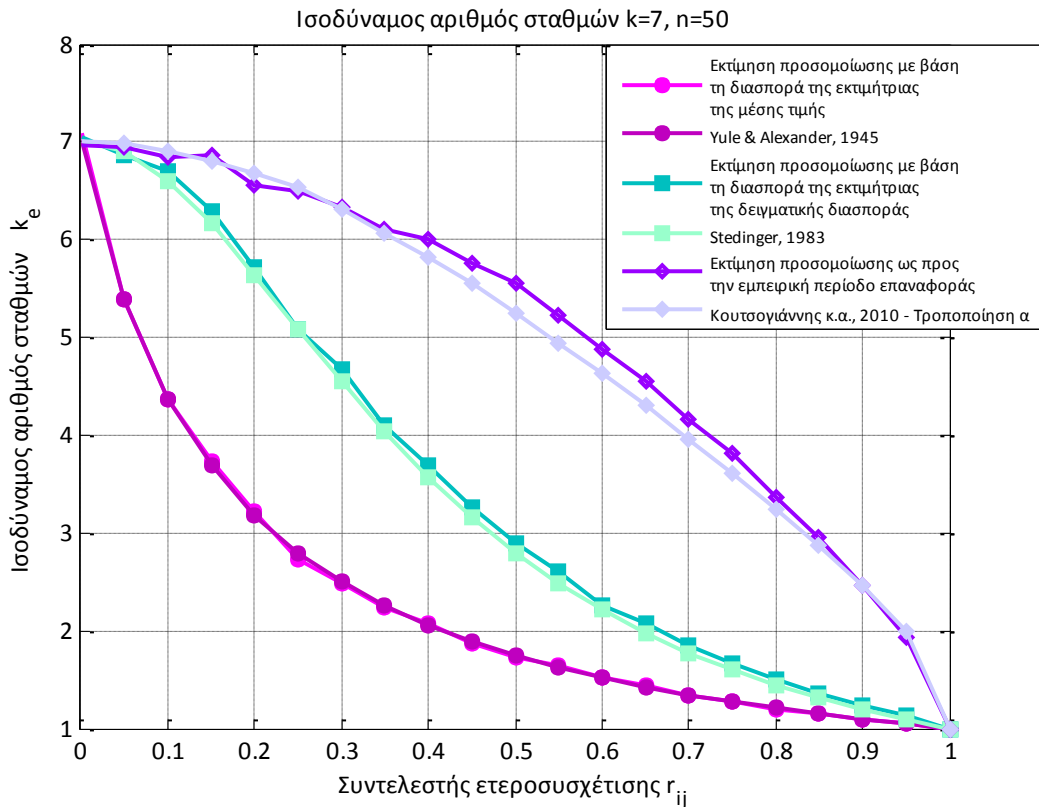
Σχήμα Δ.3: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 4$



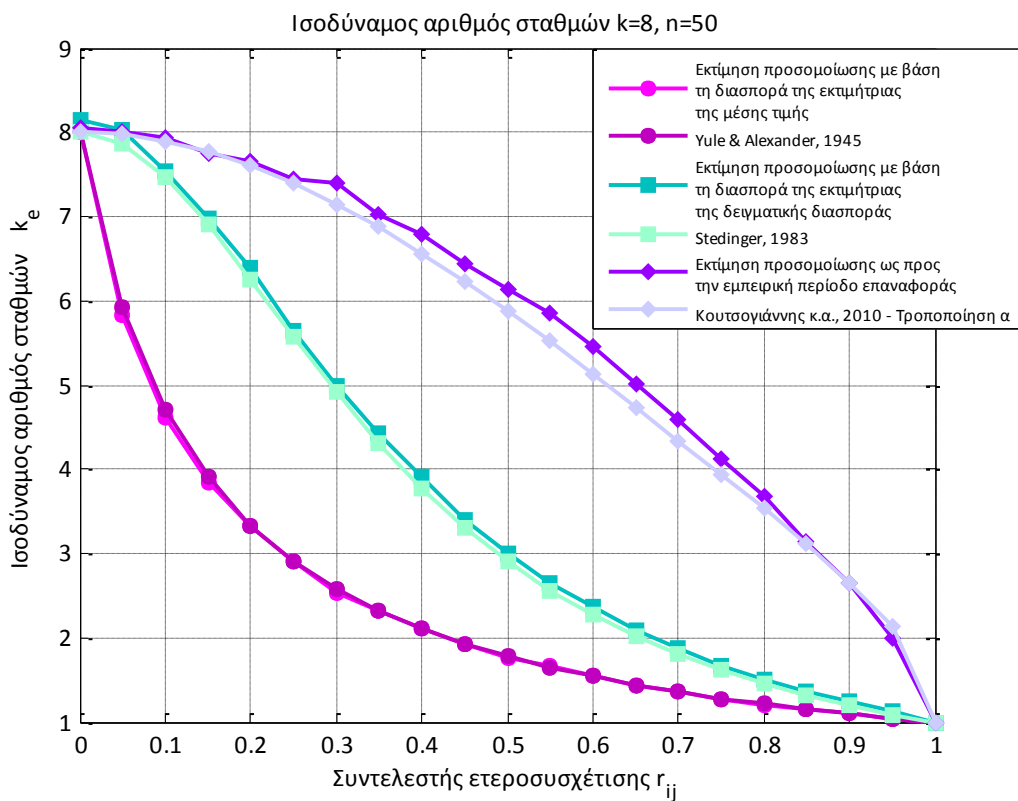
Σχήμα Δ.4: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 5$



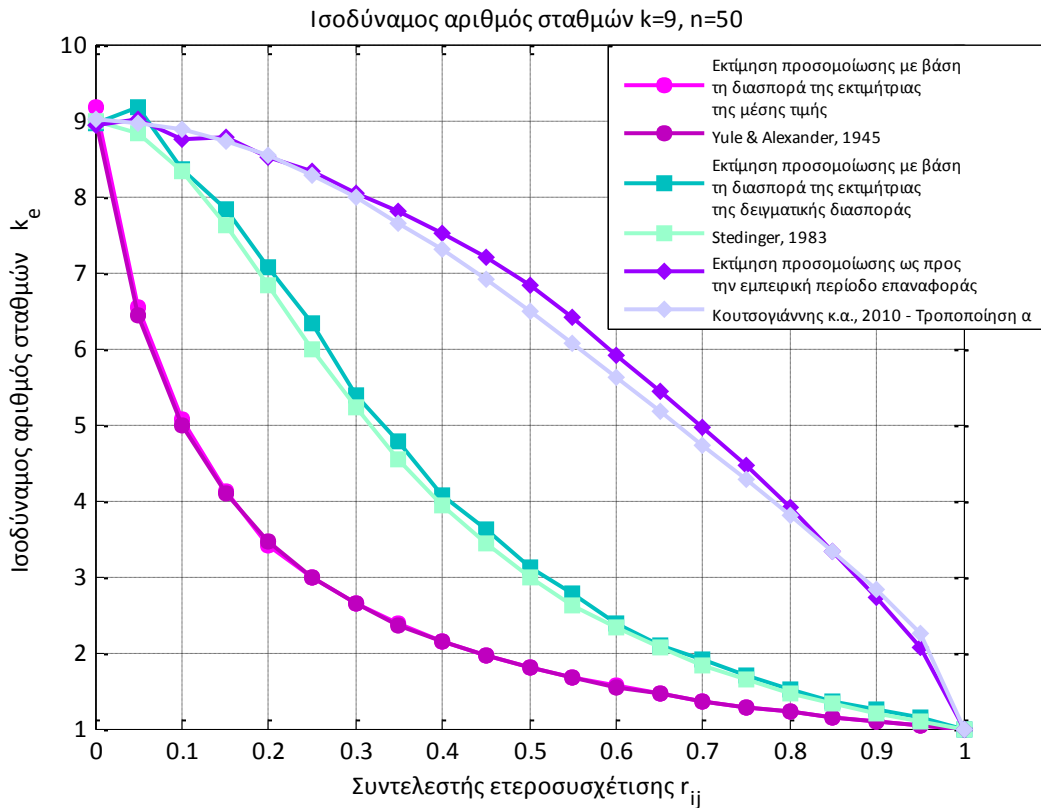
Σχήμα Δ.5: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 6$



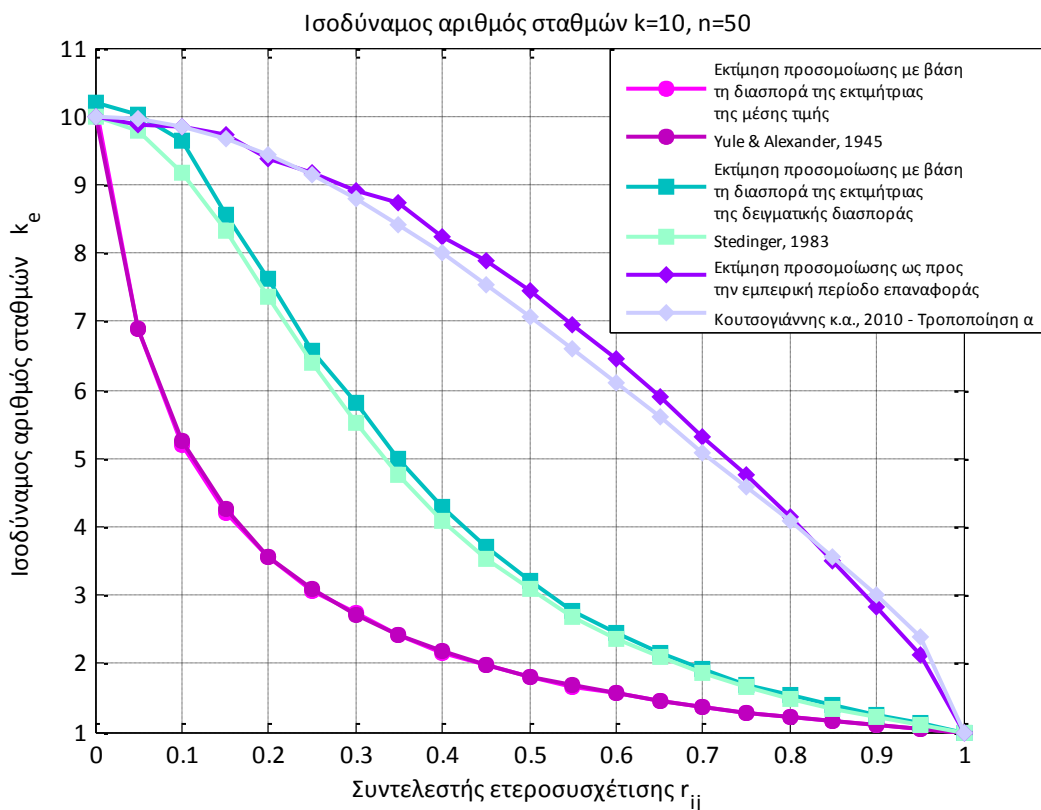
Σχήμα Δ.6: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 7$



Σχήμα Δ.7: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 8$

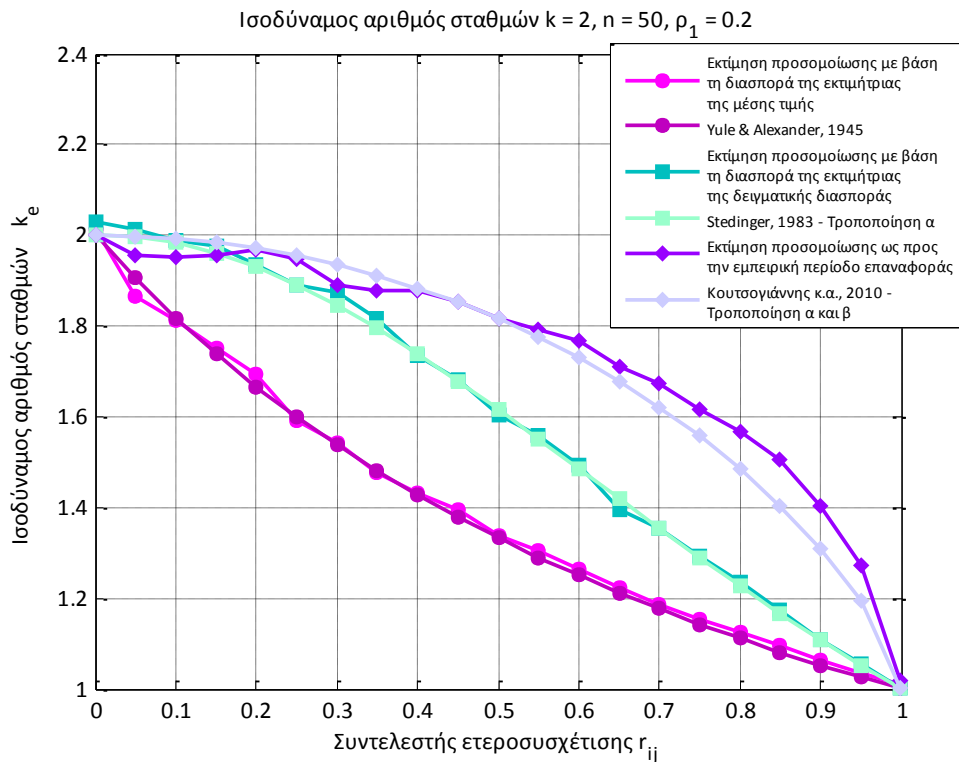


Σχήμα Δ.8: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 9$

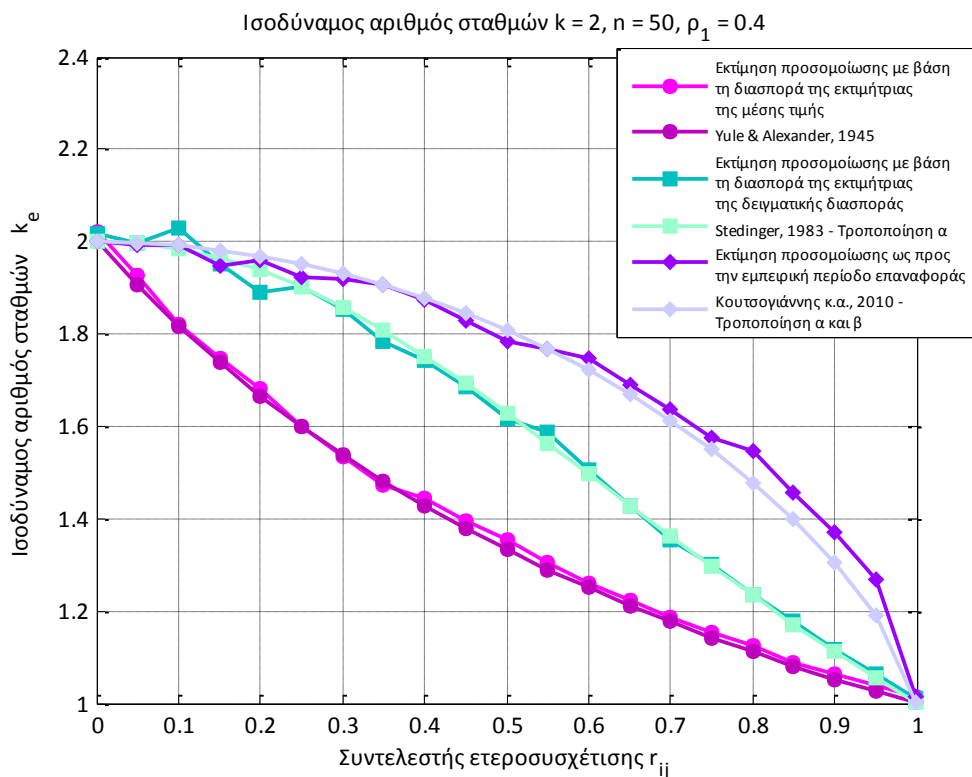


Σχήμα Δ.9: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για αριθμό σταθμών $k = 10$

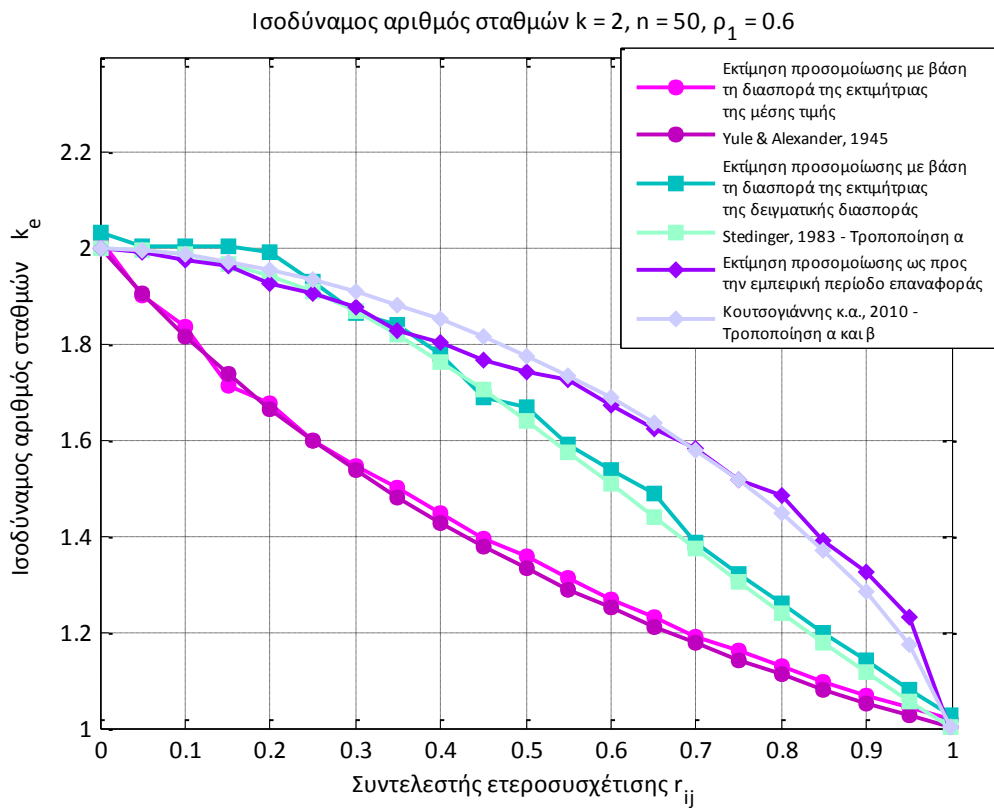
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών («Μαρκοβιανή» προσέγγιση)



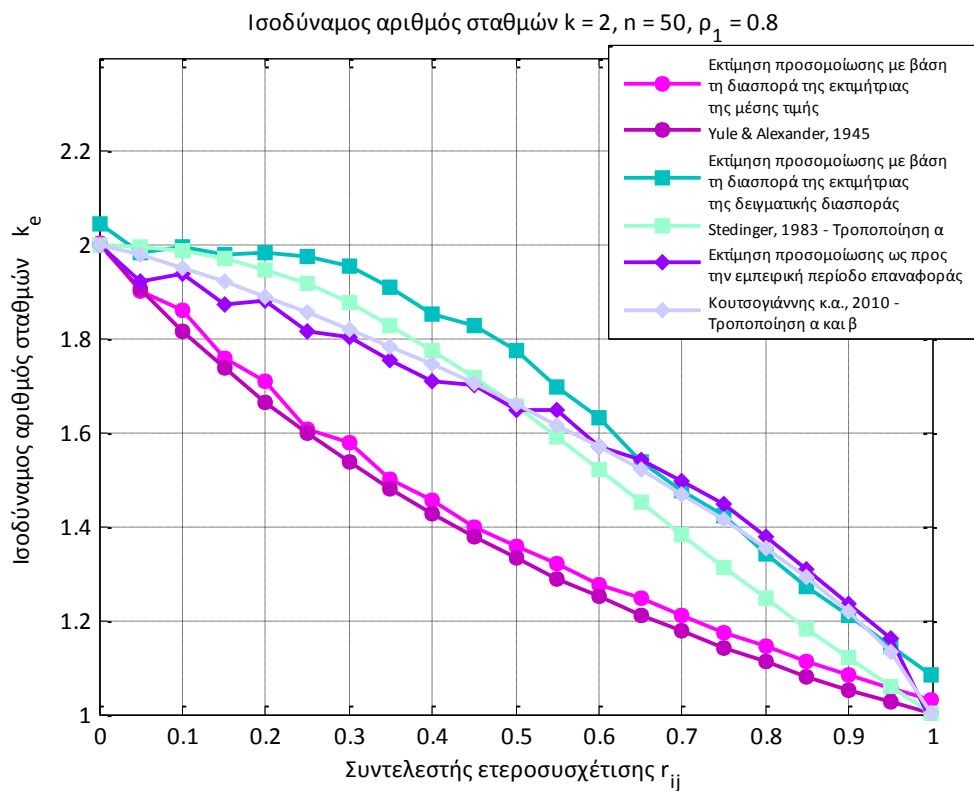
Σχήμα Δ.10: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



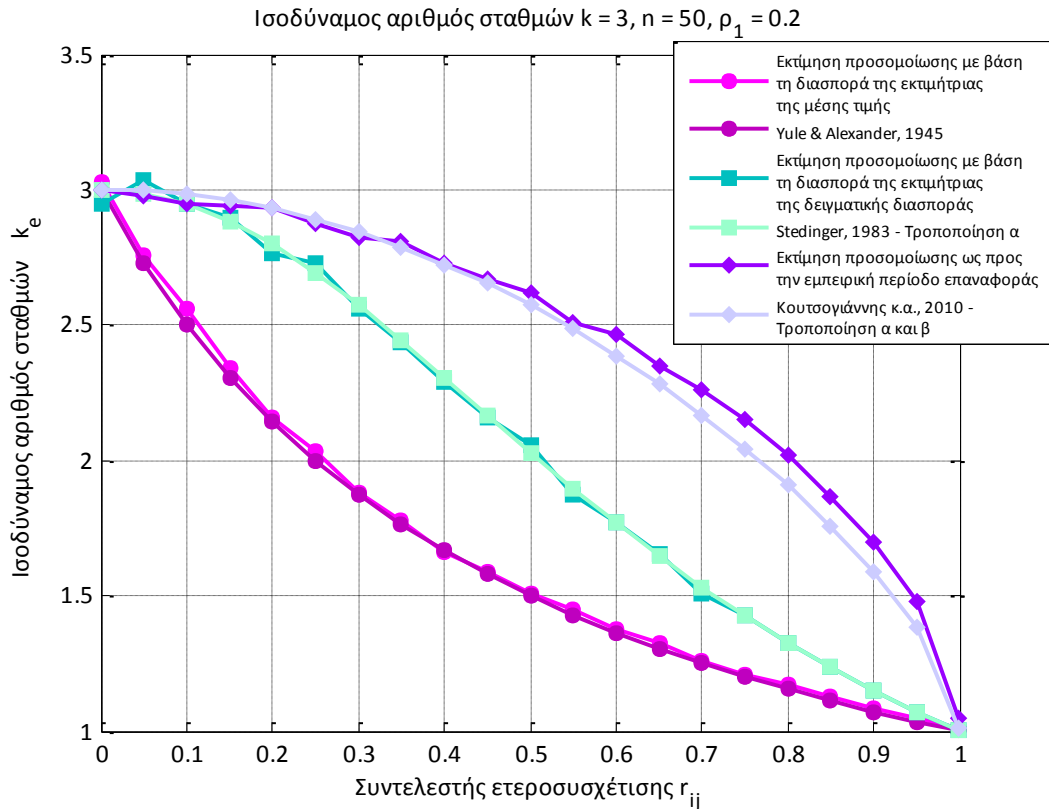
Σχήμα Δ.11: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



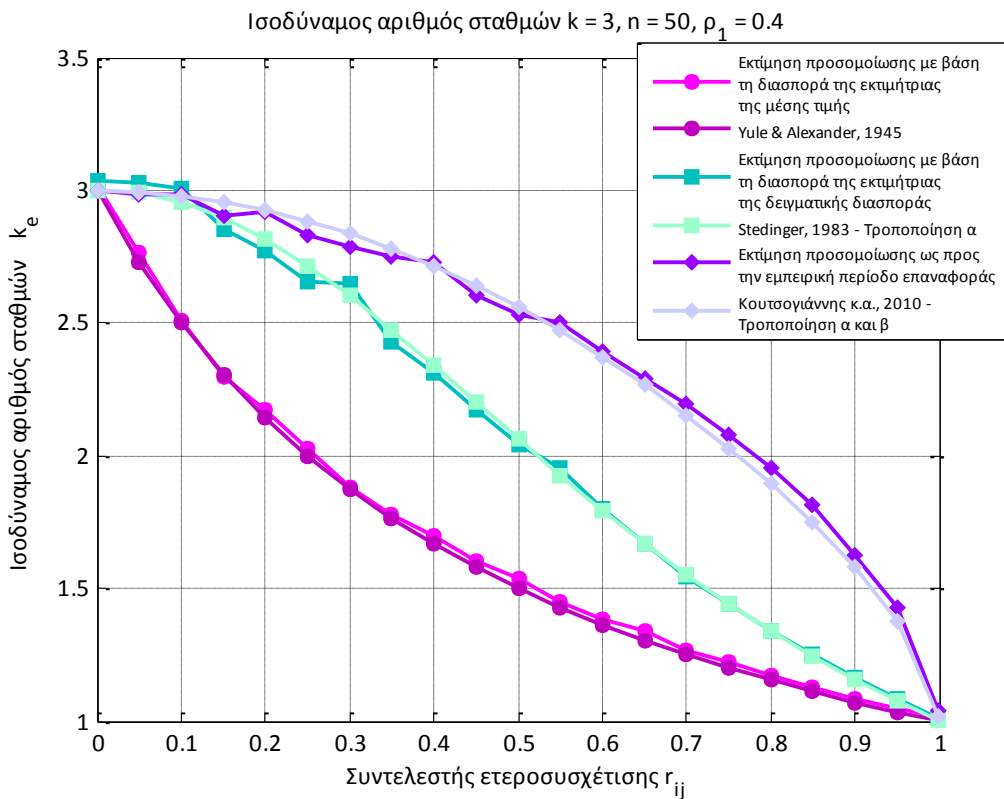
Σχήμα Δ.12: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



