Δυναμικός προγραμματισμός

Σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος:
Βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων

Ανδρέας Ευστρατιάδης και Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ακαδημαϊκό έτος: 2006-07

Ορισμοί ανάλυσης συστημάτων

- **Είσοδοι** (inputs) ή **φορτίσεις** (stresses, forces): Δράσεις που προέρχονται από το εξωτερικό περιβάλλον και επιφέρουν μεταβολές στην κατάσταση του συστήματος.
- **Έξοδοι** (outputs) ή **αποκρίσεις** (responses): Αντιδράσεις που παράγονται από το σύστημα και γίνονται αντιληπτές από το περιβάλλον.
- **Μεταβλητές ελέγχου** (control variables) ή **μεταβλητές απόφασης** (decision variables): Αριθμητικές μεταβλητές που περιγράφουν εναλλακτικές επιλογές των χαρακτηριστικών μεγεθών σχεδιασμού ή λειτουργίας του συστήματος.
- **Μεταβλητές κατάστασης** (state variables): Εσωτερικές μεταβλητές που περιγράφουν το τρέχον καθεστώς του συστήματος και που μεταβάλλονται ως συνέπεια των εξωτερικών φορτίσεων και των μεταβλητών ελέγχου.
- **Περιορισμοί** (constraints): Δεσμεύσεις που καθορίζουν τις εφικτές καταστάσεις του συστήματος, με βάση τους φυσικούς νόμους και διάφορες λειτουργικές απαιτήσεις.
- **Μέτρο επίδοσης** (performance measure): Αριθμητικός δείκτης που αξιολογεί τις επιπτώσεις κάθε απόφασης, συναρτήσει προκαθορισμένων κριτηρίων.
- **Στοχική συνάρτηση** (objective function) ή **συνάρτηση επιστροφής** (return function): Μαθηματική διατύπωση του μέτρου επίδοσης ως προς τις μεταβλητές ελέγχου, με πεδίο ορισμού που προσδιορίζεται από τους περιορισμούς.

Η έννοια της βελτιστοποίησης

- **Εννοιολογικός ορισμός**: Ένα σύστημα είναι βέλτιστο ως προς ένα δεδομένο μέτρο επίδοσης και ένα δεδομένο σύνολο περιορισμών εφόσον λειτουργεί/αποδίδει τουλάχιστον ίσα αν όχι καλύτερα από κάθε άλλο σύστημα που ικανοποιεί τους ίδιους περιορισμούς (Pierre, 1984, σ. 2).
- **Μαθηματικός ορισμός**: Μια συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ ορισμένη στο $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{R}^n$ παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο σημείο $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ εφόσον για κάθε $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ισχύει:

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$$

- Τα προβλήματα βελτιστοποίησης, καθώς και οι αντίστοιχες τεχνικές επίλυσής τους, ομαδοποιούνται σε **κατηγορίες**, με βάση τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:
  - τη μαθηματική μορφή της στοχικής συνάρτησης (γραμμική ή όχι, κυρτή ή μη κυρτή, αθροιστική ή όχι)·
  - την ύπαρξη ή όχι περιορισμών, καθώς και τη μαθηματική μορφή αυτών (γραμμικοί ή όχι, ανισωτικοί ή εξισωτικοί)·
  - τη μορφή των μεταβλητών ελέγχου (συνεχείς, διακριτές ή μικτές)·
  - τη φύση του υπό μελέτη συστήματος (στατικό ή δυναμικό, ντετερμινιστικό ή στοχαστικό).

Εφαρμογή 1: Βέλτιστη κατανομή υδατικών πόρων

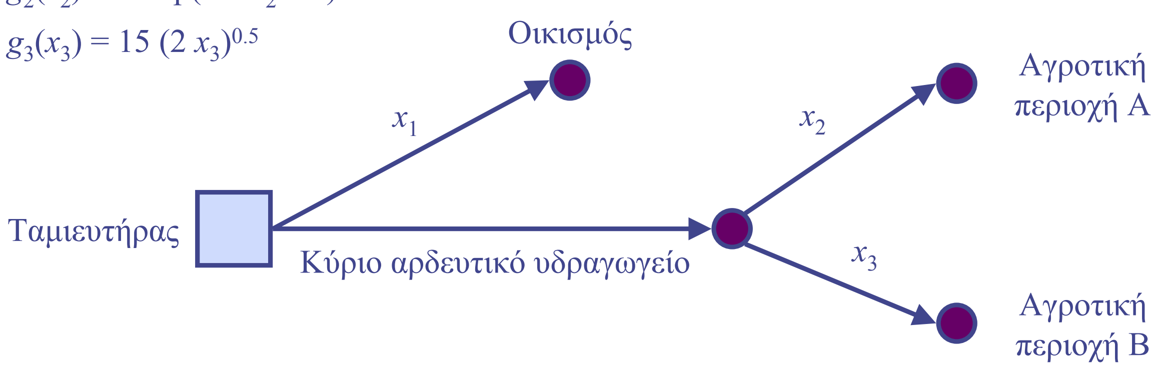
Ταμιευτήρας χρησιμοποιείται για την ύδρευση ενός οικισμού και την άρδευση δύο αγροτικών περιοχών. Η ολική ποσότητα ύδατος που διατίθεται ανά έτος είναι 10 hm^3, ενώ η παροχετευτικότητα του κύριου αρδευτικού υδραγωγείου, ανηγμένη σε ετήσια βάση, ανέρχεται σε 6 hm^3. Για λόγους πολιτικής πρέπει να δοθούν τουλάχιστον 2 hm^3 για την ύδρευση και από 1 hm^3 για τις δύο αρδευτικές χρήσεις. Να εκτιμηθεί η βέλτιστη κατανομή νερού για τις τρεις χρήσεις, ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος από αυτό.

Δίνονται οι συναρτήσεις απόδοσης για τις τρεις χρήσεις:

$g_1(x_1) = 4\, x_1^{1.3}$

$g_2(x_2) = 5 \exp(0.3\, x_2 - 1)$

$g_3(x_3) = 15\, (2\, x_3)^{0.5}$



Εφαρμογή 1: Μαθηματική διατύπωση προβλήματος

- **Μεταβλητές ελέγχου**: ποσότητες που διατίθεται για ύδρευση (x_1), άρδευση περιοχής Α (x_2) και άρδευση περιοχής Β (x_3).
- **Στοχική συνάρτηση** (= οικονομικό όφελος, προς μεγιστοποίηση):

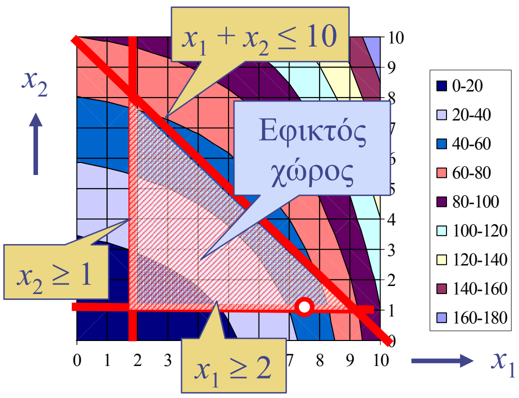
$$f(x_1, x_2, x_3) = 4\, x_1^{1.3} + 5\,[\exp(0.3\, x_2) - 1)] + 15\,(2\, x_3)^{0.5}$$

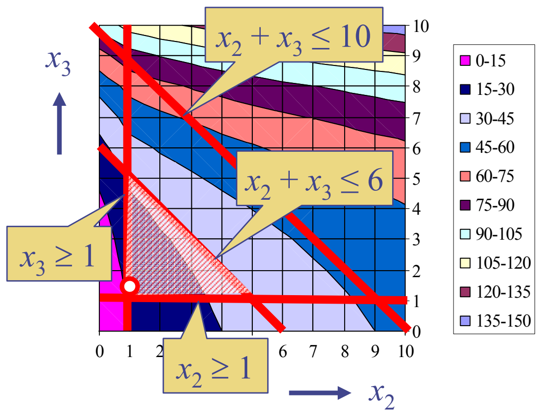
- **Φυσικοί περιορισμοί**:
  - Συνολική ποσότητα που διατίθεται: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
  - Παροχετευτικότητα κύριου αρδευτικού υδραγωγείου: $x_2 + x_3 \leq 6$
- **Λειτουργικοί περιορισμοί**:
  - Ελάχιστη απαίτηση για ύδρευση: $x_1 \geq 2$
  - Ελάχιστη απαίτηση για άρδευση περιοχής Α: $x_2 \geq 1$
  - Ελάχιστη απαίτηση για άρδευση περιοχής Β: $x_3 \geq 1$
- **Βέλτιστη λύση** (ακριβής επίλυση με μη γραμμικό αλγόριθμο):

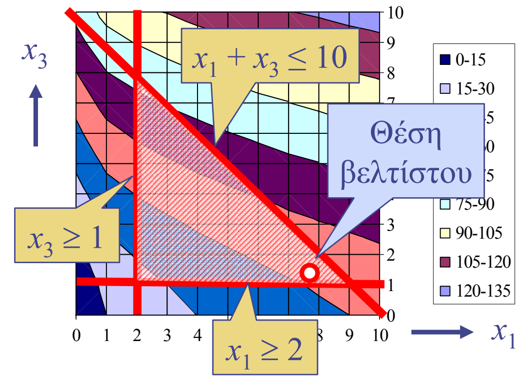
$$x_1^* = 7.786 \text{ hm}^3,\;\; x_2^* = 1.000 \text{ hm}^3,\; x_3^* = 1.214 \text{ hm}^3$$

$$f^* = 82.768$$

Εφαρμογή 1: Γεωμετρική απεικόνιση





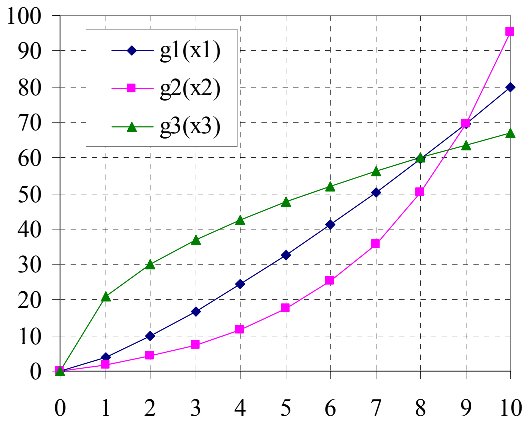


- Αν **δεν υπήρχαν περιορισμοί**, η βέλτιστη λύση θα ήταν στο άπειρο.
- Αν η συνάρτηση ήταν **γραμμική**, η βέλτιστη λύση θα βρισκόταν στην τομή κάποιων περιορισμών.
- Εξαιτίας του **εξισωτικού περιορισμού**, η βέλτιστη λύση κείται πάνω στο επίπεδο $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.

Εφαρμογή 1: Τρόποι επίλυσης του προβλήματος

- Η στοχική συνάρτηση είναι **μη γραμμική** ως προς τις μεταβλητές.
- Όλοι οι **περιορισμοί**, εξισωτικοί και ανισωτικοί, είναι γραμμικοί.
- Οι όροι της στοχικής συνάρτησης **διαχωρίζονται** ως προς τις μεταβλητές ελέγχου, δηλαδή:

$$f(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3)$$



Μεθοδολογία 1: Επίλυση με **εξονυχιστική απαρίθμηση** όλων των λύσεων.

