

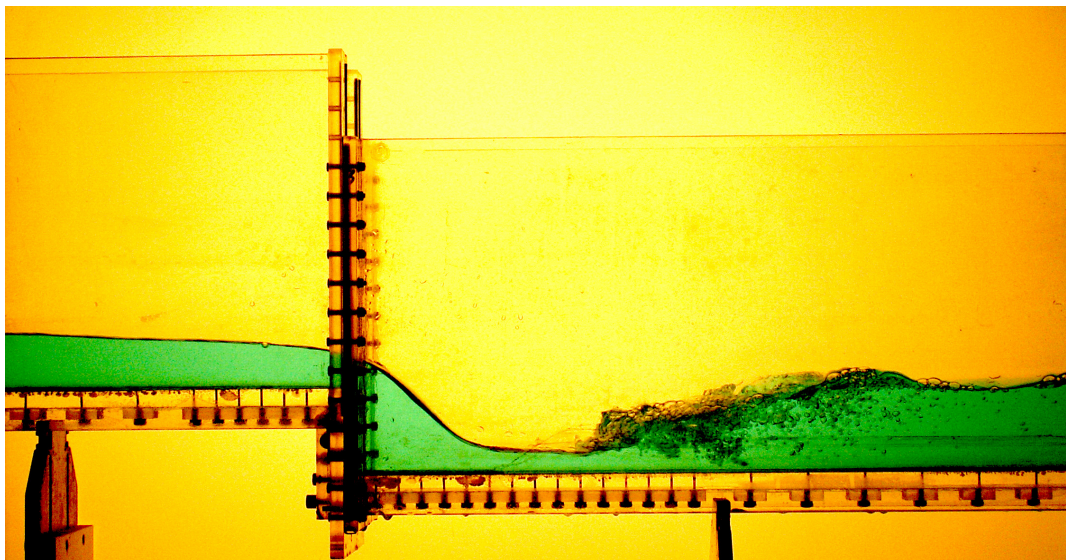


**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS**

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ  
& ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING  
DEPARTMENT OF WATER RESOURCES AND  
ENVIRONMENTAL ENGINEERING  
LABORATORY OF APPLIED HYDRAULICS

**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ**  
**ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΥΠΟ ΠΙΕΣΗ &**  
**ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ**



ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ: Έκδοση 3  
Ακαδημαϊκό Έτος 2014 - 2015

Παναγιώτης Ν. Παπανικολάου, Ph.D.





ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΥΠΟ ΠΙΕΣΗ  
& ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ: Έκδοση 3  
Ακαδημαϊκό Έτος 2014 - 2015

Παναγιώτης Ν. Παπανικολάου, Ph.D.

24.03.2011

... κι αν τα τρένα τρέχουν σε τροχιές  
τ' άστρα καβαλάνε οι ψυχές ...

Νικόλας Άσιμος – Ούζα

(από τη 'Βιομηχανία του πεζοδρομίου' ή από  
Παράνομη κασέτα Νο 000007, "Πάλι Στην  
Ξεφτίλα", Πλευρά Α, Κομμάτι 4, 1986)

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΥΠΟ ΠΙΕΣΗ & ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ  
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ  
© Π. Ν. Παπανικολάου 2014  
Επ. Καθηγητής Σχολής Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι περιληπτικές αυτές σημειώσεις αποτελούν ένα επί πλέον βοήθημα για το Μάθημα Κορμού 'Εφαρμοσμένη Υδραυλική' του 5<sup>ου</sup> Εξαμήνου Σπουδών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ. Καλύπτουν σε γενικές γραμμές την ύλη του μαθήματος, σε συνδυασμό με τα συγγράμματα που διατίθενται, καθώς επίσης και τις ασκήσεις που δίδονται για επίλυση στο σπίτι. Με δεδομένο ότι ένας σπουδαστής παρακολουθεί ανελλιπώς τις παραδόσεις, ο απαιτούμενος συνολικός χρόνος για μελέτη και εργασία στο σπίτι δεν πρέπει να υπερβαίνει τις 50 ώρες.

Οι σημειώσεις έχουν γραφτεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε αφού ο σπουδαστής κατανοήσει τις βασικές αρχές, να έχει τη δυνατότητα εφαρμογής τους σε επίλυση των προβλημάτων υδραυλικής, αναπτύσσοντας προσωπικές μεθοδολογίες υπολογισμού των ζητούμενων παραμέτρων της ροής.

Οι σημειώσεις αποτελούνται από τις παρακάτω ενότητες:

- (1) Αγωγοί υπό πίεση, όπου παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία και μερικά λυμένα παραδείγματα σε κλειστούς αγωγούς, υλικό απαραίτητο στους σπουδαστές για την εμπέδωση της θεωρίας.
- (2) Αγωγοί με ελεύθερη επιφάνεια, όπου παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία και μερικά λυμένα παραδείγματα σε πρισματικούς αγωγούς με ελεύθερη επιφάνεια για την εμπέδωση της αντίστοιχης θεωρίας.
- (3) Διάφορα φυλλάδια (Handouts) που συνήθιζε να δίνει ο διδάσκων παλαιότερα κατά τη διάρκεια των διαλέξεων (παραδόσεων), τα οποία ενσωματώθηκαν στο παρόν εγχειρίδιο.
- (4) Τυπολόγιο με τις βασικότερες σχέσεις και διαγράμματα που συναντώνται στο μάθημα της εφαρμοσμένης υδραυλικής, χρησιμότητα για τη γραπτή εξέταση στο τέλος του εξαμήνου.

Τα Στοιχεία Μηχανικής των Ρευστών σε συνοπτική θεώρηση θεωρούνται ως προαπαιτούμενο, για να είναι εφικτή η παρακολούθηση του μαθήματος. Έμφαση δίδεται κυρίως σε στοιχεία τύρβης και οριακής στοιβάδας (κεφάλαια 6, 7).

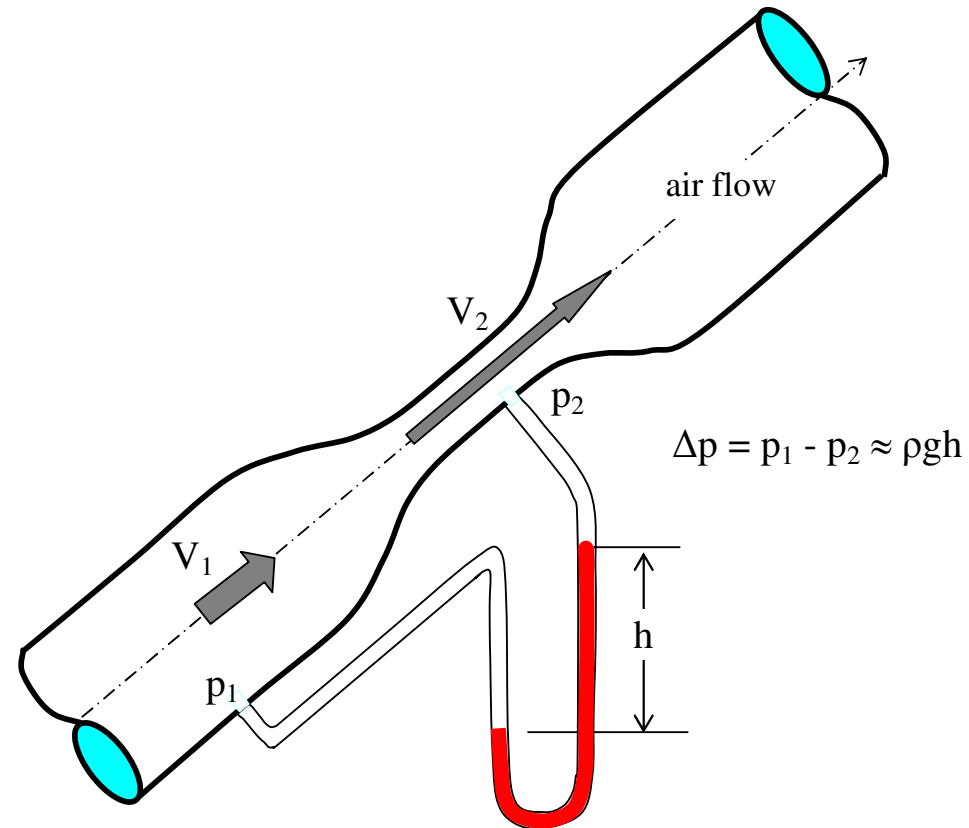
Οι σπουδαστές ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν τη βιβλιογραφία που προτείνεται και υπάρχει σχεδόν ολόκληρη στη Βιβλιοθήκη του του Τομέα Υδατικών Πόρων & Περιβάλλοντος και την Κεντρική Βιβλιοθήκη του Ιδρύματος.



## ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γκανούλης, ΙΓ, 1982. *Εισαγωγή στη Μηχανική των Ρευστών*. Θεσσαλονίκη.
2. Δημητρίου, ΙΔ, 1997. *Ρευστομηχανική, Τεύχος 1 - Εισαγωγή*. Αθήνα.
3. Δημητρίου, ΙΔ, 1995. *Εφαρμοσμένη υδραυλική, Τεύχος Α - Εισαγωγή*. Αθήνα.
4. Δημητρίου, ΙΔ, 1995. *Εφαρμοσμένη υδραυλική, Τεύχος Β - Εφαρμογές*. Αθήνα.
5. Κωτσοβίνος ΝΕ, 1983. *Υδραυλική, Τόμος πρώτος*. Ξάνθη.
6. Νουτσόπουλος, Γ 1972. *Μαθήματα θεωρητικής και εφαρμοσμένης υδραυλικής, Τεύχος Α*. Αθήνα.
7. Νουτσόπουλος, Γ 1973. *Μαθήματα θεωρητικής και εφαρμοσμένης υδραυλικής, Τεύχος Β. Ροή εις κλειστούς αγωγούς υπό πίεσιν*. Αθήνα.
8. Νουτσόπουλος, Γ 1976. *Αγωγοί με ελεύθερη επιφάνεια, Ανοικτοί αγωγοί, Σημειώσεις*, ΕΜ Πολυτεχνείο, Αθήνα.
9. Νουτσόπουλος, Γ & Χριστοδούλου, Γ, 1996. *Μαθήματα Μηχανικής των Ρευστών για Πολιτικούς Μηχανικούς*. Α' Έκδοση. ΕΜ Πολυτεχνείο.
10. Παπαϊωάννου, ΑΘ, 1976. *Μηχανική των ρευστών, Τόμοι Ι και ΙΙ*. Αθήνα.
11. Ξανθόπουλος, ΘΣ, 1975. *Μόνιμος ροή υπό πίεσιν εντός κυλινδρικών αγωγών. Τόμος ΙΙ, Εγχειρίδιον γενικής υδραυλικής*. Θεσσαλονίκη.
12. Τσαγγάρης, Σ, 1995. *Μηχανική των ρευστών*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
13. Bakhmeteff, ΒΑ, 1932. *Hydraulics of open channels*. McGraw-Hill.
14. Brater, ΕF and King, ΗW, 1976. *Handbook of hydraulics*. Sixth Edition, McGraw-Hill.
15. Chow, VΤ, 1973. *Open-channel hydraulics*. McGraw-Hill.
16. Chow, VΤ, 1964, Editor in Chief. *Handbook of applied hydrology*. McGraw-Hill.
17. Currie, ΙG, 1974. *Fundamental mechanics of fluids*. McGraw-Hill.
18. Jain, ΑK, 1976. Accurate explicit equation for friction factor. J. Hyd. Eng. ASCE,
19. Daily, JW, & Harlemman, DRF, 1966. *Fluid dynamics*. Addison-Wesley.
20. French, RH, 1985. *Open-channel hydraulics*. McGraw-Hill.
21. Henderson, FM, 1966. *Open channel flow*. Macmillan.
22. Kumar, SG, 1993. *Transitional flow in channel junctions*. J. Hyd. Res., 31(5), 601-604.
23. Monin, AS and Yaglom, AM (1971). *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of turbulence. Volume 1*, MIT Press.
24. Rouse, H, 1961. *Fluid mechanics for hydraulic engineers*. Dover.
25. Schlichting, H, 1979. *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill.
26. Streeter, VL, 1961. *Handbook of fluid dynamics*. McGraw-Hill.
27. Sturm, TW, 2001. *Open channel hydraulics*. McGraw-Hill.
28. Tullis, JP, (Editor) 1971. *Control of flow in closed conduits*. Fort Collins, Colorado.
29. Vardy, A, 1990. *Fluid principles*. McGraw-Hill.
30. Viessman, Jr, W, & Hammer, MJ, 1993. *Water supply and pollution control*. Harper Collins.
31. White, FM, 1994. *Fluid mechanics*. 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill.





# ΑΓΩΓΟΙ ΥΠΟ ΠΙΕΣΗ

Παναγιώτης Ν. Παπανικολάου, Ph.D.

Αθήνα 2014





## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

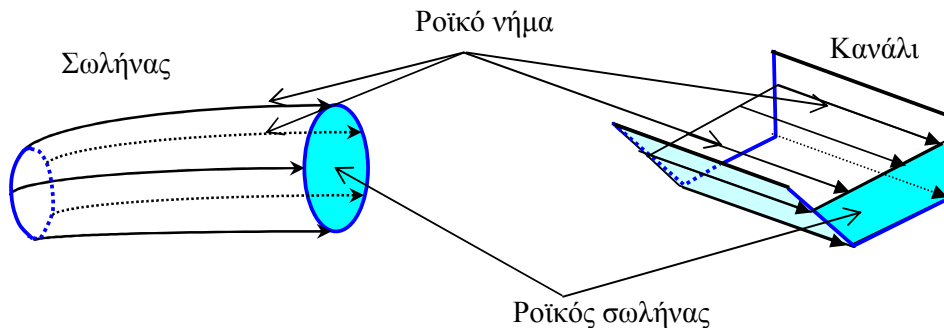
|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.  | ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....   | 1  |
| 1.1 | Σωληνοειδείς (μονοδιάστατες) ροές .....                                 | 1  |
| 1.2 | Ροή σε κλειστούς (υπό πίεση) αγωγούς.....                               | 2  |
| 1.3 | Χαρακτηρισμός της ροής.....   | 3  |
| 1.4 | Είσοδος σε σωλήνα – ανάπτυξη τυρβώδους οριακού στρώματος.....           | 5  |
| 1.5 | Μόνιμη ομοιόμορφη ροή σε σωλήνες .....                                  | 7  |
| 1.6 | Παραδείγματα και εφαρμογές.....   | 11 |
| 1.7 | Γραμμή ενέργειας και πιεζομετρική γραμμή .....                          | 15 |
| 2.  | ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΣΕ ΣΩΛΗΝΕΣ – ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ.....                                 | 17 |
| 2.1 | Κατανομή μέσης ταχύτητας σε λείους σωλήνες.....                         | 17 |
| 2.2 | Τραχείς σωλήνες .....   | 20 |
| 2.3 | Το πείραμα του Nikuradse.....   | 21 |
| 2.4 | Κατανομή ταχυτήτων σε τραχείς σωλήνες .....                             | 22 |
| 3.  | ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΥΠΟ ΠΙΕΣΗ.....                           | 29 |
| 3.1 | Γενικά.....   | 29 |
| 3.2 | Διάγραμμα του Moody.....  | 30 |
| 3.3 | Ρητές (explicit) εξισώσεις υπολογισμού του f (Swamme & Jain, Haaland) . | 30 |
| 3.5 | Τυπικές τιμές των σταθερών υπολογισμού και τραχύτητας αγωγών .....      | 40 |
| 3.6 | Γήρανση των αγωγών ενός δικτύου.....                                    | 40 |
| 4.  | ΑΓΩΓΟΙ ΜΗ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ .....                                       | 45 |
| 5.  | ΕΜΠΕΙΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΩΛΕΙΩΝ<br>ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ..... | 51 |
| 5.1 | Τύπος του Chézy.....  | 51 |
| 5.2 | Άλλοι εμπειρικοί τύποι. ....  | 51 |
| 5.3 | Εξίσωση των Hazen - Williams .....                                      | 53 |
| 6.  | ΜΟΝΙΜΗ ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ, ΤΟΠΙΚΕΣ ΑΠΩΛΕΙΕΣ .....                         | 55 |
| 6.1 | Χαρακτηριστικά συγκλίνουσας ή αποκλίνουσας ροής.....                    | 56 |
| 6.2 | Απώλειες ενέργειας σε συγκλίνουσα και αποκλίνουσα ροή.....              | 58 |
| 6.3 | Αλλαγές κατεύθυνσης – καμπύλες και γωνίες.....                          | 65 |
| 6.4 | Δικλίδες – ρύθμιση της ροής (δες επίσης Παράρτημα Β). ....              | 65 |
| 6.5 | Ισοδύναμο μήκος – σημασία των τοπικών απωλειών.....                     | 70 |
| 7.  | ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΩΛΗΝΩΝ.....  | 71 |
| 7.1 | Ορισμοί: .....  | 72 |
| 7.2 | Υπολογισμοί συστημάτων σωλήνων. ....                                    | 72 |
| 7.3 | Αγωγοί σε σειρά.....  | 73 |
| 7.4 | Παράλληλοι αγωγοί .....   | 75 |
| 7.5 | Ισοδύναμοι αγωγοί.....  | 75 |
| 8.  | ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ.....  | 81 |
| 9.  | ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ ΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ - ΑΝΤΛΙΕΣ.....                         | 89 |
| 9.1 | Είδη αντλιών .....  | 89 |
| 9.2 | Φυγοκεντρικές αντλίες.....  | 89 |
| 9.3 | Χαρακτηριστικές καμπύλες αντλιών. ....                                  | 91 |
| 9.4 | Σημείο λειτουργίας αντλίας - δικτύου. ....                              | 92 |
| 9.5 | Παράλληλη σύνδεση αντλιών.....  | 95 |

|  |  |     |
|--|--|-----|
| 9.6                                      | Σύνδεση αντλιών σε σειρά.....  | 95  |
| 9.7                                      | Σπηλαίωση (cavitation).....  | 97  |
| 9.8                                      | Καθαρό ύψος αναρρόφησης αντλίας (Net positive suction head - NPSH) ... | 98  |
| 9.9                                      | Σίφωνα.....  | 101 |
| 10.                                      | ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ - ΑΓΩΓΟΙ ΥΠΟ ΠΙΕΣΗ.....                            | 107 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ          |  |     |
| A.1                                      | Το θεώρημα των Π του Buckingham.....                                   | 111 |
| A.2                                      | Συστηματοποίηση της εφαρμογής του θεωρήματος Π.....                    | 113 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΔΙΚΛΙΔΕΣ (ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ) |  |     |

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

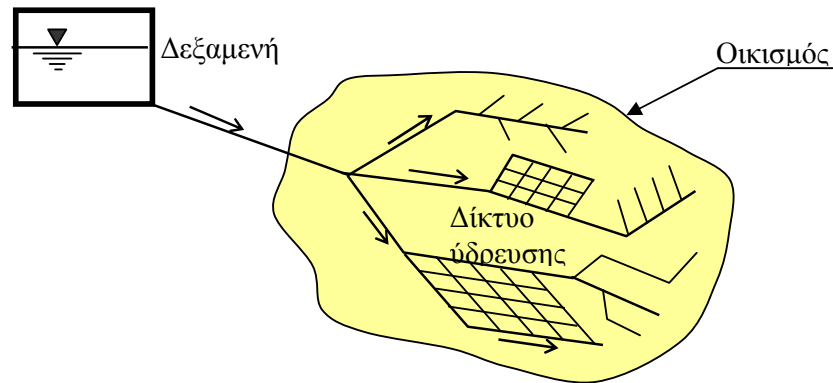
## 1.1 Σωληνοειδείς (μονοδιάστατες) ροές

Σωληνοειδής χαρακτηρίζεται η ροή ρευστού σε αγωγούς που η μορφή τους έχει το σχήμα ενός σωλήνα. Ας θυμηθούμε από τη μηχανική των ρευστών τους ορισμούς της γραμμής ροής, του ροϊκού νήματος και του ροϊκού σωλήνα, του οποίου τα τοιχώματα αποτελούνται από ροϊκά νήματα. Ο ορισμός **σωληνοειδής ροή** (Γκανούλης, 1982) είναι ταυτόσημος με τον όρο "μονοδιάστατη ροή", δηλαδή η ροή την οποία αναλύουμε σε μια μόνο διάσταση.



**Σχήμα 1.1** Σωληνοειδής ροή σε αγωγό υπό πίεση (σωλήνα) και αγωγό με ελεύθερη επιφάνεια (πρισματικό κανάλι).

Κλασικά παραδείγματα σωληνοειδών ροών αποτελούν τα εξωτερικά υδραγωγεία (αγωγοί υπό πίεση ή διώρυγες μεταφοράς νερού), τα δίκτυα ύδρευσης, τα αρδευτικά κανάλια κ.α. Η ροή σε κάθε ένα αγωγό από τους παραπάνω θεωρείται ότι είναι μονοδιάστατη (σωληνοειδής). Τα τοιχώματα ενός σωλήνα ορίζουν το ροϊκό σωλήνα, ενώ σε ένα κανάλι ο 'ροϊκός σωλήνας' αποτελείται από τη βρεχόμενη περίμετρο και την ελεύθερη επιφάνεια.



**Σχήμα 1.2** Σύστημα διανομής νερού με δίκτυο σωλήνων υπό πίεση.

Στα παραπάνω παραδείγματα οι αγωγοί του ρευστού έχουν ενιαία διατομή κατά τμήμα. Η ροή ενός ποταμού ή φυσικού υδατορρεύματος, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μονοδιάστατη (αν και η διατομή του διαφέρει καθ' όλο το μήκος) και να αναλυθεί με βάση τις αντίστοιχες αρχές.

Δύο είναι οι βασικές κατηγορίες της μονοδιάστατης (σωληνοειδούς ροής) που πρόκειται να διερευνηθούν στα κεφάλαια που ακολουθούν. (α) Οι αγωγοί υπό πίεση ή κλειστοί αγωγοί και (β) οι αγωγοί με ελεύθερη επιφάνεια ή ανοικτοί αγωγοί.



**Σχήμα 1.3** Ένας ποταμός είναι αγωγός με ελεύθερη επιφάνεια που η εγκάρσια διατομή του μεταβάλλεται χωρικά.

## 1.2 Ροή σε κλειστούς (υπό πίεση) αγωγούς

Ως ροή υπό πίεση ορίζουμε αυτή στην οποία το ρευστό καλύπτει ολόκληρη τη διατομή του αγωγού, ενώ η πίεση είναι διαφορετική από την ατμοσφαιρική. Δεν υπάρχει ελεύθερη επιφάνεια αφού τα όρια της ροής συμπίπτουν με τα τοιχώματα του αγωγού. Με **αγωγούς υπό πίεση** μεταφέρουμε νερό για ύδρευση, άρδευση ή για την κίνηση των υδροδυναμικών μηχανών (υδροστροβίλων). Ορισμοί που θα χρησιμοποιούνται στο εξής για την περιγραφή της ροής σε αγωγούς υπό πίεση δίδονται στη συνέχεια.

**Ομοιόμορφος:** Ονομάζεται ο κλειστός (υπό πίεση) αγωγός με σταθερή διατομή και ενιαία κλίση.

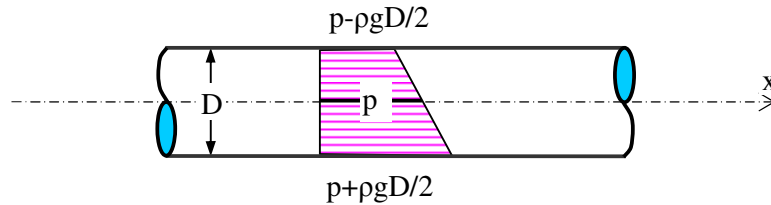
**Σωλήνας:** Ονομάζεται ο αγωγός με κυκλική διατομή

**Στη πράξη:** Συνήθως χρησιμοποιούμε κυκλικούς αγωγούς (σωλήνες) και αγωγούς ορθογωνικής ή τετραγωνικής διατομής.



**Η πίεση:** Κατανέμεται υδροστατικά, κάθετα στις γραμμές ροής (ή στην κύρια διεύθυνση του αγωγού). Συνήθως, όταν αναφερόμαστε στην πίεση, εννοούμε αυτή στον άξονα του αγωγού.

Ιδιαίτερα, υδροστατική κατανομή της πίεσης εμφανίζεται στην περιοχή μόνιμης\* και ομοιόμορφης ροής που είναι η περισσότερο συνηθισμένη περίπτωση ροής σε αγωγούς υπό πίεση. Στον οριζόντιο σωλήνα του Σχήματος 1.4 με ομοιόμορφη παράλληλη ροή, η πίεση στην κατώτερη και ανώτερη γενέτειρα του σωλήνα διαφέρει από αυτή στον άξονα κατά  $\pm \rho g D/2$  αντίστοιχα.



**Σχήμα 1.4** Υδροστατική κατανομή των πιέσεων σε ένα σωλήνα με μόνιμη ροή.

### 1.3 Χαρακτηρισμός της ροής

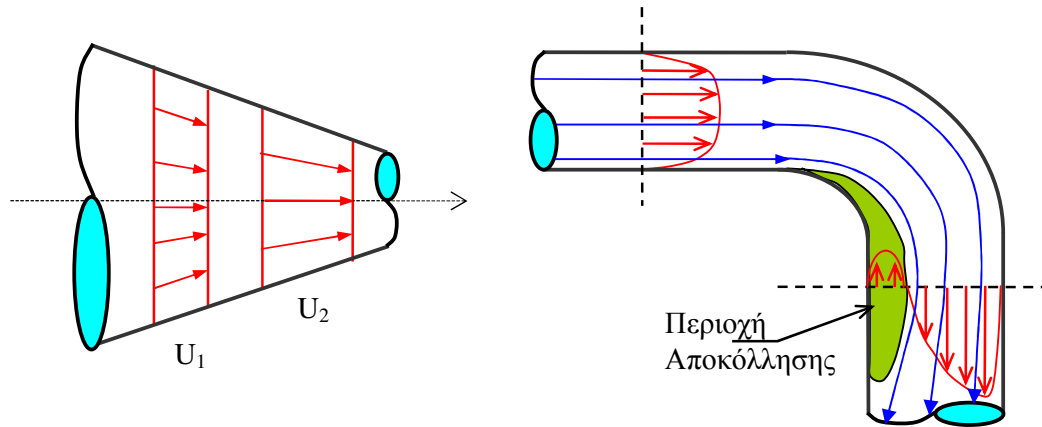
Σαν *μόνιμη ομοιόμορφη ροή* ορίζουμε τη ροή που πραγματοποιείται σε αγωγούς ικανού μήκους για την οποία: (1) Οι γραμμές ροής είναι παράλληλες μεταξύ τους, (2) Η ταχύτητα είναι σταθερή κατά μήκος μιας γραμμής ροής και (3) Η πίεση κατανέμεται υδροστατικά, κάθετα στις γραμμές ροής.

Σαν *μόνιμη ανομοιόμορφη ροή* ορίζουμε τη ροή στην οποία το διάνυσμα της ταχύτητας μεταβάλλεται κατά μήκος της γραμμής ροής (ακόμη και αν υπάρχει ομοιόμορφη τοπικά ροή, σε διαφορετικές διατομές του αγωγού). Η μόνιμη ανομοιόμορφη ροή διακρίνεται σε: (1) Επιταχυνόμενη (συγκλίνουσα) ροή, (2) Επιβραδυνόμενη (αποκλίνουσα) ροή, ή (3) Ροή σε καμπύλη.

Μόνιμη ανομοιόμορφη ροή συναντούμε κυρίως στις αλλαγές διαμέτρου του σωλήνα, σε καμπύλες αγωγών (οριζοντιογραφικές ή σε μηκοτομή αλλαγές κατεύθυνσης του αγωγού), σε συσκευές ελέγχου της ροής (μετρητές Venturi) καθώς και στην εισροή ή την εκροή από και προς δεξαμενές αντίστοιχα.

\* Μόνιμη ονομάζεται η ροή στην οποία η παροχή (και ως εκ τούτου η ταχύτητα) σε δεδομένη διατομή του αγωγού παραμένουν αμετάβλητες στο χρόνο.

Μη μόνιμη ονομάζεται η ροή στην οποία η παροχή είναι συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή  $Q=Q(t)$ . Ένα παράδειγμα είναι η ροή από δεξαμενή σε αγωγό, χωρίς προσθήκη υγρού στη δεξαμενή (άδειασμα). Εφόσον οι μεταβολές της παροχής στο χρόνο είναι αργές, η ροή που μελετάμε μπορεί να θεωρηθεί σαν μόνιμη σε δεδομένες χρονικές στιγμές (π.χ. η πλημμυρική παροχή μεγάλου ποταμού). Όταν οι μεταβολές της παροχής στο χρόνο είναι μεγάλες, επιδρούν στα δυναμικά χαρακτηριστικά της ροής (π.χ. το απότομο κλείσιμο δικλείδας δημιουργεί κύματα υπερπίεσης και υποπίεσης στον αγωγό, λόγω της αδράνειας της μάζας του ρευστού που κινείται. Έτσι ο αγωγός υπερφορτίζεται από δυνάμεις λόγω πιέσεων, το δε φαινόμενο ονομάζεται υδραυλικό πλήγμα (waterhammer) ή πλήγμα κριού.



**Σχήμα 1.5** Ροή σε κωνικό αγωγό με τοιχώματα που συγκλίνουν (αριστερά) και σε καμπύλη 90° αλλαγής διεύθυνσης (αριστερά).

Στρωτή ονομάζεται η ροή σε ένα αγωγό όταν ο αριθμός Reynolds ( $Re$ ) είναι μικρότερος από, κάποια ‘κρίσιμη’ τιμή ( $Re_c$ ). Ο αριθμός Reynolds ορίζεται ως γνωστόν από τη σχέση

$$Re = \frac{VD}{\nu},$$

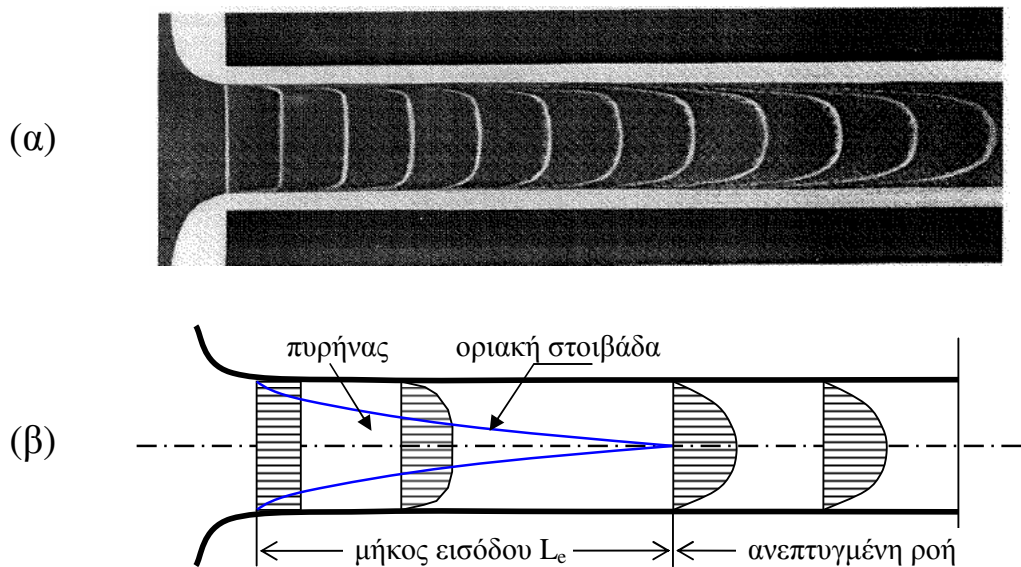
όπου  $V$  είναι κάποια χαρακτηριστική ταχύτητα (συνήθως η μέση ταχύτητα ροής στη διατομή),  $D$  είναι κάποιο χαρακτηριστικό μήκος του πεδίου ροής (συνήθως είναι η διάμετρος προκειμένου περί κυκλικού αγωγού ή κάποια άλλη χαρακτηριστική εγκάρσια κλίμακα μήκους) και  $\nu = \mu/\rho$  είναι το κινηματικό ιξώδες του ρευστού. Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds εξαρτάται από τη γεωμετρία της διατομής του αγωγού. Είναι διαφορετικός σε έναν κυκλικό αγωγό απ’ ότι σ’ ένα τριγωνικό ή ορθογωνικό που έχουν το ίδιο εμβαδόν εγκάρσιας διατομής. Η τιμή του κρίσιμου αριθμού Reynolds σε σωλήνα (κλειστό αγωγό κυκλικής διατομής) είναι περίπου 2000÷2300. Στην πράξη είναι δυνατόν να επιτύχουμε στρωτή ροή σε σωλήνα με αριθμό Reynolds έως και 10000. Η ροή όμως είναι ιδιαίτερα (υδροδυναμικά) ασταθής και η παραμικρή διαταραχή (όπως ένα κτυπηματάκι στο σωλήνα) θα τη μετατρέψει αμέσως σε τυρβώδη.

Τυρβώδης ονομάζεται η ροή για την οποία ο  $Re$  υπερβαίνει κάποια κρίσιμη τιμή  $Re_c$ . Σε κυκλικούς αγωγούς (σωλήνες) υπό πίεση συνήθως θεωρούμε ότι  $Re_c = 2000-2300$ . Στην πράξη, τα προβλήματα που αντιμετωπίζει ο Πολιτικός Μηχανικός σε σωλήνες, αφορούν τυρβώδη ροή. Πρακτικά μιλώντας, ένας σωλήνας οικιακής παροχής διαμέτρου 1.25 cm δηλαδή 1/2 in μπορεί να γεμίσει το καζανάκι στην τουαλέτα χωρητικότητας 5 L σε χρόνο μικρότερο του ενός λεπτού της ώρας. Αυτό σημαίνει ότι η μέση ταχύτητα ροής είναι τουλάχιστον 70cm/s, δηλαδή ο αριθμός  $Re=70 \times 1.25/0.01=8750 > Re_c$  ( $\nu \approx 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$  για θερμοκρασία νερού περί τους 20° C). Οι αγωγοί μεταφοράς νερού από την ‘πηγή’ στη δεξαμενή ενός οικισμού καθώς επίσης και οι αγωγοί του δικτύου ύδρευσης του οικισμού έχουν εσωτερική διάμετρο τουλάχιστον 80mm, η παροχή που μεταφέρουν είναι της τάξης μερικών L/s, η δε τιμή του αριθμού Reynolds μπορεί να κυμαίνεται από 100000 έως και μερικά εκατομμύρια. Είναι επομένως σκόπιμο να μελετήσουμε στο εξής μόνο την τυρβώδη ροή, δεδομένων των πρακτικών εφαρμογών τις οποίες έχει κατά νου ο Πολιτικός Μηχανικός.

#### 1.4 Είσοδος σε σωλήνα – ανάπτυξη τυρβώδους οριακού στρώματος

Η φωτογραφία<sup>1</sup> του Σχήματος 1.6(α) δείχνει το προφίλ (κατανομή) της αξονικής ταχύτητας σε σωλήνα όταν η ροή είναι στρωτή, εφαρμόζοντας τη μέθοδο οπτικοποίησης της ροής με φυσαλίδες υδρογόνου. Παρατηρούμε ότι η κατανομή της ταχύτητας μεταβάλλεται σαν συνάρτηση της απόστασης από τη στρογγυλευμένη διατομή εισόδου στον σωλήνα, από ορθογωνική που αντιστοιχεί σε ομοιόμορφη ροή έως παραβολική, που είναι η κατανομή ταχύτητας της μόνιμης στρωτής ροής Poiseuille. Η μετάβαση από ομοιόμορφη σε παραβολική κατανομή ταχύτητας παρουσιάζεται σχηματικά στο Σχήμα 1.6(β). Παρατηρούμε ότι σε μήκος  $L_e$  από την είσοδο του νερού αναπτύσσεται το στρωτό αξονοσυμμετρικό οριακό στρώμα στο σωλήνα, ενώ υπάρχει μια περιοχή γύρω από τον άξονα όπου η ροή είναι ομοιόμορφη (πυρήνας ή core), η δε τιμή της ομοιόμορφης ταχύτητας εκεί αυξάνεται (γιατί;) σαν συνάρτηση της απόστασης από την είσοδο. Η περιοχή  $0 < x < L_e$  ονομάζεται περιοχή εισόδου όπου η ροή είναι ανομοιόμορφη χωρικά, το δε μήκος  $L_e$  ονομάζεται μήκος εισόδου. Η περιοχή  $x > L_e$  ονομάζεται περιοχή της εγκατεστημένης, πλήρως ανεπτυγμένης μόνιμης ροής, όπου η κατανομή της αξονικής ταχύτητας παραμένει αμετάβλητη.

Το μήκος εισόδου όταν η ροή είναι στρωτή<sup>2</sup> δίδεται από τη σχέση  $L_e = (0.06Re)D$  και μπορεί να φθάσει τις 140 διαμέτρους για οριακές τιμές του αριθμού Reynolds ( $Re \leq 2300$ ).



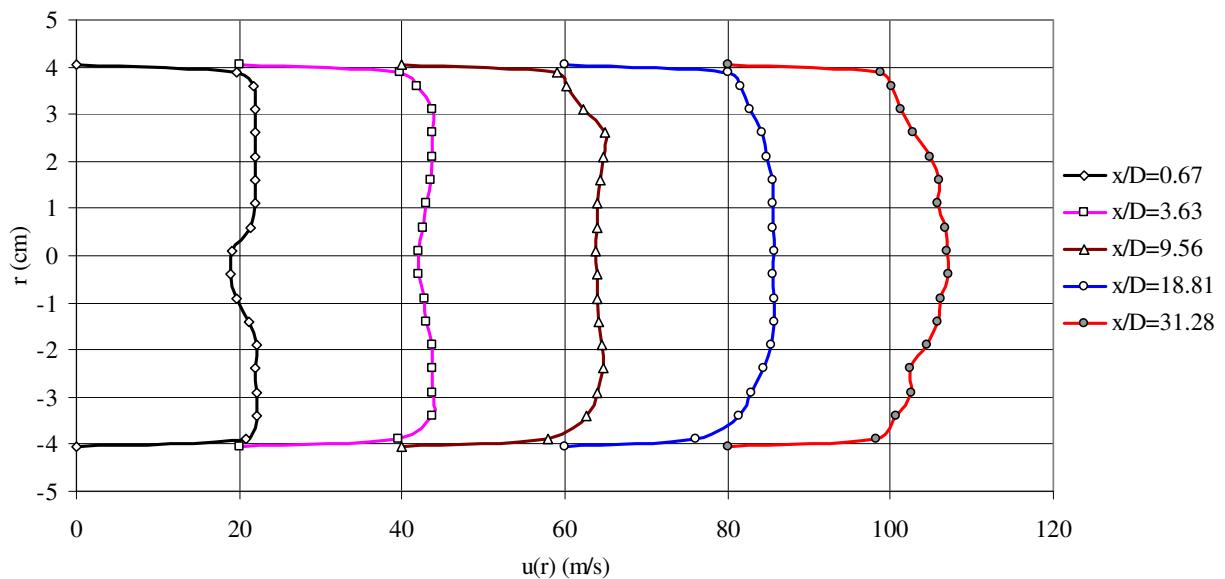
**Σχήμα 1.6** Ανάπτυξη στρωτής ροής κατά την είσοδό της σε σωλήνα, (α) οπτικοποίηση με τη μέθοδο φυσαλίδων υδρογόνου<sup>1</sup> και (β) σχηματική ανάπτυξη του οριακού στρώματος εισόδου.

<sup>1</sup> Visualized flow, 1988, Fig 13, Flow in an inlet region of a circular pipe (water, flow velocity 6 cm/s, pipe diameter 27 mm,  $Re=1.6 \times 10^3$ , hydrogen bubble method, Japan Society of Mechanical Engineers Ed., Pergamon Press.

<sup>2</sup> F. Durst, S. Ray, B. Ünsal & O.A. Bayoumi, 2005. The development lengths of laminar pipe and channel flows. Trans. ASME, **127**, 1154-1160.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 1.7 παρουσιάζονται τα προφίλ της μέσης κατά μήκος ταχύτητας σε διαφορετικές αποστάσεις από την είσοδο αέρα στην αεροσήραγγα κυκλικής διατομής διαμέτρου 8.2 cm και μήκους 3 m του Εργαστηρίου Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, που μετρήθηκαν με καθολικό σωλήνα Pitot<sup>3</sup>. Επειδή η αεροσήραγγα είναι αναρροφητικού τύπου με την αντλία τοποθετημένη στην έξοδο αυτής, έχει τοποθετηθεί στην είσοδο σταυρός από δύο λεπτά ελάσματα για την αποφυγή στροβίλισμού της ροής στο σωλήνα (μηδενική μέση εφαπτομενική ταχύτητα  $u_\theta = 0$ ). Η μέση ταχύτητα εισόδου είναι 22 m/s, ο δε αριθμός Reynolds της ροής είναι περίπου  $Re=VD/\nu \approx 119000$ .