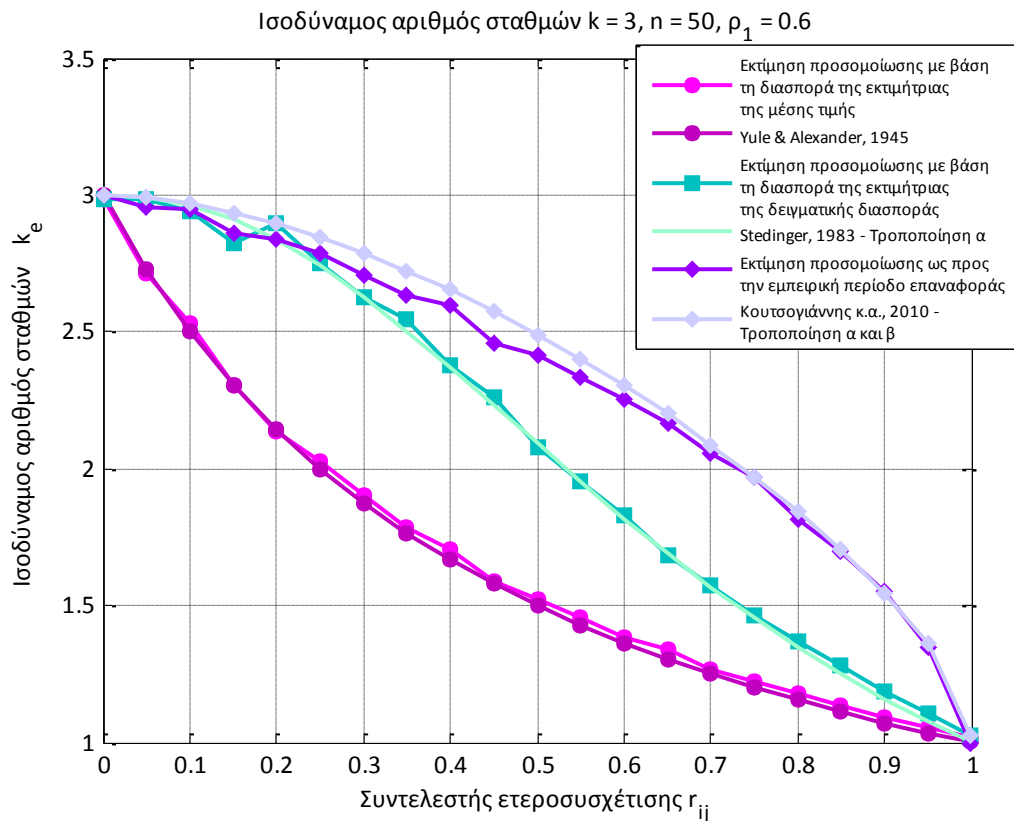
Σχήμα Δ.13: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



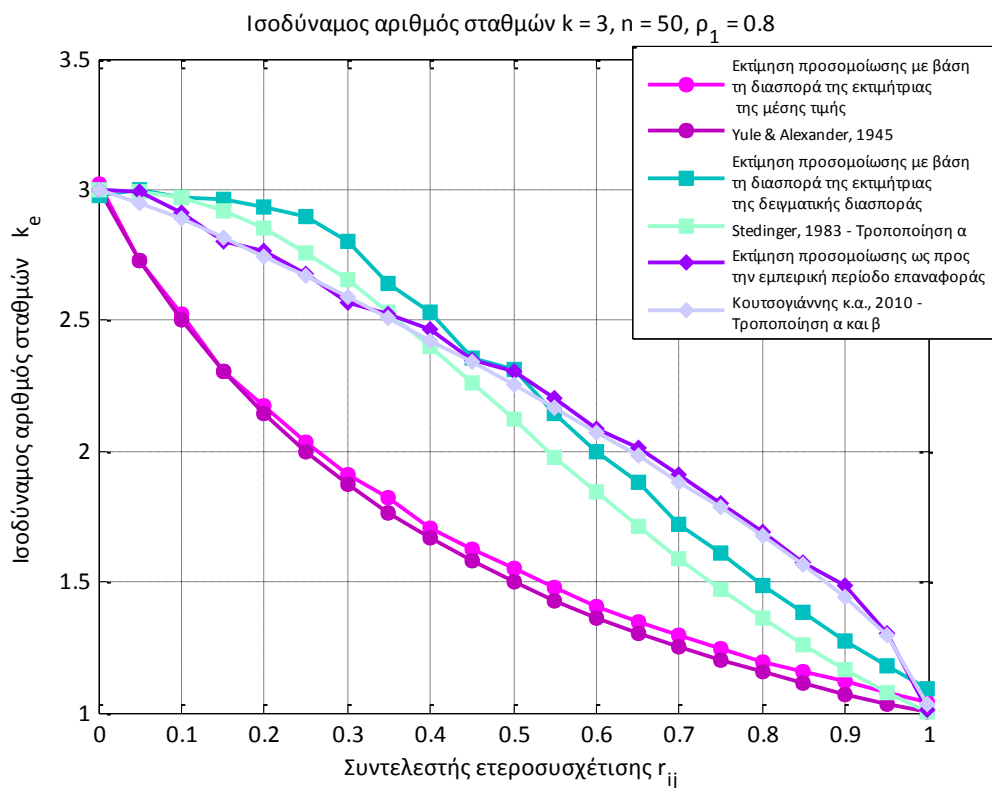
Σχήμα Δ.14: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



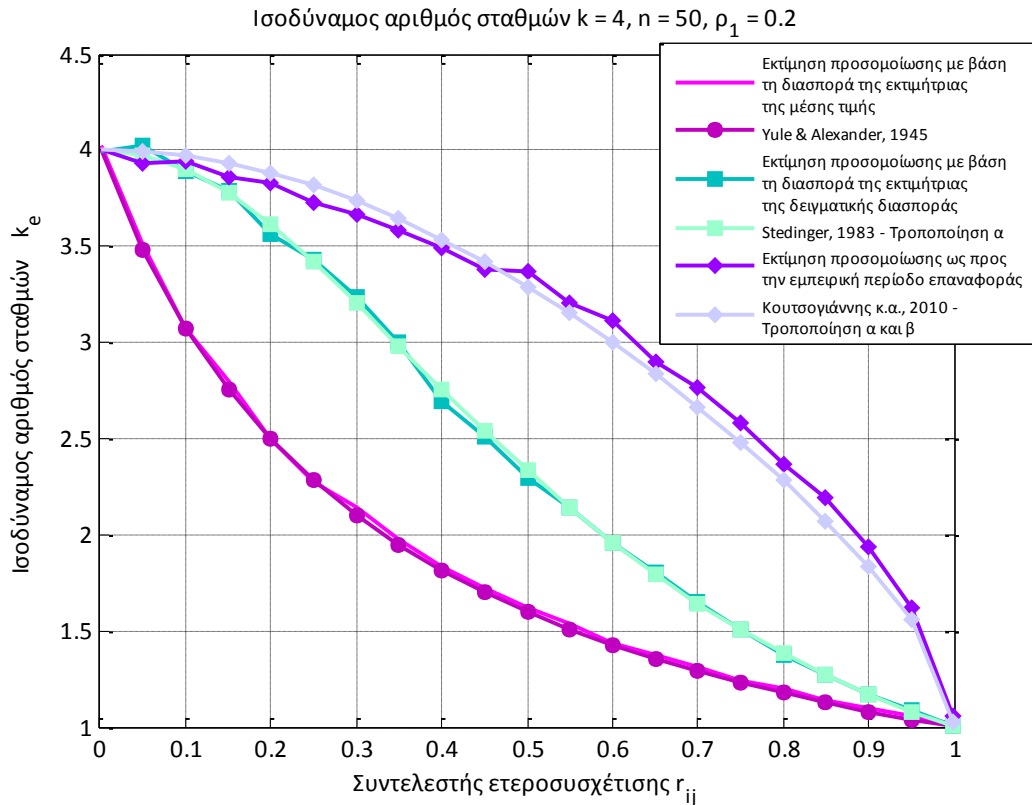
Σχήμα Δ.15: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



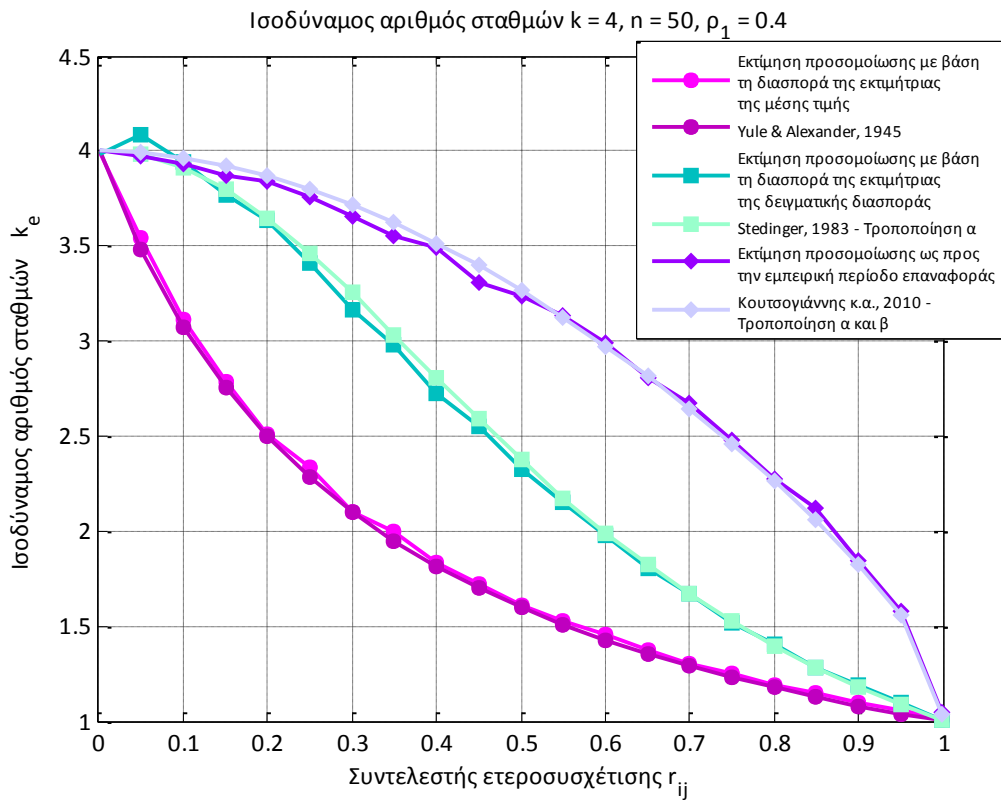
Σχήμα Δ.16: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



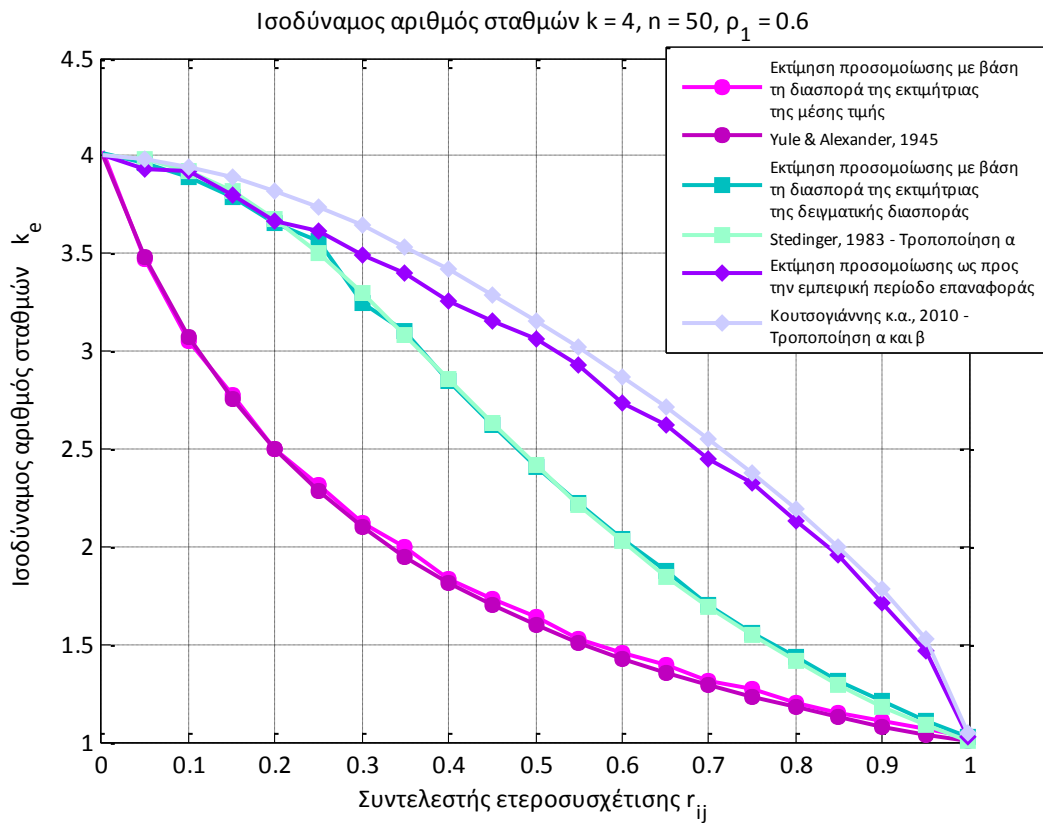
Σχήμα Δ.17: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



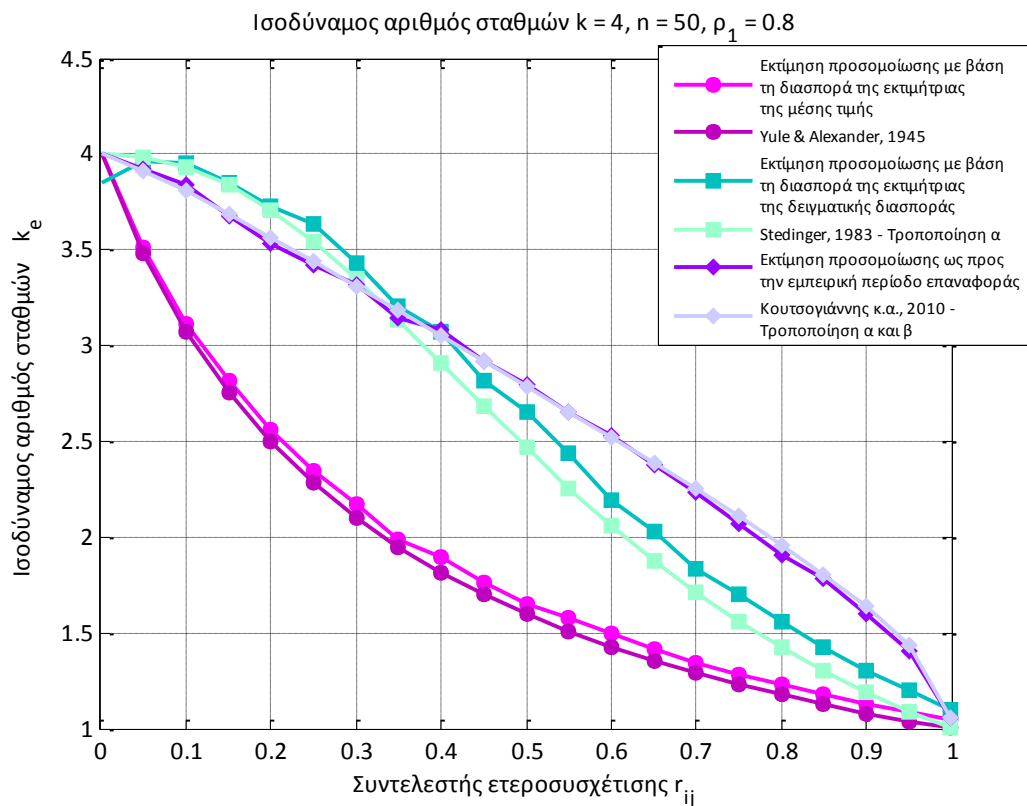
Σχήμα Δ.18: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



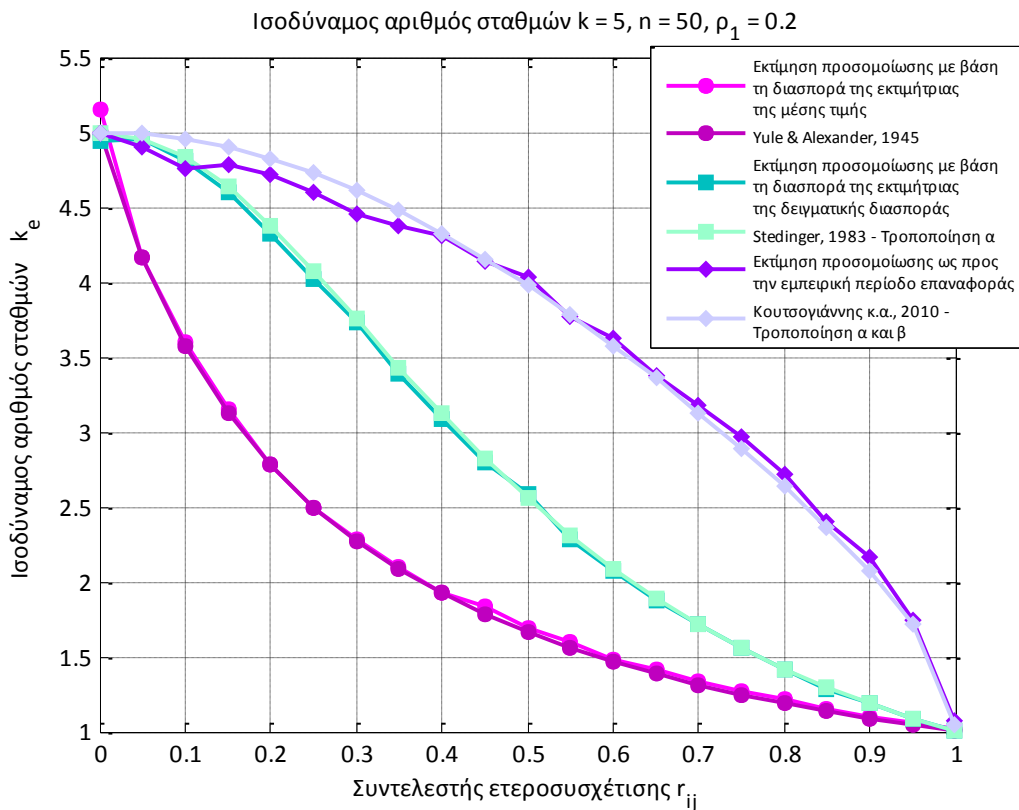
Σχήμα Δ.19: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



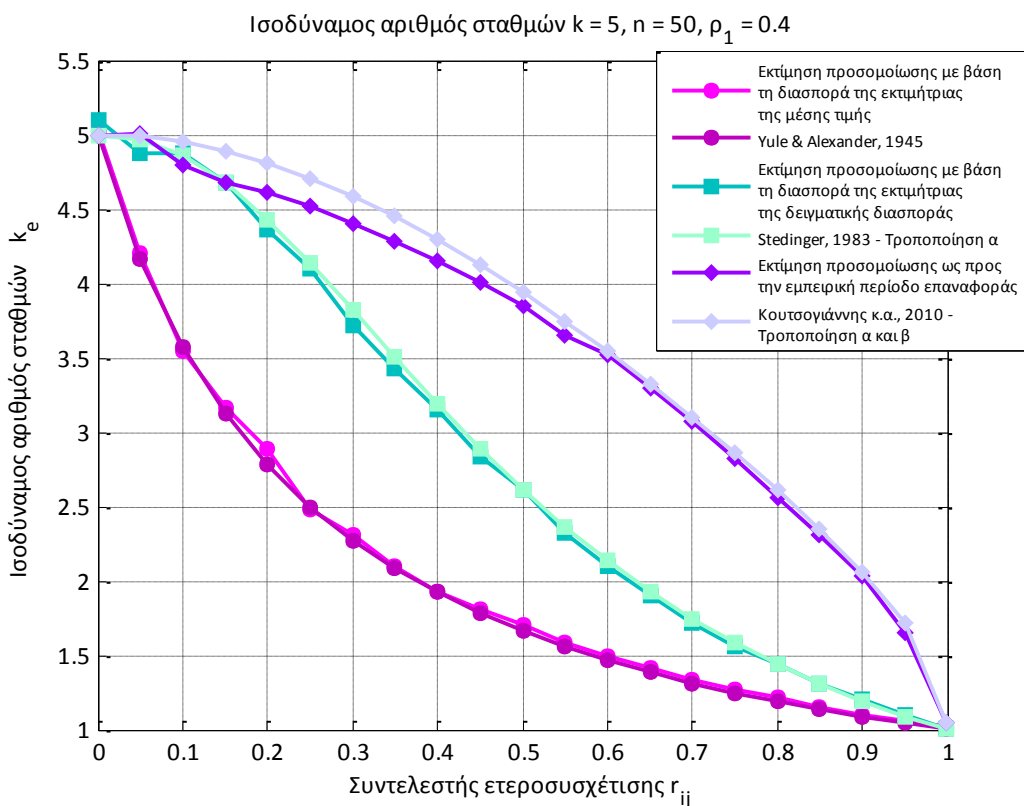
Σχήμα Δ.20: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



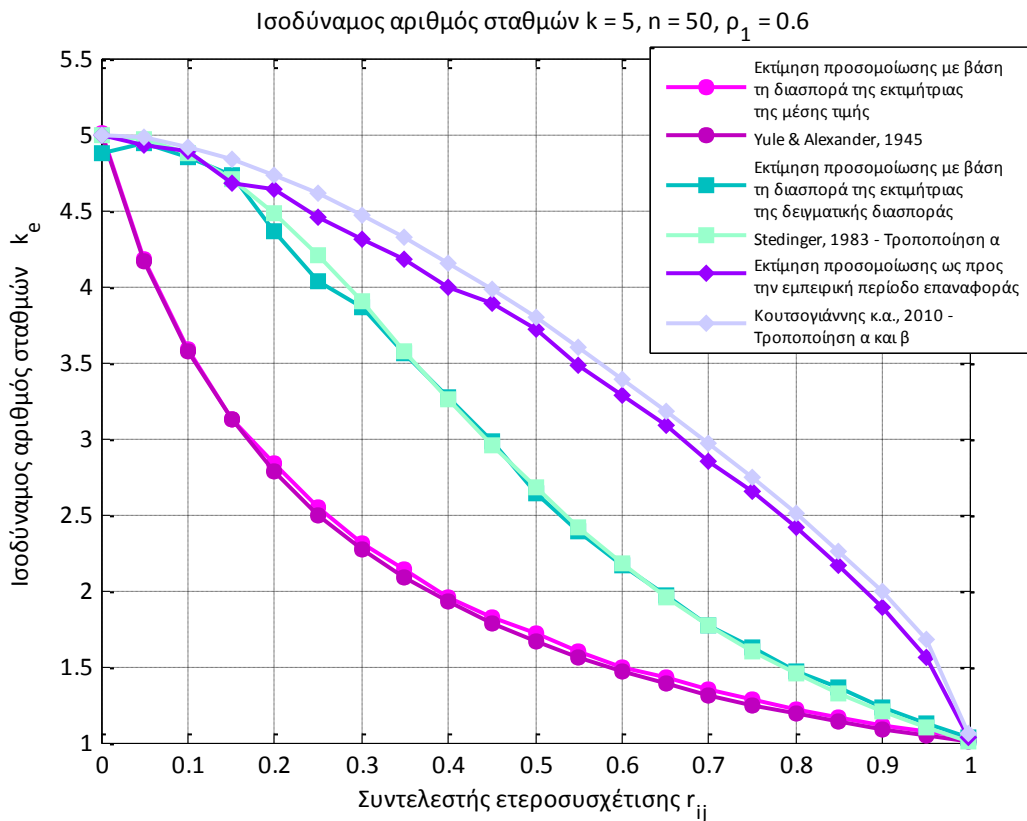
Σχήμα Δ.21: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



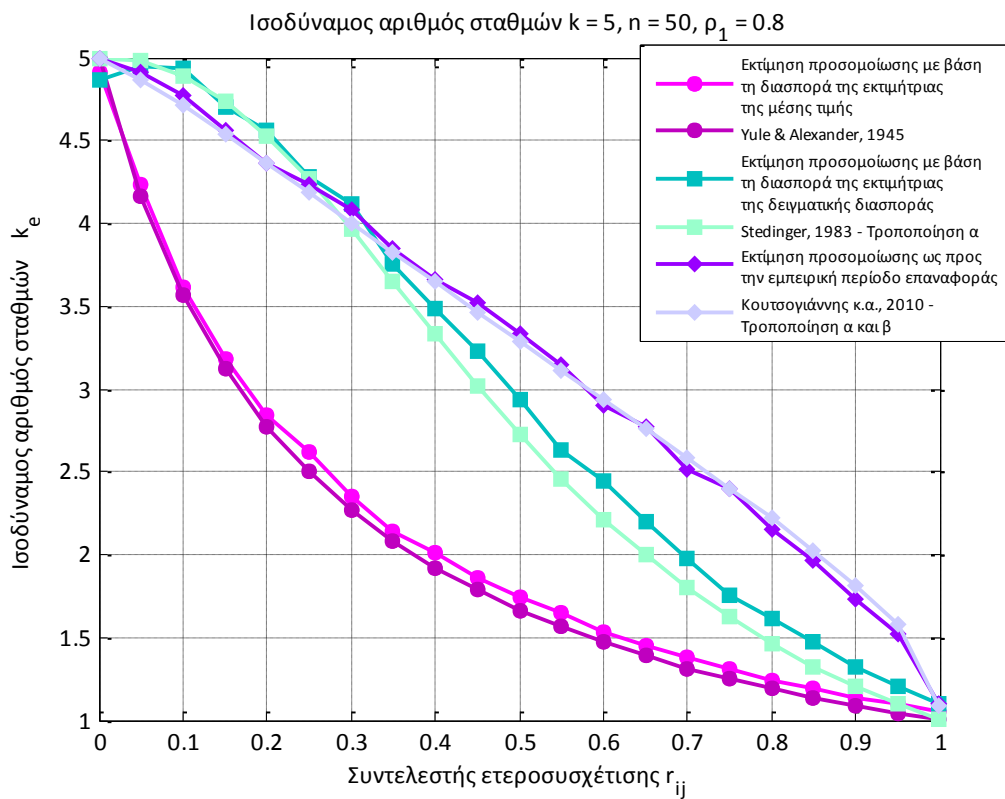
Σχήμα Δ.22: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



