

## Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων

Δημήτρης Κουτσογιάννης  
Τομέας Υδατικών Πόρων  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

### 1. Ακραία υδρολογικά περιστατικά Καταιγίδες, πλημμύρες και ξηρασίες: Ορισμοί

- ◆ Πλημμύρα: η υπερχείλιση νερού σε περιοχές της ξηράς που συνήθως δεν κατακλύζονται (U.S. Committee on Opportunities in the Hydrological Sciences, 1992 σ. 23).
- ◆ Καταιγίδα: Ισχυρή βροχόπτωση που (συνήθως) προκαλεί πλημμύρα
- ◆ Ξηρασία: υπάρχουν διάφοροι ορισμοί (Rasmusson et al., 1993)
  - Μετεωρολογική ξηρασία: Η περίοδος (γενικά της τάξης μεγέθους μηνών ή ετών) κατά τη διάρκεια της οποίας η φυσική παροχή υγρασίας σε ένα δεδομένο τόπο σωρευτικά υπολείπεται της αντίστοιχης κλιματικής τιμής.
  - Υδρολογική ξηρασία: Η περίοδος κατά την οποία η απορροή είναι μικρότερη της κανονικής· εναλλακτικά: η περίοδος κατά την οποία αδειάζουν οι ταμιευτήρες.
  - Γεωργική ξηρασία: Η περίοδος κατά την οποία η εδαφική υγρασία είναι ανεπαρκής για να ικανοποιήσει τις ανάγκες εξατμοδιαπνοής έτσι ώστε να συντηρήσει την ανάπτυξη των φυτών.
  - Οικονομική ξηρασία: Όρος που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις οικονομικές συνιστώσες των ανθρώπινων δραστηριοτήτων που επηρεάζονται από την ξηρασία.

## Χαρακτηριστικά μεγέθη και αντιμετώπισή τους

- ◆ Ύψος βροχής καταιγίδας,  $h$  (πιθανοτική αντιμετώπιση)
- ◆ Ένταση βροχής καταιγίδας: στιγμιαία,  $i = dh/dt$ ·μέση,  $i_m = \Delta h / \Delta t$  (πιθανοτική αντιμετώπιση)
- ◆ Διάρκεια βροχής καταιγίδας, τμηματική ή ολική,  $d$  (ειδική πιθανοτική αντιμετώπιση σε συνδυασμό με το ύψος ή την ένταση – όμβριες καμπύλες)
- ◆ Παροχή πλημμύρας,  $Q$  (συνήθως ως δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τη μέση παροχή – πιθανοτική αντιμετώπιση)
- ◆ Διάρκεια πλημμύρας (συνήθως τάξης μεγέθους λεπτών, ωρών ή ημερών) και σχήμα πλημμυρογραφήματος (ειδική αντιμετώπιση – συνήθως όχι πιθανοτική)
- ◆ Ύψος βροχής ξηρασίας (αθροιστικό – μικρότερο του συνήθους για την ίδια διάρκεια)
- ◆ Παροχή ξηρασίας,  $Q$  (συνήθως ως μία τάξη μεγέθους μικρότερη από τη μέση παροχή, ή και μηδενική για χειμάρρους – πιθανοτική αντιμετώπιση)
- ◆ Διάρκεια ξηρασίας,  $b$  (συνήθως τάξης μεγέθους μηνών ή ετών – πιθανοτική αντιμετώπιση)

Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 2

## 2. Υπενθύμιση εννοιών στατιστικής υδρολογίας Πιθανότητα, Πυκνότητα πιθανότητας, Περίοδος επαναφοράς

Δειγματικός χώρος, $\Omega$ :	Σύνολο που τα στοιχεία του $\omega$ αντιστοιχούν στις δυνατές εκβάσεις ενός πειράματος ή μιας διεργασίας
Τυχαία μεταβλητή, $X(\omega)$ :	Απεικόνιση του δειγματικού χώρου στο $R$
Πιθανότητα, $P(\delta)$ :	Απεικόνιση μιας οικογένειας $\Phi$ υποσυνόλων $\delta$ του $\Omega$ στο διάστημα $[0, 1]$
Συνάρτηση κατανομής:	$F_X(x) := P(X \leq x)$
Πιθανότητα υπέρβασης:	$F_{1X}(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$
Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:	$f_X(x) := \frac{dF_X(x)}{dx}$
Περίοδος επαναφοράς μέγιστων τιμών	$T = \frac{1}{\omega P(X > x)} = \frac{1}{\omega F_{1X}(x)} = \frac{1}{\omega [1 - F_X(x)]}$
Περίοδος επαναφοράς ελάχιστων τιμών όπου $\omega = 1 \text{ έτος}^{-1}$	$T = \frac{1}{\omega P(X = x)} = \frac{1}{\omega f_X(x)} = \frac{1}{\omega [1 - F_{1X}(x)]}$

Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 3

## Πιθανοφάνεια - Ροπές

Έστω η τυχαία μεταβλητή  $X$  με συνάρτηση πιθανότητας  $f_X(x)$  και συνάρτηση κατανομής  $F_X(x)$ . Οι συναρτήσεις  $f_X(x)$  και  $F_X(x)$  εξαρτώνται από  $m$  παραμέτρους  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  γι' αυτό και μπορεί να συμβολίζονται  $f_X(x; \theta_1, \dots, \theta_m)$  και  $F_X(x; \theta_1, \dots, \theta_m)$ , αντίστοιχα. Οι δείκτες  $X$  για ευκολία παραλείπονται.

Έστω ακόμη δείγμα  $n$  τιμών της μεταβλητής  $X$ , που συμβολίζεται ως  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Ορίζονται τα ακόλουθα μεγέθη:

Λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας:  $L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_m)$

Ροπή περί την αρχή τάξης  $r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ):  $m_r \equiv E[X^r] := \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$

Ειδική περίπτωση για  $r = 1$  – Μέση τιμή:  $m \equiv E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Κεντρική ροπή τάξης  $r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ):  $\mu_r \equiv E[(X - m)^r] := \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^r f(x) dx$

## Ροπές: Ειδικές περιπτώσεις – Εκτιμήσεις

Ειδικές περιπτώσεις

Διασπορά ( $r = 2$ ):  $\sigma^2 := \mu_2 \equiv E[(X - m)^2]$   $\sigma^2 = m_2 - m^2$

Τρίτη κεντρική ροπή ( $r = 3$ ):  $\mu_3 \equiv E[(X - m)^3]$   $\mu_3 = m_3 - 3 m_2 m + 2 m^3$

Τέταρτη κεντρική ροπή ( $r = 4$ ):  $\mu_4 \equiv E[(X - m)^4]$   $\mu_4 = m_4 - 4 m_3 m + 6 m_2 m^2 - 3 m^4$

Αδιάστατοι συντελεστές

Συντελεστής μεταβλητότητας:  $C_v := \sigma / m$

Συντελεστής ασυμμετρίας:  $C_s := \mu_3 / \sigma^3$

Συντελεστής κύρτωσης:  $C_k := \mu_4 / \sigma^4$

Εκτίμηση ροπής περί την αρχή από δείγμα (αμερόληπτη):  $\hat{m}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r$

Ειδική περίπτωση – Δειγματική μέση τιμή:  $\bar{x} := \hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Εκτίμηση κεντρικής ροπής από δείγμα (μεροληπτική): Από τη σχέση κεντρικής ροπής προς ροπή περί την αρχή.

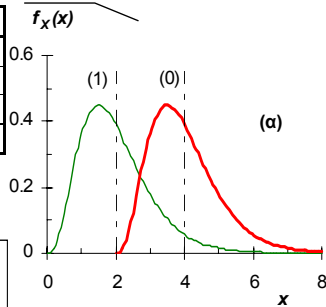
Ειδική περίπτωση – Δειγματική μέση τιμή:  $s^2 := \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$

Αμερόληπτη δειγματική διασπορά:  $s^{*2} = \frac{n}{n-1} s^2$

## Ροπές και σχήμα κατανομής

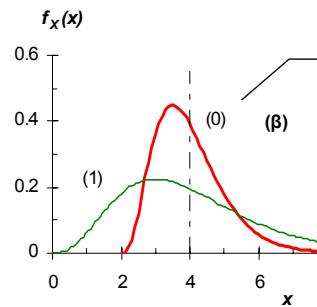
Επίδραση της μέσης τιμής

	(0)	(1)
$\mu$	4	2
$\sigma$	1	1
$C_s$	1	1
$C_k$	4.5	4.5



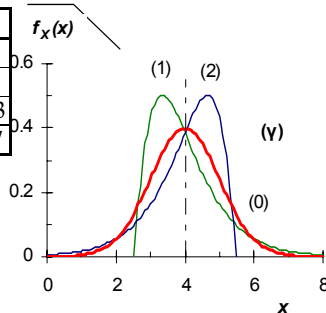
Επίδραση της τυπικής απόκλισης

	(0)	(1)
$\mu$	4	4
$\sigma$	1	2
$C_s$	1	1
$C_k$	4.5	4.5



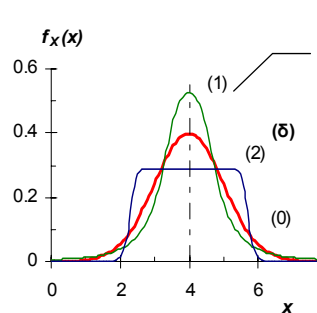
Επίδραση του συντελεστή ασυμμετρίας

	(0)	(1)	(2)
$\mu$	4	4	4
$\sigma$	1	1	1
$C_s$	0	1.33	-1.33
$C_k$	3	5.67	5.67



Επίδραση του συντελεστή κύρτωσης

	(0)	(1)	(2)
$\mu$	4	4	4
$\sigma$	1	1	1
$C_s$	0	0	0
$C_k$	3	5	2



Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 6

### 3. Πιθανοτικά σταθμισμένες ροπές και L ροπές Ορισμοί

Πιθανοτικά σταθμισμένη ροπή (probability-weighted moment) τάξης  $r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\beta_r \equiv E\{X [F(X)]^r\} := \int_{-\infty}^{\infty} x [F(x)]^r f(x) dx = \int_0^1 x(u) u^r du$$

L ροπή τάξης  $r$  ( $r = 0, 1, \dots$ ):  $\lambda_r \equiv E\{X P_{r-1}^*[F(X)]\} := \int_0^1 x(u) P_{r-1}^*(u) du$

όπου  $P_r^*(u)$  το μετατοπισμένο πολυώνυμο Legendre βαθμού  $r$ , ήτοι  $P_r^*(u) := \sum_{k=0}^r p_{r,k}^* u^k$

με συντελεστές  $p_{r,k}^* := (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} = \frac{(-1)^{r-k} (r+k)!}{(k!)^2 (r-k)!}$

Σχέση L ροπών και πιθανοτικά σταθμισμένων ροπών:  $\lambda_r = \sum_{k=0}^{r-1} p_{r,k}^* \beta_k$

Σημείωση: Οι πιθανοτικά σταθμισμένες ροπές έχουν εισαχθεί από τους Greenwood et al. (1979) και οι L ροπές από τον Hosking (1990).

Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 7

## Ειδικές περιπτώσεις – Πρακτικό νόημα

Ειδικές περιπτώσεις:

$$r = 1: \lambda_1 = \beta_0$$

$$\lambda_1 = E[X] = m$$

$$r = 2: \lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} E[X_{(1|2)} - X_{(2|2)}]$$

$$r = 3: \lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} E[X_{(1|3)} - 2X_{(2|3)} + X_{(3|3)}]$$

$$r = 4: \lambda_4 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4} E[X_{(1|4)} - 3X_{(2|4)} + 3X_{(3|4)} - X_{(4|4)}]$$

όπου  $X_{(i|n)}$  συμβολίζει την  $i$ -στή μεγαλύτερη τιμή σε ένα δείγμα μεγέθους  $n$ .