Το μήκος ανάπτυξης του τυρβώδους οριακού στρώματος, δηλαδή η απόσταση όπου το οριακό στρώμα έχει πάχος ίσο με την ακτίνα του σωλήνα εκτιμάται από πειραματικές μετρήσεις ότι βρίσκεται σε απόσταση  $L_e=(4.40Re^{1/6})D$ , όπου η ροή θεωρείται πλήρως ανεπτυγμένη. Το μήκος ανάπτυξης ( $\approx 2.50$  m) είναι περίπου ίσο με την μέγιστη απόσταση από την είσοδο της αεροσήραγγας όπου έγιναν οι μετρήσεις (2.534 m ή 32 διαμέτρους από την είσοδο), το δε προφίλ της ταχύτητας (μαυρισμένοι κύκλοι) σε μεγαλύτερες αποστάσεις παραμένει ουσιαστικά αμετάβλητο.



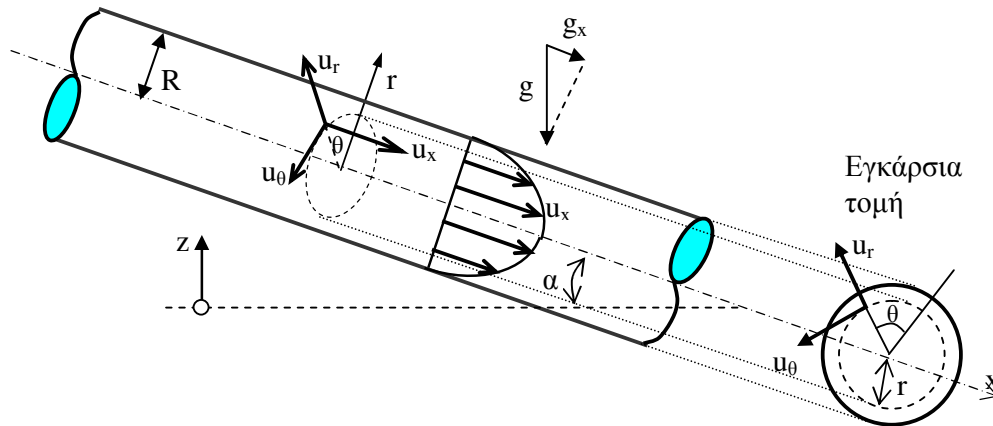
**Σχήμα 1.7** Ανάπτυξη τυρβώδους οριακού στρώματος κατά την είσοδο αέρα σε αεροσήραγγα<sup>4</sup>. Τα προφίλ της ταχύτητας είναι μετατοπισμένα κατά 20 m/s από το προηγούμενο.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τη μόνιμη ομοιόμορφη, πλήρως ανεπτυγμένη τυρβώδη ροή σε σωλήνες. Στο εξής, θα αναφερόμαστε σε τυρβώδη ροή, εκτός εάν αναφέρουμε ρητά το αντίθετο.

<sup>3</sup> Βλ. Παραρτημα Γ.

<sup>4</sup> Εργαστήριο Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής, Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

### 1.5 Μόνιμη ομοιόμορφη ροή σε σωλήνες



**Σχήμα 1.7** Σχηματικό διάγραμμα της πλήρως ανεπτυγμένης τυρβώδους ροής σε σωλήνα.

Θεωρούμε τον κεκλιμένο σωλήνα του σχήματος όπου η ροή είναι (α) μόνιμη δηλαδή  $\partial/\partial t=0$ , (β) ομοιόμορφη δηλαδή  $\partial/\partial x = 0$ , (γ) πλήρως ανεπτυγμένη, (δ) αξονοσυμμετρική με κυλινδρική συμμετρία και (ε) τυρβώδης. Οι μέσες χρονικά (time-averaged) εξισώσεις συνέχειας και ορμής ή ποσότητας της κίνησης της ροής, που ονομάζουμε εξισώσεις Reynolds, στην ακτινική και αξονική διεύθυνση μπορούν να γραφούν ως ακολούθως  $[u(r)=u_x]$ :

(α) Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_r = 0 \quad (\text{επειδή } \partial u_x / \partial x = 0) \quad (1.1)$$

(β) Εξίσωση Reynolds (ποσότητας της κίνησης ή ορμής) στην αξονική διεύθυνση

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x u_r)}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right\} - \frac{\partial(\overline{u'_x u'_r})}{\partial r} - \frac{\partial(\overline{u'_x u'_x})}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \rho r (\overline{u'_x u'_r}) \right\} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\partial(\overline{u'_x u'_x})}{\partial x} \end{aligned}$$

ή

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g_x + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau) \quad \text{όπου} \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u'_x u'_r} \quad (1.2)$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας με τους τόνους αντιστοιχούν στη διακύμανσή τους σε σχέση με τη μέση ταχύτητα στο σημείο που μελετούμε, είναι δηλαδή  $u'_x = u_x - \overline{u_x}$ .

(γ) Εξίσωση ορμής (ποσότητας της κίνησης) στην ακτινική διεύθυνση

$$\frac{\partial(u_r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_r u_x)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right\} - \frac{\partial(\overline{u'_r u'_r})}{\partial r} - \frac{\partial(\overline{u'_r u'_x})}{\partial x}$$



ή επειδή η ροή είναι μόνιμη ( $\partial/\partial t = 0$ ) και ομοιόμορφη ( $\partial/\partial x = 0$ )

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g_r - \frac{\partial(\overline{u'_r u'_r})}{\partial r} \quad (1.3)$$

Επειδή όμως οι εξισώσεις της ορμής στις διευθύνσεις  $r$  και  $\theta$  περιέχουν μόνο τον όρο της πίεσης, του οποίου οι μερικές παράγωγοι ως προς  $r$  και  $\theta$  μηδενίζονται, η εξίσωση (1.2) μπορεί να γραφτεί ως εξής (οι μερικές παράγωγοι γίνονται ολικές παράγωγοι)

$$-\frac{dp}{dx} + \rho g_x + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau) = 0. \quad (1.4)$$

Όμως  $g_x = g \sin\theta = -g (dz/dx)$ . Μετά από ανασύνταξη των όρων και διαιρώντας δια  $\rho g$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) = -\frac{1}{\rho g r} \frac{d}{dr}(\tau r). \quad (1.4a)$$

Η εξίσωση της ενέργειας ανάμεσα σε δύο κοντινές διατομές του αγωγού που απέχουν  $dx$  μεταξύ τους μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$H(x) = H(x + dx) + dH \quad (1.5)$$

ή για πεπερασμένο μήκος αγωγού  $\Delta x$  ανάμεσα σε δύο διατομές (1) και (2)

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{a(1-2)} \quad (1.6)$$

όπου

$$H_1 = \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha \frac{V_1^2}{2g} \quad (1.7)$$

και

$$H_2 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha \frac{V_2^2}{2g} \quad (1.8)$$

είναι οι αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες στις δύο διατομές. Ο διορθωτικός συντελεστής  $\alpha$  είναι απόρροια της παραδοχής της ομοιόμορφης μέσης ταχύτητας στη διατομή, η οποία στην πραγματικότητα δεν ισχύει. Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις ενέργειας μεταξύ των διατομών  $x$  και  $x + \Delta x$  θεωρώντας ότι οι μέσες ταχύτητες είναι ίδιες (από την εξίσωση συνέχειας) προκύπτει ότι

$$\Delta H_{a(1-2)} = \left( \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left( \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) \quad (1.9)$$

και σε διαφορική μορφή η εξίσωση

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (1.10)$$

Ορίζουμε την κλίση της γραμμής ενέργειας  $J_E$  της ροής ως

$$J_E = -\frac{dH}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right). \quad (1.11)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (1.4) έχουμε ότι

$$\pi = -\rho g \frac{r^2}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) + C \quad (1.12)$$

όπου η σταθερά  $C$  μηδενίζεται επειδή η διατμητική τάση  $\tau = 0$  για  $r = 0$  (λόγω αξονικής συμμετρίας της ροής). Επομένως

$$\tau = -\rho g \frac{r}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (1.13)$$

και στο όριο (τοίχωμα του αγωγού όπου  $r = R = D/2$ )

$$\tau_o = -\rho g \frac{R}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) = -\rho g \frac{D}{4} \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (1.14)$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1.11) και (1.14) προκύπτει ότι

$$J_E = \frac{4}{\rho g D} \tau_o \quad (1.15)$$

Από τη μηχανική των ρευστών υπενθυμίζουμε ότι η αντίσταση λόγω τριβών στην επιφάνεια ενός σώματος μπορεί να γραφτεί

$$\tau_o = C_f \rho \frac{V^2}{2} \quad (1.16)$$

όπου  $C_f$  είναι ο συντελεστής αντίστασης του στερεού ορίου. Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι η κλίση της γραμμής ενέργειας είναι

$$J_E = \frac{4C_f}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (1.17)$$

και ορίζοντας το συντελεστή τριβών  $f = 4C_f$ , η παραπάνω σχέση γράφεται

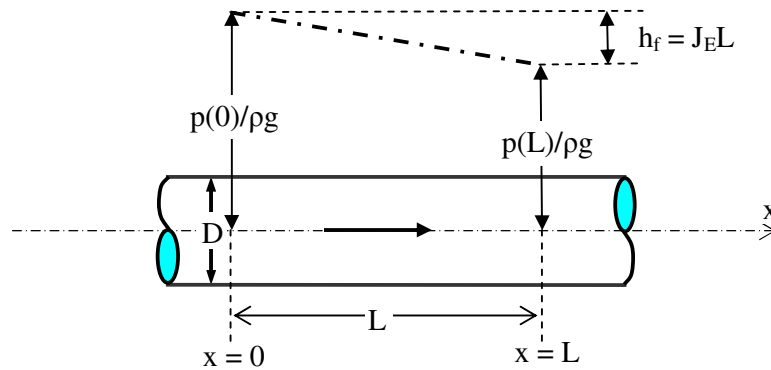
$$J_E = -\frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) = \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{σχέση των Darcy και Weisbach}). \quad (1.18)$$

Η σχέση των Darcy - Weisbach είναι γενική και αναζητούμε τρόπους υπολογισμού του συντελεστή τριβών  $f$ , έτσι ώστε από την παροχή  $Q$  σε αγωγό διαμέτρου  $D$  να μπορούμε να υπολογίζουμε τις απώλειες ενέργειας ανά μονάδα μήκους του αγωγού.

Για παράδειγμα, το συνολικό ύψος απωλειών ενέργειας στον οριζόντιο αγωγό του Σχήματος 1.8 μήκους  $L$  είναι

$$h_f = \left( \frac{p(0) - p(L)}{\rho g} \right) = J_E L = L \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (1.19)$$

Για να υπολογίσουμε επομένως το συντελεστή τριβών  $f$ , θα πρέπει να προσδιορίσουμε (1) την κατανομή ταχυτήτων στον αγωγό και (2) το συσχετισμό της διατμητικής τάσης  $\tau_o$  στο όριο με την κατανομή των ταχυτήτων τόσο στη στρωτή όσο και στην τυρβώδη ροή.

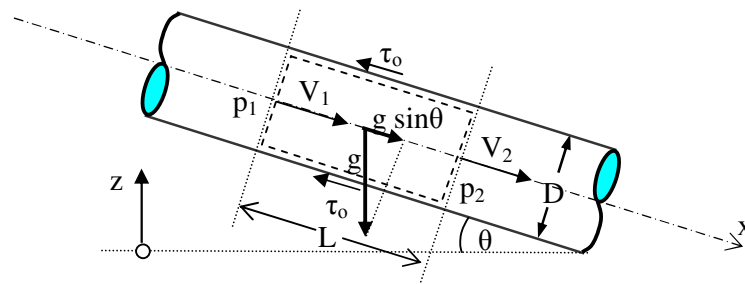


**Σχήμα 1.8** Γραμμή ενέργειας κατά μήκος σωλήνα μήκους  $L$  σε μόνιμη, πλήρως ανεπτυγμένη ροή.

**Παρατήρηση:** Στη σχέση των Darcy – Weisbach μπορούμε επίσης να καταλήξουμε εφαρμόζοντας την ολοκληρωματική εξίσωση ποσότητας της κίνησης σε ένα στοιχειώδη όγκο ανάμεσα σε δύο γειτονικές εγκάρσιες διατομές ενός σωλήνα διαμέτρου  $D$  όταν η ροή είναι πλήρως ανεπτυγμένη.

Όταν η ροή είναι μόνιμη, δηλαδή η επιτάχυνση του ρευστού είναι μηδενική, υπάρχει ισορροπία των δυνάμεων κατά μήκος του άξονα  $x$  που ασκούνται στον στοιχειώδη όγκο (Σχήμα 1.9), δηλαδή ( $F_{px} + F_{gx} + F_{\tau x} = 0$ )

$$p_1 A - p_2 A + \rho g L A \sin \theta - \tau_o S = \rho Q (V_2 - V_1) = 0 .$$



**Σχήμα 1.9** Δυναμική ισορροπία ρευστού σε κίνηση σε μόνιμη, πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε σωλήνα.

Στην παραπάνω εξίσωση θεωρούμε ότι η πίεση και ταχύτητα κατανέμονται ομοιόμορφα στις δύο διατομές. Όμως, το εμβαδόν διατομής του κυκλικού αγωγού είναι  $A = \pi D^2/4$  και η βρεχόμενη επιφάνεια είναι  $S = \pi D L = P L$ , όπου  $P = \pi D$  είναι η βρεχόμενη περίμετρος του αγωγού. Διαιρώντας τους όρους της εξίσωσης διά  $\rho g A$  έχουμε

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + L \sin \theta = \frac{\tau_o L}{\rho g A / P} = \frac{\tau_o L}{\rho g R_H} = \frac{\tau_o L}{\rho g D / 4}$$

όπου ο λόγος  $R_H = A/P = D/4$  ορίζεται ως η **υδραυλική ακτίνα** της διατομής. Εάν θεωρήσουμε ένα μικρό όγκο, μήκους  $\Delta L$ , τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$-\left(\frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z\right) = \frac{\tau_o \Delta L}{\rho g D / 4}$$

και διαιρώντας διά  $\Delta L$

$$-\frac{1}{\Delta L} \left(\frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z\right) = -\frac{\Delta}{\Delta L} \left(\frac{p}{\rho g} + z\right) = \frac{\tau_o}{\rho g D / 4}$$

απ' όπου προκύπτει η διαφορική εξίσωση (1.14) της προηγούμενης παραγράφου

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho g} + z\right) = \frac{\tau_o}{\rho g D / 4}.$$

## 1.6 Παραδείγματα και εφαρμογές

**Παράδειγμα 1.1.** Να προσδιορίσετε το συντελεστή τριβών  $f$  σε σωλήνες όταν η ροή είναι στρωτή.

### Απάντηση

Η κατανομή των ταχυτήτων σε στρωτή ροή σε αγωγό διαμέτρου  $D$  που υπόκειται σε δεδομένη κλίση πίεσης  $dp/dx$ , δίνεται από τη σχέση (βλ. Παράγραφο 10.3 Νουτσόπουλος - Χριστοδούλου, 1996)

$$u(r) = -\frac{\rho g R^2}{4\mu} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho g} + z\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{ και } U = u(0) = -\frac{\rho g R^2}{4\mu} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho g} + z\right), \quad (1.20)$$

όπου  $u(0) = U$  είναι η ταχύτητα στον άξονα του σωλήνα. Σε αδιαστατοποιημένη μορφή

$$\frac{u(r)}{U} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad (1.20\alpha)$$

Η μέση ταχύτητα  $V$  στον σωλήνα προκύπτει ότι είναι

$$V = \frac{u(0)}{2} = \frac{U}{2} = -\frac{\rho g R^2}{8\mu} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho g} + z\right) \quad (1.21)$$

Η διατμητική τάση στο τοίχωμα του σωλήνα συσχετίζει την κλίση της πίεσης με το συντελεστή τριβών με τη σχέση

$$\tau_o = \left[ \mu \frac{du}{dr} \right]_{r=R} = -\frac{\rho g R}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho g} + z\right) = \frac{4\mu V}{R} = \frac{f}{4} \rho \frac{V^2}{2} \quad (1.22)$$

απ' όπου προκύπτει ότι σε στρωτή ροή ο συντελεστής τριβών σχετίζεται άμεσα με τον αριθμό Reynolds της ροής με τη σχέση

$$f = \frac{32\mu}{\rho V R} = \frac{64\mu}{\rho V D} = \frac{64}{\text{Re}}, \quad (1.23)$$

όπου  $\text{Re}$  είναι ο αριθμός Reynolds της ροής σε σωλήνα

$$\text{Re} = \frac{VD}{\mu / \rho} = \frac{VD}{\nu}. \quad (1.24)$$

**Παράδειγμα 1.2.** Να προσδιορίσετε το συντελεστή τριβών  $f$  σε λείους σωλήνες όταν η ροή είναι τυρβώδης, η δε κατανομή της μέσης ταχύτητας σαν συνάρτηση της απόστασης  $r$  από τον άξονα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{u(r)}{U} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^6.$$

Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι (σχέση 1.16)

$$\tau_o = C_f \rho \frac{V^2}{2} = \frac{f}{4} \rho \frac{V^2}{2} \quad \text{και} \quad \tau_o = \mu \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = \frac{6\mu U}{R}$$

όπου  $V$  είναι η μέση ταχύτητα στη διατομή που υπολογίζεται από την εξίσωση συνέχειας

$$V = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{U}{R^2} \int_0^R \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^6 \right] 2r dr = \dots = \frac{3}{4} U$$

Επομένως

$$\tau_o = \frac{f}{4} \rho \frac{V^2}{2} = \frac{6\mu U}{R} = \frac{8\mu V}{R} \Rightarrow f = \frac{64\mu / \rho}{VD/2} = \frac{128}{Re}$$

**Παρατήρηση:** Στην πραγματικότητα η κατανομή των ταχυτήτων σε τυρβώδη ροή σε αγωγό με ακτίνα  $R$  εξαρτάται από τον αριθμό του Reynolds της ροής  $Re = VD/\nu$ ;  $D = 2R$ , δίδεται δε προσεγγιστικά από την εκθετική σχέση (Schlichting 1979)

$$\frac{u(r)}{U} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}, \tag{1.25}$$

Ο εκθέτης  $n$  εξαρτάται από τον αριθμό του Reynolds (Schlichting 1979), συγκεκριμένα

- όταν  $Re = 4 \times 10^3$ , τότε  $n = 6$
- όταν  $Re = 100 \times 10^3$ , τότε  $n = 7$  και
- όταν  $Re = 3240 \times 10^3$ , τότε  $n = 10$

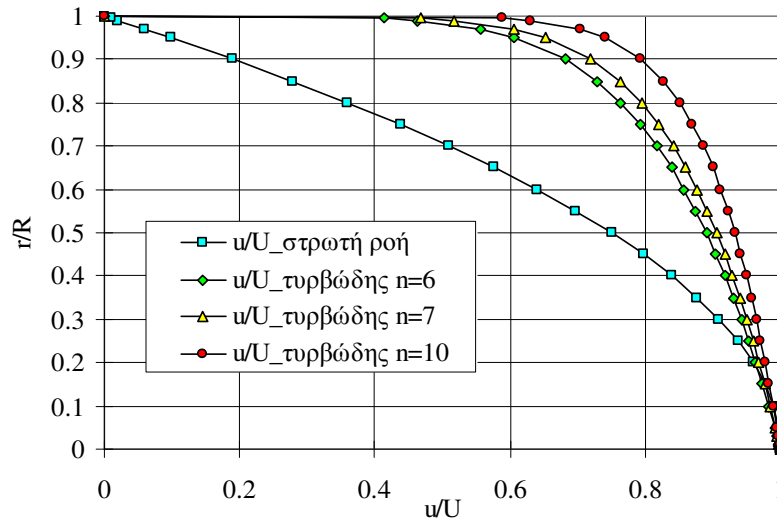
Η μέση ταχύτητα  $V$  στο σωλήνα προκύπτει από την εφαρμογή της εξίσωσης συνέχειας

$$V = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{U}{\pi R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} 2\pi r dr = \dots = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} U \tag{1.26}$$

όπου  $U = u(0)$  είναι η ταχύτητα στον άξονα του αγωγού.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 1.10 φαίνεται η κατανομή της μέσης αδιαστατοποιημένης ταχύτητας  $u(r)/U$  σαν συνάρτηση της αδιαστατοποιημένης απόστασης από τον άξονα  $r/R$  για στρωτή ροή (εξίσωση 1.20α) και τυρβώδη ροή σε λείους σωλήνες (εξίσωση 1.25) για τρεις διαφορετικές τιμές του εκθέτη  $n$ . Παρατηρούμε ότι η κατανομή της ταχύτητας στην τυρβώδη ροή είναι ‘επίπεδη’ στο κεντρικό τμήμα του σωλήνα.



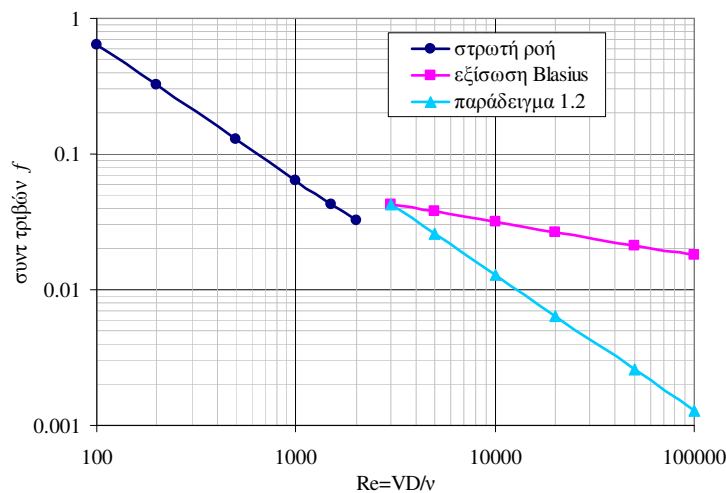


**Σχήμα 1.10** Αδιάστατα προφίλ ταχύτητας σε λείο σωλήνα.

Η διατμητική τάση του ορίου με βάση την κατανομή της εξίσωσης (1.25) είναι μηδέν, πράγμα αδύνατον για πραγματικά ρευστά. Ο Blasius (1911) εκτίμησε το συντελεστή τριβών από πειράματα και έδωσε την ακόλουθη εμπειρική σχέση

$$f = 0.3164 \text{Re}^{-1/4} \quad (1.27)$$

που ισχύει για αριθμούς Reynolds στην περιοχή  $3000 < \text{Re} < 100000$ . Ο ακριβής προσδιορισμός του συντελεστή τριβών  $f$  για λείους και όχι μόνον αγωγούς πρόκειται να συζητηθεί στο κεφάλαιο 2 που ακολουθεί. Στο διάγραμμα του Σχήματος 1.11 φαίνεται η μεταβολή του συντελεστή τριβών  $f$  για στρωτή ροή σε σωλήνες και τυρβώδη ροή σε λείους σωλήνες όπως προέκυψε από το Παράδειγμα 1.2 και την εμπειρική σχέση του Blasius.



**Σχήμα 1.11** Μεταβολή του συντελεστή τριβών σαν συνάρτηση του αριθμού Reynolds της ροής σε σωλήνα (α) για στρωτή και (β) για τυρβώδη ροή σε λείο σωλήνα με βάση το παράδειγμα 1.2 και την εμπειρική σχέση του Blasius.

**Εφαρμογή 1.1.** Αγωγός διαμέτρου  $D=0.50\text{m}$  μεταφέρει γλυκερίνη με ρυθμό  $Q=10\text{ L/s}$  από δεξαμενή στο εργοστάσιο. Σε ποιο υψόμετρο σε σχέση με το υψόμετρο του εργοστασίου θα πρέπει να τοποθετηθεί η δεξαμενή όταν απέχει από το εργοστάσιο  $1000\text{m}$ ; Το κινηματικό ιξώδες της γλυκερίνης είναι  $\nu=2\times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ . Η ροή γίνεται με βαρύτητα χωρίς να υποβοηθείται.

Απάντηση

Η ταχύτητα στον αγωγό είναι ( $Q = 0.010\text{ m}^3/\text{s}$ )

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4(0.010)}{\pi(0.50)^2} = 0.05\text{ m/s}$$

Ο αριθμός Reynolds της ροής είναι

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{(0.05)(0.50)}{0.00002} = 1273 < 2000 = \text{Re}_c$$

Επομένως η ροή είναι στρωτή με συντελεστή τριβών

$$f = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64}{1273} = 0.05$$

και γραμμικές απώλειες ενέργειας

$$h_f = L \frac{f V^2}{D 2g} = 1000 \frac{0.05 \cdot 0.05^2}{0.50 \cdot 2g} = 0.013\text{m} = 1.3\text{cm}$$

Επομένως η δεξαμενή θα τοποθετηθεί στο ίδιο επίπεδο με το εργοστάσιο.

---

**Εφαρμογή 1.2.** Να βρεθεί η ισχύς της αντλίας για μεταφορά λαδιού  $280\text{ L/min}$ , πυκνότητας  $\rho=900\text{ Kg/m}^3$  και ιξώδους  $\mu=1\text{ gr/cm/s}$  σε ύψος  $h = 7.50\text{ m}$  με σωλήνα διαμέτρου  $0.05\text{ m}$  και μήκους  $75\text{ m}$ .

Απάντηση

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = 2.38\text{ m/s}$$

$$\nu = \mu / \rho = 0.1/900 = 1.11 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{(2.38)(0.05)}{1.11 \times 10^{-4}} = 1071 < 2000 = \text{Re}_c$$

Επομένως η ροή είναι στρωτή

$$f = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64}{1071} = 0.059$$

και οι γραμμικές απώλειες ενέργειας είναι

$$h_f = L \frac{f V^2}{D 2g} = 75 \frac{0.059 \cdot 2.38^2}{0.05 \cdot 2g} = 25.88\text{ m}$$

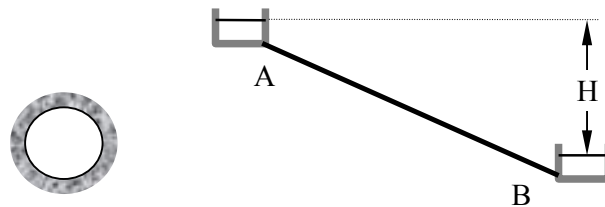
Το συνολικό λοιπόν ύψος απωλειών ενέργειας είναι

$$H = h + h_f = 7.50 + 25.88 = 33.38 \text{ m.}$$

Η απαιτούμενη ισχύς της αντλίας ( $P = mgH/t = (\rho \nabla)gH/t = \rho gQH$ ;  $Q = \nabla/t$ ) όπου  $\nabla$  είναι ο όγκος ρευστού που μεταφέρεται, είναι

$$P = \rho gQH = 900 \times (9.81) \times (0.28/60) \times (33.38) = 1370 \text{ W} = 1.37 \text{ kW.}$$

**Εφαρμογή 1.3.** Λείος σωλήνας μήκους 1000m και διαμέτρου 200mm μεταφέρει παροχή νερού 50 L/s από τη δεξαμενή A στη δεξαμενή B. Να προσδιορίσετε τη διαφορά της στάθμης H των δεξαμενών θεωρώντας τη ροή πλήρως ανεπτυγμένη και αμελώντας τις απώλειες εισόδου-εξόδου. Η πυκνότητα του νερού είναι  $1000 \text{ Kg/m}^3$  και το ιξώδες του  $0.001 \text{ Kg/m}\cdot\text{s}$ .



Απάντηση

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.050}{\pi \times 0.20^2} = 1.59 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.59 \times 0.200}{0.001/1000} = 318300 > 2000 = Re_c$$

Επομένως η ροή είναι τυρβώδης και προσεγγιστικά ( $Re > 100000$ ) με βάση την εμπειρική σχέση του Blasius

$$f = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} = 0.0133$$

Επομένως οι γραμμικές απώλειες ενέργειας είναι

$$h_f = L \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} = 1000 \frac{0.0133}{0.200} \frac{1.59^2}{2g} = 8.58 \text{ m}$$

Η διαφορά στάθμης των δύο δεξαμενών είναι ίση με τις γραμμικές απώλειες ενέργειας, δηλαδή  $H = 8.58 \text{ m}$ .

### 1.7 Γραμμή ενέργειας και πιεζομετρική γραμμή

Από τη Μηχανική των Ρευστών γνωρίζουμε ότι το ενεργειακό ύψος (ενέργεια ανά μονάδα βάρους του ρευστού που ρέει, με διαστάσεις μήκους) σε κάποια διατομή του αγωγού προκύπτει από την εξίσωση

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \tag{1.28}$$

Οι απώλειες ενέργειας ανάμεσα στις διατομές (1) και (2) είναι  $\Delta H = H_1 - H_2$  όπου

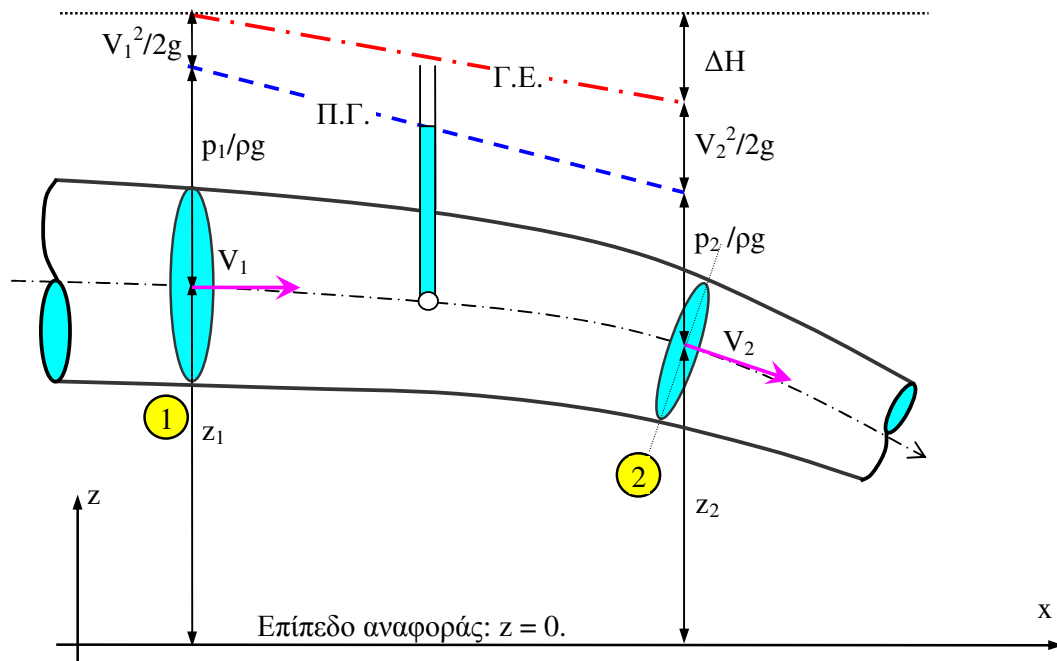
- $z$  το υψόμετρο του άξονα από το επίπεδο αναφοράς (datum)
- $\frac{P}{\rho g}$  το πιεζομετρικό ύψος στον άξονα
- $\frac{V^2}{2g}$  το ύψος της κινητικής ενέργειας
- $\Delta H$  το ύψος απωλειών ενέργειας μεταξύ των διατομών (1) και (2).

Στην εξίσωση (1.28) θεωρήσαμε ότι η κατανομή της μέσης ταχύτητας είναι περίπου ομοιόμορφη και ως εκ τούτου ο διορθωτικός συντελεστής  $\alpha$  έχει ληφθεί ίσος με μονάδα.

Η απόσταση  $H$  από το επίπεδο αναφοράς για κάθε σημείο του αγωγού, ορίζει μια γραμμή που ονομάζεται γραμμή ενέργειας (ΓΕ, ή Energy Grade Line – EGL). Η απόσταση  $H - V^2 / 2g = z + p / \rho g$ , ορίζει μια γραμμή που ονομάζεται πιεζομετρική γραμμή (ΠΓ ή Hydraulic Grade Line – HGL) του αγωγού.

Η θέση των γραμμών ενέργειας και πιεζομετρικής σε σχέση με τη μηκοτομή του άξονα, παίζουν καθοριστικό ρόλο στο σχεδιασμό των αγωγών μεταφοράς ρευστών.

Σημείωση: Στην περίπτωση αγωγού με ενιαία διατομή οι Γ.Ε. και Π.Γ. είναι παράλληλες μεταξύ τους όταν η ροή είναι πλήρως ανεπτυγμένη.



**Σχήμα 1.12** Γραμμή ενέργειας και πιεζομετρική γραμμή κατά μήκος αγωγού υπό πίεση.

## 2. ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΣΕ ΣΩΛΗΝΕΣ – ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ

Όπως έχουμε ήδη συζητήσει στην παράγραφο 1.5, ο συντελεστής τριβών σε τυρβώδη ροή εξαρτάται από τη διατμητική τάση στο όριο, δηλαδή από την κατανομή της ταχύτητας στο όριο. Η κατανομή της ταχύτητας όμως είναι συνάρτηση της τραχύτητας του ορίου καθώς επίσης και του αριθμού του Reynolds της ροής, σύμφωνα με τη θεωρία του τυρβώδους οριακού στρώματος (Schlichting, 1979). Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το συντελεστή τριβών στο όριο (και συνεπώς τις απώλειες ενέργειας) με βάση τις εκεί συνθήκες ροής.

### 2.1 Κατανομή μέσης ταχύτητας σε λείους σωλήνες

Ως λείος χαρακτηρίζεται ο σωλήνας του οποίου η τραχύτητα (επιφανειακή ανωμαλία) των τοιχωμάτων του είναι μικρότερη από το πάχος του στρωτού οριακού υποστρώματος  $\delta'$  (βλ. σελίδα 1-21 του παρόντος). Λείοι μπορούν να θεωρηθούν οι γυάλινοι ή εσωτερικά εφυσωμένοι σωλήνες, οι χαλκοσωλήνες καθώς επίσης και οι πλαστικοί σωλήνες (από PVC ή HDPE). Στη μηχανική ρευστών ορίσαμε την ταχύτητα διάτμησης του ορίου  $u_*$  που σχετίζεται με τη διατμητική τάση στο στερεό τοίχωμα  $\tau_o$  με τη σχέση

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} . \quad (2.1)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του ρευστού. Η κατανομή των μέσων (χρονικά ή time-averaged) ταχυτήτων  $u=u(y)$  στο στρωτό οριακό υπόστρωμα (ΣΟΥ) είναι γραμμική συνάρτηση της απόστασης  $y$  από το τοίχωμα, δηλαδή

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu}; \quad 0 < u_* y / \nu < 5 \quad (2.2)$$

στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα του αγωγού, δηλαδή όταν  $0 < u_* y / \nu < 5$ , όπου  $\nu = \mu / \rho$  είναι το κινηματικό ιξώδες του ρευστού. Στην περιοχή  $u_* y / \nu > 30 \div 100$  (περιοχή του εσωτερικού νόμου) η διατμητική τάση δίδεται από τη σχέση (εξίσωση 1.2)

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \overline{\rho u' v'}$$

Πρακτικά μιλώντας, στην περιοχή  $0 < u_* y / \nu < 5$  (ΣΟΥ) η συνεισφορά της τύρβης στη διατμητική τάση είναι αμελητέα, στην περιοχή  $5 < u_* y / \nu < 70$  η συνεισφορά ιξώδους και τύρβης στη διατμητική τάση είναι ίδιας τάξης μεγέθους, ενώ στην περιοχή  $u_* y / \nu > 70$  η συνεισφορά του ιξώδους στη διατμητική τάση είναι αμελητέα συγκρινόμενη με την τυρβώδη διατμητική τάση  $-\overline{\rho u' v'}$ . Στην περιοχή ισχύος του εσωτερικού νόμου ( $u_* y / \nu > 70$ ) και κοντά στο τοίχωμα, εφαρμόζοντας τη θεωρία του μήκους ανάμειξης του Prandtl προσεγγιστικά ισχύει ότι

$$\tau_o = \tau \cong -\overline{\rho u' v'} = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy}$$

Θεωρώντας επίσης ότι  $l = \kappa y$  (Prandtl) έχουμε ότι

$$\tau_o = \rho u_*^2 = \rho \kappa^2 y^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa y} \quad \text{ή} \quad \frac{du}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y} = \frac{1}{\kappa} \frac{d(y u_* / \nu)}{y u_* / \nu}$$

απ' όπου με ολοκλήρωση προκύπτει η λογαριθμική εξίσωση κατανομής της μέσης ταχύτητας  $u = u(y)$

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) + C = \frac{2.3}{\kappa} \log \left( \frac{u_* y}{\nu} \right) + C, \quad (2.3)$$

όπου  $y = R - r$  είναι η κάθετη απόσταση από το τοίχωμα και  $\kappa$  είναι η σταθερά του von Kármán. Από πειραματικά δεδομένα που έχουν προκύψει από μετρήσεις σε σωλήνες  $C = 5.50$  και  $\kappa = 0.40$ , επομένως η εξίσωση (2.3) γράφεται ως

$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log \frac{u_* (R - r)}{\nu} + 5.50 \quad (\text{εσωτερικός νόμος - universal law}). \quad (2.4)$$

Η σχέση αυτή της διανομής των ταχυτήτων προκειμένου περί λείων σωλήνων, παριστάνει με πολύ καλή προσέγγιση την κατανομή των ταχυτήτων σε ολόκληρη την τυρβώδη ζώνη, μέχρι και τον άξονα του σωλήνα. Οι σχέσεις (2.2) και (2.4) απεικονίζονται γραφικά στο Σχήμα 2.1, όπου παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων σε αδιάστατη μορφή. Παρατηρούμε ότι η περιοχή όπου η αδιάστατη απόσταση από το τοίχωμα  $5 < u_* y / \nu < 30 \div 70$  είναι μεταβατική, δηλαδή τα πειραματικά δεδομένα αποκλίνουν από τις εξισώσεις (2.2) και (2.4). Στην εξίσωση (2.4) όταν  $r = 0$  η ταχύτητα είναι μέγιστη, δηλαδή  $u(0) = U$  και γράφεται ως

$$\frac{U}{u_*} = 5.75 \log \frac{u_* R}{\nu} + 5.50. \quad (2.4a)$$

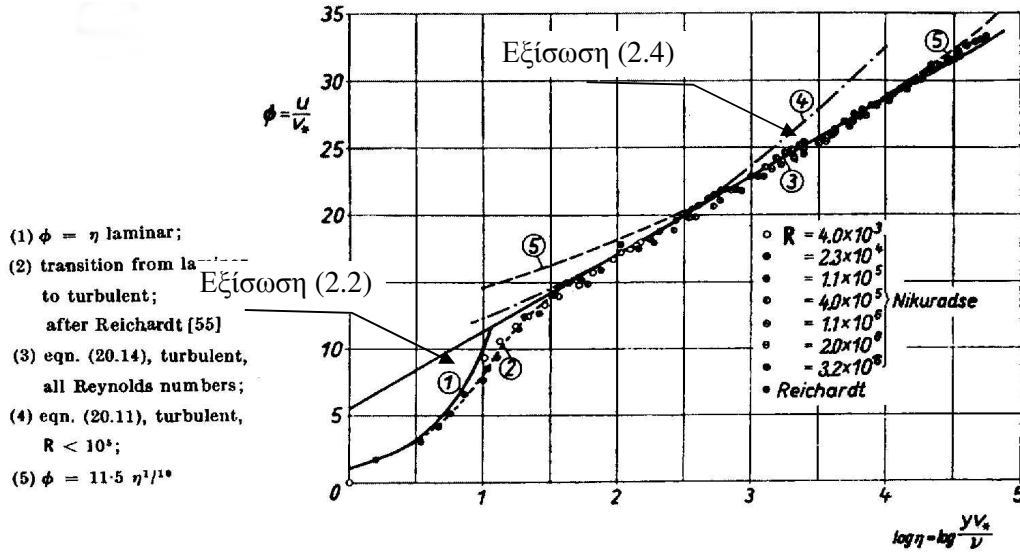


Fig. 20.4. The universal velocity-distribution law for smooth pipes

**Σχήμα 2.1** Κατανομή των ταχυτήτων σε λείους σωλήνες - εσωτερική περιοχή (Schlichting, 1979, Fig. 20.4, σελ.601).

Αφαιρώντας τις εξισώσεις (2.4) και (2.4α) κατά μέλη, καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{U-u}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{R}{R-r}\right) \quad (\text{εξωτερικός νόμος - velocity defect law}). \quad (2.5)$$

Η σχέση αυτή που ονομάζεται και νόμος της διαφοράς των ταχυτήτων, διαπιστώθηκε ότι ισχύει τόσο για λείους σωλήνες, όσο και για τραχείς στην περιοχή  $0.20 < r/R < 1$ . Όμως από τις σχέσεις

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad \text{και} \quad \tau_o = \frac{f}{4} \rho \frac{V^2}{2} \quad (2.6)$$

(V είναι η μέση ταχύτητα στη διατομή του σωλήνα) προκύπτει η σχέση

$$u_* = V \sqrt{\frac{f}{8}}. \quad (2.7)$$

Σε συνδυασμό με την εξίσωση συνέχειας η αδιαστατοποιημένη μέση ταχύτητα V είναι

$$\frac{V}{u_*} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \dots = 2.50 \ln\left(\frac{Ru_*}{\nu}\right) + 1.75 \quad (2.8)$$

όπου  $u(r)$  λαμβάνεται από την εξίσωση (2.4). Από τις εξισώσεις (2.7) και (2.8) καταλήγουμε στη σχέση

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 2.50 \ln\left(\frac{RV}{\nu} \sqrt{\frac{f}{8}}\right) + 1.75 = 5.75 \log\left(\frac{RV}{\nu} \sqrt{\frac{f}{8}}\right) + 1.75 \quad (2.9)$$

απ' όπου προκύπτει ότι ο συντελεστής τριβών  $f$  είναι συνάρτηση του αριθμού Reynolds της ροής  $Re = VD/\nu$ ,  $D = 2R$  είναι η διάμετρος του σωλήνα. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από τη διαστατική ανάλυση (βλ. Παράρτημα Α). Μετά από πράξεις

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.033 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.91 \quad (2.9\alpha)$$

Η παραπάνω σχέση βρίσκεται σε συμφωνία με τη σχέση

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.80 = 2 \log\left(\frac{\text{Re} \sqrt{f}}{2.51}\right) \quad (2.10)$$

που προέκυψε από τα πειραματικά δεδομένα διάφορων ερευνητών. Οι σταθερές 2.00 και -0.80 προέκυψαν από παλαιότερες μετρήσεις σε λείους σωλήνες σε τυρβώδη ροή όπως φαίνεται από το διάγραμμα του Σχήματος 2.2 και αντικαθιστούν αυτές της εξίσωσης (2.9α). Στο εν λόγω διάγραμμα εμφανίζονται τα πειραματικά δεδομένα από διάφορους ερευνητές σε αδιάστατη μορφή ( $1/\sqrt{f}$  σαν συνάρτηση του  $\text{Re}\sqrt{f}$ ). Από πρόσφατες μετρήσεις οι McKeon, Swanson, Zagarola, Donnelly & Smits<sup>5</sup> (2004) κατέληξαν στην εξίσωση

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.93 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.537 = 1.93 \log\left(\frac{\text{Re} \sqrt{f}}{1.90}\right) \quad (2.10\alpha)$$

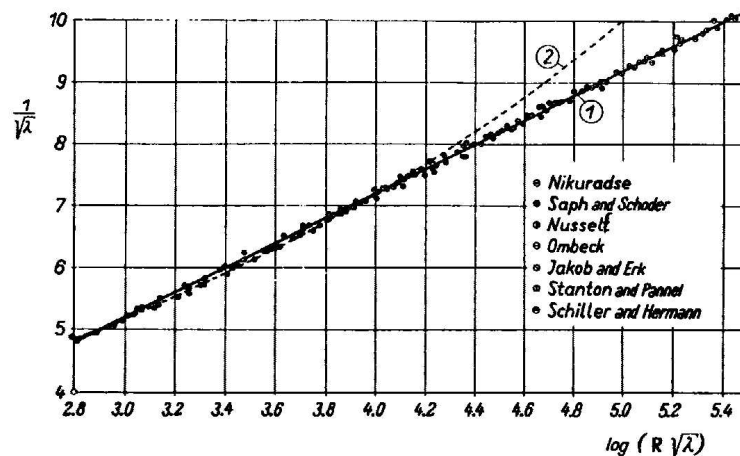


Fig. 20.9. Universal law of friction for a smooth pipe  
 Curve (1) from eqn. (20.30), Prandtl; curve (2) from eqn. (20.5), Blasius

**Σχήμα 2.2** Μεταβολή του συντελεστή τριβών  $1/\sqrt{f}$  σαν συνάρτηση του  $\text{Re}\sqrt{f}$  σε λείους σωλήνες (Schlichting, 1979, Fig. 20.9, σελ.610).