Σχήμα Δ.23: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$

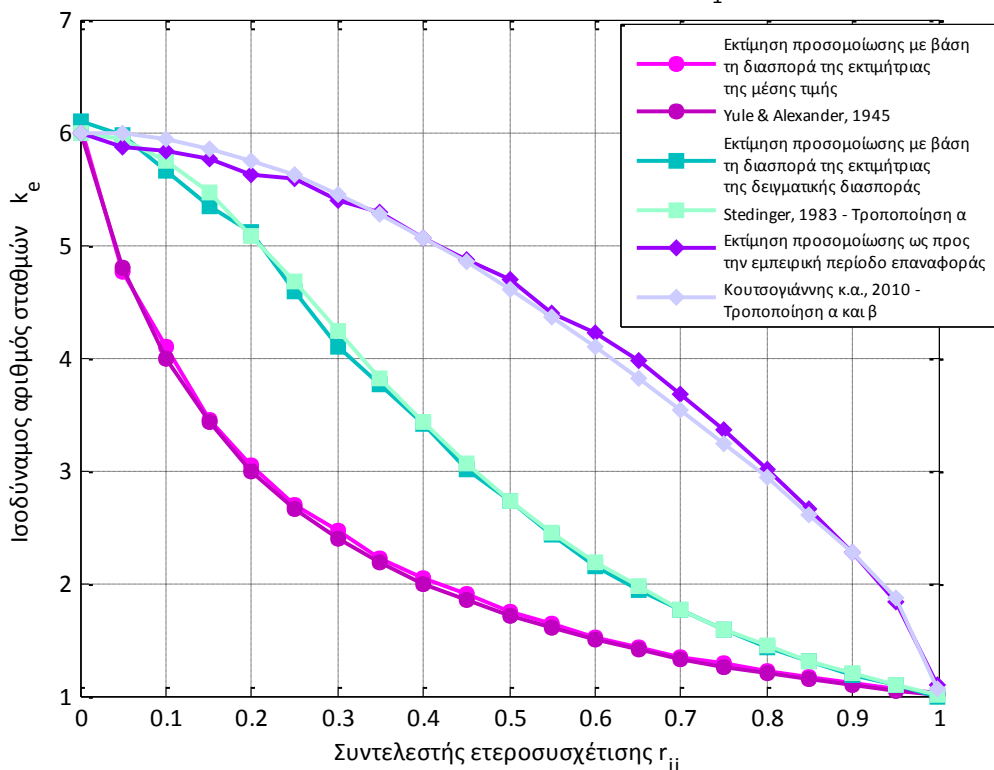


Σχήμα Δ.24: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



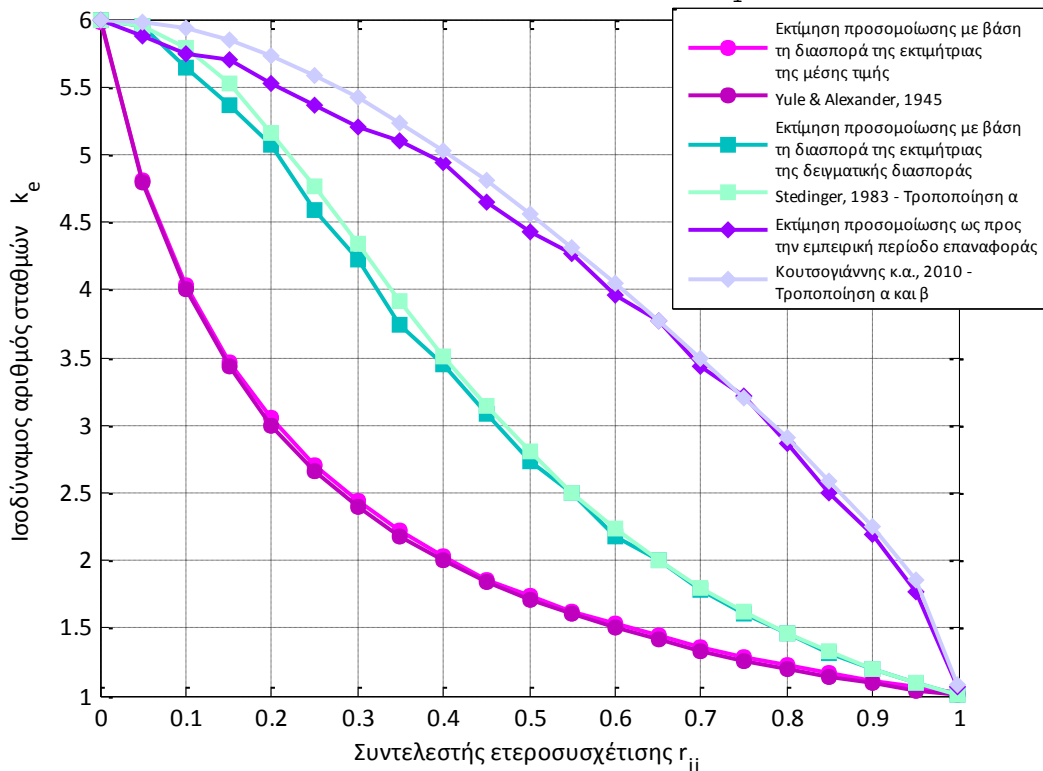
Σχήμα Δ.25: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$

Ισοδύναμος αριθμός σταθμών $k = 6, n = 50, \rho_1 = 0.2$

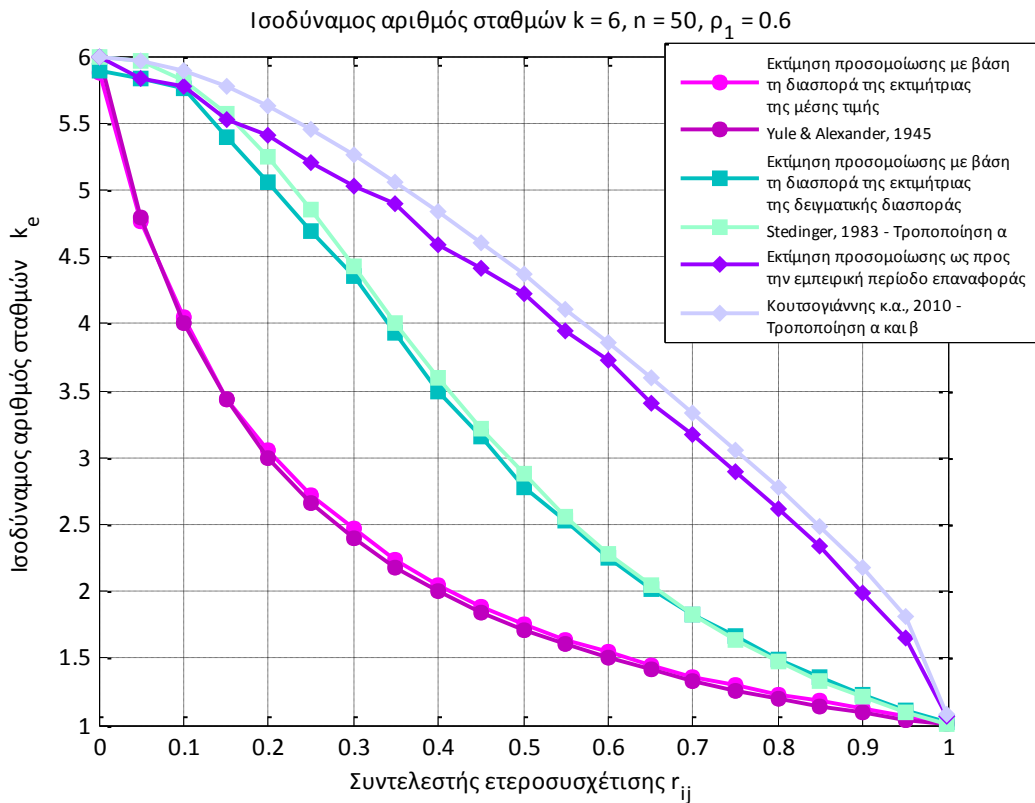


Σχήμα Δ.26: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$

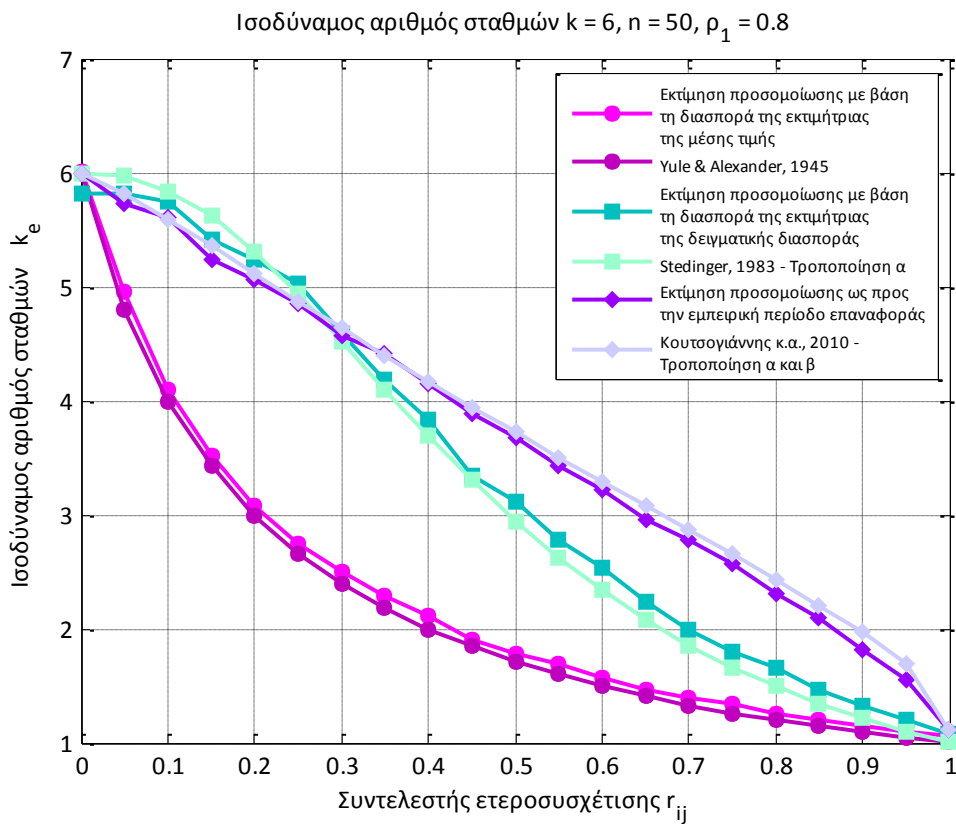
Ισοδύναμος αριθμός σταθμών $k = 6, n = 50, \rho_1 = 0.4$



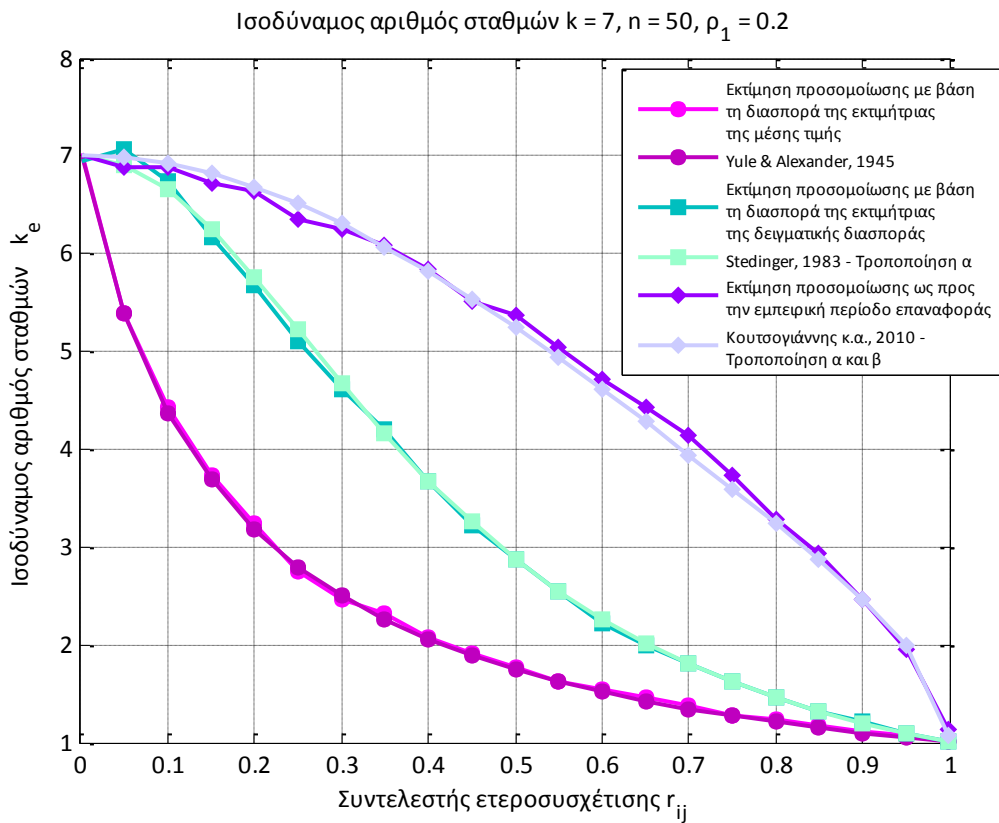
Σχήμα Δ.27: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



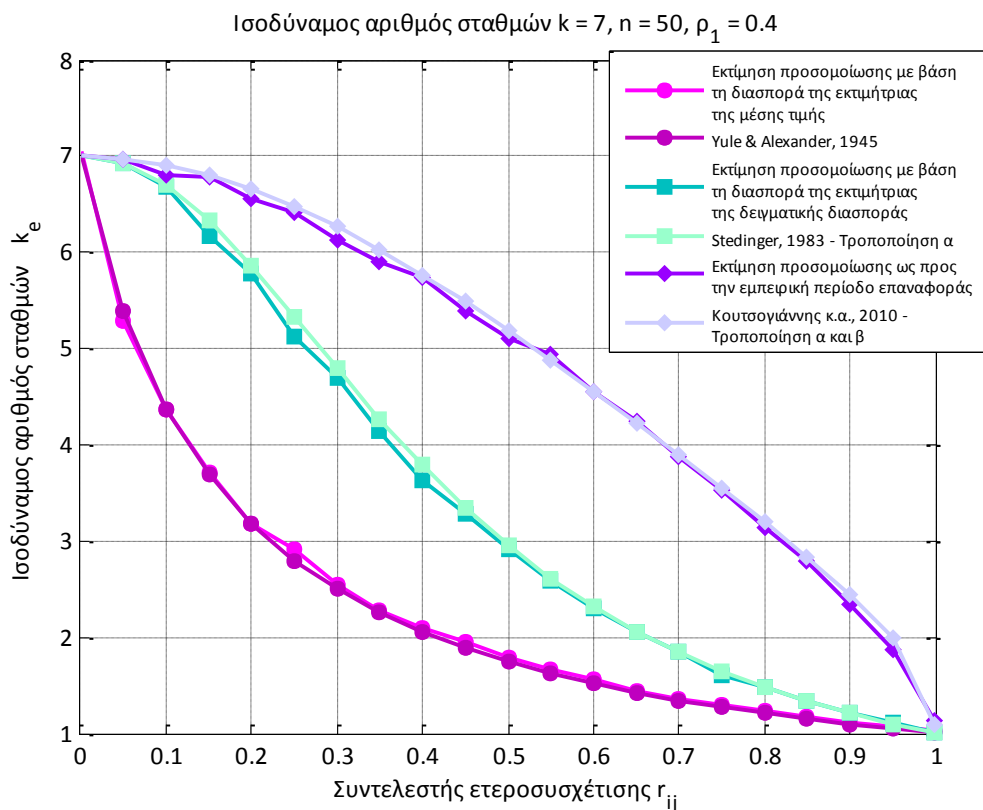
Σχήμα Δ.28: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



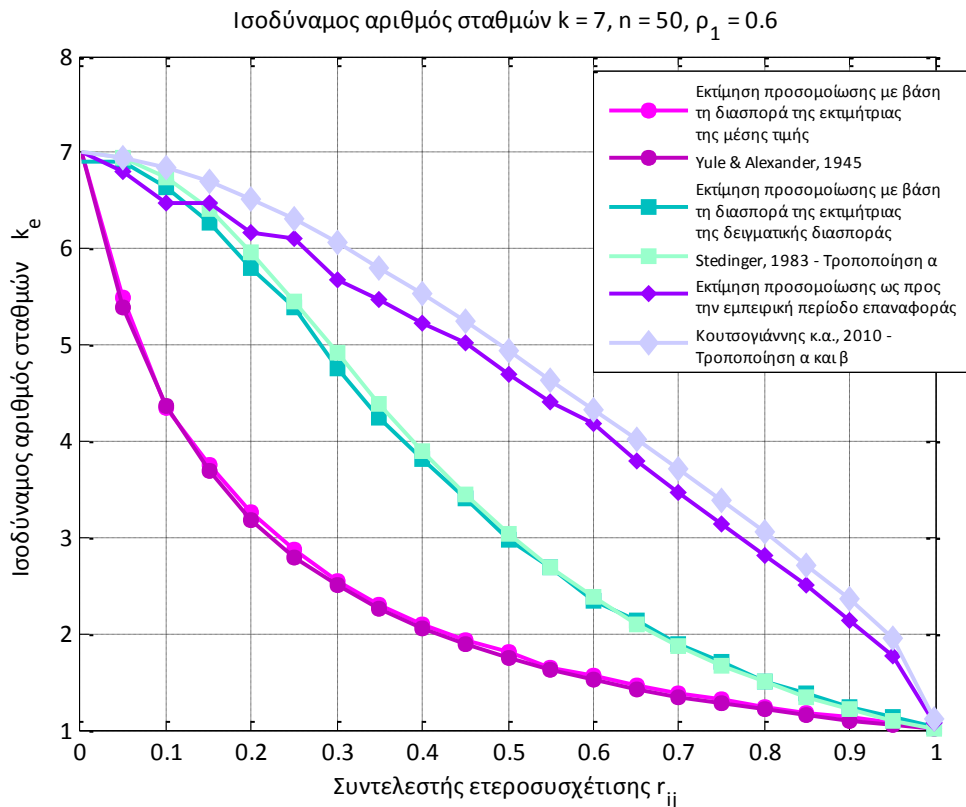
Σχήμα Δ.29: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



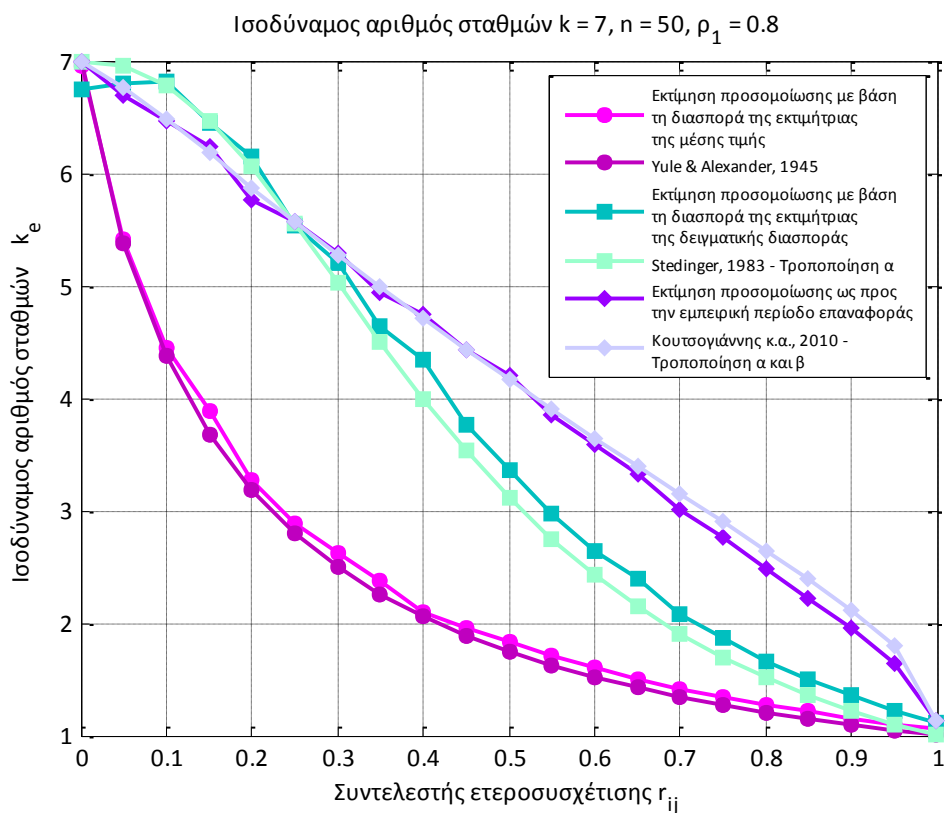
Σχήμα Δ.30: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



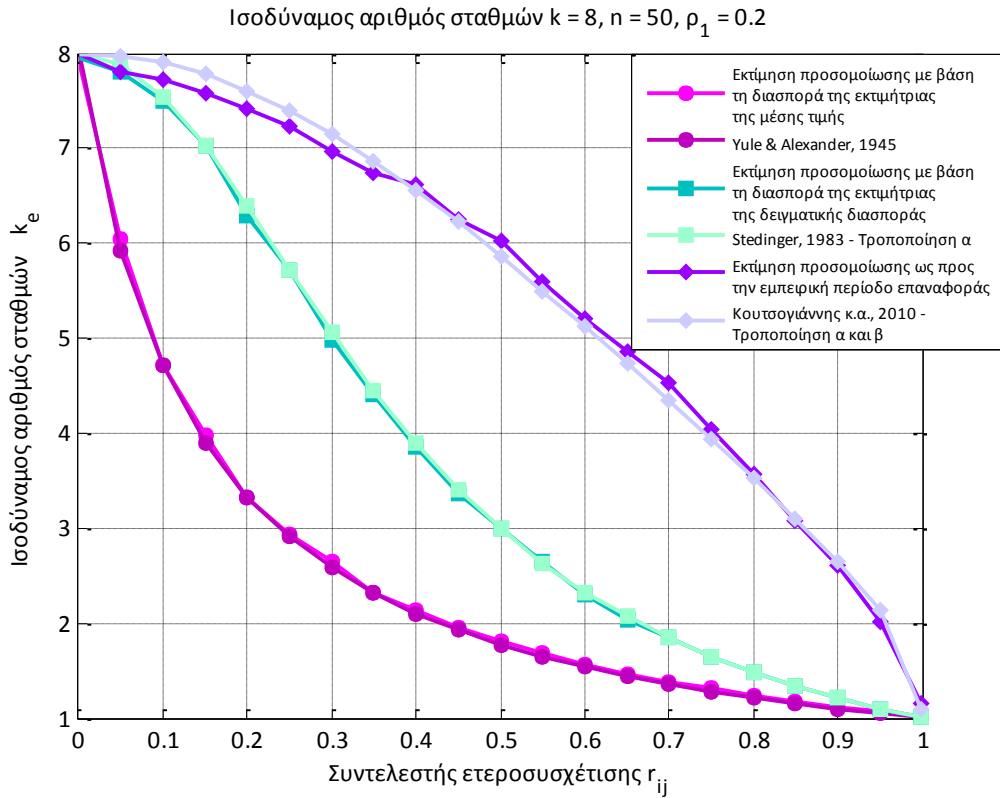
Σχήμα Δ.31: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



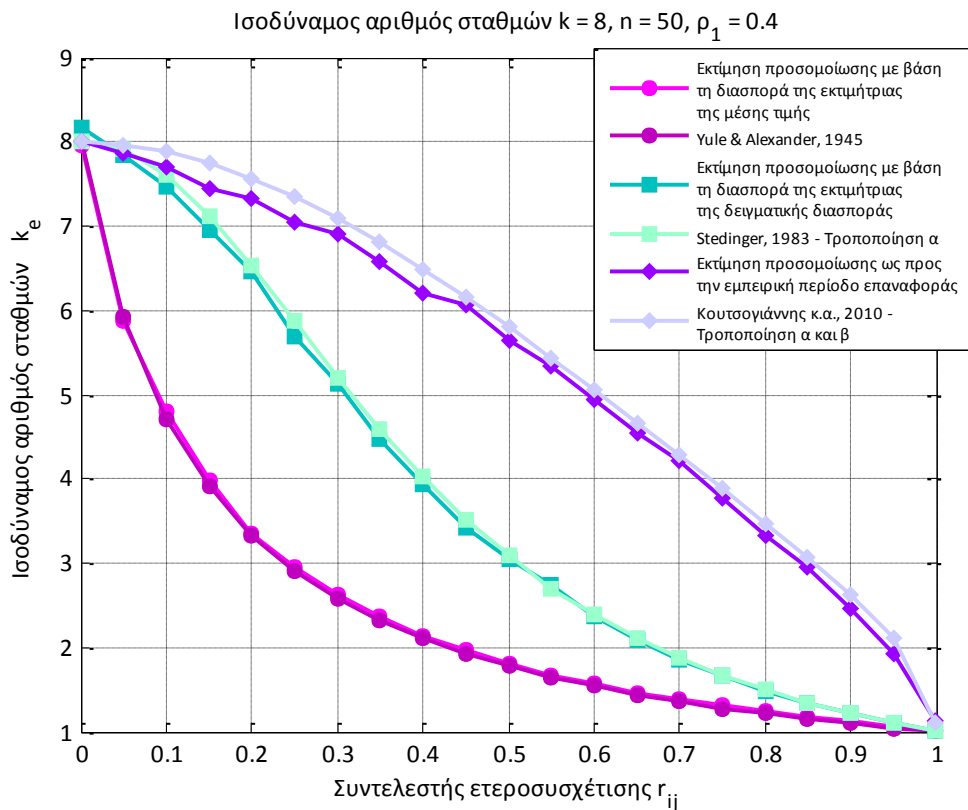
Σχήμα Δ.32: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



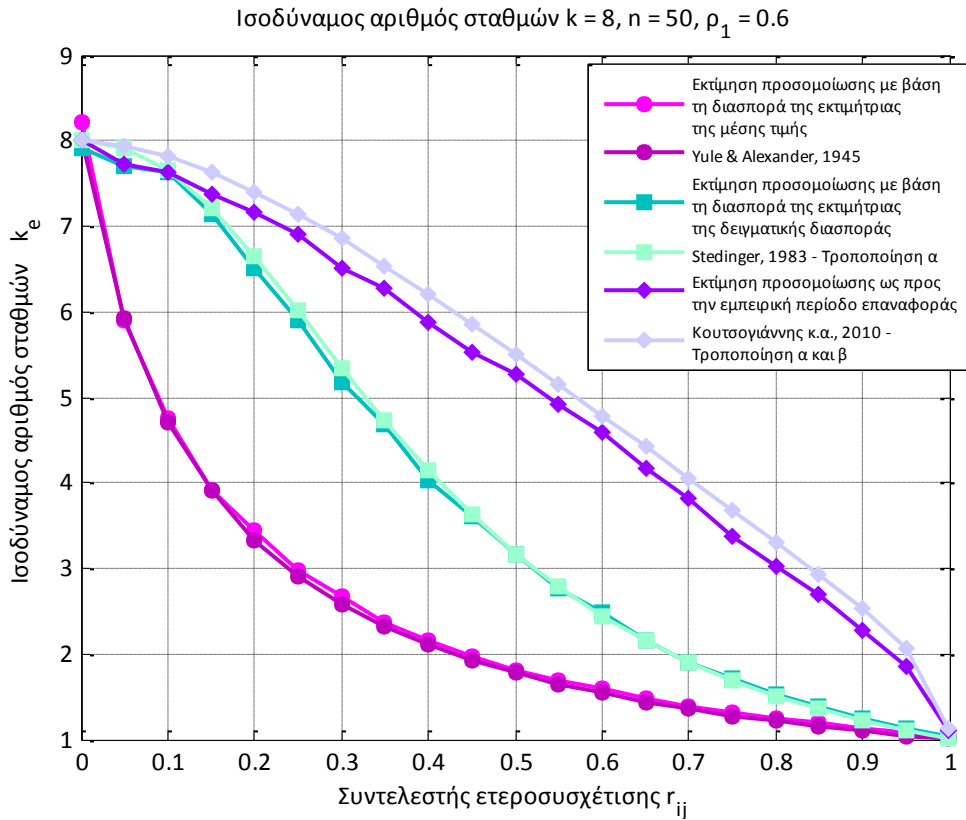
Σχήμα Δ.33: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



