# *Κεφάλαιο 4* Ειδικές έννοιες θεωρίας πιθανοτήτων στην υδρολογία

## 4.1 Πιθανοθεωρητική περιγραφή υδρολογικών διεργασιών

Από την οπτική γωνία της θεωρίας πιθανοτήτων οι υδρολογικές διεργασίες είναι στοχαστικές ανελίξεις. Ας πάρουμε για παράδειγμα την παροχή σε μια συγκεκριμένη θέση ενός ποταμού. Σε κάθε χρονική στιγμή $t$ μέσα στο συνεχή χρόνο η παροχή $X(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, με την έννοια ότι δεν υπάρχει προσδιοριστική μέθοδος καθορισμού της τιμής της παροχής με πλήρη βεβαιότητα. Έτσι λοιπόν η $X(t)$, σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στην ενότητα 2.7, είναι στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο, ενώ μια σειρά μετρήσεών της σε τακτά χρονικά διαστήματα αποτελεί μια χρονοσειρά.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να δώσουμε ορισμένες διευκρινίσεις προκειμένου να αποφευχθούν παρανοήσεις στις οποίες είναι εύκολο να οδηγηθεί κανείς από την εισαγωγή της έννοιας της στοχαστικής ανέλιξης για την περιγραφή μιας φυσικής διεργασίας.

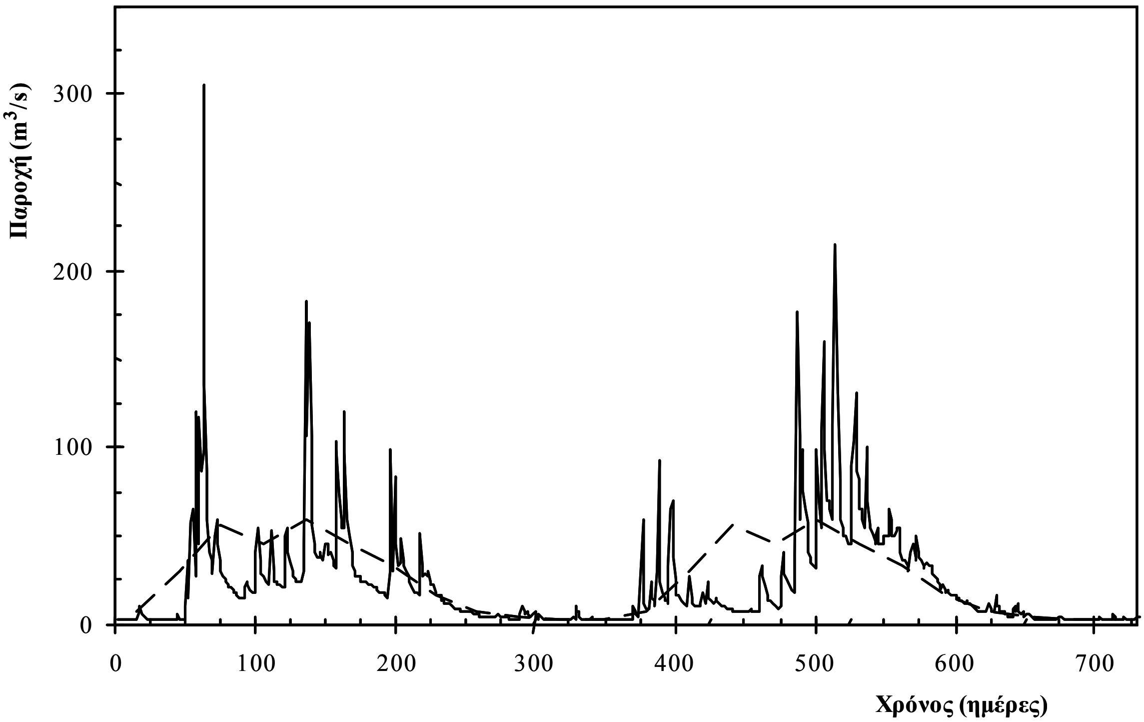
Κατ΄ αρχήν, το γεγονός ότι μια φυσική διεργασία περιγράφεται από μια στοχαστική ανέλιξη δεν σημαίνει ότι η πρώτη δεν υπακούει σε κανενός είδους αιτιοκρατία. Αντίθετα, είναι γνωστό ότι τα υδρολογικά μεγέθη εμφανίζουν περιοδικές διακυμάνσεις μέσα στη διάρκεια ενός έτους, οι οποίες προφανώς οφείλονται στην ετήσια κίνηση της γης και στα μετεωρολογικά φαινόμενα που αυτή επισύρει. Αυτές οι περιοδικές διακυμάνσεις αποτελούν την ονομαζόμενη *προσδιοριστική συνιστώσα* των διεργασιών. Η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ δεν έχει δυσκολία να συμπεριλάβει και να περιγράψει μαθηματικά και αυτή τη συνιστώσα. Συχνά μάλιστα γίνεται διάκριση των δύο συνιστωσών θεωρώντας ότι

$$X(t) = D(t) + \Xi(t) \tag{4.1}$$

όπου $D(t)$ είναι η προσδιοριστική (εν προκειμένω περιοδική) συνιστώσα και $\Xi(t)$ είναι η στοχαστική συνιστώσα. Στο Σχ. 4.1 παρουσιάζεται η μεταβολή της παροχής ενός ποταμού στη διάρκεια δύο ετών, όπου είναι εμφανής η ετήσια περιοδικότητα.

Σε πολλά κείμενα υδρολογίας (π.χ. Haan, 1977· Kottegoda, 1980) στην προσδιοριστική συνιστώσα συγκαταλέγονται ακόμη οι *τάσεις*, δηλαδή οι μακροχρόνιες, πολυετείς, βαθμιαίες μεταβολές των μέσων χαρακτηριστικών της $X(t)$, καθώς και τα *άλματα*, δηλαδή οι απότομες αλλαγές στα μέσα χαρακτηριστικά της $X(t)$, οι οποίες εν συνεχεία διατηρούνται επίσης για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Ωστόσο, εκτός από σπάνιες περιπτώσεις, οι μηχανισμοί που προκαλούν αυτές τις τάσεις και τα άλματα δεν είναι γνωστοί. Κατά συνέπεια, δεν είναι προβλέψιμος ο τόπος με τον οποίο θα εξελιχθούν αυτά τα φαινόμενα, αντίθετα με τα φαινόμενα που οφείλονται στην περιοδικότητα της κίνησης της γης, τα οποία είναι βέβαια προβλέψιμα. Με αυτή την έννοια, στο κείμενο αυτό οι τάσεις και τα άλματα θεωρούνται κατά κανόνα ως τυχαίες διακυμάνσεις, παρά ως προσδιοριστικές, οι οποίες όμως συντελούνται σε πολύ μεγαλύτερη χρονική κλίμακα (π.χ. δεκαετιών, αιώνων κοκ.) από την κλίμακα των συνήθων τυχαίων διακυμάνσεων

Ειδικότερα, το στοχαστικό μέρος της ανέλιξης δεν είναι πλήρως τυχαίο, αλλά, όπως λέμε, έχει *στοχαστική δομή* ή *μνήμη*. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει στοχαστική εξάρτηση των τιμών της ανέλιξης σε γειτονικές χρονικές στιγμές, ή, με την ορολογία του εδαφίου 2.7.2, ισχυρός συντελεστής αυτοσυσχέτισης της ανέλιξης. Για παράδειγμα, αν η τιμή της παροχής ενός ποταμού στο χρόνο $t_0$ είναι $X(t_0)$ = 500 m$^3$/s, είναι απίθανο, μετά από ένα μικρό χρονικό διάστημα $\Delta t$ π.χ. 1 ώρα, να γίνει $X(t_0 + \Delta t)$ = 0.5 m$^3$/s. Το πιθανότερο είναι ότι θα κυμανθεί γύρω από μια τιμή κοντά στα 500 m$^3$/s.