## 2.2 Τραχείς σωλήνες

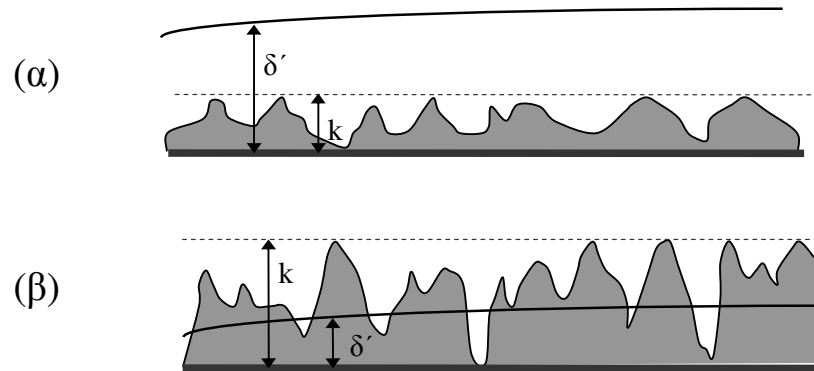
Ορίζουμε σαν τραχύ τον σωλήνα του οποίου η τραχύτητα (επιφανειακή ανωμαλία) των τοιχωμάτων του είναι μεγαλύτερη από το πάχος του στρωτού οριακού υποστρώματος  $\delta'$ . Στους τραχείς σωλήνες (Σχήμα 2.3) υπάρχουν προεξοχές, με αποτέλεσμα η διαμητική τάση του ορίου και κατ' επέκταση η κατανομή ταχυτήτων να επηρεάζονται απ' αυτές.

Ορίζοντας σαν  $k$  το χαρακτηριστικό ύψος της τραχύτητας

<sup>5</sup> McKeon, BJ, Swanson, CJ, Zagarola, MV, Donnelly, RJ, & Smits, AJ<sup>5</sup> (2004). Friction factors for smooth pipe flow. J. Fluid Mech., **511**, 41-44.



1. όταν  $k < \delta'$  οι προεξοχές είναι πλήρως βυθισμένες στο στρωτό οριακό υπόστρωμα και ουδεμία επίδραση έχουν στην κατανομή των ταχυτήτων.
2. όταν  $k \gg \delta'$  έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι ο  $f$  είναι ανεξάρτητος του  $Re$  για μεγάλο αριθμό Reynolds, εξαρτάται δε μόνο από το λόγο  $k/D$ .



**Σχήμα 2.3** Τοιχώματα (α) "λείων" και (β) τραχέων σωλήνων.

Σημειώνεται ότι το πάχος  $\delta'$  του στρωτού οριακού υποστρώματος (ΣΟΥ) συγκρινόμενο με τη διάμετρο του αγωγού προκύπτει από τις σχέσεις (2.2) με δεδομένο ότι  $u_* y / \nu = 5$ ;  $y = \delta'$  και (2.7) ως

$$\frac{\delta'}{D} = \frac{5\nu / u_*}{D} = 5 \frac{\nu}{u_* D} = 5 \frac{\nu}{V \sqrt{\frac{f}{8}} D} = \frac{14.14}{\text{Re} \sqrt{f}}$$

### 2.3 Το πείραμα του Nikuradse

Ο Nikuradse κόλλησε ισομεγέθεις (ίσης 'διαμέτρου') κόκκους άμμου μεγέθους  $k_s$  σε σωλήνες διαφορετικών διαμέτρων και διερεύνησε πειραματικά τη μεταβολή του συντελεστή τριβής  $f$  για μεγάλο εύρος τιμών των  $Re$  και  $k_s/D$ . Βοηθούμενος από τη διαστατική ανάλυση (βλ. Παράρτημα Α), κατέληξε στις ακόλουθες τρεις περιοχές ροής:

- Υδραυλικά λεία περιοχή: Θεωρείται η περιοχή  $0 < u_* k_s / \nu < 5$  όπου η τραχύτητα του σωλήνα είναι μικρή και οι προεξοχές βρίσκονται μέσα στο στρωτό οριακό υπόστρωμα. Ο συντελεστής τριβών είναι συνάρτηση μόνο του αριθμού Reynolds της ροής  $f = f(Re)$
- Μεταβατική περιοχή: Θεωρείται η περιοχή  $5 < u_* k_s / \nu < 70$  όπου η τραχύτητα του σωλήνα είναι τέτοια που οι προεξοχές εν μέρει τέμνουν το στρωτό οριακό υπόστρωμα. Ο συντελεστής τριβών είναι συνάρτηση του αριθμού Reynolds και της σχετικής τραχύτητας  $k_s / D$ ,  $f = f(Re, k_s / D)$
- Τραχεία περιοχή: Θεωρείται η περιοχή  $u_* k_s / \nu > 70$  όπου οι προεξοχές του σωλήνα τέμνουν το στρωτό οριακό υπόστρωμα. Ο συντελεστής τριβών είναι συνάρτηση μόνο της σχετικής τραχύτητας  $f = f(k_s / D)$

Στο σχήμα 2.4 φαίνεται η μεταβολή του συντελεστή τραχύτητας  $f$  κατά Nikuradse για διαφορετικές τιμές της σχετικής τραχύτητας  $k_s/D$  του σωλήνα και του αριθμού Reynolds  $Re$  της ροής.

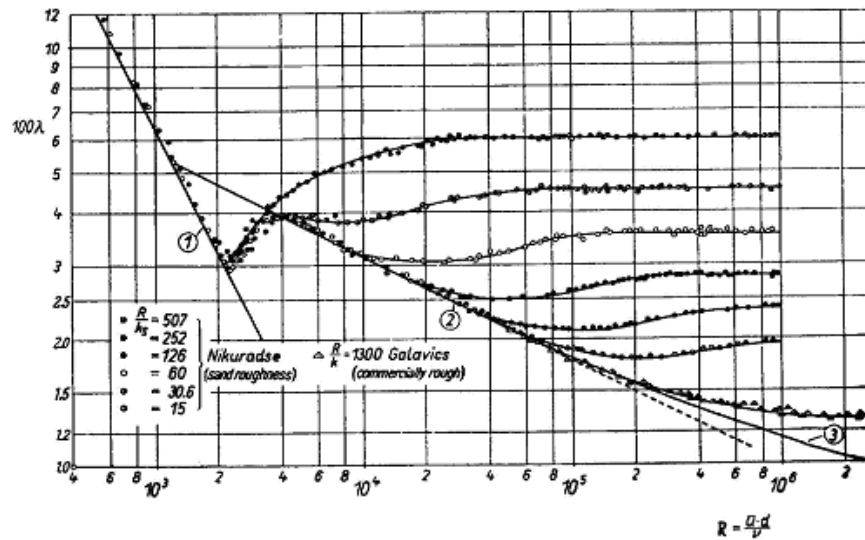


Fig. 20.18. Resistance formula for rough pipes  
 Curve (1) from eqn. (5.11), laminar; curve (2) from eqn. (20.5), turbulent, smooth; curve (3) from eqn. (20.30), turbulent, smooth

**Σχήμα 2.4** Συντελεστές τριβών για τοιχώματα σωλήνων με τεχνητή τραχύτητα (Schlichting, 1979, Fig. 20.18, σελ.617).

### 2.4 Κατανομή ταχυτήτων σε τραχείς σωλήνες

Σε τραχείς σωλήνες η κατανομή ταχυτήτων που προέκυψε από μετρήσεις είναι της μορφής

$$\frac{u}{u_*} = A \log \frac{y}{k_s} + B \quad (2.11)$$

όπου  $A$  και  $B$  είναι σταθερές. Στην περιοχή ισχύος του εξωτερικού νόμου διαφοράς των ταχυτήτων, η κατανομή θα πρέπει να είναι συμβατή τόσο σε τραχείς όσο και σε λείους σωλήνες, επομένως ο συντελεστής  $A = 5.75$ . Η τιμή της σταθεράς  $B$  εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds  $u_* k_s / \nu$  που βασίζεται σε μεγέθη γύρω από το στερεό όριο της ροής.

Για την υδραυλικά λεία περιοχή ( $0 < u_* k_s / \nu < 5$ ) η παραπάνω σχέση θα πρέπει να ταυτίζεται με τη σχέση (2.5), δηλαδή τον εσωτερικό νόμο σε λείους σωλήνες. Επομένως από τις σχέσεις (2.5) και (2.11) και προκύπτει ότι

$$B = 5.50 + 5.75 \log \left( \frac{u_* k_s}{\nu} \right). \quad (2.12)$$

Στην τραχεία περιοχή ( $u_* k_s / \nu > 70$ )  $B = 8.50$  και η (2.11) γράφεται (Σχήμα 2.5),

$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log \left( \frac{y}{k_s} \right) + 8.50 \quad (2.13)$$

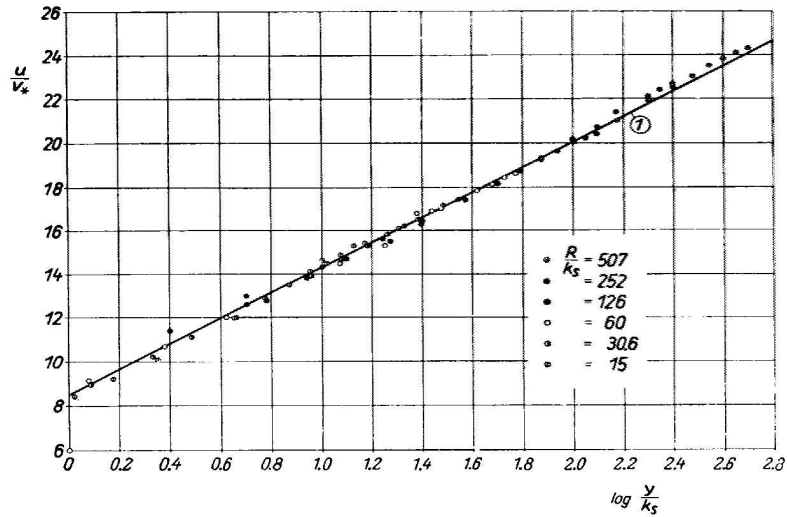


Fig. 20.20. Universal velocity distribution in rough pipes  
 Curve (1) from eqn. (20.32a)

**Σχήμα 2.5** Κατανομή ταχυτήτων σε τραχείς σωλήνες (Schlichting, 1979, Fig. 20.20, σελ.619).

Στη μεταβατική περιοχή ( $5 < u_* k_s / \nu < 70$ ), δεν υπάρχει αναλυτική σχέση που να περιγράφει το συντελεστή  $B$ , παρά μόνο η σχέση  $B = B(u_* k_s / \nu)$ . Η μεταβολή της σταθεράς  $B$  σαν συνάρτηση του  $u_* k_s / \nu$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.6.

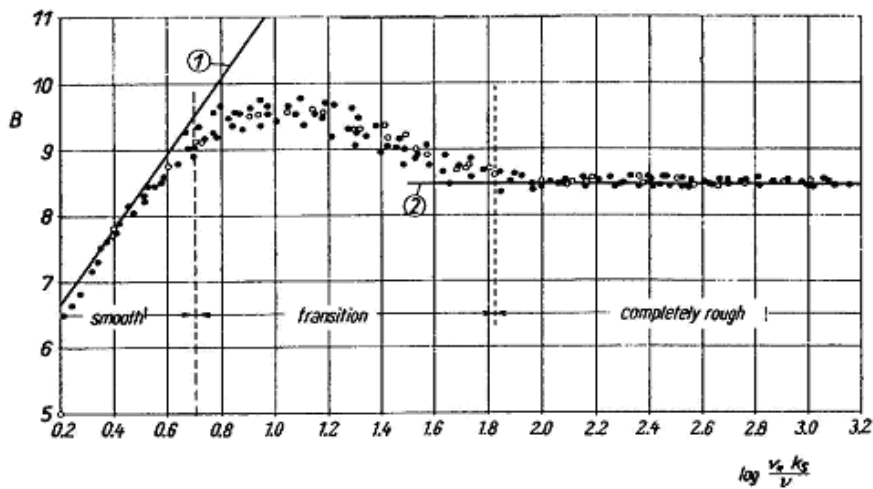


Fig. 20.21. Roughness function  $B$  in terms of  $u_* k_s / \nu$ , for Nikuradse's sand roughness  
 Curve (1): hydraulically smooth, eqn. (20.33); curve (2):  $B = 8.5$ ; completely rough

**Σχήμα 2.6** Μεταβολή του συντελεστή  $B$  σαν συνάρτηση του  $u_* k_s / \nu$  (Schlichting, 1979, Fig. 20.21, σελ. 620).

Στην τραχεία περιοχή ο συντελεστής τριβών μπορεί να εκφραστεί με τη γενική σχέση

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \Gamma \log \frac{k_s}{D} + \Delta \left( = -2 \log \frac{k_s}{D} + 1.14 \right) \quad (2.14)$$

οι δε σταθερές  $\Gamma$  και  $\Delta$  από τα πειράματα του Nikuradse λαμβάνουν τις τιμές -2.00 και 1.14 αντίστοιχα. Στη μεταβατική περιοχή είναι δύσκολο να δοθεί αναλυτική σχέση για το συντελεστή τραχύτητας. Για τους σωλήνες του εμπορίου χρησιμοποιείται ο όρος ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΤΡΑΧΥΤΗΤΑ, που αντιστοιχεί στην τραχύτητα  $k_s$  κατά Nikuradse που δίνει τον ίδιο συντελεστή τριβών  $f$ .

Οι Colebrook και White κατέληξαν στην ακόλουθη σχέση για τη μεταβατική περιοχή σε σωλήνες του εμπορίου

$$\frac{1}{\sqrt{f}} + 2 \log \frac{k_s}{D} = 1.14 - 2 \log \left[ 1 + 9.35 \frac{D/k_s}{\text{Re} \sqrt{f}} \right]$$

που μετά από πράξεις (γράφεται

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log \left[ \frac{k_s}{D} + \frac{9.35}{\text{Re} \sqrt{f}} \right]. \quad (2.15)$$

και είναι ασυμπτωτική ως προς τη σχέση της πλήρως τραχείας περιοχής σε τυρβώδη ροή καθώς και ως προς τη σχέση των λείων σωλήνων σε τυρβώδη ροή. Στις παραγράφους που ακολουθούν παρουσιάζεται η πρακτική εφαρμογή των παραπάνω σχέσεων σε προβλήματα αγωγών υπό πίεση.

**Εφαρμογή 2.1.** Από τη σχέση των Colebrook-White (2.15) για τη μεταβατική περιοχή, να καταλήξετε στις ασυμπτωτικές σχέσεις (2.10) και (2.14) για υδραυλικά λείους και τραχείς σωλήνες αντίστοιχα.

Απάντηση

(α) *Λείοι σωλήνες:* Όταν  $k_s \rightarrow 0$ , ο λόγος  $k_s/D \rightarrow 0$  και επομένως, η σχέση των C-W γίνεται,

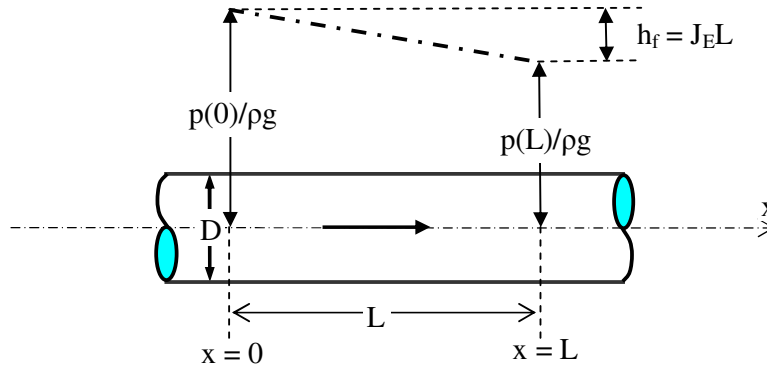
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} &= 1.14 - 2 \log(9.35) + 2 \log(\text{Re} \sqrt{f}) = 1.14 - 1.94 + 2 \log(\text{Re} \sqrt{f}) \\ &= 2 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.80 \\ &= 2 \log \left( \frac{\text{Re} \sqrt{f}}{2.51} \right) \end{aligned}$$

(β) *Τραχείς σωλήνες:* Όταν ο σωλήνας είναι τραχύς,  $k_s/D > 0$ . Επομένως, όταν  $\text{Re} \rightarrow \infty$  (λαμβάνει μεγάλες τιμές) ο λόγος  $9.35 / \text{Re} \sqrt{f} \rightarrow 0$ , δηλαδή

$$\frac{1}{\sqrt{f}} + 2 \log \frac{k_s}{D} = 1.14.$$

**Παράδειγμα 2.1.** Τμήμα λείου οριζόντιου σωλήνα διαμέτρου 500mm και μήκους 1000m μεταφέρει παροχή νερού 500 L/s θερμοκρασίας 15°C. (1) Να υπολογίσετε την πτώση πίεσης στον αγωγό, (2) να υπολογίσετε τη διατμητική τάση στο τοίχωμα και (3) να δώσετε την κατανομή της ταχύτητας σαν συνάρτηση της ακτίνας.

Απάντηση



(1) Η μέση ταχύτητα στον αγωγό είναι

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D^2 / 4} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.500}{\pi \times (0.500)^2} = 2.546 \text{ m/s}$$

Από πίνακες σε βιβλία Μηχανικής Ρευστών προσδιορίζουμε την πυκνότητα και το ιξώδες του νερού σε θερμοκρασία 15 °C, που είναι  $\rho=999.09 \text{ Kg/m}^3$  και  $\mu=1.1452 \times 10^{-3} \text{ Kg/m/s}$ , αντίστοιχα. Επομένως το κινηματικό ιξώδες είναι  $\nu=\mu/\rho=1.146 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  και ο αριθμός Reynolds της ροής

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{2.546 \times 0.5}{1.146 \times 10^{-6}} \approx 1110600.$$

Από τη σχέση (2.10α) που συσχετίζει το συντελεστή τριβών με τον αριθμό Reynolds της ροής σε λείους σωλήνες

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{Re \sqrt{f}}{2.51} \Rightarrow f = \left[ 2 \log \left( \frac{Re \sqrt{f}}{2.51} \right) \right]^{-2}$$

μπορούμε με δοκιμές να προσδιορίσουμε τον  $f$  όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί. Αρχικά υποθέτουμε μια τιμή του  $f$  και υπολογίζουμε τη νέα τιμή από την παραπάνω σχέση. Το αποτέλεσμα το χρησιμοποιούμε σαν τη νέα τιμή δοκιμής, κοκ.

| $f$     | $\left[ 2 \log \frac{Re \sqrt{f}}{2.51} \right]^{-2}$ |
|---------|---|
| 0.02000 | 0.01087   |
| 0.01087 | 0.01149   |
| 0.01149 | 0.01143   |
| 0.01143 | 0.01144   |

Μετά από 3 – 4 δοκιμές προκύπτει ότι  $f = 0.01144$ , επομένως από τη σχέση των Darcy – Weisbach

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = \dots = 7.57 \text{ m.}$$

Επειδή η μέση ταχύτητα είναι ίδια κατά μήκος του αγωγού, δηλαδή η πιεζομετρική γραμμή είναι παράλληλη με τη γραμμή ενέργειας ισχύει ότι

$$h_f = \Delta H = \frac{\Delta p}{\rho g} \Rightarrow \Delta p = \rho g \Delta H = 74.194 \text{ kPa.}$$

(2) Από τη σχέση (1.15) προκύπτει η μέση διατμητική τάση του ορίου

$$J_E = \frac{h_f}{L} = \frac{4}{\rho g D} \tau_o \Rightarrow \tau_o = \rho g D \frac{h_f}{4L} = 9.274 \text{ Pa.}$$

(3) Η ταχύτητα διάτμησης προκύπτει από τη διατμητική τάση

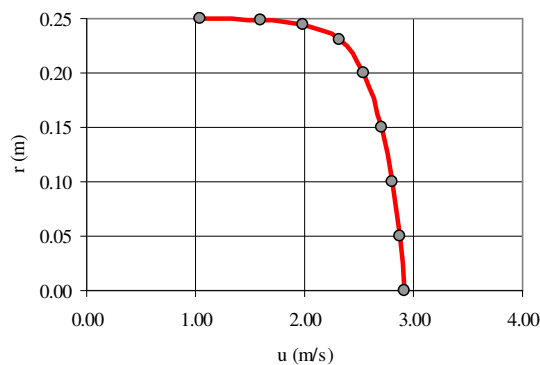
$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = 0.0963 \text{ m/s.}$$

Η κατανομή της ταχύτητας σαν συνάρτηση της ακτίνας προκύπτει από τη σχέση (2.4)

$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log \frac{u_*(R-r)}{\nu} + 5.50 \Rightarrow u = u_* \left( 5.75 \log \frac{u_*(R-r)}{\nu} + 5.50 \right)$$

και δίδεται στον παρακάτω πίνακα σαν συνάρτηση της απόστασης  $r$  από τον άξονα του σωλήνα, καθώς επίσης και διαγραμματικά στο πλάι.

| $r$ (m) | $yu^*/\nu$ | $u(r)$ (m/s) |
|---------|------------|--------------|
| 0.2499  | 8.40       | 1.04         |
| 0.2490  | 84.03      | 1.60         |
| 0.2450  | 420.16     | 1.98         |
| 0.2300  | 840.31     | 2.32         |
| 0.2000  | 4201.57    | 2.54         |
| 0.1500  | 8403.14    | 2.70         |
| 0.1000  | 12604.71   | 2.80         |
| 0.0500  | 16806.28   | 2.87         |
| 0.0000  | 21007.85   | 2.92         |



**Παράδειγμα 2.2.** Εάν ο αγωγός του παραδείγματος 2.1 έχει ισοδύναμη τραχύτητα 1 mm ενώ οι διαστάσεις του και η παροχή που μεταφέρει είναι ίδιες: (1) Να υπολογίσετε την πτώση πίεσης στον αγωγό, (2) να υπολογίσετε τη διατμητική τάση στο τοίχωμα (3) να δώσετε την κατανομή της ταχύτητας σαν συνάρτηση της ακτίνας και (4) να δείξετε ότι η ροή γίνεται στην πλήρως τραχεία περιοχή.

Απάντηση

(1) Η μέση ταχύτητα και ο αριθμός Reynolds της ροής είναι

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.500}{\pi \times (0.500)^2} = 2.546 \text{ m/s και } Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{2.546 \times 0.5}{1.146 \times 10^{-6}} \approx 1110600$$

όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Για να προσδιορίσουμε όμως τις γραμμικές απώλειες ενέργειας και στη συνέχεια την πτώση της πίεσης, πρέπει να εκτιμήσουμε τον συντελεστή τριβών  $f$ . Όμως (εξίσωση 2.15)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log \left[ \frac{k_s}{D} + \frac{9.35}{\text{Re} \sqrt{f}} \right] \Rightarrow f = \left\{ 1.14 - 2 \log \left[ \frac{k_s}{D} + \frac{9.35}{\text{Re} \sqrt{f}} \right] \right\}^{-2}$$

Αρχικά υποθέτουμε μια τιμή του  $f$  και υπολογίζουμε τη νέα τιμή από την παραπάνω σχέση. Το αποτέλεσμα το χρησιμοποιούμε σαν τη νέα τιμή δοκιμής, κοκ.

|        |  |
|--------|--|
| $f$    | $\left\{ 1.14 - 2 \log \left[ \frac{k_s}{D} + \frac{9.35}{\text{Re} \sqrt{f}} \right] \right\}^{-2}$ |
| 0.0200 | 0.02363  |
| 0.0236 | 0.02361  |
| 0.0236 | 0.02361  |

Από τις δοκιμές προκύπτει ότι  $f = 0.02361$ , επομένως από τη σχέση των Darcy – Weisbach

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = 15.61 \text{ m}$$

που συμπίπτουν με τις απώλειες του ύψους πίεσης  $\Delta p / \rho g$ , επομένως

$$h_f = \Delta H = \frac{\Delta p}{\rho g} \Rightarrow \Delta p = \rho g \Delta H = 152.80 \text{ kPa.}$$

(2) Από εξίσωση 2.8

$$\tau_o = C_f \rho \frac{V^2}{2} = \frac{f}{4} \rho \frac{V^2}{2} = 19.12 \text{ Pa.}$$

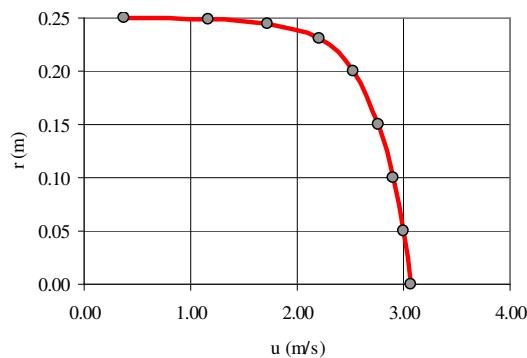
$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \left( = V \sqrt{\frac{f}{8}} \right) = 0.138 \text{ m/s}$$

(3) Στην πλήρως τραχεία περιοχή (πραγμα που θα εξετασθεί στη συνέχεια) η κατανομή της μέσης ταχύτητας στο σωλήνα δίδεται από την εξίσωση (2.13)

$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log \frac{y}{k_s} + 8.50 = 2.50 \ln \left( \frac{R-r}{k_s} \right) + 8.50.$$

και δίδεται στον παρακάτω πίνακα σαν συνάρτηση της απόστασης  $r$  από τον άξονα του σωλήνα, καθώς επίσης και διαγραμματικά στο πλάι

| r (m)  | (R-r)/k <sub>s</sub> | u(r) (m/s) |
|--------|----------------------|------------|
| 0.2499 | 0.1                  | 0.380      |
| 0.249  | 1                    | 1.176      |
| 0.245  | 5                    | 1.732      |
| 0.23   | 20                   | 2.212      |
| 0.20   | 50                   | 2.529      |
| 0.15   | 100                  | 2.769      |
| 0.10   | 150                  | 2.909      |
| 0.05   | 200                  | 3.008      |
| 0.00   | 250                  | 3.085      |



(4) Ισχύει η σχέση της πλήρως τραχείας περιοχής για την εν λόγω ροή;

$$\frac{u_* k_s}{\nu} = \frac{0.138 \times 0.001}{1.146 \times 10^{-6}} = 120.67 > 70$$

δηλαδή πρόκειται για την *πλήρως τραχεία περιοχή!*

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δείξετε ότι σε λείους σωλήνες με τυρβώδη ροή η μέση ταχύτητα  $V$  στη διατομή προκύπτει από τη σχέση (2.8)

$$\frac{V}{u_*} = 2.50 \ln \left( \frac{Ru_*}{\nu} \right) + 1.75.$$

2. Να δείξετε ότι σε τραχείς σωλήνες με τυρβώδη ροή η μέση ταχύτητα  $V$  στη διατομή προκύπτει από τη σχέση (2.8)

$$\frac{V}{u_*} = 2.50 \ln \left( \frac{R}{k_s} \right) + 4.75.$$

3. Να αναπαράξετε τις γραμμές του διαγράμματος Moody (συντελεστής γραμμικών απωλειών  $f$  σαν συνάρτηση του αριθμού Reynolds  $Re$  της ροής) στην περιοχή  $5000 < Re < 10^7$ , για τις εξής περιπτώσεις: (1) Λείος αγωγός,  $k_s/D=0$ , (2) Τραχύς αγωγός  $k_s/D=0.00001$ , (3) Τραχύς αγωγός  $k_s/D=0.0001$ , (4) Τραχύς αγωγός  $k_s/D=0.001$ , (5) Τραχύς αγωγός  $k_s/D=0.01$  και (6) Τραχύς αγωγός  $k_s/D=0.05$ . Να χρησιμοποιήσετε το περιβάλλον εργασίας Excel<sup>®</sup> ή αντίστοιχο και να δώσετε το διάγραμμα σε λογαριθμικές κλίμακες αξόνων.

4. Χαλύβδινος σωλήνας διαμέτρου  $D=300\text{mm}$ , μεταφέρει παροχή νερού  $Q=0.30\text{ m}^3/\text{s}$  από μια πηγή σε ένα οικισμό.  $H$  υψομετρική διαφορά μεταξύ της στάθμης της πηγής και της δεξαμενής του οικισμού είναι  $\Delta H=50\text{m}$  και το μήκος του αγωγού είναι  $L=1000\text{m}$ .

Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάτμησης  $u_*$  και την ισοδύναμη τραχύτητα  $k_s$  του αγωγού.



## 3. ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΥΠΟ ΠΙΕΣΗ

### 3.1 Γενικά

Οι μεταβλητές και τα σύμβολα που θα χρησιμοποιήσουμε στο κεφάλαιο αυτό είναι

|       |  |
|-------|--|
| $L$   | το μήκος του αγωγού                                    |
| $D$   | η διάμετρος του αγωγού                                 |
| $Q$   | η παροχή του αγωγού                                    |
| $V$   | η μέση ταχύτητα νερού στον αγωγό                       |
| $k_s$ | ο συντελεστής τραχύτητας του αγωγού                    |
| $f$   | ο συντελεστής τριβών                                   |
| $g$   | η επιτάχυνση της βαρύτητας.                            |
| $\nu$ | = $\mu/\rho$ το κινηματικό ιξώδες του ρευστού (νερού). |
| $\Re$ | ο αριθμός Reynolds που δίνεται από τη σχέση            |

$$\Re = \frac{VD}{\nu} \quad (3.1)$$

Το ύψος των απωλειών ενέργειας (φορτίου) σε ένα μήκος  $L$  του αγωγού υπολογίζεται από τη σχέση των Darcy & Weisbach

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = J_E L \quad (3.2)$$

όπου

$$J_E = \frac{f V^2}{D 2g} \quad (3.3)$$

ορίζεται ως η κλίση των γραμμικών απωλειών ενέργειας. Ο συντελεστής τριβών  $f$  για τους σωλήνες του εμπορίου μπορεί να υπολογιστεί από τις σχέσεις

(α) Υδραυλικά λεία περιοχή

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log(\Re \sqrt{f}) - 0.8 = 2 \log \left( \frac{\Re \sqrt{f}}{2.51} \right) \quad (3.4)$$

(β) Μεταβατική περιοχή (Colebrook - White)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2.0 \log \left[ \frac{k_s}{D} + \frac{9.35}{\Re \sqrt{f}} \right] \quad (3.5)$$

(γ) Πλήρως τραχεία περιοχή (μεγάλοι αριθμοί Reynolds)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \frac{k_s}{D} + 1.14 \quad (3.6)$$

### 3.2 Διάγραμμα του Moody

Η επίλυση των παραπάνω σχέσεων (3.4) έως (3.6) μπορεί γίνει είτε αριθμητικά, είτε γραφικά με το διάγραμμα του Moody (βλ. Διαγράμματα που ακολουθούν), από το οποίο μπορούμε με βάση τη σχετική τραχύτητα  $k_s/D$  των αγωγών του εμπορίου και τον αριθμό Reynolds της ροής να υπολογίσουμε το συντελεστή αντίστασης  $f$ .

### 3.3 Ρητές (explicit) εξισώσεις υπολογισμού του $f$ (Swamme & Jain, Haaland)

Στη μεταβατική περιοχή (από λεία σε τραχέα τοιχώματα αγωγών), η σχέση των Colebrook-White (C-W) αν και δίνει εξαιρετικά αποτελέσματα, είναι δύσχρηστη επειδή είναι πεπελεγμένη ως προς το συντελεστή τραχύτητας  $f$ . Διάφοροι ερευνητές κατασκεύασαν σχέσεις απ' ευθείας υπολογισμού του συντελεστή τριβών  $f$ , εάν γνωρίζουμε τη σχετική τραχύτητα  $k_s/D$  και τον αριθμό Reynolds της ροής  $Re$ . Στη συνέχεια παρατίθενται δύο από τις εξισώσεις που οι μηχανικοί χρησιμοποιούν περισσότερο. Οι Swamee και Jain<sup>6</sup> (1976) προτείνουν την εναλλακτική σχέση

<sup>6</sup> Swamee, P.K.; Jain, A.K. (1976). Explicit equations for pipe-flow problems". *Journal of the Hydraulics Division* (ASCE) **102** (5): 657-664.

Jain, AK, 1976. Accurate explicit equation for friction factor. ASCE, J. Hyd. Div., **102**, 674-677.

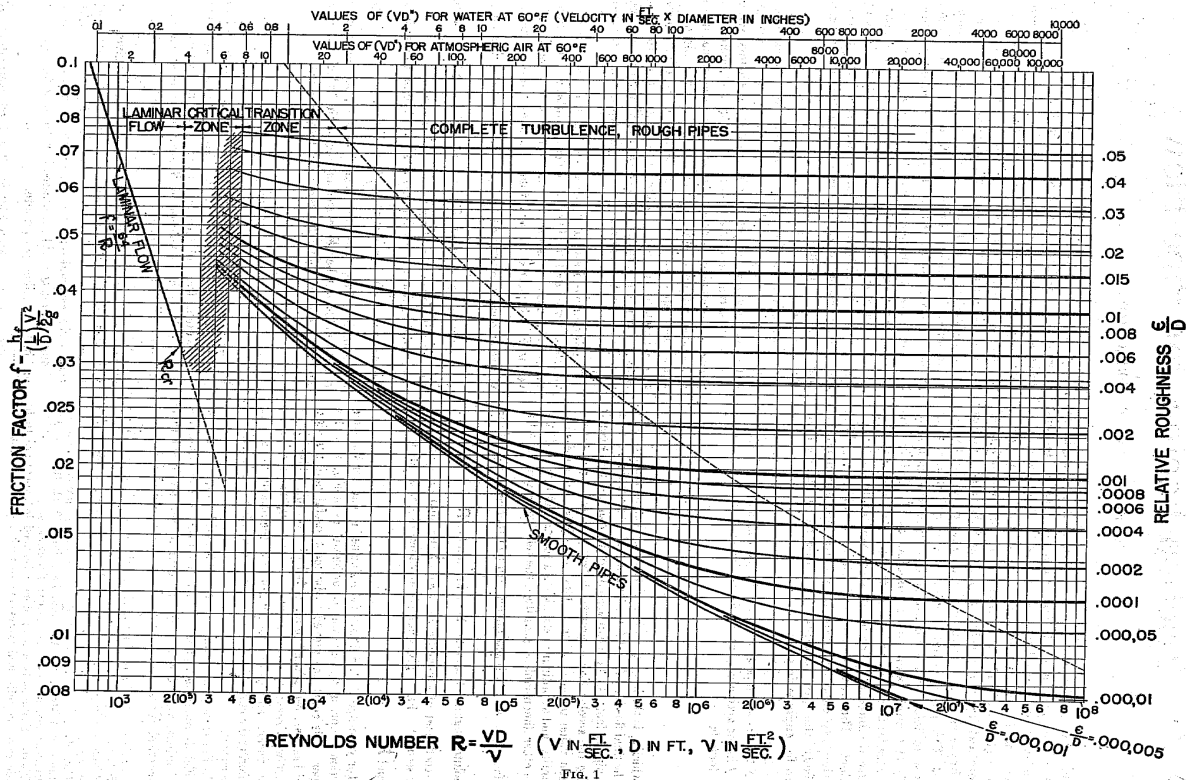
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left\{ \frac{k_s / D}{3.7} + \frac{5.74}{\Re^{0.9}} \right\} \Leftrightarrow f = \frac{0.25}{\left[ \log \left( \frac{0.27 k_s}{D} + \frac{5.74}{\Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (3.5\alpha)$$

ενώ ο Haaland<sup>7</sup> (1984) από το Norwegian Institute of Technology τη σχέση

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left\{ \left( \frac{k_s / D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\Re} \right\}. \quad (3.5\beta)$$

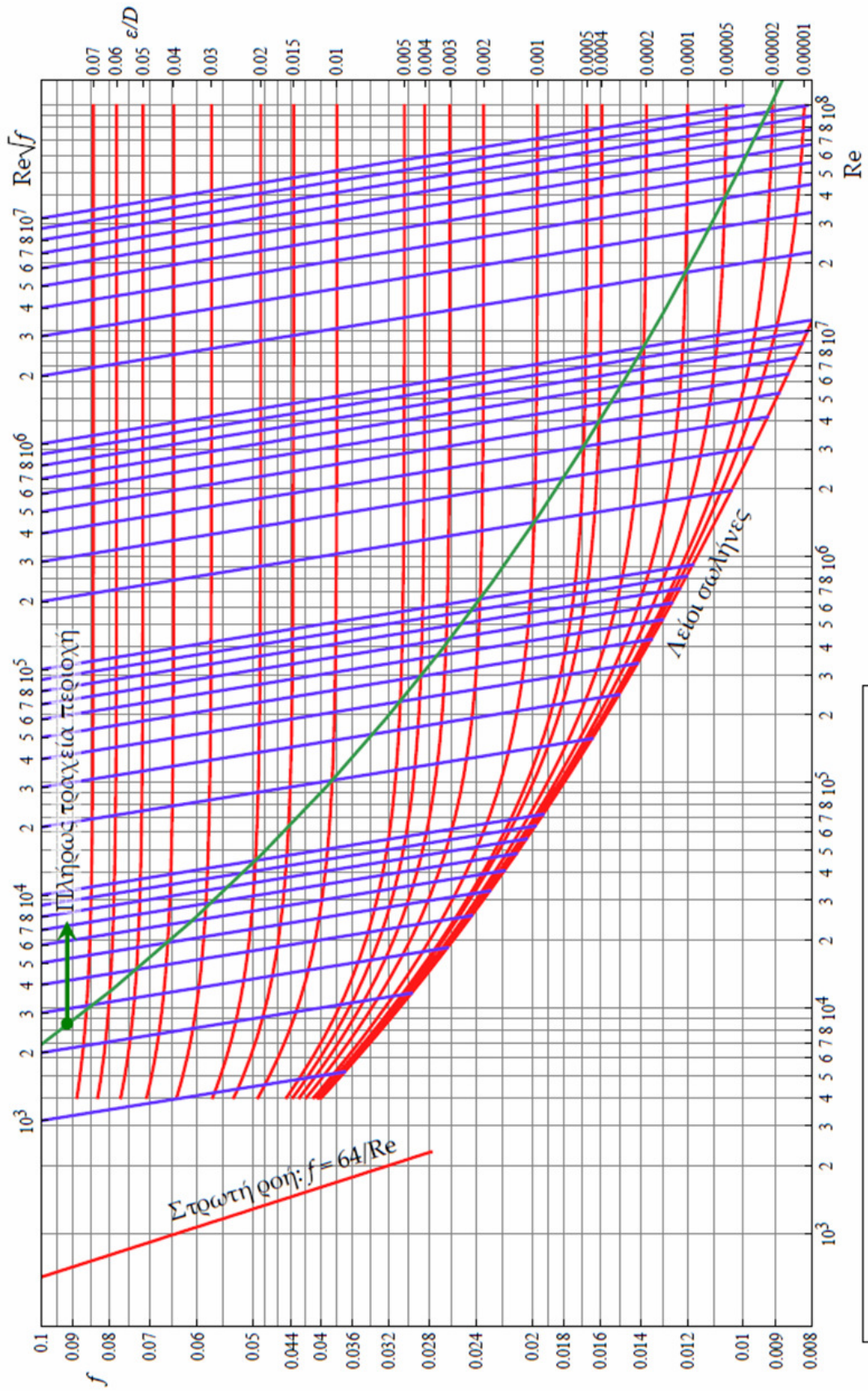
Οι δύο παραπάνω σχέσεις δεν παρουσιάζουν τη δυσκολία της σχέσης των Colebrook - White, δεδομένου ότι μπορούμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας το συντελεστή τραχύτητας  $f$  σαν συνάρτηση της σχετικής τραχύτητας  $k_s/D$  και του αριθμού Reynolds της ροής.