Αδιάστατοι συντελεστές

L συντελεστής μεταβλητότητας:  $\tau_2 = \lambda_2 / \lambda_1$

L συντελεστής ασυμμετρίας:  $\tau_3 = \lambda_3 / \lambda_2$

L συντελεστής κύρτωσης:  $\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2$

## Εκτιμήσεις των πιθανοτικά σταθμισμένων ροπών

Μεροληπτικές εκτιμήσεις – Γενικός τύπος:  $\hat{\beta}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j-0.35}{n}\right)^r x_{(j)}$

Αμερόληπτες εκτιμήσεις – Γενικός τύπος:  $\hat{\beta}_r^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-r} \binom{n-j}{r} \binom{n-1}{r} x_{(j)}$

$n$  το μέγεθος του δείγματος και  $x_{(j)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) η  $j$ -οστή μεγαλύτερη τιμή στο δείγμα.

Ειδικές περιπτώσεις:

Μεροληπτικές εκτιμήσεις	Αμερόληπτες εκτιμήσεις
$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_0^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{(j)}$	
$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j-0.35}{n}\right) x_{(j)}$	$\hat{\beta}_1^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{n-1} x_{(j)}$
$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j-0.35}{n}\right)^2 x_{(j)}$	$\hat{\beta}_2^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{n-j}{n-1} \frac{n-j-1}{n-2} x_{(j)}$
$\hat{\beta}_3 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j-0.35}{n}\right)^3 x_{(j)}$	$\hat{\beta}_3^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-3} \frac{n-j}{n-1} \frac{n-j-1}{n-2} \frac{n-j-2}{n-3} x_{(j)}$

## 4. Μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων κατανομής

1. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας:

$$\max L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_m)$$

Ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_m)} \frac{\partial f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_m)}{\partial \theta_r} = 0$$

2. Μέθοδος ροπών:

$$m_r(\theta_1, \dots, \theta_m) = \hat{m}_r(x_1, \dots, x_n)$$

Ισοδύναμα

$$\mu_r(\theta_1, \dots, \theta_m) = \hat{\mu}_r(x_1, \dots, x_n)$$

3. Μέθοδος L ροπών:

$$\lambda_r(\theta_1, \dots, \theta_m) = \hat{\lambda}_r^*(x_1, \dots, x_n)$$

Εναλλακτικά

$$\lambda_r(\theta_1, \dots, \theta_m) = \hat{\lambda}_r(x_1, \dots, x_n)$$

Όλες οι μέθοδοι καταλήγουν σε  $m$  εξισώσεις ( $r = 1, \dots, m$ ) με αγνώστους τις  $m$  παραμέτρους  $\theta_1, \dots, \theta_m$ . Ειδικά η αρχική μορφή της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά χωρίς καν να γραφούν οι εξισώσεις.

## 5. Η γενική κατανομή ακραίων τιμών (ΓΑΤ) Εισαγωγικές έννοιες

Ιστορικά η μελέτη των κατανομών ακραίων τιμών ξεκινά το 1922 με τον Bortkiewicz και συνεχίζει με τους von Mises, Tippett, Fréchet, Fischer, Gnedenko, Elfving κ.ά., με κορυφαία τη συμβολή του Gumbel (1958).

Το γενικό πρόβλημα που αντιμετωπίζεται είναι η μελέτη της κατανομής των μεταβλητών

$$X = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad \text{ή} \quad X' = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

για μεγάλες τιμές του  $n$  (θεωρητικά για  $n \rightarrow \infty$ ), γνωστών ως ασυμπτωτικών κατανομών ακραίων τιμών.

Ο Gumbel (1958) διέκρινε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις ασυμπτωτικών κατανομών

Τύπος κατανομής	Μέγιστες τιμές (M)	Ελάχιστες τιμές (E)
Ακραίων τιμών 1 (AT1)	Η μεταβλητή δεν έχει άνω ή κάτω όριο	
Ακραίων τιμών 2 (AT2)	Η μεταβλητή δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από ένα κάτω όριο	Η μεταβλητή δεν μπορεί να υπερβεί ένα άνω όριο
Ακραίων τιμών 3 (AT3)	Η μεταβλητή δεν μπορεί να υπερβεί ένα άνω όριο	Η μεταβλητή δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από ένα κάτω όριο

Η γενικευμένη κατανομή ακραίων τιμών (ΓΑΤ) συνδυάζει τις τρεις περιπτώσεις σε μία ενιαία μαθηματική έκφραση (Prescott and Walden, 1980).

## Τυπολόγιο της κατανομής ΓΑΤ μεγίστων

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f(x) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 + \kappa \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{-1/\kappa - 1} \exp \left\{ - \left[ 1 + \kappa \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{-1/\kappa} \right\}$
Συνάρτηση κατανομής	$F(x) = \exp \left\{ - \left[ 1 + \kappa \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{-1/\kappa} \right\}$
Συνάρτηση ποσοστημορίου	$x(u) = \lambda \psi + \frac{\lambda}{\kappa} [(-\ln u)^{-\kappa} - 1] \quad (u = F(x))$
Σχέση $f_X(x)$ και $F_X(x)$	$f(x) = \frac{1}{\lambda} F(x) [-\ln F(x)]^{1+\kappa}$
Τιμές μεταβλητής	Γενικά: $\kappa x \geq \kappa \lambda (\psi - 1/\kappa)$ Για $\kappa > 0$ : $\lambda (\psi - 1/\kappa) \leq x < \infty$ (Κατανομή AT2-M) Για $\kappa < 0$ : $-\infty < x \leq \lambda (\psi - 1/\kappa)$ (Κατανομή AT3-M)
Παράμετροι	$\psi$ : παράμετρος θέσης $\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας $\kappa$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$m = \lambda \psi + \frac{\lambda}{\kappa} [\Gamma(1 - \kappa) - 1] = \frac{\lambda}{\kappa} [\kappa \psi + \Gamma(1 - \kappa) - 1]$
Διασπορά	$\sigma^2 = \left( \frac{\lambda}{\kappa} \right)^2 [\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]$
3η κεντρική ροπή	$\mu_3 = \left( \frac{\lambda}{\kappa} \right)^3 [\Gamma(1 - 3\kappa) - 3\Gamma(1 - 2\kappa)\Gamma(1 - \kappa) + 2\Gamma^3(1 - \kappa)]$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_s = \text{sgn}(\kappa) \frac{\Gamma(1 - 3\kappa) - 3\Gamma(1 - 2\kappa)\Gamma(1 - \kappa) + 2\Gamma^3(1 - \kappa)}{[\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]^{3/2}}$

Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 12

## Ειδική περίπτωση: Η κατανομή AT1-M (Gumbel μεγίστων)

Για  $\kappa = 0$  δεν ορίζεται η παράσταση  $\left[ 1 + \kappa \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{-1/\kappa}$ . Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hôpital προκύπτει η ακόλουθη κατανομή, γνωστή ως κατανομή Gumbel ή ακραίων τιμών τύπου 1 – μεγίστων (AT1-M)

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp \left( -\frac{x}{\lambda} + \psi \right) \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x}{\lambda} + \psi \right) \right]$
Συνάρτηση κατανομής	$F(x) = \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x}{\lambda} + \psi \right) \right]$
Συνάρτηση ποσοστημορίου	$x(u) = \lambda \psi - \lambda \ln (-\ln u) \quad (u = F(x))$
Σχέση $f_X(x)$ και $F_X(x)$	$f(x) = \frac{1}{\lambda} F(x) [-\ln F(x)]$
Τιμές μεταβλητής	$-\infty < x < \infty$
Παράμετροι	$\psi$ : παράμετρος θέσης $\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας
Μέση τιμή	$m = \lambda (\psi + \gamma) \quad (\gamma = 0.5772 = \text{σταθερά Euler})$
Διασπορά	$\sigma^2 = \frac{\pi^2 \lambda^2}{6} = 1.645 \lambda^2$
3η κεντρική ροπή	$\mu_3 = 2.404 \lambda^3$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_s = 1.1396$

Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 13

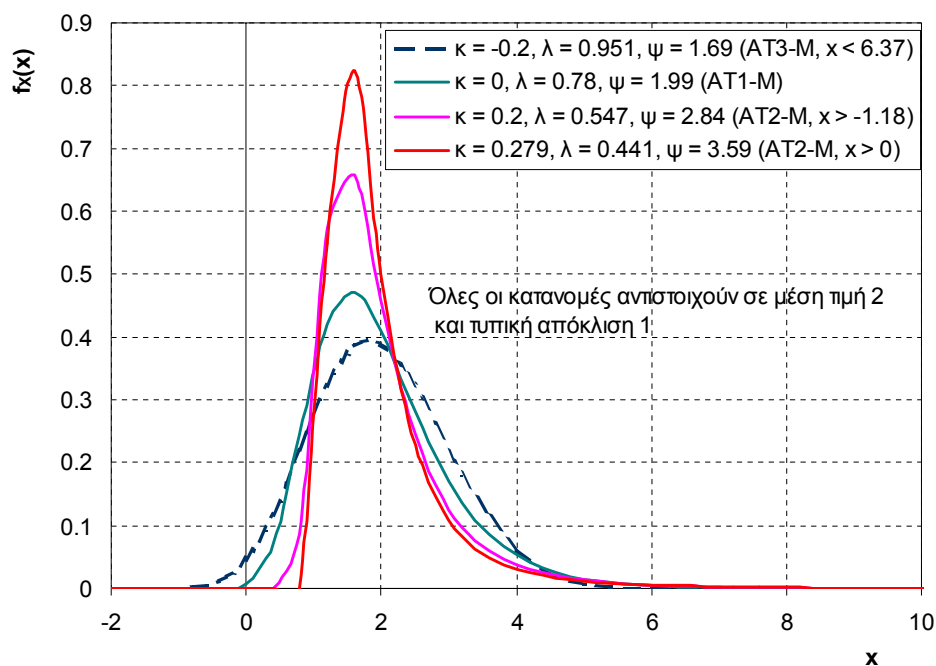
## Ειδική περίπτωση: Η διπαραμετρική κατανομή AT2-M

Για  $\kappa > 0$  και  $\psi = 1 / \kappa$  προκύπτει η ειδική περίπτωση της κατανομής AT2-M με πεδίο ορισμού το  $[0, \infty)$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f(x) = \frac{1}{\lambda} \left( \kappa \frac{x}{\lambda} \right)^{-1/\kappa - 1} \exp \left[ - \left( \kappa \frac{x}{\lambda} \right)^{-1/\kappa} \right]$
Συνάρτηση κατανομής	$F(x) = \exp \left[ - \left( \kappa \frac{x}{\lambda} \right)^{-1/\kappa} \right]$
Συνάρτηση ποσοστημορίου	$x(u) = \frac{\lambda}{\kappa} [(-\ln u)^{-\kappa}] \quad (u = F(x))$
Σχέση $f_X(x)$ και $F_X(x)$	$f(x) = \frac{1}{\lambda} F(x) [-\ln F(x)]^{1+\kappa}$
Τιμές μεταβλητής	$0 \leq x < \infty$
Παράμετροι	$\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας $\kappa > 0$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$m = \frac{\lambda}{\kappa} \Gamma(1 - \kappa)$
Διασπορά	$\sigma^2 = \left( \frac{\lambda}{\kappa} \right)^2 [\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]$
3η κεντρική ροπή	$\mu_3 = \left( \frac{\lambda}{\kappa} \right)^3 [\Gamma(1 - 3\kappa) - 3 \Gamma(1 - 2\kappa) \Gamma(1 - \kappa) + 2 \Gamma^3(1 - \kappa)]$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_v = \frac{[\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]^{1/2}}{\Gamma(1 - \kappa)}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_s = \frac{\Gamma(1 - 3\kappa) - 3 \Gamma(1 - 2\kappa) \Gamma(1 - \kappa) + 2 \Gamma^3(1 - \kappa)}{[\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]^{3/2}}$

Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 14

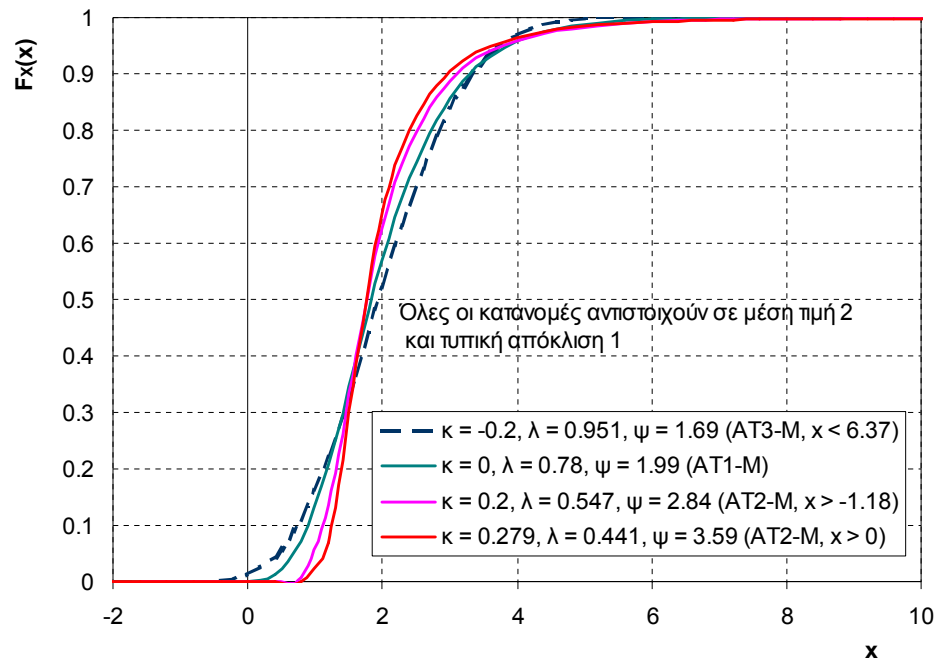
## Γραφική απεικόνιση της κατανομής ΓΑΤ μεγίστων: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας



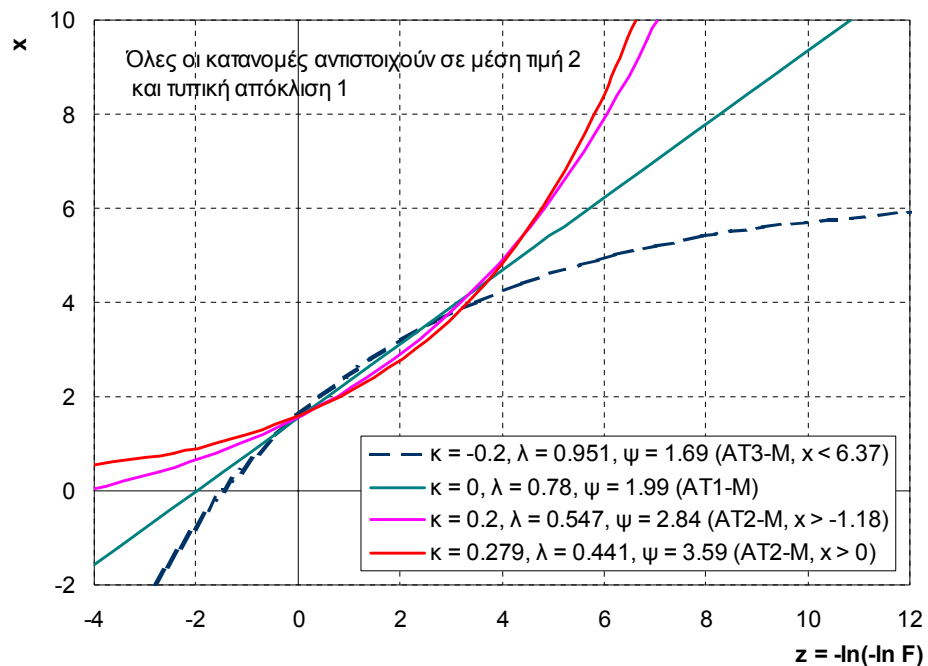
Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 15



## Γραφική απεικόνιση της κατανομής ΓΑΤ μεγίστων: Συνάρτηση κατανομής



## Γραφική απεικόνιση της κατανομής ΓΑΤ μεγίστων: Συνάρτηση κατανομής σε χαρτί Gumbel μεγίστων



## Τυπολόγιο της κατανομής ΓΑΤ ελαχίστων

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f(x) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 + \kappa \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{1/\kappa - 1} \exp \left\{ - \left[ 1 + \kappa \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{1/\kappa} \right\}$
Συνάρτηση κατανομής	$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left[ 1 + \kappa \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{1/\kappa} \right\}$
Συνάρτηση ποσοστημορίου	$x(u) = \lambda \psi + \frac{\lambda}{\kappa} \{ [-\ln(1-u)]^\kappa - 1 \} \quad (u = F(x))$
Σχέση $f_X(x)$ και $F_X(x)$	$f(x) = \frac{1}{\lambda} [1 - F(x)] \{-\ln[1 - F(x)]\}^{1-\kappa}$
Τιμές μεταβλητής	Γενικά: $\kappa x \geq \kappa \lambda (\psi - 1 / \kappa)$ Για $\kappa > 0$ : $\lambda (\psi - 1 / \kappa) \leq x < \infty$ (Κατανομή AT3-E) Για $\kappa < 0$ : $-\infty < x \leq \lambda (\psi - 1 / \kappa)$ (Κατανομή AT2-E)
Παράμετροι	$\psi$ : παράμετρος θέσης $\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας $\kappa$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$m = \lambda \psi + \frac{\lambda}{\kappa} [\Gamma(1 + \kappa) - 1] = \frac{\lambda}{\kappa} [\kappa \psi + \Gamma(1 + \kappa) - 1]$
Διασπορά	$\sigma^2 = \left( \frac{\lambda}{\kappa} \right)^2 [\Gamma(1 + 2\kappa) - \Gamma^2(1 + \kappa)]$
3η κεντρική ροπή	$\mu_3 = \left( \frac{\lambda}{\kappa} \right)^3 [\Gamma(1 + 3\kappa) - 3\Gamma(1 + 2\kappa)\Gamma(1 + \kappa) + 2\Gamma^3(1 + \kappa)]$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_s = \text{sgn}(\kappa) \frac{\Gamma(1 + 3\kappa) - 3\Gamma(1 + 2\kappa)\Gamma(1 + \kappa) + 2\Gamma^3(1 + \kappa)}{[\Gamma(1 + 2\kappa) - \Gamma^2(1 + \kappa)]^{3/2}}$

Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 18

## Ειδική περίπτωση: Η κατανομή AT1-E (Gumbel ελαχίστων)

Για  $\kappa = 0$  δεν ορίζεται η παράσταση  $\left[ 1 + \kappa \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{1/\kappa}$ . Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hôpital προκύπτει η ακόλουθη κατανομή, γνωστή ως κατανομή Gumbel ή ακραίων τιμών τύπου 1 – ελαχίστων (AT1-E)

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \exp \left[ - \exp \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]$
Συνάρτηση κατανομής	$F(x) = 1 - \exp \left[ - \exp \left( \frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]$
Συνάρτηση ποσοστημορίου	$x(u) = \lambda \psi + \lambda \ln [-\ln(1-u)] \quad (u = F(x))$
Σχέση $f_X(x)$ και $F_X(x)$	$f(x) = \frac{1}{\lambda} [1 - F(x)] \{-\ln[1 - F(x)]\}$
Τιμές μεταβλητής	$-\infty < x < \infty$
Παράμετροι	$\psi$ : παράμετρος θέσης $\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας
Μέση τιμή	$m = \lambda (\psi - \gamma) \quad (\gamma = 0.5772 = \text{σταθερά Euler})$
Διασπορά	$\sigma^2 = \frac{\pi^2 \lambda^2}{6} = 1.645 \lambda^2$
3η κεντρική ροπή	$\mu_3 = -2.404 \lambda^3$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_s = -1.1396$

Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 19

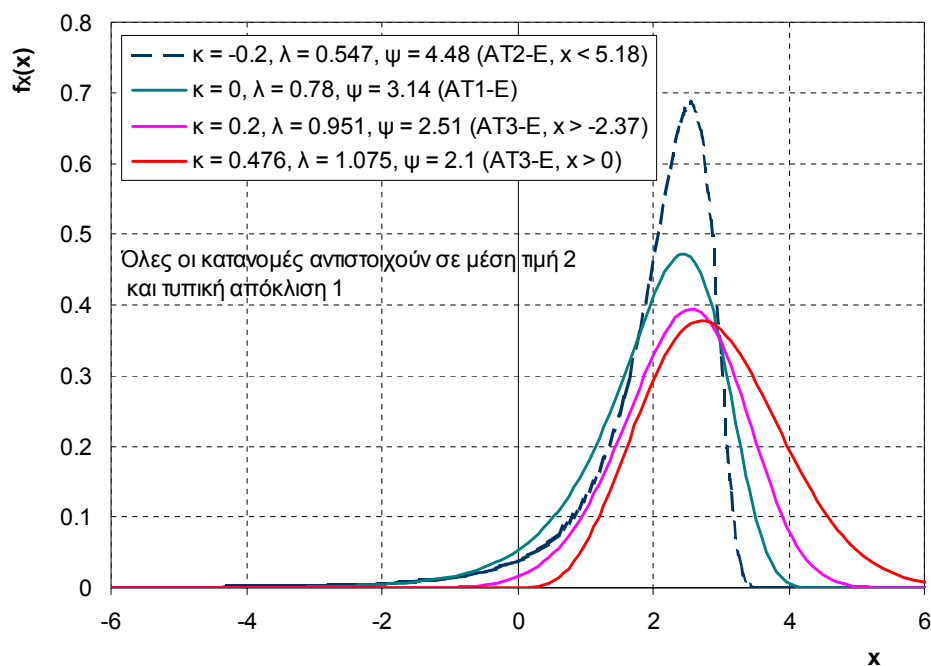
## Ειδική περίπτωση: Η διπαραμετρική κατανομή AT3-E (Weibull)

Για  $\kappa > 0$  και  $\psi = 1 / \kappa$  προκύπτει η ειδική περίπτωση της κατανομής AT3-E με πεδίο ορισμού το  $[0, \infty)$ , γνωστή και ως κατανομή Weibull.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f(x) = \frac{1}{\lambda} \left( \kappa \frac{x}{\lambda} \right)^{1/\kappa - 1} \exp \left[ - \left( \kappa \frac{x}{\lambda} \right)^{1/\kappa} \right]$
Συνάρτηση κατανομής	$F(x) = 1 - \exp \left[ - \left( \kappa \frac{x}{\lambda} \right)^{1/\kappa} \right]$
Συνάρτηση ποσοστημορίου	$x(u) = \frac{\lambda}{\kappa} \{ [-\ln(1-u)]^\kappa \} \quad (u = F(x))$
Σχέση $f_X(x)$ και $F_X(x)$	$f(x) = \frac{1}{\lambda} [1 - F(x)] \{ -\ln [1 - F(x)] \}^{1-\kappa}$
Τιμές μεταβλητής	$0 \leq x < \infty$
Παράμετροι	$\lambda > 0$ : παράμετρος κλίμακας $\kappa > 0$ : παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$m = \frac{\lambda}{\kappa} \Gamma(1 + \kappa)$
Διασπορά	$\sigma_2 = \left( \frac{\lambda}{\kappa} \right)^2 [\Gamma(1 + 2\kappa) - \Gamma^2(1 + \kappa)]$
3η κεντρική ροπή	$\mu_3 = \left( \frac{\lambda}{\kappa} \right)^3 [\Gamma(1 + 3\kappa) - 3 \Gamma(1 + 2\kappa) \Gamma(1 + \kappa) + 2 \Gamma^3(1 + \kappa)]$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_v = \frac{[\Gamma(1 + 2\kappa) - \Gamma^2(1 + \kappa)]^{1/2}}{\Gamma(1 + \kappa)}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_s = \frac{\Gamma(1 + 3\kappa) - 3 \Gamma(1 + 2\kappa) \Gamma(1 + \kappa) + 2 \Gamma^3(1 + \kappa)}{[\Gamma(1 + 2\kappa) - \Gamma^2(1 + \kappa)]^{3/2}}$