**Σχ. 4.1** Διακύμανση της ημερήσιας παροχής του ποταμού Ευήνου στη θέση Πόρος Ρηγανίου (υδρολογικά έτη 1971-72 και 1972-73 – έναρξη χρόνου 1.10.1971). Με διακεκομμένη γραμμή φαίνονται οι υπερετήσιες μέσες τιμές για κάθε μήνα υπολογισμένες από το ιστορικό δείγμα 1970-71 μέχρι 1989-90.

### 4.1.1 Ανελίξεις σε διακριτό χρόνο

Η μελέτη της πλήρους ανέλιξης σε συνεχή χρόνο μιας υδρολογικής μεταβλητής $X(t)$ είναι αρκετά δύσκολο πρόβλημα, αλλά και δεν είναι απαραίτητη για τα περισσότερα από τα πρακτικά προβλήματα του μηχανικού. Για το λόγο αυτό ξεφεύγει από τους στόχους αυτού του κειμένου. Θα εντοπίσουμε την προσοχή μας σε ορισμένες παράγωγες ανελίξεις, οι οποίες αναφέρονται σε διακριτό χρόνο και αναλύονται ευκολότερα. Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό αυτών των ανελίξεων, ας ορίσουμε δύο χρονικά μεγέθη. Το πρώτο είναι το *υδρολογικό έτος*, μέσα στο οποίο πραγματοποιείται ένας πλήρης κύκλος περιοδικών υδρολογικών διακυμάνσεων. Η διάρκειά του $D$ ταυτίζεται με τη διάρκεια του ημερολογιακού έτους, συνήθως όμως ξεκινάει όχι στη 1 Ιανουαρίου, αλλά στην αρχή της βροχερής περιόδου του έτους. Έτσι, στην Ελλάδα, κατά σύμβαση, το υδρολογικό έτος ξεκινάει στη 1 Οκτωβρίου. Το δεύτερο είναι το *χρονικό βήμα* Δ, δηλαδή το χρονικό παράθυρο μέσα από το οποίο βλέπουμε την ανέλιξη. Σε αντίθεση με το υδρολογικό έτος, το χρονικό βήμα δεν είναι σταθερό, αλλά εξαρτάται από τη συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε. Συνήθως κυμαίνεται από μερικά λεπτά της ώρας μέχρι ένα υδρολογικό έτος. Βοηθητικό για τους ορισμούς που θα ακολουθήσουν είναι το Σχ. 4.2 (σ. 92), στο οποίο ο συνεχής χρόνος $t$ (στον οριζόντιο άξονα) μετριέται σε υδρολογικά έτη, ενώ για σχεδιαστικούς λόγους έχει θεωρηθεί $\Delta = D/4$.

Η πρώτη απλοποίηση της πλήρους ανέλιξης $X(t)$ (Σχ. 4.2(1)) αφορά στη διακριτοποίηση του χρόνου (Σχ. 4.2(2)). Το διακριτό χρόνο $k$ τον ορίζουμε χωρίζοντας το συνεχή χρόνο σε διαστήματα μεγέθους Δ. Έτσι οι τιμές $k$ = 1, 2, …, αντιστοιχούν στα χρονικά διαστήματα $[0, \Delta)$, $[\Delta, 2\Delta)$, κοκ. Ως τιμή της νέας ανέλιξης $X_\Delta(k)$ στη χρονική θέση $k$ ορίζουμε το χρονικό μέσο της $X(t)$ στο αντίστοιχο διάστημα, ήτοι

$$X_\Delta(k) := \frac{1}{\Delta} \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} X(t)\,dt \tag{4.2}$$

Αν για παράδειγμα η $X(t)$ παριστάνει τη στιγμιαία παροχή ποταμού, και το Δ ληφθεί μία ημέρα ή ένας μήνας, τότε η $X_\Delta(k)$ παριστάνει την ημερήσια (ακριβέστερα: τη χρονικά μέση ημερήσια) ή τη μηνιαία (ακριβέστερα: τη χρονικά μέση μηνιαία) παροχή, αντίστοιχα. Μερικές φορές ως παράγωγο μέγεθος παίρνουμε όχι το χρονικό μέσο αλλά το χρονικό άθροισμα στο αντίστοιχο διάστημα Δ, δηλαδή το μέγεθος

$$X^*_\Delta(k) := \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} X(t)\,dt \tag{4.3}$$

Στο παραπάνω παράδειγμα το μέγεθος $X^*_\Delta(k)$ παριστάνει τον ημερήσιο ή το μηνιαίο όγκο απορροής. Αντίστοιχα αν η $X(t)$ παριστάνει τη στιγμιαία ένταση βροχής σε δεδομένο σημείο μιας λεκάνης απορροής, και το Δ ληφθεί μία ημέρα ή ένας μήνας, τότε η $X^*_\Delta(k)$ παριστάνει το ημερήσιο ή το μηνιαίο ύψος βροχής, αντίστοιχα.

Αν και η διακριτοποίηση του χρόνου είναι ένα βήμα προς την απλοποίηση της μελέτης μιας υδρολογικής διεργασίας, η μαθηματική περιγραφή της $X_\Delta(k)$ ή της $X^*_\Delta(k)$ είναι ακόμη αρκετά πολύπλοκη, γιατί προϋποθέτει την ανάλυση της περιοδικότητας και της ισχυρής αυτοσυσχέτισης της ανέλιξης. Έτσι, η μελέτη και αυτού του τύπου των ανελίξεων δεν καλύπτεται από αυτό το εισαγωγικό κείμενο τεχνικής υδρολογίας και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στους Haan (1977), Kottegoda (1980) Bras and Rodriguez-Iturbe (1985) και Salas et al. (1988). Οι επόμενες απλοποιήσεις είναι αρκετά δραστικότερες και οι ανελίξεις που προκύπτουν είναι πολύ ευκολότερο να μελετηθούν αλλά και είναι πολύ χρησιμότερες στα πρακτικά προβλήματα του μηχανικού.