Το διάγραμμα που ακολουθεί είναι το αυθεντικό (ιστορικό) διάγραμμα που δημοσιεύτηκε από τον Moody<sup>8</sup> (1944).



<sup>7</sup> Haaland, SE (1983). Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Flow. *Journal of Fluids Engineering* (ASME) **105** (1): 89–90. doi:10.1115/1.3240948.

<sup>8</sup> Moody, L.F. (1944). Friction Factors for Pipe Flow. *Transactions of the ASME* **66** (8): 671–684.



Διάγραμμα Moody-Rouse – Έκδοση Κουτσογιάννη-Παπαλεξίου

### 3.4 Χαρακτηριστικά προβλήματα στους αγωγούς υπό πίεση

Τα χαρακτηριστικά προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στους αγωγούς υπό πίεση είναι τρία, ανάλογα με τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Το **πρώτο** αφορά στον προσδιορισμό των γραμμικών απωλειών σε σωλήνες, το **δεύτερο** στον προσδιορισμό της παροχής από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και το ύψος των απωλειών και το **τρίτο** στον προσδιορισμό της διαμέτρου του αγωγού. Σε όλες τις περιπτώσεις, για τον προσδιορισμό του συντελεστή τριβών θα χρησιμοποιήσουμε είτε το διάγραμμα του Moody είτε τη σχέση των Colebrook-White.

#### 1<sup>ο</sup> Τυπικό πρόβλημα

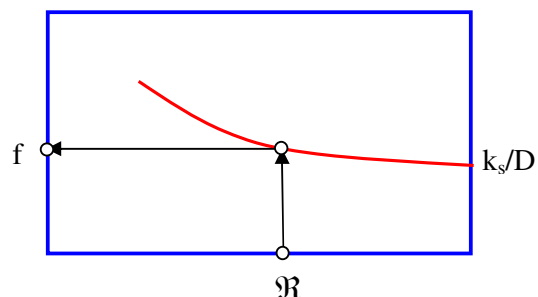
| Δεδομένα          |       | Ζητούμενο     |       |
|-------------------|-------|---------------|-------|
| Παροχή ρευστού    | $Q$   | Ύψος απωλειών | $h_f$ |
| Κινηματικό ιξώδες | $\nu$ |               |       |
| Μήκος αγωγού      | $L$   |               |       |
| Διάμετρος αγωγού  | $D$   |               |       |
| Τραχύτητα αγωγού  | $k_s$ |               |       |

#### Διαδικασία υπολογισμών

- Υπολογίζουμε την ταχύτητα ροής:  $V = \frac{4Q}{\pi D^2}$
- Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds:  $\mathfrak{R} = \frac{VD}{\nu}$
- Υπολογίζουμε το λόγο:  $\frac{k_s}{D}$

Από το διάγραμμα Moody (ή τις σχέσεις των C-W ή S&J) προσδιορίζουμε το συντελεστή τριβών  $f$  (βλ. παράπλευρο σχήμα) και στη συνέχεια τις γραμμικές απώλειες ενέργειας  $h_f$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = J_E L.$$



#### Εναλλακτική λύση

Ο υπολογισμός του συντελεστή τριβών μπορεί να γίνει και με διαδοχικές δοκιμές με χρήση της εξίσωσης των Colebrook-White, αγνοώντας το διάγραμμα Moody. Υποθέτουμε αρχικά ένα συντελεστή τριβών  $f_1$ , ενώ από τη σχέση των Colebrook-White με γνωστούς τους  $\mathfrak{R}$ ,  $k_s/D$  υπολογίζουμε το συντελεστή τριβών  $f_2$  ως ακολούθως

$$f_2 = \left( 1.14 - 2.0 \log \left[ \frac{k_s}{D} + \frac{9.35}{\Re \sqrt{f_1}} \right] \right)^{-2}$$

Στη συνέχεια θέτουμε στο δεξί μέλος της εξίσωσης  $f=f_2$  και υπολογίζουμε το  $f_3$ , κοκ έως ότου  $f_n=f_{n+1}$ . Συνήθως 2-3 δοκιμές είναι αρκετές για ακρίβεια  $4^{ov}$  δεκαδικού ψηφίου!

**Παράδειγμα 3.1.** Χαλύβδινος σωλήνας με ισοδύναμη τραχύτητα  $k_s = 0.5$  mm και διάμετρο  $D = 500$  mm, μεταφέρει νερό από μια πηγή σε ένα οικισμό. Αν η παροχή που μεταφέρει είναι  $Q = 0.5$  m<sup>3</sup>/s, ζητείται να προσδιορίσετε την υψομετρική διαφορά  $\Delta H$  μεταξύ της στάθμης της πηγής και της δεξαμενής του οικισμού, εάν το μήκος του αγωγού είναι  $L = 1000$ m.

Για το νερό να ληφθεί  $\nu = 1.15 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

### Απάντηση

Η διαφορά στη στάθμη της δεξαμενής από αυτή της πηγής  $\Delta H$  είναι ίση με το ύψος των γραμμικών απωλειών ενέργειας  $h_f$  του αγωγού, αμελώντας τις τοπικές απώλειες ενέργειας. Η λύση του προβλήματος ανάγεται στο 1<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα των αγωγών υπό πίεση.

| <u>Δεδομένα</u> |   | <u>Ζητούμενο</u> |
|-----------------|---|------------------|
| $k_s =$         | 0.5 mm = 0.0005m                        | $h_f$            |
| $D =$           | 500 mm = 0.50 m                         |                  |
| $L =$           | 1000 m                                  |                  |
| $Q =$           | 0.50 m <sup>3</sup> /s                  |                  |
| $\nu =$         | $1.10 \times 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s |                  |
| $k_s / D =$     | 0.001                                   |                  |
| $g =$           | 9.81 m/s <sup>2</sup>                   |                  |

Θα υπολογίσουμε την ταχύτητα στον αγωγό, και τον αριθμό Reynolds. Από το διάγραμμα του Moody ή τη σχέση των Colebrook-White θα προσδιορίσουμε το συντελεστή τραχύτητας και στη συνέχεια τις γραμμικές απώλειες  $h_f$ .

Υπολογίζουμε την ταχύτητα ροής  $V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.50}{\pi \times (0.50)^2} = 2.55$  m/s

Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds  $\Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{2.55 \times 0.50}{1.10 \times 10^{-6}} = 1157490$

Υπολογίζουμε το λόγο  $\frac{k_s}{D} = \frac{0.0005}{0.500} = 0.001$

Από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε  $f = 0.02$

Τέλος υπολογίζουμε τις γραμμικές απώλειες ενέργειας  $h_f$

$$h_f = L \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} = J_E L = 0.01315 \times 1000 = 13.15 \text{ m.}$$

Επομένως,  $\Delta H = 13.15$  m.

**Εναλλακτικά**

Ο υπολογισμός του συντελεστή τριβών γίνεται με διαδοχικές δοκιμές με χρήση της εξίσωσης των Colebrook-White  $f_2 = \left(1.14 - 2.0 \log \left[ k_s / D + 9.35 / (\Re \sqrt{f_1}) \right] \right)^{-2}$  στον πίνακα που ακολουθεί:

| D   | Q                   | $k_s$  | L    | V     | $k_s/D$ | $\Re$     | $f_1$  | $f_2$  | J       | $h_f=JL$ |
|-----|---------------------|--------|------|-------|---------|-----------|--------|--------|---------|----------|
| (m) | (m <sup>3</sup> /s) | (m)    | (m)  | (m/s) |         | VD/ $\nu$ |        |        | (m/m)   | (m)      |
| 0.5 | 0.5                 | 0.0005 | 1000 | 2.546 | 0.001   | 1 157 490 | 0.0150 | 0.0199 | 0.00992 | 9.92     |
|     |                     |        |      | 2.546 | 0.001   | 1 157 490 | 0.0199 | 0.0199 | 0.01317 | 13.17    |
|     |                     |        |      | 2.546 | 0.001   | 1 157 490 | 0.0199 | 0.0199 | 0.01314 | 13.14    |
|     |                     |        |      | 2.546 | 0.001   | 1 157 490 | 0.0199 | 0.0199 | 0.01314 | 13.14    |

Παρατήρηση

Ο συντελεστής τριβών μπορεί να υπολογιστεί απ' ευθείας με τη σχέση των Swamee-Jain

$$f = \frac{0.25}{\left[ \log \left( 0.27 \frac{k_s}{D} + \frac{5.74}{\Re^{0.9}} \right) \right]^2} = \frac{0.25}{\left[ \log \left( 0.27 \times 0.001 + \frac{5.74}{(1107000)^{0.9}} \right) \right]^2} = 0.0199$$

που δεν διαφέρει από το συντελεστή τριβών που υπολογίστηκε από τη σχέση C-W.

**2<sup>ο</sup> Τυπικό πρόβλημα**

| <u>Δεδομένα</u>   |       | <u>Ζητούμενο</u> |     |
|-------------------|-------|------------------|-----|
| Ύψος απωλειών     | $h_f$ | Παροχή ρευστού   | $Q$ |
| Κινηματικό ιξώδες | $\nu$ |                  |     |
| Μήκος αγωγού      | $L$   |                  |     |
| Διάμετρος αγωγού  | $D$   |                  |     |
| Τραχύτητα αγωγού  | $k_s$ |                  |     |

Διαδικασία υπολογισμών

Λύνουμε τη σχέση των Darcy - Weisbach ως προς V

$$V = \left[ 2gh_f \frac{D}{L} \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{f}} \tag{3.7}$$

Οπότε

$$\Re = \frac{VD}{\nu} = \left[ \frac{2gh_f}{L} \right]^{1/2} \frac{D^{3/2}}{\nu \sqrt{f}} \tag{3.8}$$

και

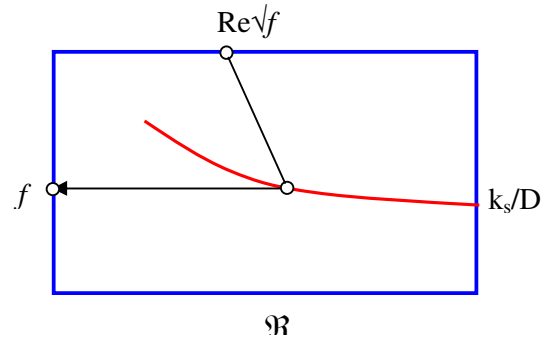
$$\Re \sqrt{f} = \left[ \frac{2gh_f}{L} \right]^{1/2} \frac{D^{3/2}}{\nu} \text{ (γνωστή τιμή)} \tag{3.9}$$



Επίσης  $k_s/D =$  γνωστή τιμή

Από το διάγραμμα του Moody (βλ. σχήμα παραπλεύρως) ή από τη σχέση των Colebrook-White με δεδομένα τα  $k_s/D$  και  $\Re\sqrt{f}$  βρίσκουμε ή υπολογίζουμε αντίστοιχα απευθείας το  $f$ .

Τέλος, από τη σχέση (3.7) υπολογίζουμε την ταχύτητα  $V$ , από την οποία προκύπτει η παροχή  $Q = (\pi D^2/4)V$ .



**Εναλλακτική λύση**

Ο υπολογισμός του συντελεστή τριβών μπορεί να γίνει απ' ευθείας με χρήση της εξίσωσης των Colebrook-White, αγνοώντας το διάγραμμα Moody. Με γνωστούς τους όρους  $\Re\sqrt{f}$  και  $k_s/D$  υπολογίζουμε το συντελεστή τριβών  $f$  ως ακολούθως

$$f = \left( 1.14 - 2.0 \log \left[ \frac{k_s}{D} + \frac{9.35}{\Re\sqrt{f}} \right] \right)^{-2}$$

**Παράδειγμα 3.2.** Χαλύβδινος σωλήνας με ισοδύναμη τραχύτητα  $k_s = 1$  mm και διάμετρο  $D = 500$  mm, μεταφέρει νερό από μια πηγή σε ένα οικισμό. Η υψομετρική διαφορά μεταξύ της στάθμης της πηγής και της δεξαμενής του οικισμού είναι  $\Delta H = 60$  m και το μήκος του αγωγού είναι  $L = 1000$  m.

Να υπολογιστεί η μέγιστη παροχή νερού  $Q$  που μπορεί να μεταφέρει ο αγωγός. Για το νερό να ληφθεί  $\nu = 1.15 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

Απάντηση

|           | <u>Δεδομένα</u>                         | <u>Ζητούμενο</u> |
|-----------|---|------------------|
| $k_s =$   | 1 mm = 0.001m                           | $Q$              |
| $D =$     | 500 mm = 0.50 m                         |                  |
| $L =$     | 1000 m                                  |                  |
| $h_f =$   | 60 m                                    |                  |
| $\nu =$   | $1.10 \times 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s |                  |
| $k_s/D =$ | 0.002                                   |                  |
| $g =$     | 9.81m/s <sup>2</sup>                    |                  |

Τα δεδομένα και ζητούμενο του προβλήματος υποδεικνύουν την αντιμετώπιση του 2<sup>ο</sup> τυπικού προβλήματος. Υπολογίζουμε αρχικά το γινόμενο

$$\Re\sqrt{f} = \left[ \frac{2gh_f}{L} \right]^{1/2} \frac{D^{3/2}}{\nu} = 348729$$

Από το διάγραμμα του Moody με γνωστά τα  $k_s/D$  και  $\Re\sqrt{f}$ , βρίσκουμε (υπολογίζουμε) τον συντελεστή τριβών  $f = 0.0235$ .



**Εναλλακτικά**, από τη σχέση των Colebrook-White έχουμε ότι

$$f = \left( 1.14 - 2.0 \log \left[ 0.002 + \frac{9.35}{348729} \right] \right)^{-2} = 0.0235 .$$

Η ταχύτητα προκύπτει από τη σχέση των Darcy - Weisbach λύνοντας ως προς  $V$

$$V = \left[ 2gh_f \frac{D}{L} \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{f}} = 5.01 \text{ m/s}$$

και η παροχή που προκύπτει είναι

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V = \mathbf{0.983 \text{ m}^3/\text{s}}.$$

### 3° Τυπικό πρόβλημα

| <u>Δεδομένα</u>   |       | <u>Ζητούμενο</u> |     |
|-------------------|-------|------------------|-----|
| Παροχή ρευστού    | $Q$   | Διάμετρος αγωγού | $D$ |
| Κινηματικό ιξώδες | $\nu$ |                  |     |
| Ύψος απωλειών     | $h_f$ |                  |     |
| Μήκος αγωγού      | $L$   |                  |     |
| Τραχύτητα αγωγού  | $k_s$ |                  |     |

#### Διαδικασία υπολογισμών

Ο υπολογισμός της διαμέτρου του αγωγού επιτυγχάνεται με διαδοχικές δοκιμές ως εξής:

Υποθέτουμε μια τιμή του  $f$ .

Λύνομε τη σχέση των Darcy - Weisbach ως προς  $D$ , αντικαθιστώντας  $Q=(\pi D^2/4)V$

$$D = \left[ \frac{8LQ^2}{\pi^2 gh_f} \right]^{1/5} f^{1/5} \quad (3.10)$$

Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds  $\Re = \frac{VD}{\nu}$

Υπολογίζουμε το λόγο  $\frac{k_s}{D}$

Από το διάγραμμα Moody προσδιορίζουμε το  $f_1$ . Αν  $f = f_1$  σταματούμε, αλλιώς επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία ξεκινώντας με  $f = f_1$  μέχρις ότου  $f_i = f_{i+1}$ . Η διαδικασία αυτή θα μας δώσει το συντελεστή τραχύτητας αν ξεκινήσουμε με  $f = 0.020$  μετά από δύο ή τρεις δοκιμές.

**Εναλλακτικά**, υποθέτουμε μια τιμή του  $f$  και υπολογίζουμε τη διάμετρο από τη σχέση  $D = \left[ 8LQ^2 / (\pi^2 gh_f) \right]^{1/5} f^{1/5}$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα  $\Re \sqrt{f}$  και  $k_s/D$  και το

συντελεστή τριβών  $f_1$  από τη σχέση  $f_1 = \left(1.14 - 2.0 \log \left[ k_s / D + 9.35 / (\Re \sqrt{f}) \right] \right)^{-2}$ . Εάν  $f_1 = f$  τότε σταματούμε τον υπολογισμό, αλλιώς επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με το νέο συντελεστή τριβών που βρήκαμε.

**Παράδειγμα 3.3.** Πρόκειται να κατασκευαστεί αγωγός μεταφοράς νερού από το φράγμα της περιοχής με ανώτατη στάθμη ύδατος (ΑΣΥ) +400 m και κατώτατη στάθμη ύδατος (ΚΣΥ) +390 m, στη δεξαμενή της πόλης σε υψόμετρο +350m που βρίσκεται σε απόσταση  $L=1000\text{m}$  και απαιτεί παροχή νερού  $Q = 200 \text{ l/s}$ . Λαμβάνοντας  $\nu = 1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  για το νερό:

(α) Να υπολογίσετε την απαιτούμενη διάμετρο χαλύβδινου αγωγού με ισοδύναμη τραχύτητα  $k_s = 1 \text{ mm}$ .

(β) Σε περίπτωση που χρησιμοποιηθούν λείοι σωλήνες PVC (πλαστικοί), ποια θα είναι η διάμετρος του αγωγού;

(γ) Ποια είναι η μέγιστη παροχή που μπορεί να μεταφέρει ο χαλύβδινος αγωγός;

Απάντηση

|             | <u>Δεδομένα</u>                            | <u>Ζητούμενο</u> |
|-------------|--|------------------|
| $k_s =$     | 1 mm = 0.001m                              | D                |
| $Q =$       | 200 l/s = 0.200 m <sup>3</sup> /s          |                  |
| $L =$       | 1000 m                                     |                  |
| $h_f =$     | 40 m                                       |                  |
| $\nu =$     | $1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ |                  |
| $k_s / D =$ | ?  |                  |
| $g =$       | $9.81 \text{ m/s}^2$                       |                  |

Για να είναι εξασφαλισμένη η παροχή υπολογισμού, αντιστοιχεί στο ελάχιστο διαθέσιμο ενεργειακό φορτίο, δηλαδή στην ελάχιστη στάθμη του νερού στην ανάντη δεξαμενή. Είναι επομένως  $h_f = H_1 - H_2 = 390 - 350 = 40 \text{ m}$

(α) Τα δεδομένα και ζητούμενο του προβλήματος υποδεικνύουν την αντιμετώπιση του 3<sup>ου</sup> τυπικού προβλήματος. Η λύση επιτυγχάνεται με διαδοχικές δοκιμές ως εξής:

Υποθέτουμε ότι  $f = 0.020$ .

Λύνουμε τη σχέση Darcy - Weisbach ως προς  $D$ , αντικαθιστώντας  $Q = (\pi D^2 / 4) V$

$$D = \left[ \frac{8LQ^2}{\pi^2 g h_f} \right]^{1/5} f^{1/5} = 0.278 \text{ m}$$

Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds  $\Re = VD/\nu = 792282$  και το λόγο  $k_s/D = 0.0036$ .

Με αυτά τα δεδομένα προσδιορίζουμε το νέο  $f_1 = 0.027$  από το διάγραμμα του Moody.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι τη σύμπτωση των  $f$ .

Οι δοκιμές φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

| f      | D            | V     | $\Re$  | $k_s/D$ | $f_1$  |
|--------|--------------|-------|--------|---------|--------|
|        | (m)          | (m/s) |        |         |        |
| 0.0200 | 0.278        | 3.30  | 797282 | 0.0036  | 0.0270 |
| 0.0270 | <b>0.295</b> | 2.93  | 750836 | 0.0034  | 0.0270 |

Επομένως, η ζητούμενη διάμετρος είναι

$$D = 0.295 \text{ m} = 295 \text{ mm.}$$

**Εναλλακτικά**, υποθέτουμε μια τιμή του  $f$  και υπολογίζουμε τη διάμετρο από τη σχέση  $D = [8LQ^2 / (\pi^2 g h_f)]^{1/5} f^{1/5}$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα  $\Re \sqrt{f}$  και  $k_s/D$  και το συντελεστή τριβών  $f_1$  από τη σχέση C-W. Όταν  $f_1=f$  σταματούμε τον υπολογισμό όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

| L    | $h_f$ | Q                   | $k_s$ | f      | D            | V     | $\Re$     | Re $\sqrt{f}$ | $k_s/D$ | $f_1$  |
|------|-------|---------------------|-------|--------|--------------|-------|-----------|---------------|---------|--------|
| (m)  | (m)   | (m <sup>3</sup> /s) | (m)   |        | (m)          | (m/s) | VD/ $\nu$ |               |         |        |
| 1000 | 40    | 0.2                 | 0.001 | 0.0200 | <b>0.278</b> | 3.301 | 833 522   | 117878        | 0.00360 | 0.0277 |
|      |       |                     |       | 0.0277 | <b>0.296</b> | 2.898 | 780 953   | 129978        | 0.00337 | 0.0272 |
|      |       |                     |       | 0.0272 | <b>0.295</b> | 2.920 | 783 917   | 129242        | 0.00339 | 0.0272 |
|      |       |                     |       | 0.0272 | <b>0.295</b> | 2.919 | 783 746   | 129284        | 0.00339 | 0.0272 |

(β) Στη περίπτωση λείων σωλήνων,  $k_s/D = 0$ . Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία καταλήγουμε στη διάμετρο  $D = \mathbf{0.251 \text{ m}}$  για  $f = 0.012$ .

(γ) Η μέγιστη παροχή αντιστοιχεί στο μέγιστο ενεργειακό φορτίο, δηλαδή στη μέγιστη στάθμη του νερού στην ανάντη δεξαμενή. Είναι επομένως  $h_f = H_1 - H_2 = 400 - 350 = 50 \text{ m}$ .

#### Λεδομένα

#### Ζητούμενο

Ύψος απωλειών :  $h_f = 50 \text{ m}$  Παροχή: Q  
 Κινηματικό ιξώδες:  $\nu = 1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$   
 Μήκος:  $L = 1000 \text{ m}$   
 Διάμετρος:  $D = 0.295 \text{ m}$   
 Τραχύτητα:  $k_s = 0.001 \text{ m}$   
 Έχουμε λοιπόν να επιλύσουμε το 2<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα.

$$\Re \sqrt{f} = \left[ \frac{2gh_f}{L} \right]^{1/2} \frac{D^{3/2}}{\nu} = 137997$$

Από το διάγραμμα του Moody ή τη σχέση των Colebrook - White με γνωστά τα  $k_s/D = 0.0034$  και  $\text{Re} \sqrt{f} = 137997$ , βρίσκουμε (υπολογίζουμε) τον συντελεστή τριβών  $f = 0.0272$ .

Κατόπιν, η ταχύτητα προκύπτει από τη σχέση των Darcy - Weisbach λύνοντας ως προς V

$$V = \left[ 2gh_f \frac{D}{L} \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{f}} = 3.27 \text{ m/s}$$

και η μέγιστη παροχή προκύπτει από τη σχέση

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V = \mathbf{0.225 \text{ m}^3/\text{s.}}$$

### 3.5 Τυπικές τιμές των σταθερών υπολογισμού και τραχύτητας αγωγών

Το κινηματικό ιξώδες του καθαρού νερού για θερμοκρασίες μεταξύ 5 και 20°C δίδεται με σφάλμα μικρότερο του 0.5% από την προσεγγιστική σχέση

$$\nu = 6.6 \times 10^{-6} T^2 - 5 \times 10^{-4} T + 0.0175$$

όπου η θερμοκρασία είναι σε °C και το ιξώδες σε cm<sup>2</sup>/s. Η παραπάνω σχέση εκτιμήθηκε από τιμές του ιξώδους του καθαρού νερού σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας που δίδονται στη βιβλιογραφία. Οι τυπικές τιμές των σταθερών που θα χρησιμοποιούμε στο εξής στο παρόν κείμενο είναι  $\nu = 1.10 \times 10^{-6}$  έως  $1.15 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s (για νερό θερμοκρασίας 18 έως 15 °C) και  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  (επιτάχυνση της βαρύτητας).

Οι συνήθεις τιμές της τραχύτητας για σωλήνες του εμπορίου (σε περίπτωση που αυτή δεν δίνεται) φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

| ΕΙΔΟΣ ΑΓΩΓΟΥ           | Ισοδύναμη τραχύτητα $k_s$ |
|------------------------|---------------------------|
| PVC ή HDPE (Πλαστικοί) | 0.1 mm (0.0001 m)         |
| Χυτοσιδηροί σωλήνες    | 0.25 mm (0.00025 m)       |
| Χαλύβδινοι σωλήνες     | 1.00 mm (0.001 m)         |
| Αμιαντοτσιμεντοσωλήνες | 0.50 mm (0.0005 m)        |

### 3.6 Γήρανση των αγωγών ενός δικτύου

Στην πράξη, επειδή ένα δίκτυο αγωγών σχεδιάζεται για πολυετή χρήση (30 έως 50 ετών), οι μέγιστες απώλειες ενέργειας στους αγωγούς θα πρέπει να υπολογίζονται για το χρόνο ζωής του δικτύου. Η ποιότητα του νερού και το υλικό κατασκευής των αγωγών δημιουργούν συνθήκες διάβρωσης, απόθεσης και δημιουργίας αλάτων στην εσωτερική επιφάνειά τους, με αποτέλεσμα την μείωση της παροχαρακτηριστικότητας των αγωγών με την πάροδο του χρόνου λόγω αύξησης της τραχύτητας ή μείωσης της διατομής τους. Η διεργασία αυτή προκαλεί τη 'γήρανση' του αγωγού, δηλαδή προκαλεί αύξηση των γραμμικών του απωλειών με την πάροδο του χρόνου. Για το λόγο αυτό, η εμπειρία των Μελετητών Υδραυλικών Έργων, προτείνει τη χρήση σχετικής τραχύτητας όχι μικρότερης από 1mm (0.001m), για κάθε είδος αγωγού. Ας σημειωθεί ότι ένας λείος αγωγός υποθετικά δεν γηράσκει. Έτσι ένας αγωγός από πλαστικό (PVC ή HDPE) πρακτικά θεωρείται ότι παραμένει λείος για όλη του τη ζωή.

Ο νόμος μεταβολής της τραχύτητας είναι συνήθως γραμμικός της μορφής

$$k_s(t) = k_s(0) + at \tag{3.11}$$

όπου  $k_s(0)$  είναι η ισοδύναμη αρχική τραχύτητα που δίνει ο κατασκευαστής,  $t$  ο αριθμός ετών λειτουργίας του και  $a$  συντελεστής προσαύξησης της τραχύτητας που λαμβάνει μικρές τιμές. Στην εικόνα που ακολουθεί φαίνεται η τομή ενός αγωγού ύδρευσης από την πόλη Grand Haven της πολιτείας Michigan των ΗΠΑ μετά από μερικές δεκαετίες λειτουργίας.



**Παράδειγμα 3.4.** Εφυαλωμένος σωλήνας (λείος) διαμέτρου  $D=100\text{mm}$ , μήκους  $L=100\text{m}$  μεταφέρει παροχή νερού  $Q$ . Εκφράζοντας τις γραμμικές απώλειες ενέργειας  $h_f = CQ^2$  και για  $\nu = 1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ :

- (α) Υπολογίστε το  $C$  σαν συνάρτηση της παροχής  $Q$  και συζητήστε τη συμπεριφορά του.  
(β) Βρείτε την ελάχιστη παροχή που μεταφέρει ο αγωγός ώστε να εξασφαλίζεται τυρβώδης ροή.  
(γ) Προσδιορίστε τη μέγιστη παροχή που μεταφέρεται όταν οι γραμμικές απώλειες είναι  $50\text{m}$ .

#### Απάντηση

(α) Ισχύει η σχέση των Darcy - Weisbach

$$h_f = L \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} = J_E L, \text{ όπου } Q = \frac{\pi D^2}{4} V .$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα στην πρώτη σχέση προκύπτει ότι

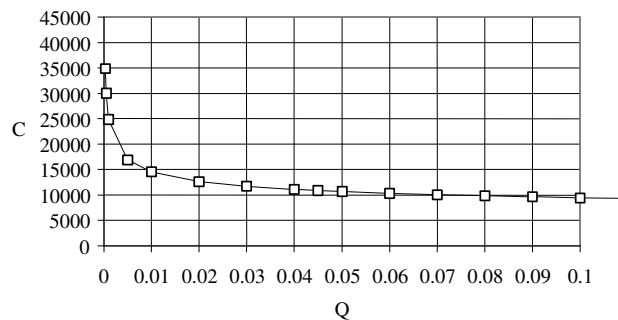
$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{16Q^2}{2g\pi^2 D^4} = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2 = CQ^2 \text{ όπου } C = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5}$$

όπου το  $C$  μεταβάλλεται λόγω μεταβολής του  $f$  (βλ. Πίνακα που ακολουθεί).

| D     | Q                   | $k_s$ | L   | V     | Re        | f      | $J_E$   | $h_f$ | C     |
|-------|---------------------|-------|-----|-------|-----------|--------|---------|-------|-------|
| (m)   | (m <sup>3</sup> /s) | (m)   | (m) | (m/s) | VD/v      |        | m/m     | (m)   |       |
| 0.100 | 0.000157            | 0     | 100 | 0.02  | 1 999     | 0.0518 | 0.00001 | 0.00  | 42788 |
| 0.100 | 0.00025             | 0     | 100 | 0.03  | 3 183     | 0.0446 | 0.00002 | 0.00  | 36870 |
| 0.100 | 0.0003              | 0     | 100 | 0.04  | 3 820     | 0.0422 | 0.00003 | 0.00  | 34867 |
| 0.100 | 0.0005              | 0     | 100 | 0.06  | 6 366     | 0.0363 | 0.00008 | 0.01  | 30016 |
| 0.100 | 0.0010              | 0     | 100 | 0.13  | 12 732    | 0.0301 | 0.00025 | 0.02  | 24848 |
| 0.100 | 0.0050              | 0     | 100 | 0.64  | 63 662    | 0.0204 | 0.00422 | 0.42  | 16880 |
| 0.100 | 0.0100              | 0     | 100 | 1.27  | 127 324   | 0.0176 | 0.01456 | 1.46  | 14556 |
| 0.100 | 0.0200              | 0     | 100 | 2.55  | 254 648   | 0.0153 | 0.05068 | 5.07  | 12669 |
| 0.100 | 0.0300              | 0     | 100 | 3.82  | 381 972   | 0.0142 | 0.10553 | 10.55 | 11726 |
| 0.100 | 0.0400              | 0     | 100 | 5.09  | 509 296   | 0.0135 | 0.17787 | 17.79 | 11117 |
| 0.100 | 0.0500              | 0     | 100 | 6.37  | 636 620   | 0.0129 | 0.26690 | 26.69 | 10676 |
| 0.100 | 0.0600              | 0     | 100 | 7.64  | 763 944   | 0.0125 | 0.37204 | 37.20 | 10334 |
| 0.100 | 0.0800              | 0     | 100 | 10.19 | 1 018 592 | 0.0119 | 0.62892 | 62.89 | 9827  |
| 0.100 | 0.1000              | 0     | 100 | 12.73 | 1 273 241 | 0.0114 | 0.94577 | 94.58 | 9458  |

Με τα δεδομένα του προβλήματος και για διάφορες παροχές, κατασκευάζουμε τον παραπάνω πίνακα υπολογισμών, μεταβάλλοντας την παροχή ( $f$  από Moody για  $k_s/D = 0$ , λείοι σωλήνες).

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το διάγραμμα του  $C$  σαν συνάρτηση της παροχής  $Q$



Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι ο συντελεστής  $C$  μειώνεται καθώς η παροχή αυξάνεται, και λαμβάνει περίπου σταθερή τιμή για μεγάλους αριθμούς  $\mathcal{R}$ .

(β) Η ελάχιστη παροχή που μεταφέρεται για να εξασφαλίσουμε τυρβώδη ροή ( $\mathcal{R} \geq 2000$ ) είναι 0.157 Lt/s.

(γ) Από τον παραπάνω πίνακα με γραμμική παρεμβολή προκύπτει ότι το ύψος γραμμικών απωλειών είναι  $h_f = 50\text{m}$  όταν η παροχή είναι  $Q = 0.070\text{m}^3/\text{s}$ .

**Παράδειγμα 3.5.** Για τους χαλυβδοσωλήνες, ( $k_s=0.5\text{mm}$ ) του εμπορίου με διαμέτρους

100, 150, 200, 300, 400 και 500 mm

(α) να υπολογιστεί η παροχή που μεταφέρει η κάθε διάμετρος σε απόσταση 1000 m όταν οι γραμμικές απώλειες είναι 10 m.

(β) Να γίνει γραφική παράσταση της  $Q$  σαν συνάρτηση της  $D$ .

Για το νερό να ληφθεί  $\nu=10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ .

Απάντηση

(α) Για κάθε μια από τις διαμέτρους λύνουμε το τυπικό πρόβλημα με την εξής διαδικασία. Υπολογίζουμε τους όρους

$$\Re\sqrt{f} = \left[ \frac{2gh_f}{L} \right]^{1/2} \frac{D^{3/2}}{\nu}$$

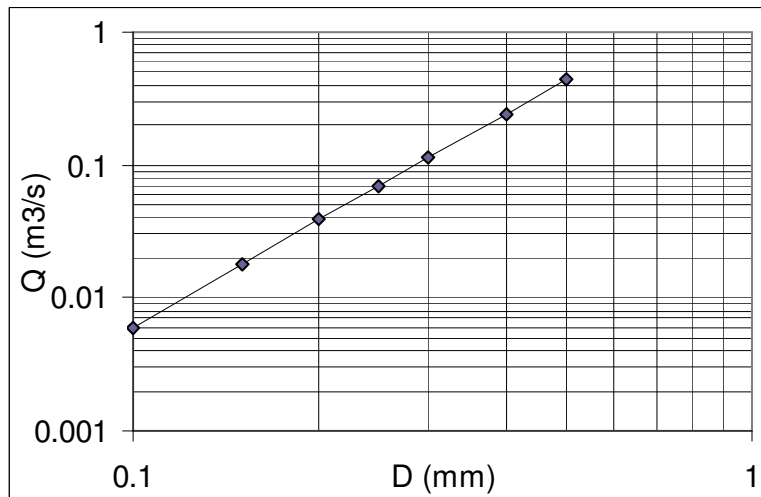
και  $k_s/D$ . Από το διάγραμμα του Moody ή τη σχέση των Colebrook - White, βρίσκουμε (υπολογίζουμε) τον συντελεστή τριβών  $f$ . Κατόπιν, η ταχύτητα και η παροχή προκύπτουν από τις σχέσεις των Darcy - Weisbach λύνοντας ως προς  $V$

$$V = \left[ 2gh_f \frac{D}{L} \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{f}} \text{ και } Q = \frac{\pi D^2}{4} V .$$

Οι υπολογισμοί συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

| D<br>(m) | $k_s$<br>(m) | L<br>(m) | $h_f$<br>(m) | $k_s/D$ | $\Re \sqrt{f}^{1/2}$ | f      | V<br>(m/s) | Q<br>(m <sup>3</sup> /s) |
|----------|--------------|----------|--------------|---------|----------------------|--------|------------|--------------------------|
| 0.100    | 0.0005       | 1000     | 10           | 0.0050  | 12180                | 0.0317 | 0.79       | 0.006                    |
| 0.150    | 0.0005       | 1000     | 10           | 0.0033  | 22376                | 0.0279 | 1.03       | 0.018                    |
| 0.200    | 0.0005       | 1000     | 10           | 0.0025  | 34451                | 0.0256 | 1.24       | 0.039                    |
| 0.250    | 0.0005       | 1000     | 10           | 0.0020  | 48146                | 0.0240 | 1.43       | 0.070                    |
| 0.300    | 0.0005       | 1000     | 10           | 0.0017  | 63290                | 0.0228 | 1.61       | 0.114                    |
| 0.400    | 0.0005       | 1000     | 10           | 0.0013  | 97441                | 0.0211 | 1.93       | 0.242                    |
| 0.500    | 0.0005       | 1000     | 10           | 0.0010  | 136178               | 0.0199 | 2.22       | 0.436                    |

(β) Η παροχή σαν συνάρτηση της διαμέτρου φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα (log - log). Από το διάγραμμα αυτό προκύπτει ότι για δεδομένο ύψος γραμμικών απωλειών, η σχέση των  $Q$  και  $D$  σε λογαριθμικό διάγραμμα είναι ευθεία γραμμή (γιατί;).



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για το νερό να ληφθεί  $v=1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  και  $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$  σε όλες τις παρακάτω ασκήσεις.

**1.** Σωλήνας από PVC διαμέτρου  $D=400 \text{ mm}$  και μήκους  $L=2000 \text{ m}$ , μεταφέρει νερό μια πηγή σε ένα οικισμό. Η υψομετρική διαφορά μεταξύ της στάθμης της πηγής και της δεξαμενής του οικισμού είναι  $\Delta H = 80 \text{ m}$  και η ισοδύναμη τραχύτητα του  $k_s$  αγωγού είναι  $0.1 \text{ mm}$ .

Να υπολογιστεί η παροχή νερού που μεταφέρεται.

**2.** Αγωγός διαμέτρου  $D=550 \text{ mm}$  και μήκους  $L=1000 \text{ m}$ , μεταφέρει παροχή νερού  $Q=1 \text{ m}^3/\text{s}$  από μια πηγή στη δεξαμενή ενός οικισμού με στάθμη στο  $+20.00$ . Εάν η ισοδύναμη τραχύτητα  $k_s$  του αγωγού είναι  $0.5 \text{ mm}$ .

(α) Να υπολογιστεί η υψομετρική διαφορά μεταξύ της στάθμης της πηγής και της δεξαμενής του οικισμού.

(β) Να υπολογιστεί η πίεση στο μέσο του αγωγού αν το υψόμετρο του άξονα εκεί είναι στα  $+40.00$ .

(γ) Να υπολογιστεί η διατμητική τάση που ασκείται στα τοιχώματα του αγωγού.

**3.** Για τη μεταφορά νερού από το φράγμα της περιοχής στη δεξαμενή της πόλης σε απόσταση  $L=2000 \text{ m}$ , με υψομετρική διαφορά  $40 \text{ m}$ , πρόκειται να κατασκευαστεί χαλύβδινος αγωγός. Εάν η απαιτούμενη παροχή νερού είναι  $Q=300 \text{ L/s}$ :

(α) Να υπολογίσετε την απαιτούμενη διάμετρο του χαλύβδινου αγωγού με ισοδύναμη τραχύτητα  $1 \text{ mm}$ .