Μεθοδολογία 2: Επίλυση με **γραμμικό προγραμματισμό**, με γραμμικοποίηση (;;;) της στοχικής συνάρτησης.

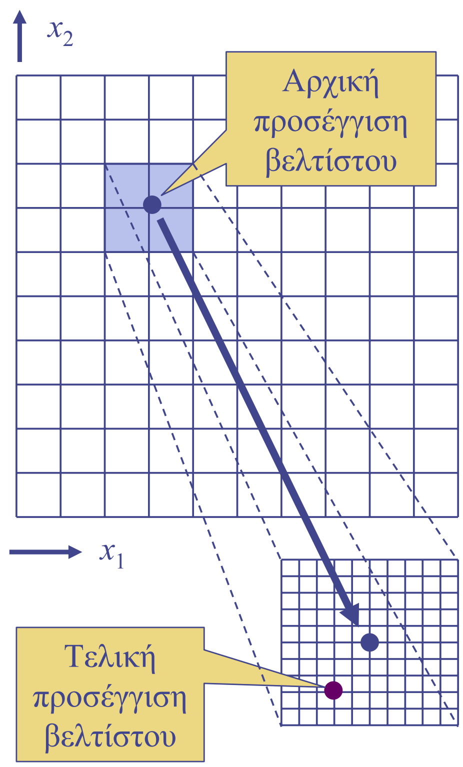
Μεθοδολογία 3: Επίλυση με **μη γραμμικές τεχνικές** (π.χ. εξελικτικοί αλγόριθμοι), με ενσωμάτωση των περιορισμών ως όρων ποινής στη στοχική συνάρτηση.

Μεθοδολογία 4: Επίλυση με **δυναμικό προγραμματισμό**, με διάσπαση του προβλήματος σε στάδια και διακριτοποίηση του πεδίου ορισμού των μεταβλητών.

Τεχνικές εξονυχιστικής απαρίθμησης

- **Μέθοδος απλού πλέγματος**: Διαμορφώνεται ένα πλέγμα σημείων, στους κόμβους του οποίου υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης, και το καλύτερο σημείο λαμβάνεται ως προσέγγιση της βέλτιστης λύσης.
- **Μέθοδος επάλληλων πλεγμάτων**: Σχηματίζεται ένα αδρό πλέγμα, που σταδιακά πυκνώνει γύρω από την περιοχή του εκάστοτε βελτίστου.
- Η μέθοδος είναι επίπονη υπολογιστικά, καθώς το πλήθος των δοκιμών **αυξάνει εκθετικά με την διάσταση** του προβλήματος (= «κατάρα της διαστατικότητας», curse of dimensionality).
- Αν η διακριτοποίηση είναι ομοιόμορφη και δ είναι το πλήθος των ίσων διαστημάτων σε κάθε διάσταση, τότε για n μεταβλητές ελέγχου το πλήθος των κόμβων του πλέγματος είναι:

$$N = (1 + \delta)^n$$



Εφαρμογή 1: Επίλυση με απαρίθμηση

- Επιλέγεται ένα βήμα διακριτοποίησης των μεταβλητών ελέγχου (π.χ. 1 hm^3), το οποίο προσδιορίζει την **ακρίβεια** προσέγγισης της βέλτιστης λύσης.
- Εξετάζονται **όλοι οι συνδυασμοί** λύσεων, δηλαδή $11^3 = 1331$ συνδυασμοί, και απορρίπτονται αυτοί που παραβιάζουν τους περιορισμούς ως μη εφικτοί.
- Από το σύνολο των **εφικτών λύσεων**, εντοπίζεται αυτή που μεγιστοποιεί την τιμή της στοχικής συνάρτησης.

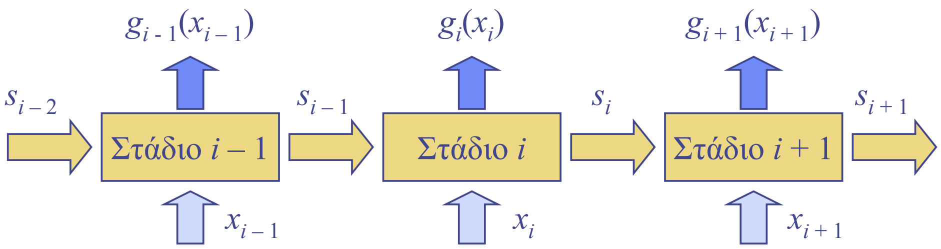
Λύση	x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	g_3	f	Εφικτή
Α	1	0	0	4.000	0.000	0.000	4.000	Όχι
Β	5	1	4	32.413	1.749	42.426	76.589	Ναι
Γ	8	3	5	59.714	7.298	47.434	114.446	Όχι
Δ	4	3	3	24.251	7.298	36.742	68.292	Ναι

- Απαιτούμενος αριθμός δοκιμών για $\delta = 0.001$ hm^3: περίπου 10^{12}
- Απαιτούμενος αριθμός δοκιμών για $n = 10$ και $\delta = 0.001$ hm^3: περίπου 10^{40}
- Απαιτούμενος αριθμός δοκιμών με εξελικτικό αλγόριθμο: 10^3 έως 10^4

Δυναμικός προγραμματισμός: Θεμελιώδεις απαιτήσεις

- Το πρόβλημα βελτιστοποίησης διασπάται σε **στάδια** (stages), με μία (συνήθως) ή περισσότερες **μεταβλητές απόφασης** x_i σε κάθε στάδιο i.
- Σε κάθε στάδιο αντιστοιχούν **μεταβλητές κατάστασης** s_i, που λαμβάνουν τιμές από ένα **πεπερασμένο σύνολο** $\mathcal{S}i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\}$.
- Συνέπεια κάθε απόφασης x_i είναι η **μεταβολή της κατάστασης** του αντίστοιχου σταδίου i και η παραγωγή προσόδου, που αποτιμάται μέσω μιας **βαθμωτής συνάρτησης επιστροφής** $g_i(x_i)$.
- Η **στοχική συνάρτηση** του συστήματος προκύπτει ως άθροισμα των επιμέρους συναρτήσεων επιστροφής, δηλαδή:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

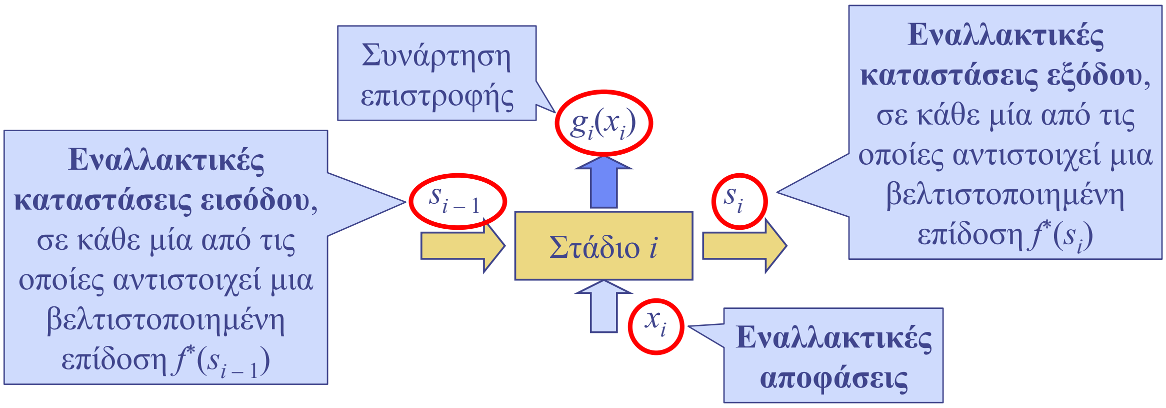


Δυναμικός προγραμματισμός: Η αρχή του Bellman

- **Συνθήκη μετάβασης** (state transition): Στο σύστημα ορίζεται ένας μονοσήμαντος μετασχηματισμός μεταξύ της κατάστασης εισόδου s_i, της κατάστασης εξόδου s_{i+1} και της απόφασης x_i κάθε σταδίου, που περιγράφεται από αναδρομικές σχέσεις της μορφής:

$$s_{i+1} = u(s_i, x_i) \text{ ή } s_i = u(s_{i-1}, x_i)$$

- **Αρχή βελτίστου του Bellman** (principle of optimality): Για ένα δεδομένα στάδιο, η βέλτιστη πολιτική των επόμενων σταδίων είναι ανεξάρτητη των αποφάσεων που έχουν ληφθεί στα προηγούμενα στάδια.



Δυναμικός προγραμματισμός: Διαμόρφωση BDP και FDP

Συμβολίζοντας με $f_i^*(s_i)$ τη συνολική βελτιστοποιημένη επίδοση όλων των σταδίων που προηγούνται του i, προκύπτουν δύο τρόποι διαμόρφωσης του προβλήματος:

- **Προς τα πίσω** δυναμικός προγραμματισμός (backward dynamic programming, BDP) = επίλυση από το στάδιο n προς το στάδιο 1
- Εξίσωση κατάστασης:

$$s_{i+1} = u(s_i, x_i)$$

- Εξίσωση Bellman:

$$f_i^*(s_i) = \max / \min \, [g_i(x_i) + f_{i+1}{}^*(s_{i+1})]$$

- **Προς τα εμπρός** δυναμικός προγραμματισμός (forward dynamic programming, FDP) = επίλυση από το στάδιο 1 προς το στάδιο n
- Εξίσωση κατάστασης:

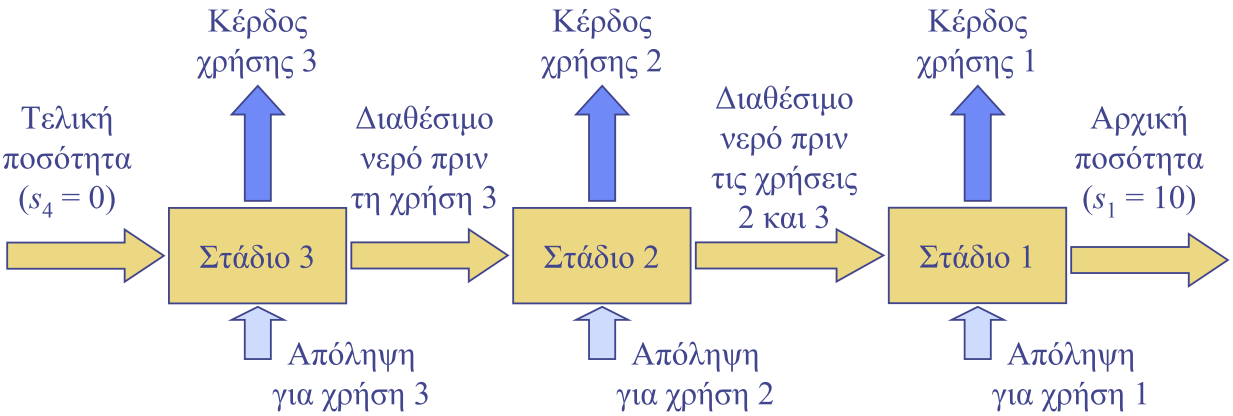
$$s_i = u(s_{i-1}, x_i)$$

- Εξίσωση Bellman:

$$f_i^*(s_i) = \max / \min \, [g_i(x_i) + f_{i-1}{}^*(s_{i-1})]$$

Εφαρμογή 1: Διατύπωση BDP

- Στάδια = χρήσεις νερού, μεταβλητές ελέγχου = απολήψεις
- Διακριτοποίηση μεταβλητών ελέγχου $x_i = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$
- Μεταβλητές κατάστασης = διαθέσιμοι υδατικοί πόροι μετά την πραγματοποίηση απολήψεων για τη χρήση που αντιστοιχεί στο εκάστοτε στάδιο
- Εξίσωση κατάστασης: $s_{i+1} = s_i - x_i$, με $s_4 = 0$
- Εξίσωση Bellman: $f_i^*(s_i) = \max\,[g_i(x_i) + f_{i+1}^*(s_i - x_i)]$