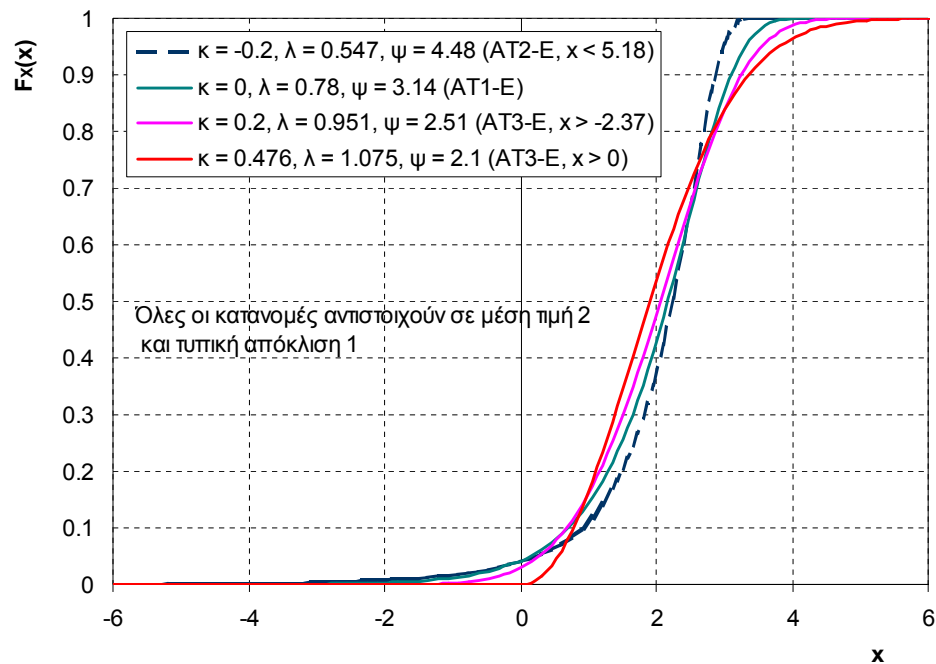
Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 20

## Γραφική απεικόνιση της κατανομής ΓΑΤ ελαχίστων: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας



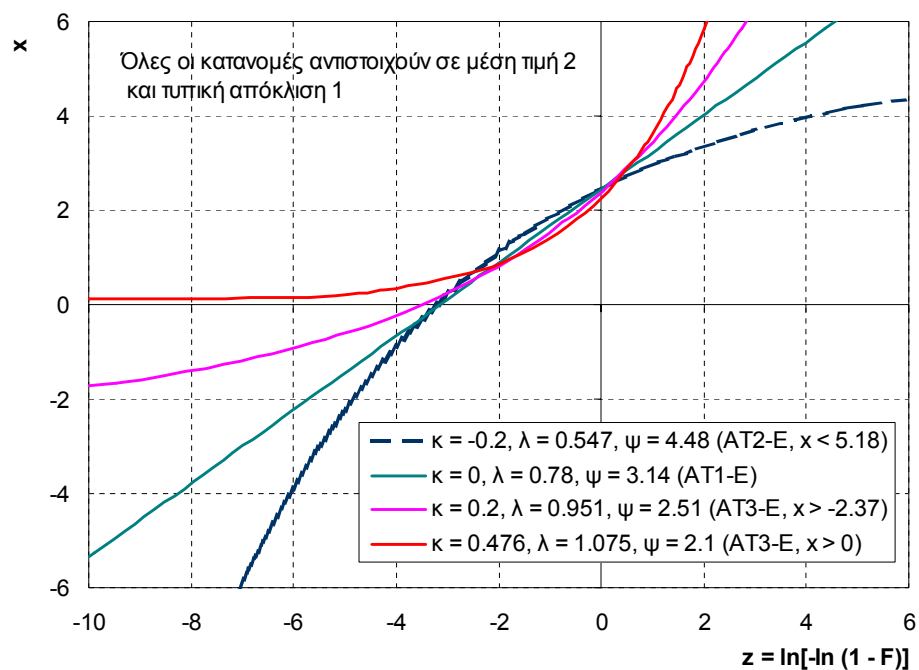
Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 21

## Γραφική απεικόνιση της κατανομής ΓΑΤ ελαχίστων: Συνάρτηση κατανομής



Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 22

## Γραφική απεικόνιση της κατανομής ΓΑΤ ελαχίστων: Συνάρτηση κατανομής σε χαρτί Gumbel ελαχίστων



Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 23

## L ροπές κατανομών ΓΑΤ μεγίστων και ελαχίστων

	ΓΑΤ-M	ΑΤ2-M (2 παραμέτρων)	ΑΤ1-M
Μέση τιμή (1η L ροπή)	$\lambda_1 = m = \frac{\lambda}{\kappa} [\kappa \psi - 1 + \Gamma(1 - \kappa)]$	$\lambda_1 = m = \frac{\lambda}{\kappa} \Gamma(1 - \kappa)$	$\lambda_1 = m = \lambda (\psi + \gamma)$ ( $\gamma = 0.5772$ )
2η L ροπή	$\lambda_2 = \frac{\lambda}{\kappa} \Gamma(1 - \kappa) (2^\kappa - 1)$		$\lambda_2 = \lambda \ln 2$
L συντελεστής ασυμμετρίας	$\tau_3 = 2 \frac{3^\kappa - 1}{2^\kappa - 1} - 3$		$\tau_3 = 2 \frac{\ln 3}{\ln 2} - 3 = 0.1699$
L συντελεστής κύρτωσης	$\tau_4 = \frac{5(4^\kappa) - 10(3^\kappa) + 6(2^\kappa) - 1}{2^\kappa - 1}$		$\tau_4 = \frac{5 \ln 4 - 10 \ln 3 + 6 \ln 2}{\ln 2} = 0.1504$

	ΓΑΤ-E	ΑΤ3-E (2 παραμέτρων)	ΑΤ1-E
Μέση τιμή (1η L ροπή)	$\lambda_1 = m = \frac{\lambda}{\kappa} [\kappa \psi - 1 + \Gamma(1 + \kappa)]$	$\lambda_1 = m = \frac{\lambda}{\kappa} \Gamma(1 + \kappa)$	$\lambda_1 = m = \lambda (\psi - \gamma)$ ( $\gamma = 0.5772$ )
2η L ροπή	$\lambda_2 = \frac{\lambda}{\kappa} \Gamma(1 + \kappa) (1 - 2^{-\kappa})$		$\lambda_2 = \lambda \ln 2$
L συντελεστής ασυμμετρίας	$\tau_3 = 3 - 2 \frac{1 - 3^{-\kappa}}{1 - 2^{-\kappa}}$		$\tau_3 = 3 - 2 \frac{\ln 3}{\ln 2} = -0.1699$
L συντελεστής ασυμμετρίας & κύρτωσης	$\tau_4 = \frac{1 - 6(2^{-\kappa}) + 10(3^{-\kappa}) - 5(4^{-\kappa})}{1 - 2^{-\kappa}}$		$\tau_4 = \frac{5 \ln 4 - 10 \ln 3 + 6 \ln 2}{\ln 2} = 0.1504$

Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 24

## 6. Εκτίμηση παραμέτρων της κατανομής ΓΑΤ Εκτίμηση με τη μέθοδο των ροπών: κατανομή μεγίστων

ΓΑΤ-M (Γενική περίπτωση – τρεις άγνωστες παράμετροι)

$$\text{sgn}(\kappa) \frac{\Gamma(1 - 3\kappa) - 3\Gamma(1 - 2\kappa)\Gamma(1 - \kappa) + 2\Gamma^3(1 - \kappa)}{[\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)]^{3/2}} = C_s$$

Προσεγγιστική λύση (ακρίβεια  $\pm 0.01$  για  $-1 < \kappa < 1/3$  ή  $-2 < C_s < \infty$ ):

$$\kappa = \frac{1}{3} - \frac{1}{0.31 + 0.91 C_s + \sqrt{(0.91 C_s)^2 + 1.8}}$$

$$\lambda = \frac{|\kappa| \sigma}{\sqrt{\Gamma(1 - 2\kappa) - \Gamma^2(1 - \kappa)}}$$

$$\psi = \frac{m}{\lambda} - \frac{\Gamma(1 - \kappa) - 1}{\kappa}$$

ΑΤ1-M (δύο άγνωστες παράμετροι)

$$\lambda = 0.78 \sigma$$

$$\psi = \frac{m}{\lambda} - 0.5772$$

ΑΤ2-M (δύο άγνωστες παράμετροι)

$$\frac{\Gamma(1 - 2\kappa)}{\Gamma^2(1 - \kappa)} = C_v^2 + 1$$

Προσεγγιστική λύση (ακρίβεια  $\pm 0.004$  για  $0 < \kappa < 0.5$  ή  $0 < C_v < \infty$ ):

$$\kappa = \frac{1}{2} - \frac{1}{\exp\{2.59 [\ln(C_v + 1)]^{0.475}\} + 1}$$

$$\lambda = m \frac{\kappa}{\Gamma(1 - \kappa)}$$

Στη θέση των  $m$ ,  $\sigma$ ,  $C_v$  και  $C_s$  χρησιμοποιούνται οι εκτιμήσεις  $\bar{x}$ ,  $\hat{C}_v$  και  $\hat{C}_s$ , αντίστοιχα.

Δ. Κουτσογιάννης, Εμβάθυνση στην πιθανοτική προσέγγιση εξαιρετικών υδρολογικών γεγονότων 25

## Εκτίμηση με τη μέθοδο των ροπών: κατανομή ελαχίστων

ΓΑΤ-E (Γενική περίπτωση – τρεις άγνωστες παράμετροι)

$$\operatorname{sgn}(\kappa) \frac{\Gamma(1+3\kappa) - 3\Gamma(1+2\kappa)\Gamma(1+\kappa) + 2\Gamma^3(1+\kappa)}{[\Gamma(1+2\kappa) - \Gamma^2(1+\kappa)]^{3/2}} = C_s$$

Προσεγγιστική λύση (ακρίβεια  $\pm 0.01$  για  $-1/3 < \kappa < 3$  ή  $-\infty < C_s < 20$ ):

$$\kappa = \frac{1}{0.28 - 0.9 C_s + 0.998\sqrt{(0.9 C_s)^2 + 1.93}} - \frac{1}{3}$$

$$\lambda = \frac{\kappa \sigma}{\sqrt{\Gamma(1+2\kappa) - \Gamma^2(1+\kappa)}}$$

$$\psi = \frac{m}{\lambda} + \frac{1 - \Gamma(1+\kappa)}{\kappa}$$

ΑΤ1-E (δύο άγνωστες παράμετροι)

$$\lambda = 0.78 \sigma$$

$$\psi = \frac{m}{\lambda} + 0.5772$$

ΑΤ3-E (δύο άγνωστες παράμετροι)

$$\frac{\Gamma(1+2\kappa)}{\Gamma^2(1+\kappa)} = C_v^2 + 1$$

Προσεγγιστική λύση (ακρίβεια  $\pm 0.01$  για  $0 < \kappa < 3.2$  ή  $0 < C_v < 5$ ):

$$\kappa = 2.56 \{ \exp\{0.41 [\ln(C_v^2 + 1)]^{0.56}\} - 1 \}$$

$$\lambda = m \frac{\kappa}{\Gamma(1+\kappa)}$$

Στη θέση των  $m$ ,  $\sigma$ ,  $C_v$  και  $C_s$  χρησιμοποιούνται οι εκτιμήσεις  $\bar{x}$ ,  $s$ ,  $\hat{C}_v$  και  $\hat{C}_s$ , αντίστοιχα.