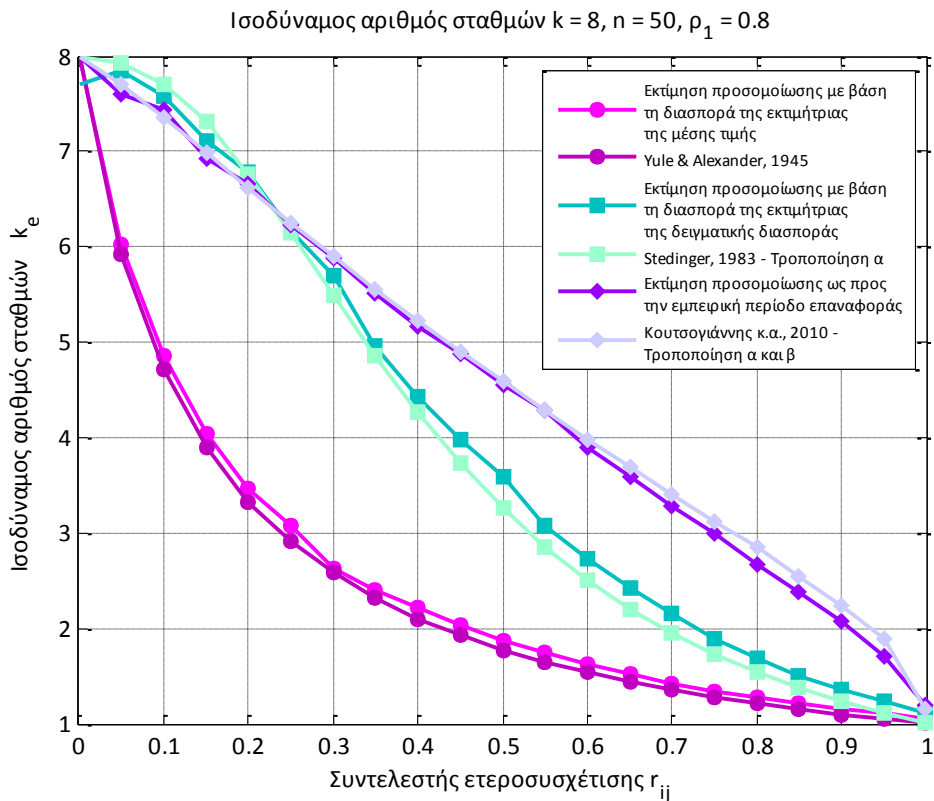
Σχήμα Δ.34: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



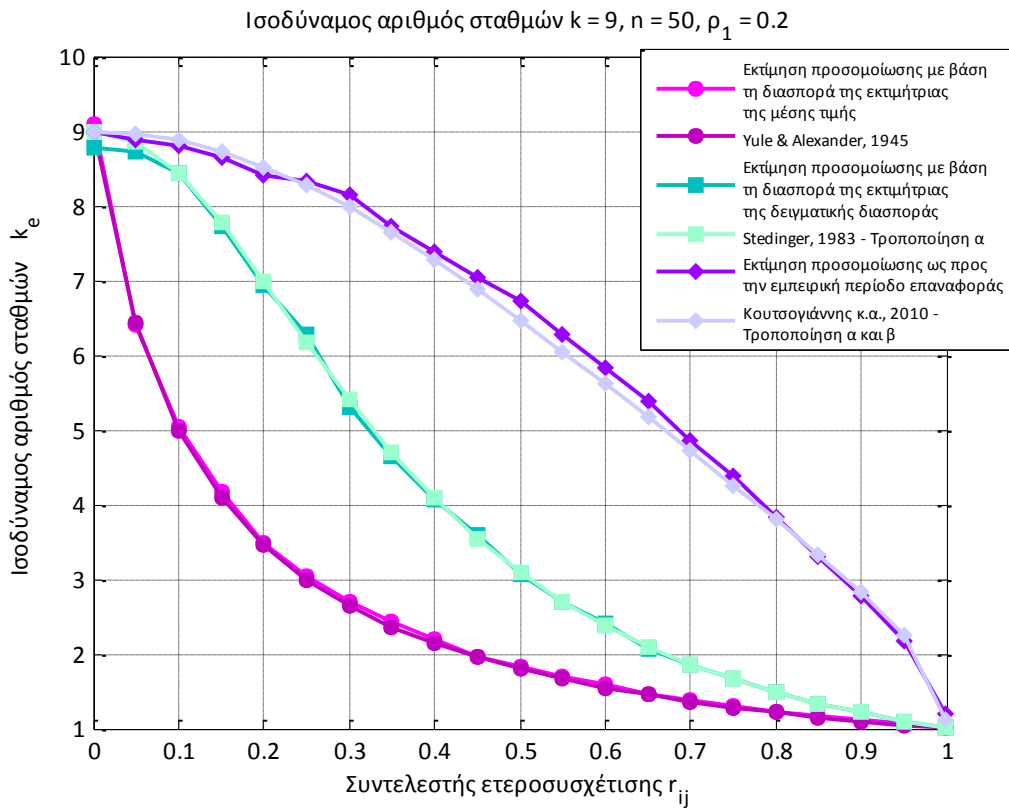
Σχήμα Δ.35: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



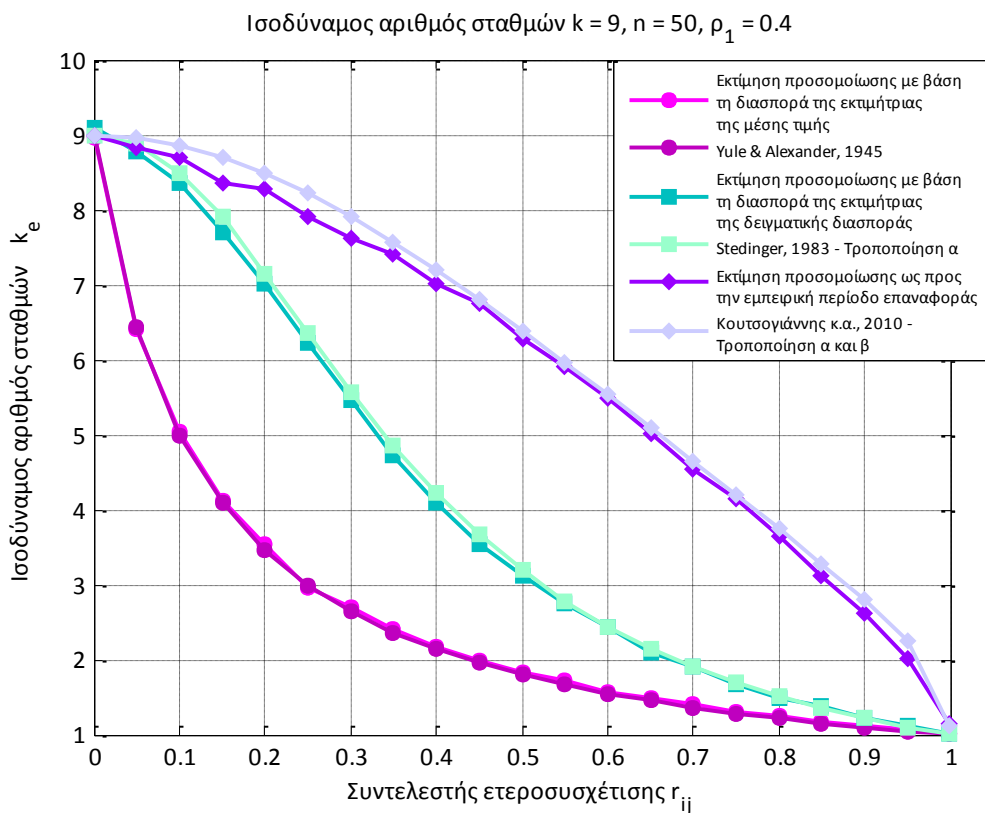
Σχήμα Δ.36: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



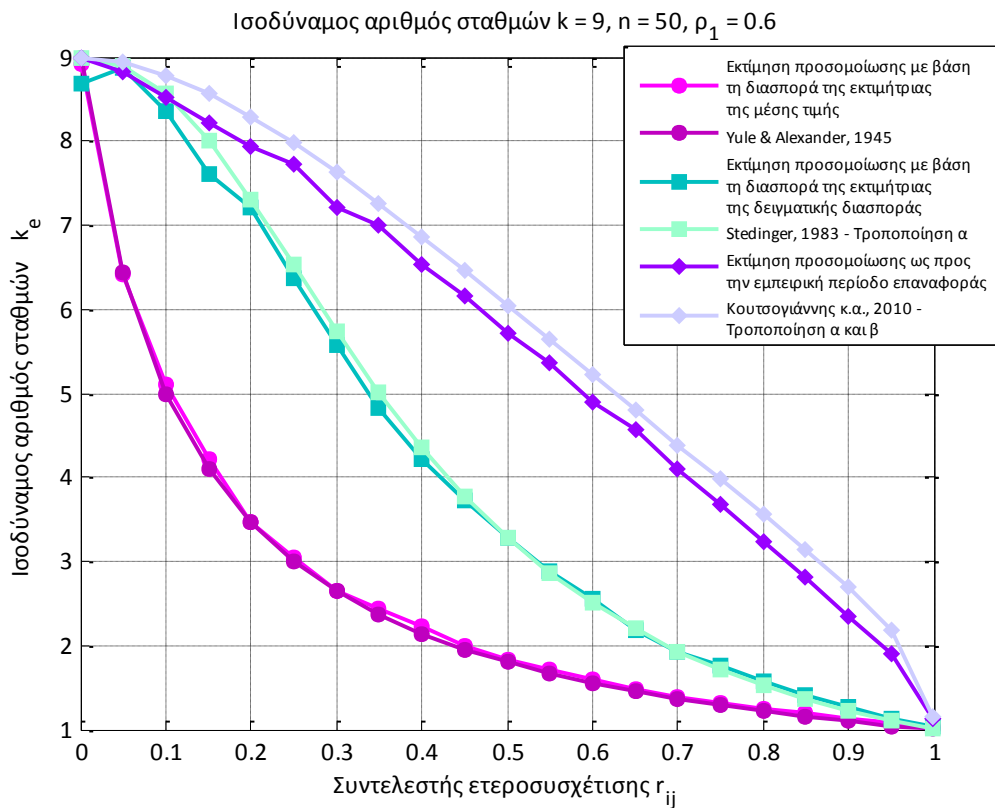
Σχήμα Δ.37: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



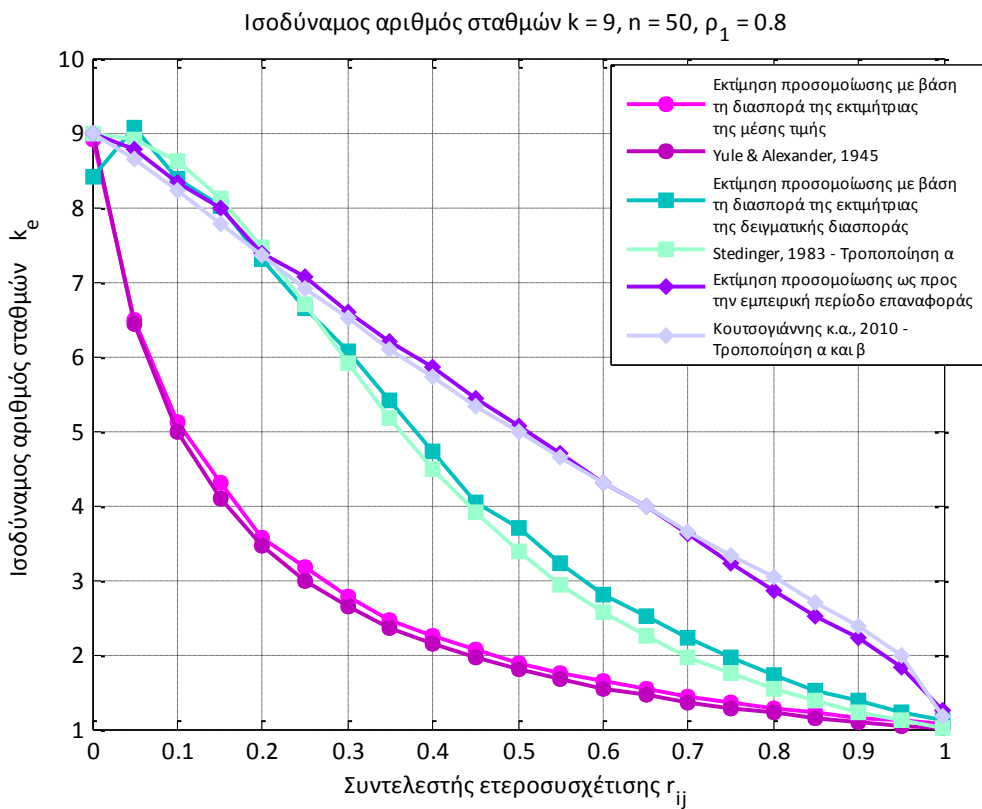
Σχήμα Δ.38: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



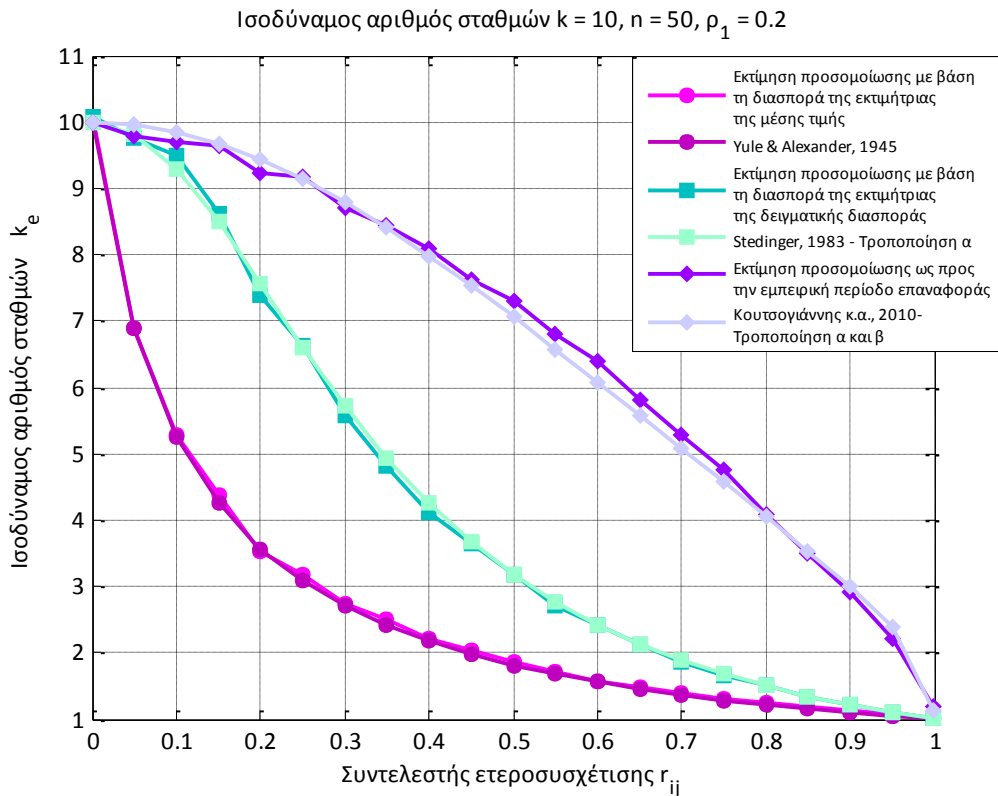
Σχήμα Δ.39: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



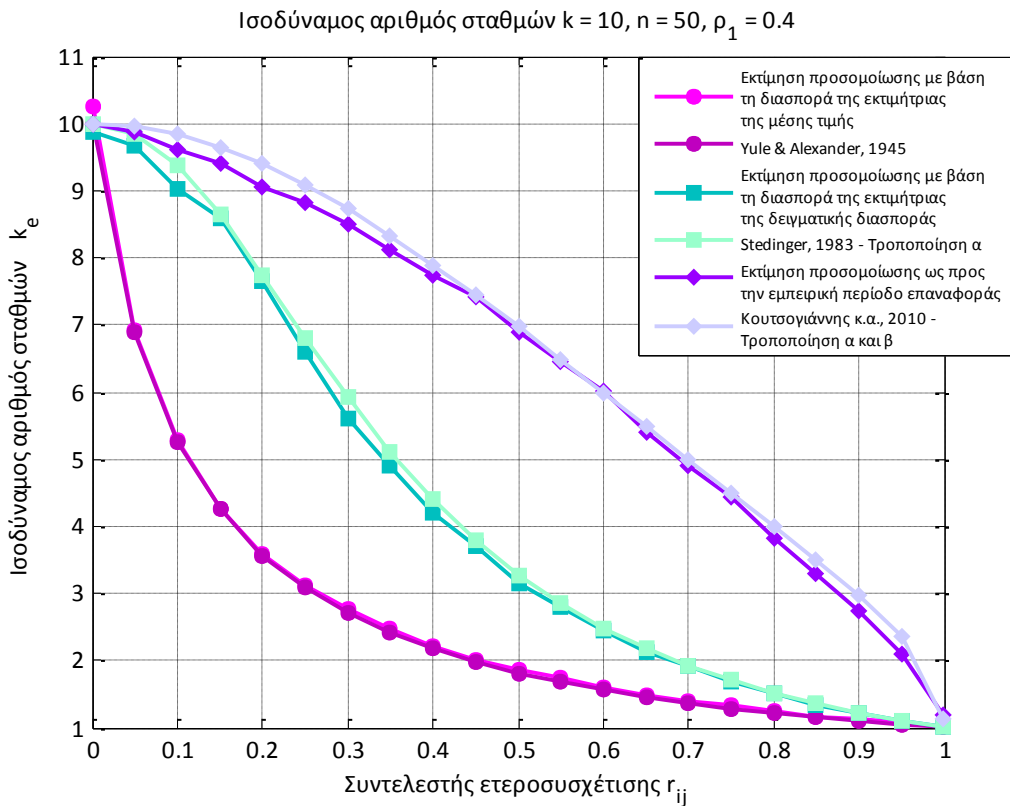
Σχήμα Δ.40: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



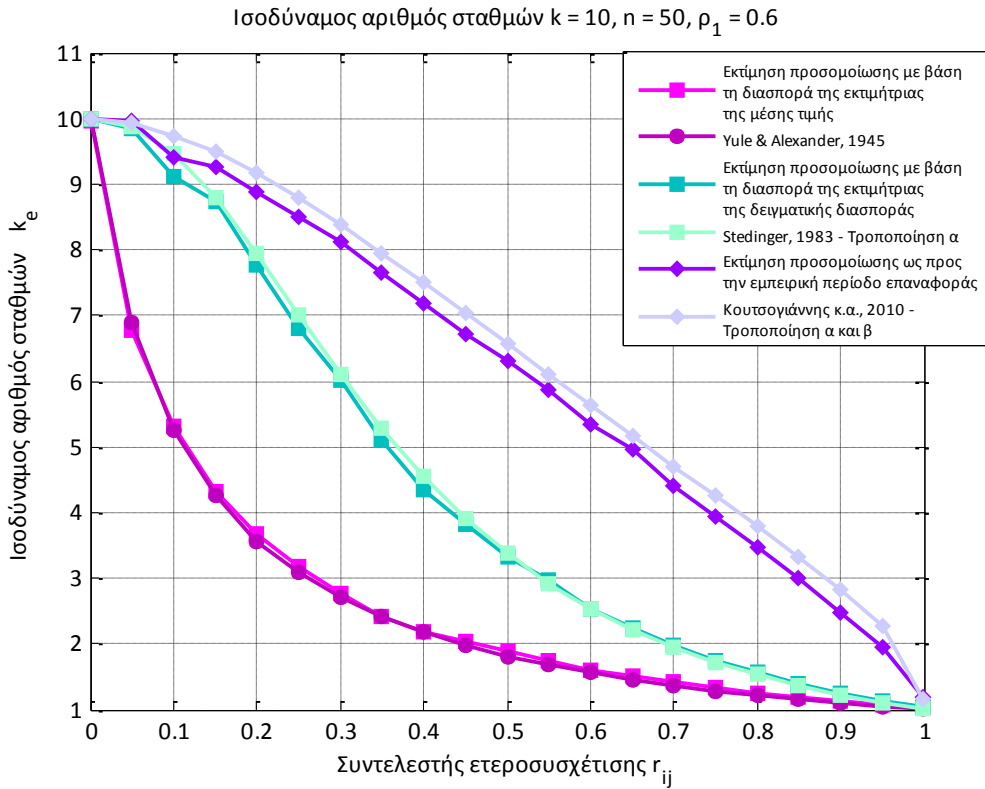
Σχήμα Δ.41: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



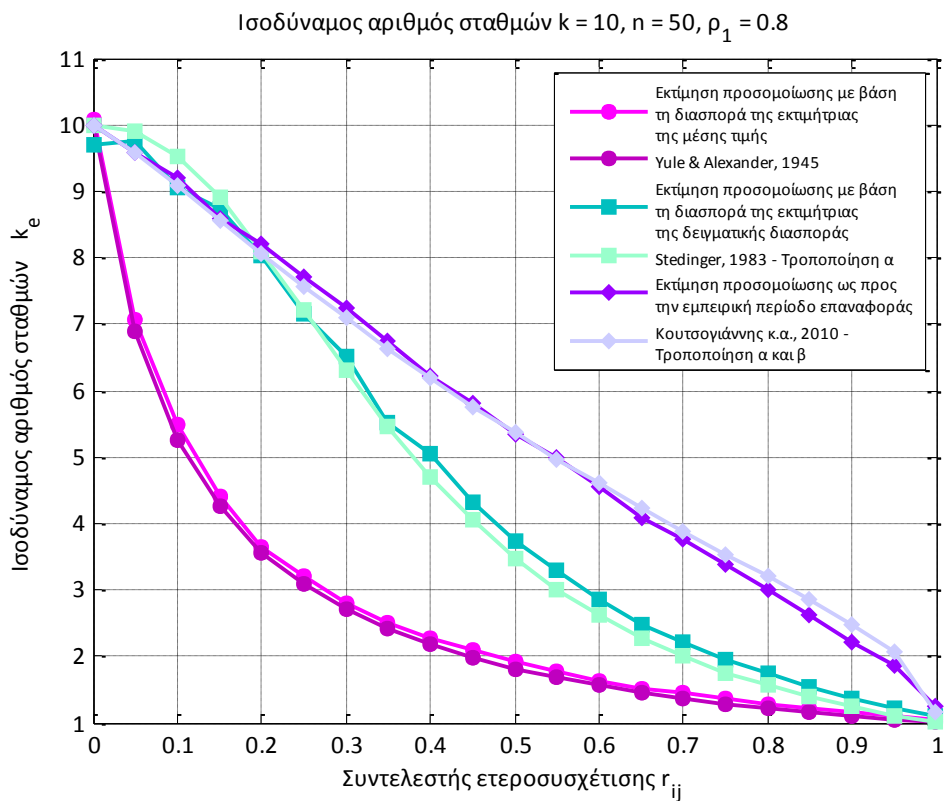
Σχήμα Δ.42: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.2$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα Δ.43: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.4$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

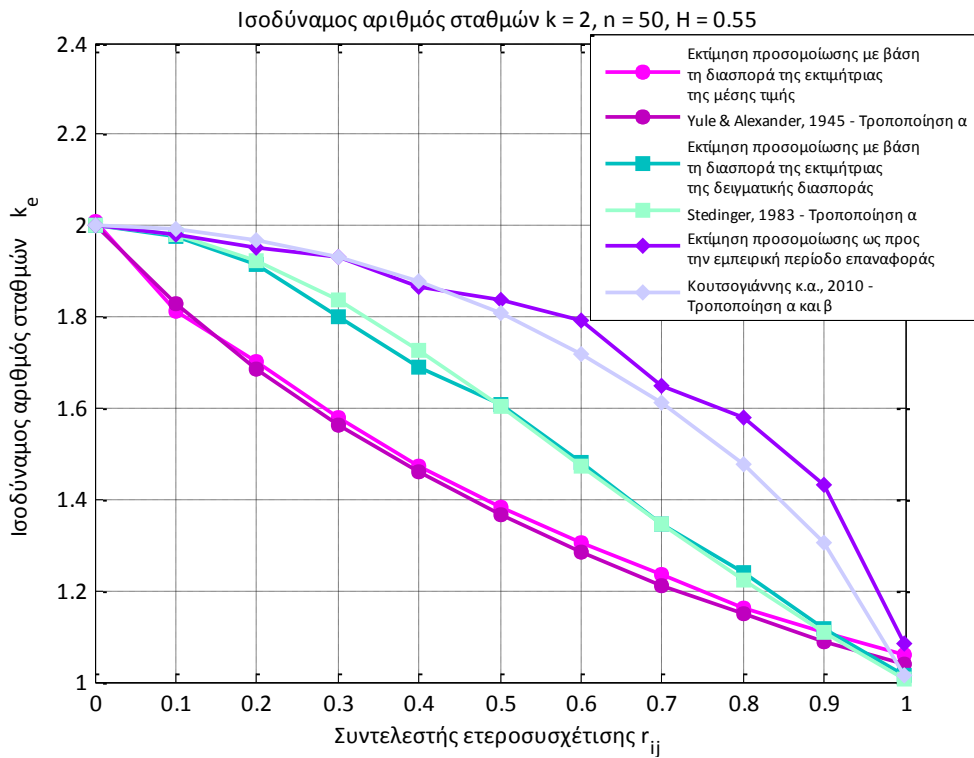


Σχήμα Δ.44: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

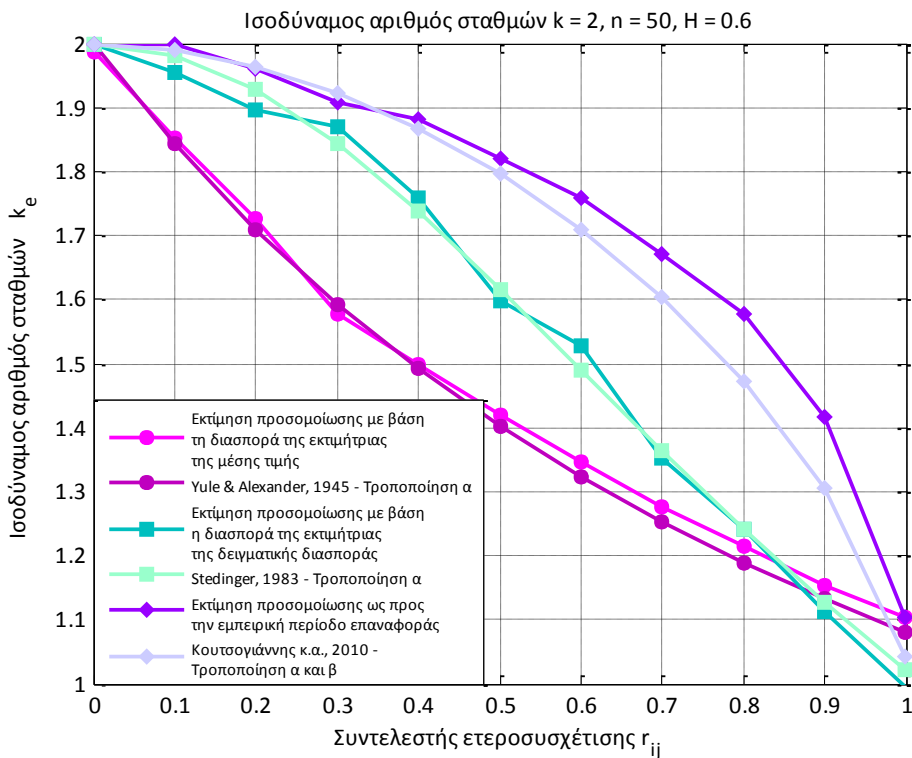


Σχήμα Δ.45: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$

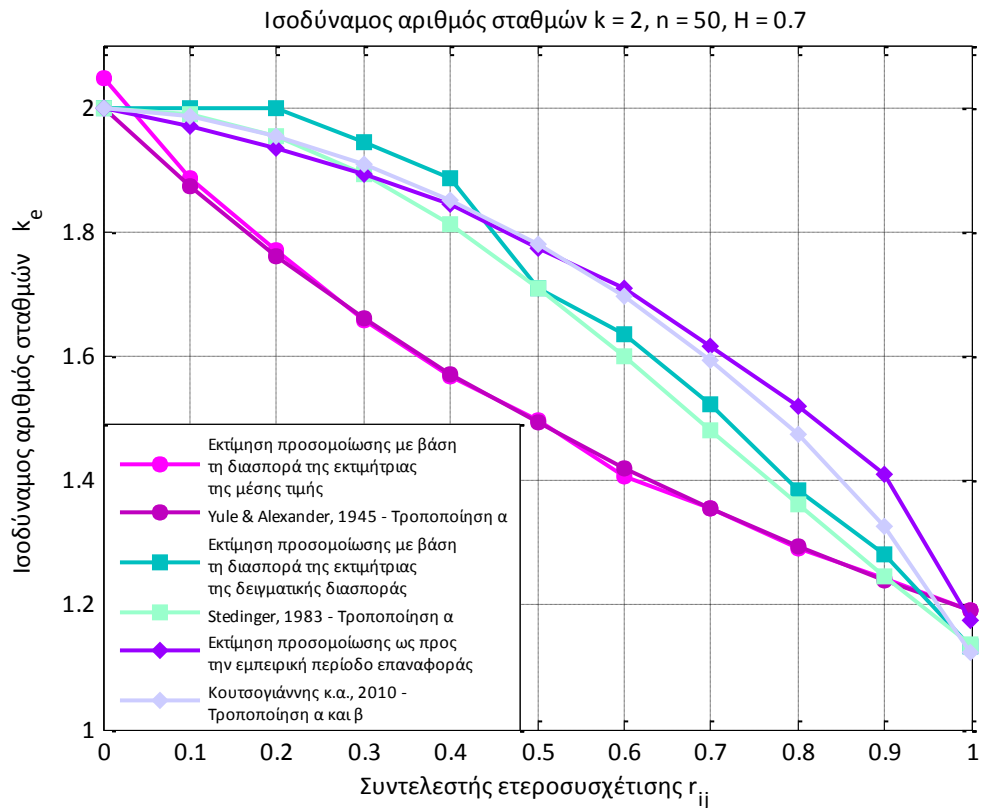
Περίπτωση εξαρτημένων χρονικά υδρολογικών χρονοσειρών (Ανεξίξεις Απλής Ομοιοθεσίας)