Εφαρμογή 1: Επίλυση BDP – Στάδιο 3

- Ορίζεται το **ιδεατό στάδιο πέρατος** για το οποίο ισχύει $s_4 = 0$, δηλαδή δεν έχει απομείνει καθόλου νερό προς διάθεση.
- Εξίσωση κατάστασης: $s_4 = s_3 - x_3 \Rightarrow x_3 = s_3 - s_4 \Rightarrow x_3 = s_3$
- Εξίσωση Bellman: $f_3^*(s_3) = [g_3(x_3) + f_4^*(s_4)]$, όπου $f_4^*(s_4) = 0$
- Απορρίπτονται ως μη εφικτές οι λύσεις για τις οποίες ισχύει $x_3 < 1$ και $x_3 > 6$ (λόγω του περιορισμού παροχετευτικότητας).

s3	s4	x3	f*(s4)	g3(x3)	f*(s3)	
10	0	10	0	67.082	67.082	Μη εφικτή
9	0	9	0	63.640	63.640	Μη εφικτή
8	0	8	0	60.000	60.000	Μη εφικτή
7	0	7	0	56.125	56.125	Μη εφικτή
6	0	6	0	51.962	51.962	Βέλτιστη
5	0	5	0	47.434	47.434	Βέλτιστη
4	0	4	0	42.426	42.426	Βέλτιστη
3	0	3	0	36.742	36.742	Βέλτιστη
2	0	2	0	30.000	30.000	Βέλτιστη
1	0	1	0	21.213	21.213	Βέλτιστη
0	0	0	0	0.000	0.000	Μη εφικτή

Εφαρμογή 1: Επίλυση BDP – Στάδιο 2

- Εξίσωση κατάστασης: $s_3 = s_2 - x_2 \Rightarrow x_2 = s_2 - s_3$
- Εξίσωση Bellman: $f_2^*(s_2) = [g_2(x_2) + f_3^*(s_3)]$
- Απορρίπτονται ως μη εφικτές οι λύσεις για τις οποίες ισχύει $x_2 < 1$ και $x_2 + x_3 > 6$, δηλαδή $s_2 > 6$ (δεν αναγράφονται στον πίνακα).

s2	s3	x2	f*(s3)	g2(x2)	f*(s2)	
6	5	1	47.434	1.749	49.183	Βέλτιστη
6	4	2	42.426	4.111	46.537	
6	3	3	36.742	7.298	44.040	
6	2	4	30.000	11.601	41.601	
6	1	5	21.213	17.408	38.622	
5	4	1	42.426	1.749	44.176	Βέλτιστη
5	3	2	36.742	4.111	40.853	
5	2	3	30.000	7.298	37.298	
5	1	4	21.213	11.601	32.814	
4	3	1	36.742	1.749	38.492	Βέλτιστη
4	2	2	30.000	4.111	34.111	
4	1	3	21.213	7.298	28.511	
3	2	1	30.000	1.749	31.749	Βέλτιστη
3	1	2	21.213	4.111	25.324	
2	1	1	21.213	1.749	22.962	Βέλτιστη

Εφαρμογή 1: Επίλυση BDP – Στάδιο 3

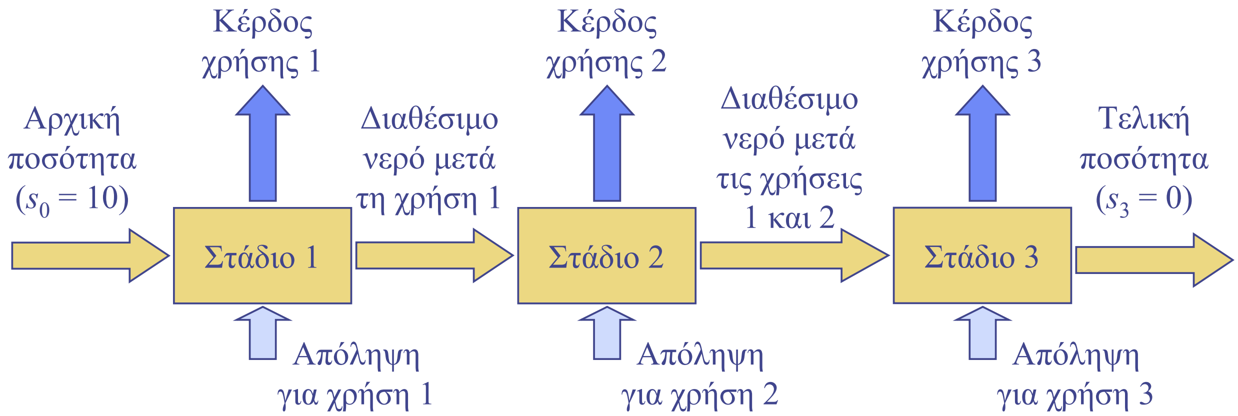
- Στο αρχικό στάδιο είναι διαθέσιμοι όλοι οι υδατικοί πόροι, συνεπώς $s_1 = 10$.
- Εξίσωση κατάστασης: $s_2 = s_1 - x_1 \Rightarrow x_1 = s_1 - s_2 \Rightarrow x_1 = 10 - s_2$
- Εξίσωση Bellman: $f_1^*(s_1) = [g_1(x_1) + f_2^*(s_2)]$
- Απορρίπτονται ως μη εφικτές οι λύσεις για τις οποίες ισχύει $x_1 < 2$ και $x_2 + x_3 > 6$, δηλαδή $s_2 > 6$ (δεν αναγράφονται στον πίνακα).

s1	s2	x1	f*(s2)	g1(x1)	f*(s1)	
10	6	4	49.183	24.251	73.435	
10	5	5	44.176	32.413	76.589	
10	4	6	38.492	41.082	79.574	
10	3	7	31.749	50.198	81.947	
10	2	8	22.962	59.714	82.677	Βέλτιστη

- Απαιτούμενος αριθμός δοκιμών = 26 (δεν λαμβάνονται υπόψη οι μη εφικτές λύσεις)
- Θεωρητικός αριθμός (με εξονυχιστική αναζήτηση) = 1131
- Βέλτιστη λύση: $x_1^* = 8$ hm³, $x_2^* = 1$ hm³, $x_3^* = 1$ hm³, $f^* = 82.677$
- Ακριβής λύση: $x_1^* = 7.786$ hm³, $x_2^* = 1.000$ hm³, $x_3^* = 1.214$ hm³, $f^* = 82.768$

Εφαρμογή 1: Διατύπωση FDP

- Στάδια = χρήσεις νερού, μεταβλητές ελέγχου = απολήψεις
- Διακριτοποίηση μεταβλητών ελέγχου $x_i = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$
- Μεταβλητές κατάστασης = διαθέσιμοι υδατικοί πόροι μετά την πραγματοποίηση απολήψεων για τη χρήση που αντιστοιχεί στο εκάστοτε στάδιο
- Εξίσωση κατάστασης: $s_i = s_{i-1} - x_i$, με $s_0 = 10$
- Εξίσωση Bellman: $f_i^*(s_i) = \max\,[g_i(x_i) + f_{i-1}^*(s_i + x_i)]$



Εφαρμογή 1: Επίλυση FDP – Στάδιο 1

- Ορίζεται το **ιδεατό στάδιο αρχής** για το οποίο ισχύει $s_0 = 10$, δηλαδή είναι διαθέσιμοι όλοι οι υδατικοί πόροι.
- Εξίσωση κατάστασης: $s_1 = s_0 - x_1 \Rightarrow x_1 = s_0 - s_1 \Rightarrow x_1 = 10 - s_1$
- Εξίσωση Bellman: $f_1^*(s_1) = [g_1(x_1) + f_0^*(s_0)]$, όπου $f_0^*(s_0) = 0$
- Απορρίπτονται ως μη εφικτές οι λύσεις για τις οποίες ισχύει $x_1 < 2$.

s1	s0	x1	f*(s0)	g1(x1)	f*(s1)	
10	10	0	0.000	0.000	0.000	Μη εφικτή
9	10	1	0.000	4.000	4.000	Μη εφικτή
8	10	2	0.000	9.849	9.849	Βέλτιστη
7	10	3	0.000	16.685	16.685	Βέλτιστη
6	10	4	0.000	24.251	24.251	Βέλτιστη
5	10	5	0.000	32.413	32.413	Βέλτιστη
4	10	6	0.000	41.082	41.082	Βέλτιστη
3	10	7	0.000	50.198	50.198	Βέλτιστη
2	10	8	0.000	59.714	59.714	Βέλτιστη
1	10	9	0.000	69.595	69.595	Βέλτιστη
0	10	10	0.000	79.810	79.810	Βέλτιστη

Εφαρμογή 1: Επίλυση FDP – Στάδιο 2

- Εξίσωση κατάστασης: $s_2 = s_1 - x_2 \Rightarrow x_2 = s_1 - s_2$
- Εξίσωση Bellman: $f_2^*(s_2) = [g_2(x_2) + f_1^*(s_1)]$
- Απορρίπτονται ως μη εφικτές οι λύσεις για τις οποίες ισχύει $x_2 < 1$ και $x_2 > 6$ (λόγω του περιορισμού παροχετευτικότητας) (δεν αναγράφονται στον πίνακα).

s2	s1	x2	f*(s1)	g2(x2)	f*(s2)	
0	6	6	24.251	25.248	49.500	
0	5	5	32.413	17.408	49.822	
0	4	4	41.082	11.601	52.683	
0	3	3	50.198	7.298	57.496	
0	2	2	59.714	4.111	63.825	
0	1	1	69.595	1.749	71.344	Βέλτιστη
1	7	6	16.685	25.248	41.933	
1	6	5	24.251	17.408	41.660	
1	5	4	32.413	11.601	44.014	
1	4	3	41.082	7.298	48.380	
1	3	2	50.198	4.111	54.309	
1	2	1	59.714	1.749	61.463	Βέλτιστη