Αν στην ανέλιξη $X_\Delta(k)$ (ή την $X^*_\Delta(k)$) θεωρήσουμε χρονικό βήμα ίσο με ένα υδρολογικό έτος ($\Delta = D$) τότε παίρνουμε την *ετήσια ανέλιξη*, συμβολικά $X^*_D(\tau)$, όπου χρησιμοποιήσαμε ως σύμβολο του διακριτού χρόνου (που πλέον εκφράζεται σε ακέραιες μονάδες υδρολογικού έτους) το $\tau$ αντί του $k$ (Σχ. 4.2(3)). Έτσι έχουμε

$$X_D(\tau) := \frac{1}{D}\int_{(\tau-1)D}^{\tau D} X(t)\,dt, \qquad X_D^*(\tau) := \int_{(\tau-1)D}^{\tau D} X(t)\,dt \tag{4.4}$$

Σε αυτή την ανέλιξη πλέον έχει εξαλειφθεί τελείως η περιοδικότητα, δεδομένου ότι δεν είναι "ορατά" χρονικά διαστήματα μικρότερα του έτους, και έχει περιοριστεί η αυτοσυσχέτιση σε μεγάλο βαθμό, λόγω του μεγάλου χρονικού βήματος ολοκλήρωσης. Εξ άλλου η ανέλιξη αυτή, η οποία εκφράζει τη διαδοχή στα διάφορα υδρολογικά έτη μιας συνολικής ετήσιας υδρολογικής ποσότητας, είναι επαρκής για προβλήματα εκτίμησης υδατικού δυναμικού.

Ένας τρόπος για να πάμε σε μικρότερο από το ετήσιο χρονικό βήμα, εξαλείφοντας παράλληλα την περιοδικότητα και την αυτοσυσχέτιση, φαίνεται στο Σχ. 4.2(4). Σε κάθε υδρολογικό έτος $\tau = 1, 2, \ldots$, παίρνουμε ένα μόνο διάστημα μεγέθους Δ, και συγκεκριμένα το $[(\tau-1)D + (k-1)\Delta,\ (\tau-1)D + k\Delta)$. Το $k$ εδώ είναι ένας δεδομένος ακέραιος με δυνατές τιμές $k = 1, 2, \ldots, D/\Delta$ (στο Σχ. 4.2(4) έχει ληφθεί $k = 1$). Η προκύπτουσα ανέλιξη είναι:

$$Y_\Delta(\tau) := \frac{1}{\Delta}\int_{(\tau-1)D+(k-1)\Delta}^{(\tau-1)D+k\Delta} X(t)\,dt, \qquad Y_\Delta^*(\tau) := \int_{(\tau-1)D+(k-1)\Delta}^{(\tau-1)D+k\Delta} X(t)\,dt \tag{4.5}$$

Για παράδειγμα αν η $X(t)$ παριστάνει τη στιγμιαία παροχή ποταμού, το Δ ληφθεί ένας μήνας και το $k = 1$, τότε η $Y_\Delta(\tau)$ είναι η σειρά των (μέσων) μηνιαίων παροχών του Οκτωβρίου κάθε έτους και η $Y^*_\Delta(\tau)$ είναι η σειρά των αντίστοιχων όγκων απορροής.

### 4.1.2 Ανελίξεις ακροτάτων

Σε πολλά προβλήματα, αντί των χρονικών μέσων ή των αθροιστικών μεγεθών δεδομένης διάρκειας, ενδιαφέρουν τα ακρότατα μεγέθη, δηλαδή τα μέγιστα (για τη μελέτη πλημμυρών) ή τα ελάχιστα (για τη μελέτη ξηρασιών). Για τη μελέτη αυτών των μεγεθών σχηματίζουμε αντίστοιχες ανελίξεις. Έτσι, στο Σχ. 4.2(5) έχει σχηματιστεί η ανέλιξη των *στιγμιαίων ετήσιων μεγίστων* $Z_0(\tau)$. Σε κάθε υδρολογικό έτος πήραμε μόνο μια τιμή, τη στιγμιαία μέγιστη τιμή που εμφανίζεται κατά τη διάρκεια όλου του υδρολογικού έτους, δηλαδή

$$Z_0(\tau) := \max_{\tau-1\le t<\tau}\{X(t)\} \tag{4.6}$$

Με αντίστοιχο τρόπο σχηματίζεται και η ανέλιξη των *στιγμιαίων ετήσιων ελαχίστων*. Αυτές οι ανελίξεις δεν εμφανίζουν περιοδικότητα (μια τιμή μόνο ανά έτος) ούτε αυτοσυσχέτιση (απομακρυσμένες χρονικά τιμές που προκύπτουν από τελείως διαφορετικά υδρομετεωρολογικά φαινόμενα) και γι' αυτό είναι εύκολο να μελετηθούν.

Αν ενδιαφέρει η μέγιστη τιμή του μεγέθους μέσα σε μια δεδομένη διάρκεια Δ, τότε ορίζουμε και μελετούμε αντίστοιχα τις *ανελίξεις ετήσιων μεγίστων δεδομένης διάρκειας*, ήτοι (Σχ. 4.2(6))

$$Z_\Delta(\tau) := \max_{\tau-1\le s<\tau-\Delta}\left\{\frac{1}{\Delta}\int_s^{s+\Delta} X(t)\,dt\right\}, \quad Z^*_\Delta(\tau) := \max_{\tau-1\le s<\tau-\Delta}\left\{\int_s^{s+\Delta} X(t)\,dt\right\} \tag{4.7}$$

Ο ορισμός των ανελίξεων αυτών βασίστηκε στη ανέλιξη συνεχούς χρόνου $X(t)$. Εναλλακτικά, αλλά με μικρότερη ακρίβεια, μπορούν να οριστούν από τις ανελίξεις διακριτού χρόνου (Σχ. 4.2(7)) με τις σχέσεις