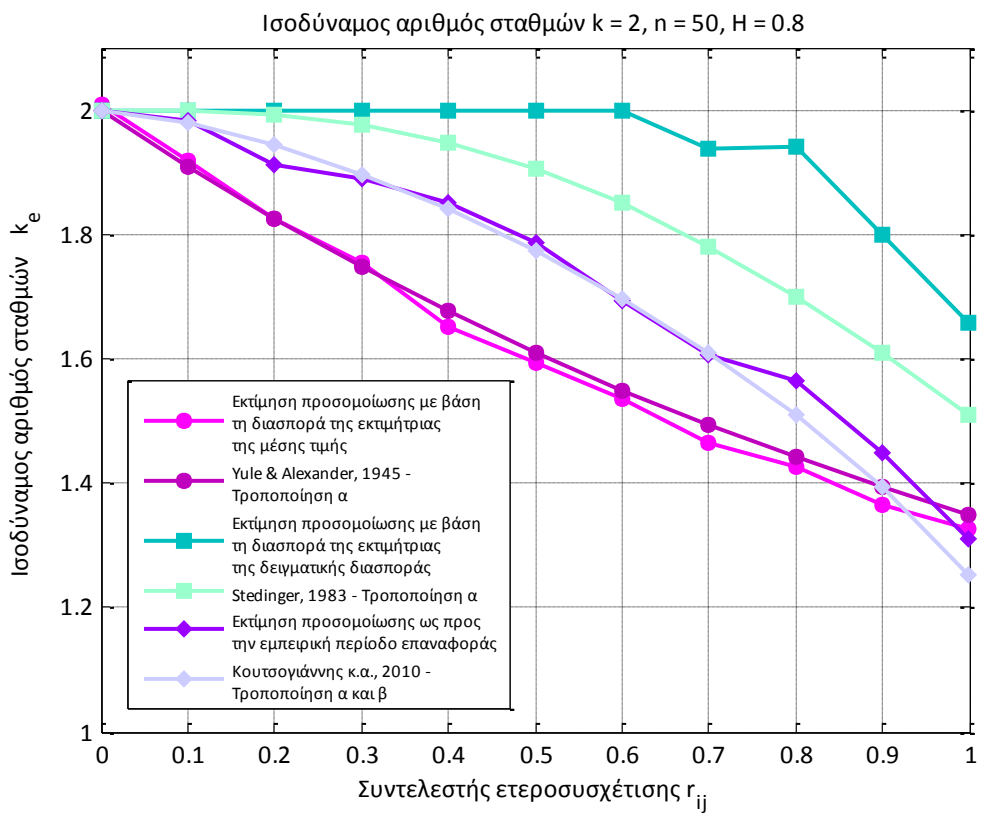
Σχήμα Δ.46: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



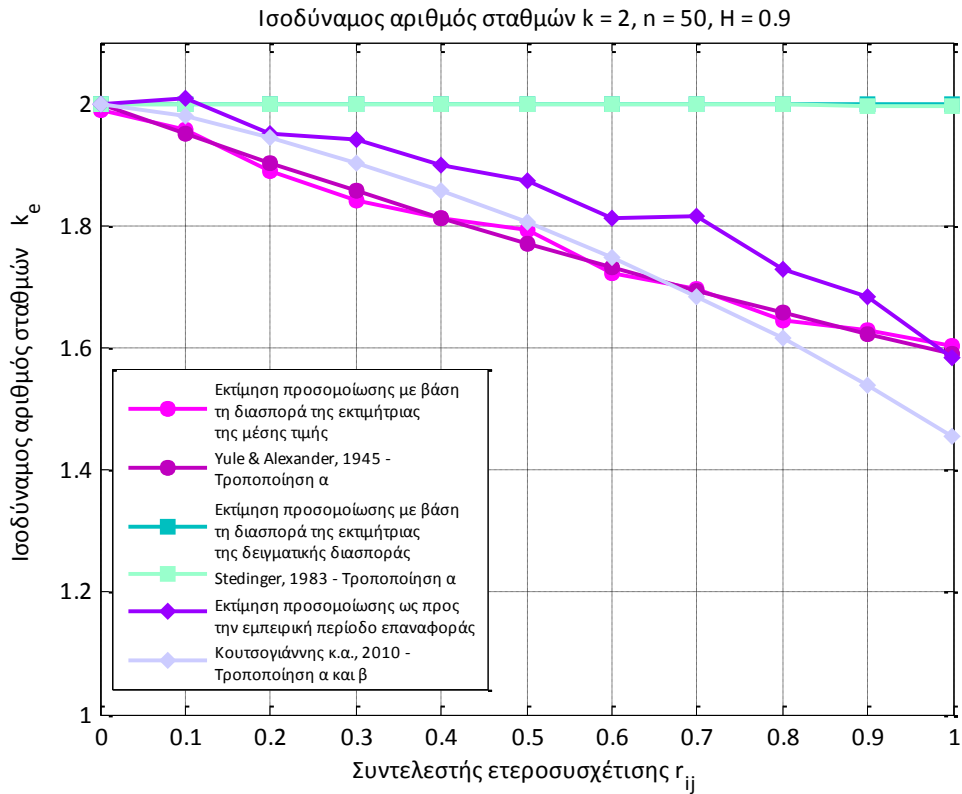
Σχήμα Δ.47: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



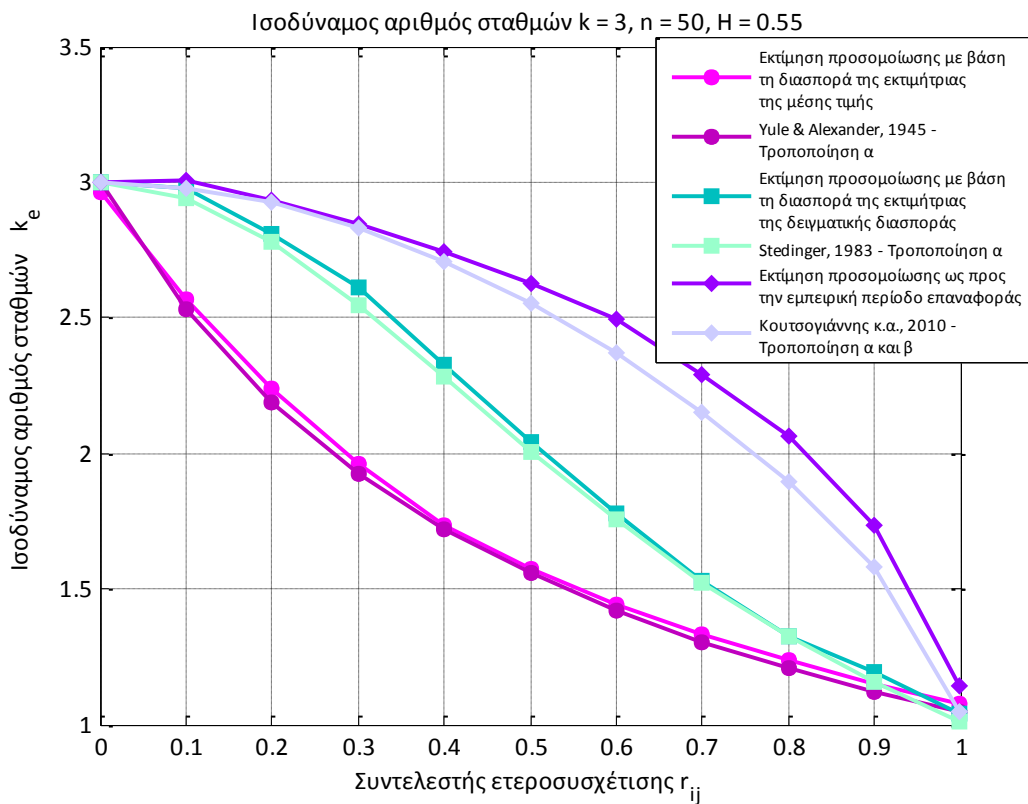
Σχήμα Δ.48: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



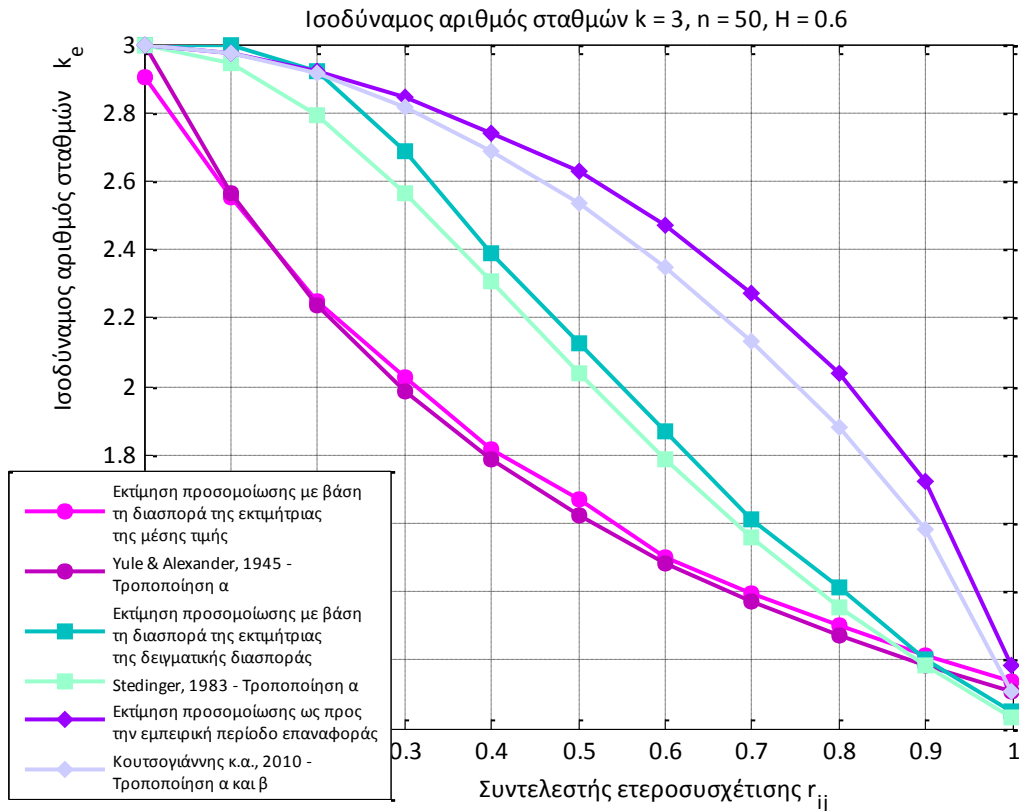
Σχήμα Δ.49: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



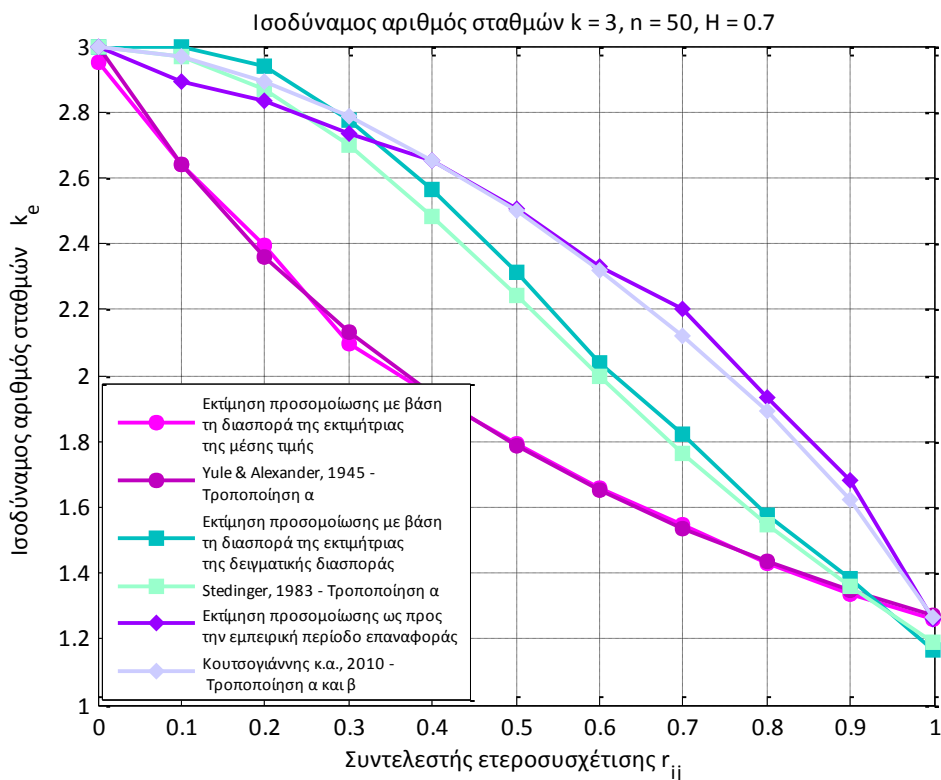
Σχήμα Δ.50: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 2$



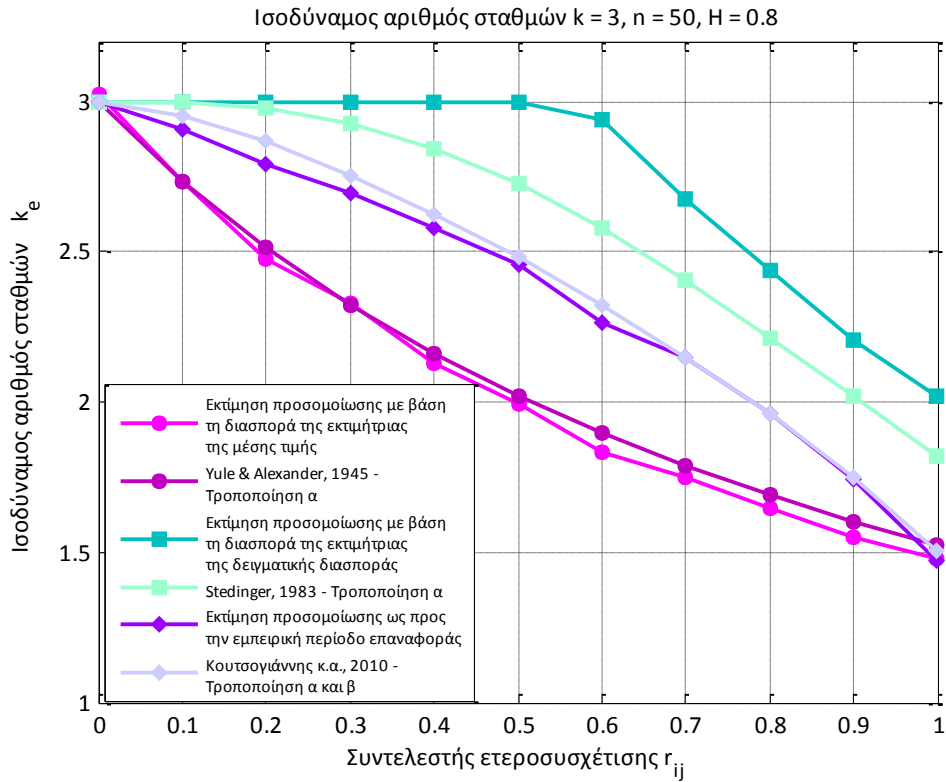
Σχήμα Δ.51: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



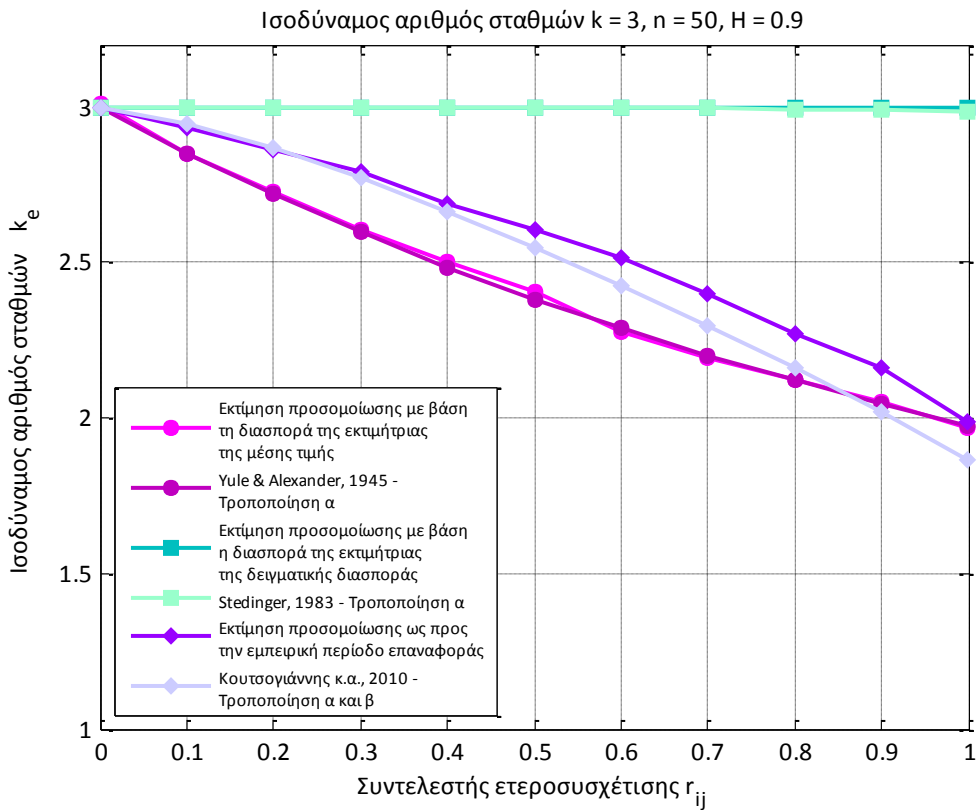
Σχήμα Δ.52: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



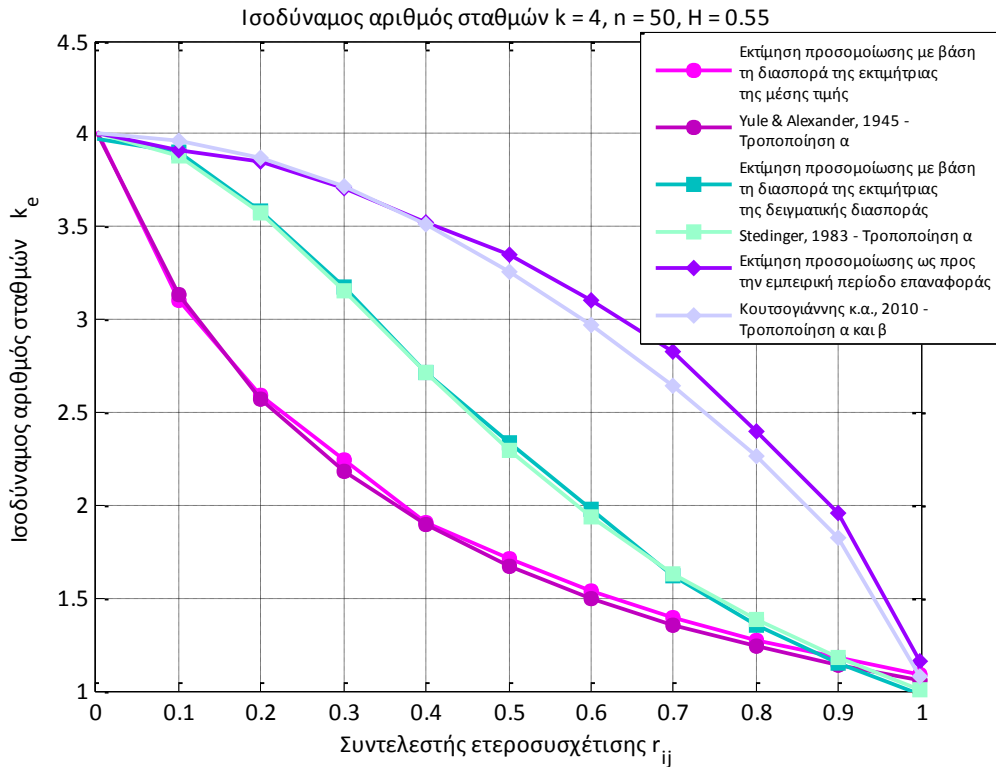
Σχήμα Δ.53: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



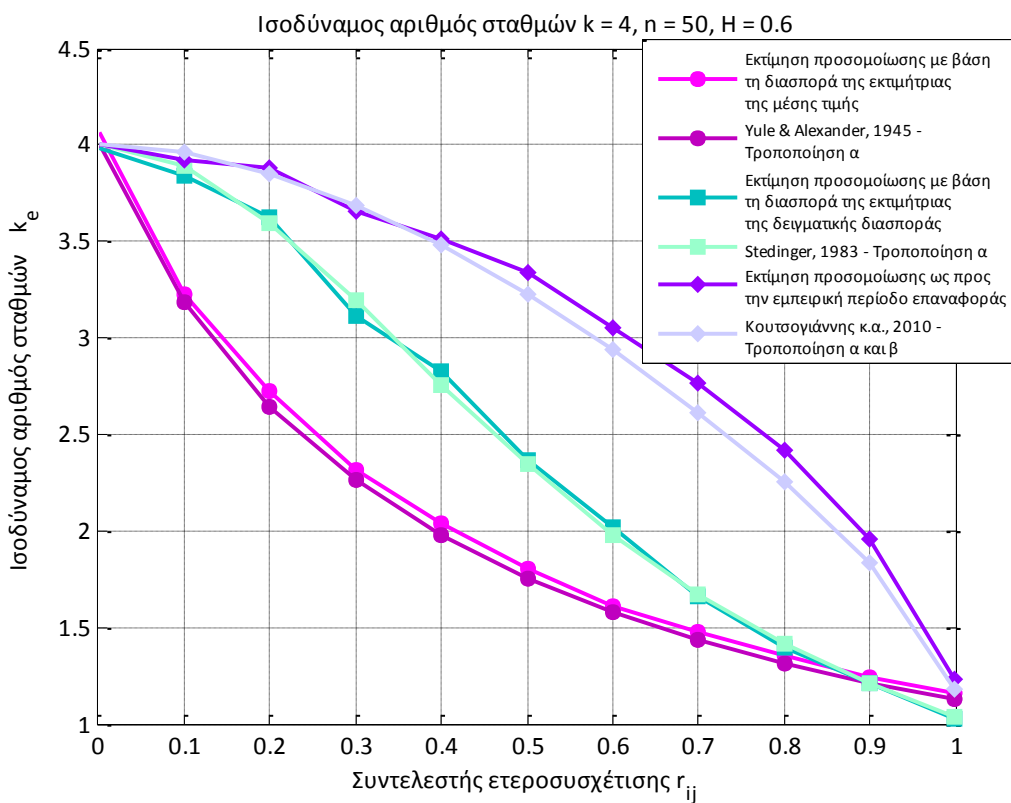
Σχήμα Δ.54: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



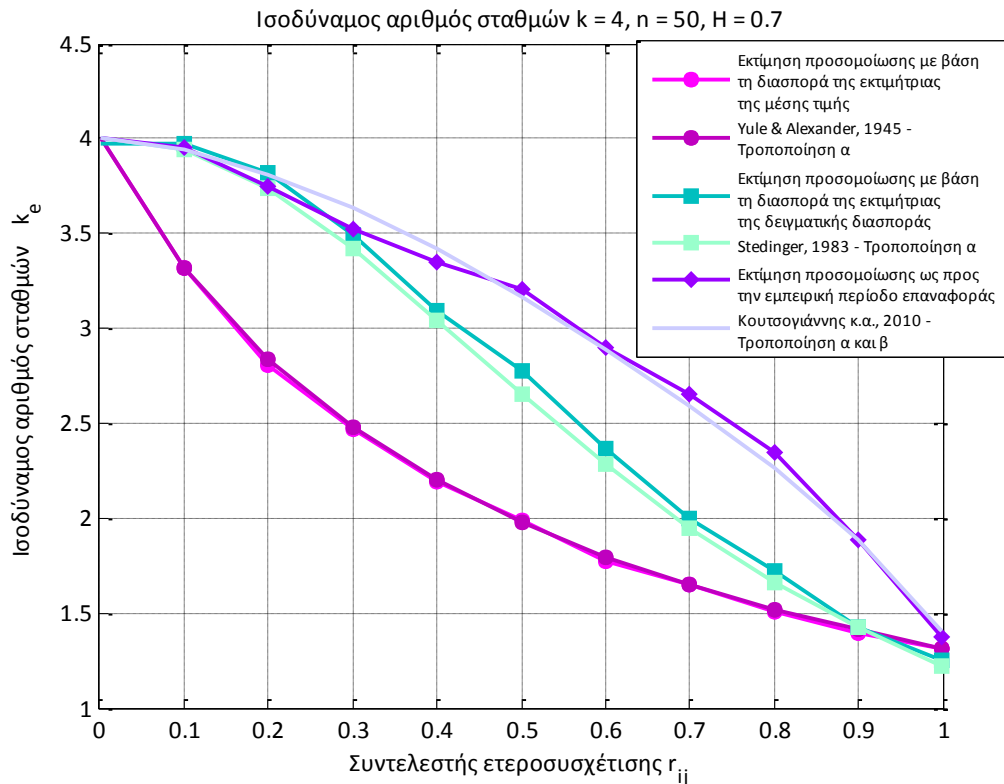
Σχήμα Δ.55: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 3$