Εφαρμογή 1: Επίλυση FDP – Στάδιο 2 (συνέχεια πίνακα)

s2	s1	x2	f*(s1)	g2(x2)	f*(s2)	
2	8	6	9.849	25.248	35.097	
2	7	5	16.685	17.408	34.093	
2	6	4	24.251	11.601	35.852	
2	5	3	32.413	7.298	39.711	
2	4	2	41.082	4.111	45.193	
2	3	1	50.198	1.749	51.947	Βέλτιστη
3	8	5	9.849	17.408	27.258	
3	7	4	16.685	11.601	28.285	
3	6	3	24.251	7.298	31.549	
3	5	2	32.413	4.111	36.524	
3	4	1	41.082	1.749	42.832	Βέλτιστη
4	8	4	9.849	11.601	21.450	
4	7	3	16.685	7.298	23.983	
4	6	2	24.251	4.111	28.362	
4	5	1	32.413	1.749	34.162	Βέλτιστη
5	8	3	9.849	7.298	17.147	
5	7	2	16.685	4.111	20.795	
5	6	1	24.251	1.749	26.001	Βέλτιστη
6	8	2	9.849	4.111	13.960	
6	7	1	16.685	1.749	18.434	Βέλτιστη
7	8	1	9.849	1.749	11.598	Βέλτιστη

Εφαρμογή 1: Επίλυση FDP – Στάδιο 3

- Στο τελικό στάδιο έχουν καταναλωθεί όλοι οι υδατικοί πόροι, συνεπώς $s_3 = 0$.
- Εξίσωση κατάστασης: $s_3 = s_2 - x_3 \Rightarrow x_3 = s_2 - s_3 \Rightarrow x_3 = s_2$
- Εξίσωση Bellman: $f_3^*(s_3) = [g_3(x_3) + f_2^*(s_2)]$
- Απορρίπτονται ως μη εφικτές οι λύσεις για τις οποίες ισχύει $x_3 < 1$ και $x_3 > 6$ (λόγω του περιορισμού παροχετευτικότητας) (δεν αναγράφονται στον πίνακα).
- Η βέλτιστη λύση ικανοποιεί τον αθροιστικό περιορισμό $x_2 + x_3 > 6$

s3	s2	x3	f*(s2)	g3(x3)	f*(s3)	
0	6	6	18.434	51.962	70.395	
0	5	5	26.001	47.434	73.435	
0	4	4	34.162	42.426	76.589	
0	3	3	42.832	36.742	79.574	
0	2	2	51.947	30.000	81.947	
0	1	1	61.463	21.213	82.677	Βέλτιστη
0	0	0	71.344	0.000	71.344	

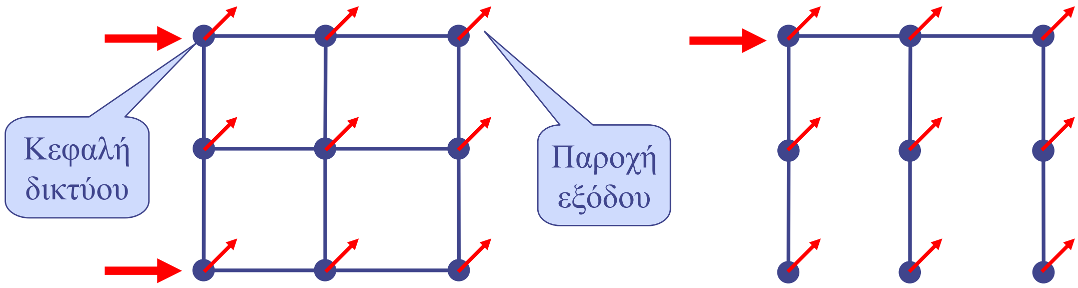
- Απαιτούμενος αριθμός δοκιμών με BDP = 26
- Απαιτούμενος αριθμός δοκιμών με FDP = 51 (επειδή πολλές από τις μη εφικτές λύσεις απορρίπτονται σε μεταγενέστερο στάδιο)

Τοποθέτηση προβλήματος διαστασιολόγησης δικτύων διανομής με βελτιστοποίηση του κόστους

- **Μεταβλητές ελέγχου**: διάμετρος ανά κλάδο (ενιαία) ή μήκη διαμέτρων ανά κλάδο
- **Περιορισμοί**:
  - Επιλογή από σύνολο διαμέτρων εμπορίου
  - Ελάχιστη πίεση κόμβων για διάφορα σενάρια φόρτισης
  - Ελάχιστη και μέγιστη ταχύτητα κλάδων
  - Κατασκευαστικοί περιορισμοί (μήκη αγωγών, εναλλαγή διαμέτρων)
- **Συνιστώσες στοχικής συνάρτησης**:
  - κόστος κατασκευής δικτύου (πάγιο κόστος αγωγών και λοιπών εξαρτημάτων)
  - κόστος αντλιοστασίων (πάγιο και λειτουργικό)

Εξαιρετικά σύνθετο πρόβλημα, η δυσχέρεια του οποίου οφείλεται: στο διακριτό πεδίο ορισμού των μεταβλητών ελέγχου (διάμετροι εμπορίου) και το τεράστιο πλήθος τους, τη μη γραμμικότητα των περιορισμών (τα υδραυλικά μεγέθη της ροής εξαρτώνται από τις διαμέτρους όλου του δικτύου) και τον υπολογιστικό φόρτο για την αποτίμηση της στοχικής συνάρτησης (προϋποθέτει υδραυλική επίλυση του δικτύου).

Βροχωτά και ακτινωτά δίκτυα

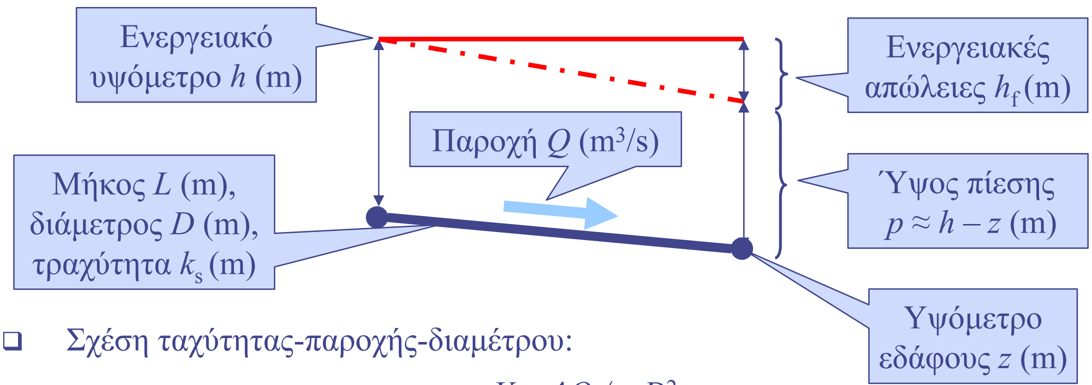


Βροχωτό δίκτυο | **Ακτινωτό δίκτυο**

- Δίκτυα ύδρευσης
- Περιορισμοί πίεσης (έλεγχος για πολλαπλά σενάρια λειτουργίας)
- Οι παροχές των κλάδων και οι πιέσεις των κόμβων εξαρτώνται από τις διαμέτρους όλου του δικτύου
- Βελτιστοποίηση με **ευρετικούς εξελικτικούς αλγορίθμους**

- Αρδευτικά δίκτυα
- Περιορισμοί πίεσης και ταχυτήτων
- Οι παροχές των κλάδων δεν εξαρτώνται από τις διαμέτρους
- Η πίεση κάθε κόμβου εξαρτάται από τις πιέσεις του κατάντη δικτύου
- Βελτιστοποίηση με **δυναμικό προγραμματισμό**

Υπενθύμιση εννοιών υδραυλικής - Συμβολισμοί



- Σχέση ταχύτητας-παροχής-διαμέτρου:

$$V = 4Q / \pi D^2$$

- Σχέση ενεργειακών απωλειών-ταχύτητας-διαμέτρου (κατά Darcy-Weisbach):

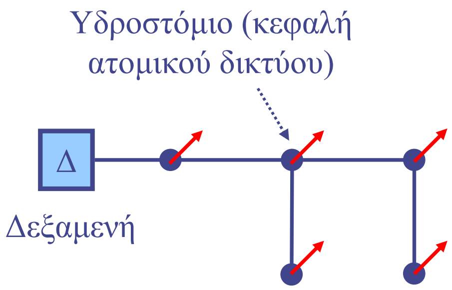
$$h_f = f\,(L / D)\,(V^2 / 2g) = 0.0826\, f\, L\, Q^2 / D^5$$

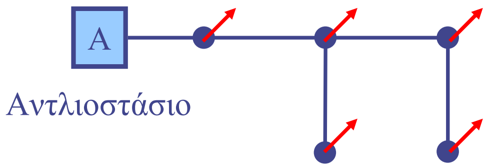
- Σχέση συντελεστή απωλειών-σχετικής τραχύτητας (= ισοδύναμη τραχύτητα / διάμετρος)-ταχύτητας (κατά Colebrook-White):

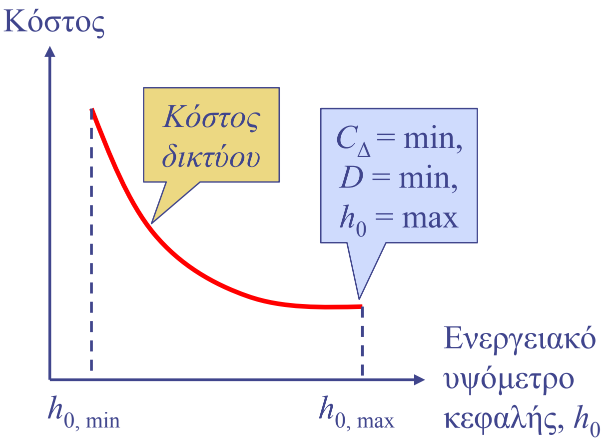
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -\,2\,\log_{10}\left[\frac{k_s}{3.7\,D} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\,\sqrt{f}}\right]$$

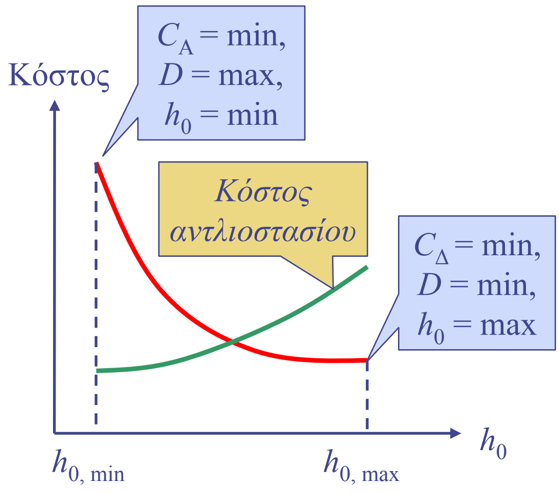
όπου Re ο αριθμός Reynolds της ροής (= $V\,D / \nu$) και ν η κινηματική συνεκτικότητα του νερού, ίση με 1.14×10^{-6} m^2/s, για θερμοκρασία 15°C.