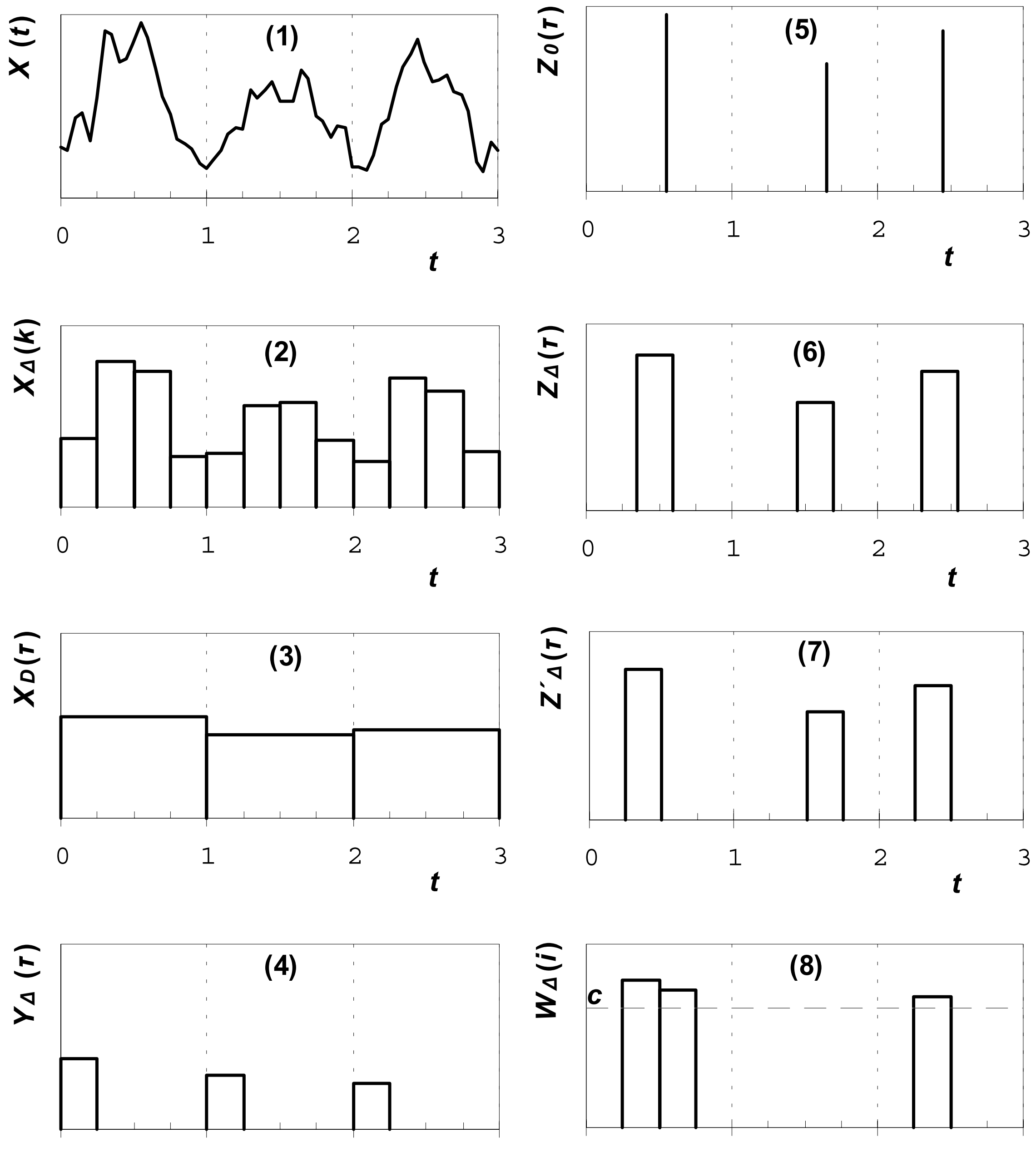
$$Z'_\Delta(\tau) := \max_{k_1\le k\le k_2}\{X_\Delta(k)\}, \qquad Z'^*_\Delta(\tau) := \max_{k_1\le k\le k_2}\{X^*_\Delta(k)\} \tag{4.8}$$

όπου $k_1 := (\tau-1)D/\Delta+1$ êáé $k_2 := \tau D/\Delta$. Στα Σχ. 4.2(6) και Σχ. 4.2(7) είναι εμφανές ότι οι μεταβλητές $Z_\Delta(\tau)$ και $Z'_\Delta(\tau)$ δεν ταυτίζονται ούτε ως προς το μέγεθος ούτε ως προς τη χρονική τοποθέτηση, χωρίς πάντως να διαφέρουν πολύ. Με ανάλογο τρόπο σχηματίζονται και οι ανελίξεις των *ετήσιων ελαχίστων δεδομένης διάρκειας*. Στα προβλήματα πλημμυρών και ξηρασιών οι τυπικές τιμές του χρονικού βήματος Δ κυμαίνονται από μερικά λεπτά (π.χ. στις καταιγίδες σχεδιασμού δικτύων αποχέτευσης ομβρίων) μέχρι μερικές μέρες ή ακόμη και ένα μήνα (π.χ. στη μελέτη ποιότητας υδάτων ποταμού σε συνθήκες ξηρασίας).

Μια τελευταία σειρά μεγίστων που ονομάζεται *σειρά υπεράνω κατωφλίου* ή *σειρά μερικής διάρκειας* φαίνεται στο Σχ. 4.2(8). Η σειρά αυτή, όπως και αυτή του Σχ. 4.2(7), προκύπτει από την ανέλιξη διακριτού χρόνου $X_\Delta(k)$. Αντί όμως να πάρουμε τη μέγιστη τιμή κάθε υδρολογικού έτους, σχηματίζουμε τη σειρά όλων των τιμών που υπερβαίνουν ένα όριο $c$, ανεξάρτητα από τη θέση των τιμών αυτών στα διάφορα υδρολογικά έτη, δηλαδή

$$\left\{W_\Delta(i), i = 1,2,\ldots\right\} := \left\{X_\Delta(k) \colon X_\Delta(k) \geq c, k = 1,2,\ldots\right\} \tag{4.9}$$

(Αντίστοιχα ορίζεται και η ανέλιξη $W^*_\Delta(i)$ από τη $X^*_\Delta(k)$). Εδώ η μεταβλητή $i$ που επέχει θέση χρόνου στην πραγματικότητα αντιπροσωπεύει απλώς τον αύξοντα αριθμό που έχει η κάθε τιμή στη σειρά των χρονικά διαδοχικών τιμών. Το κατώφλι $c$ συνήθως επιλέγεται έτσι ώστε σε κάθε έτος να αντιστοιχεί *κατά μέσο όρο* μια τιμή μεγαλύτερη από το κατώφλι. Έτσι, στο Σχ. 4.2(8) το κατώφλι που αντιπροσωπεύεται από την οριζόντια διακεκομμένη γραμμή έχει επιλεγεί έτσι ώστε να υπάρχουν τρεις τιμές σε σύνολο τριών υδρολογικών ετών. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα βλέπουμε ότι στο πρώτο υδρολογικό έτος προκύπτουν δύο τιμές πάνω από το κατώφλι, ενώ στο δεύτερο καμιά. Το γεγονός ότι στις σειρές μερικής διάρκειας μπορεί να εμφανίζονται τιμές που αντιστοιχούν σε γειτονικές θέσεις του πραγματικού χρόνου (όπως οι δύο τιμές του πρώτου υδρολογικού έτους του παραδείγματος) ενδέχεται να εισάγει μη αμελητέα στοχαστική εξάρτηση στις διαδοχικές τιμές της ανέλιξης. Αν είναι επιθυμητή η κατασκευή σειράς ανεξάρτητων τιμών θα πρέπει είτε να τεθεί και ένα όριο ελάχιστης χρονικής απόστασης διαδοχικών τιμών, είτε να χρησιμοποιηθούν άλλες εμπειρικές μέθοδοι (βλ. Kottegoda, 1980, σ. 247).