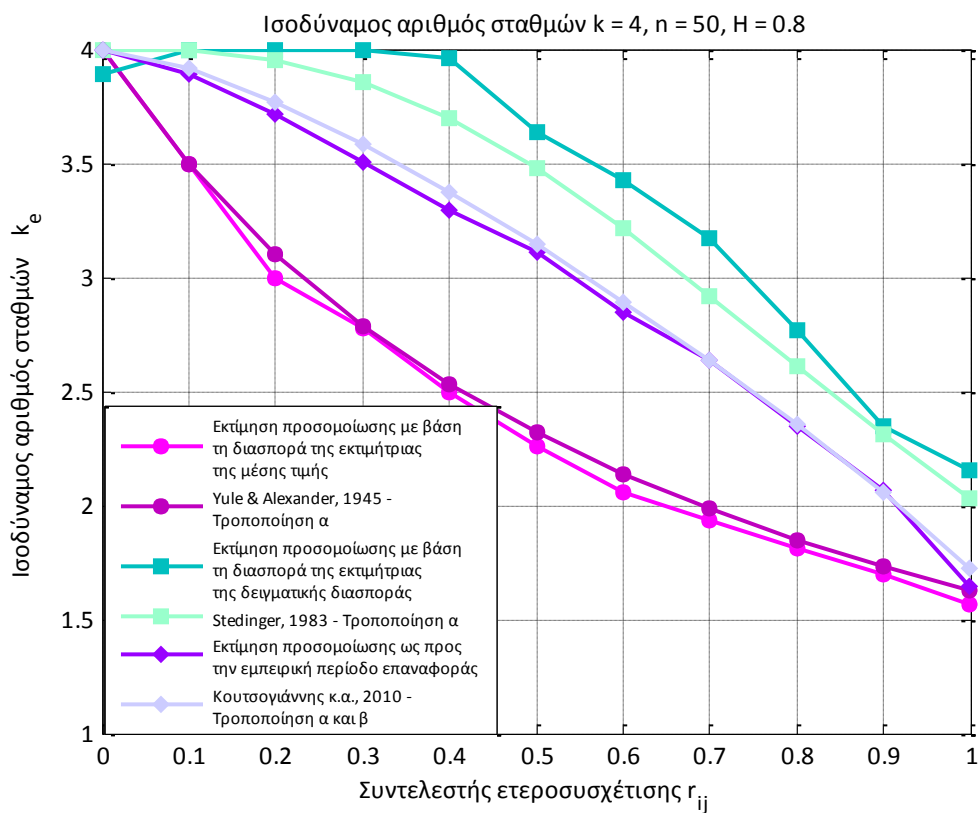
Σχήμα Δ.56: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



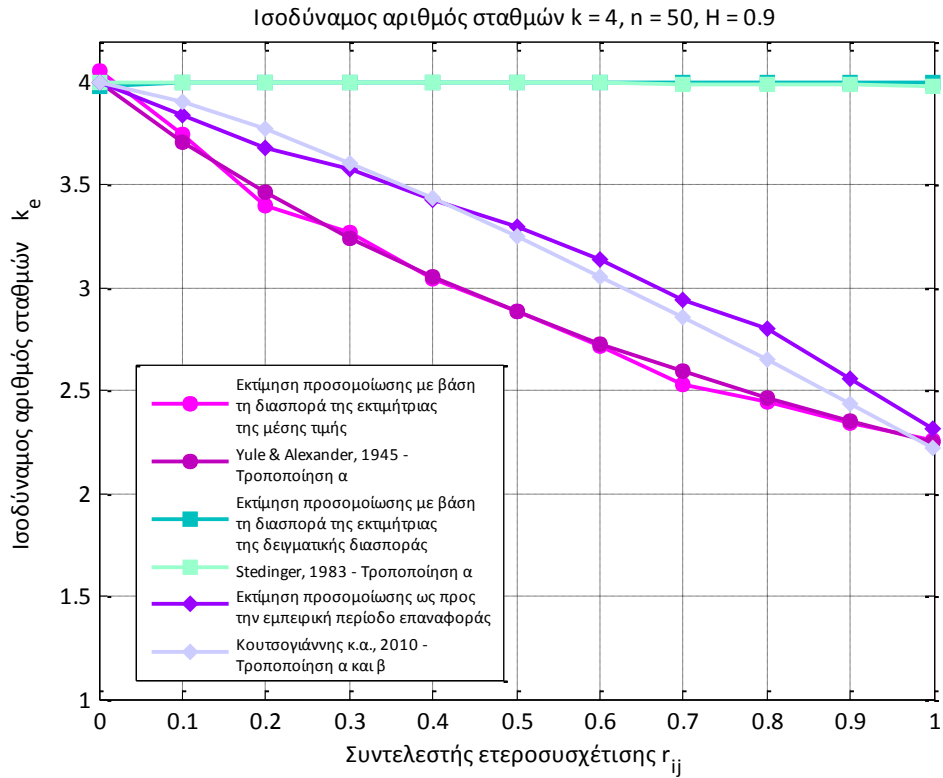
Σχήμα Δ.57: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



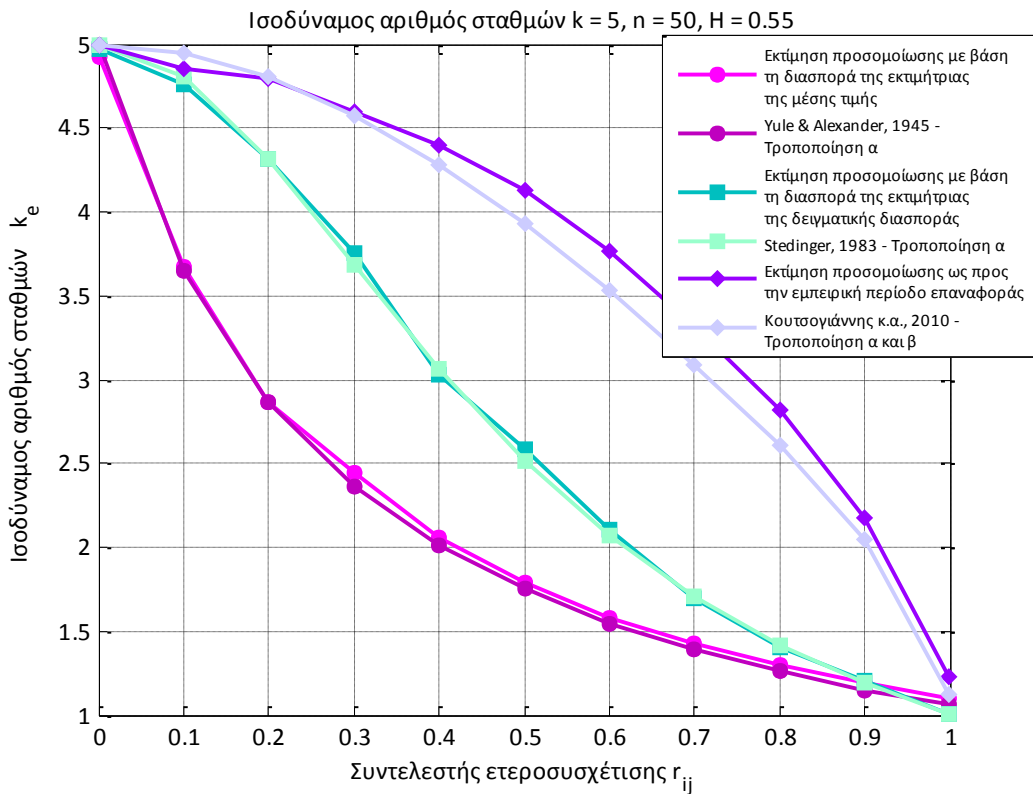
Σχήμα Δ.58: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



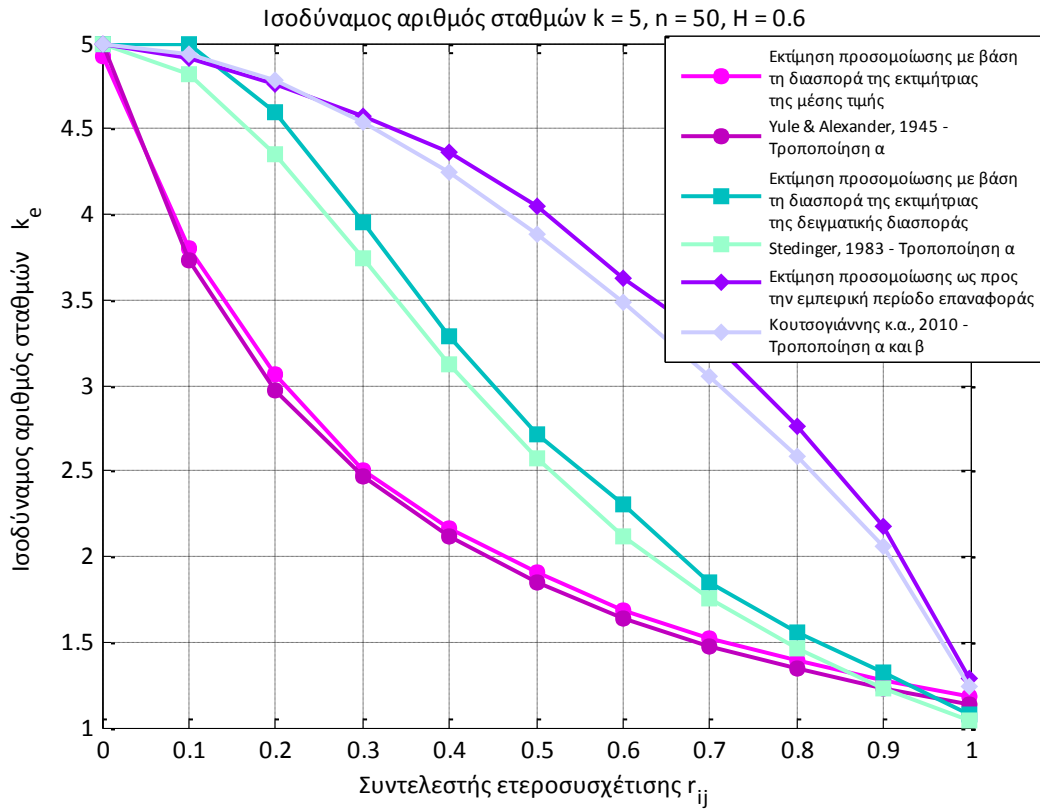
Σχήμα Δ.59: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



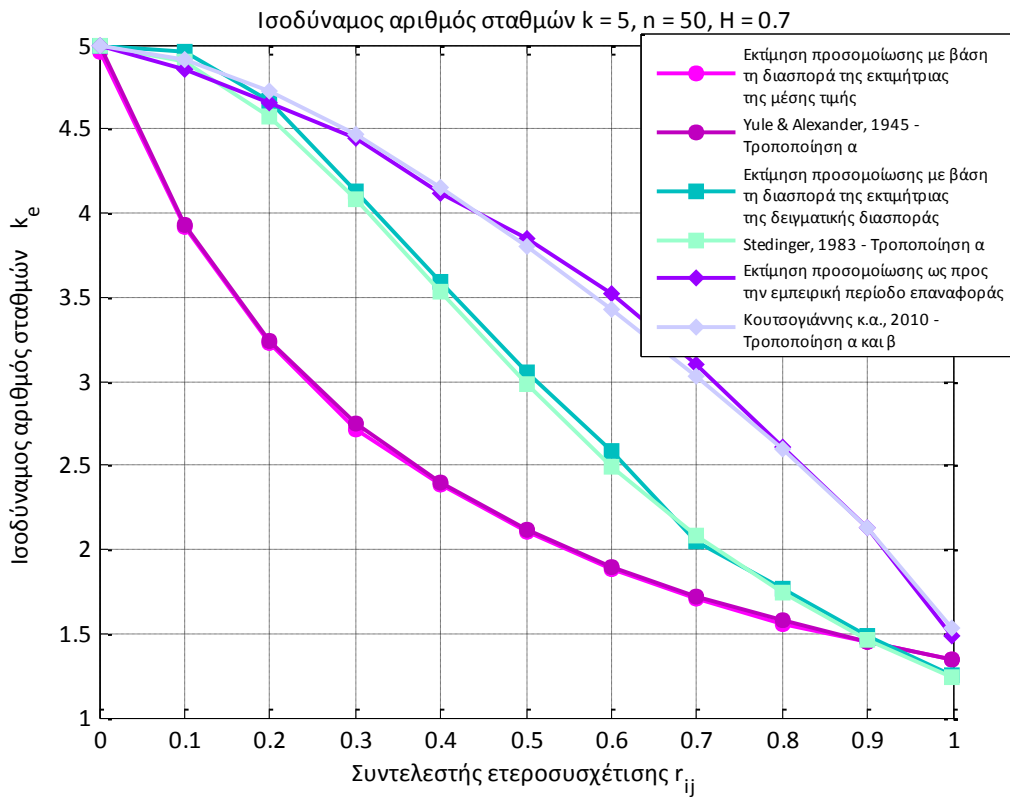
Σχήμα Δ.60: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 4$



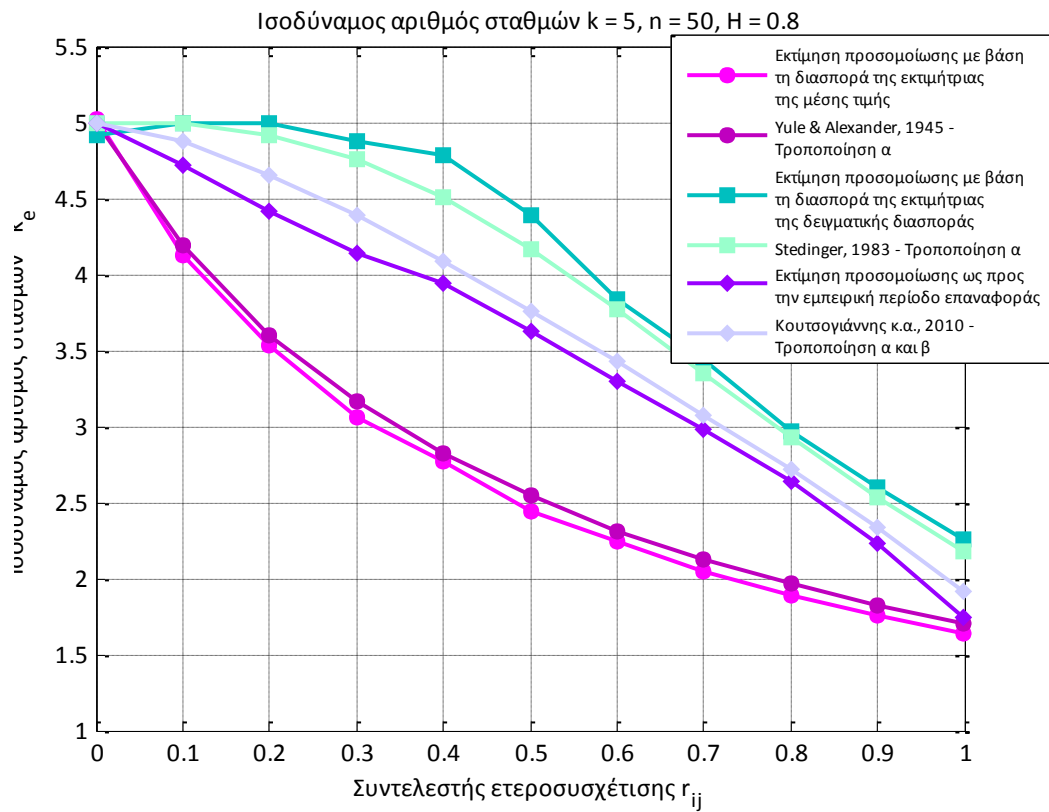
Σχήμα Δ.61: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



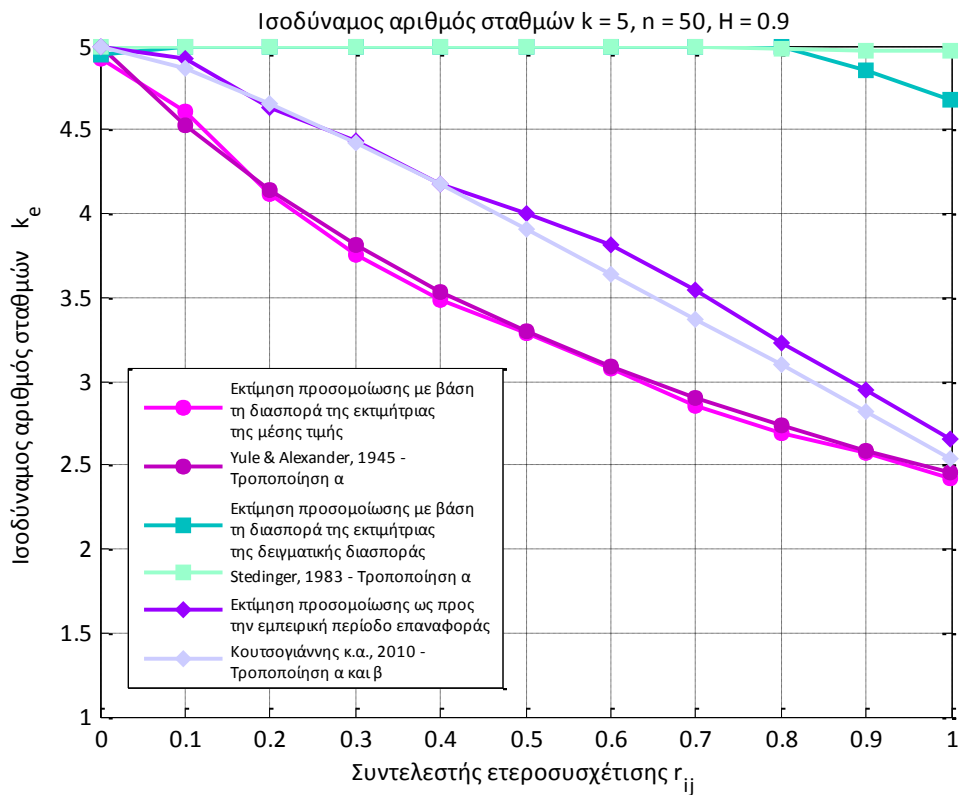
Σχήμα Δ.62: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



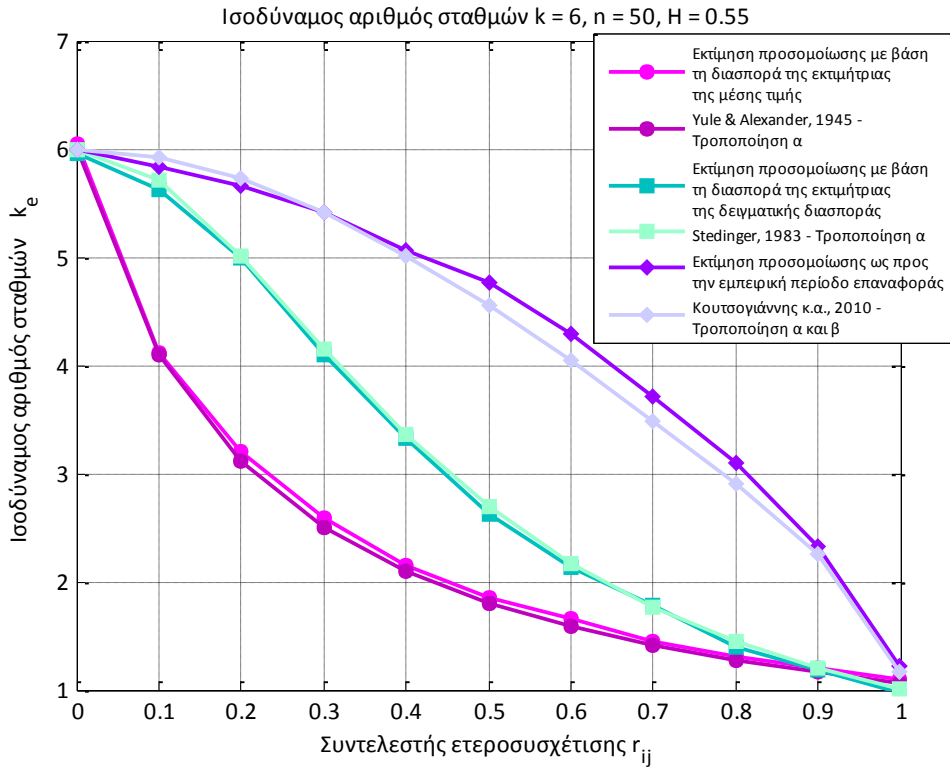
Σχήμα Δ.63: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



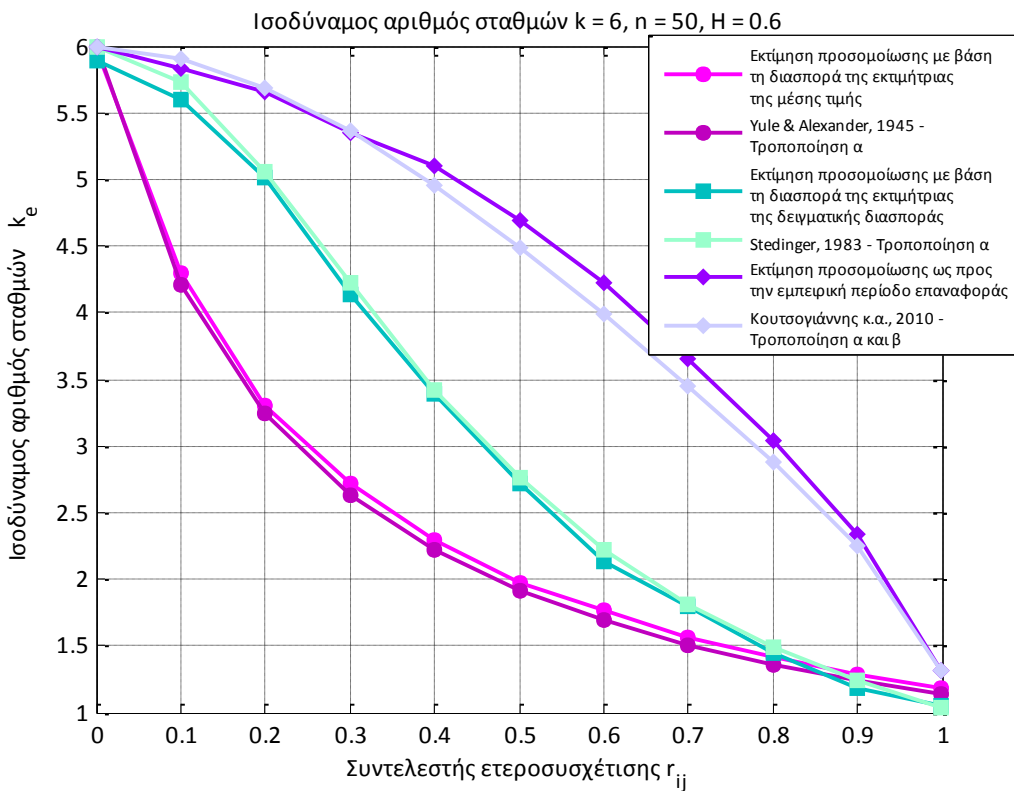
Σχήμα Δ.64: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



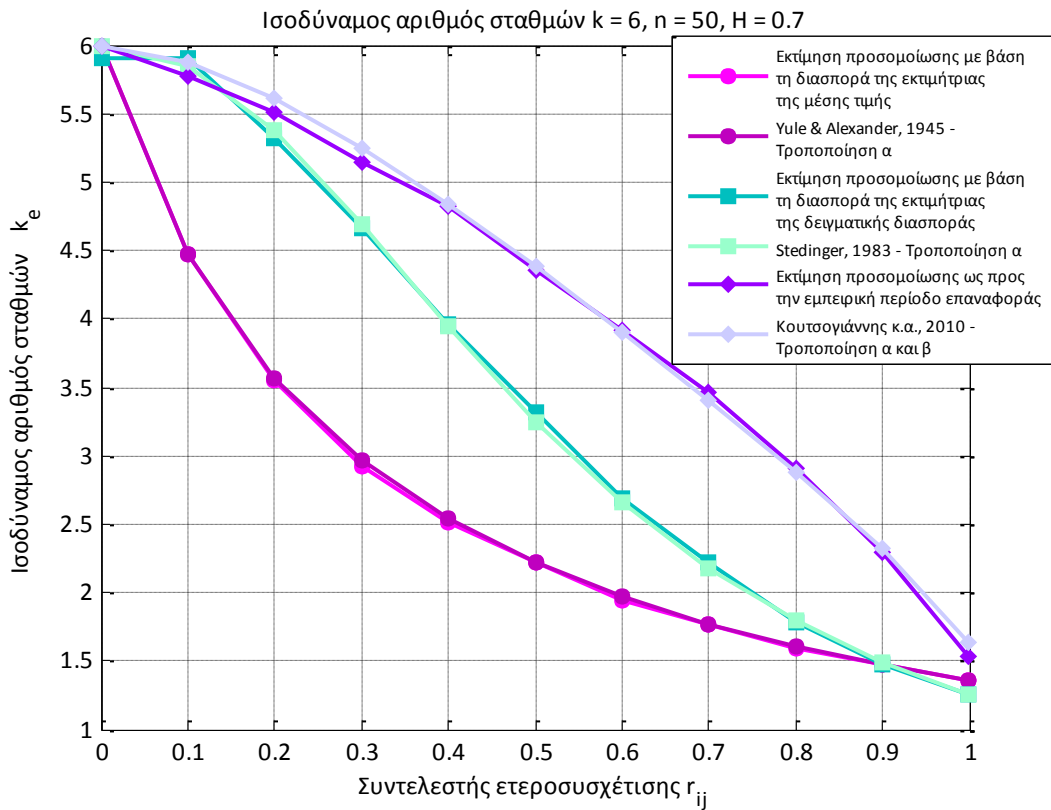
Σχήμα Δ.65: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 5$



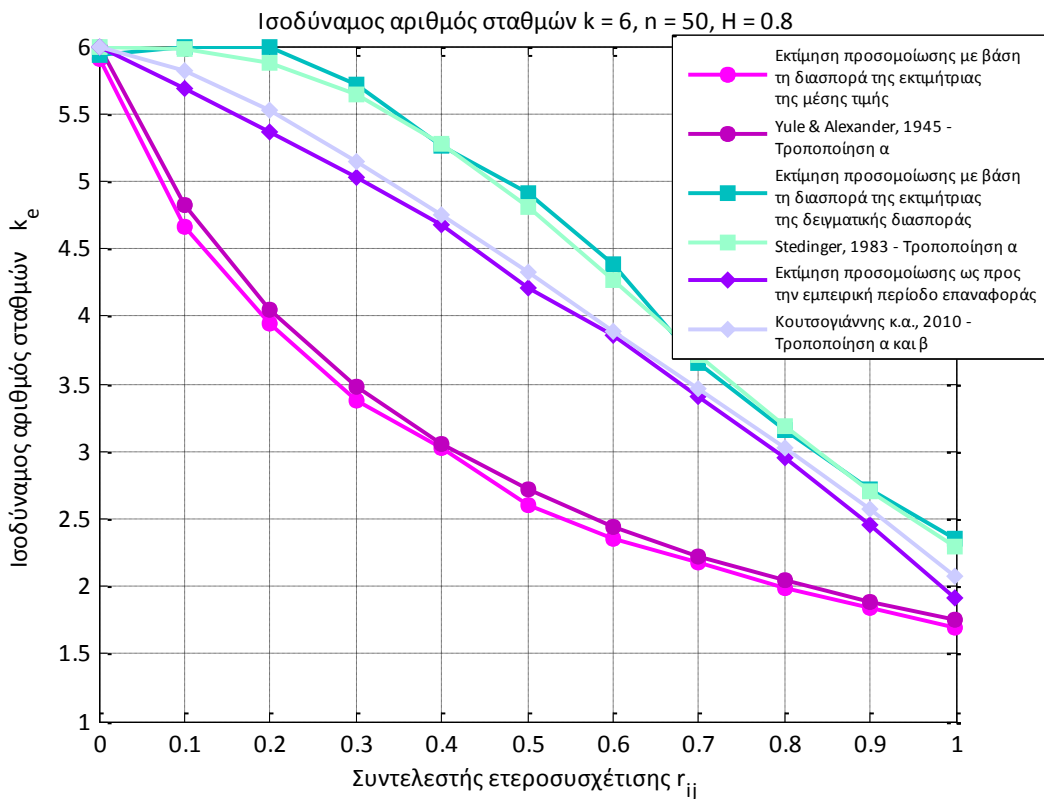
Σχήμα Δ.66: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