## Εκτίμηση με τη μέθοδο των L ροπών

Παρά-μετρος	ΓΑΤ-M	ΑΤ1-M	ΑΤ2-M (2 παραμέτρων)
$\kappa$	$\kappa = 7.8 c - 1.43 c^2$ όπου $c := \frac{\ln 2}{\ln 3} - \frac{2}{3 + \tau_3}$	$(\kappa = 0)$	$\kappa = \frac{\ln(1 + \tau_2)}{\ln 2}$
$\lambda$	$\lambda = \frac{ k  \frac{\lambda}{\sigma}}{\Gamma(1 - \kappa) (2^\kappa - 1)}$	$\lambda = \frac{\lambda_2}{\ln 2}$	$\lambda = m \frac{\kappa}{\Gamma(1 - \kappa)}$
$\psi$	$\psi = \frac{m}{\lambda} - \frac{\Gamma(1 - \kappa) - 1}{\kappa}$	$\psi = \frac{m}{\lambda} - 0.5772$	$(\psi = 1/\kappa)$

Παρά-μετρος	ΓΑΤ-E	ΑΤ1-E	ΑΤ3-E (2 παραμέτρων)
$\kappa$	$\kappa = 7.8 c + 4.71 c^2$ όπου $c := \frac{2}{3 - \tau_3} - \frac{\ln 2}{\ln 3}$	$(\kappa = 0)$	$\kappa = \frac{-\ln(1 - \tau_2)}{\ln 2}$
$\lambda$	$\lambda = \frac{\kappa \lambda_2}{\Gamma(1 + \kappa) (1 - 2^{-\kappa})}$	$\lambda = \frac{\lambda_2}{\ln 2}$	$\lambda = m \frac{\kappa}{\Gamma(1 + \kappa)}$
$\psi$	$\psi = \frac{m}{\lambda} + \frac{1 - \Gamma(1 + \kappa)}{\kappa}$	$\psi = \frac{m}{\lambda} + 0.5772$	$(\psi = 1/\kappa)$

Στη θέση των  $m$ ,  $\lambda_2$ , και  $\tau_3$  χρησιμοποιούνται οι δειγματικές εκτιμήσεις  $\bar{x}$ ,  $\hat{\lambda}_2$  και  $\hat{\tau}_3$ , αντίστοιχα.

Σημείωση: Οι συντελεστές του τριωνύμου  $k(c)$  που δίνονται εδώ είναι ακριβέστεροι από αυτούς της βιβλιογραφίας (π.χ. Stedinger et al., 1993, σ. 18.18) για θετικές τιμές του  $\kappa$  που είναι και η συνηθέστερη περίπτωση.

## 7. Αξιοποίηση ιστορικών και χωρικά γενικευμένων πληροφοριών Προσαρμογή κατανομής με αξιοποίηση ιστορικών πληροφοριών

**Πρόβλημα:** Δίνεται ένα δείγμα  $n$  ετήσιων μεγίστων  $x_1, \dots, x_n$  (συστηματικές παρατηρήσεις) που αποτελούν πραγματοποιήσεις μιας μεταβλητής  $X$ . Επιπλέον είναι γνωστές οι  $k$  μεγαλύτερες τιμές  $z_1, \dots, z_k$  σε ένα (προγενέστερο) διάστημα  $r$  ετών (πρόσθετη ιστορική πληροφορία). Ζητείται η εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής της μεταβλητής  $X$  παίρνοντας υπόψη και την πρόσθετη ιστορική πληροφορία (National Research Council, 1988, σ. 33· Stedinger and Cohn, 1986).

**Μέθοδος εκτίμησης:** Μέγιστης πιθανοφάνειας

Εξισώσεις:

$$\max \ln L(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_k, \theta_1, \dots, \theta_r)$$

όπου

$$\ln L(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_k, \theta_1, \dots, \theta_r) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_m) + \sum_{i=1}^k \ln f(z_i, \theta_1, \dots, \theta_m) + (r-k) \ln F(z_0, \theta_1, \dots, \theta_m) + ct$$

και

$$z_0 = \min(z_1, \dots, z_k)$$

**Τρόπος επίλυσης:** Αριθμητικός

## Προσαρμογή κατανομής με χρήση γενικευμένων δεδομένων

### Πρόβλημα

Δίνονται  $k$  δείγματα ετήσιων μεγίστων υδρολογικών μεταβλητών (π.χ. βροχές, πλημμύρες) σε ισάριθμες γειτονικές θέσεις. Έτσι, στη θέση  $i$  αντιστοιχεί η μεταβλητή  $X_i$  και το δείγμα  $x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}$  όπου  $n_i$  το μέγεθος του δείγματος. Ζητείται η ταυτόχρονη εκτίμηση των παραμέτρων των κατανομών των μεταβλητών  $X_i$  αξιοποιώντας (μέσω κατάλληλων υποθέσεων) την κλιματική συγγένεια των διάφορων θέσεων

### Υπόθεση 1 Αναλογία ποσοστημορίων με τις μέσες τιμές

Είναι γνωστή και ως υπόθεση δείκτη πλημμύρας (index flood· National Research Council, 1988, σ. 39). Μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση

$$x_i(u) = m_i x(u)$$

όπου  $x_i(u)$  το  $u$ -ποσοστημόριο της κατανομής της μεταβλητής  $X_i$ ,  $m_i$  η μέση τιμή της μεταβλητής  $X_i$ , και  $x(u)$  μια αδιαστατοποιημένη συνάρτηση ποσοστημορίου ενιαία για όλες τις μεταβλητές.

Για την κατανομή ΓΑΤ η Υπόθεση 1 συνεπάγεται ισότητα των παραμέτρων σχήματος και θέσης για όλες τις θέσεις, δηλ. (α)  $\kappa_i = \kappa = \text{σταθ.}$  και (β)  $\psi_i = \psi = \text{σταθ.}$  Η παράμετρος κλίμακας  $\lambda$  μπορεί να παίρνει διαφορετικές τιμές ανά θέση.

### Υπόθεση 2: Σταθερότητα μιας παραμέτρου

Συνηθέστατα η παράμετρος που θεωρείται σταθερή για όλες τις θέσεις είναι η παράμετρος σχήματος ( $\kappa_i = \kappa = \text{σταθ.}$  National Research Council, 1988, σ. 40).

## Προσαρμογή κατανομής με χρήση γενικευμένων δεδομένων (2)

### Υπόθεση 3: Σχέση μεταξύ παραμέτρων.

Υποτίθεται ότι δύο ή περισσότερες παράμετροι συνδέονται μεταξύ τους με μια σχέση, π.χ.

$$\theta_2 = \alpha + \beta \theta_1$$

Εναλλακτικά, μπορεί να υποτεθεί ότι μία παράμετρος συνδέεται με μια σχέση με μια ροπή, π.χ.

$$\theta_2 = \alpha + \beta m$$

Στις περιπτώσεις αυτές, αντί της  $\theta_2$  θα πρέπει να εκτιμηθούν οι βοηθητικές παράμετροι  $\alpha$  και  $\beta$ , εκτός αν είναι εξ αρχής γνωστές.

### Προτιμητέα μέθοδος εκτίμησης:

Για τις υποθέσεις 1 και 2, καθώς και για την υπόθεση 3 με άγνωστες τις βοηθητικές παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$ , προτιμητέα είναι η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας, η οποία προσαρμόζεται άμεσα στις συνθήκες που προκύπτουν από τις υποθέσεις.

Για την υπόθεση 3 με γνωστές τις βοηθητικές παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε μέθοδος.

## Προσαρμογή κατανομής με χρήση γενικευμένων δεδομένων (3)

### Παράδειγμα για την υπόθεση 3:

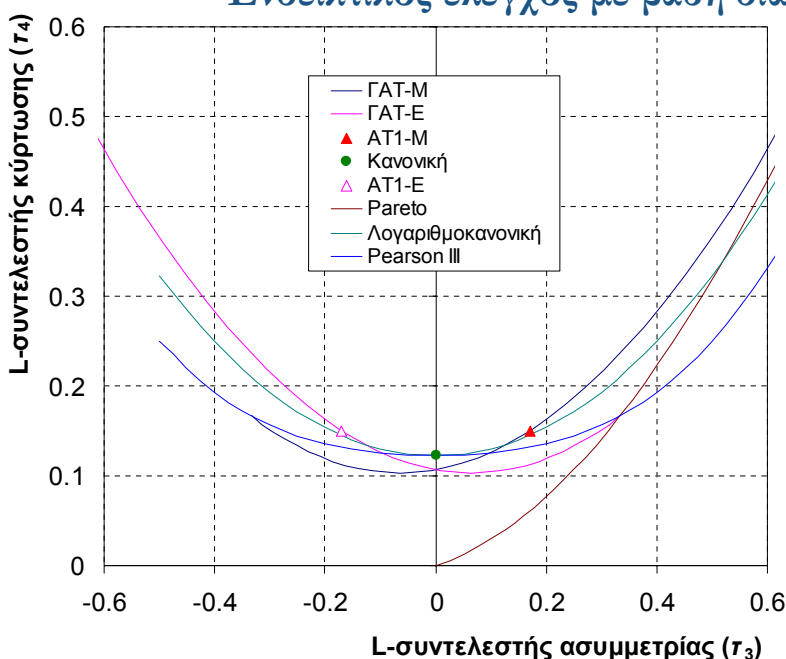
Από πρόσφατη στατιστική διερεύνηση (Koutsoyiannis, 1999) των δεδομένων από 2645 σταθμούς όλου του κόσμου, με συνολικό πλήθος μετρήσεων 95 000 σταθμών-ετών, τα οποία είχαν μελετηθεί παλιότερα από τον Hershfield (1961, 1965) και αποτέλεσαν τη βάση για τη διατύπωση της φερώνυμης μεθόδου εκτίμησης της πιθανής μέγιστης κατακρήμνισης (ΠΜΚ) διαπιστώθηκε ότι

- (α) η κατανομή ΓΑΤ είναι γενικά κατάλληλη για ετήσιες σειρές μέγιστων βροχοπτώσεων,
- (β) η τιμή που υπολογίζεται με τη μέθοδο Hershfield (1961, 1965) ως ΠΜΚ, αντιστοιχεί σε περίοδο επαναφοράς περίπου 60 000 ετών, και
- (γ) η τιμή της παραμέτρου σχήματος της κατανομής ΓΑΤ δίνεται ως συνάρτηση της μέσης τιμής της ετήσιας μέγιστης 24ωρης βροχόπτωσης  $m$ , από τη σχέση

$$\kappa = 0.183 - 0.00049 m \quad (m \text{ σε mm})$$



## 8. Έλεγχοι καταλληλότητας της κατανομής Ενδεικτικός έλεγχος με βάση διάγραμμα L-ροπών



Η απεικόνιση των εμπειρικών χαρακτηριστικών του δείγματος στο διπλανό διάγραμμα, αποτελεί ένδειξη για το αν η κατανομή ΓΑΤ είναι κατάλληλη για το υπόψη δείγμα, ή αν άλλες τυπικές κατανομές είναι καταλληλότερες.

## Δοκιμή καταλληλότητας της τριπαραμετρικής κατανομής ΓΑΤ έναντι των διπαραμετρικών κατανομών

### Περίπτωση 1

**Μηδενική υπόθεση:**  $H_0: \kappa = 0$  (η κατανομή είναι AT1 – 2 παραμέτρων)

**Εναλλακτική υπόθεση:**  $H_1: \kappa \neq 0$  (απαιτείται τριπαραμετρική κατανομή)

**Στατιστική συνάρτηση ελέγχου:**  $Z = \hat{k} \sqrt{n / 0.5633}$

όπου  $\hat{k}$  η εκτίμηση από το δείγμα της τιμής του  $\kappa$  με τη μέθοδο των L ροπών (χρησιμοποιώντας τις μεροληπτικές εκτιμήσεις) και  $n$  το μέγεθος του δείγματος. Η κατανομή της  $Z$  είναι κατά προσέγγιση κανονική  $N(0, 1)$ .

**Κανόνας απόφασης:** Απορρίπτουμε την  $H_0$  αν  $z > z_{1-\alpha/2}$ , όπου  $z_{1-\alpha/2}$  το  $(1 - \alpha/2)$ -ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής και  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας που υιοθετείται για τον έλεγχο (για  $\alpha = 0.05$ ,  $z_{1-\alpha/2} = 1.96$ ).