**Σχ. 4.2** Βοηθητικό σκαρίφημα για τον ορισμό των διάφορων τύπων ανελίξεων (βλ. περιγραφή στο κείμενο).

### 4.1.3 Βασικές απλουστευτικές παραδοχές

Πιο πάνω διευκρινίσαμε ότι στο εισαγωγικό αυτό κείμενο δεν καλύπτεται ούτε η μελέτη των ανελίξεων συνεχούς χρόνου, ούτε των πλήρων ανελίξεων διακριτού χρόνου. Ορίσαμε, ωστόσο, άλλους έξι τύπους ανελίξεων με τις οποίες θα ασχοληθούμε και στα επόμενα κεφάλαια. Σε όλους αυτούς τους τύπους ο “χρόνος” είναι διακριτός και δεν ταυτίζεται κατ' ανάγκη με τον πραγματικό χρόνο. Επίσης, καθεμιά από τις ανελίξεις περιλαμβάνει ακριβώς μία τιμή ανά έτος, εκτός από την ανέλιξη μερικής διάρκειας που περιλαμβάνει κατά μέσο όρο μία τιμή ανά έτος. Για τη μελέτη μας θα κάνουμε από τώρα τις ακόλουθες παραδοχές:

1. Οι ανελίξεις είναι στάσιμες: η κατανομή κάθε μεταβλητής παραμένει ίδια από έτος σε έτος.
2. Οι ανελίξεις είναι εργοδικές: οι αναμενόμενες τιμές είναι ίσες με τους χρονικούς μέσους.
3. Οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Για να διαλευκάνουμε το νόημα αυτών των παραδοχών δίνουμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι η $X(t)$ αντιπροσωπεύει τη στιγμιαία παροχή στο χρόνο $t$, οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω η $X_D(\tau)$ είναι η μέση ετήσια παροχή του υδρολογικού έτους $\tau$. Έστω ότι διαθέτουμε μετρήσεις 30 ετών, ξέρουμε δηλαδή τις τιμές $x_D(1)$, …, $x_D(30)$, των τυχαίων μεταβλητών $X_D(1)$, …, $X_D(30)$. Είναι βέβαια προφανές, αλλά ωστόσο τονίζουμε ότι για κάθε μεταβλητή μπορούμε να έχουμε μόνο μια τιμή (δεν μπορούμε να κάνουμε πολλαπλά πειράματα τύχης με διαφορετικές εκβάσεις ώστε να σχηματίσουμε ένα δείγμα πολλαπλών τιμών για την ίδια μεταβλητή, π.χ. την ετήσια παροχή του υδρολογικού έτους με αριθμό 25). Τίθεται τώρα το ερώτημα αν με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή της παροχής του επόμενου υδρολογικού έτους, του υπ' αριθμόν 31. Η απάντηση είναι αρνητική αν δεν ισχύει η πρώτη από τις παραπάνω παραδοχές. Αν η κατανομή της ετήσιας παροχής είναι διαφορετική κάθε έτος, τότε δεν μπορούμε να συνδέσουμε τα προηγούμενα χρόνια με το τρέχον.[†] Αλλά εξακολουθεί να είναι αρνητική και αν ακόμη ισχύει η πρώτη παραδοχή αλλά όχι η δεύτερη. Στην πραγματικότητα, αυτό που μπορούμε να υπολογίσουμε από τα διαθέσιμα δεδομένα είναι ο χρονικός μέσος όρος, δηλαδή η μέση υπερετήσια παροχή των προηγούμενων τριάντα ετών. Η εργοδικότητα μας εξασφαλίζει ότι αυτός ο χρονικός μέσος τείνει προς τη θεωρητική μέση τιμή της κάθε μεταβλητής.

[†] Υπάρχουν πάντως τρόποι να αντιμετωπιστεί η μη στασιμότητα, οι οποίοι ξεφεύγουν από το σκοπό του παρόντος κειμένου.

Έτσι οι δύο πρώτες παραδοχές είναι θεμελιώδεις. Η τρίτη παραδοχή, της ανεξαρτησίας, είναι λιγότερο σημαντική, αλλά βοηθά πολύ σε περιπτώσεις που μας ενδιαφέρει η πιθανότητα διαδοχικών γεγονότων, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί στο τέλος αυτής της ενότητας.

Η πρώτη από τις πιο πάνω παραδοχές αποτελεί απλώς μια προσέγγιση, δεδομένου ότι τα υδρομετεωρολογικά φαινόμενα δεν περιγράφονται με αυστηρώς στάσιμες ανελίξεις. Η ορθότητα της δεύτερης παραδοχής συναρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ορθότητα της πρώτης. Για την τρίτη παραδοχή έχει ήδη γίνει συζήτηση: οι ανελίξεις ετήσιων τιμών και μέγιστων τιμών μερικής διάρκειας δεν είναι πάντα απαλλαγμένες από στοχαστική εξάρτηση, η οποία πάντως είναι αρκετά μικρή και μπορεί να αγνοηθεί, ιδίως όταν μας ενδιαφέρει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής ενός μεμονωμένου μεγέθους. Είναι απαραίτητο πάντως να τονίσουμε ότι στην υδρολογία δεν υπάρχουν γενικά αποδεκτές *a priori* παραδοχές και γι' αυτό πάντα θα πρέπει να γίνεται έλεγχος των παραδοχών *a posteriori*.

### 4.1.4 Τελικό συμπέρασμα

Οι παραδοχές της στασιμότητας, της εργοδικότητας και της ανεξαρτησίας που έγιναν για τις ετήσιες ανελίξεις ετησίων τιμών, μηνιαίων τιμών συγκεκριμένου μήνα, ετήσιων μεγίστων ή ελαχίστων (στιγμιαίων ή δεδομένης διάρκειας) και μεγίστων μερικής διάρκειας, οδηγούν σε μια τελική απλοποίηση που διευκολύνει πολύ τη μελέτη: μπορούμε καθένα απ' αυτά τα μεγέθη να το θεωρήσουμε ως μια απλή τυχαία μεταβλητή και τις τιμές του στα διάφορα υδρολογικά έτη να τις θεωρήσουμε ως διαφορετικές εμφανίσεις αυτής της ίδιας τυχαίας μεταβλητής. Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την έννοια της ανέλιξης με την έννοια της απλής τυχαίας μεταβλητής, και, πράγματι, αυτό θα κάνουμε στις επόμενα κεφάλαια. Για παράδειγμα, στο εξής δεν θα μιλούμε για την ανέλιξη των ετήσιων παροχών αλλά για την τυχαία μεταβλητή της ετήσιας παροχής. Αντίστοιχα, αντί να μιλούμε για τη χρονοσειρά των ετήσιων παροχών θα μιλούμε για το δείγμα της ετήσιας παροχής, αγνοώντας τη χρονική διάταξη των ιστορικών δεδομένων των διαδοχικών υδρολογικών ετών.

### Εφαρμογή 4.1

*Με βάση τα ιστορικά δεδομένα παροχών ενός ποταμού που διατίθενται για μια μακρά περίοδο, εκτιμήσαμε ότι το ενδεχόμενο να εμφανιστεί ετήσιος όγκος απορροής μικρότερος από 500 $hm^3$ † έχει πολύ μικρή πιθανότητα, ίση με $10^{-2}$. (α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να εμφανιστεί επί πέντε διαδοχικά χρόνια όγκος απορροής μικρότερος από 500 $hm^3$ (βλ. και Εφαρμογή 2.3).*

Με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι παραδοχές της στασιμότητας, της εργοδικότητας και της ανεξαρτησίας η ζητούμενη πιθανότητα είναι απλώς $(10^{-2})^5 = 10^{-10}$. Πρόκειται βέβαια για εξαιρετικά μικρή πιθανότητα. Ωστόσο έχει παρατηρηθεί ότι στη φύση τέτοια φαινόμενα διαδοχής εξαιρετικά ξηρών ετών δεν είναι τόσο απίθανα.