(β) Σε περίπτωση που χρησιμοποιηθούν λείοι σωλήνες ( $k_s = 0.0 \text{ mm}$ ), ποιά είναι η παροχή που θα μεταφέρει ο αγωγός; Τι παρατηρείτε;

**4.** Χαλύβδινος σωλήνας διαμέτρου  $D=250 \text{ mm}$ , μεταφέρει παροχή νερού  $Q = 0.20 \text{ m}^3/\text{s}$  από μια πηγή σε ένα οικισμό. Η υψομετρική διαφορά μεταξύ της στάθμης της πηγής και της δεξαμενής του οικισμού είναι  $\Delta H = 80 \text{ m}$  και το μήκος του αγωγού είναι  $L=1500 \text{ m}$ .

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη τραχύτητα  $k_s$  του αγωγού.



## 4. ΑΓΩΓΟΙ ΜΗ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Στους αγωγούς των οποίων η διατομή δεν είναι κυκλική, υπάρχει λόγω σχήματος **ανομοιομορφία στην κατανομή των ταχυτήτων**, όπως για απράδειγμα στο Σχήμα 4.1, όπου δυο ισοταχείς καμπύλες δεν ισαπέχουν μεταξύ τους σε ολόκληρη τη διατομή του αγωγού όπως συμβαίνει στους σωλήνες). Στο επίπεδο της διατομής υπάρχει **δευτερεύουσα ροή**, και η διατμητικές τάσεις στις γωνίες είναι μικρότερες (αραιότερες ισοταχείς).

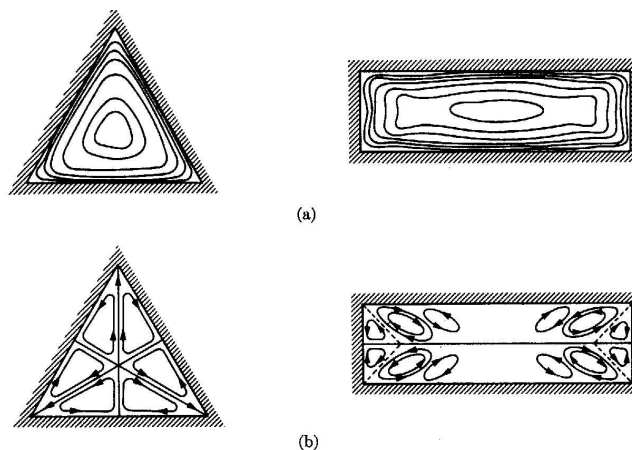
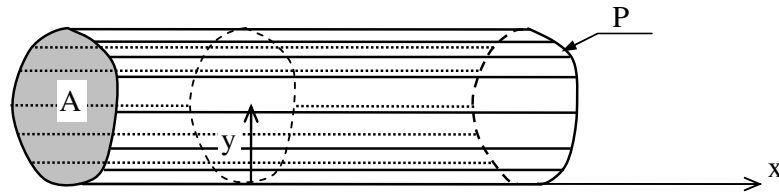


FIG. 13-3. Velocity contours and diagrams of secondary motions for fully developed flow in noncircular ducts: (a) velocity contours; (b) secondary circulation patterns [2].

**Σχήμα 4.1** Ισοταχείς καμπύλες - δευτερεύουσα ροή σε μη κυκλικούς αγωγούς (Daily, JW, and Harleman, DRF, 1966, Fig.13.3, σελ. 262).



**Σχήμα 4.2** Κυλινδρικός αγωγός τυχαίας διατομής.

Έστω ο κλειστός κυλινδρικός αγωγός μη κυκλικής διατομής του σχήματος 4.2. Στην κατεύθυνση του αγωγού η εξίσωση των Navier - Stokes γράφεται

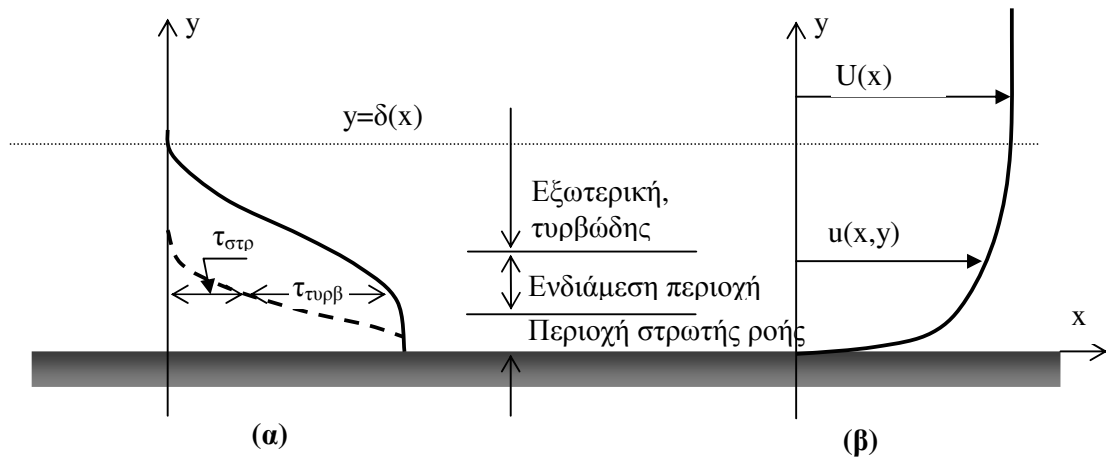
$$\frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + h \right) = \frac{1}{\rho g} \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du}{dy} - \overline{\rho u'v'} \right) = \frac{1}{\rho g} \frac{d}{dy} \tau(y). \quad (4.1)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς  $y$

$$-y \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + h \right) + \frac{1}{\rho g} \tau(y) \Big|_0^y = 0, \quad (4.2)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\tau_o}{\rho g} = -y \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + h \right) + \tau(y). \quad (4.3)$$



**Σχήμα 4.3** Τυπικές κατανομές (α) διατμητικών τάσεων και (β) μέσης ταχύτητας πλησίον στερεάς επίπεδης επιφάνειας.

Στην παραπάνω σχέση  $\tau_o$  είναι η τάση του ορίου και  $\tau(y)$  η τάση σε απόσταση  $y$  από το στερεό όριο. Όταν το  $y$  είναι μεγάλο (περιοχή ομοιόμορφης ταχύτητας μακριά από το τοίχωμα) η διατμητική τάση  $\tau(y) \approx 0$ . Πολύ κοντά στο τοίχωμα η διατμητική τάση

οφείλεται κατά κύριο λόγο στο ιξώδες. Σε μεγαλύτερη απόσταση (εκτός του στρωτού οριακού υποστρώματος) είναι συνάρτηση της τύρβης και του ιξώδους (βλ. Σχήμα 4.3), ενώ σε ακόμη μεγαλύτερη απόσταση είναι συνάρτηση της τύρβης του ορίου μέχρι την περιοχή ομοιόμορφης ροής όπου μηδενίζεται. Λαμβάνοντας τη μέση διατμητική τάση  $\tau_m$  στην περίμετρο του αγωγού και ολοκληρώνοντας στη διατομή έχουμε

$$\frac{\tau_m}{\rho g} P = -A \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + h \right), \quad (4.4)$$

όπου  $P$  είναι η περίμετρος και  $A$  η επιφάνεια της εγκάρσιας διατομής του αγωγού. Ορίζοντας σαν υδραυλική ακτίνα της διατομής  $R_H$  το λόγο  $R_H = A/P$ , η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί

$$\frac{\tau_m}{\rho g R} = - \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + h \right) \quad (4.5)$$

που είναι παρόμοια με την σχέση

$$\tau_o = -\rho g \frac{D}{4} \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\rho g} + h \right) \quad (4.6)$$

που έχουμε ήδη αναλύσει σε κυκλικό αγωγό, όπου  $A/P = (\pi D^2/4)/\pi D = D/4$  είναι η υδραυλική ακτίνα του σωλήνα διαμέτρου  $D$ . Επομένως από τις σχέσεις (4.5) και (4.6) προκύπτει ότι οι απώλειες ενέργειας στην παραπάνω τυχαία διατομή μπορεί να θεωρηθούν ίδιες με αυτές της ισοδύναμης κυκλικής διατομής διαμέτρου  $D = 4R_H$ , όπου  $R_H$  είναι η υδραυλική ακτίνα της διατομής που εξετάζουμε.

Συμπερασματικά λοιπόν, αναφορικά με διατομές που δεν διαφέρουν πολύ από την κυκλική (π.χ. σκουφοειδείς, ωοειδείς κλπ), η κλίση ενέργειας σε αυτές μπορεί να γραφτεί

$$J_E = \frac{f}{4R_H} \frac{V^2}{2g} \quad \text{σχέση των Darcy - Weisbach} \quad (4.7)$$

και το συνολικό ύψος απωλειών σε αγωγό μήκους  $L$  είναι

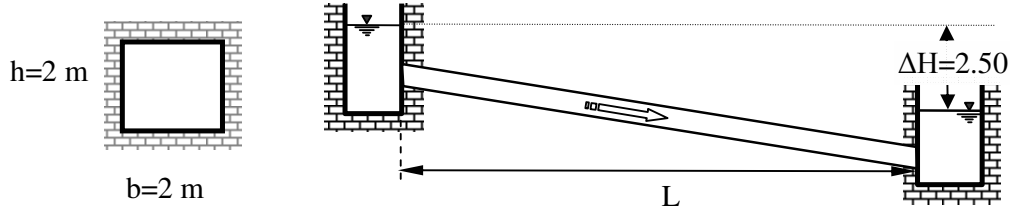
$$h_f = J_E L = L \frac{f}{4R_H} \frac{V^2}{2g}. \quad (4.8)$$

Ο συντελεστής τριβών  $f$  προκύπτει από το διάγραμμα του Moody (σχέση των Colebrook - White) ή από τη σχέση των Swamme & Jain για αριθμό Reynolds

$$\text{Re} = \frac{V \times 4R_H}{\nu} \quad (4.9)$$

όπου  $V$  είναι η μέση ταχύτητα της πραγματικής διατομής και σχετική τραχύτητα  $k_s/4R_H$ .

**Παράδειγμα 4.1**



Ο ορθογωνικός αγωγός αποχέτευσης ομβρίων του σχήματος, μήκους  $L=1000$  m, συνδέει δύο φρεάτια επίσκεψης και μεταφέρει παροχή  $10 \text{ m}^3/\text{s}$  όταν η ροή γίνεται υπό πίεση όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να υπολογίσετε την ισοδύναμη τραχύτητα του αγωγού ( $k_s$ ) που μεταφέρει την ίδια παροχή, κατά Darcy - Weisbach. Να ληφθεί για το νερό  $\nu=1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Απάντηση

| <u>Δεδομένα</u>       | <u>Ζητούμενο</u>                                 |                      |
|-----------------------|--|----------------------|
| Ύψος απωλειών :       | $h_f = 2.50 \text{ m}$                           | Τραχύτητα: $k_s = ?$ |
| Κινηματικό ιξώδες:    | $\nu = 1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ |                      |
| Μήκος:                | $L = 1000 \text{ m}$                             |                      |
| Υγρή επιφάνεια:       | $A = 4 \text{ m}^2$                              |                      |
| Βρεχόμενη περίμετρος: | $P = 8 \text{ m}$                                |                      |
| Υδραυλική ακτίνα:     | $R_H = A/P = 0.50 \text{ m}$                     |                      |
| Ισοδύναμη διάμετρος:  | $D = 4R = 2 \text{ m}$                           |                      |
| Παροχή:               | $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$                    |                      |

Η μέση ταχύτητα ροής είναι

$$V = Q/A = 10/4 = 2.50 \text{ m/s.}$$

Ο αριθμός του Reynolds της ροής είναι

$$Re = \frac{V \times 4R_H}{\nu} = \frac{2.50 \times 4 \times 0.50}{1.15 \times 10^{-6}} = 4.347 \times 10^6$$

Επίσης  $J_E = h_f/L = 2.5/1000 = 0.0025$ . Από τη σχέση των Darcy-Weisbach, λύνοντας ως προς  $f$  έχουμε

$$f = J_E \frac{4R \times 2g}{V^2} = (0.0025) \times \frac{4 \times (0.50) \times 2g}{(2.50)^2} = 0.0157.$$

Από το διάγραμμα του Moody, με  $Re = 4.4 \times 10^6$  και  $f = 0.0157$  προκύπτει ότι

$$k_s/D = \mathbf{0.00035}$$

δηλαδή

$$k_s = 0.00035 \times D = 0.00035 \times 4R_H = 0.0007 \text{ m} = \mathbf{0.7 \text{ mm.}}$$

**Παράδειγμα 4.2**

Χρησιμοποιώντας τη σχέση Darcy - Weisbach, να υπολογίσετε την παροχή που μεταφέρει ορθογωνικός αγωγός 0.50 m × 0.30 m από τη δεξαμενή A στη δεξαμενή B.

Δεδομένα:  $L=1000$  m,  $H=20$  m,  $k_s=1$  mm. Για το νερό θεωρείστε ότι  $\nu = 1.15 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

Υπόδειξη: Να προσδιορίσετε τον ισοδύναμο σωλήνα και να εργαστείτε κατά τα γνωστά.

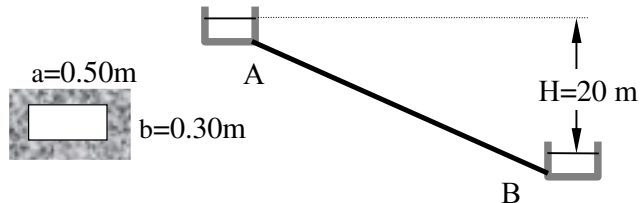
Απάντηση

$$A = 0.5 \times 0.3 = 0.15 \text{ m}^2$$

$$P = 2 \times (0.5 + 0.3) = 1.60 \text{ m}$$

$$R_H = A/P = 0.09375 \text{ m}$$

$$D = 4R_H = 0.375 \text{ m}$$



Έχουμε να επιλύσουμε το 2<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα.

Δεδομένα

Ζητούμενο

|                    |  |         |     |
|--------------------|--|---------|-----|
| Ύψος απωλειών :    | $h_f = 20\text{m}$                               | Παροχή: | $Q$ |
| Κινηματικό ιξώδες: | $\nu = 1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ |         |     |
| Μήκος:             | $L = 1000 \text{ m}$                             |         |     |
| Διάμετρος:         | $D = 0.375 \text{ m}$                            |         |     |
| Τραχύτητα:         | $k_s = 0.001 \text{ m}$                          |         |     |

Για να επιλύσουμε το 2<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα υπολογίζουμε τον αριθμό

$$\Re\sqrt{f} = \left[ \frac{2gh_f}{L} \right]^{1/2} \frac{D^{3/2}}{\nu} = 125087$$

Από το διάγραμμα του Moody ή τη σχέση των Colebrook - White με γνωστά τα  $k_s/4R_H=0.00267$  και  $\text{Re}f^{1/2}=125087$ , βρίσκουμε (υπολογίζουμε) τον συντελεστή τριβών

$$f = 0.026.$$

Κατόπιν, η ταχύτητα προκύπτει από τη σχέση των Darcy - Weisbach λύνοντας ως προς  $V$

$$V = \left[ 2gh_f \frac{D}{L} \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{f}} = 2.38 \text{ m/s}$$

και η παροχή προκύπτει από τη σχέση

$$Q = a \times b \times V = \mathbf{0.357 \text{ m}^3/\text{s}}.$$

**Παράδειγμα 4.3**

Σε χαλύβδινο αγωγό μήκους  $L=1000$  m και διαμέτρου  $D=300$  mm πρόκειται να αντικατασταθούν τα 100 m με ορθογωνικό χαλύβδινο σωλήνα. Αν η αρχική παροχή του αγωγού που είναι  $Q=200$  L/s πρόκειται να διατηρηθεί:

Να βρείτε το μήκος των πλευρών του ορθογώνιου σωλήνα με λόγο πλευρών 1:2.

Δίνεται η ισοδύναμη τραχύτητα  $k_s=1$  mm και  $\nu=1.15 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

Απάντηση

Υπολογίζουμε τις απώλειες ενέργειας του κυκλικού αγωγού.

Υπολογίζουμε την ταχύτητα ροής  $V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.20}{\pi \times (0.30)^2} = 2.83$  m/s

Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds  $\Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{2.55 \times 0.50}{1.15 \times 10^{-6}} = 738110$

Υπολογίζουμε το λόγο  $\frac{k_s}{D} = \frac{0.001}{0.300} = 0.0033$

Από το διάγραμμα Moody βρίσκουμε  $f = 0.0275$

Τέλος οι γραμμικές απώλειες ενέργειας  $h_f$  στον 1000m μήκους αγωγό είναι

$$h_f = L \frac{f V^2}{D 2g} = J_E L = 0.0374 \times 1000 = 37.42 \text{ m.}$$

Οι γραμμικές απώλειες του ορθογωνικού αγωγού μήκους 100m θα πρέπει επομένως νάναι 3.74m, η δέ κλίση γραμμικών απωλειών 0.0374.

Έστω ορθογωνικός αγωγός πλευρών  $b$  και  $2b$ , τότε

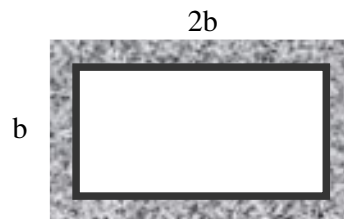
$A = b \times 2b = 2b^2$

$P = b + b + 2b + 2b = 6b$

$R_H = A/P = b/3.$

$D=4R_H$  και

$V = Q/A.$



Καταρτίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβάλλοντας το  $b$  έως ότου επιτύχουμε με δοκιμές ίδια κλίση απωλειών του ορθογωνικού αγωγού με αυτή του σωλήνα.

| b     | V    | D=4R  | $k_s/D$ | $Re=V \times 4R_H/\nu$ | f     | $J_E$  | $h_f$ |
|-------|------|-------|---------|------------------------|-------|--------|-------|
| 0.25  | 1.60 | 0.333 | 0.00300 | 463300                 | 0.027 | 0.0106 | 10.57 |
| 0.20  | 2.50 | 0.267 | 0.00375 | 579710                 | 0.028 | 0.0334 | 33.45 |
| 0.195 | 2.63 | 0.260 | 0.00385 | 594575                 | 0.028 | 0.0380 | 38.00 |

Παρατηρούμε ότι οι γραμμικές απώλειες είναι περίπου αυτές του κυκλικού αγωγού όταν  $b=0.195$  m. Επομένως ο ορθογωνικός αγωγός πρέπει να έχει διαστάσεις 0.195m×0.39m (στην πραγματικότητα 0.20m×0.40m).

## 5. ΕΜΠΕΙΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

### 5.1 Τύπος του Chézy

Ο **Antoine de Chézy** (1718 –1798) ήταν Γάλλος Υδραυλικός Μηχανικός, γνωστός για τη φόρμουλα του Chézy που αφορά σε ροή σε σωλήνες. Πέθανε το 1798 αφού διατέλεσε διευθυντής στην *École nationale des ponts et chaussées* για διάστημα μικρότερο από ένα έτος. Από τη γενικευμένη σχέση των Darcy - Weisbach

$$h_f = J_E L = L \frac{f}{4R_H} \frac{V^2}{2g}$$

λύνοντας ως προς την ταχύτητα  $V$  ( $R_H=R$ )

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{RJ_E} = C \sqrt{RJ_E} \quad (\text{τύπος του Chézy}) \quad (5.1)$$

καταλήγουμε στη σχέση του Chézy (5.1) όπου  $C$  ορίζεται σαν ο συντελεστής του Chézy. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο συντελεστής του Chézy δεν είναι σταθερός αλλά είναι συνάρτηση της ταχύτητας και τραχύτητας του αγωγού (γιατί;).

### 5.2 Άλλοι εμπειρικοί τύποι.

(α) Τύπος του Kutter.

Εάν στη σχέση του Chézy αντικαταστήσουμε το συντελεστή  $C$  με τη σχέση

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} \quad (5.2)$$

προκύπτει ο τύπος του Kutter

$$V = \frac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} \sqrt{RJ} \quad (5.3)$$

όπου  $J$  είναι η κλίση της γραμμής ενέργειας ή της πιεζομετρικής γραμμής και  $R$  η υδραυλική ακτίνα. Ο συντελεστής  $m$  λαμβάνει τις τιμές

$m = 0.25$  για σχετικά καθαρό νερό (δίκτυα ύδρευσης και άρδευσης)

$m = 0.35$  για όχι καθαρό νερό (αποχετευτικά δίκτυα υπό πίεση - καταθλιπτικός αγωγός ακαθάρτων).

(β) Τύπος του Manning.

Η σχέση του Chézy όπως είναι διατυπωμένη δεν λαμβάνει υπόψη τη σχετική με το βάθος ροής τραχύτητα. Όμως αν στη σχέση του Chézy αντικαταστήσουμε το συντελεστή  $C$  με το γινόμενο

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6},$$

αν δηλαδή ελαττώνουμε την τραχύτητα σε συνάρτηση με την υδραυλική ακτίνα  $R$ , προκύπτει ο τύπος του Manning

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} \quad (5.4)$$

όπου όπου  $J$  είναι η κλίση της γραμμής ενέργειας,  $V$  η μέση ταχύτητα σε m/s και  $R$  η υδραυλική ακτίνα σε m. Ο συντελεστής  $n$  εξαρτάται μόνο από το είδος της επιφάνειας, π.χ.  $n = 0.011 - 0.013$  για λείους τσιμεντοσωλήνες και είναι σταθερός, ανεξάρτητα από τις διαστάσεις του αγωγού. Τη σχέση του Manning χρησιμοποιούσαν οι μηχανικοί ευρύτατα κατά το παρελθόν, δίνει δε πολύ καλά αποτελέσματα όταν εφαρμοστεί.

**Σημείωση:** Η παραπάνω σχέση (5.4) ισχύει μόνον για το σύστημα μονάδων SI, όπου η υδραυλική ακτίνα δίδεται σε m και η ταχύτητα σε m/s. Εάν θελήσουμε να εφαρμόσουμε τη σχέση στο σύστημα των US, όπου η υδραυλική ακτίνα είναι σε ft και η ταχύτητα σε ft/s ( $1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$ ) διατηρώντας τις ίδιες τιμές του  $n$  και στα δύο συστήματα, αυτή θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί ένα συντελεστή  $k$  για να μας δώσει συμβατό αποτέλεσμα. Εάν για το SI και το US σύστημα οι ταχύτητες είναι

$$V_{SI} = \frac{1}{n} R_{SI}^{2/3} J^{1/2} \quad \text{και} \quad V_{US} = \frac{k}{n} R_{US}^{2/3} J^{1/2}$$

αντίστοιχα, τότε διαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\frac{V_{SI}}{V_{US}} = \frac{1}{k} \left( \frac{R_{SI}}{R_{US}} \right)^{2/3} \Leftrightarrow \frac{1}{0.3048} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{0.3048} \right)^{2/3} \Rightarrow k = 0.3048^{-1/3} = 1.49$$



Επομένως, για να διατηρήσουμε τις ίδιες τιμές του  $n$  και στα δύο συστήματα (SI και US) ο υπολογισμός της ταχύτητας στο σύστημα US πρέπει να γίνεται με τη σχέση

$$V = \frac{1.49}{n} R^{2/3} J^{1/2}; \quad V \text{ (ft/s ή fps) και } R \text{ (ft)} \quad (5.4a)$$

### 5.3 Εξίσωση των Hazen - Williams

Παλαιότερα, για τον υπολογισμό των γραμμικών απωλειών σε σωλήνες, οι μηχανικοί χρησιμοποιούσαν την εμπειρική σχέση των Hazen - Williams

$$h_f = \frac{6.79L}{D^{1.16}} \left( \frac{V}{C} \right)^{1.85}$$

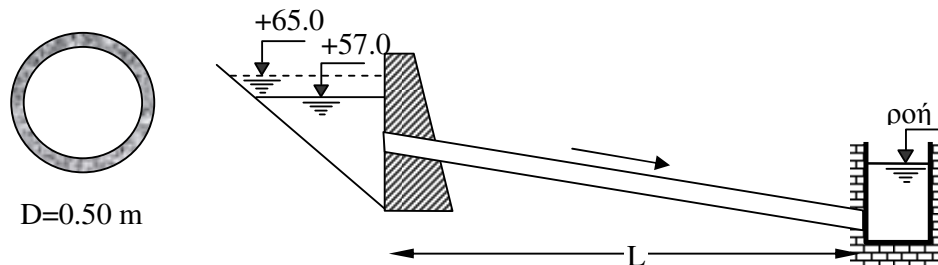
όπου

- $h_f$  ... οι γραμμικές απώλειες ενέργειας σε m
- $L$  ... το μήκος του αγωγού σε m
- $D$  ... η διάμετρος του αγωγού σε m
- $V$  ... η μέση ταχύτητα σε m/s
- $C$  ... ο συντελεστής τριβών των Hazen - Williams.

Στην παραπάνω σχέση, για τραχύτερους αγωγούς χρησιμοποιούμε μικρότερα  $C$ . Η τιμή του συντελεστή τριβής μεταβάλλεται από περίπου 100 (πολύ τραχείς σωλήνες) μέχρι περίπου 140 (λείοι σωλήνες). Η παραπάνω σχέση φυσικά δεν είναι αδιάστατη και επομένως οι σταθερές διαφέρουν ανάμεσα στο SI και το Αμερικάνικο σύστημα μονάδων.

**Παράδειγμα 5.1** Ο σωλήνας μεταφοράς νερού του σχήματος από το φράγμα της περιοχής στη δεξαμενή της πόλης διαμέτρου  $D=0.50$  m και μήκους  $L=5000$  m, έχει συντελεστή τραχύτητας Manning  $n=0.012$ .

Να υπολογίσετε τις παροχές που μεταφέρει, εάν η στάθμη της δεξαμενής είναι στα +23m και η κατώτατη και ανώτατη στάθμη του φράγματος στα +57m και +65 m αντίστοιχα.



### Απάντηση

Οι γραμμικές απώλειες ενέργειας για την ανώτατη και κατώτατη στάθμη του φράγματος είναι  $\Delta H_1=65-23=42$  m και  $\Delta H_2=57-23=34$  m αντίστοιχα, οι δε κλίσεις της γραμμής ενέργειας του αγωγού είναι  $J_{E1} = 42/5000=0.0084$  και  $J_{E2} = 34/5000=0.0068$ .

Επίσης  $A = \pi \times 0.5^2/4 = 0.196$  m<sup>2</sup> και  $R = D/4 = 0.125$  m.

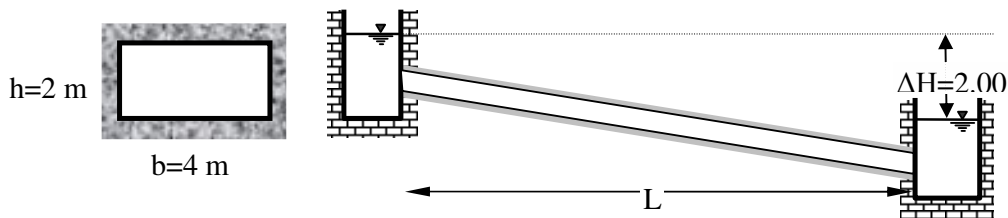
Από τη σχέση του Manning

$$Q_{\max} = \frac{A}{n} R^{2/3} J_{E1}^{1/2} = 0.375 \text{ m}^3/\text{s} \text{ και}$$

$$Q_{\min} = \frac{A}{n} R^{2/3} J_{E2}^{1/2} = 0.337 \text{ m}^3/\text{s}.$$

**Παράδειγμα 5.2** Ο ορθογωνικός αγωγός αποχέτευσης ομβρίων του σχήματος, μήκους  $L=1000$  m, συνδέει δύο φρεάτια επίσκεψης και μεταφέρει παροχή  $10$  m<sup>3</sup>/s όταν η ροή γίνεται υπό πίεση όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να υπολογίσετε το συντελεστή Manning του αγωγού.



### Απάντηση

Η κλίση της γραμμής ενέργειας του αγωγού είναι

$$J_E = 2.00/1000 = 0.002.$$

Επίσης  $A = 8$  m<sup>2</sup>,  $P = 12$  m και  $R = A/P = 0.667$  m.

Από τη σχέση του Manning

$$n = \frac{AR^{2/3}}{Q} J_E^{1/2} = \frac{8 \times (0.667)^{2/3}}{10} (0.002)^{1/2} = 0.027$$

Ο συντελεστής του Manning που προσδιορίσαμε είναι αρκετά μεγαλύτερος από αυτόν του τραχέος σκυροδέματος.

## 6. ΜΟΝΙΜΗ ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ, ΤΟΠΙΚΕΣ ΑΠΩΛΕΙΕΣ

Ανομοιόμορφη χαρακτηρίζεται η μόνιμη ροή στην οποία το διάνυσμα της ταχύτητας κατά μήκος της γραμμής ροής μεταβάλλεται (κατά μέγεθος, κατά διεύθυνση ή και τα δύο). Γεωμετρικές μεταβολές των στερεών ορίων της ροής επιτυγχάνονται με ειδικά τεμάχια. Οι μεταβολές αυτές μπορεί να είναι

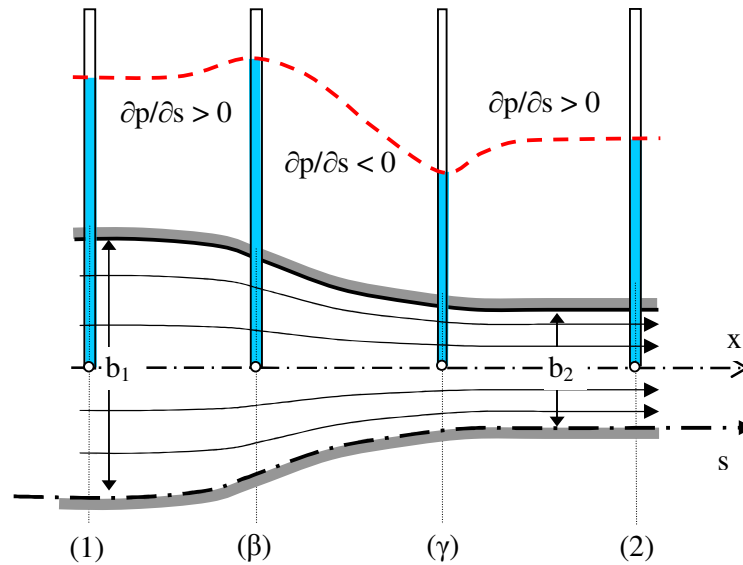
- (α) Μεταβολές διατομής
  - (1) συστολή (βαθμιαία ή απότομη)
  - (2) διαστολή (βαθμιαία ή απότομη)
- (β) Μεταβολές κατεύθυνσης (σε οριζοντιογραφία ή μηκοτομή)
- (γ) Παρεμβολή μετρητικών συσκευών (π.χ. μετρητές Venturi) ή συσκευών ελέγχου της ροής (π.χ. δικλίδες).
- (δ) Διακλαδώσεις (αλλαγή στην κατεύθυνση της ροής με ή χωρίς αλλαγή της διατομής).

Οι γεωμετρικές μεταβολές προκαλούν διαταραχή στα χαρακτηριστικά της ομοιόμορφης ροής. Οι μεταβολές αυτές στην ομοιόμορφη ροή μπορεί να είναι επιτάχυνση ή επιβράδυνση της ροής, αποκόλληση και ανάπτυξη οριακού στρώματος.

Οι γεωμετρικές μεταβολές προκαλούν απώλειες ενέργειας λόγω παραγωγής τύρβης (η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα από την επενέργεια του ιξώδους στην περιοχή "viscous subrange" του φάσματος της τύρβης), και όχι λόγω τριβών στα τοιχώματα του αγωγού, που ονομάζονται *απώλειες σχήματος*. Οι απώλειες αυτές λαμβάνουν χώρα σε μικρό μήκος και τις ονομάζουμε τοπικές (local losses).

### 6.1 Χαρακτηριστικά συγκλίνουσας ή αποκλίνουσας ροής

(α) Συγκλίνουσα ροή



**Σχήμα 6.1** Βαθμιαία συστολή.

Θεωρούμε τη διδιάστατη (2-D) βαθμιαία συστολή του σχήματος. Η εξίσωση Bernoulli μεταξύ των διατομών ομοιόμορφης ροής (1) και (2) αμελώντας τις απώλειες ενέργειας μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha \frac{V_2^2}{2g} \quad (6.1)$$

όπου ο αγωγός θεωρούμε ότι είναι οριζόντιος. Από την εξίσωση της συνέχειας όμως προκύπτει ότι

$$V_1 < V_2 \Rightarrow p_1 > p_2 \quad (6.2)$$

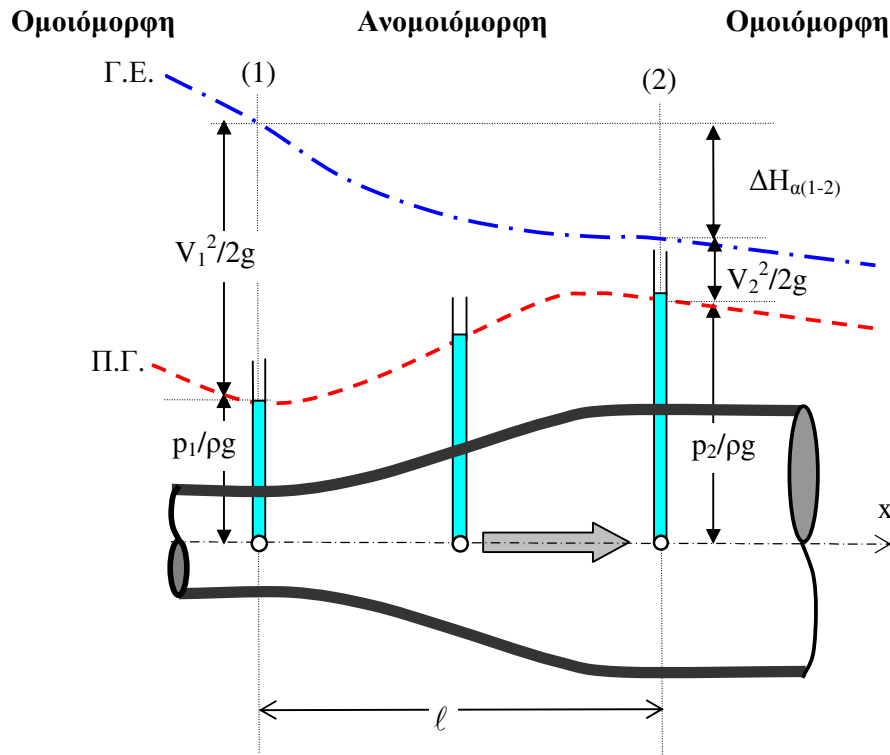
πράγμα που σημαίνει ότι θεωρητικά δεν υπάρχει αποκόλληση της ροής. Πρακτικά όμως λόγω της έντονης καμπύλωσης των γραμμών ροής, υπάρχουν κλίσεις της πίεσης κάθετες προς τις γραμμές ροής με αποτέλεσμα η μονοδιάστατη ανάλυση να μην μπορεί να αποδώσει πιστά τις λεπτομέρειες του πεδίου ροής. Αμελώντας τις τριβές το πεδίο ροής είναι αυτό του ιδεατού ρευστού που περιγράφεται από την εξίσωση του Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{ή } \nabla^2 \Psi = 0). \quad (6.3)$$

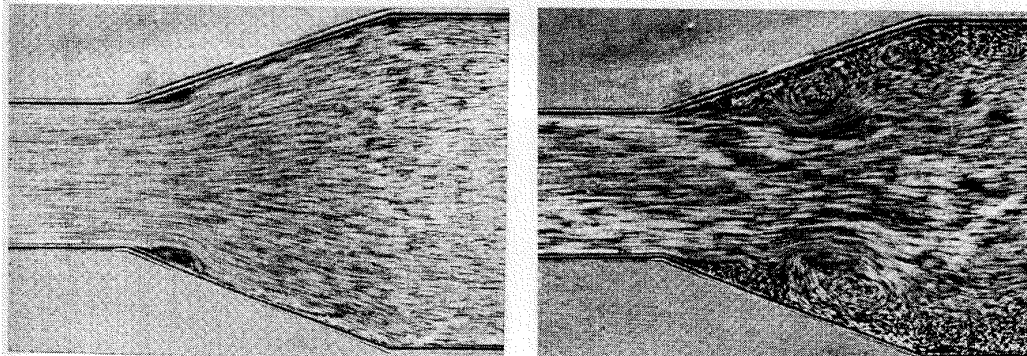
Από το πεδίο των ταχυτήτων προκύπτει η κατανομή των πιέσεων πάνω στο στερεό όριο. Στις περιοχές (1) - (β) και (γ) - (2) υπάρχει ανάστροφη κλίση της πίεσης και επομένως πιθανότητα αποκόλλησης του οριακού στρώματος στις περιοχές αυτές. Σημαντική κλίση  $\partial p / \partial s > 0 \Rightarrow$  αποκόλληση. Στο σχεδιασμό των συστολών προσπαθούμε κατά το δυνατόν να κρατούμε την κλίση της πίεσης  $\partial p / \partial s < 0$  κατά μήκος των στερεών ορίων.

(β) Διαστολές (αποκλίνουσα ροή)

Στο Σχήμα 6.2 θεωρούμε διδιάστατη αποκλίνουσα ροή. Επειδή κατά μήκος της γραμμής ροής η κλίση της πίεσης είναι θετική, παρατηρούμε αποκόλληση της ροής στα σημεία όπου η διεύρυνση της διατομής είναι έντονη. Η κύρια διαφορά μεταξύ συγκλίνουσας και αποκλίνουσας ροής είναι ότι οι απώλειες ενέργειας στην αποκλίνουσα είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από αυτές στη συγκλίνουσα ροή, επειδή δημιουργείται αποκόλληση (και κατά συνέπεια έντονη τύρβη) ευκολότερα.



Figs. 114 and 115. Slow and fast diverging flow (water, velocity = 3 ~ 4 cm/s (114), 15 ~ 20 cm/s (115), width of narrower passage = 600 mm, diverging angle = 20°, tracer method).



**Σχήμα 6.2** Επάνω: Βαθμιαία διαστολή. Κάτω: Οπτικοποίηση της ροής (Visualized flow, 1988. Ed. Japan Society of Mechanical Engineers. Pergamon Press.) σε βαθμιαία διεύρυνση υπό γωνία 20°, χαμηλή ταχύτητα (αριστερά) και μεγαλύτερη ταχύτητα (δεξιά). Η περιοχή αποκόλλησης είναι εμφανής.

## 6.2 Απώλειες ενέργειας σε συγκλίνουσα και αποκλίνουσα ροή.

Οι απώλειες ενέργειας μεταξύ των διατομών ομοιόμορφης ροής 1 και 2 των σχημάτων 6.1 και 6.2 είναι

$$H_1 - H_2 = \Delta H_{(1-2)} \quad (6.4)$$

όπου

$$H_1 = \frac{p_1}{\rho g} + h_1 + \alpha \frac{V_1^2}{2g} \quad (6.5)$$

και

$$H_2 = \frac{p_2}{\rho g} + h_2 + \alpha \frac{V_2^2}{2g}. \quad (6.6)$$

Στην περίπτωση που ο αγωγός είναι οριζόντιος, η εξίσωση των απωλειών ενέργειας μπορεί να γραφτεί ( $\alpha = 1$ )

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{(1-2)} \quad (6.7)$$

(α) *Βαθμιαία μεταβολή διατομής*

$$\Delta H_{(1-2)} = h_f + h_a \quad (6.8)$$

όπου ορίζουμε

$h_f$  ... γραμμικές απώλειες (σε περίπτωση ικανού μήκους μεταβολής διατομής)

$h_a$  ... απώλειες σχήματος

Οι απώλειες σχήματος υπολογίζονται σαν ποσοστό της κινητικής ενέργειας

$$h_a = K \frac{V^2}{2g} \quad (6.9)$$

όπου ο συντελεστής  $K$  είναι συνάρτηση της γεωμετρίας και του αριθμού Reynolds,

$$K = \varphi(\text{γεωμετρία}, \text{Re}).$$

(β) *Απότομη μεταβολή διατομής*

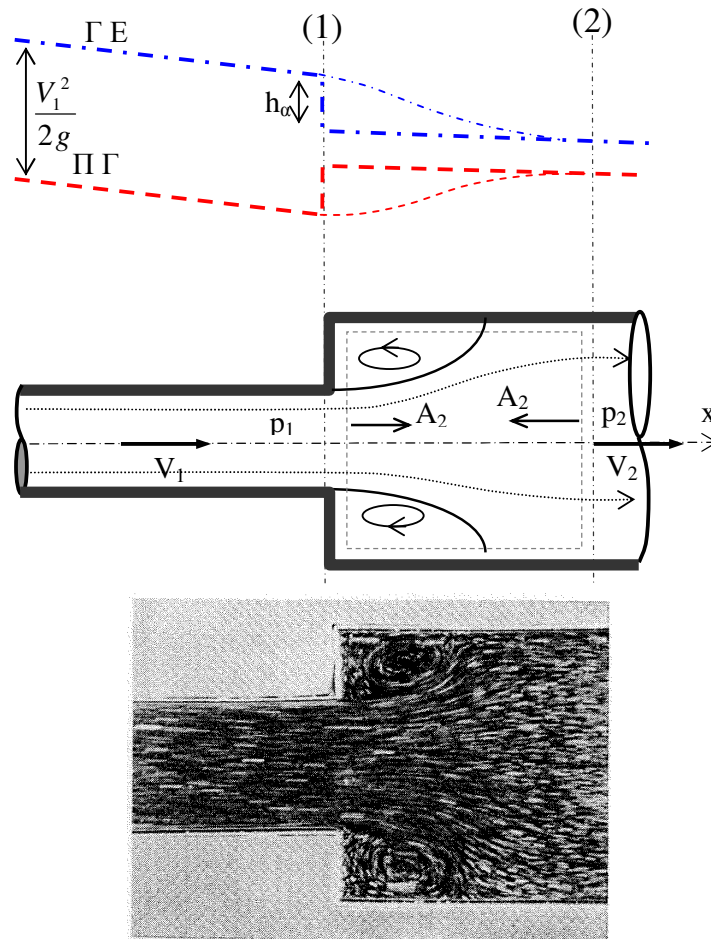
Ο συντελεστής απωλειών είναι συνάρτηση της γεωμετρίας και μόνο (δεν επηρεάζεται πρακτικά από τον αριθμό του Reynolds) στην περίπτωση πλήρως ανεπτυγμένης τυρβώδους ροής. Όταν η ροή πλησιάζει προς τη στρωτή,  $K = \varphi(\text{γεωμετρία}, \text{Re})$ .