### Περίπτωση 2

**Μηδενική υπόθεση:**  $H_0$ : η κατανομή είναι AT2-M ή AT3-E – 2 παραμέτρων

**Εναλλακτική υπόθεση:**  $H_1$ : απαιτείται τριπαραμετρική κατανομή

**Παρατήρηση:** Αν ισχύει η  $H_0$  τότε η κατανομή της  $Y = \ln X$  είναι AT1 (M ή E). Αυτό επιτρέπει τη χρήση της ίδιας διαδικασίας, όπως παραπάνω για την παράμετρο  $\hat{k}_Y$  που προκύπτει από το δείγμα των λογαρίθμων της υπό έλεγχο μεταβλητής.

**Προτιμητέα μέθοδος: Δοκιμή  $\chi^2$**  (βλ. Κουτσογιάννης, 1997, σσ. 77-83, 124-128).

Πλεονέκτημα: Εφαρμοσιμότητα σε ατελή μηδενική υπόθεση (δηλαδή για τη συνήθη περίπτωση που οι παράμετροι εκτιμώνται από το δείγμα).

Μειονεκτήματα: Υποκειμενικότητα στην επιλογή του αριθμού κλάσεων  $k$  (περίπτωση αντιφατικών αποτελεσμάτων για διαφορετικές τιμές του  $k$ ), μειωμένη (σε σχέση με άλλες μεθόδους) ισχύς.

Ως επαρκής αριθμός κλάσεων θεωρείται (Mann and Wald, 1942· Williams, 1950· βλ. και Kottegoda, 1980, σ. 88) ο  $k = 2^{1.2} (n - 1)^{0.4} / z_{1-\alpha}^{0.4}$  όπου  $n$  το μέγεθος του δείγματος,  $z_{1-\alpha}$  το  $(1 - \alpha)$ -ποσοστημόριο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας της δοκιμής (Για  $\alpha = 0.05$ ,  $k = 1.88 (n - 1)^{0.4}$ ). Παράλληλα θα πρέπει  $k \geq r + 2$ , όπου  $r$  ο αριθμός παραμέτρων της κατανομής, και  $k \leq n / 5$ .

**Εναλλακτικές μέθοδοι:** (α) **Δοκιμή Kolmogorov-Smirnov** (βλ. Kottegoda, 1980, σσ. 89-93) (β) **Δοκιμή συντελεστή συσχέτισης ως προς την πιθανοτική θέση σχεδίασης** (probability plot correlation· βλ. Stedinger et al., 1993, σ. 18.27)

Πλεονεκτήματα: Έλλειψη υποκειμενικών θεωρήσεων, αυξημένη ισχύς.

Μειονέκτημα: Αδυναμία ή δυσκολία εφαρμογής σε ατελή μηδενική υπόθεση.

Ειδικά για την κατανομή ΓΑΤ υπάρχουν πίνακες κρίσιμων τιμών των δύο δοκιμών για ατελή μηδενική υπόθεση μόνο για την περίπτωση που μόνο η παράμετρος κλίμακας είναι προς εκτίμηση (Chowdhury et al., 1991).

## 9. Πιθανοτική αντιμετώπιση διάρκειας ξηρασίας

**Γενικός ορισμός:** Δρομή (*run*) είναι μια ακολουθία τιμών που έχει μια δεδομένη ιδιότητα (π.χ. τιμή πάνω από τη μέση ή κάτω από τη μέση) που προηγείται και έπεται μιας ή περισσότερων τιμών που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα.

**Μήκος δρομής:** ο αριθμός των στοιχείων της δρομής.

Στις μελέτες ξηρασιών η στατιστική θεωρία των δρομών χρησιμοποιείται για τη μελέτη της διάρκειας ξηρασίας. Μπορεί να θεωρηθεί ως διάρκεια ξηρασίας, υδρολογικής ή μετεωρολογικής, η περίοδος κατά την οποία η απορροή ή η βροχόπτωση, αντίστοιχα, παρουσιάζει συνεχώς τιμές κάτω από το κανονικό επίπεδο, το οποίο συνήθως αντιπροσωπεύεται από τη διάμεση τιμή. Η περίοδος αυτή, μαθηματικά αντιστοιχεί στο μήκος δρομής  $b$ . Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ετήσιες χρονοσειρές, οι οποίες μπορεί να θεωρηθεί ότι εξασφαλίζουν στασιμότητα (για μηνιαίες χρονοσειρές χρειάζεται ειδική μεθοδολογία, βλ. π.χ. Murota and Eto, 1973).

Σε περίπτωση στάσιμης τυχαίας ανέλιξης σε διακριτό χρόνο, μήκους  $n$ , το μέγιστο μήκος δρομής που αντιστοιχεί σε πιθανότητα υπέρβασης  $\alpha$  είναι κατά προσέγγιση

$$b(\alpha) \approx \beta \ln n + \gamma$$

όπου

$$\beta = \frac{11}{\ln(-2^{13} \ln(1-\alpha))}, \quad \gamma = 1 \quad \text{αν } n < -2^{13} \ln(1-\alpha)$$

$$\beta = \frac{1}{\ln 2}, \quad \gamma = \frac{-\ln(-2 \ln(1-\alpha))}{\ln 2} \quad \text{διαφορετικά}$$

(Κουτσογιάννης, ανέκδοτη έκθεση, 1999). Τα παραπάνω μπορούν να αξιοποιηθούν για να ελεγχθεί αν οι ξηρασίες σε μια παρατηρημένη ετήσια χρονοσειρά απορροής ή βροχής παρουσιάζουν τυχαία συμπεριφορά και εξηγούνται με στατιστική θεώρηση ή όχι.

## 10. Όμβριες καμπύλες Γενικές έννοιες

**Όμβρια καμπύλη:** Μια μαθηματική σχέση μεταξύ της έντασης (ή του ύψους), της διάρκειας και της περιόδου επαναφοράς της βροχής (intensity-duration-frequency – idf – relationship):

**Διάρκεια,  $d$ :** Μια αυθαίρετη χρονική διάρκεια (συνήθως από μερικά λεπτά της ώρας μέχρι μια ή περισσότερες ημέρες), η οποία λειτουργεί ως «χρονικό παράθυρο» μέσα από το οποίο βλέπουμε τη συνεχή ανέλιξη της βροχής. Η διάρκεια αυτή δεν έχει σχέση με την πραγματική διάρκεια των επεισοδίων βροχής και δεν αποτελεί τυχαία μεταβλητή.

**Ύψος βροχής (μέγιστο),  $h$ :** Ένα χαρακτηριστικό ύψος βροχής που αναφέρεται σε δεδομένη διάρκεια  $d$  και αντιπροσωπεύει (α) είτε το μέγιστο ύψος βροχής που έχει καταγραφεί σε διάρκεια  $d$  κατά τη διάρκεια ενός έτους (συνήθως υδρολογικού) (β) είτε κάθε τιμή του ύψους βροχής που έχει καταγραφεί σε διάρκεια  $d$  και υπερβαίνει μια δεδομένη τιμή κατώφλιου<sup>†</sup>  $\varphi$ . Αποτελεί τυχαία μεταβλητή.

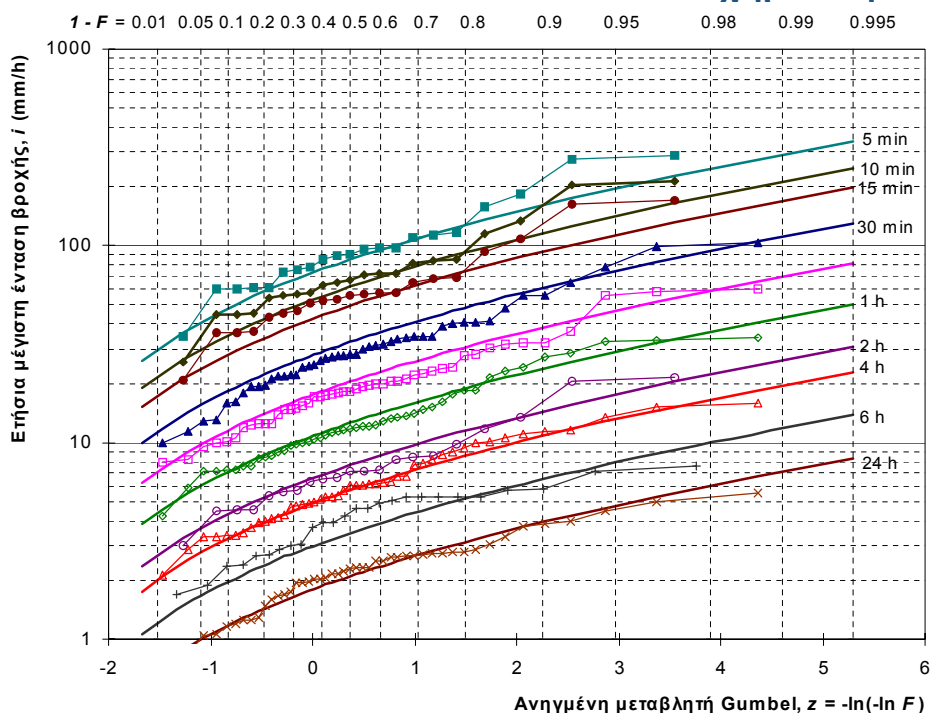
**Ένταση (μέγιστη),  $i$ :** Μια χαρακτηριστική ένταση βροχής που αναφέρεται σε δεδομένη διάρκεια  $d$  και προκύπτει ως το παραπάνω χαρακτηριστικό ύψος βροχής διηρημένο με τη διάρκεια  $d$  ( $i = h / d$ ). Αποτελεί τυχαία μεταβλητή.

**Περίοδος επαναφοράς,  $T$ :** Δεδομένου ότι το παραπάνω ύψος και η ένταση βροχής αποτελούν τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να αντιστοιχιστεί σε κάθε τιμή τους μια τιμή της περιόδου επαναφοράς, με βάση είτε την εμπειρική είτε τη θεωρητική συνάρτηση κατανομής τους.

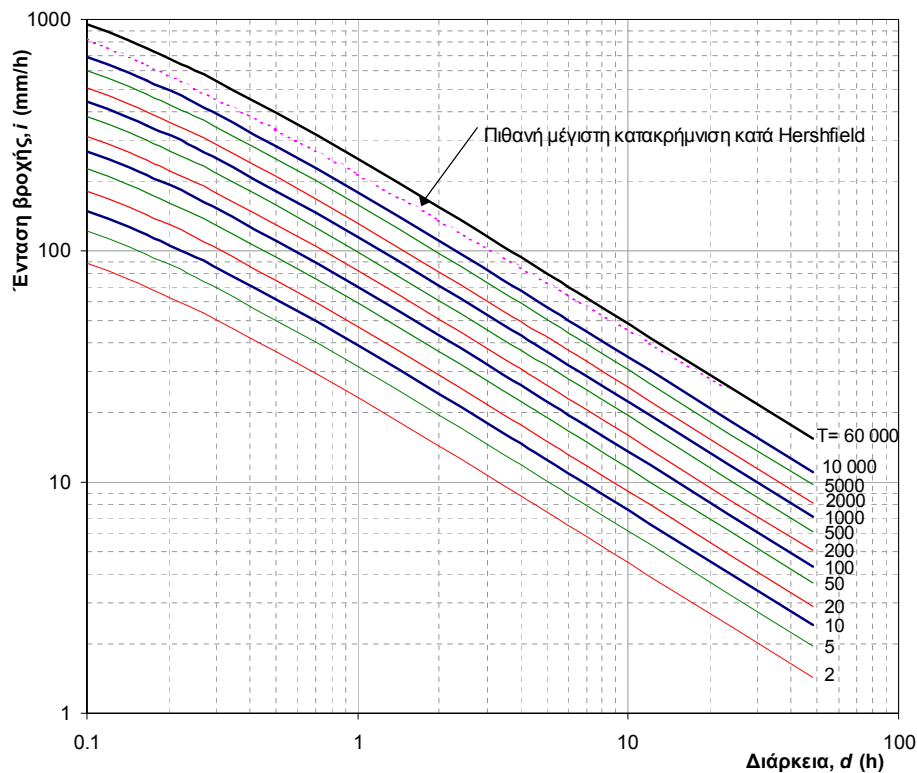
<sup>\*</sup> Η σειρά τιμών που περιλαμβάνει τη μέγιστη τιμή κάθε έτους είναι γνωστή ως **σειρά ετήσιων μεγίστων**.