Αν δεν ισχύει η παραδοχή της ανεξαρτησίας, τότε κατά κανόνα η συσχέτιση των τιμών των διαφορετικών ετών (που περιγράφεται από το συντελεστή αυτοσυσχέτισης της ανέλιξης για χρονικό βήμα ένα) είναι θετική. Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα του υπόψη ενδεχομένου θα είναι μεγαλύτερη από $10^{-10}$, αλλά δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της χωρίς να χρησιμοποιήσουμε προχωρημένες τεχνικές στοχαστικών ανελίξεων.

*(β) Αν τα προηγούμενα τέσσερα χρόνια έχει εμφανιστεί όγκος απορροής μικρότερος από 500 $hm^3$, ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί και εφέτος το ίδιο ενδεχόμενο;*

Προφανώς, αν ισχύει η παραδοχή της ανεξαρτησίας, η πιθανότητα που ζητείται είναι $10^{-2}$. Το τι συνέβη τα προηγούμενα χρόνια δεν επηρεάζει το παρόν αν υπάρχει ανεξαρτησία των γεγονότων. Αν δεχτούμε ότι υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των διαδοχικών ετών, τότε η πιθανότητα θα είναι μεγαλύτερη, αφού είναι πιθανότερο ένα ξηρό υδρολογικό έτος να ακολουθείται από επίσης ξηρό.

Ενδεχομένως, η διαισθητική απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αντίθετη: η διαίσθηση, παρασυρμένη από την εξαιρετικά μικρότερη πιθανότητα της διαδοχής πέντε διαδοχικών ξηρών ετών, που όπως υπολογίσαμε είναι $10^{-10}$, έχει την τάση να αποδώσει πιθανότητα μικρότερη από $10^{-2}$, ίσως και $10^{-10}$. Πρόκειται όμως για καθαρή πλάνη.‡

---

† Υπενθυμίζεται ότι η μονάδα $hm^3$ σημαίνει κυβικά εκατόμετρα (1 $hm^3$ = $(100\ m)^3$ = 1 000 000 $m^3$).

‡ Βέβαια δεν είναι η μοναδική πλάνη του κοινού που γύρω από τις πιθανότητες. Σε τέτοιου είδους φαινομενικά “αθώες” πλάνες έχουν στηριχτεί πολλές απάτες, ιδίως σε τυχερά παιχνίδια, κληρώσεις κ.ο.κ.

## 4.2 Η έννοια της περιόδου επαναφοράς

Ο όρος *περίοδος επαναφοράς* είναι από αυτούς που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην τεχνική υδρολογία, αλλά έχει τύχει κριτικής ως προς την ευστοχία και την σαφήνειά του. Πράγματι, ο όρος αυτός είναι υπεύθυνος για πολλές παρανοήσεις που θα εκτεθούν παρακάτω προκειμένου να διασαφηνιστεί όσο γίνεται καλύτερα.

Αρχικά, η περίοδος επαναφοράς, $T$, μιας δεδομένης τιμής $x$ της τυχαίας μεταβλητής $X$ (η οποία στην πραγματικότητα αντιπροσωπεύει μια στοχαστική ανέλιξη) ορίζεται ως ο *μέσος* αριθμός χρονικών διαστημάτων (εν προκειμένω υδρολογικών ετών) που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών εμφανίσεων της τυχαίας μεταβλητής με μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο της δεδομένης τιμής $x$. Για παράδειγμα, αν η τιμή 500 $m^3/s$ της μέγιστης ετήσιας παροχής έχει περίοδο επαναφοράς 50, αυτό σημαίνει ότι *κατά μέσο όρο* μεσολαβεί ένα διάστημα 50 ετών ανάμεσα σε δύο εμφανίσεις πλημμυρικής παροχής μεγαλύτερης ή ίσης των 500 $m^3/s$. Αποδεικνύεται (Kottegoda, 1980, σ. 213) ότι η περίοδος επαναφοράς της τιμής $x$ είναι

$$T = \frac{1}{P(X > x)} = \frac{1}{F_{1_X}(x)} = \frac{1}{1 - F_X(x)} \tag{4.10}$$

δηλαδή η περίοδος επαναφοράς είναι το αντίστροφο της πιθανότητας υπέρβασης. Προϋποθέσεις για να ισχύει η παραπάνω σχέση είναι (α) να είναι συνεχής η τυχαία μεταβλητή και (β) να ισχύει η παραδοχή ανεξαρτησίας της προηγούμενης ενότητας, δηλαδή κάθε εμφάνιση να είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από τις προηγούμενες και επόμενές της. Δεδομένου ότι οι προϋποθέσεις αυτές ισχύουν κατά κανόνα για τα μεγέθη που εξετάζουμε σε αυτό το κείμενο, για τις ανάγκες των προβλημάτων των επόμενων κεφαλαίων μπορούμε να θεωρούμε την εξίσωση (4.10) ως ισοδύναμο ορισμό της περιόδου επαναφοράς.

Τα παραπάνω ισχύουν κατά βάση για τις περιπτώσεις που ενδιαφέρουν μεγάλες τιμές υδρολογικών μεγεθών, π.χ. πλημμύρες. Κατ' αναλογία ορίζεται η περίοδος επαναφοράς για μικρά μεγέθη, π.χ. για παροχές ξηρασίας. Στην περίπτωση αυτή, στον αρχικό ορισμό θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τη φράση “μεγαλύτερο ή ίσο” με τη φράση “μικρότερο ή ίσο” ή ισοδύναμα να θεωρήσουμε

$$T = \frac{1}{P(X \le x)} = \frac{1}{F_X(x)} \tag{4.11}$$

Συμπερασματικά λοιπόν, στα πλαίσια αυτού του κειμένου θα θεωρούμε την περίοδο επαναφοράς είτε ως το αντίστροφο της πιθανότητας υπέρβασης, όταν ενδιαφέρει μέγιστο μέγεθος, είτε ως το αντίστροφο της πιθανότητας μη υπέρβασης (συνάρτησης κατανομής) όταν ενδιαφέρει ελάχιστο μέγεθος.

Ας έρθουμε τώρα στην κριτική της έννοιας της περιόδου επαναφοράς. Κατ' αρχήν η διττή σημασία της (διαφορετική έννοια για μέγιστα ή ελάχιστα μεγέθη) τείνει να δημιουργήσει σύγχυση. Επίσης ο όρος *περίοδος* δημιουργεί τον κίνδυνο να εκληφθεί το μέγεθος στο οποίο αναφέρεται ως κυμαινόμενο περιοδικά, πράγμα που είναι τελείως εσφαλμένο αφού αναφέρεται σε τυχαίες μεταβλητές. Για το λόγο αυτό έχει συχνά χρησιμοποιηθεί, χωρίς όμως να επικρατήσει, ο όρος *διάστημα επανόδου*. Ωστόσο, και εδώ υπάρχει σύγχυση, γιατί ο τελευταίος όρος έχει χρησιμοποιηθεί συχνά και με άλλο νόημα, ήτοι του πραγματικού (και όχι του μέσου) χρόνου ανάμεσα σε διαδοχικές υπερβάσεις μιας τιμής, οπότε έχει την έννοια τυχαίας μεταβλητής (π.χ. στους Chow et al., 1988). Ένα τελευταίο πρόβλημα αφορά στη διάσταση του μεγέθους *T*. Όπως έχει οριστεί παραπάνω, το μέγεθος είναι αδιάστατο και ως αδιάστατο χρησιμοποιείται σε όλες τις μαθηματικές σχέσεις. Ωστόσο, στην πράξη αποδίδονται στο μέγεθος διαστάσεις χρόνου με μονάδα ίση με το υδρολογικό έτος. Έτσι λέμε π.χ. ότι η (μέγιστη ετήσια) πλημμυρική παροχή των 500 $m^3/s$ έχει περίοδο επαναφοράς 50 ετών, ή αλλιώς ότι η πλημμύρα 50ετίας είναι 500 $m^3/s$.