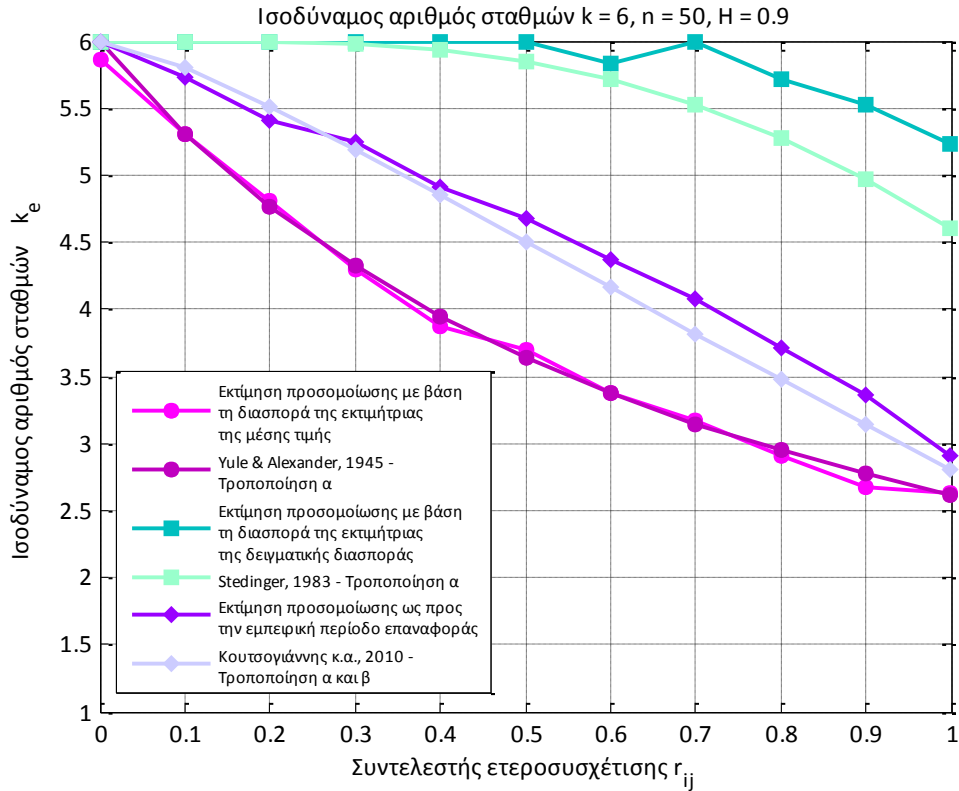
Σχήμα Δ.67: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



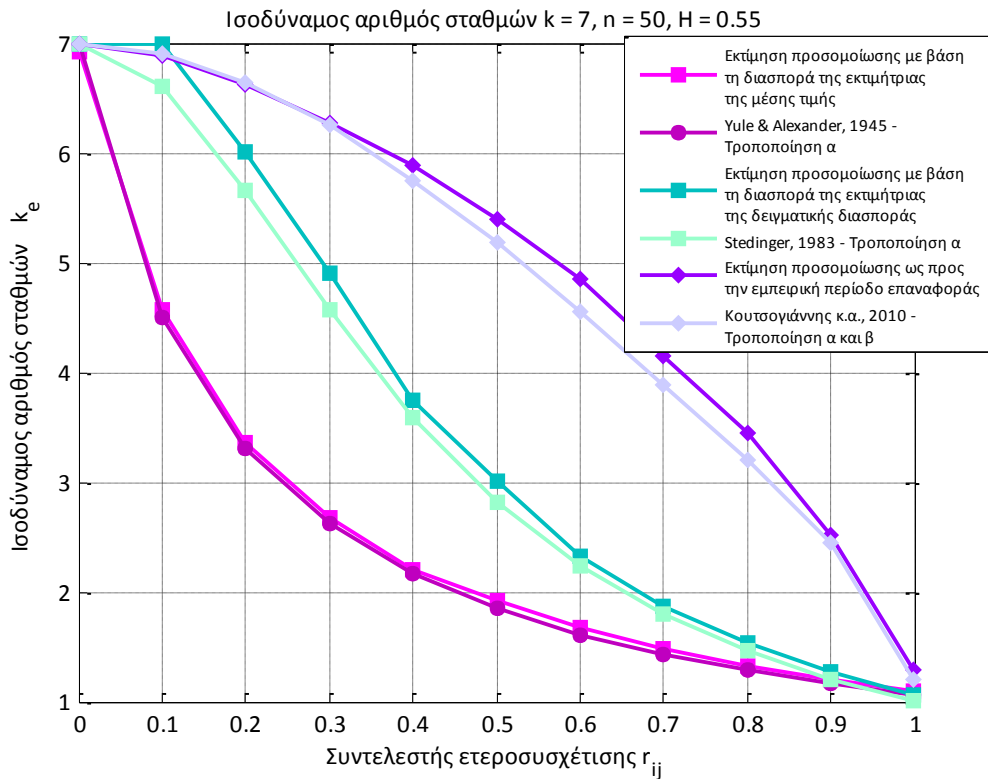
Σχήμα Δ.68: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



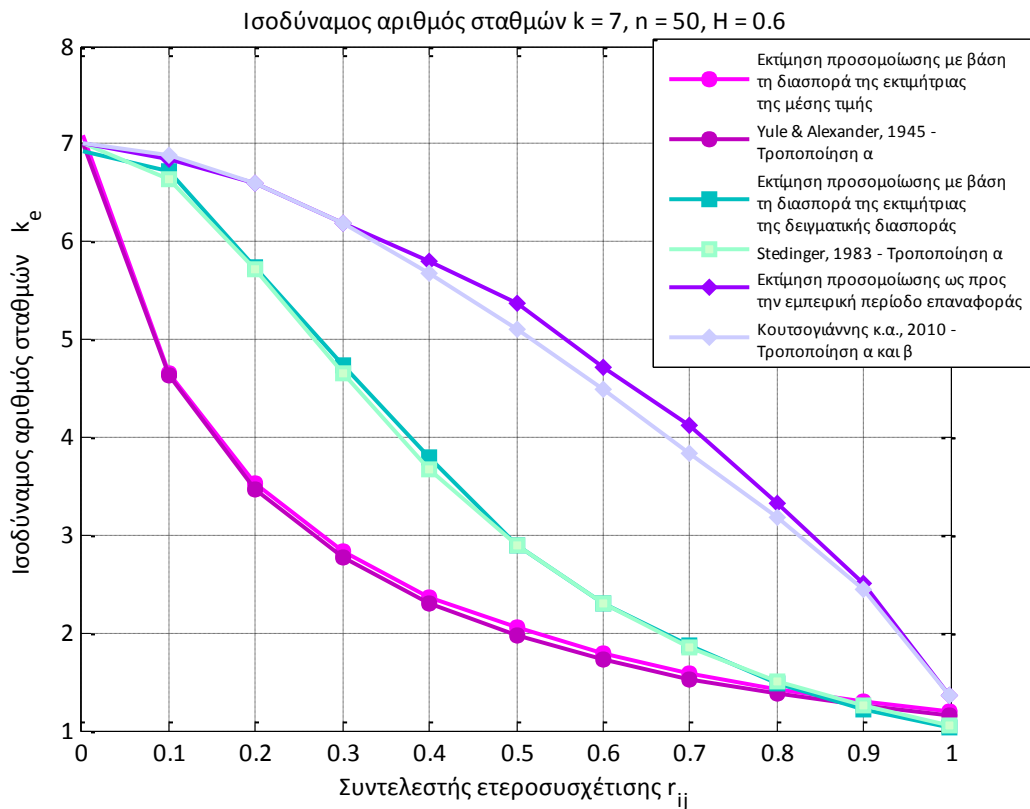
Σχήμα Δ.69: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



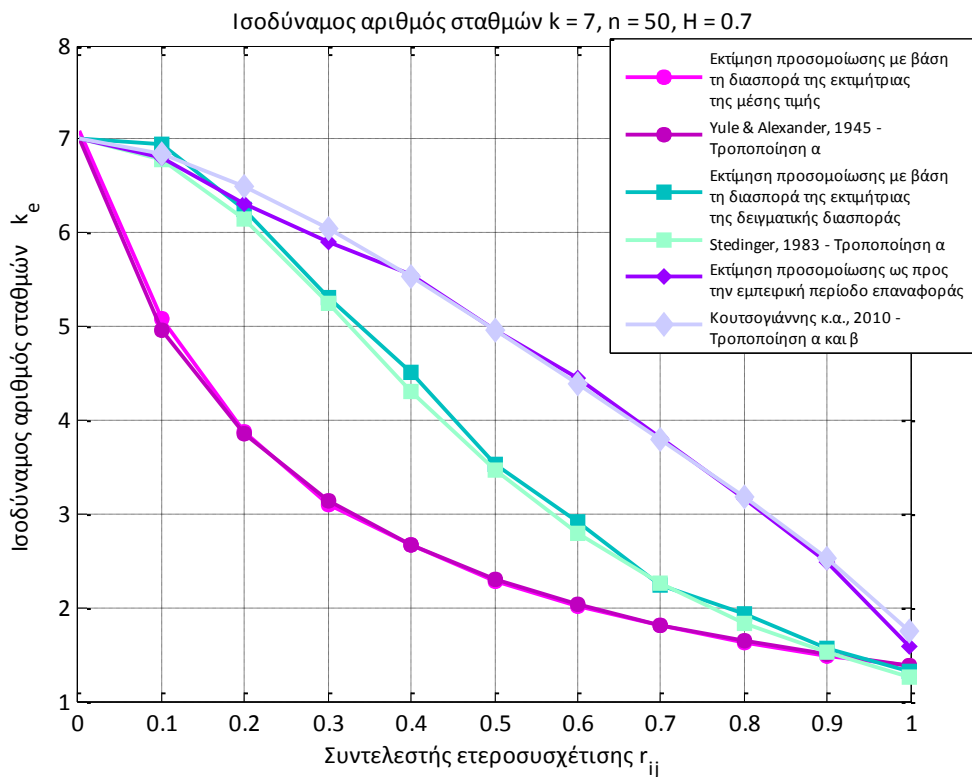
Σχήμα Δ.70: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 6$



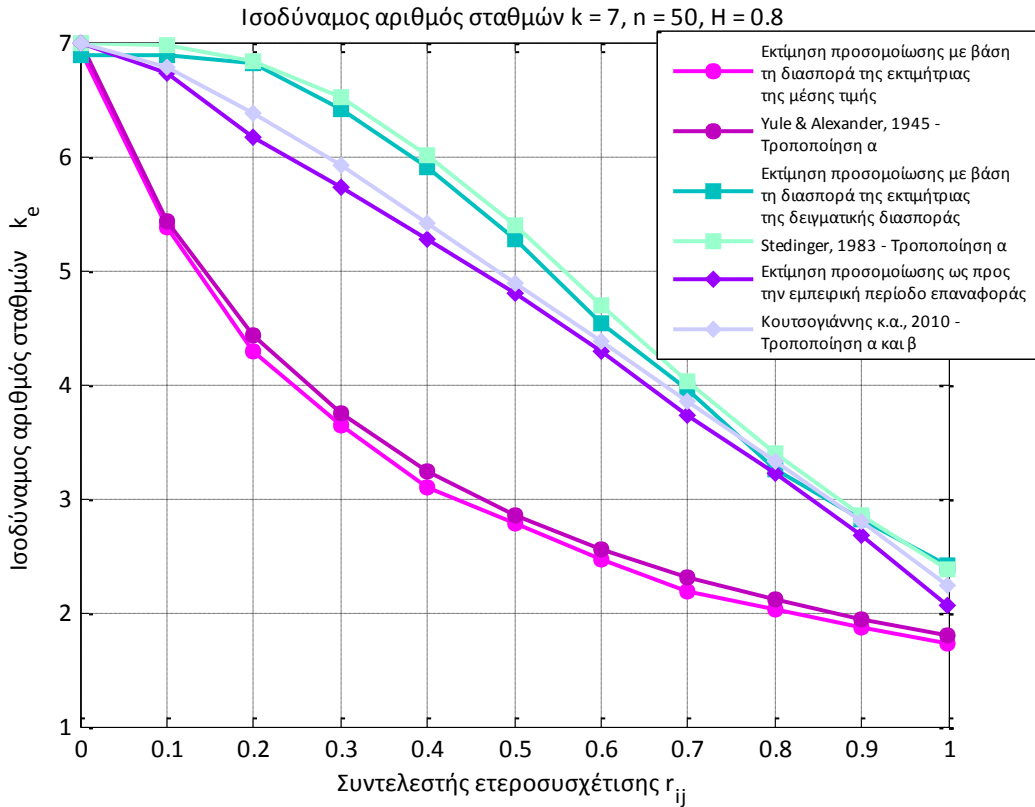
Σχήμα Δ.71: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



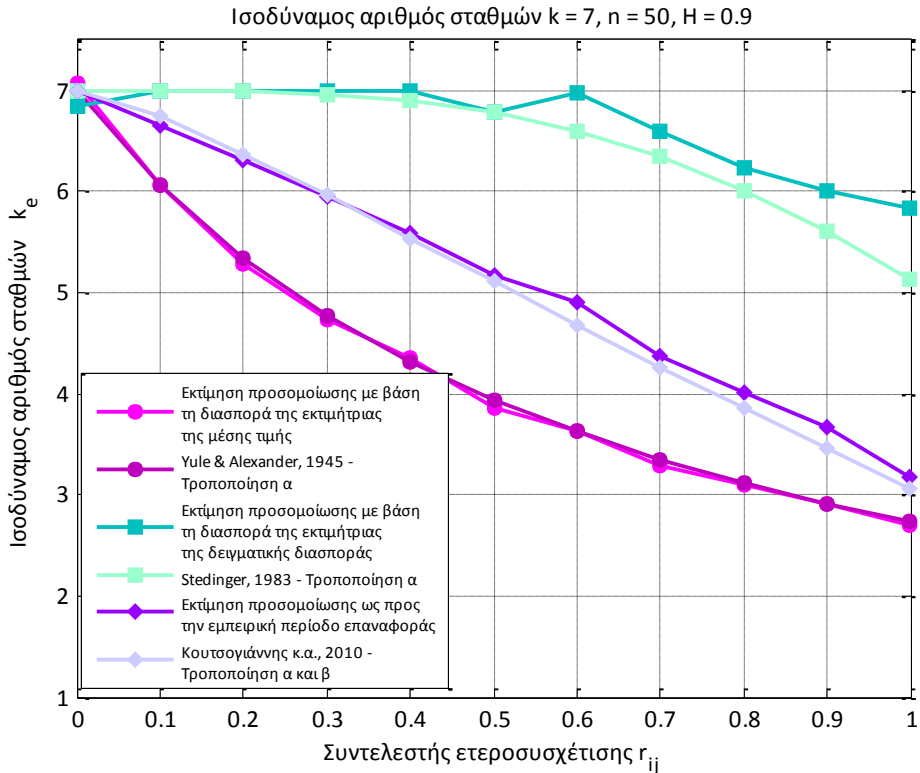
Σχήμα Δ.72: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



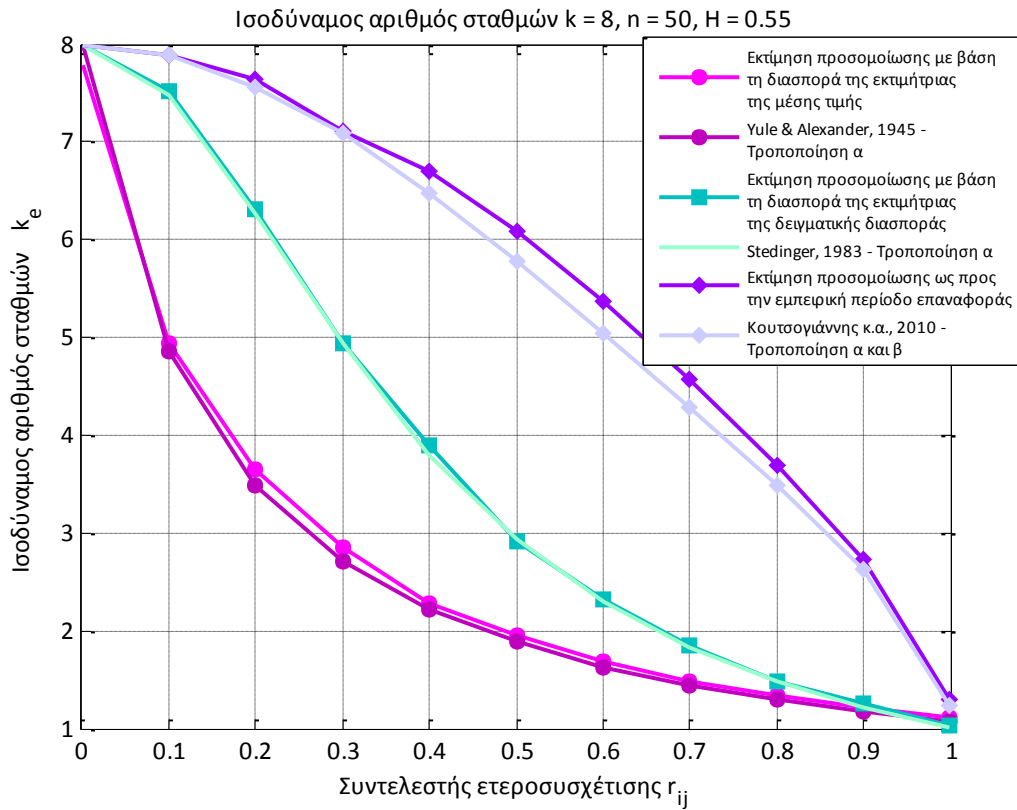
Σχήμα Δ.73: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



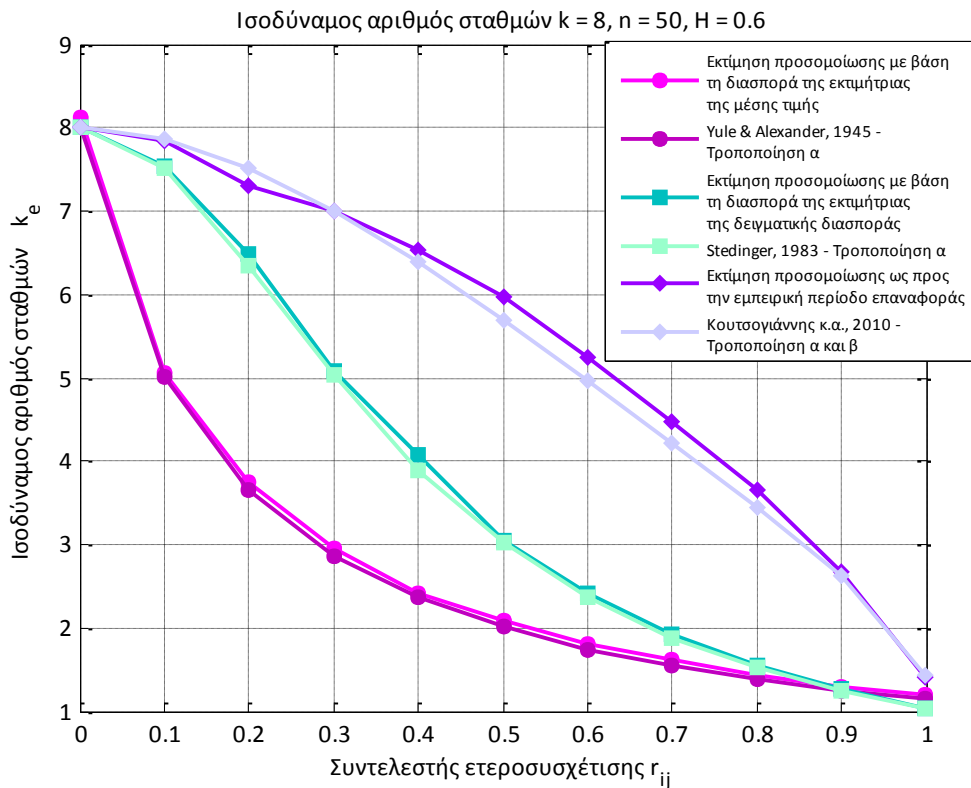
Σχήμα Δ.74: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



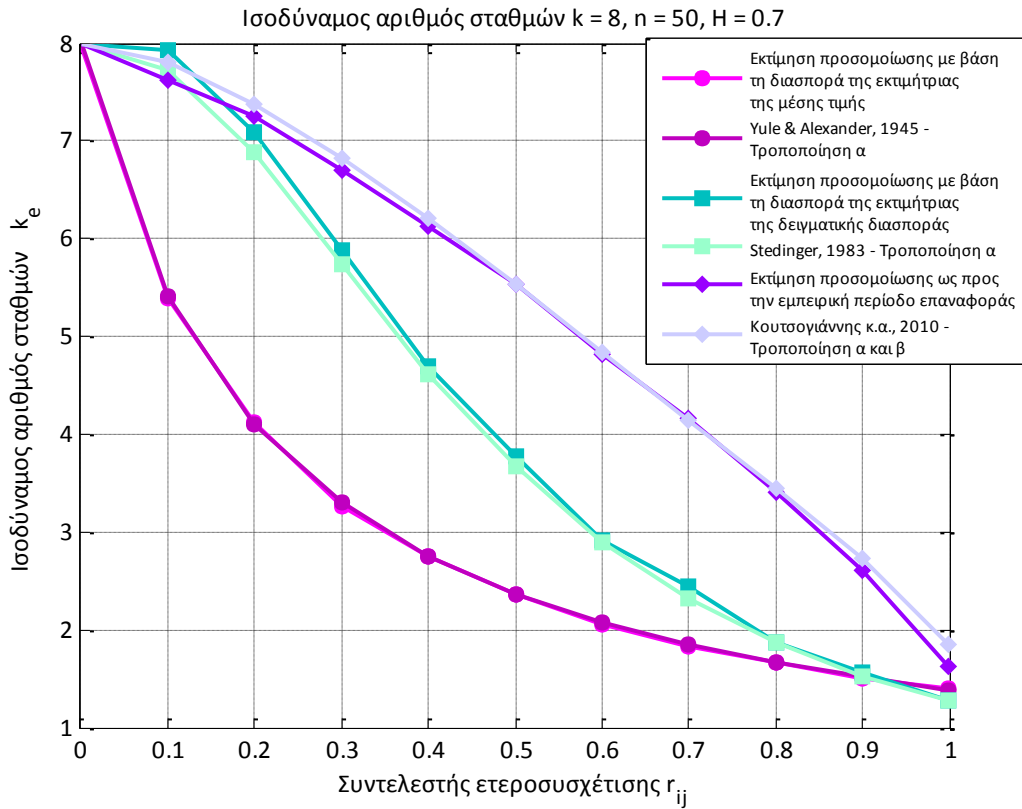
Σχήμα Δ.75: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 7$



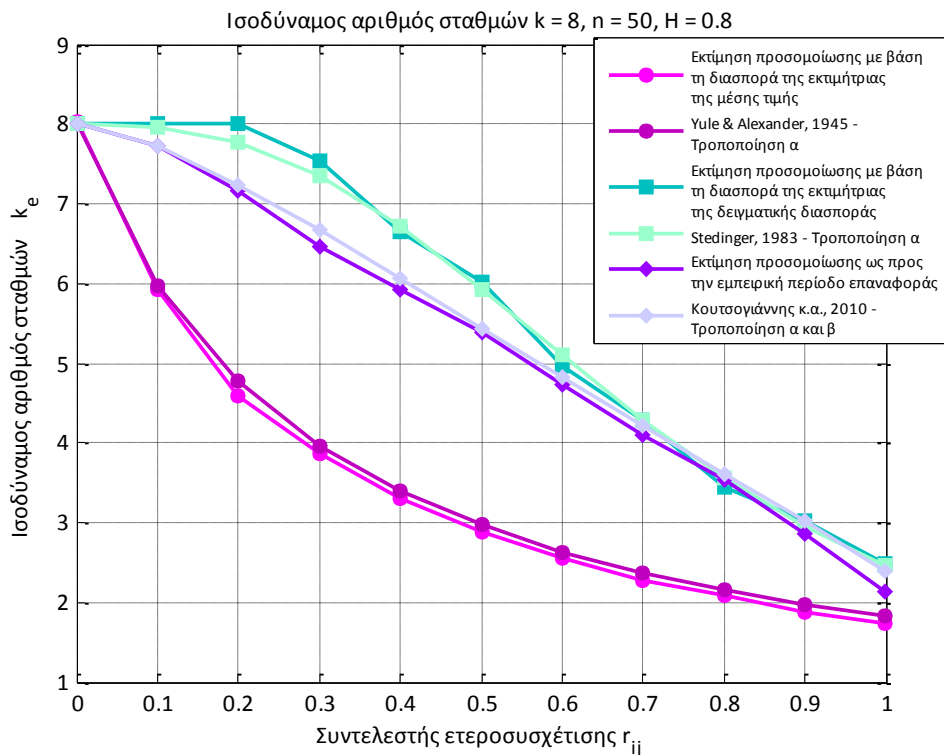
Σχήμα Δ.76: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