<sup>†</sup> Η σειρά τιμών που περιλαμβάνει όλες τις τιμές που υπερβαίνουν το κατώφλι  $\varphi$  είναι γνωστή ως **σειρά υπεράνω κατώφλιου** ή **σειρά μερικής διάρκειας**.

### Σχηματική παράσταση 1



Δεδομένα:  
Σταθμοί  
Κορίνθου και  
Σπαθοβουρίου  
(ενοποιημένο  
δείγμα).  
Πηγή:  
Κουτσογιάννης  
(1998)



Σχηματική  
παράσταση  
2

Δεδομένα:  
Σταθμοί  
Κορίνθου και  
Σπαθοβουνίου  
(ενοποιημένο  
δείγμα).  
Πηγή:  
Κουτσογιάννης  
(1998)

## Γενικό μαθηματικό πλαίσιο (1)

Η γενική μεθοδολογία που προτείνεται για την κατάρτιση των όμβριων καμπυλών έχει αναπτυχθεί πρόσφατα και περιγράφεται λεπτομερώς αλλού (Κουτσογιάννης, 1997, Koutsoyiannis et. al., 1998, Koutsoyiannis, 1999). Τα γενικά χαρακτηριστικά της συνοψίζονται στα ακόλουθα σημεία:

1. Η γενική συναρτησιακή σχέση όμβριων καμπυλών είναι της μορφής

$$i = \frac{a(T)}{b(d)} \quad (1)$$

όπου  $i$  η μέγιστη ένταση βροχής διάρκειας  $d$  για περίοδο επαναφοράς  $T$ , και  $a(T)$  και  $b(d)$  κατάλληλες συναρτήσεις της περιόδου επαναφοράς και της διάρκειας, αντίστοιχα (Κουτσογιάννης, 1997).

2. Η συνάρτηση  $b(d)$  είναι της ακόλουθης, εμπειρικά διαπιστωμένης, γενικής μορφής

$$b(d) = (d + \theta)^\eta \quad (2)$$

όπου  $\theta$  και  $\eta$  αποτελούν παραμέτρους προς εκτίμηση ( $\theta > 0$ ,  $0 < \eta < 1$ ) (Κουτσογιάννης, 1997).

## Γενικό μαθηματικό πλαίσιο (2)

3. Η συνάρτηση  $a(T)$  προκύπτει αναλυτικά από τη συνάρτηση κατανομής που ισχύει για την μέγιστη ένταση βροχής της υπό εξέταση περιοχής, όπως αυτή προκύπτει από την επεξεργασία των διαθέσιμων δεδομένων. Αποφεύγεται η χρήση εμπειρικών συναρτήσεων (π.χ.  $a(T) = \lambda T^k$ ) (Κουτσογιάννης, 1997).
4. Μια συνάρτηση κατανομής που αποδεικνύεται κατάλληλη για τη μέγιστη ένταση βροχής σε μεγάλο εύρος περιπτώσεων είναι η κατανομή ΓΑΤ με έκφραση

$$F(x) = \exp\left\{-\left[1 + \kappa\left(\frac{x}{\lambda} - \psi\right)\right]^{-1/\kappa}\right\} \quad x \geq \lambda(\psi - 1/\kappa) \quad (3)$$

όπου  $F(x)$  η συνάρτηση κατανομής για τιμές της μεταβλητής  $x$ , και  $\kappa > 0$ ,  $\lambda > 0$  και  $\psi$  οι παράμετροι σχήματος, κλίμακας και θέσης, αντίστοιχα (Η περίπτωση  $\kappa < 0$ , αν και μαθηματικά είναι δυνατή, δεν είναι κατάλληλη για μέγιστες εντάσεις βροχής, γιατί συνεπάγεται άνω φραγμένη τιμή της έντασης, γεγονός που αντίκειται στη φυσική πραγματικότητα). Η μεταβλητή  $x$  αντιπροσωπεύει είτε την ένταση βροχής  $i$  είτε, ισοδύναμα, το γινόμενο  $i b(d)$  (για δεδομένη έκφραση της  $b(d)$ ). Στην τελευταία περίπτωση η επίλυση της (3) ως προς  $x$  δίνει αμέσως τη συνάρτηση  $a(T)$  και, στη συνέχεια, η επίλυση ως προς  $i$  δίνει αμέσως την έκφραση της όμβριας καμπύλης χωρίς να απαιτείται καμιά πρόσθετη, εμπειρική ή όχι, παραδοχή (Κουτσογιάννης, 1997, Koutsoyiannis et. al., 1998).

## Γενικό μαθηματικό πλαίσιο (3)

5. Η (3) επιλύεται άμεσα ως προς  $x$ , οπότε με την προϋπόθεση ότι  $F(x) = 1 - 1/T$  (προϋπόθεση που ισχύει για σειρές ετήσιων μέγιστων) προκύπτει

$$x_T = \lambda \left\{ \psi + \frac{\left[-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right]^{-\kappa} - 1}{\kappa} \right\} = \lambda' \left\{ \psi' + \left[-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right]^{-\kappa} \right\} \quad (4)$$

όπου για απλοποίηση έχει τεθεί  $\lambda' = \lambda / \kappa$  and  $\psi' = \kappa \psi - 1$  (Koutsoyiannis et. al., 1998).

6. Για  $\kappa = 0$  η κατανομή ΓΑΤ μεταπίπτει στην κατανομή AT1-M (Gumbel), οπότε η (3) παίρνει τη ειδική μορφή

$$F(x) = \exp(-e^{-x/\lambda + \psi}) \quad (5)$$

όπου  $\lambda$  και  $\psi$  είναι οι παράμετροι κλίμακας και θέσης, αντίστοιχα, της κατανομής. Αντίστοιχα, η (4) παίρνει τη μορφή (Κουτσογιάννης, 1997, Koutsoyiannis et. al., 1998)

$$x_T = \lambda \left\{ \psi - \ln \left[ -\ln \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right] \right\} \quad (6)$$

7. Για  $\kappa = 1/\psi$  (ή ισοδύναμα  $\psi' = 0$ ) η κατανομή ΓΑΤ μεταπίπτει στην AT2-M δύο παραμέτρων.

## Γενικό μαθηματικό πλαίσιο (4)

8. Η κατανομή Gumbel έχει γίνει αποδεκτή ευρύτατα στην Ελλάδα και διεθνώς για την περιγραφή μέγιστων εντάσεων βροχής, χρησιμοποιώντας συνήθως δείγματα μήκους λίγων δεκάδων ετών. Ωστόσο, η μελέτη δειγμάτων μεγαλύτερου μήκους, δείχνει ότι η κατανομή Gumbel απορρίπτεται στατιστικώς. Αντίστοιχα είναι τα συμπεράσματα για την κατανομή AT2-M δύο παραμέτρων. Αντίθετα, η κατανομή ΓΑΤ με παράμετρο σχήματος  $\kappa = 0.10$  έως  $0.20$  φαίνεται κατάλληλη.
9. Από πρόσφατη στατιστική διερεύνηση (Koutsoyiannis, 1999) των δεδομένων του Hershfield (1961, 1965 – 2645 σταθμοί όλου του κόσμου, συνολικό πλήθος μετρήσεων 95 000 σταθμών-ετών) διαπιστώθηκε ότι (α) η κατανομή ΓΑΤ είναι γενικά κατάλληλη για ετήσιες σειρές μέγιστων βροχοπτώσεων, (β) η τιμή που υπολογίζεται τη μέθοδο Hershfield (1961, 1965) ως ΠΜΚ, αντιστοιχεί σε περίοδο επαναφοράς περίπου 60 000 ετών, και (γ) η τιμή της παραμέτρου σχήματος της κατανομής ΓΑΤ δίνεται ως συνάρτηση της μέσης τιμής της ετήσιας μέγιστης 24ωρης βροχόπτωσης  $m_h$ , από τη σχέση

$$\kappa = 0.183 - 0.00049 m_h \quad (m_h \text{ σε mm}) \quad (7)$$

Η σύγκριση της παραπάνω εναλλακτικής διατύπωσης της μεθόδου Hershfield με την κατανομή που προκύπτει από το δείγμα 136 ετών του Αστεροσκοπείου Αθηνών έδειξε πλήρη συμφωνία (Koutsoyiannis, 1999).

10. Τα παραπάνω συνηγορούν στην αποδοχή της ΓΑΤ ως κατάλληλης κατανομής για μέγιστες βροχοπτώσεις. Σε περίπτωση που υπάρχει μεγάλο μήκος δείγμα, η παράμετρος σχήματος της κατανομής μπορεί να εκτιμάται άμεσα από το δείγμα. Σε αντίθετη περίπτωση είναι προτιμότερο να εκτιμάται από την (7).

## Γενικό μαθηματικό πλαίσιο (5)

11. Η αποδοχή της κατανομής ΓΑΤ σε συνδυασμό με τις (1) και (2) οδηγεί στην ακόλουθη γενικευμένη έκφραση όμβριων καμπυλών

$$i(d, T) = \frac{\lambda' \left\{ \left[ -\ln \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\kappa} + \psi' \right\}}{(d + \theta)^\eta} \quad (\kappa \neq 0) \quad (8)$$

$$i(d, T) = \frac{\lambda \left\{ -\ln \left[ -\ln \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right] + \psi \right\}}{(d + \theta)^\eta} \quad (\kappa = 0) \quad (9)$$

12. Στις εξισώσεις (8) και (9) η περίοδος επαναφοράς αναφέρεται σε σειρές ετήσιων μεγίστων και κατά συνέπεια παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 1 έτος. Αν η περίοδος επαναφοράς οριστεί με αναφορά σε σειρές υπεράνω κατωφλίου, οπότε μπορεί να πάρει και τιμές μικρότερες από 1 έτος, οι αντίστοιχες εξισώσεις προκύπτουν θεωρητικά ότι έχουν τις ακόλουθες απλούστερες εκφράσεις (Koutsoyiannis et al., 1998)

$$i(d, T) = \frac{\lambda' (T^\kappa + \psi')}{(d + \theta)^\eta} \quad (\kappa \neq 0) \quad (10)$$

$$i(d, T) = \frac{\lambda (\ln T + \psi)}{(d + \theta)^\eta} \quad (\kappa = 0) \quad (11)$$

Για μικρές περιόδους επαναφοράς, οι εξισώσεις (10) και (11) είναι προφανώς δυσμενέστερες από τις αντίστοιχές τους (8) και (9), ενώ για μεγαλύτερες περιόδους επαναφοράς ( $T > 10$  χρόνια) πρακτικώς οι πρώτες ταυτίζονται με τις δεύτερες, δεδομένου ότι για μικρές τιμές του  $1/T$  ισχύει  $\ln [1 - (1/T)] = -(1/T) - (1/T)^2 - \dots \approx -1/T$ .

## Συνεπείς μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων α. Η μέθοδος ενοποίησης διαρκειών

**Στάδια μεθόδου:** (1) υπολογισμός παραμέτρων της συνάρτησης  $b(d)$ , (2) υπολογισμός παραμέτρων της συνάρτησης  $a(T)$ .

**Θεωρητική βάση:** Όπως προκύπτει από την (1), η τυχαία μεταβλητή  $Y = I b(d)$  έχει συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητη της διάρκειας  $d$ , η οποία καθορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση  $a(T)$ . Άρα πρέπει οι παράμετροι  $\theta$  και  $\eta$  να υπολογιστούν έτσι ώστε να ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη. Στη συνέχεια, οι παράμετροι της  $a(T)$  μπορούν να εκτιμηθούν άμεσα από τη συνάρτηση κατανομής της  $Y$ .