Παρόλα τα παραπάνω προβλήματα η περίοδος επαναφοράς έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στην υδρολογία, γιατί γίνεται αμεσότερα αντιληπτή από την έννοια της πιθανότητας και γιατί η αριθμητική της έκφραση είναι ανετότερη από αυτή της πιθανότητας. Για παράδειγμα είναι αμεσότερη η έκφραση “πλημμύρα 50ετίας” από την έκφραση “πλημμύρα πιθανότητας υπέρβασης 0.02”. Ωστόσο, συνδυάζοντας τους δύο εκφράσεις, θα μπορούσαμε να πούμε ακριβέστερα “πλημμύρα πιθανότητας υπέρβασης 1 : 50”.

**Εφαρμογή 4.2**

*α. Σε ποια πιθανότητα υπέρβασης και ποια πιθανότητα μη υπέρβασης αντιστοιχούν οι πλημμύρες 2, 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000, 5 000 και 10 000 ετών;*

Με βάση την εξίσωση (4.10) εύκολα βρίσκουμε τις τιμές του Πίν. 4.1.

**Πίν. 4.1** Αντιστοιχία περιόδου επαναφοράς, πιθανότητας υπέρβασης και πιθανότητας μη υπέρβασης της Εφαρμογής 4.2.

| Περίοδος επαναφοράς $T$ | Πιθανότητα υπέρβασης $F_1$ (%) | Πιθανότητα μη υπέρβασης $F$ (%) |
|---:|---:|---:|
| 2 | 50 | 50 |
| 5 | 20 | 80 |
| 10 | 10 | 90 |
| 20 | 5 | 95 |
| 50 | 2 | 98 |
| 100 | 1 | 99 |
| 500 | 0.2 | 99.8 |
| 1000 | 0.1 | 99.9 |
| 5 000 | 0.02 | 99.98 |
| 10 000 | 0.001 | 99.99 |

*β. Σε ποια πιθανότητα υπέρβασης και ποια πιθανότητα μη υπέρβασης αντιστοιχούν οι ξηρασίες των ίδιων περιόδων επαναφοράς, όπως στο ερώτημα α;*

Η απάντηση δίνεται από τον Πίν. 4.1, αν αντιμετατεθούν αμοιβαία οι στήλες της πιθανότητας υπέρβασης και πιθανότητας μη υπέρβασης.

## 4.3 Η έννοια της διακινδύνευσης

Κατά το σχεδιασμό ενός έργου είναι συνηθέστατη πρακτική να υπολογίζεται με βάση τα διαθέσιμα δεδομένα η *τιμή σχεδιασμού* ή *φόρτιση σχεδιασμού* $L$, αλλά η *ικανότητα του έργου* $C$ να υιοθετείται μεγαλύτερη, έτσι ώστε να υπάρχει δεδομένο περιθώριο ασφάλειας

$$\mathrm{SM} := C - L \tag{4.12}$$

ή δεδομένος, μεγαλύτερος από 1, *συντελεστής ασφάλειας*

$$\mathrm{SF} := \frac{C}{L} \tag{4.13}$$

Στο χώρο των κατασκευών πολιτικού μηχανικού το μέγεθος $L$ μπορεί, για παράδειγμα, να είναι το δυσμενέστερο φορτίο λειτουργίας ενός υποστυλώματος, οπότε το $C$ είναι το φορτίο που προκαλεί θραύση του υποστυλώματος. Στο χώρο της τεχνικής υδρολογίας, το $L$ μπορεί να είναι, για παράδειγμα, η παροχή σχεδιασμού ενός υπερχειλιστή φράγματος, οπότε το μέγεθος $C$ είναι η παροχετευτικότητα του υπερχειλιστή, δηλαδή η παροχή που μπορεί να διοδευτεί με ασφάλεια από τον υπερχειλιστή χωρίς κίνδυνο υπερπήδησης του φράγματος.

Η υιοθέτηση συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής για το συντελεστή ασφάλειας (π.χ. SF = 3) ή το περιθώριο ασφάλειας αποτελεί εμπειρική προσέγγιση στην αντιμετώπιση της αβεβαιότητας που υπάρχει στην εκτίμηση της φόρτισης ενός έργου ή της ικανότητας του. Ωστόσο, αυτή η πρακτική δεν δίνει πολύ σαφές μέτρο της ασφάλειας και μάλιστα δίνει την εσφαλμένη εντύπωση της πλήρους εξάλειψης του κινδύνου αστοχίας του συγκεκριμένου έργου. Αντίθετα, η προσέγγιση της αβεβαιότητας μέσω της θεωρίας πιθανοτήτων αποτελεί τη μόνη ορθολογική απάντηση στην ποσοτικοποίηση του κινδύνου αστοχίας. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, τα μεγέθη SM και SF θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές και, ως μέτρο του κινδύνου αστοχίας, ορίζεται η *διακινδύνευση* (ή *επικινδυνότητα - risk*):

$$R := P(\mathrm{SF} < 1) = P(\mathrm{SM} < 0) \tag{4.14}$$

Στην τυπικότερη κατηγορία προβλημάτων της τεχνικής υδρολογίας, τα προβλήματα σχεδιασμού, η ικανότητα του έργου (π.χ. η παροχετευτικότητα ή η αποθηκευτική ικανότητα) μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει δεδομένη τιμή με πλήρη βεβαιότητα ($C = c$), οπότε δεν θεωρείται ως τυχαία μεταβλητή.[†] Σε αυτή την περίπτωση η διακινδύνευση είναι

$$R = P(L > c) = 1 - P(L \le c) \tag{4.15}$$

[†] Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για συνθετότερα προβλήματα, όπου και η ικανότητα είναι τυχαία μεταβλητή, παραπέμπεται στους Chow et al. (1988).

και οφείλεται μόνο στην ενυπάρχουσα αβεβαιότητα των υδρολογικών διεργασιών. Για το λόγο αυτό μιλούμε για *φυσική* ή *ενυπάρχουσα διακινδύνευση*.