Αρδευτικά δίκτυα: Τροφοδοσία με δεξαμενή ή αντλιοστάσιο









Βελτιστοποίηση αρδευτικών δικτύων με BDP – Κατάστρωση προβλήματος και περιορισμοί

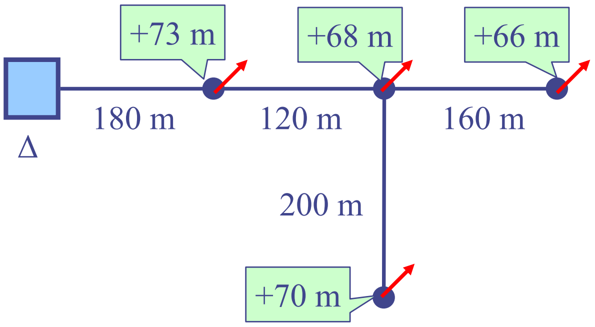
- Μεταβλητές ελέγχου = διάμετροι D_i (σταθερές για κάθε κλάδο i)
- Μεταβλητές κατάστασης = ενεργειακά υψόμετρα ανάντη κόμβων h_i
- Εξίσωση κατάστασης: $h_{i+1} = h_i - h_{fi}(D_i) \Rightarrow h_i = h_{i+1} + h_{fi}(D_i)$
- Συνάρτηση επιστροφής: $g_i(D_i) = c_i(D_i)\, L_i$, όπου $c_i(D_i)$ το μοναδιαίο κόστος για τη συγκεκριμένη διάμετρο (σε €/m) και L_i το μήκος του κλάδου (σε m)
- Εξίσωση Bellman: $f_i^*(h_i) = \min\,[g_i(D_i) + f_{i+1}^*(h_{i+1})]$
- Στοχική συνάρτηση: ολικό κόστος δικτύου (+ κόστος αντλιοστασίου κεφαλής)

- Ελάχιστη πίεση κόμβων = πίεση λειτουργίας υδροστομίων
- Σε ενδιάμεσους κόμβους = 2-4 m (ώστε να μην τμήσει η Π.Γ. το έδαφος)
- Ελάχιστη ταχύτητα αγωγών = 0.5 m/s (για αποφυγή καθίζησης φερτών)
- Μέγιστες ταχύτητες αγωγών (διαβάθμιση ανά διάμετρο, σύμφωνα με τους Ελληνικούς Κανονισμούς, για προστασία έναντι υδραυλικού πλήγματος)
- Εναλλαγή διαμέτρων: $D_{ανάντη} \geq D_{κατάντη}$

Εφαρμογή 2: Βελτιστοποίηση αρδευτικού δικτύου που τροφοδοτείται από δεξαμενή

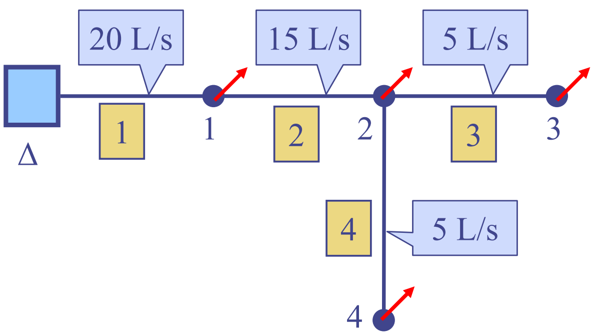
Να υπολογιστούν οι βέλτιστες διάμετροι του συλλογικού αρδευτικού δικτύου που τροφοδοτείται από τη δεξαμενή Δ, για όλο το εφικτό εύρος υψομέτρων της. Τα χαρακτηριστικά μεγέθη του δικτύου (υψόμετρα κόμβων, μήκη αγωγών) φαίνονται στο σκαρίφημα. Δίδονται ακόμη:

- Υλικό αγωγών: σωλήνες PVC 12.5 atm
- Διαθέσιμες διάμετροι και κόστη βλ. πίνακα
- Ονομαστική παροχή υδροστομίων: 5 L/s
- Ελάχιστη πίεση υδροστομίων: 2.5 atm



Διάμετρος εμπορίου (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)	Κόστος ανά μ.μ. (€/m)
90	79.0	11.7
110	97.0	15.4
125	110.2	18.6
140	123.6	21.4
160	141.2	23.7
200	176.4	33.7
225	198.6	38.0
250	220.6	43.7
280	247.0	51.4

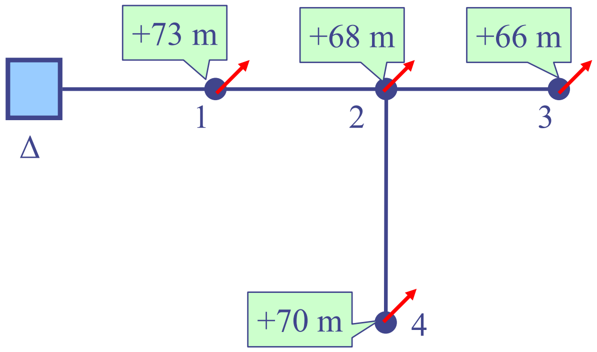
Εφαρμογή 2: Αρίθμηση κόμβων και σταδίων - Υπολογισμός παροχών



- **Κόμβοι**: αριθμός κόμβου > αριθμός ανάντη κόμβου
- **Κλάδοι**: αριθμός κλάδου = αριθμός κατάντη κόμβου = αριθμός σταδίου
- Ισχύει $n = m + 1$ (n = πλήθος κόμβων, m = πλήθος κλάδων)

- Ακτινωτό δίκτυο ⇒ παροχές κλάδων = παροχές εξόδου **κατάντη υδροστομίων** R.
- Στα δίκτυα με **ελεύθερη ζήτηση** δεν λειτουργούν όλα τα υδροστόμια ταυτόχρονα.
- Αν $\boldsymbol{R} \leq$ **10-12** θεωρείται ότι λειτουργούν ταυτόχρονα όλα τα υδροστόμια και η παροχή υπολογίζεται αθροιστικά.
- Αν $\boldsymbol{R} >$ **10-12** το πλήθος των λειτουργούντων υδροστομίων υπολογίζεται με βάση τον τύπο του Clement, για δεδομένη ποιότητα λειτουργίας του δικτύου – Στην περίπτωση αυτή **δεν ισχύει η εξίσωση συνέχειας** στους κόμβους!

Εφαρμογή 2: Περιορισμοί ελάχιστου ενεργειακού υψομέτρου κόμβων



- Απαιτούμενη πίεση λειτουργίας υδροστομίων = 2.5 atm ≈ 25 m
- Ελάχιστο ενεργειακό υψόμετρο κόμβων = υψόμετρο εδάφους + ελάχιστη πίεση υδροστομίων
- Δεν τίθεται περιορισμός στην τοποθέτηση της **κατώτατης στάθμης ύδατος** της δεξαμενής

Κόμβος	Υψόμετρο εδάφους z (m)	Ελάχιστο απαιτούμενο ύψος πίεσης p_{min} (m)	Ελάχιστο απαιτούμενο ενεργειακό υψόμετρο h_{min} (m)
1	73.0	25.0	98.0
2	68.0	25.0	93.0
3	66.0	25.0	91.0
4	70.0	25.0	95.0

Πλέον δυσμενής κατάντη κόμβος

Εφαρμογή 2: Έλεγχος ταχυτήτων για καθορισμό εφικτών διαμέτρων – Γενικές αρχές

- Για κάθε κλάδο, με βάση τη διερχόμενη παροχή, υπολογίζεται η **ταχύτητα ροής**, για όλο το εύρος διαμέτρων εμπορίου (προσοχή: οι υδραυλικοί υπολογισμοί γίνονται με την εσωτερική διάμετρο).
- Ελέγχεται αν η ταχύτητα βρίσκεται εντός των ορίων (V_{min}, V_{max}) που επιβάλουν οι κανονισμοί (βλ. πίνακα), ώστε να αποκλειστούν οι **μη εφικτές διάμετροι**.
- Για το σύνολο των εφικτών διαμέτρων, υπολογίζονται τα αντίστοιχα εφικτά **κόστη** και **ενεργειακές απώλειες**.

Εσωτερική διάμετρος (mm)	V_{min} (m/s)	V_{max} (m/s)
$D < 125$	0.50	1.55
$125 < D < 175$	0.50	1.85
$175 < D < 350$	0.50	2.00
$350 < D < 450$	0.50	2.10
$450 < D < 600$	0.50	2.20
$600 < D < 800$	0.50	2.30
$800 < D < 1000$	0.50	2.40
$D > 1000$	0.50	2.50

- Στους υδραυλικούς υπολογισμούς, θεωρούμε **ισοδύναμη τραχύτητα** $k_s = 1.0$ mm, που λαμβάνει υπόψη τη γήρανση των αγωγών και τις μικρής κλίμακας τοπικές απώλειες στις συναρμογές, στροφές, κλπ.

Εφαρμογή 2: Έλεγχος ταχυτήτων για καθορισμό εφικτών διαμέτρων – Κλάδος 1

Διάμετρος εμπορίου (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)	Vmin (m/s)	Vmax (m/s)	V (m/s)	Εφικτή
90	79.0	0.50	1.55	4.08	Μη εφικτή
110	97.0	0.50	1.55	2.71	Μη εφικτή
125	110.2	0.50	1.55	2.10	Μη εφικτή
140	123.6	0.50	1.55	1.67	Μη εφικτή
160	141.2	0.50	1.85	1.28	Εφικτή
200	176.4	0.50	1.85	0.82	Εφικτή
225	198.6	0.50	2.00	0.65	Εφικτή
250	220.6	0.50	2.00	0.52	Εφικτή
280	247.0	0.50	2.00	0.42	Μη εφικτή

Εφικτές διάμετροι για Q = 20 L/s

Διάμετρος εμπορίου (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)	Κόστος ανά μ.μ. (€/m)	Κόστος κλάδου (€)	f	h_f (m)
160	141.2	23.7	4 266	0.03429	3.63
200	176.4	33.7	6 066	0.03222	1.12
225	198.6	38.0	6 840	0.03124	0.60
250	220.6	43.7	7 866	0.03045	0.35

Κόστη και ενεργειακές απώλειες για το σύνολο των εφικτών διαμέτρων (Q = 20 L/s, L = 180 m)

Εφαρμογή 2: Έλεγχος ταχυτήτων για καθορισμό εφικτών διαμέτρων – Κλάδος 2

Διάμετρος εμπορίου (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)	Vmin (m/s)	Vmax (m/s)	V (m/s)	Εφικτή
90	79.0	0.50	1.55	3.06	Μη εφικτή
110	97.0	0.50	1.55	2.03	Μη εφικτή
125	110.2	0.50	1.55	1.57	Εφικτή
140	123.6	0.50	1.55	1.25	Εφικτή
160	141.2	0.50	1.85	0.96	Εφικτή
200	176.4	0.50	1.85	0.61	Εφικτή
225	198.6	0.50	2.00	0.48	Εφικτή
250	220.6	0.50	2.00	0.39	Μη εφικτή
280	247.0	0.50	2.00	0.31	Μη εφικτή

Εφικτές διάμετροι για Q = 15 L/s

Οριακά εφικτές (προσέγγιση μηχανικού)

Διάμετρος εμπορίου (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)	Κόστος ανά μ.μ. (€/m)	Κόστος κλάδου (€)	f	h_f (m)
125	110.2	18.6	2 232	0.03708	5.09
140	123.6	21.4	2 568	0.03581	2.77
160	141.2	23.7	2 844	0.03445	1.37
200	176.4	33.7	4 044	0.03244	0.42
225	198.6	38.0	4 560	0.03151	0.23