(γ) *Απότομη διαστολή - αποκλίνουσα ροή*

Η απότομη διαστολή (sudden expansion) είναι η μοναδική περίπτωση για την οποία είναι δυνατός ο αναλυτικός υπολογισμός του συντελεστή τοπικών απωλειών από τη μονοδιάστατη ανάλυση. Θα παραθέσουμε στη συνέχεια τον υπολογισμό του  $K$ .

Η εξίσωση συνέχειας γράφεται

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (6.10)$$



**Σχήμα 6.3** Απότομη διαστολή. Η οπτικοποίηση της ροής ελήφθη από το Visualized flow, 1988. Ed. Japan Society of Mechanical Engineers. Pergamon Press. Θεωρητικά, οι μεταβολές στη ΓΕ και ΠΓ είναι σημειακές (απότομες), ενώ στην πραγματικότητα είναι ομαλές και πραγματοποιούνται σε κάποιο μήκος, που πρακτικά θεωρείται αμελητέο.

Από την εξίσωση ενέργειας μεταξύ των διατομών (1) και (2) του σχήματος προκύπτει ότι για οριζόντιο αγωγό

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{a(1-2)} \Rightarrow h_a = \Delta H_{a(1-2)} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} \quad (6.11)$$

Από την εξίσωση ορμής (ποσότητας κίνησης) κατά μήκος του άξονα x

$$F = F_p + F_g + F_\tau = \rho Q(V_2 - V_1) = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

όπου  $F_g = F_\tau = 0$  και  $F_p = p_1 A_1 - p_2 A_2$  προκύπτει ότι

$$\rho V_2 A_2 (V_2 - V_1) = p_1 A_1 - p_2 A_2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho V_2 (V_2 - V_1). \quad (6.12)$$

Από τις σχέσεις (6.11) και (6.12) επομένως προκύπτει ότι (μηδενικό μήκος συστολής) έχουμε μόνο απώλειες σχήματος που είναι

$$\begin{aligned}
 h_a = \Delta H_{\alpha(1-2)} &= \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = \frac{\rho V_2 (V_2 - V_1)}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} \\
 &= \dots = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}
 \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις λοιπόν συνάγεται ότι ο συντελεστής απωλειών  $K_{SE}$  σε απότομη διαστολή (sudden expansion – SE) θα είναι

$$K_{SE} = \frac{h_a}{V_1^2 / 2g} = \left[ 1 - \frac{V_2}{V_1} \right]^2 \quad (6.14)$$

Από την εξίσωση συνέχειας (6.10) όμως ο συντελεστής απωλειών μπορεί να εκφραστεί με βάση τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ροής με την ακόλουθη σχέση

$$K_{SE} = \left[ 1 - \frac{A_1}{A_2} \right]^2 \quad (6.15)$$

Στην περίπτωση που ο αγωγός έχει αξονική συμμετρία (σωλήνας) ο συντελεστής τοπικών απωλειών γράφεται ( $D$  = διάμετρος σωλήνα)

$$K_{SE} = \left[ 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (6.16)$$

Η παραπάνω σχέση για την περίπτωση εισόδου σωλήνα σε δεξαμενή ασυμπτωτικά δίνει την τιμή  $K_{SE} = 1$ , επειδή  $D_2 = \infty$ . Αυτό είναι λογικό επειδή έχουμε καθολική μετατροπή της κινητικής ενέργειας του νερού σε θερμότητα λόγω τυρβώδους ανάμιξης του νερού του σωλήνα με αυτό της δεξαμενής.

(δ) *Κωνικός διαχύτης.*

- Είναι το ειδικό τεμάχιο που επιτρέπει τη βαθμιαία μεταβολή σωλήνα διαμέτρου  $D$  σε σωλήνα μεγαλύτερης διαμέτρου.
- Χρησιμοποιείται για ελαχιστοποίηση των απωλειών ενέργειας.
- Χρησιμοποιείται επίσης για μεγιστοποίηση της μετατροπής κινητικής ενέργειας σε πιεζομετρικό ύψος.
- Η βέλτιστη γωνία για ελαχιστοποίηση των απωλειών ενέργειας είναι  $\theta = 7^\circ$  (μικρότερη γωνία από αυτή συνεπάγεται μεγαλύτερες γραμμικές απώλειες ενέργειας).
- Η χρήση πτερυγίων συμβάλλει στη σμίκρυνση της γωνίας  $\theta$ . Το μήκος των πτερυγίων θα πρέπει να είναι μικρότερο από αυτό του διαχύτη ( $\ell < L$ ).



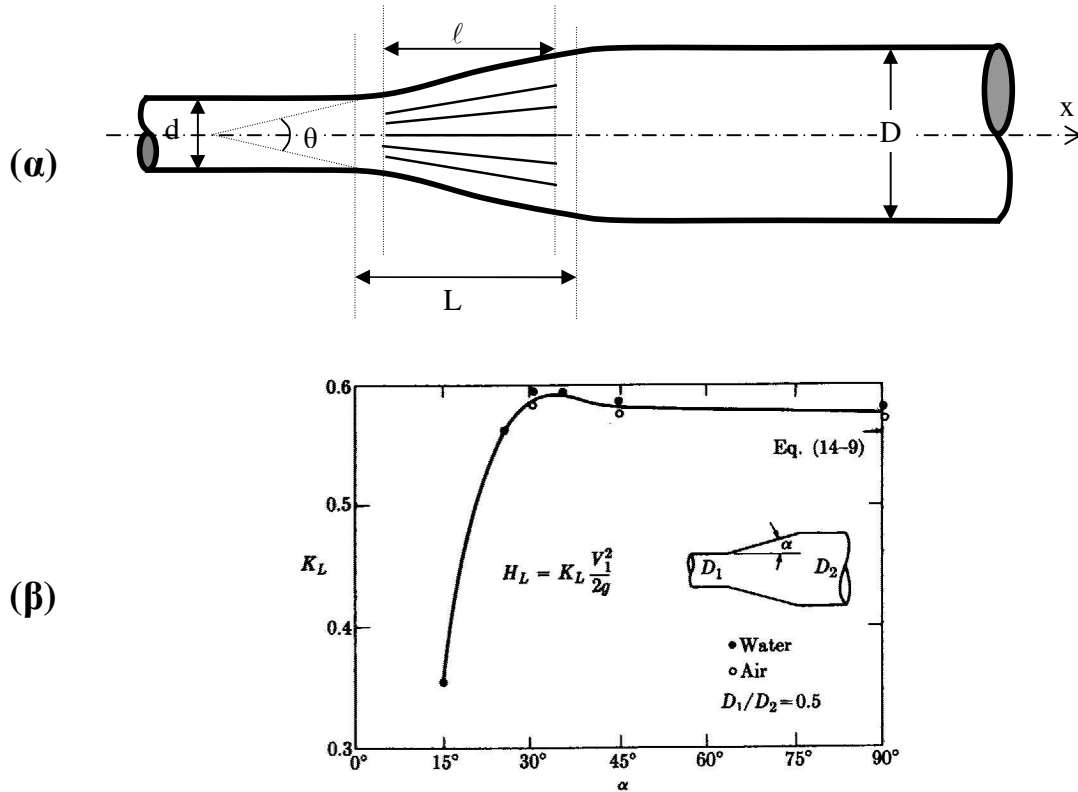


FIG. 14-7. Head loss in wide-angle diffusers [1].

**Σχήμα 6.4** (α) Κωνικός διαχύτης, (β) απώλειες ενέργειας (Daily & Harleman, 1966, Fig. 14-7, σελ. 316).

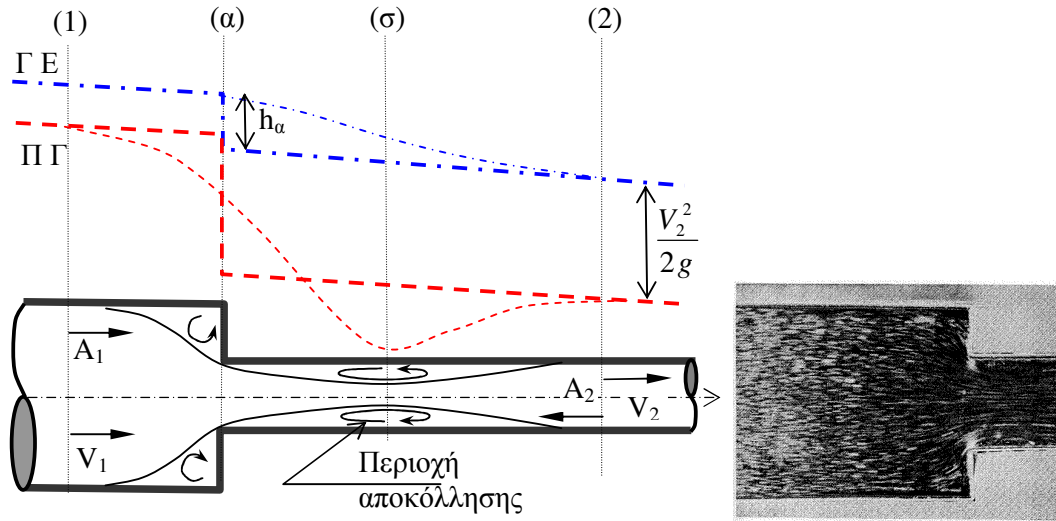
(ε) Απότομη συστολή - συγκλίνουσα ροή.

Παρουσιάζονται απώλειες ενέργειας για δύο λόγους: (1) από την παρουσία δευτερεύουσας ροής και (2) από την παραγωγή τύρβης κατά την απόκλιση της φλέβας κατάντη της διατομής συστολής. Κατά μήκος του αγωγού ο τύπος της ροής που παρατηρούμε είναι:

1. Ομοιόμορφη ροή ανάντη της διατομής (1) και κατάντη της διατομής (2).
2. Ανομοιόμορφη ροή μεταξύ των διατομών (1) και (2).
  - Αποκόλληση στη διατομή συστολής ( $\alpha$ ).
  - Πλήρης συστολή στη διατομή ( $\sigma$ ).
  - Συγκλίνουσα ροή από (1) έως ( $\sigma$ ).
  - Αποκλίνουσα ροή από ( $\sigma$ ) έως (2).

Ο συντελεστής τοπικών απωλειών  $K_{SC}$  για απότομη συστολή (sudden contraction – SC) έχει προκύψει από πειραματική διερεύνηση ότι είναι  $K_{SC} = \varphi(A_2/A_1)$ , βλ. πίνακα 6.1, όπου

$$K_{sc} = \frac{h_a}{V_2^2 / 2g} \quad (6.17)$$



**Σχήμα 6.5** Απότομη συστολή. Η οπτικοποίηση της ροής ελήφθη από το Visualized flow, 1988. Ed. Japan Society of Mechanical Engineers. Θεωρητικά, οι μεταβολές στη ΓΕ και ΠΓ είναι σημειακές ενώ στην πραγματικότητα είναι ομαλές και πραγματοποιούνται σε κάποιο μήκος, που θεωρείται αμελητέο.

Από τη διατομή πλήρους συστολής έως τη διατομή (2) οι απώλειες ενέργειας μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση (6.13)

$$h_{a(\sigma-2)} = \frac{(V_\sigma - V_2)^2}{2g} = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} \quad (6.18)$$

όπου  $V_\sigma = V_2 / C$ . Επομένως οι απώλειες ενέργειας από τη διατομή (1) έως τη διατομή (2) θα είναι

$$K(V_2^2 / 2g) = h_a = h_{a(1-2)} = h_{a(1-\sigma)} + h_{a(\sigma-2)}. \quad (6.19)$$

Από τις εξισώσεις (6.17), (6.18) και (6.19) και την εξίσωση συνέχειας

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = V_\sigma A_\sigma = C A_2 V_\sigma$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} h_{a(1-\sigma)} &= h_a - h_{a(\sigma-2)} = K \frac{V_2^2}{2g} - \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = K_\sigma \frac{V_\sigma^2}{2g} \\ \Rightarrow K_\sigma &= C^2 \left\{ K - \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Γενικά ισχύει

$$h_{a(1-2)} = K_{sc} \frac{V_2^2}{2g}$$

όπου το  $K$  προσδιορίζεται με βάση το λόγο των διατομών  $A_2/A_1$  από τον πίνακα 6.1.

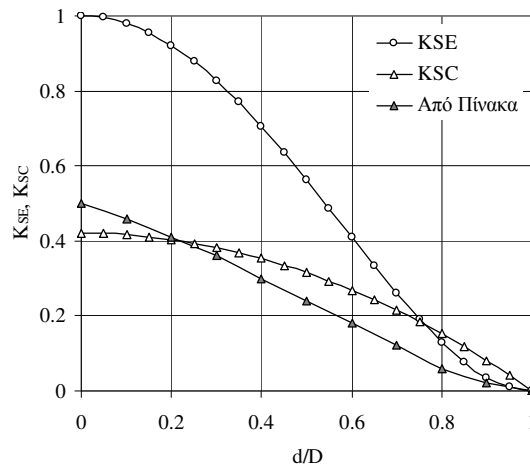
**Πίνακας 6.1** Χαρακτηριστικά απότομων συστολών.

| $A_2/A_1$ | 0    | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 1.0   |
|-----------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>C</b>  | 0.61 | 0.624 | 0.632 | 0.643 | 0.659 | 0.681 | 0.712 | 0.755 | 0.813 | 0.892 | 1.000 |
| <b>K</b>  | 0.50 | 0.46  | 0.41  | 0.36  | 0.30  | 0.24  | 0.18  | 0.12  | 0.06  | 0.02  | 0.00  |

Εκτός από τον παραπάνω πίνακα, αναπτύχθηκαν εμπειρικές σχέσεις για τις απώλειες ενέργειας της συστολής που βασίζονται σε πειραματικές μετρήσεις, δεδομένου ότι η θεωρία δεν μπορεί να δώσει λύσεις. Μια από τις σχέσεις προσδιορισμού του συντελεστή απωλειών σε απότομη συστολή  $K_{SC}$  δίδεται από τον White (1994)

$$K_{SC} \approx 0.42 \left( 1 - \frac{d^2}{D^2} \right) \quad (6.21)$$

που για τιμές του λόγου των διαμέτρων που υπερβαίνουν το  $d/D=0.76$  οι συντελεστές απωλειών απότομης συστολής και διαστολής σχεδόν ταυτίζονται. Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνονται οι μεταβολές των  $K$  σαν συνάρτηση του λόγου  $d/D$  (εξισώσεις 6.16, 6.20 και Πίνακας 6.1).



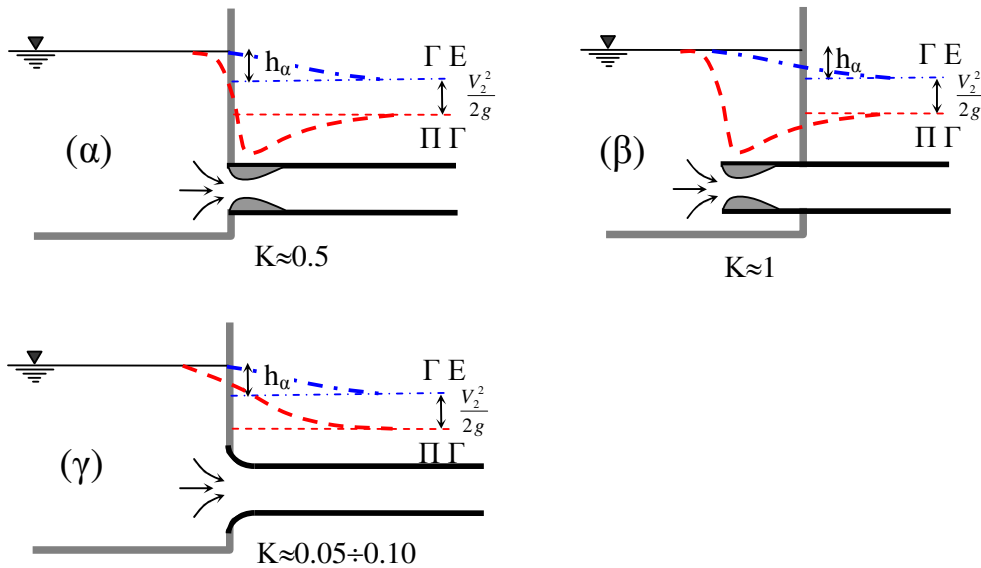
**Σχήμα 6.6** Μεταβολή των συντελεστών τοπικών απωλειών σε απότομη διεύρυνση και στένωση σωλήνα σαν συνάρτηση του λόγου των διαμέτρων  $d/D$ .

**Εφαρμογή:** Να προσδιορίσετε το συντελεστή απωλειών εισόδου σε σωλήνα από μεγάλη δεξαμενή (υδροληψία).

Απάντηση

Όταν  $A_1 = \infty$  ( $A_2/A_1=0$ ), τότε από τον πίνακα 6.1 προκύπτει ότι  $K = K_e = 0.50$ . Όταν όμως το στόμιο της οπής είναι στρογγυλεμένο, ακόμη και για μικρή ακτίνα καμπυλότητας, τότε  $K_e=0.10$ . Σε μεγάλα έργα υδροληψίας χρησιμοποιούνται ελλειπτικές συναρμογές στην είσοδο και οι απώλειες είναι ακόμα μικρότερες π.χ.  $K_e=0.05$ .

Στο Σχήμα 6.7 παρουσιάζονται οι τοπικές απώλειες εισόδου από δεξαμενή σε σωλήνα για τις περισσότερο συνηθισμένες τρεις διαμορφώσεις εισόδου.

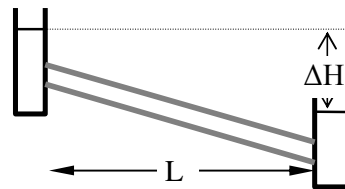


**Σχήμα 6.7** Συντελεστές τοπικών απωλειών εισόδου σε σωλήνα (α) χωρίς προσαρμογή, (β) εισερχόμενη στη δεξαμενή και (γ) με στρογγυλευμένη είσοδο.

**Παράδειγμα 6.1**

Ο αγωγός αποχέτευσης ομβρίων του σχήματος, με συντελεστή Manning  $n=0.014$ , συνδέει δύο φρεάτια επίσκεψης που απέχουν μεταξύ τους  $L=1000$  m και μεταφέρει παροχή  $Q=6$  m<sup>3</sup>/s.

Σε περίπτωση που η ροή γίνεται υπό πίεση και η υψομετρική διαφορά στάθμης των δύο φρεατίων είναι  $\Delta H=2.20$ m, να υπολογίσετε τη διάμετρο του αγωγού, λαμβάνοντας υπόψη τις τοπικές απώλειες,  $K_{\text{εισ}}=0.5$ ,  $K_{\text{εξ}}=1.0$ .



Απάντηση

(α) Λαμβάνοντας υπόψη τις τοπικές απώλειες εισόδου εξόδου έχουμε ότι

$$\Delta H = h_f + K_{\text{εισ}} \frac{V^2}{2g} + K_{\text{εξ}} \frac{V^2}{2g} = J_E L + h_e; \quad h_e = 1.50 \frac{V^2}{2g}$$

όπου V η μέση ταχύτητα ροής στο σωλήνα που προσδιορίζουμε από τη σχέση του Manning. Η λύση θα γίνει με δοκιμές. Θεωρούμε αρχικά τη διάμετρο γνωστή, απ' όπου με την εξίσωση του Manning προσδιορίζουμε την κλίση του αγωγού  $J_E$ , τις γραμμικές, τοπικές και ολικές απώλειες, που πρέπει να είναι 2.20m. Οι δοκιμές φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

| Q                 | D    | R    | V    | J <sub>E</sub> | h <sub>f</sub> | H <sub>e</sub> | H=h <sub>f</sub> +h <sub>e</sub> |
|-------------------|------|------|------|----------------|----------------|----------------|----------------------------------|
| m <sup>3</sup> /s | m    | m    | m/s  |                | m              | m              | m                                |
| 6                 | 1.80 | 0.45 | 2.36 | 0.0032         | 3.16           | 0.43           | 3.58                             |
| 6                 | 1.90 | 0.48 | 2.12 | 0.0024         | 2.37           | 0.34           | 2.71                             |
| 6                 | 2.00 | 0.50 | 1.91 | 0.0018         | 1.80           | 0.28           | 2.08                             |
| 6                 | 1.98 | 0.50 | 1.95 | 0.0019         | 1.90           | 0.29           | 2.19                             |

Επομένως, η διάμετρος του αγωγού είναι 1.98 m.

### 6.3 Αλλαγές κατεύθυνσης – καμπύλες και γωνίες.

Αλλαγή κατεύθυνσης σε σωλήνες πραγματοποιείται με γωνίες ή με καμπύλες. Η ροή σε καμπύλη είναι αρκετά πολύπλοκη επειδή (i) είναι τριδιάστατη, (ii) υπάρχει δευτερεύουσα ροή, (iii) υπάρχει ελικοειδής κίνηση που συνεχίζεται σε ικανό μήκος μετά το τέλος της καμπύλης και (iv) υπάρχει αποκόλληση στην εσωτερική παρειά.

Μια περιγραφή της ροής σε καμπύλη δίνεται στο Σχήμα 6.8. Δευτερεύουσα ροή φαίνεται στο σχήμα 6.8 (a), στο δε διάγραμμα των ισοταχών (b) φαίνεται έντονα το φαινόμενο της αποκόλλησης της ροής, ενώ η κατανομή των πιέσεων στην εσωτερική και εξωτερική παρειά της καμπύλης φαίνεται στο σχήμα 6.8(c). Στις φωτογραφίες του Σχήματος 6.9 φαίνεται η λειτουργία των πτερυγίων σε καμπύλη και γωνία 90°. Είναι εμφανής η βελτίωση της ροής με τη σημαντικότερη μείωση των περιοχών αποκόλλησης της ροής και κατά συνέπεια των τοπικών απωλειών ενέργειας. Ο συντελεστής τοπικών απωλειών  $K$  είναι συνάρτηση της γωνίας της καμπύλης  $\theta$  και του λόγου των ακτίνων  $r/R$

$$K = \frac{h_a}{V^2 / 2g} = \phi\left(\frac{r}{R}, \theta\right). \quad (6.22)$$

και μεταβάλλεται σύμφωνα με την σχέση  $0.15 < K < 0.40$ . Η βέλτιστη τιμή του  $K$  προκύπτει για  $R/r = 4$ . Όταν  $R = 0$  (απότομη γωνία 90°),  $K = 1.10$ . Χρήση πτερυγίων μπορεί να μειώσει το συντελεστή τοπικών απωλειών σε γωνίες μέχρι και την τιμή  $K=0.20$ . Στο Σχήμα 6.10 φαίνεται ο μετρημένος συντελεστής απωλειών σε καμπύλες λείων σωλήνων, για διαφορετικές γωνίες και λόγο ακτίνας καμπυλότητας προς ακτίνα του αγωγού.

### 6.4 Δικλίδες – ρύθμιση της ροής (δες επίσης Παράρτημα Β).

Από τεχνική άποψη η ρύθμιση της ροής επιτυγχάνεται μειώνοντας ή αυξάνοντας τη διατομή διόδου του ρευστού. Από υδραυλική άποψη, η ρύθμιση της ροής επιτυγχάνεται με την εισαγωγή τοπικών απωλειών.

Οι συσκευές με τις οποίες ρυθμίζουμε την παροχή των αγωγών ονομάζονται δικλίδες ή βάνες. Υπάρχουν διάφορων ειδών δικλίδες, όπως οι σφαιρικές, οι συρταρωτές, οι δικλίδες βύσματος, πεταλούδας κλπ. Για παράδειγμα, στις συρταρωτές δικλίδες οι τοπικές απώλειες μπορούν να εκφραστούν με μια σχέση της μορφής

$$K = \frac{h_a}{V^2 / 2g} \quad (6.23)$$

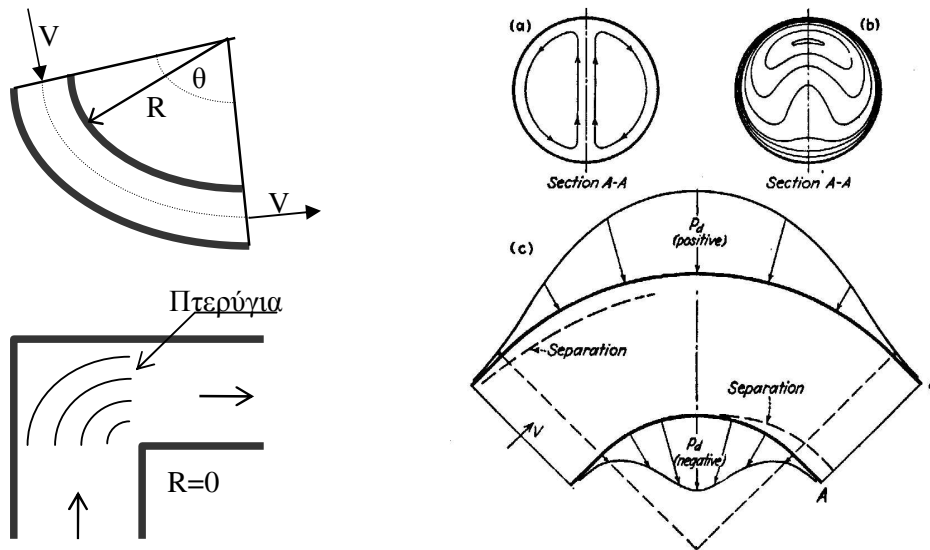
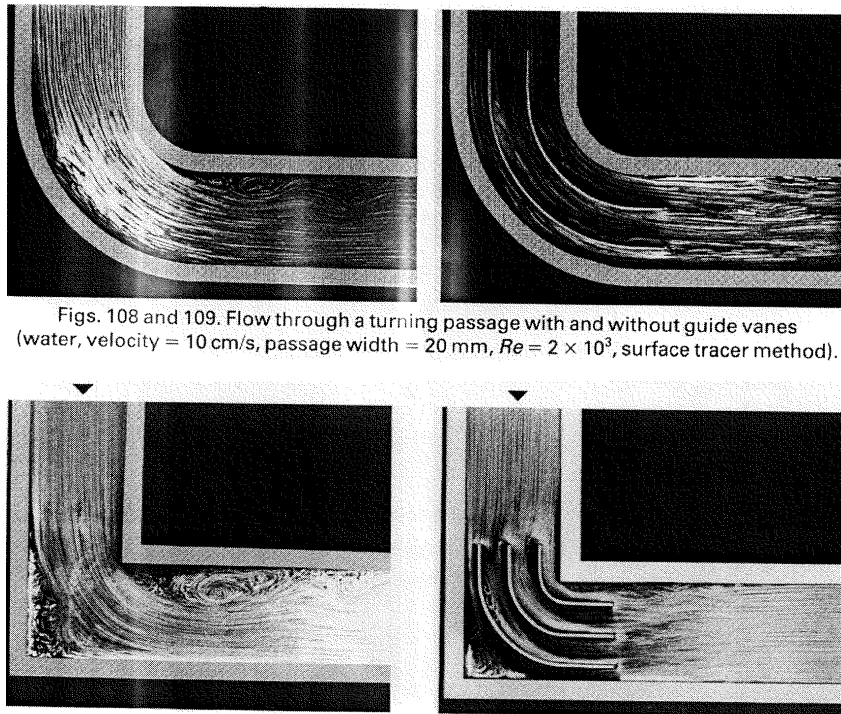


FIG. 139.—Flow at a conduit bend.

Σχήμα 6.8 Ροή σε καμπύλη σωλήνα<sup>9</sup>.



Figs. 108 and 109. Flow through a turning passage with and without guide vanes (water, velocity = 10 cm/s, passage width = 20 mm,  $Re = 2 \times 10^3$ , surface tracer method).

Σχήμα 6.9 Οπτικοποίηση της ροής χωρίς ή με την χρήση πτερυγίων σε καμπύλη και γωνία 90°, (από Visualized flow, 1988. Ed. Japan Society of Mechanical Engineers, Pergamon Press).

<sup>9</sup> Rouse, H 1961. Fluid mechanics for hydraulic engineers (Fig. 139). Dover.

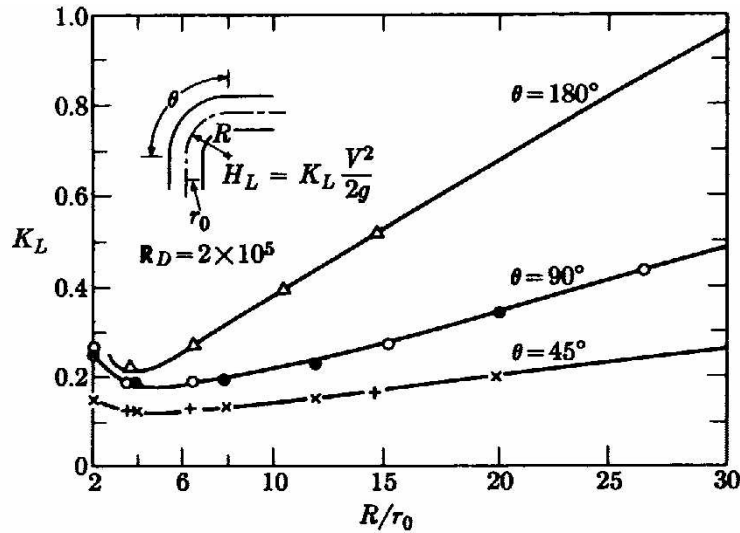
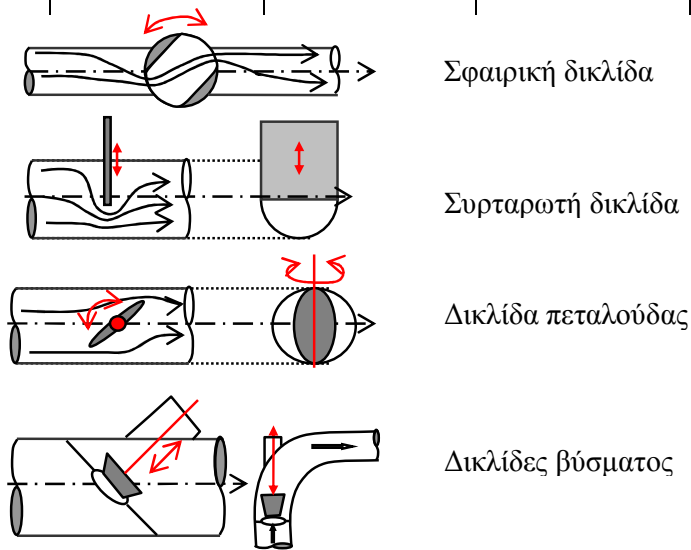


FIG. 14-15. Variation of head loss with relative radius of smooth pipe bends [8].

Σχήμα 6.10 Μεταβολή των απωλειών ενέργειας σε καμπύλες λείων αγωγών (Daily & Harleman, 1966, Fig. 14-15, σελ. 321).

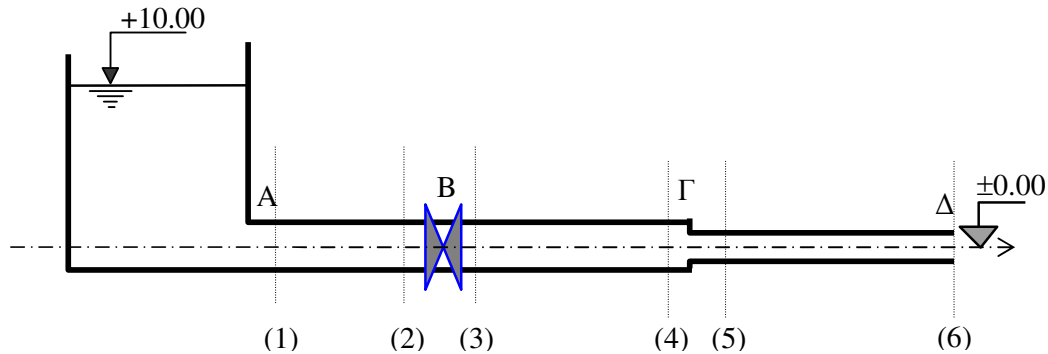
Ο συντελεστής απωλειών  $K$  της δικλίδας εξαρτάται από τον τύπο αυτής, καθώς επίσης και από το άνοιγμα της δικλίδας, σε σχέση με την πλήρη διατομή του αγωγού (βλ. Παράδειγμα στον πίνακα που ακολουθεί). Όπως φαίνεται από τον πίνακα που ακολουθεί, μια δικλίδα ακόμη και αν είναι τελείως ανοικτή προκαλεί τοπικά απώλειες ενέργειας. Το διάγραμμα του συντελεστή απωλειών σε δικλίδες δίνεται συνήθως από τον κατασκευαστή.

| Θέση δικλίδας | Open | 3/4 - Open | 1/2 - Open | 1/4 - Open |
|---------------|------|------------|------------|------------|
| <b>K</b>      | 0.20 | 1.15       | 5.60       | 24.00      |



Σχήμα 6.9 Δικλίδες.

**Παράδειγμα 6.2**



Ο λείος οριζώντιος σωλήνας ΑΔ συνολικού μήκους 300m υδροδοτείται από δεξαμενή. Το τμήμα ΑΓ = 200m έχει διάμετρο D=500 mm. Στη συνέχεια σε μήκος ΓΔ = 100m, η διάμετρος μειώνεται στα D = 200 mm το δε νερό εκρέει ελεύθερα στην ατμόσφαιρα. Στο μέσο του τμήματος ΑΓ υπάρχει συρταρωτή δικλίδα Β για τη ρύθμιση της παροχής.

Να υπολογίσετε την παροχή του αγωγού όταν η δικλίδα είναι ανοικτή κατά το 1/2 (K=6) και να χαράξετε τη γραμμή ενέργειας και πιεζομετρική γραμμή λαμβάνοντας υπόψη όλες τις τοπικές απώλειες. (Για το νερό να ληφθεί  $\nu = 1.15 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ .)

Απάντηση

Οι απώλειες ενέργειας είναι γραμμικές και τοπικές. Οι γραμμικές απώλειες των τμημάτων ΑΓ και ΓΔ βρίσκονται από το γινόμενο της κλίσης απωλειών και μήκους. Οι τοπικές απώλειες είναι οι εξής:

Απώλειες εισόδου στο σημείο Α (K=0.5):  $0.50V_{ΑΓ}^2 / 2g$

Απώλειες δικλίδας στο σημείο Β (K<sub>δ</sub> =6):  $K_{δ}V_{ΑΓ}^2 / 2g$

Απώλειες στένωσης στο σημείο Γ:  $KV_{ΓΔ}^2 / 2g$

Ενέργεια νερού στο σημείο εξόδου Δ (K=1):  $V_{ΓΔ}^2 / 2g$

Ο συντελεστής απωλειών της στένωσης υπολογίζεται από το λόγο των επιφανειών των διατομών του αγωγού  $A_2/A_1 = (D_2/D_1)^2 = (0.2/0.5)^2 = 0.16$ .

Από τον Πίνακα 6.1 προκύπτει από παρεμβολή ότι C = 0.628 και K=0.435.

Η εξίσωση ενέργειας επομένως γράφεται

$$\begin{aligned} \sum h &= h_f (ΑΓ) + h_f (ΓΔ) + 0.50V_{ΑΓ}^2 / 2g + 6V_{ΑΓ}^2 / 2g + 0.435V_{ΓΔ}^2 / 2g + V_{ΓΔ}^2 / 2g \\ &= h_f (ΑΓ) + h_f (ΓΔ) + 6.50V_{ΑΓ}^2 / 2g + 1.435V_{ΓΔ}^2 / 2g \end{aligned}$$

Δοκιμάζουμε διάφορες παροχές για τη λύση. Οι παροχές δοκιμών είναι 0.100, 0.150 και 0.200 m<sup>3</sup>/s. Η πορεία των υπολογισμών δίνεται σχηματικά με τα παρακάτω βήματα

- (Q, D) → V
- (V,D) → Re
- (Re, k<sub>s</sub>=0) → f



- $(D, V, f) \rightarrow J$
- $h_f = JL$

και οι υπολογισμοί φαίνονται στους πίνακες που ακολουθούν.

| Q=0.100 m <sup>3</sup> /s<br>Τμήμα ή Σημείο | D<br>(m) | L<br>(m) | V<br>(m/s) | Re<br>VD/v | J <sub>E</sub><br>m/m | f               | h <sub>f</sub> ή h <sub>a</sub><br>(m) |
|---|----------|----------|------------|------------|-----------------------|-----------------|--|
| ΑΓ (γραμμικές)                              | 0.500    | 200      | 0.51       | 254 648    | 0.0004                | 0.0153          | 0.08                                   |
| ΓΔ (γραμμικές)                              | 0.200    | 100      | 3.18       | 636 620    | 0.0334                | 0.0129          | 3.34                                   |
| Α (τοπικές)                                 | 0.500    |          | 0.51       |            |                       | $0.5V^2/2g =$   | 0.01                                   |
| Β (τοπικές)                                 | 0.500    |          | 0.51       |            |                       | $6V^2/2g =$     | 0.08                                   |
| Γ (τοπικές)                                 | 0.200    |          | 3.18       |            |                       | $0.435V^2/2g =$ | 0.22                                   |
| Δ (ενέρ. εξόδου)                            | 0.200    |          | 3.18       |            |                       | $V^2/2g =$      | 0.52                                   |

$$\Sigma h = 4.24$$

| Q=0.150 m <sup>3</sup> /s<br>Τμήμα ή Σημείο | D<br>(m) | L<br>(m) | V<br>(m/s) | Re<br>VD/v | J <sub>E</sub><br>m/m | f               | h <sub>f</sub> ή h <sub>a</sub><br>(m) |
|---|----------|----------|------------|------------|-----------------------|-----------------|--|
| ΑΓ (γραμμικές)                              | 0.500    | 200      | 0.76       | 381 972    | 0.0008                | 0.0142          | 0.17                                   |
| ΓΔ (γραμμικές)                              | 0.200    | 100      | 4.77       | 954 930    | 0.0699                | 0.0120          | 6.99                                   |
| Α (τοπικές)                                 | 0.500    |          | 0.76       |            |                       | $0.5V^2/2g =$   | 0.01                                   |
| Β (τοπικές)                                 | 0.500    |          | 0.76       |            |                       | $6V^2/2g =$     | 0.18                                   |
| Γ (τοπικές)                                 | 0.200    |          | 4.77       |            |                       | $0.435V^2/2g =$ | 0.51                                   |
| Δ (ενέρ. εξόδου)                            | 0.200    |          | 4.77       |            |                       | $V^2/2g =$      | 1.16                                   |

$$\Sigma h = 9.02$$

| Q=0.200 m <sup>3</sup> /s<br>Τμήμα ή Σημείο | D<br>(m) | L<br>(m) | V<br>(m/s) | Re<br>VD/v | J <sub>E</sub><br>m/m | f               | h <sub>f</sub> ή h <sub>a</sub><br>(m) |
|---|----------|----------|------------|------------|-----------------------|-----------------|--|
| ΑΓ (γραμμικές)                              | 0.500    | 200      | 1.02       | 509 296    | 0.0014                | 0.0135          | 0.28                                   |
| ΓΔ (γραμμικές)                              | 0.200    | 100      | 6.37       | 1 273 241  | 0.1182                | 0.0114          | 11.82                                  |
| Α (τοπικές)                                 | 0.500    |          | 1.02       |            |                       | $0.5V^2/2g =$   | 0.03                                   |
| Β (τοπικές)                                 | 0.500    |          | 1.02       |            |                       | $6V^2/2g =$     | 0.32                                   |
| Γ (τοπικές)                                 | 0.200    |          | 6.37       |            |                       | $0.435V^2/2g =$ | 0.90                                   |
| Δ (ενέρ. εξόδου)                            | 0.200    |          | 6.37       |            |                       | $V^2/2g =$      | 2.07                                   |

$$\Sigma h = 15.41$$

Η παροχή που δίνει συνολικό ύψος ενέργειας  $\Sigma h = 10\text{m}$  προκύπτει με γραμμική παρεμβολή και είναι  $Q = 0.159 \text{ m}^3/\text{s}$ .