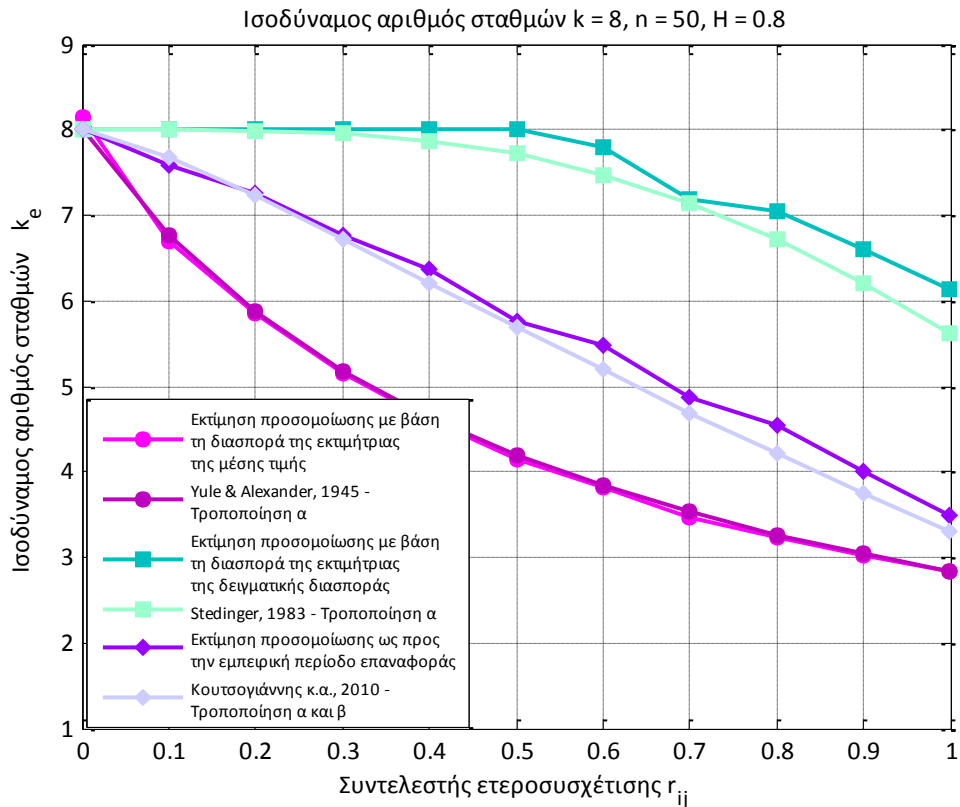
Σχήμα Δ.77: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



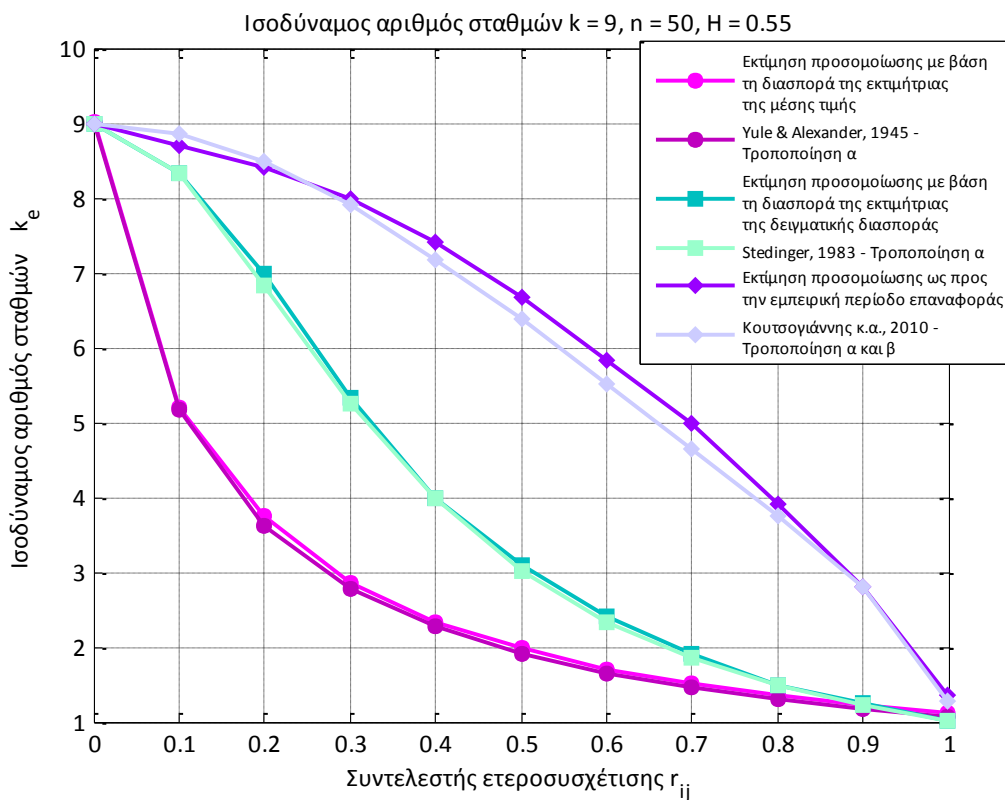
Σχήμα Δ.78: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



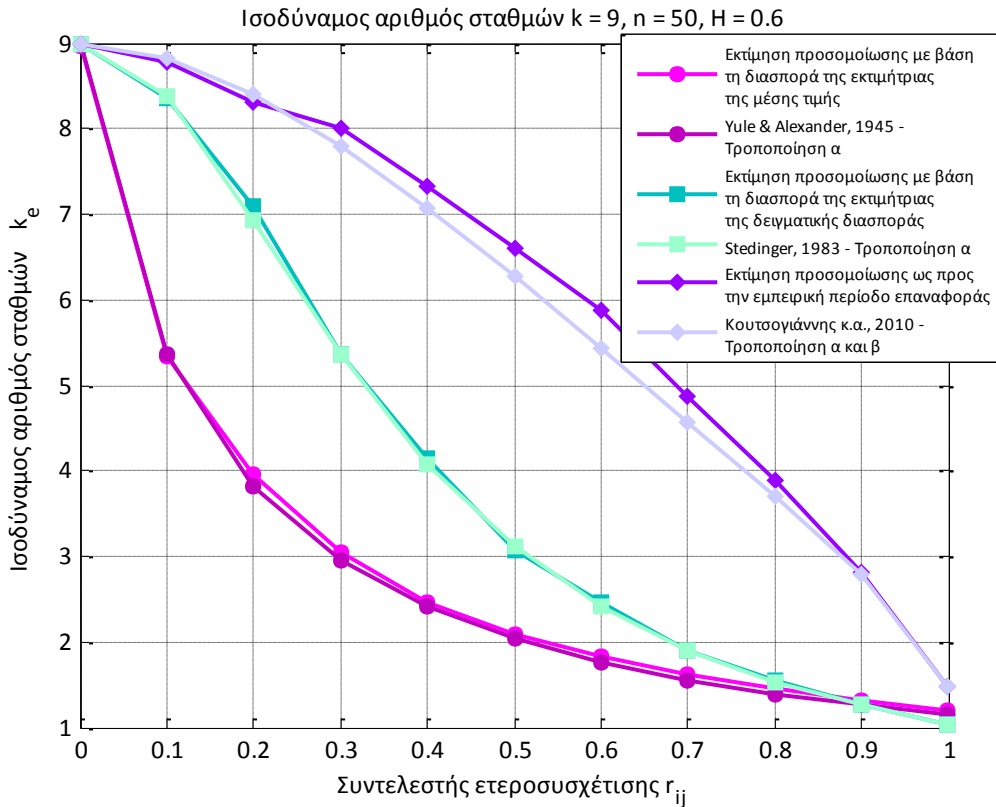
Σχήμα Δ.79: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



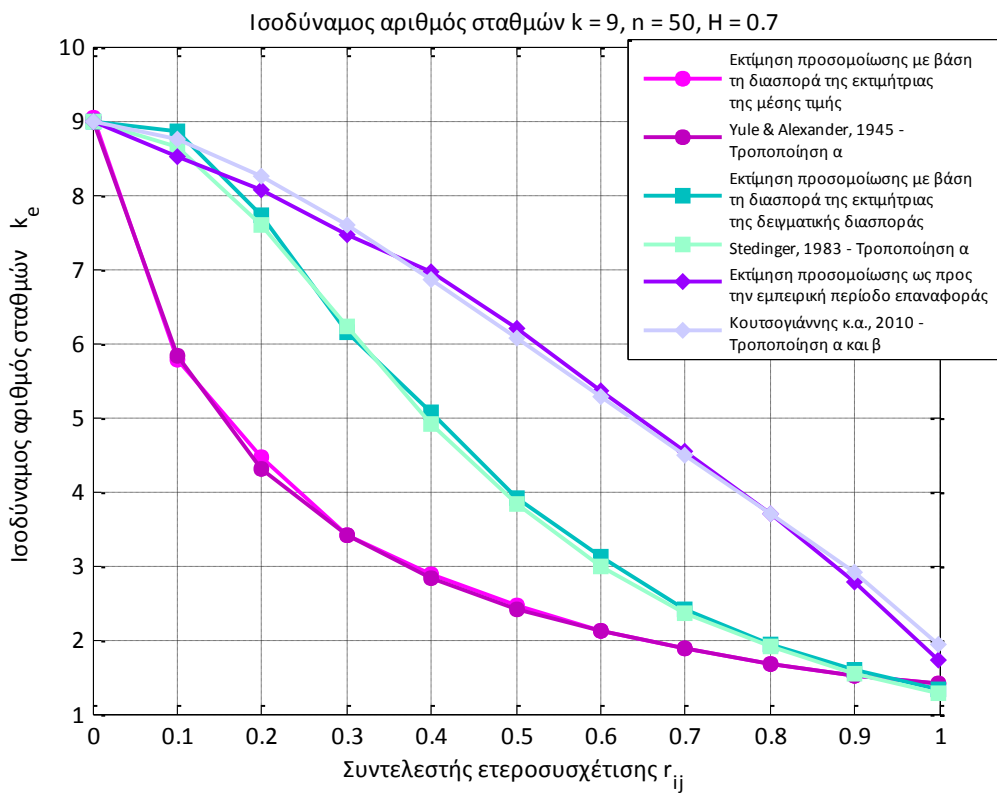
Σχήμα Δ.80: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 8$



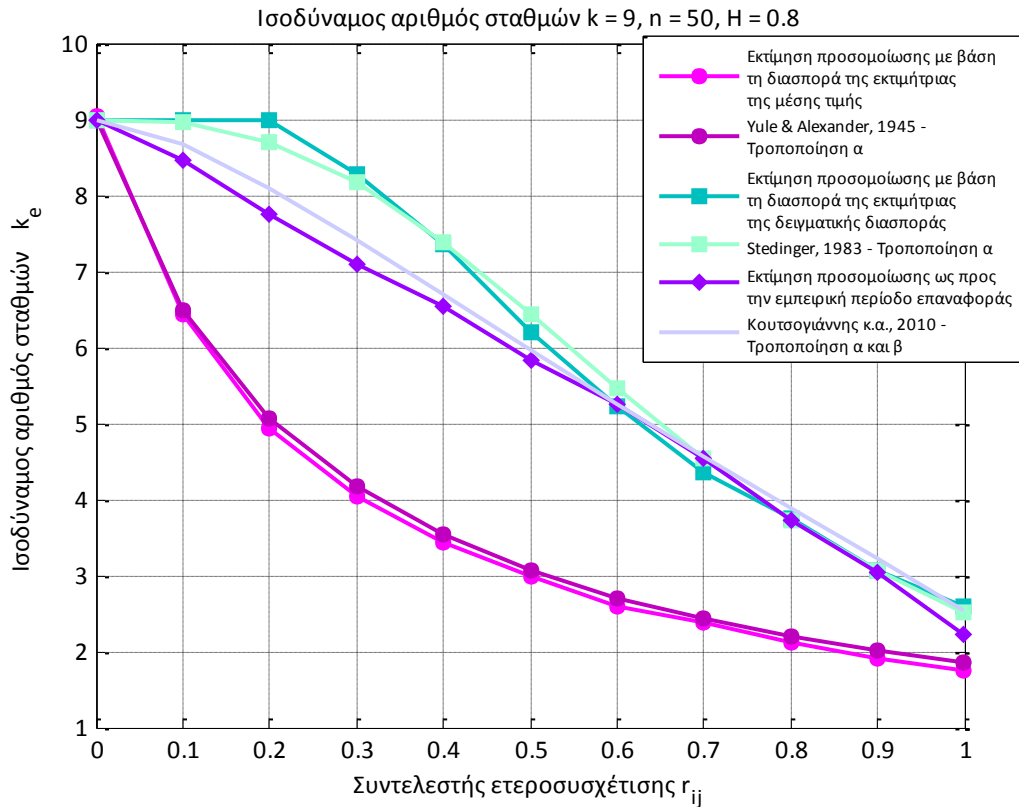
Σχήμα Δ.81: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



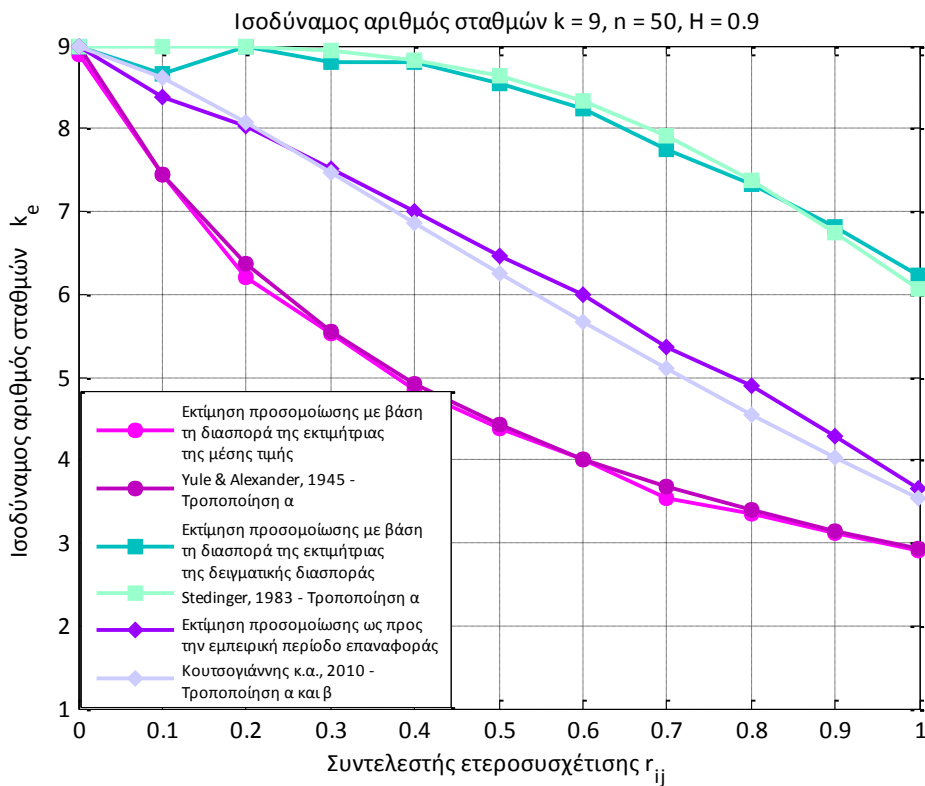
Σχήμα Δ.82: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



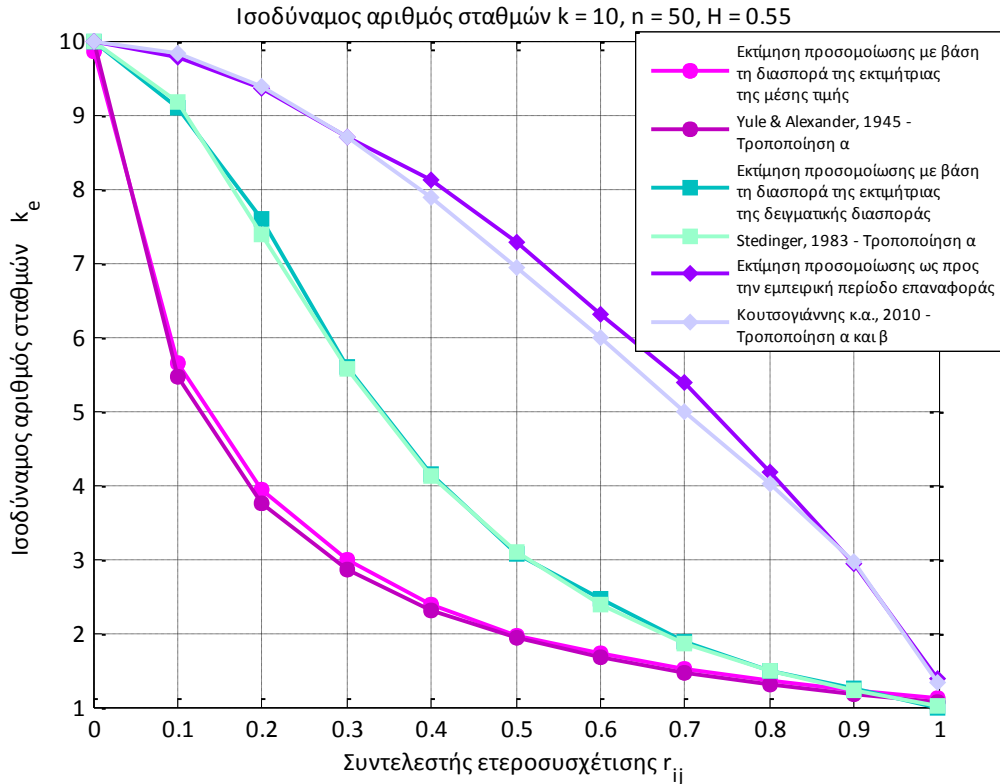
Σχήμα Δ.83: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



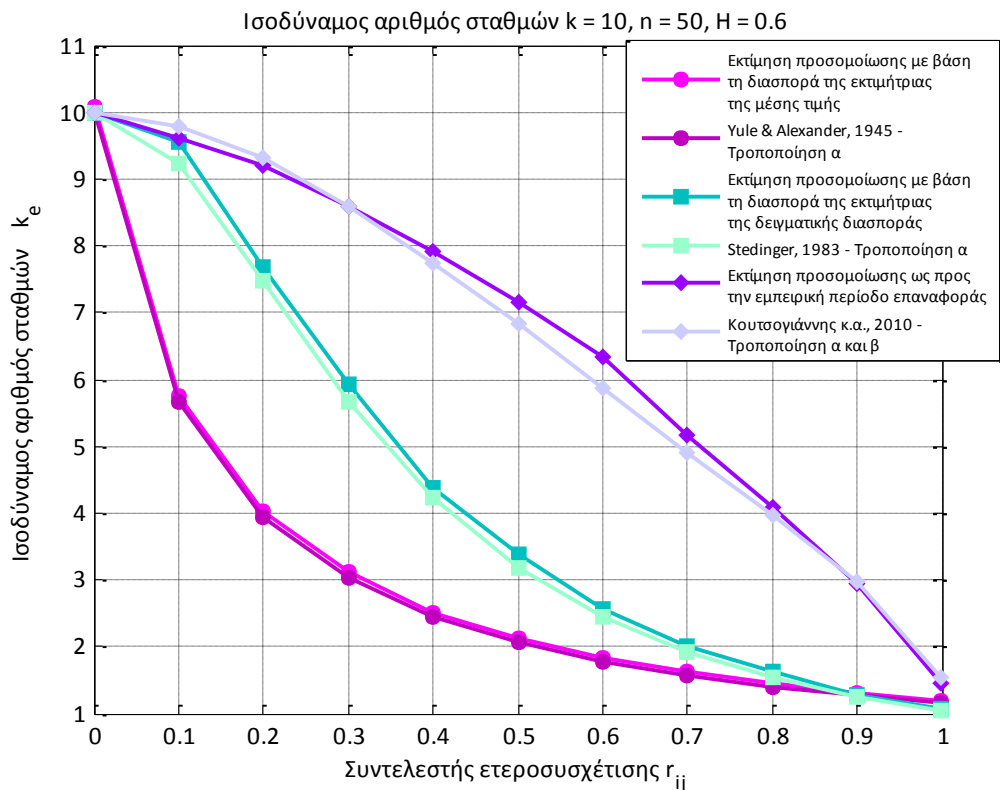
Σχήμα Δ.84: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



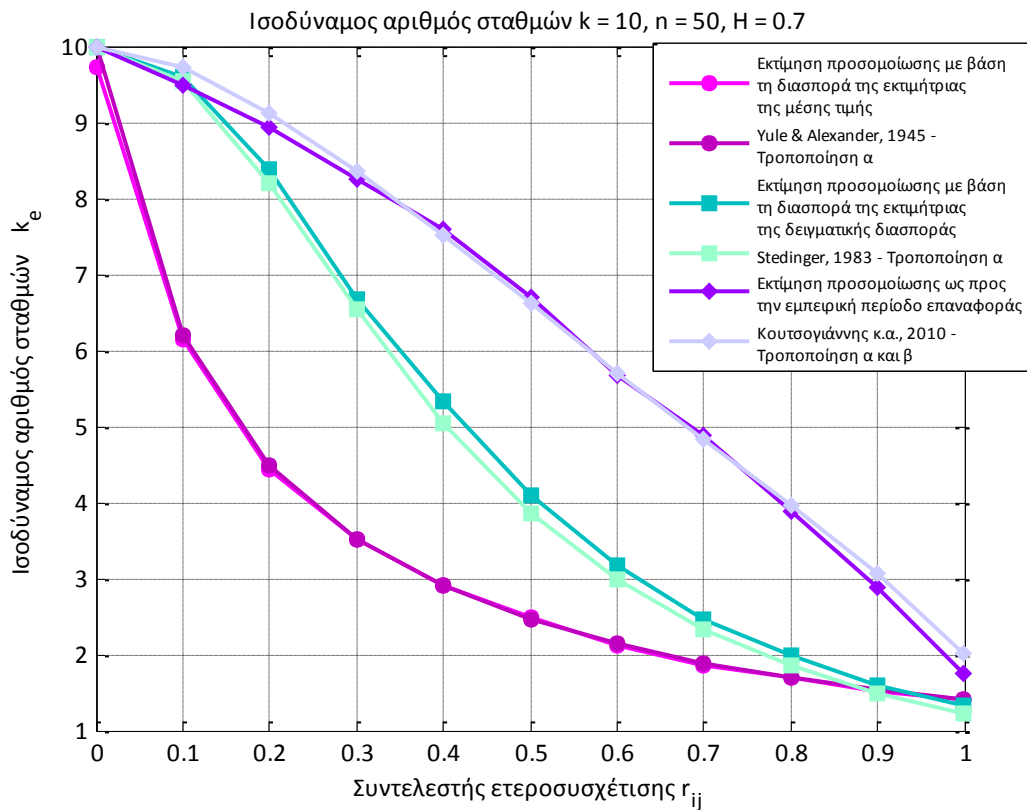
Σχήμα Δ.85: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 9$



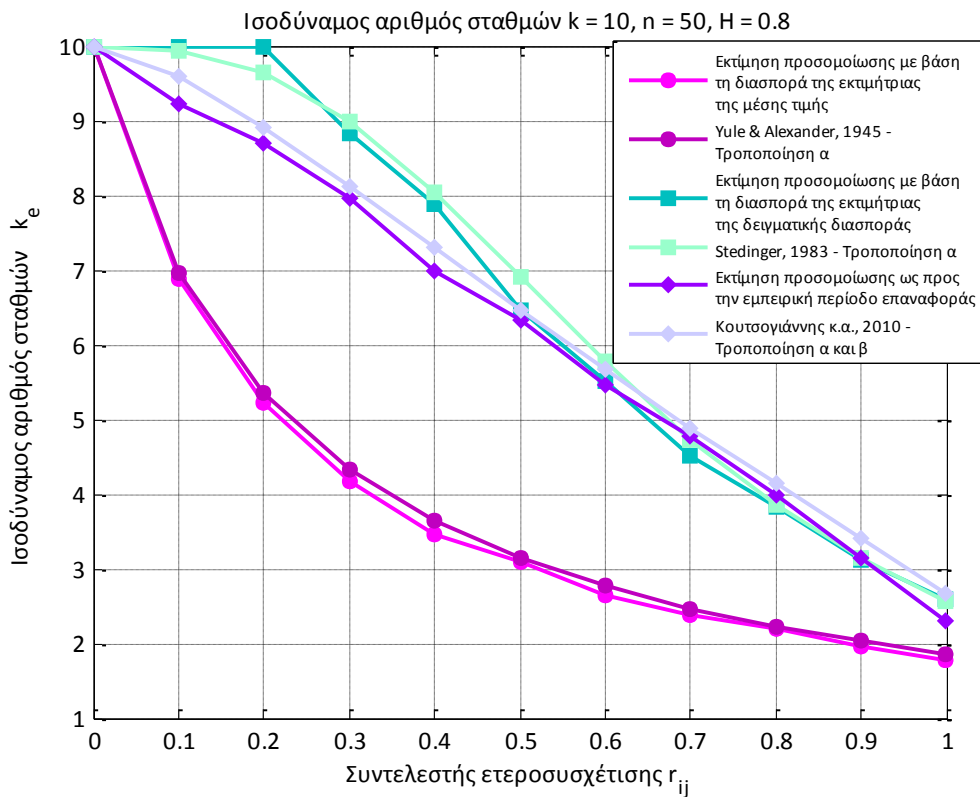
Σχήμα Δ.86: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.55$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



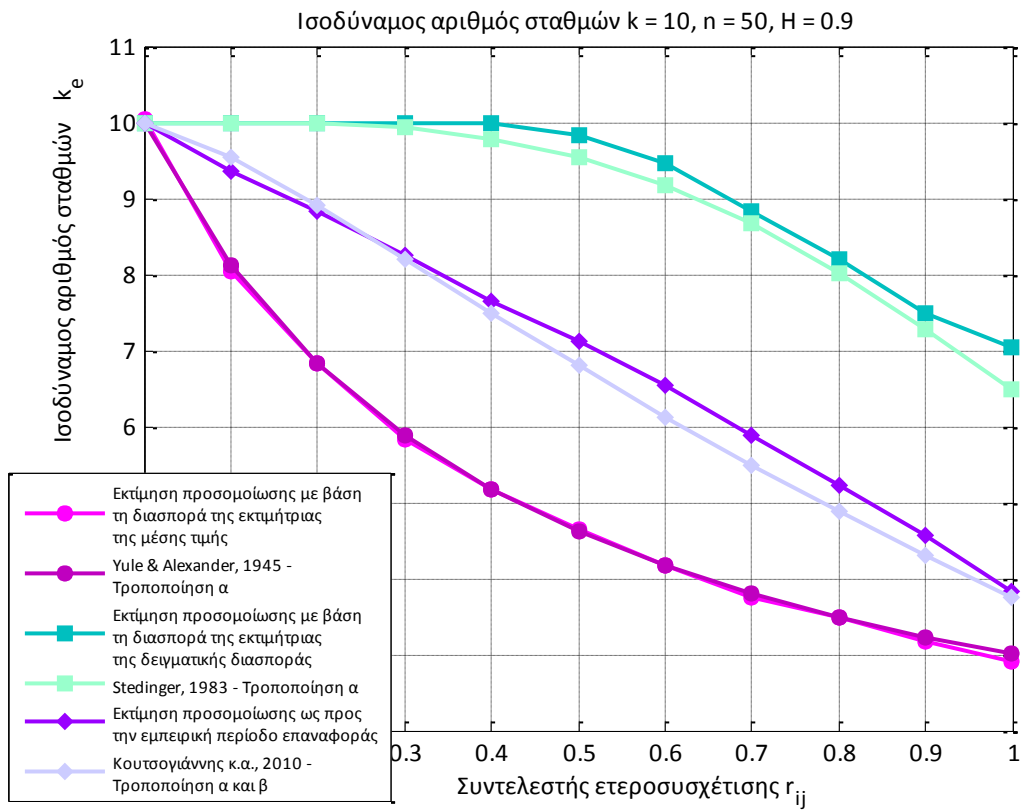
Σχήμα Δ.87: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.6$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα Δ.88: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.7$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα Δ.89: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.8$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$



Σχήμα Δ.90: Ισοδύναμος αριθμός δειγμάτων k_e ως συνάρτηση του συντελεστή ετεροσυσχέτισης r_{ij} μεταξύ των σταθμών i, j , για συντελεστή Hurst $H = 0.9$ και για αριθμό σταθμών $k = 10$