Κόστη και ενεργειακές απώλειες για το σύνολο των εφικτών διαμέτρων (Q = 15 L/s, L = 120 m)

Εφαρμογή 2: Έλεγχος ταχυτήτων για καθορισμό εφικτών διαμέτρων – Κλάδος 3

Διάμετρος εμπορίου (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)	Vmin (m/s)	Vmax (m/s)	V (m/s)	Εφικτή
90	79.0	0.50	1.55	1.02	Εφικτή
110	97.0	0.50	1.55	0.68	Εφικτή
125	110.2	0.50	1.55	0.52	Εφικτή
140	123.6	0.50	1.55	0.42	Μη εφικτή
160	141.2	0.50	1.85	0.32	Μη εφικτή
200	176.4	0.50	1.85	0.20	Μη εφικτή
225	198.6	0.50	2.00	0.16	Μη εφικτή
250	220.6	0.50	2.00	0.13	Μη εφικτή
280	247.0	0.50	2.00	0.10	Μη εφικτή

Εφικτές διάμετροι για Q = 5 L/s

Διάμετρος εμπορίου (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)	Κόστος ανά μ.μ. (€/m)	Κόστος κλάδου (€)	f	h_f (m)
90	79.0	11.7	1 872	0.04180	4.49
110	97.0	15.4	2 464	0.03927	1.51
125	110.2	18.6	2 976	0.03789	0.77

Κόστη και ενεργειακές απώλειες για το σύνολο των εφικτών διαμέτρων (Q = 5 L/s, L = 160 m)

Εφαρμογή 2: Έλεγχος ταχυτήτων για καθορισμό εφικτών διαμέτρων – Κλάδος 4

Διάμετρος εμπορίου (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)	Vmin (m/s)	Vmax (m/s)	V (m/s)	Εφικτή
90	79.0	0.50	1.55	1.02	Εφικτή
110	97.0	0.50	1.55	0.68	Εφικτή
125	110.2	0.50	1.55	0.52	Εφικτή
140	123.6	0.50	1.55	0.42	Μη εφικτή
160	141.2	0.50	1.85	0.32	Μη εφικτή
200	176.4	0.50	1.85	0.20	Μη εφικτή
225	198.6	0.50	2.00	0.16	Μη εφικτή
250	220.6	0.50	2.00	0.13	Μη εφικτή
280	247.0	0.50	2.00	0.10	Μη εφικτή

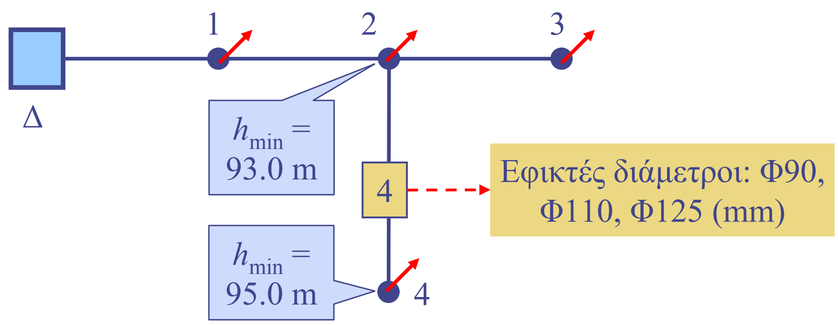
Εφικτές διάμετροι για Q = 5 L/s

Μεγαλύτερο μήκος σε σχέση με τον κλάδο 3

Διάμετρος εμπορίου (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)	Κόστος ανά μ.μ. (€/m)	Κόστος κλάδου (€)	f	h_f (m)
90	79.0	11.7	2 340	0.04180	5.61
110	97.0	15.4	3 080	0.03927	1.89
125	110.2	18.6	3 720	0.03789	0.96

Κόστη και ενεργειακές απώλειες για το σύνολο των εφικτών διαμέτρων (Q = 5 L/s, L = 200 m)

Εφαρμογή 2: Επίλυση BDP – Στάδιο 4

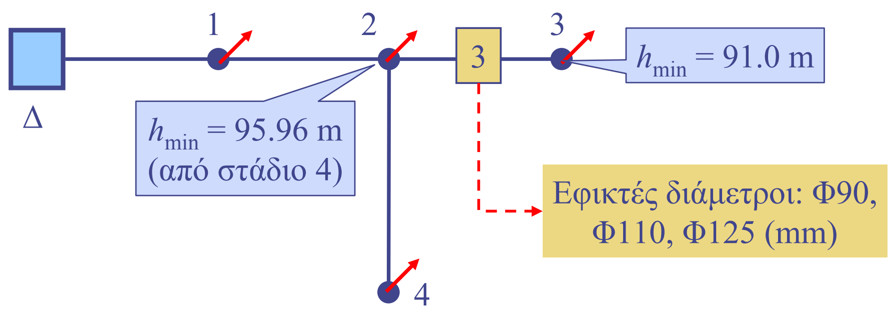


- Μεταβλητή ελέγχου = διάμετρος κλάδου 4
- Εξίσωση κατάστασης: $h_{4(\text{ανάντη})} = h_{4(\text{κατάντη})} - h_f(D_4)$
- Θεωρούμε το ελάχιστο ενεργειακό υψόμετρο κατάντη ($h_{4(\text{κατάντη})}$ = 95.0 m)

hκατάντη	D4	h4	g4(D4)
95.00	90	100.61	2 340
	110	96.89	3 080
	125	95.96	3 720

Ελάχιστο ενεργειακό υψόμετρο ανάντη κόμβου

Εφαρμογή 2: Επίλυση BDP – Στάδιο 3



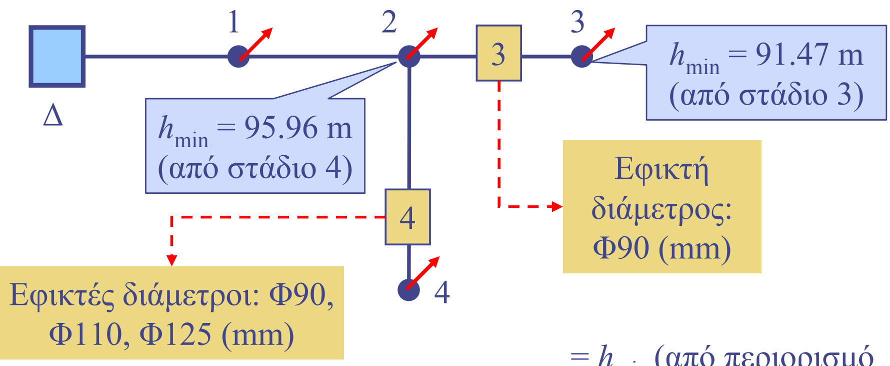
- Μεταβλητή ελέγχου = διάμετρος κλάδου 3
- Εξίσωση κατάστασης: $h_{3(\text{ανάντη})} = h_{3(\text{κατάντη})} - h_f(D_3)$
- Θεωρούμε το ελάχιστο ενεργειακό υψόμετρο κατάντη ($h_{3(\text{κατάντη})}$ = 91.0 m)

hκατάντη	D3	h3	g3(D3)	
91.00	90	95.49	1 872	Μη εφικτή
	110	92.51	2 464	Μη εφικτή
	125	91.77	2 976	Μη εφικτή

hκατάντη	D3	h3	g3(D3)	
91.47	90	95.96	1 872	Βέλτιστη

Επειδή απορρίπτονται όλες οι εφικτές λύσεις αν εξαντληθεί ο περιορισμός ελάχιστης πίεσης κατάντη, θεωρείται το ελάχιστο ενεργειακό υψόμετρο του ανάντη κόμβου (με την ελάχιστη διάμετρο)

Εφαρμογή 2: Επίλυση BDP – Μίξη σταδίων 4 και 3

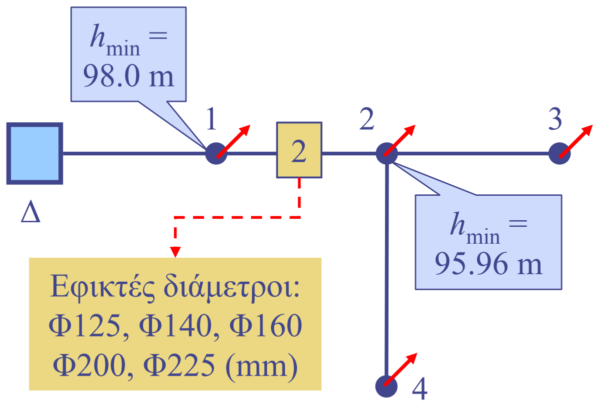


= h_{min} (από περιορισμό πίεσης υδροστομίου)

h4* = h3*	D4*	D3*	h4, κατ.*	h3, κατ.*	g4(D4)	g3(D3)	g4 + g3
100.61	90	90	95.00	96.12	2 340	1 872	4 212
96.89	110	90	95.00	92.40	3 080	1 872	4 952
95.96	125	90	95.00	91.47	3 720	1 872	5 592

Εξασφαλίζεται το ελάχιστο ενεργειακό υψόμετρο του κόμβου 2, με εφαρμογή των μέγιστων εφικτών διαμέτρων (D_4 = Φ125 mm, D_3 = Φ90 mm)

Εφαρμογή 2: Επίλυση BDP – Στάδιο 2 – Έλεγχος διαμέτρων



ηκατάντη	D2	h2	Έλεγχος
100.61	125	105.70	
	140	103.38	
	160	101.98	
	200	101.03	
	225	100.84	
96.89	125	101.98	
	140	99.66	
	160	98.26	
	200	97.31	Μη εφικτή
	225	97.12	Μη εφικτή
95.96	125	101.05	
	140	98.73	
	160	97.33	Μη εφικτή
	200	96.39	Μη εφικτή
	225	96.19	Μη εφικτή

- Μεταβλητή ελέγχου = διάμετρος κλάδου 2
- Εξίσωση κατάστασης: $h_{2(\text{ανάντη})} = h_{2(\text{κατάντη})} - h_f(D_2)$
- Απορρίπτονται όλες οι λύσεις που παραβιάζουν τον περιορισμό ελάχιστου ενεργειακού υψομέτρου του ανάντη κόμβου (h_{min} = 98.0 m) για τις οποίες προκύπτει κάποια μεγαλύτερη κατάντη διάμετρος ($D_2 < D_{\text{κατάντη}}$).