(γ) Η χάραξη των ΓΕ και ΠΓ θα γίνει για  $Q=0.159 \text{ m}^3/\text{s}$ . Οι μέσες ταχύτητες ροής στα δύο τμήματα του αγωγού είναι

$$V_{ΑΓ} = 0.81 \text{ m/s} \text{ και } V_{ΓΔ} = 5.05 \text{ m/s.}$$

Με αυτά δεδομένα, οι ΓΕ και ΠΓ υπολογίζονται παρακάτω.

$$H(1) = 10 - 0.5 V_{ΑΓ}^2 / 2g = 9.97 \text{ m} \quad (\text{ΓΕ})$$

$$p_1/\rho g = H(1) - V_{ΑΓ}^2 / 2g = 9.93 \text{ m} \quad (\text{ΠΓ})$$

$$H(2) = H(1) - h_f(\text{AB}) = 9.97 - 0.09 = 9.88 \text{ m} \quad (\text{ΓΕ})$$

$$p_2/\rho g = H(2) - V_{ΑΓ}^2 / 2g = 9.84 \text{ m} \quad (\text{ΠΓ})$$

$$H(3) = H(2) - 6 V_{A\Gamma}^2 / 2g = 9.68 \text{ m} \quad (\Gamma\text{E})$$

$$p_3/\rho g = H(3) - V_{A\Gamma}^2 / 2g = 9.64 \text{ m} \quad (\Pi\Gamma)$$

$$H(4) = H(3) - h_f(B\Gamma) = 9.68 - 0.09 = 9.59 \text{ m} \quad (\Gamma\text{E})$$

$$p_4/\rho g = H(4) - V_{A\Gamma}^2 / 2g = 9.55 \text{ m} \quad (\Pi\Gamma)$$

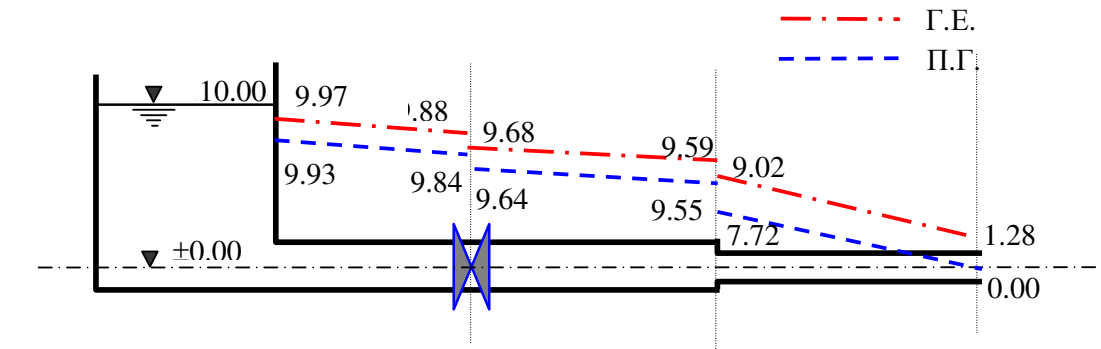
$$H(5) = H(4) - 0.435 V_{\Gamma\Delta}^2 / 2g = 9.02 \text{ m} \quad (\Gamma\text{E})$$

$$p_5/\rho g = H(5) - V_{\Gamma\Delta}^2 / 2g = 7.72 \text{ m} \quad (\Pi\Gamma)$$

$$H(6) = H(5) - h_f(\Gamma\Delta) = 9.02 - 7.74 = 1.28 \text{ m} \quad (\Gamma\text{E})$$

$$p_6/\rho g = H(6) - V_{\Gamma\Delta}^2 / 2g = 1.28 - 1.30 \approx 0.00 \text{ m} \quad (\Pi\Gamma)$$

Η ΠΓ και ΓΕ φαίνονται σχηματικά στο σχήμα που ακολουθεί.



### 6.5 Ισοδύναμο μήκος – σημασία των τοπικών απωλειών.

Ορίζουμε σαν ισοδύναμο μήκος  $L_I$  του ειδικού τεμαχίου αγωγού, το μήκος του αγωγού της ίδιας διαμέτρου  $D$ , στο οποίο οι γραμμικές απώλειες ενέργειας είναι ίσες με τις τοπικές απώλειες του υπό μελέτη ειδικού τεμαχίου, δηλαδή

$$h_a = K \frac{V^2}{2g} = h_f = f \frac{L_I}{D} \frac{V^2}{2g} \Leftrightarrow L_I = \frac{KD}{f}. \quad (6.24)$$

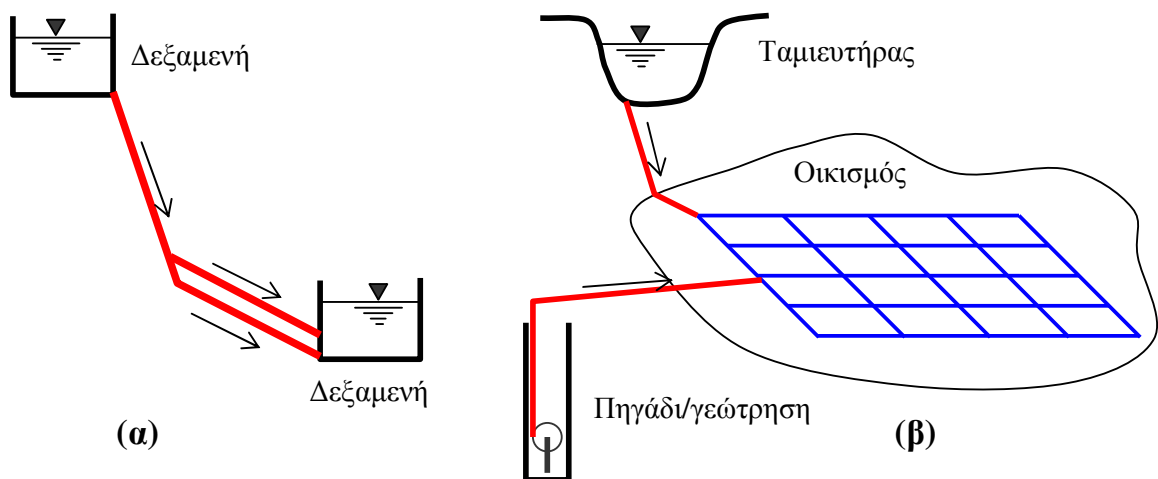
Κατ' αυτό τον τρόπο, αγωγός στον οποίο κατά μήκος υπάρχουν και τοπικές απώλειες, μπορεί να αντικατασταθεί με αγωγό μεγαλύτερου μήκους, στον οποίο υπάρχουν μόνο γραμμικές απώλειες φορτίου. Αρκεί τα ειδικά τεμάχια (συστολές, διαστολές, δικλίδες κλπ) να αντικατασταθούν με τα αντίστοιχα ισοδύναμα μήκη τους.

Η σημασία των τοπικών απωλειών σε ένα αγωγό μεταφοράς ρευστών είναι μεγάλη, ειδικότερα όταν είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις γραμμικές απώλειες φορτίου του αγωγού. Σε μεγάλα τμήματα ομοιόμορφων αγωγών που διασυνδέονται, οι τοπικές απώλειες ενέργειας μπορούν να αμεληθούν, εάν τις συγκρίνουμε με τις γραμμικές.

Σαν κανόνα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι τοπικές απώλειες ενέργειας μπορούν να αμεληθούν, εάν δεν υπερβαίνουν το 5% των γραμμικών. Αυτό επιτυγχάνεται πρακτικά, αμελώντας τις απώλειες ενέργειας όταν τα ομοιόμορφα τμήματα μεταξύ των ειδικών τεμαχίων είναι μεγαλύτερα από  $1000 D$ .

## 7. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΩΛΗΝΩΝ

Τα συστήματα σωλήνων κατατάσσονται σε δύο απλές κατηγορίες: (1) *Απλά συστήματα* ονομάζονται αυτά που διαθέτουν ένα σημείο υδροληψίας και ένα σημείο υδροδότησης. Σ' αυτά παρουσιάζεται μια και μοναδική διαδρομή νερού. (2) *Σύνθετα συστήματα* ονομάζονται αυτά στα οποία υπάρχουν περισσότερα του ενός συστήματα υδροδότησης και υδροληψίας. Κάθε σύστημα αποτελείται από τους **αγωγούς** του που είναι τμήματα ενιαίας διαμέτρου, κατά μήκος των οποίων η παροχή παραμένει σταθερή και τους **κόμβους** του συστήματος, που είναι τα σημεία στα οποία τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (διάμετρος και τραχύτητα ή υλικό κατασκευής) ή και η παροχή μεταβάλλονται.



Σχήμα 7.1 (α) Απλό και (β) σύνθετο σύστημα σωλήνων.

## 7.1 Ορισμοί:

*Ακτινωτά* ονομάζουμε τα συστήματα στα οποία κάθε σημείο υδροδότησης μπορεί να υδροδοτηθεί από κάθε υδροληψία μέσα από μια και μοναδική διαδρομή.

*Κυκλοφορικά* ονομάζονται τα συστήματα όπου ένα σημείο υδροδότησης μπορεί να υδροδοτηθεί από δεδομένη υδροληψία μέσα από περισσότερες της μιας διαδρομές.

*Σύστημα βαρύτητας* ονομάζουμε αυτό στο οποίο η απαιτούμενη για τη μεταφορά νερού ενέργεια υπάρχει λόγω βαρύτητας στη φύση. Σε περίπτωση που η διαθέσιμη ενέργεια δεν επαρκεί για τη μεταφορά της απαιτούμενης παροχής, προσδίδουμε ενέργεια στο σύστημα με αντλίες.

## 7.2 Υπολογισμοί συστημάτων σωλήνων.

Για τον υπολογισμό ενός συστήματος σωλήνων, πρέπει να υπολογίσουμε τις απώλειες ενέργειας κατά μήκος των αγωγών (γραμμικές απώλειες)

$$h_f = L \frac{f V^2}{D 2g}; \quad f = f\left(\text{Re}, \frac{k_s}{D}\right) \quad (7.1)$$

και τις τοπικές (σημειακές) απώλειες ενέργειας που θεωρούνται ότι είναι συγκεντρωμένες στο υπόψη σημείο

$$h_a = K \frac{V^2}{2g}; \quad K = K(\text{γεωμετρίας}, \text{Re}). \quad (7.2)$$

### Εξίσωση ενέργειας

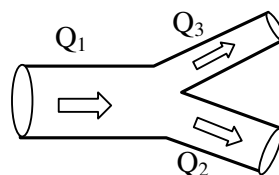
Έστω σημείο (1) το ανάντη σημείο και (2) το κατόντη σημείο σε κάποιο τμήμα του δικτύου. Η εξίσωση της ενέργειας μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$H_1 = H_2 + \Delta H_m + \Delta H_{(1-2)} \quad (7.3)$$

όπου  $H_1$  ... το ύψος ενέργειας του σημείου (1) ανάντη  
 $H_2$  ... το ύψος ενέργειας του σημείου (2) κατόντη  
 $\Delta H_m$  ... το ύψος της μηχανικής ενέργειας που αποδίδεται από το σύστημα (θετικό σε περίπτωση υδροστροβόλου), ή που λαμβάνεται από το σύστημα (αρνητικό σε περίπτωση αντλίας).  
 $\Delta H_{(1-2)}$  ... =  $\Sigma (h_{f(1-2)} + h_{(1-2)})$  το σύνολο των γραμμικών και τοπικών απωλειών στους επί μέρους αγωγούς και κόμβους του συστήματος.

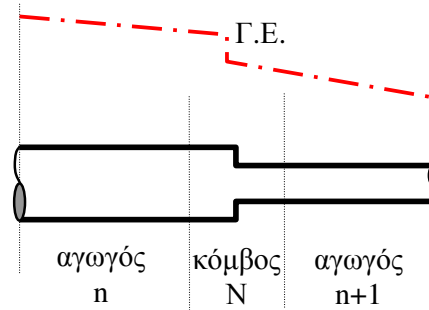
### Εξίσωση συνέχειας

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$



$$(7.4)$$

### 7.3 Αγωγοί σε σειρά



**Σχήμα 7.2** Αγωγοί σε σειρά.

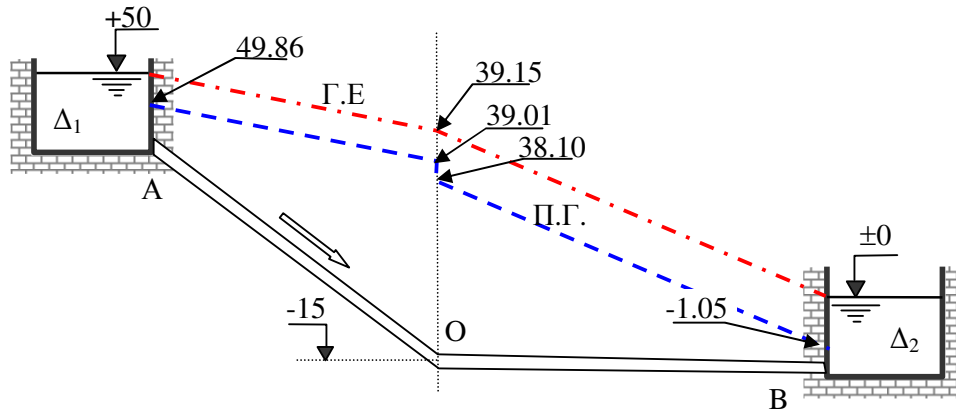
Οι απώλειες ενέργειας είναι το άθροισμα των επί μέρους απωλειών

$$H_L = \dots + h_f(n) + h_a(N) + h_f(n+1) + \dots \quad (7.5)$$

**Παράδειγμα 7.1** Αμελώντας τις τοπικές απώλειες ενέργειας ζητείται:

- (α) Να υπολογίσετε την παροχή του αγωγού AB από τη δεξαμενή Δ<sub>1</sub> στη δεξαμενή Δ<sub>2</sub>.
- (β) Να σχεδιάσετε την Π.Γ. του αγωγού.
- (γ) Να προσδιορίσετε την πίεση περί το σημείο O.

Δεδομένα:  $L_{AO}=2000\text{m}$ ,  $D_{AO}=0.50\text{m}$ ,  $L_{OB}=500\text{m}$ ,  $D_{OB}=0.30\text{m}$ ,  $z(O)=-15.00\text{m}$  και  $k_s=0.5\text{mm}$ . Για το νερό θεωρείστε ότι  $\nu = 1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  και  $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ .



#### Απάντηση

(α) Δεν γνωρίζουμε την στάθμη της Γ.Ε. στο σημείο O. Επομένως θα αναζητήσουμε τη λύση κάνοντας δοκιμές.

Δοκιμή 1<sup>η</sup>: Έστω ότι  $H(O)=25\text{m}$ , επομένως  $h_f(AO)=25\text{m}$  και  $h_f(OB)=25\text{m}$ . Με το δεύτερο τυπικό πρόβλημα προσδιορίζουμε τις παροχές των τμημάτων AO και OB κατά τα γνωστά με βάση τον πίνακα

| D     | $h_f$ | L    | $k_s$  | $k_s/D$ | $Rf^{1/2}$ | f      | V                   | Q     |
|-------|-------|------|--------|---------|------------|--------|---------------------|-------|
| (m)   | (m)   | (m)  | (m)    |         |            | (m/s)  | (m <sup>3</sup> /s) |       |
| 0.500 | 25.00 | 2000 | 0.0005 | 0.0010  | 175089     | 0.0199 | 2.48                | 0.487 |
| 0.300 | 25.00 | 500  | 0.0005 | 0.0017  | 162748     | 0.0225 | 3.61                | 0.255 |

απ' όπου προκύπτει ότι  $\Delta Q = Q(AO) - Q(OB) = 0.232 \text{ m}^3/\text{s}$ . Η παροχή που έρχεται από το σημείο Α προς το Ο είναι μεγαλύτερη από αυτήν που φεύγει προς το Β, επομένως πρέπει να μειωθεί το ύψος της διαθέσιμης ενέργειας στο τμήμα ΑΟ, δηλαδή  $H(O) > 25\text{m}$ .

Δοκιμή 2<sup>η</sup>: Έστω ότι  $H(O)=40\text{m}$ , επομένως  $h_f(AO)=10\text{m}$   $h_f(OB)=40\text{m}$ . Με το δεύτερο τυπικό πρόβλημα προσδιορίζουμε τις παροχές των τμημάτων ΑΟ και ΟΒ με βάση τον πίνακα

| D     | $h_f$ | L    | $k_s$  | $k_s/D$ | $Rf^{1/2}$ | f      | V                   | Q     |
|-------|-------|------|--------|---------|------------|--------|---------------------|-------|
| (m)   | (m)   | (m)  | (m)    |         |            | (m/s)  | (m <sup>3</sup> /s) |       |
| 0.500 | 10.00 | 2000 | 0.0005 | 0.0010  | 110736     | 0.0201 | 1.56                | 0.307 |
| 0.300 | 40.00 | 500  | 0.0005 | 0.0017  | 205862     | 0.0225 | 4.58                | 0.324 |

Επομένως  $\Delta Q = Q(AO) - Q(OB) = -0.017 \text{ m}^3/\text{s}$ . Κάνοντας γραμμική παρεμβολή βρίσκουμε ότι  $H(O)=39.15\text{m}$  και  $Q=0.32 \text{ m}^3/\text{s}$ .

(β) Υπολογισμός της Π.Γ. Οι μέσες ταχύτητες ροής στους αγωγούς ΑΟ και ΟΒ είναι  $V(AO)=1.63\text{m/s}$  και  $V(OB)=4.53\text{m/s}$  αντίστοιχα. Επομένως

$$\frac{p(A)}{\rho g} + z = H(A) - \frac{V^2(AO)}{2g} = 49.86\text{m}$$

$$\left( \frac{p(O)}{\rho g} \right)_{up} + z = H(O) - \frac{V^2(AO)}{2g} = 39.01\text{m}$$

$$\left( \frac{p(O)}{\rho g} \right)_{down} + z = H(O) - \frac{V^2(OB)}{2g} = 38.10\text{m}$$

$$\frac{p(B)}{\rho g} + z = H(B) - \frac{V^2(OB)}{2g} = -1.05\text{m}$$

(γ) Πιέσεις γύρω από το σημείο Ο ( $z = -15\text{m}$ ):

$$\left( \frac{p(O)}{\rho g} \right)_{up} - 15.00 = 39.01\text{m} \Rightarrow p_{up}(O) = (39.01 + 15)\rho g = 529.91\text{kPa}$$

$$\left( \frac{p(O)}{\rho g} \right)_{down} - 15.00 = 38.10\text{m} \Rightarrow p_{down}(O) = (38.10 + 15)\rho g = 520.98\text{kPa}$$

### 7.4 Παράλληλοι αγωγοί

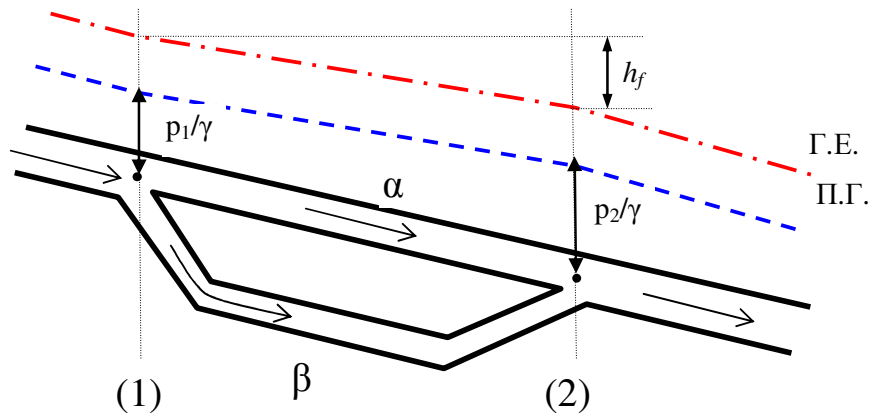
Ισχύουν οι σχέσεις

$$Q_1 = Q_2 = Q_\alpha + Q_\beta \quad (7.6)$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (7.7)$$

όπου

$$h_f = L_\alpha \frac{f_\alpha}{D_\alpha} \frac{V_\alpha^2}{2g} = L_\beta \frac{f_\beta}{D_\beta} \frac{V_\beta^2}{2g} \quad (7.8)$$

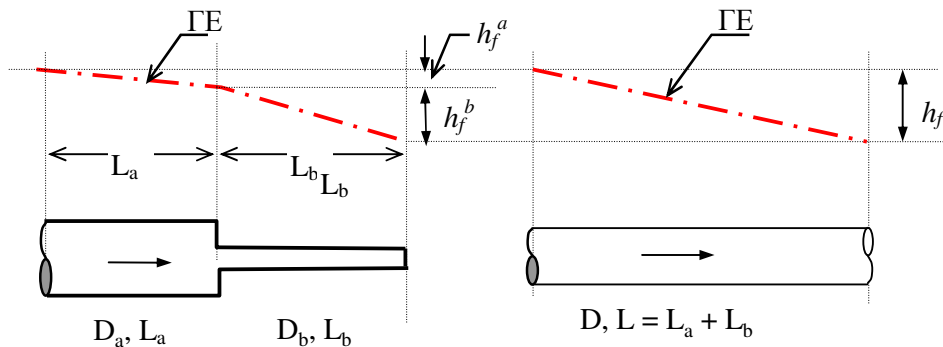


Σχήμα 7.3 Αγωγοί σε παράλληλη διάταξη.

### 7.5 Ισοδύναμοι αγωγοί

(α) Σε σειρά: Δύο αγωγοί σε σειρά διαμέτρων  $D_a$  και  $D_b$  με μήκη  $L_a$  και  $L_b$  αντίστοιχα, αντικαθίστανται με αγωγό διαμέτρου  $D$  του οποίου το μήκος είναι  $L$  (συνήθως  $L=L_a+L_b$ ), μεταφέρει την ίδια παροχή  $Q = Q_a = Q_b$  και οι συνολικές απώλειες φορτίου είναι

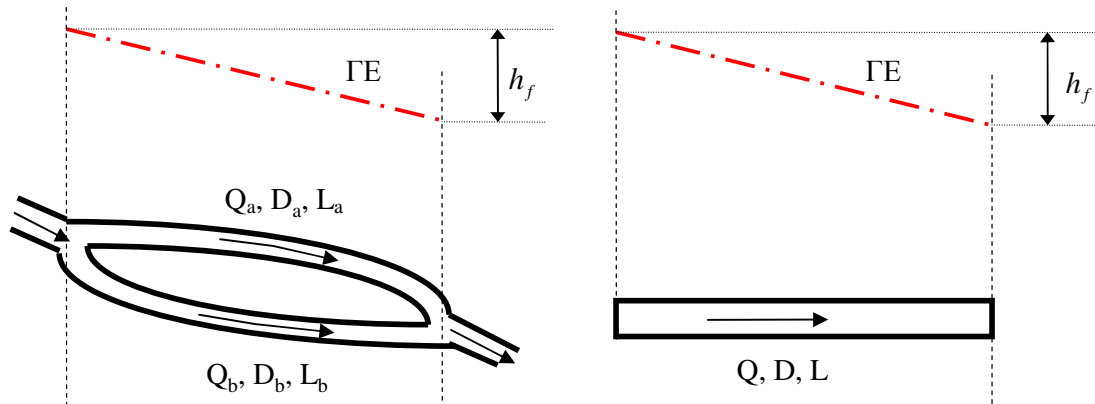
$$h_f = h_f^a + h_f^b. \quad (7.9)$$



Σχήμα 7.4 Ισοδύναμος αγωγός με αγωγούς σε σειρά.

(β) Σε παράλληλη διάταξη: Δύο αγωγοί μήκους  $L = L_a = L_b$  σε παράλληλη διάταξη διαμέτρων  $D_a$  και  $D_b$  που μεταφέρουν παροχές  $Q_a$  και  $Q_b$  αντίστοιχα, αντικαθίστανται με αγωγό διαμέτρου  $D$  του οποίου το μήκος είναι  $L$ , μεταφέρει παροχή  $Q = Q_a + Q_b$  και οι απώλειες φορτίου είναι

$$h_f = h_f^a = h_f^b. \quad (7.10)$$



**Σχήμα 7.5** Ισοδύναμος αγωγός με αγωγούς σε παράλληλη διάταξη.

**Εφαρμογή:** Για δύο αγωγούς διαμέτρων  $D_1$  και  $D_2$  με μήκη  $L_1$  και  $L_2$  ζητούνται οι εξισώσεις που συνδέουν το συντελεστή τραχύτητας και την διάμετρο του ισοδύναμου αγωγού με τα χαρακτηριστικά των δύο αγωγών όταν οι αγωγοί είναι συνδεδεμένοι (α) σε σειρά και (β) σε παράλληλη διάταξη.

(α) **Αγωγοί σε σειρά** Έστω ότι ο ισοδύναμος αγωγός έχει μήκος  $L$  και διάμετρο  $D$ . Επειδή οι αγωγοί είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, από το θεώρημα της συνέχειας έχουμε ότι

$$Q = \frac{\pi D_1^2}{4} V_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} V_2.$$

Η σχέση των Darcy -Weisbach τότε γράφεται

$$h_f = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και προκύπτει ότι

$$h_f = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{16Q^2}{2g\pi^2 D_1^4} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{16Q^2}{2g\pi^2 D_2^4} = f \frac{L}{D} \frac{16Q^2}{2g\pi^2 D^4}$$

ή μετά από απλοποίηση

$$f_1 \frac{L_1}{D_1^5} + f_2 \frac{L_2}{D_2^5} = f \frac{L}{D^5}. \quad (7.11)$$

(β) **Παράλληλοι αγωγοί** Όταν οι αγωγοί βρίσκονται σε παράλληλη διάταξη, τότε

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad \text{και} \quad h_{f1} = h_{f2}.$$



Επομένως

$$h_f = f_1 \frac{L_1 V_1^2}{D_1 2g} = f_2 \frac{L_2 V_2^2}{D_2 2g} = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

ή αντικαθιστώντας την ταχύτητα με την παροχή

$$h_f = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{16Q_1^2}{2g\pi^2 D_1^4} = f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{16Q_2^2}{2g\pi^2 D_2^4} = f \frac{L}{D} \frac{16Q^2}{2g\pi^2 D^4}.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$Q_1 = \left(\frac{f}{f_1}\right)^{1/2} \left(\frac{L}{L_1}\right)^{1/2} \left(\frac{D_1}{D}\right)^{5/2} Q \text{ και } Q_2 = \left(\frac{f}{f_2}\right)^{1/2} \left(\frac{L}{L_2}\right)^{1/2} \left(\frac{D_2}{D}\right)^{5/2} Q$$

ενώ από την εξίσωση συνέχειας ( $Q_1 + Q_2 = Q$ ) μετά από απλοποιήσεις

$$\left(\frac{D_1^5}{L_1 f_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{D_2^5}{L_2 f_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{D^5}{L f}\right)^{1/2} \quad (7.12)$$

Επομένως, στην περίπτωση αγωγών που συνδέονται είτε σε σειρά είτε σε παράλληλη διάταξη παρατηρούμε ότι **η σχέση που συνδέει το συντελεστή τραχύτητας την διάμετρο και το μήκος του ισοδύναμου αγωγού με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των δύο αγωγών, είναι ανεξάρτητη από την παροχή που διέρχεται.**

**Παράδειγμα 7.2** Να υπολογίσετε την παροχή του αγωγού AB από τη δεξαμενή Δ<sub>1</sub> στη δεξαμενή Δ<sub>2</sub> στο παράδειγμα 7.1 χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης εφαρμογής.

Δεδομένα: ΔH=50 m, L<sub>AO</sub>=2000m, D<sub>AO</sub>=0.50m, L<sub>OB</sub>=500m, D<sub>OB</sub>=0.30m, και k<sub>s</sub>=0.5mm. Για το νερό θεωρήστε ότι ν = 1.15x10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>/s.

Απάντηση

Δεν γνωρίζουμε την στάθμη της Γ.Ε. στο σημείο O. Έστω ότι H(O)=25m, επομένως h<sub>f</sub>(AO)=25m και h<sub>f</sub>(OB)=25m. Με το δεύτερο τυπικό πρόβλημα προσδιορίζουμε τις παροχές των τμημάτων AO και OB κατά τα γνωστά με βάση τον πίνακα

| D     | h <sub>f</sub> | L    | k <sub>s</sub> | k <sub>s</sub> /D | Rf <sup>1/2</sup> | f      | V     | Q                   |
|-------|----------------|------|----------------|-------------------|-------------------|--------|-------|---------------------|
| (m)   | (m)            | (m)  | (m)            |                   |                   |        | (m/s) | (m <sup>3</sup> /s) |
| 0.500 | 25.00          | 2000 | 0.0005         | 0.0010            | 175089            | 0.0199 | 2.48  | 0.487               |
| 0.300 | 25.00          | 500  | 0.0005         | 0.0017            | 162748            | 0.0225 | 3.61  | 0.255               |

απ' όπου προκύπτει ότι ΔQ = Q(AO) – Q(OB) = 0.232 m<sup>3</sup>/s. Η παροχή που έρχεται από το σημείο A προς το O είναι μεγαλύτερη από αυτήν που φεύγει προς το B.

Αντί να εκτελέσουμε 2<sup>η</sup> δοκιμή, χρησιμοποιώντας τους συντελεστές τριβής του παραπάνω παραδείγματος (που πρακτικά δεν μεταβάλλονται πολύ), μπορούμε να προσδιορίσουμε την

παροχή που θα μεταφέρει ο ισοδύναμος αγωγός μήκους 2500 m και διαμέτρου  $(D_1+D_2)/2=400$  mm με συντελεστή τριβών που θα προκύψει από τη σχέση (7.11)

$$f = \frac{D^5}{L} \left( f_1 \frac{L_1}{D_1^5} + f_2 \frac{L_2}{D_2^5} \right) = \frac{0.400}{2500} \left( 0.0199 \frac{2000}{0.500^5} + 0.0225 \frac{500}{0.300^5} \right) = 0.02418.$$

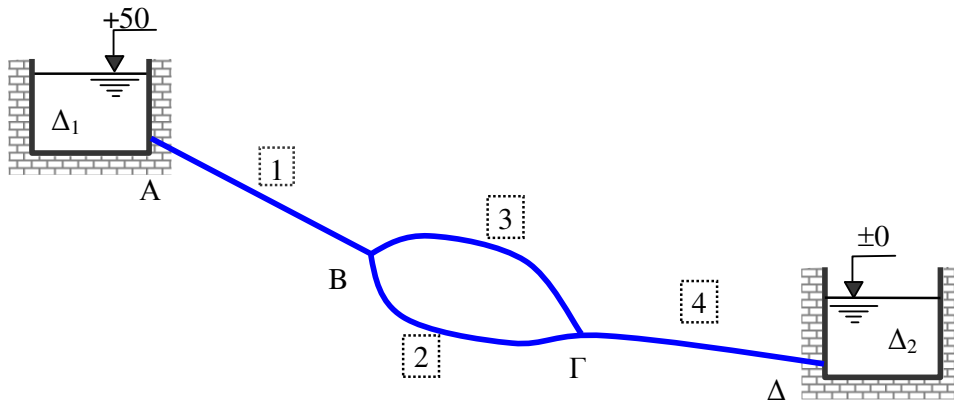
Από τη σχέση (3.7) με γνωστό τον  $f$  προκύπτει ότι η ταχύτητα είναι

$$V = \left[ 2gh_f \frac{D}{fL} \right]^{1/2} = 2.55 \text{ m/s}$$

και η παροχή  $Q=(\pi D^2/4)V=0.320 \text{ m}^3/\text{s}$ , ίδια ακριβώς με την παροχή που υπολογίσαμε προωτέρα!

**Παράδειγμα 7.3** Να υπολογίσετε την παροχή που μεταφέρεται με το αρκετά πολύπλοκο δίκτυο του σχήματος από τη δεξαμενή  $\Delta_1$  στη δεξαμενή  $\Delta_2$ .

Δεδομένα:  $\Delta H=50$  m,  $\nu = 1.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .



| ΑΓΩΓΟΣ | ΚΩΔΙΚΟΣ | L (m) | D (m) | $k_s$ (mm) |
|--------|---------|-------|-------|------------|
| A-B    | 1       | 1500  | 0.50  | 0.5        |
| B-Γ    | 2       | 500   | 0.25  | 0.5        |
| B-Γ    | 3       | 800   | 0.30  | 0.5        |
| Γ-Δ    | 4       | 2000  | 0.40  | 0.5        |

Απάντηση

Έστω ότι  $h_{f1}=h_{f4}=20$  m και  $h_{f2}=h_{f3}=10$  m, έτσι ώστε  $\Sigma h_f = 50$  m. Με βάση το 2<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα υπολογίζονται οι παροχές που μεταφέρουν οι αγωγοί στον πίνακα που ακολουθεί.

| Αγωγός | D (m) | $h_f$ (m) | L (m) | $k_s$ (m) | $k_s/D$ | $Re\sqrt{f}$ | f      | V (m/s) | $J_E$ (m/m) | Q (m <sup>3</sup> /s) |
|--------|-------|-----------|-------|-----------|---------|--------------|--------|---------|-------------|-----------------------|
| 1      | 0.500 | 20.00     | 1500  | 0.0005    | 0.00100 | 164392       | 0.0199 | 2.56    | 0.0133      | 0.504                 |
| 4      | 0.400 | 20.00     | 2000  | 0.0005    | 0.00125 | 101870       | 0.0211 | 1.93    | 0.0100      | 0.242                 |
| 3      | 0.300 | 10.00     | 800   | 0.0005    | 0.00167 | 73976        | 0.0227 | 1.80    | 0.0125      | 0.127                 |
| 2      | 0.250 | 10.00     | 500   | 0.0005    | 0.00200 | 71184        | 0.0238 | 2.03    | 0.0200      | 0.100                 |

Οι ισοδύναμοι αγωγοί 1-4 των 1 και 4 (σε σειρά) και 2-3 των 2 και 3 (παράλληλα) θεωρούμε ότι έχουν μήκη 3500 m και 600 m, διαμέτρους 0.45 m και 0.40 m αντίστοιχα. Οι συντελεστές απωλειών υπολογίζονται από τις ανεξάρτητες από την παροχή σχέσεις (7.11) και (7.12)

$$f_1 \frac{L_1}{D_1^5} + f_2 \frac{L_2}{D_2^5} = f \frac{L}{D^5} \quad \text{και} \quad \left( \frac{D_1^5}{L_1 f_1} \right)^{1/2} + \left( \frac{D_2^5}{L_2 f_2} \right)^{1/2} = \left( \frac{D^5}{L f} \right)^{1/2}$$

αντίστοιχα, ενώ η ταχύτητα και η παροχή από τις σχέσεις

$$V = \left[ 2gh_f \frac{D}{L f} \right]^{1/2} \quad \text{και} \quad Q = \frac{\pi D^2}{4} V$$

στον πίνακα που ακολουθεί.

| Pipe           | D<br>(m) | h <sub>f</sub><br>(m) | L<br>(m) | k <sub>s</sub><br>(m) | f              | V<br>(m/s) | Re<br>VD/ν | J <sub>E</sub><br>m/m | Q<br>(m <sup>3</sup> /s) |
|----------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|----------------|------------|------------|-----------------------|--------------------------|
| <b>1-4</b>     | 0.45     | 40                    | 3500     | 0.0005                | 0.02676        | 1.94       | 794 429    | 0.01143               | <b>0.309</b>             |
| <b>2-3</b>     | 0.40     | 10                    | 600      | 0.0005                | 0.04014        | 1.81       | 656 419    | 0.01667               | <b>0.227</b>             |
| <b>1-2-3-4</b> | 0.425    | 50.00                 | 4100     | 0.0005                | <b>0.02512</b> | 2.01       | 777 403    | 0.01220               | <b>0.285</b>             |

Τέλος, ο ισοδύναμος αγωγός 1-2-3-4 των 1-4 και 2-3 που είναι σε σειρά μήκους 4100 m και διαμέτρου 0.425 m φαίνεται στην τελευταία σειρά του παραπάνω πίνακα ενώ η παροχή που μεταφέρει για ΔH=50 m είναι 285 L/s.

Έλεγχος: Πρέπει το άθροισμα των απωλειών για την παραπάνω παροχή να είναι 50m. Από 1<sup>ο</sup> τυπικό υπολογίζουμε γραμμικές απώλειες των 1, 4

| Αγωγός   | D<br>(m) | Q<br>(m <sup>3</sup> /s) | K <sub>s</sub><br>(m) | L<br>(m) | V<br>(m/s) | Re<br>VD/ν | f              | J<br>(m/m)             | h <sub>f</sub> |
|----------|----------|--------------------------|-----------------------|----------|------------|------------|----------------|------------------------|----------------|
| <b>1</b> | 0.500    | 0.285                    | 0.00050               | 1500     | 1.45       | 659 770    | <b>0.02008</b> | 0.0043                 | <b>6.47</b>    |
| <b>4</b> | 0.400    | 0.285                    | 0.00050               | 2000     | 2.27       | 824 712    | <b>0.02104</b> | 0.0138                 | <b>27.58</b>   |
|          |          |                          |                       |          |            |            |                | <b>Σh<sub>f</sub>=</b> | <b>34.05</b>   |

Αφαιρώντας τις συνολικές απώλειες από το ΔH, ελέγχουμε εάν το άθροισμα των παροχών των 2 και 3 είναι 285 L/s στον πίνακα που ακολουθεί

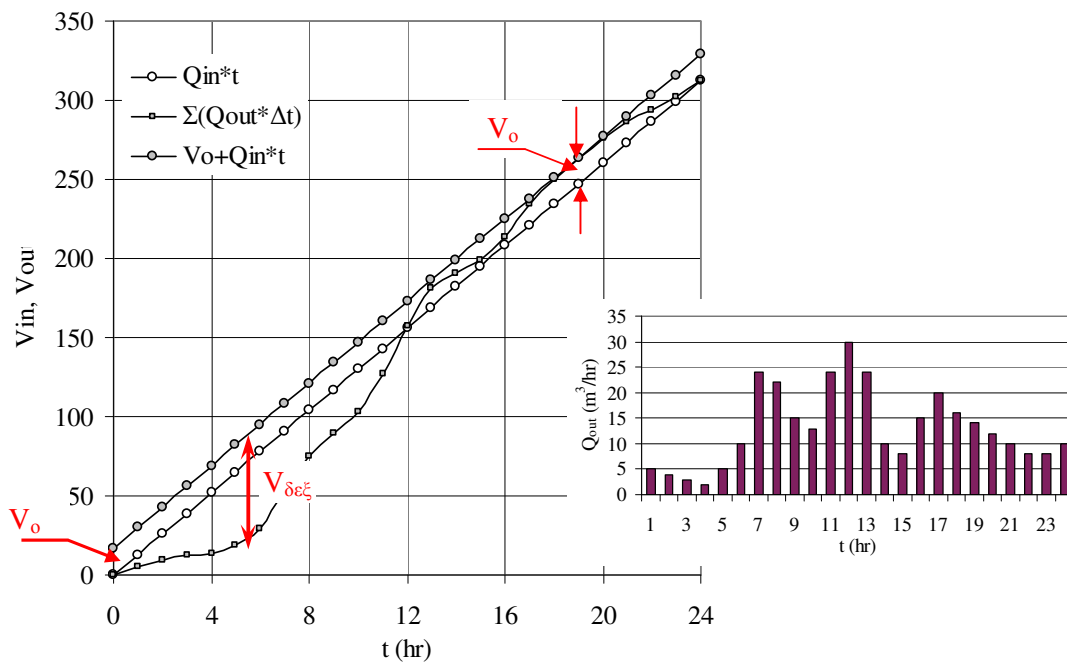
| Αγωγός   | D    | h <sub>f</sub> | L   | k <sub>s</sub> | f      | V    | Re      | J          | Q            |
|----------|------|----------------|-----|----------------|--------|------|---------|------------|--------------|
| <b>3</b> | 0.3  | 15.95          | 800 | 0.0005         | 0.0226 | 2.28 | 620 839 | 0.01993    | <b>0.161</b> |
| <b>2</b> | 0.25 | 15.95          | 500 | 0.0005         | 0.0237 | 2.57 | 583 761 | 0.03190    | <b>0.126</b> |
|          |      |                |     |                |        |      |         | <b>ΣQ=</b> | <b>0.287</b> |

Επομένως Q = 287 ≅ 285 L/s είναι η ζητούμενη παροχή.

Αυτή η σελίδα έχει αφεθεί σκόπιμα λευκή.