Το μέγεθος $L$ εξαρτάται από τη μεταβλητότητα της φυσικής διεργασίας που ενδιαφέρει (π.χ. της πλημμυρικής παροχής) καθώς και από τη διάρκεια που θα εκτεθεί το έργο στο φυσικό κίνδυνο, δηλαδή τη *διάρκεια ζωής* του έργου. Εάν $X$ παριστάνει το μέγιστο μέγεθος της φυσικής διεργασίας σε ετήσια βάση (π.χ. τη μέγιστη ετήσια πλημμύρα) και $n$ είναι η διάρκεια ζωής του έργου, τότε το γεγονός $\{L \le c\}$ ισοδυναμεί με $n$ διαδοχικές εμφανίσεις του γεγονότος $\{X \le c\}$. Για να μην έχουμε, δηλαδή, υπέρβαση του μεγέθους $c$ σε όλη τη διάρκεια ζωής του έργου θα πρέπει να μην έχουμε υπέρβαση σε όλα τα $n$ χρόνια αυτής της διάρκειας. Θεωρώντας ότι οι πλημμύρες των διαδοχικών ετών είναι στοχαστικά ανεξάρτητες και εφαρμόζοντας τη σχέση (2.12) παίρνουμε

$$R = 1 - \left[P(X \le c)\right]^n = 1 - \left[F_X(c)\right]^n \tag{4.16}$$

όπου $F_X$ είναι η συνάρτηση κατανομής του φυσικού μεγέθους που μας ενδιαφέρει, σε ετήσια βάση. Αντικαθιστώντας τη με την αντίστοιχη περίοδο επαναφοράς παίρνουμε την ακόλουθη βασική σχέση, η οποία συνδέει τα τρία βασικά μεγέθη υδρολογικού σχεδιασμού ενός έργου, δηλαδή την περίοδο επαναφοράς, τη διάρκεια ζωής και τη διακινδύνευση:

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n \tag{4.17}$$

Γραφική απεικόνιση της (4.17) δίνεται στο Σχ. 4.3 για χαρακτηριστικές περιόδους επαναφοράς.

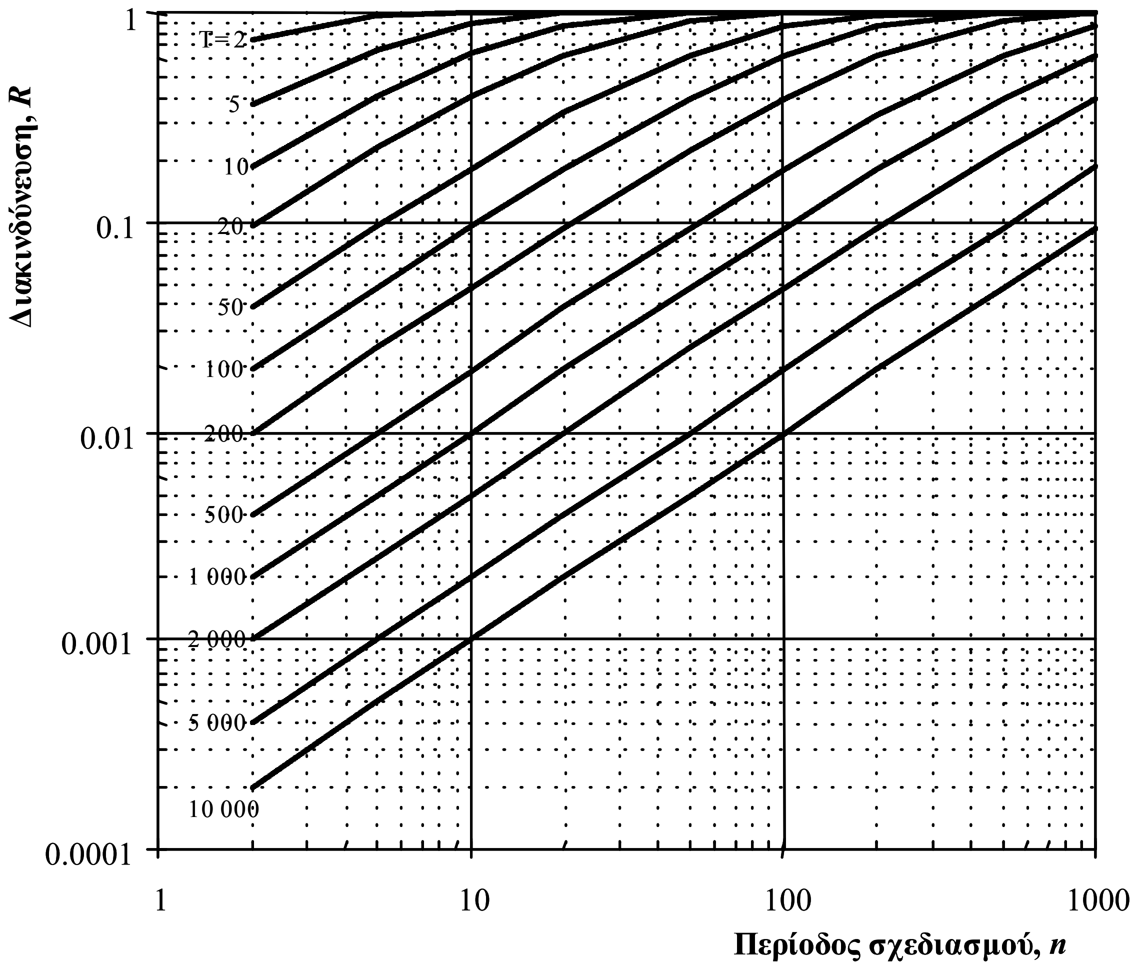
Ισοδύναμη έκφραση της (4.17) είναι η ακόλουθη, η οποία έχει επιλυθεί ως προς την περίοδο επαναφοράς:

$$T = \frac{1}{1 - (1 - R)^{1/n}} \tag{4.18}$$

Τέλος, δεδομένου ότι $\ln(1 - x)^n = n \ln(1 - x) = n\left(-x - x^2 / 2 - \cdots\right) \approx -nx$, παίρνουμε και την ακόλουθη προσεγγιστική έκφραση του $R$:

$$R \approx 1 - e^{-n/T} \tag{4.19}$$

η οποία ισχύει με σφάλμα < 1% για $T \geq 50$.




**Σχ. 4.3** Γραφική απεικόνιση της σχέσης των χαρακτηριστικών μεγεθών υδρολογικού σχεδιασμού (εξίσωση 4.17).

## Εφαρμογή 4.3

*α. Διώρυγα εκτροπής σχεδιάζεται να λειτουργήσει κατά την περίοδο κατασκευής φράγματος, η οποία εκτιμάται σε 5 χρόνια. Ποια πρέπει να είναι η περίοδος επαναφοράς της πλημμύρας σχεδιασμού, ώστε η διακινδύνευση να μην υπερβαίνει το 10%;*

Από την (4.18) παίρνουμε

$$T = \frac{1}{1-(1-R)^{1/n}} = \frac{1}{1-(1-0.1)^{1/5}} = 47.9$$

Στρογγυλεύουμε σε $T = 50$ χρόνια.

*β. Πόση είναι η διακινδύνευση αν ένα έργο σχεδιαστεί με περίοδο επαναφοράς ίση με τη διάρκεια ζωής του;*

Αν δεχτούμε ότι η διάρκεια ζωής του έργου είναι αρκετά μεγάλη ($\geq 50$ χρόνια), τότε από την (4.19) παίρνουμε $R = 1 - e^{-1} = 0.632 = 63.2\%$. Διαφορετικά η διακινδύνευση υπολογίζεται από την (4.17).