Εφαρμογή 2: Επίλυση BDP – Στάδιο 2 – Υπολογισμός κόστους

hκατάντη	D2	h2	g2(D2)	f*	f2*
100.61	125	105.70	2 232	4 212	6 444
100.61	140	103.38	2 568	4 212	6 780
100.61	160	101.98	2 844	4 212	7 056
100.61	200	101.03	4 044	4 212	8 256
100.61	225	100.84	4 560	4 212	8 772
96.89	125	101.98	2 232	4 952	7 184
96.89	140	99.66	2 568	4 952	7 520
96.89	160	98.26	2 844	4 952	7 796
95.96	125	101.05	2 232	5 592	7 824
95.96	140	98.73	2 568	5 592	8 160

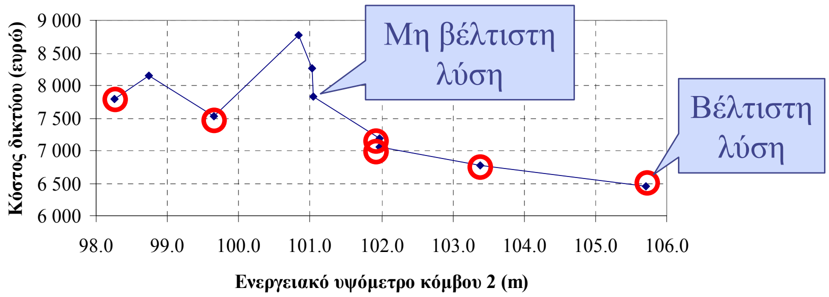
- Αθροίζεται το κόστος των διαμέτρων του κλάδου 2 (= συνάρτηση επιστροφής σταδίου 2) με το συνολικό κόστος των προηγούμενων σταδίων.
- Οι εφικτές λύσεις κατατάσσονται κατά **φθίνουσα σειρά** ως προς το ενεργειακό υψόμετρο του ανάντη κόμβου 2, ώστε να ελεγχθεί αν το αντίστοιχο κόστος σχηματίζει μονότονα αύξουσα καμπύλη.

Εφαρμογή 2: Επίλυση BDP – Στάδιο 2 – Έλεγχος καμπύλης κόστους

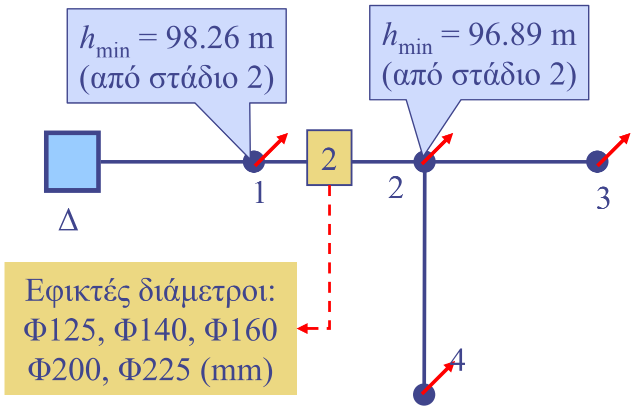
Διατεταγμένο σε φθίνουσα σειρά

hκατάντη	D2	h2	g2(D2)	f*	f2*
100.61	125	105.70	2 232	4 212	6 444
100.61	140	103.38	2 568	4 212	6 780
100.61	160	101.98	2 844	4 212	7 056
96.89	125	101.98	2 232	4 952	7 184
95.96	125	101.05	2 232	5 592	7 824
100.61	200	101.03	4 044	4 212	8 256
100.61	225	100.84	4 560	4 212	8 772
96.89	140	99.66	2 568	4 952	7 520
95.96	140	98.73	2 568	5 592	8 160
96.89	160	98.26	2 844	4 952	7 796

Μη βέλτιστο, αφού υπάρχει πιο οικονομική λύση σε χαμηλότερο ενεργειακό υψόμετρο (f_2^* = 7520 €, για h_2 = 99.66 m)



Εφαρμογή 2: Επίλυση BDP – Στάδιο 2 – Πίνακας βέλτιστων λύσεων



hκατάντη	D2	h2	g2(D2)	f*	f2*
100.61	125	105.70	2 232	4 212	6 444
100.61	140	103.38	2 568	4 212	6 780
100.61	160	101.98	2 844	4 212	7 056
96.89	125	101.98	2 232	4 952	7 184
96.89	140	99.66	2 568	4 952	7 520
96.89	160	98.26	2 844	4 952	7 796

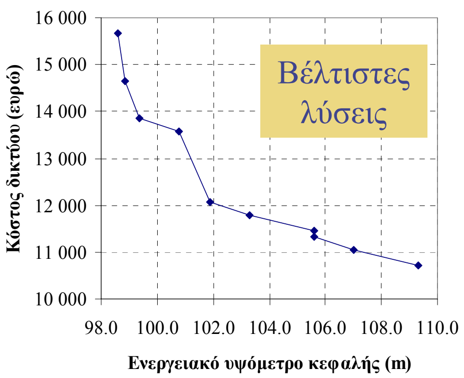
Εφαρμογή 2: Επίλυση BDP – Στάδιο 1 – Έλεγχος διαμέτρων και υπολογισμός κόστους

- Μεταβλητή ελέγχου = διάμετρος κλάδου 1
- Εξίσωση κατάστασης: $h_{1(\text{ανάντη})} = h_{1(\text{κατάντη})} - h_f(D_1)$
- Δεν τίθεται περιορισμός ενεργειακού υψομέτρου του ανάντη κόμβου (ελεύθερη τοποθέτηση κατώτατης στάθμης ύδατος δεξαμενής).
- Όλες οι λύσεις είναι εφικτές από πλευράς διαμέτρων (ισχύει $D_1 \geq D_{\text{κατάντη}}$).
- Απαιτείται έλεγχος μόνο ως προς τη σχέση ενεργειακού υψομέτρου-κόστους.

hκατάντη	D1	h1	g1(D1)	f*	f1*
105.70	160	109.33	4 266	6 444	10 710
	200	106.82	6 066	6 444	12 510
	225	106.30	6 840	6 444	13 284
	250	106.05	7 866	6 444	14 310
103.38	160	107.01	4 266	6 780	11 046
	200	104.50	6 066	6 780	12 846
	225	103.98	6 840	6 780	13 620
	250	103.73	7 866	6 780	14 646
101.98	160	105.61	4 266	7 056	11 322
	200	103.10	6 066	7 056	13 122
	225	102.58	6 840	7 056	13 896
	250	102.33	7 866	7 056	14 922
101.98	160	105.61	4 266	7 184	11 450
	200	103.10	6 066	7 184	13 250
	225	102.58	6 840	7 184	14 024
	250	102.32	7 866	7 184	15 050
99.66	160	103.29	4 266	7 520	11 786
	200	100.78	6 066	7 520	13 586
	225	100.26	6 840	7 520	14 360
	250	100.00	7 866	7 520	15 386
98.26	160	101.89	4 266	7 796	12 062
	200	99.38	6 066	7 796	13 862
	225	98.86	6 840	7 796	14 636
	250	98.60	7 866	7 796	15 662

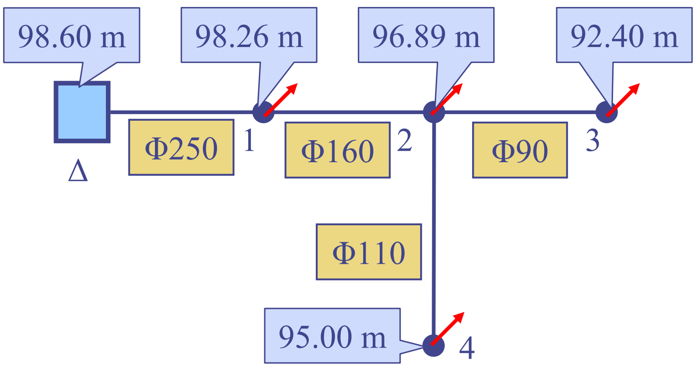
Εφαρμογή 2: Επίλυση BDP – Στάδιο 1 – Έλεγχος καμπύλης κόστους

- Πλήθος λύσεων = 10
- Εύρος ενεργειακών υψομέτρων κεφαλής από +98.26 έως +105.70 m.
- Εύρος κόστους δικτύου από 10 710 έως 15 662 €.



hκατάντη	D1	h1	g1(D1)	f*	f1*
105.70	160	109.33	4 266	6 444	10 710
103.38	160	107.01	4 266	6 780	11 046
105.70	200	106.82	6 066	6 444	12 510
105.70	225	106.30	6 840	6 444	13 284
105.70	250	106.05	7 866	6 444	14 310
101.98	160	105.61	4 266	7 056	11 322
101.98	160	105.61	4 266	7 184	11 450
103.38	200	104.50	6 066	6 780	12 846
103.38	225	103.98	6 840	6 780	13 620
103.38	250	103.73	7 866	6 780	14 646
99.66	160	103.29	4 266	7 520	11 786
101.98	200	103.10	6 066	7 056	13 122
101.98	200	103.10	6 066	7 184	13 250
101.98	225	102.58	6 840	7 056	13 896
101.98	225	102.58	6 840	7 184	14 024
101.98	250	102.33	7 866	7 056	14 922
101.98	250	102.32	7 866	7 184	15 050
98.26	160	101.89	4 266	7 796	12 062
99.66	200	100.78	6 066	7 520	13 586
99.66	225	100.26	6 840	7 520	14 360
99.66	250	100.00	7 866	7 520	15 386
98.26	200	99.38	6 066	7 796	13 862
98.26	225	98.86	6 840	7 796	14 636
98.26	250	98.60	7 866	7 796	15 662

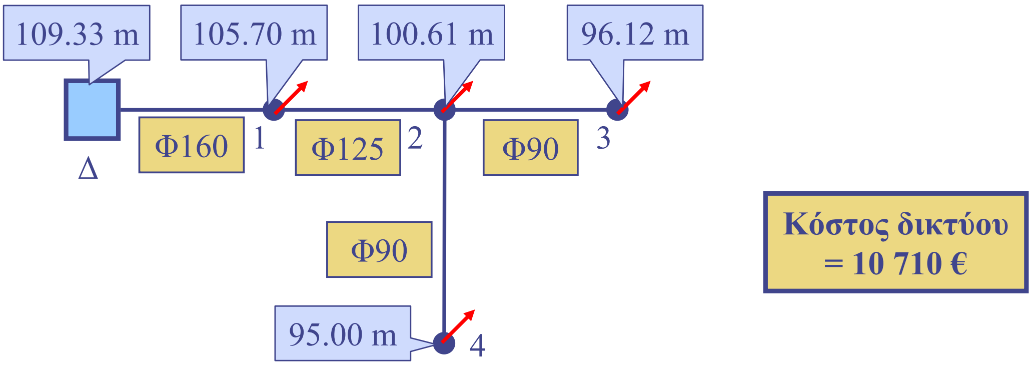
Εφαρμογή 2: Ανίχνευση βέλτιστης λύσης για ελάχιστο ενεργειακό υψόμετρο κεφαλής



Κόστος δικτύου = 15 662 €

Κλάδος	Ενεργειακό υψόμετρο ανάντη κόμβου (m)	Ενεργειακό υψόμετρο κατάντη κόμβου (m)	Διάμετρος (mm)
1	98.60	98.26	Φ250
2	98.26	96.89	Φ160
3	96.89	92.40	Φ90
4	96.89	95.00	Φ110

Εφαρμογή 2: Ανίχνευση βέλτιστης λύσης για μέγιστο ενεργειακό υψόμετρο κεφαλής



Κλάδος	Ενεργειακό υψόμετρο ανάντη κόμβου (m)	Ενεργειακό υψόμετρο κατάντη κόμβου (m)	Διάμετρος (mm)
1	109.33	105.70	Φ160
2	105.70	100.61	Φ125
3	100.61	96.12	Φ90
4	100.61	95.00	Φ90