### Βήματα μεθόδου – Στάδιο 1

- Υποθέτουμε αρχικές τιμές των παραμέτρων  $\theta$  και  $\eta$ .
- Υπολογίζουμε τις τιμές  $y_{ji} = I_{ji} b(d_j)$ . Κατά προτίμηση χρησιμοποιούμε υποσύνολο κάθε δείγματος δεδομένης διάρκειας  $d_j$ , π.χ. το 1/3 των μεγαλύτερων σε μέγεθος τιμών. Έστω  $n_j$  ο αριθμός στοιχείων του υποσυνόλου που αντιστοιχεί σε διάρκεια  $d_j$ .
- Ενοποιώντας όλα τα δείγματα που περιέχουν τις τιμές  $y_{ji}$  αποκτούμε ένα συνολικό δείγμα μεγέθους

$$m = \sum_{j=1}^k n_j$$

- Με βάση το δείγμα αυτό, καταταγμένο σε φθίνουσα σειρά, αντιστοιχίζουμε αύξοντες αριθμούς ή βαθμούς (ranks)  $r_{ji}$  σε όλες τις  $m$  τιμές  $y_{ji}$ .

## Συνεπείς μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων α. Η μέθοδος ενοποίησης διαρκειών (συνέχεια)

### Βήματα μεθόδου – Στάδιο 1

- Επανερχόμενοι στα αρχικά επιμέρους δείγματα των ξεχωριστών διαρκειών υπολογίζουμε για κάθε τιμή το μέσο βαθμό

$$\bar{r}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} r_{ji}$$

- Υπολογίζουμε τη στατιστική παράμετρο Kruskal-Wallis, η οποία που συνδυάζει τους μέσους βαθμούς από όλα τα επιμέρους δείγματα:

$$h = \frac{12}{m(m+1)} \sum_{j=1}^k n_j \left( \bar{r}_j - \frac{m+1}{2} \right)^2$$

- Επαναλαμβάνουμε τα βήματα β.-στ. με νέες τιμές των παραμέτρων  $\theta$  και  $\eta$ , με στόχο την εύρεση των τιμών που ελαχιστοποιούν την  $h$  (συστηματική αναζήτηση μπορεί να γίνει π.χ. με τη μέθοδο της διχοτόμησης).

### Στάδιο 2

- Υπολογίζουμε τις τιμές  $y_{ji} = I_{ji} b(d_j)$  για τις τελικές τιμές των παραμέτρων  $\theta$  και  $\eta$  και για τα συνολικά διαθέσιμα δείγματα.
- Ενοποιούμε όλα τα δείγματα που περιέχουν τις τιμές  $y_{ji}$
- Από το συνολικό δείγμα εκτιμάμε με τις τυπικές μεθόδους της στατιστικής (π.χ. με τη μέθοδο ροπών ή καλύτερα των  $L$  ροπών) τις παραμέτρους της συνάρτησης  $a(T)$ .

## Συνεπείς μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων β. Η μέθοδος καθολικής εκτίμησης

**Θεωρητική βάση:** Η μέθοδος αυτή εκτιμά ταυτόχρονα το σύνολο των παραμέτρων των όμβριων καμπυλών ελαχιστοποιώντας το συνολικό σφάλμα των όμβριων καμπυλών σε σχέση με τα ιστορικά δεδομένα

### Βήματα μεθόδου

- α. Για κάθε στοιχείο δείγματος  $(i_j, d_j)$  εκτιμάμε την εμπειρική περίοδο επαναφοράς,  $T_{ij}$  χρησιμοποιώντας π.χ. τη σχέση Cunnane. Για το στοιχείο (ένταση βροχής)  $l$  του δείγματος  $j$ , διατεταγμένου σε φθίνουσα σειρά (συμβολικά  $i_j$ , όπου ο δείκτης  $l$  είναι ο αύξων αριθμός), η περίοδος επαναφοράς είναι

$$T_{ij} = \frac{n_j + 0.12}{l - 0.44}$$

- β. Υποθέτουμε αρχικές τιμές του συνόλου των παραμέτρων.  
γ. Για κάθε στοιχείο του δείγματος, για δεδομένα  $T_{ij}$  και  $d_j$  υπολογίζουμε την αντίστοιχη θεωρητική (μοντελοποιημένη) ένταση

$$\hat{i}_{ij} = \frac{a(T_{ij})}{b(d_j)}$$

- δ. Για κάθε στοιχείο του δείγματος υπολογίζουμε το αντίστοιχο σφάλμα

$$e_{ij} = \ln i_{ij} - \ln \hat{i}_{ij} = \ln \left( \frac{i_{ij}}{\hat{i}_{ij}} \right)$$

## Συνεπείς μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων β. Η μέθοδος καθολικής εκτίμησης (συνέχεια)

### Βήματα μεθόδου (συνέχεια)

- ε. Υπολογίζουμε το καθολικό μέσο σφάλμα από την εξίσωση

$$E = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} \sum_{l=1}^{n_j} e_{jl}^2$$

- ζ. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα γ.-ε. με νέες τιμές των παραμέτρων με στόχο την εύρεση των τιμών που ελαχιστοποιούν το σφάλμα  $E$  (συστηματική αναζήτηση μπορεί να γίνει με χρήση τυπικών επιλυτών).



## Ενοποίηση δειγμάτων διαφορετικών σταθμών

**Μέθοδος σταθμών ετών:** ενοποίηση των δειγμάτων διαφορετικών σταθμών. Οι παράμετροι των όμβριων καμπυλών εκτιμώνται από τα ενοποιημένα δείγματα, με έναν από τους τρόπους που περιγράφηκαν παραπάνω.

**Προϋπόθεση 1** (απαραίτητη): τα δείγματα των μέγιστων εντάσεων βροχής που έχουν ληφθεί στους διαφορετικούς σταθμούς προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό ή αποτελούν δείγματα της ίδιας τυχαίας μεταβλητής.

**Έλεγχοι προϋπόθεσης 1:** εμπειρικός (έλεγχος ότι οι θέσεις των μετρητικών σταθμών βρίσκονται στο ίδιο μικροκλιματικό περιβάλλον) και στατιστικός (π.χ. δοκιμή Kruskal-Wallis)

**Προϋπόθεση 2:** στατιστική ανεξαρτησία δειγμάτων διαφορετικών σταθμών.

**Έλεγχοι προϋπόθεσης 1:** εμπειρικός (διαφορετικές ημερομηνίες των μέγιστων βροχών στους διάφορους σταθμούς) και στατιστικός (μηδενικός συντελεστής συσχέτισης) μπορεί να θεωρηθεί στατιστικώς μηδέν.

**Ισοδύναμος αριθμός σταθμών**  $k_e$  σε περίπτωση που δεν ισχύει η ανεξαρτησία, αλλά υπάρχει θετικός συντελεστής συσχέτισης  $\rho$  μεταξύ των διαφορετικών σταθμών (σχέση που αποδίδεται στους Yule και Alexander (National Research Council, 1988, σ. 25)

$$k_e = k / [1 + (k - 1) \rho]$$

όπου  $k$  ο αριθμός των σταθμών.

**Επιφυλάξεις ως προς την εφαρμογή της μεθόδου:** βλ. Κουτσογιάννης (1997, σ. 285)

## Επίδραση της χρονικής ευκρίνειας των παρατηρήσεων

**Πηγή σφάλματος:** μικρή χρονική ευκρίνεια παρατηρήσεων.

**Συνέπεια:** υπεκτίμηση των μέγιστων εντάσεων.

**Μέγεθος σφάλματος:** εξαρτάται από το λόγο διάρκειας προς ευκρίνεια ( $d/\delta$ ).

**Τρόπος άρσης του σφάλματος** (για μικρές τιμές του λόγου  $d/\delta$ ): αναγωγή των τιμών  $i(d)$ , με πολλαπλασιασμό επί ένα συντελεστή που εξαρτάται από το λόγο  $d/\delta$ .

**Τιμές του συντελεστή άρσης του σφάλματος διακριτοποίησης** (π.χ. Linsley et al., 1975, σ. 357):

Λόγος διάρκειας προς ευκρίνεια ( $d/\delta$ )	Συντελεστής άρσης του σφάλματος διακριτοποίησης
1	1.13
2	1.04
3-4	1.03
5-8	1.02
9-24	1.01

## Βασική βιβλιογραφία

- ◆ Κουτσογιάννης, Δ., *Στατιστική Υδρολογία*, Έκδοση 4, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1997.
- ◆ Hosking, J. R. M., L moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics, *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, 52, 105-124, 1990.
- ◆ Koutsoyiannis, D., A probabilistic view of Hershfield's method for estimating probable maximum precipitation, *Water Resources Research* (in press), 1999.
- ◆ Koutsoyiannis, D., D. Kozonis and A. Manetas, A mathematical framework for studying rainfall intensity-duration-frequency relationship, *J. of Hydrology*, 206, 118-135, 1998.
- ◆ National Research Council, *Estimating Probabilities of Extreme Floods: Methods and Recommended Research*, National Academy Press, Washington, D.C., 1988.
- ◆ Stedinger, J. R., R. M. Vogel, and E. Foufoula-Georgiou, Frequency analysis of extreme events, Chapter 18 in *Handbook of Hydrology*, edited by D. R. Maidment, McGraw-Hill, 1993.

## Λοιπές αναφορές

- ◆ Κουτσογιάννης, Δ., Οριστική μελέτη αποχέτευσης Κορίνθου. Μελέτη Χειμάρρου Ξηριά, Υδρολογική Μελέτη Πλημμυρών, 1998.
- ◆ Chowdhury, J. U., J. R. Stedinger, and L.-H. Lu, Goodness-of-fit tests for regional generalized extreme value flood distributions, *Water Resources Research*, 27(7), 1765-1776, 1991.
- ◆ Gumbel, E. J., *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York, 1958.
- ◆ Greenwood, J. A., J. M. Landwehr, N. C. Matalas, and J. R. Wallis, Probability-weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form, *Water Resources Research*, 15, 1049-1054, 1979.
- ◆ Hershfield, D. M., Estimating the probable maximum precipitation, *Proc. ASCE, J. Hydraul. Div.*, 87(HY5), 99-106, 1961
- ◆ Hershfield, D. M., Method for estimating probable maximum precipitation, *J. American Waterworks Association*, 57, 965-972, 1965.
- ◆ Kottegoda, N. T., *Stochastic Water Resources Technology*, Macmillan Press, London, 1980.
- ◆ Linsley, R. K. Jr., M. A. Kohler and J. L. H. Paulus, *Hydrology for Engineers*, McGraw-Hill, Tokyo, 2nd edition, 1975.
- ◆ Mann, H. B., and A. Wald, On the choice of the number of class intervals in the application of the chi square test, *Ann. Math. Statist.*, 13, 306-317, 1942.
- ◆ Murota, A., and T. Eto., Theoretical studies on gamma-type distribution and runs – their applications to hydrology, in *Floods and Droughts, Proc. 2nd Intern. Symp. in Hydrology*, pp. 648-664, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, 1973.
- ◆ Prescott, P., and A. T. Walden, Maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme-value distribution, *Biometrika*, 67, 723-724, 1980.
- ◆ Rasmusson, E. M., R. E. Dickinson, J. E. Kutzbach, and M. K. Cleaveland, Climatology, Chapter 2 in *Handbook of Hydrology*, edited by D. R. Maidment, McGraw-Hill, 1993.
- ◆ Stedinger, J. R., and T. A. Cohn, Flood frequency analysis with historical and paleoflood information, *Water Resources Research*, 22(5), 785-793, 1986.
- ◆ U.S. Committee on Opportunities in the Hydrological Sciences, *Opportunities in the Hydrological Sciences*, edited by P. S. Eagleson, National Academy Press, Washington, D.C., 348 pp., 1992.
- ◆ Williams, C. A. Jr., On the choice of the number and width of classes for the chi-square test of goodness of fit, *J. Am. Statist. Assoc.*, 45, 77-86, 1950.