Εφαρμογή 3: Βελτιστοποίηση αρδευτικού δικτύου που τροφοδοτείται από αντλιοστάσιο

Αν το αρδευτικό δίκτυο της εφαρμογής 2 τροφοδοτείται με απευθείας άντληση από παρακείμενο υδατόρευμα, εντοπίστε στη βέλτιστη λύση του συστήματος αντλιοστασίου-αγωγών, με βάση τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Ημερήσια διάρκεια λειτουργίας αντλιοστασίου: $t_{\mathrm{d}} = 16$ h
- Αρδευτική περίοδος: $d = 120$ ημέρες
- Υψόμετρο υδροληψίας: $h_{\alpha} = +50$ m
- Κόστος εγκατάστασης αντλιοστασίων: $c_0 = 1000$ €/HP
- Κόστος ηλεκτρικής ενέργειας: $c_{\mathrm{p}} = 0.09$ €/kWh
- Ετήσιο κόστος συντήρησης αντλιών: $c_{\mathrm{m}} = 70$ €/HP
- Βαθμός απόδοσης αντλητικού ζεύγους: $\eta = 60\%$
- Διαθέσιμη ισχύς αντλιών: 5 HP
- Επιτόκιο αναγωγής: $i = 5.5\%$
- Ωφέλιμος χρόνος ζωής έργων ΠΜ: 40 έτη
- Ωφέλιμος χρόνος ζωής έργων Η/Μ: 20 έτη

Εφαρμογή 3: Υπολογισμός χαρακτηριστικών μεγεθών αντλιοστασίου

- Παροχή αντλιοστασίου (= παροχή αρδευτικού δικτύου):

$$Q = 20 \text{ L/s} = 0.02 \text{ m}^3\text{/s}$$

- Μανομετρικό ύψος:

$$H_\text{m} = h_0 - h_\alpha + h_\tau$$

όπου h_0 το υψόμετρο κεφαλής και h_τ οι τοπικές απώλειες ενέργειας (~ 2 m).

- Απαιτούμενη ισχύς αντλιών (σε HP) :

$$P = 13.33\ Q\ H_\text{m} / \eta$$

- Ώρες λειτουργίας ανά έτος:

$$T = 120 \times 16 = 1920 \text{ h}$$

- Ετήσιος όγκος άντλησης:

$$V = 1920 \times 3600 \times 0.02 = 138\,240 \text{ m}^3$$

- Ετήσια κατανάλωση ενέργειας (σε kWh):

$$E = 9.81\ Q\ T\ H_\text{m} / \eta$$

Εφαρμογή 3: Υπολογισμός απαιτούμενων αντλιών

- Διερεύνηση για όλο το εφικτό εύρος υψομέτρων κεφαλής, με διαβάθμιση ανά 1 m.
- Για κάθε τιμή υψομέτρου υπολογίζονται το μανομετρικό ύψος (θεωρώντας τοπικές απώλειες 2 m) και η απαιτούμενη ισχύς του αντλιοστασίου (σε HP).
- Για την παραπάνω ισχύ, υπολογίζεται ο απαιτούμενος αριθμός των αντλιών, ονομαστικής ισχύος 5 HP (προστίθεται απαραίτητα μία εφεδρική αντλία).

Μέγιστο εφικτό

Υψόμετρο κεφαλής, h0 (m)	Μανομ. ύψος, Hm (m)	Απαιτούμ. ισχύς, P (HP)	Πλήθος αντλιών	Ισχύς αντλίας (HP)	Εγκατ. ισχύς (HP)
109.33	61.33	27.26	7	5	35
108.00	60.00	26.67	7	5	35
107.00	59.00	26.22	7	5	35
106.00	58.00	25.78	7	5	35
105.00	57.00	25.33	7	5	35
104.00	56.00	24.89	6	5	30
103.00	55.00	24.44	6	5	30
102.00	54.00	24.00	6	5	30
101.00	53.00	23.56	6	5	30
100.00	52.00	23.11	6	5	30
99.00	51.00	22.67	6	5	30
98.60	50.60	22.49	6	5	30

Ελάχιστο εφικτό

Εφαρμογή 3: Υπολογισμός ετήσιων οικονομικών μεγεθών αντλιοστασίου

- **Ετήσιο κόστος άντλησης** = ετήσια κατανάλωση ενέργειας (σε kWh) × 0.09 €/kWh
- **Πάγιο κόστος αντλιών** = εγκατεστημένη ισχύς (σε HP) × 1000 €/HP → αναγωγή σε ετήσια βάση, με βάση το χρόνο ζωής (20 έτη) και το επιτόκιο αναγωγής (5.5%)
- **Ετήσιο κόστος συντήρησης** = εγκατεστημένη ισχύς (σε HP) × 70 €/HP

Μανομ. ύψος, Hm (m)	Ετήσια κατανάλ. ενέργειας, E (kWh)	Ετήσιο κόστος άντλησης (€)	Εγκατ. ισχύς (HP)	Κόστος αντλιών (€)	Ετήσια απόσβεση κεφαλαίου (€)	Ετήσιο κόστος συντήρησης (€)	Ολικό ετήσιο κόστος (€)
61.33	38 507	3 466	35	35 000	2 929	2 450	8 844
60.00	37 670	3 390	35	35 000	2 929	2 450	8 769
59.00	37 043	3 334	35	35 000	2 929	2 450	8 713
58.00	36 415	3 277	35	35 000	2 929	2 450	8 656
57.00	35 787	3 221	35	35 000	2 929	2 450	8 600
56.00	35 159	3 164	30	30 000	2 510	2 100	7 775
55.00	34 531	3 108	30	30 000	2 510	2 100	7 718
54.00	33 903	3 051	30	30 000	2 510	2 100	7 662
53.00	33 276	2 995	30	30 000	2 510	2 100	7 605
52.00	32 648	2 938	30	30 000	2 510	2 100	7 549
51.00	32 020	2 882	30	30 000	2 510	2 100	7 492
50.60	31 771	2 859	30	30 000	2 510	2 100	7 470

Εφαρμογή 3: Υπολογισμός ετήσιων οικονομικών μεγεθών δικτύου

- Αναγωγή του κόστους των αγωγών του δικτύου, με βάση τον τύπο του συντελεστή παρούσας αξίας (Προσοχή: Οι αγωγοί είναι έργα Πολιτικού Μηχανικού, οπότε ως χρόνος ζωής λαμβάνονται τα **40 έτη**).

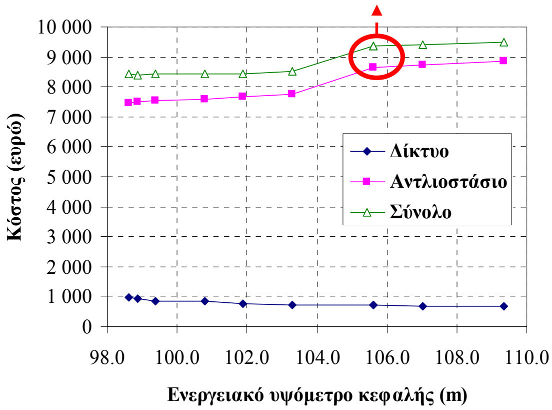
Υψόμετρο κεφαλής, h0 (m)	Κόστος αγωγών (€)	Ετήσια απόσβεση (€)
109.33	10 710	667
107.01	11 046	688
105.61	11 322	706
105.61	11 450	714
103.29	11 786	735
101.89	12 062	752
100.78	13 586	847
99.38	13 862	864
98.86	14 636	912
98.60	15 662	976

Εφαρμογή 3: Βελτιστοποίηση ολικού κόστους συστήματος δικτύου-αντλιοστασίου

- Υπολογισμός ετήσιας απόσβεσης κόστους αγωγών δικτύου και αντλιοστασίου.
- Η βέλτιστη λύση είναι πολύ κοντά στο ελάχιστο εφικτό ενεργειακό υψόμετρο.
- Βέλτιστες διάμετροι αγωγών: $D_1^* = \Phi 225$ mm, $D_2^* = \Phi 160$ mm, $D_3^* = \Phi 90$ mm, $D_4^* = \Phi 110$ mm.

Υψόμετρο κεφαλής, h0 (m)	Μανομ. ύψος, Hm (m)	Κόστος δικτύου (€)	Κόστος αντλιοστ. (€)	Ολικό κόστος (€)
109.33	61.33	667	8 844	9 512
107.01	59.01	688	8 713	9 401
105.61	57.61	706	8 656	9 362
105.61	57.61	714	8 656	9 370
103.29	55.29	735	7 775	8 509
101.89	53.89	752	7 662	8 413
100.78	52.78	847	7 605	8 452
99.38	51.38	864	7 549	8 413
98.86	50.86	912	7 492	8 404
98.60	50.60	976	7 470	8 446

Απαιτείται εγκατάσταση μιας επιπλέον αντλίας



Δυναμικός προγραμματισμός: Τελικά σχόλια

- Πρόκειται για **μέθοδο απαρίθμησης**, με τη διαφορά ότι εξοικονομείται σημαντικός υπολογιστικός φόρτος λόγω της **απόρριψης των μη εφικτών λύσεων**.
- Επειδή το πρόβλημα διασπάται σε στάδια, το **πλήθος των υπολογισμών** αυξάνει **γραμμικά** (συναρτήσει των σταδίων) και όχι εκθετικά (συναρτήσει των μεταβλητών ελέγχου), όπως συμβαίνει στην εξονυχιστική απαρίθμηση.
- Ο **χειρισμός των περιορισμών** γίνεται ρητά, με συνέπεια να μην καθυστερεί η διαδικασία εξερευνώντας μη εφικτές περιοχές.
- Ο εντοπισμός της **ολικά βέλτιστης λύσης** είναι εγγυημένος, σε αντίθεση με τις μη γραμμικές μεθόδους, που κινδυνεύουν να εγκλωβιστούν σε τοπικά ακρότατα.
- Η **μαθηματική διατύπωση** του προβλήματος (διάσπαση σε στάδια αποφάσεων, διακριτοποίηση μεταβλητών κατάστασης, αθροιστική στοχική συνάρτηση) δεν είναι συμβατή με τα χαρακτηριστικά των περισσότερων πραγματικών συστημάτων.
- Σε προβλήματα **συνεχών μεταβλητών**, απαιτείται πυκνή διακριτοποίηση για την επίτευξη ικανοποιητικής ακρίβειας, με συνέπεια τη δραματική αύξηση του υπολογιστικού φόρτου.
- Η διαδικασία **δεν τυποποιείται** (όπως στους αλγορίθμους βελτιστοποίησης) – απαιτείται συγκεκριμένη διαμόρφωση για κάθε πρόβλημα.

Βιβλιογραφία

- Bellman, R., *Adaptive Control Processes: A Guided Tour*, Princeton University Press, 1961.
- Mays, L. W., and Y.-K. Tung, *Hydrosystems Engineering and Management*, McGraw-Hill, New York, 1992 (κεφάλαιο 4).
- Pierre, D. A., *Optimization Theory with Applications*, Dover Publications, New York, 1986.
- Βαμβακερίδου, Λ., *Σημειώσεις μαθήματος Εγγειοβελτιωτικά Έργα*, Αθήνα, 1997.
- Ναλμπάντης, Ι., Εισαγωγή στο δυναμικό προγραμματισμό, *Σημειώσεις μαθήματος Βελτιστοποίηση Συστημάτων Υδατικών Πόρων*, Αθήνα, 2005.