## 8. ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ

Είναι τα σημεία του δικτύου που αποθηκεύουμε νερό προσωρινά για να το διοχετεύσουμε στην κατανάλωση όταν μας ζητηθεί. Η διαστασιολόγηση μιας δεξαμενής γίνεται ανάλογα με το λόγο λειτουργίας της. Υπάρχουν δεξαμενές ύδρευσης, αποθήκευσης, αναρρύθμισης κλπ.



**Σχήμα 8.1** Καμπύλες εισροών και εκροών δεξαμενής. Στο πλάι δίδεται η καμπύλη κατανάλωσης σε 24-ωρη βάση.

Στην περίπτωση π.χ. των δεξαμενών ύδρευσης, ο όγκος τους θα πρέπει να είναι τόσος που να μην αδειάζει ποτέ. Για παράδειγμα, σε περίπτωση σταθερής παροχής εισροής, η δεξαμενή (βλ. Σχήμα 8.1) στις 6:00 το πρωί θα πρέπει να έχει όγκο νερού  $V_{δεξ}$  ώστε στις 19:00 το απόγευμα να μην είναι άδεια. Ο όγκος της δεξαμενής  $V_{δεξ}$  καθορίζεται από τη μέγιστη διαφορά όγκων εισροής (κύκλοι) και κατανάλωσης (τετράγωνα). Εάν ο όγκος της δεξαμενής είναι μηδέν τα μεσάνυχτα (0:00πμ), θα υπάρχει έλλειμμα όγκου  $V_o$  στις 7:00μμ. Επομένως για σταθερή παροχή εισροής  $13\text{m}^3/\text{hr}$ , η δεξαμενή στις 0:00πμ θα πρέπει να περιέχει  $V_o=17\text{m}^3$  νερού. Ο όγκος της δεξαμενής προκύπτει από τη διαφορά των αθροιστικών όγκων εισροής ( $V_o+Q_{in}\times t$ ) και εκροής ( $\Sigma Q_{out}\times\Delta t$ ) στις 6:00πμ και είναι  $66\text{m}^3$ . Επομένως, η δεξαμενή που θα σχεδιάσουμε θα πρέπει να έχει όγκο μεγαλύτερο από  $66\text{m}^3$ , πρακτικά περί τα  $80\text{m}^3$ .

## 8.1 Σύνδεση δεξαμενών

### (α) Πρόβλημα τριών δεξαμενών (Σχήμα 8.2)

Είναι το κλασικό πρόβλημα υπολογισμού των παροχών από ή προς τρεις δεξαμενές που συνδέονται με τρεις αγωγούς που έχουν ένα κοινό σημείο, με δεδομένα μήκη και διαμέτρους όταν η στάθμη νερού σε κάθε μια από αυτές είναι δεδομένη.

Η επίλυση για τον προσδιορισμό των παροχών γίνεται με δοκιμές. Υποθέτουμε ότι το πιεζομετρικό ύψος (ή η στάθμη της γραμμής ενέργειας) στο σημείο συμβολής των αγωγών είναι γνωστό και στη συνέχεια επιλύουμε τους αγωγούς ΑΟ, ΟΒ και ΟΓ (προσδιορισμός παροχών). Εάν μετά τον υπολογισμό των παροχών ικανοποιείται το θεώρημα συνέχειας, σταματάμε, αλλιώς δοκιμάζουμε νέο πιεζομετρικό ύψος μέχρις ότου  $Q_{AO} + Q_{OB} + Q_{OG} = 0$

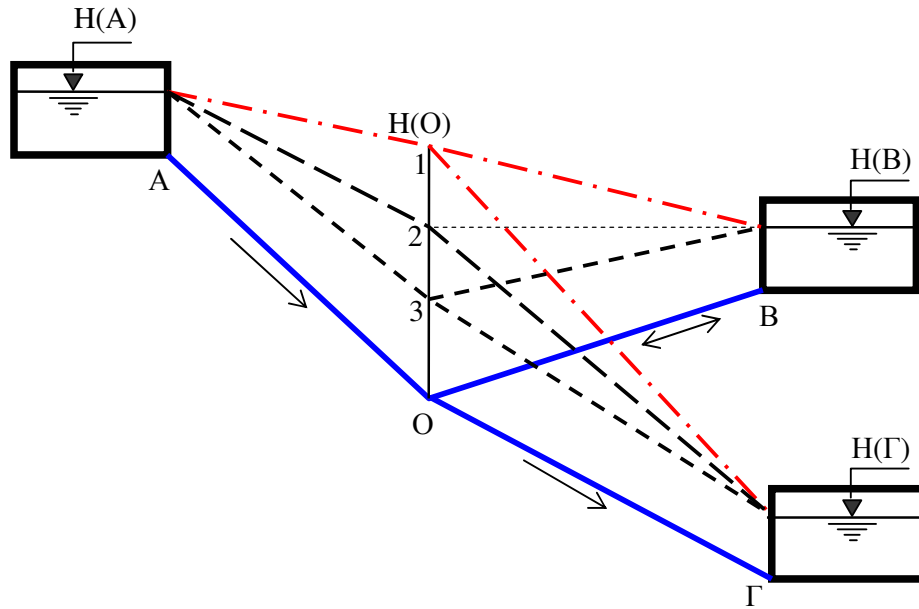
*Περίπτωση 1:*  $H(O) > H(B) > H(\Gamma)$ , τότε η ροή γίνεται από τη δεξαμενή Α προς τις Β και Γ και ισχύει  $Q_{AO} = Q_{OB} + Q_{OG}$ .

*Περίπτωση 2:*  $H(O) = H(B) > H(\Gamma)$ , τότε η ροή γίνεται από τη δεξαμενή Α προς τη Γ ( $Q_{OB}=0$ ) και ισχύει  $Q_{AO} = Q_{OG}$ .

*Περίπτωση 3:*  $H(B) > H(O) > H(\Gamma)$ , τότε η ροή γίνεται από τις δεξαμενές Α και Β προς τη Γ και ισχύει  $Q_{AO} + Q_{OB} = Q_{OG}$ .

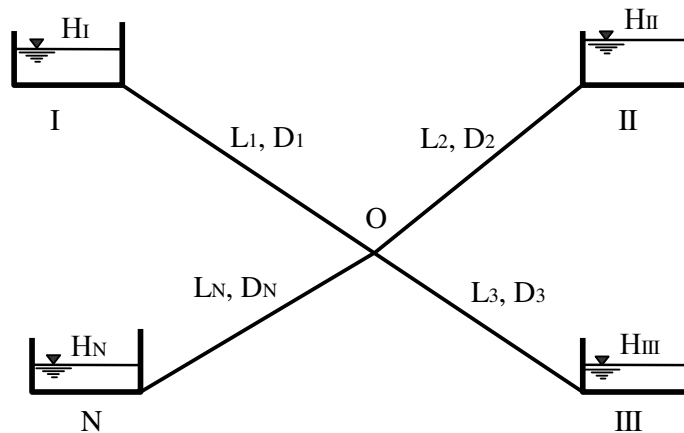
Για τον προσδιορισμό των παροχών προτείνεται η παρακάτω διαδικασία υπολογισμών.

1. Αρχικά υποθέτουμε ότι  $H_O = H_B$ , δηλαδή  $Q_{OB}=0$ . Εάν  $Q_{AO} = Q_{OG}$ , τότε σταματούμε τον υπολογισμό, έχοντας προσδιορίσει και τις τρεις παροχές.
2. Εάν  $Q_{AO} > Q_{OG}$ , αυτό σημαίνει ότι (i) το  $H_O$  που υποθέσαμε πρέπει να αυξηθεί και (ii) ότι η δεξαμενή Α τροφοδοτεί τις Β και Γ.
3. Εάν  $Q_{AO} < Q_{OG}$ , αυτό σημαίνει ότι (i) το  $H_O$  που υποθέσαμε πρέπει να μειωθεί και (ii) ότι οι δεξαμενές Α και Β τροφοδοτούν τη Γ.



**Σχήμα 8.2** Διασύνδεση τριών δεξαμενών.

(β) Γενικό πρόβλημα σύνδεσης N – δεξαμενών



**Σχήμα 8.3** Διασύνδεση N δεξαμενών.

Για την επίλυση του συστήματος των N δεξαμενών χρειάζονται:

(α) N-1 **ενεργειακές εξισώσεις** όπως π.χ. η εξίσωση ενέργειας από τη δεξαμενή I στη δεξαμενή II

$$\Delta H_{(I,II)} = \left( \sum K_{I-O} + L_1 \frac{f_1}{D_1} \right) \frac{V_1^2}{2g} + \left( \sum K_{O-II} + L_2 \frac{f_2}{D_2} \right) \frac{V_{21}^2}{2g} \quad (8.1)$$

(β) Εξισώσεις **συνέχειας** στους κόμβους, π.χ. σημείο O

$$\sum_n Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0 \quad (8.2)$$

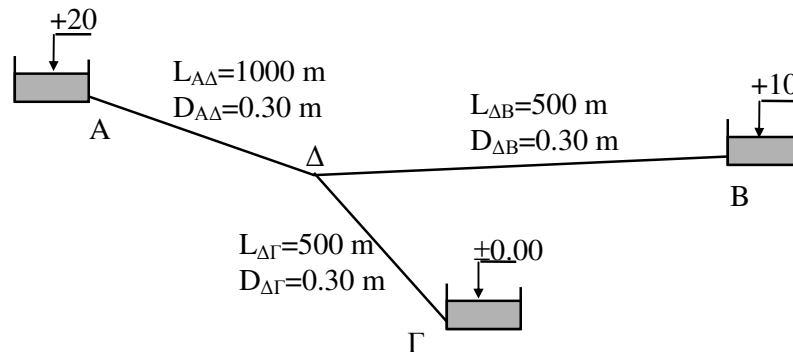
στο σημείο Ο. Τα συνηθισμένα προβλήματα διασυνδεδεμένων δεξαμενών συνοψίζονται στα εξής

(α) Δίνονται οι N-1 παροχές και ζητούνται οι διαμέτροι των αγωγών, οπότε (i) η άγνωστη παροχή προσδιορίζεται από την εξίσωση συνέχειας και (ii) οι N-1 ενεργειακές εξισώσεις έχουν N αγνώστους τις N διαμέτρους. Καθορίζουμε τη μια από αυτές και υπολογίζουμε τις υπόλοιπες. Αντί αυτού, καθορίζουμε το ύψος της ενέργειας στον κεντρικό κόμβο με βάση την τοπογραφία της περιοχής και τη φορά των επιδιωκόμενων παροχών. Επομένως, ορίζεται αυτόματα η μια διάμετρος και από αυτήν οι υπόλοιπες.

Επειδή οι αγωγοί του εμπορίου υπάρχουν σε περιορισμένο αριθμό διαμέτρων, γίνεται χρήση δικλίδων ή δύο διαμέτρων ανά τμήμα για την επίτευξη των επιθυμητών γραμμικών απωλειών ενέργειας και ως εκ τούτου των επιθυμητών παροχών.

(β) Δίνονται όλες οι διαμέτροι (π.χ. περίπτωση εγκατεστημένου δικτύου) και ζητούνται οι παροχές. Το σύστημα επομένως των εξισώσεων της συνέχειας και των N-1 ενεργειακών εξισώσεων λύνεται μονοσήμαντα για τον προσδιορισμό των N παροχών συνήθως με κάποια μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων, ειδικότερα όταν ο αριθμός των δεξαμενών είναι μεγαλύτερος από 3, επειδή οι εξισώσεις ενέργειας είναι μη γραμμικές.

**Παράδειγμα 8.1** Να προσδιοριστεί η κατεύθυνση ροής στο παρακάτω σύστημα των τριών δεξαμενών (χωρίς να υπολογίσετε τις παροχές). Δίδεται  $k_s=0.1 \text{ mm}$ . Για το νερό να ληφθεί  $\nu=1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .



Απάντηση

Έστω ότι  $H(\Delta) = +10.00 \text{ m}$ , πράγμα που σημαίνει ότι η παροχή του κλάδου (αγωγού) ΔB είναι μηδενική. Επομένως

$$h_f(A\Delta) = 20 - 10 = 10 \text{ m και}$$

$$h_f(\Delta\Gamma) = 10 - 0 = 10 \text{ m}$$

δηλαδή

$$h_f(A\Delta) = h_f(\Delta\Gamma).$$



Θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε τις παροχές των κλάδων ΑΔ και ΔΓ με βάση το 2<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα. Όμως, η διεύθυνση της ροής μπορεί να προκύψει από τα δεδομένα του προβλήματος χωρίς τον υπολογισμό των παροχών ως εξής:

1<sup>ος</sup> τρόπος: Επειδή οι διάμετροι των δύο αγωγών είναι ίδιες, ενώ το μήκος του αγωγού ανάντη είναι διπλάσιο, αν υπολογίζαμε τις παροχές θα προέκυπτε ότι  $Q(A\Delta) < Q(\Delta\Gamma)$  για να έχουμε τις ίδιες γραμμικές απώλειες στους δύο αγωγούς. Αυτό σημαίνει ότι

$$H(\Delta) < H(B)$$

και επομένως έχουμε ροή και από τη δεξαμενή Β προς την Γ.

2<sup>ος</sup> τρόπος: Εάν δεν υπήρχε ροή στον αγωγό ΔΒ, τότε  $Q(A\Delta) = Q(\Delta\Gamma)$ . Επειδή όμως οι διάμετροι των αγωγών ΑΔ και ΔΓ είναι ίδιες, η κλίση των γραμμικών απωλειών ενέργειας θα πρέπει να είναι ίδια και στους δύο αγωγούς πράγμα που σημαίνει ότι οι γραμμικές απώλειες του αγωγού ΑΔ,  $h_f(A\Delta)$ , πρέπει να είναι διπλάσιες απ' αυτές του αγωγού ΔΓ επειδή

$$L_{A\Delta} = 2 L_{\Delta\Gamma} = 1000\text{m}.$$

Δηλαδή,  $h_f(A\Delta) = 2h_f(\Delta\Gamma)$  και επομένως

$$h_f(A\Delta) = H(A) - H(\Delta) = (2/3) \times 20 = 13.33\text{m}.$$

$$H(\Delta) = H(A) - 13.33 = 20 - 13.33 = 6.67\text{m} < 10\text{m} = H(B).$$

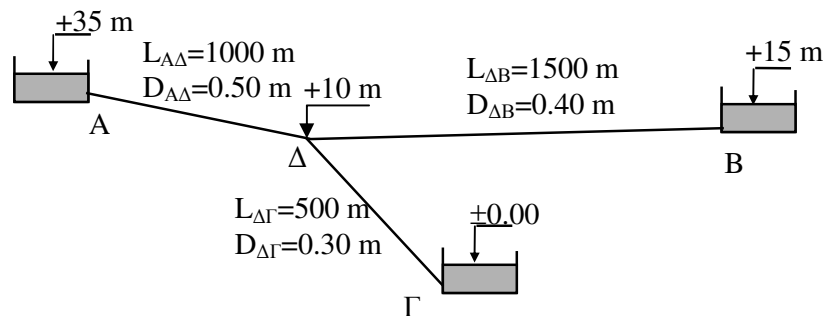
Επομένως θα πρέπει να έρχεται παροχή και από τη δεξαμενή Β προς την Γ.

### Παράδειγμα 8.2

(α) Να υπολογιστούν οι παροχές που μεταφέρουν οι αγωγοί ΑΔ, ΔΒ και ΒΓ.

(β) Να υπολογιστεί η πίεση στο σημείο Δ (διακλάδωση).

Δεδομένα:  $z_{\Delta} = +10\text{m}$ ,  $k_s = 0$  (λείοι αγωγοί),  $\rho = 1000\text{Kg/m}^3$ ,  $\nu = 1.15 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ .



### Απάντηση

(α) Έστω ότι  $H(\Delta) = +15.00\text{m}$ , πράγμα που σημαίνει ότι η παροχή του κλάδου (αγωγού) ΔΒ είναι μηδενική. Επομένως

$$h_f(A\Delta) = 35 - 15 = 20\text{m} \text{ και}$$

$$h_f(\Delta\Gamma) = 15 - 0 = 15 \text{ m}$$

Από τις παραπάνω γραμμικές απώλειες υπολογίζουμε τις αντίστοιχες παροχές  $Q_{A\Delta}$  και  $Q_{\Delta\Gamma}$  στους αγωγούς AΔ και ΔΓ, με βάση το 2<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα. Τα επί μέρους αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

$$H(\Delta) = 15\text{m}$$

| Αγωγός | D    | $h_f$ | L    | $k_s/D$ | $Rf^{1/2}$ | f      | V     | Q                   |
|--------|------|-------|------|---------|------------|--------|-------|---------------------|
|        | (m)  | (m)   | (m)  | (m)     |            |        | (m/s) | (m <sup>3</sup> /s) |
| AΔ     | 0.50 | 20    | 1000 | 0       | 192585     | 0.0105 | 4.33  | 0.850               |
| ΔB     | 0.40 | ---   | 1500 | ---     | ---        | ---    | ---   | 0                   |
| ΔΓ     | 0.30 | 15    | 500  | 0       | 109621     | 0.0116 | 3.90  | 0.276               |

Επειδή  $Q_{A\Delta} > Q_{\Delta\Gamma}$ , η δεξαμενή A θα τροφοδοτεί με νερό και τη δεξαμενή B και επομένως η στάθμη της γραμμής ενέργειας στο σημείο της διακλάδωσης θα είναι  $H(\Delta) > 15\text{m}$ .

Ο προσδιορισμός των παροχών των αγωγών θα γίνει με δοκιμές. Θεωρούμε ότι  $H(\Delta) = 25\text{m} > H(B)$ . Επομένως

$$h_f(A\Delta) = 35 - 25 = 10\text{m}$$

$$h_f(\Delta B) = 25 - 15 = 10\text{m και}$$

$$h_f(\Delta\Gamma) = 25 - 0 = 25\text{ m}$$

Από τις παραπάνω γραμμικές απώλειες υπολογίζουμε τις αντίστοιχες παροχές  $Q_{A\Delta}$ ,  $Q_{\Delta B}$  και  $Q_{\Delta\Gamma}$  στους αγωγούς AΔ ΔB και ΔΓ, με βάση το 2<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα. Τα επί μέρους αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

$$H(\Delta) = 25\text{ m}$$

| Αγωγός | D     | $h_f$ | L    | $k_s/D$ | $Rf^{1/2}$ | f      | V     | Q                   |
|--------|-------|-------|------|---------|------------|--------|-------|---------------------|
|        | (m)   | (m)   | (m)  | (m)     |            |        | (m/s) | (m <sup>3</sup> /s) |
| AΔ     | 0.500 | 10.00 | 1000 | 0       | 136178     | 0.0112 | 2.97  | 0.582               |
| ΔB     | 0.400 | 10.00 | 1500 | 0       | 79560      | 0.0123 | 2.06  | 0.259               |
| ΔΓ     | 0.300 | 25.00 | 500  | 0       | 141520     | 0.0111 | 5.15  | 0.364               |

Από την επίλυση για  $H(\Delta) = +15.00\text{m}$  έχουμε ότι

$$\Delta Q = Q_{A\Delta} - (Q_{\Delta B} + Q_{\Delta\Gamma}) = 0.574\text{ m}^3/\text{s},$$

ενώ για  $H(\Delta) = 25\text{m}$

$$\Delta Q = Q_{A\Delta} - (Q_{\Delta B} + Q_{\Delta\Gamma}) = -0.041\text{ m}^3/\text{s}.$$

Με γραμμική παρεμβολή προκύπτει ότι  $\Delta Q = 0$  όταν  $H(\Delta) = 24.30\text{m}$  και οι παροχές είναι  $Q_{A\Delta} = 610\text{l/s}$ ,  $Q_{\Delta B} = 250\text{l/s}$  και  $Q_{\Delta\Gamma} = 360\text{l/s}$  (δείτε τα διαγράμματα που ακολουθούν).

(γ) Από την εξίσωση ενέργειας προκύπτει ότι ανάντη του σημείου Δ στον αγωγό AΔ η πίεση υπολογίζεται ως

$$H_A = 24.30 \Rightarrow \frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{V_{A\Delta}^2}{2g} = 24.30 \Rightarrow \frac{p_A}{\rho g} = 24.30 - 10 - \frac{V_{A\Delta}^2}{2g} \Rightarrow$$

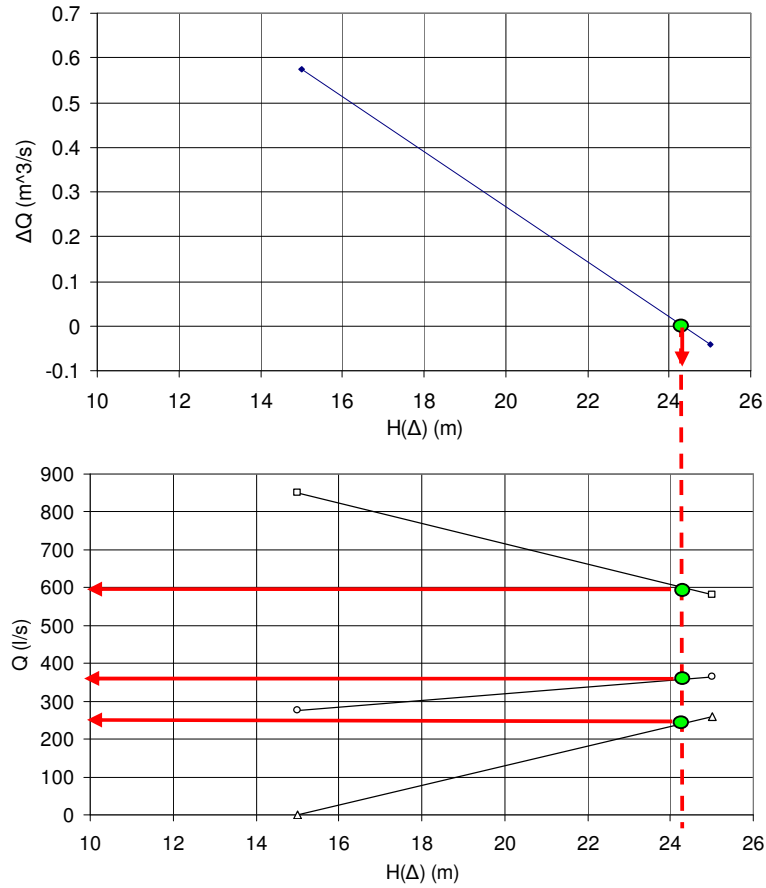
$$p_A = \rho g \left( 14.30 - \frac{3.11^2}{2g} \right) = 135.46\text{kPa}$$

Μετά τη διακλάδωση στον αγωγό ΔB η πίεση είναι

$$\frac{p_A}{\rho g} = 24.30 - 10 - \frac{V_{AB}^2}{2g} \Rightarrow p_A = \rho g \left( 14.30 - \frac{1.99^2}{2g} \right) = 138.30 \text{ kPa}$$

και στον αγωγό ΔΓ η πίεση είναι

$$\frac{p_A}{\rho g} = 24.30 - 10 - \frac{V_{\Delta\Gamma}^2}{2g} \Rightarrow p_A = \rho g \left( 14.30 - \frac{5.09^2}{2g} \right) = 127.31 \text{ kPa}.$$



Αυτή η σελίδα έχει αφεθεί σκόπιμα λευκή.

## 9. ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ ΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ - ΑΝΤΛΙΕΣ

Οι υδροδυναμικές μηχανές είναι δύο τύπων, αυτές που προσδίδουν ενέργεια στο σύστημα και ονομάζονται **αντλίες** και αυτές που λαμβάνουν ενέργεια από το ρευστό και ονομάζονται **τουρμπίνες**.

Οι αντλίες χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά υγρών, όπου η βαρύτητα δεν είναι αρκετή να μεταφέρει την απαιτούμενη παροχή, ή όπου χρειάζεται να μεταφερθεί ένα υγρό σε στάθμη με μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια (υψηλότερη από την αρχική στάθμη). Οι αντλίες μετατρέπουν την ηλεκτρική ή την μηχανική ενέργεια του κινητήρα τους σε κινητική ενέργεια του ρευστού, που με τη σειρά της μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια και σε θερμότητα από τις απώλειες ενέργειας λόγω τριβών.

### 9.1 Είδη αντλιών

Αντλίες θετικής εκτόπισης (Positive Displacement Pumps, PDP) που αναπτύσσουν μεγάλες πιέσεις στο ρευστό.

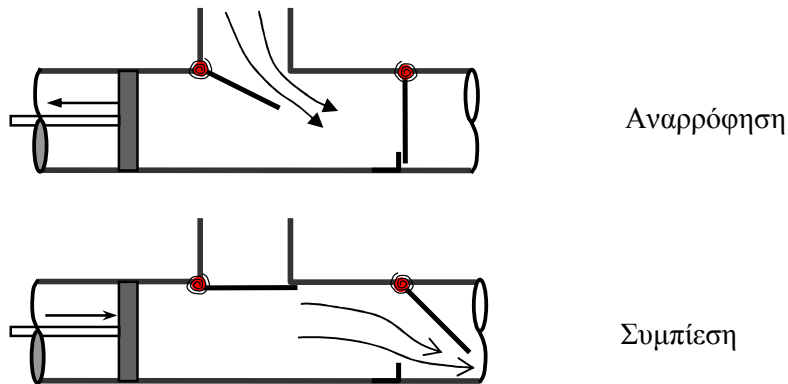
Δυναμικές αντλίες που προσδίδουν ορμή στο ρευστό από πτερύγια που κινούνται γρήγορα.

### 9.2 Φυγοκεντρικές αντλίες

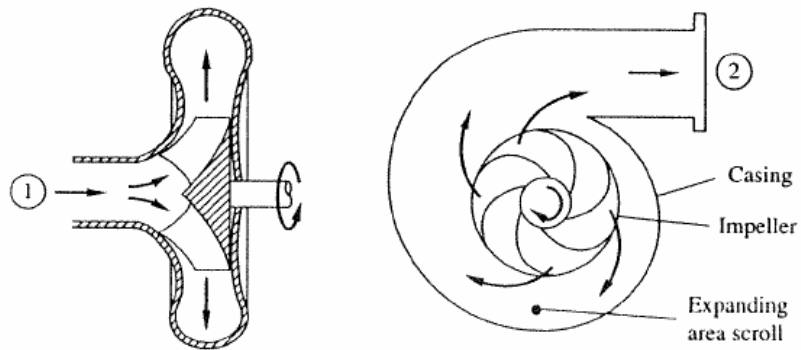
Είναι δυναμικές αντλίες που προσδίδουν ορμή στο ρευστό. Χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε έργα υποδομής και εφαρμογές έργων Πολιτικού Μηχανικού. Σε μόνιμη ροή, η αντλία προσδίδει ενέργεια μεταξύ εισόδου του νερού (σωλήνας αναρρόφησης, σημείο 1, eye) και εξόδου (σωλήνας κατάθλιψης, σημείο 2).

$$H = H_2 - H_1 = \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right)_2 - \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right)_1 = H_s - h_f \quad (9.1)$$

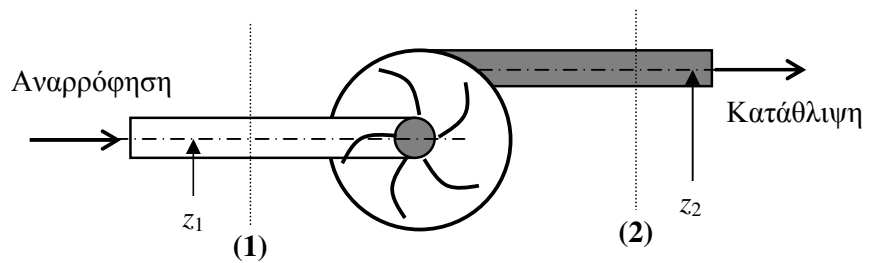
όπου  $H_s$  ... το ύψος ενέργειας που προσδίδει η αντλία στο ρευστό  
 $h_f$  ... το ύψος απωλειών από τριβές.



**Σχήμα 9.1** Αντλία θετικής εκτόπισης (PDP).



**Σχήμα 9.2** Φυγοκεντρική αντλία.



**Σχήμα 9.3** Φυγοκεντρική αντλία σχηματικά.

Συνήθως  $V_1 = V_2$  και  $z_1 = z_2$ . Επομένως η σχέση (9.1) γίνεται

$$H = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} \quad (9.2)$$

Η ισχύς (έργο ανά μονάδα χρόνου) που αποδίδεται στο ρευστό από την αντλία είναι

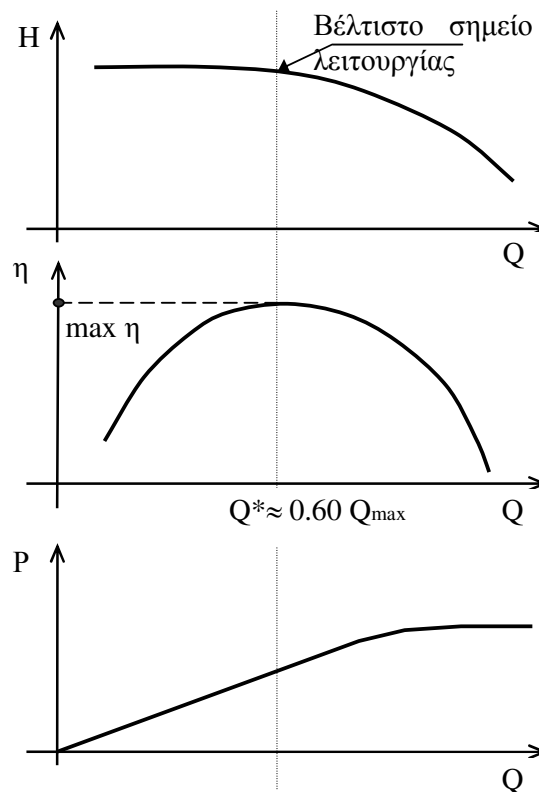
$$P = \frac{W}{t} = \frac{(mg) \times H}{t} = \frac{\rho g \nabla H}{t} = \rho g Q H . \quad (9.3)$$

### 9.3 Χαρακτηριστικές καμπύλες αντλιών.

Τρεις είναι οι χαρακτηριστικές καμπύλες που χρειάζεται να γνωρίζουμε για κάθε αντλία:

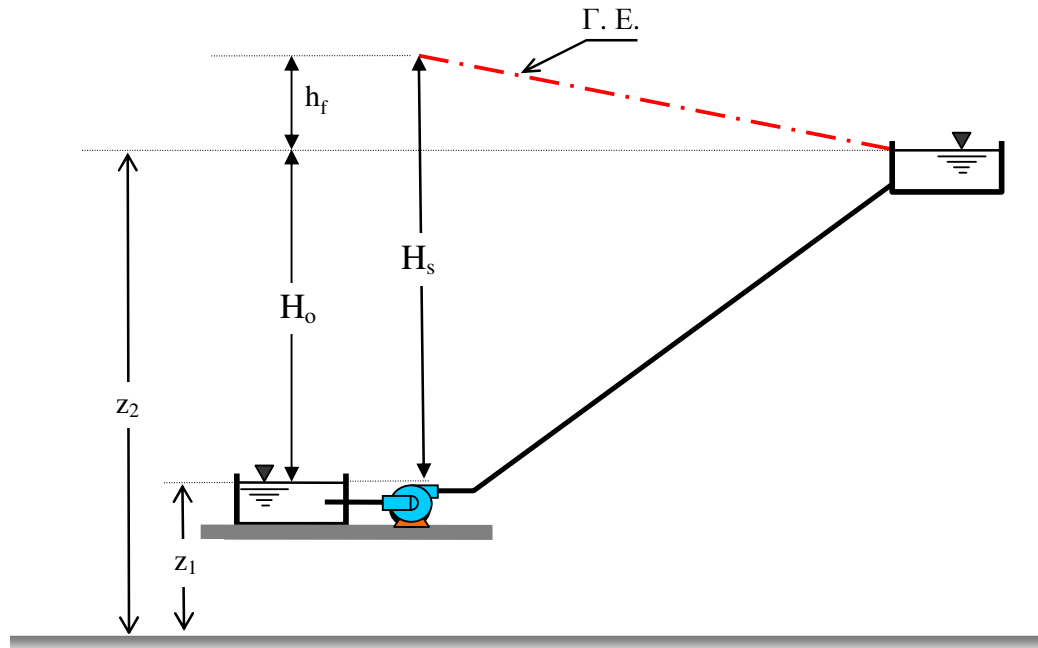
- Η καμπύλη μανομετρικού ύψους - παροχής ( $Q - H$ ), χαρακτηριστική καμπύλη που δίνεται από τον κατασκευαστή. Όταν αυξάνουμε την παροχή ελαττώνεται το μανομετρικό και αντίστροφα.
- Ο βαθμός απόδοσης  $\eta$  της αντλίας σαν συνάρτηση της παροχής (καμπύλη  $\eta - Q$ ). Η μέγιστη τιμή του βαθμού απόδοσης δεν ξεπερνά το 0.80 έως 0.90 και αντιστοιχεί στο 60% συνήθως της μέγιστης παροχής της αντλίας.
- Η καμπύλη ισχύος σαν συνάρτηση της παροχής της αντλίας ( $P - Q$ ), όπου  $P$  είναι η ισχύς που προσδίδουμε στην αντλία.

Στο σχήμα 9.4 φαίνονται σχηματικά οι τρεις χαρακτηριστικές καμπύλες.



**Σχήμα 9.4** Χαρακτηριστικές καμπύλες μιας φυγοκεντρικής αντλίας.

**9.4 Σημείο λειτουργίας αντλίας - δικτύου.**



**Σχήμα 9.5** Αντληση από στάθμη  $z_1$  στη στάθμη  $z_2$ .

Η αντλία αντλεί νερό από τη δεξαμενή με τη χαμηλότερη στάθμη  $z_1$  και το στέλνει στη δεξαμενή με την υψηλότερη στάθμη  $z_2$ , που οι στάθμες τους απέχουν. Το ύψος ενέργειας που προσδίδει η αντλία στο σύστημα θα πρέπει να είναι ίσο με το σύνολο των απωλειών ενέργειας  $h_f+h_a$  και υψομετρικής διαφοράς  $H = z_2-z_1$  των δύο δεξαμενών, και αυτό να συμβαίνει στην περιοχή βέλτιστης λειτουργίας της αντλίας.

$$H_s = z_2 - z_1 + h_f + h_a = H + \Sigma \left( f \frac{L V^2}{D 2g} \right) + \Sigma \left( K \frac{V^2}{2g} \right) \quad (9.4)$$

**Εφαρμογή.** Να μελετηθεί το σημείο λειτουργίας του συστήματος που φαίνεται στο Σχήμα 9.5 για τις περιπτώσεις: (1) ροή χωρίς τριβές, (2) στρωτή ροή και (3) τυρβώδη ροή όταν η καμπύλη  $Q - H$  της αντλίας είναι δεδομένη.

(1) Μηδενικές απώλειες τριβών

$$H_s = z_2 - z_1 = \text{σταθερά}$$

Επομένως

$$Q = Q_1.$$

(2) Στρωτή ροή: Οι απώλειες ενέργειας σε στρωτή ροή δίδονται από τη σχέση

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{L V^2}{D 2g} = 128 \frac{\nu L Q}{\pi g D^4} = \beta Q$$



Επομένως

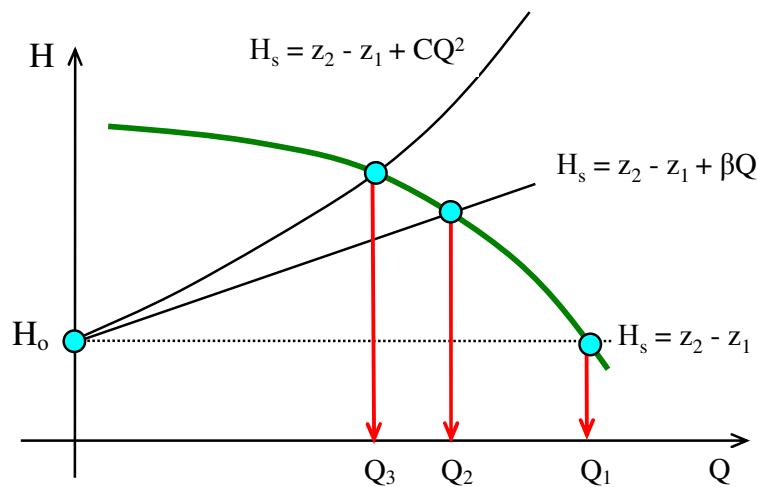
$$H_s = z_2 - z_1 + \beta Q \text{ και } Q = Q_2.$$

(γ) Τυρβώδης ροή: Οι απώλειες ενέργειας σε τυρβώδη ροή προκύπτουν από τη σχέση

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = CQ^2$$

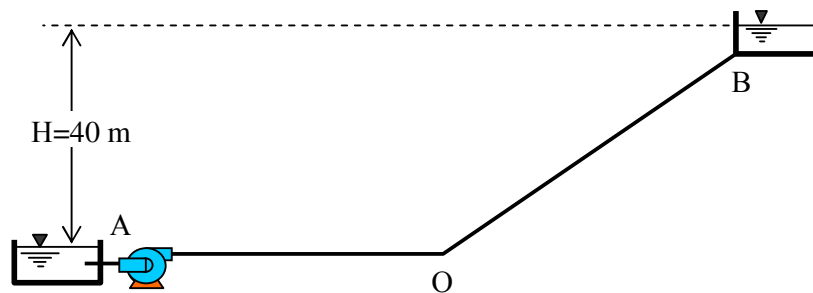
Επομένως

$$H_s = H + CQ^2 = z_2 - z_1 + CQ^2 \text{ και } Q = Q_3.$$



**Σχήμα 9.6** Σημείο λειτουργίας αντλίας σε άτριβη, στρωτή και τυρβώδη ροή.

**Παράδειγμα 9.1**



Αντλία ισχύος 100 KW χρησιμοποιείται για τη μεταφορά παροχής νερού 150 L/s από δεξαμενή με στάθμη  $\pm 0.00$  στη στάθμη +40.00 m ( $P = \rho g Q H_s / \eta$ ).

(α) Να προσδιοριστούν οι γραμμικές απώλειες του συστήματος όταν ο συντελεστής απόδοσης της αντλίας είναι  $\eta = 0.80$ . (Να αμελήσετε τις τοπικές απώλειες).

(β) Να προσδιοριστεί η διάμετρος του αγωγού OB.

Δεδομένα:  $L_{AO} = 1000$  m,  $D_{AO} = 0.50$  m,  $L_{OB} = 1500$  m,  $k_s = 0.5$  mm,  $H = 40$  m. Για το νερό θεωρείστε  $\rho = 1000$  Kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 1.15 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

Απάντηση

(α) Υπολογίζουμε το μανομετρικό ύψος της αντλίας.

$$P = \rho g Q H_s / \eta \Rightarrow H_s = P \eta / \rho g Q = 100000 \times (0.80) / (1000 \times 9.81 \times 0.150) = 54.37 \text{ m.}$$

Όμως

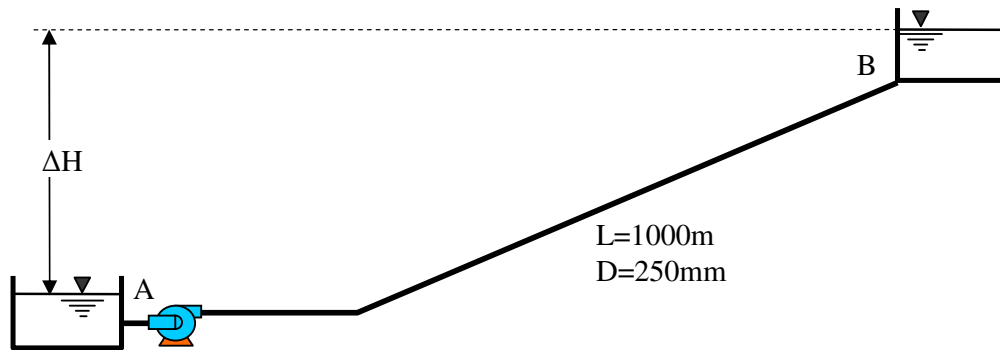
$$H_s = H + h_f \Rightarrow h_f = H_s - H = 54.37 - 40 = \mathbf{14.37 \text{ m.}}$$

Οι γραμμικές απώλειες του συστήματος είναι 14.37m.

(β) Επιλύοντας (το σύστημα 3<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα) κατά τα γνωστά προκύπτει ότι

$$\mathbf{D = 342 \text{ mm.}}$$

**Παράδειγμα 9.2**



Να υπολογίσετε την παροχή νερού που μεταφέρει αντλία από τη δεξαμενή A στη δεξαμενή B όταν η διαφορά στάθμης είναι  $\Delta H = 80\text{m}$  και η χαρακτηριστική της καμπύλη δίδεται από τη σχέση  $H_s = 120 - 0.005Q^2$ ,  $H_s$  σε m και  $Q$  σε L/s. Η ισοδύναμη τραχύτητα του σωλήνα είναι 0.5 mm.

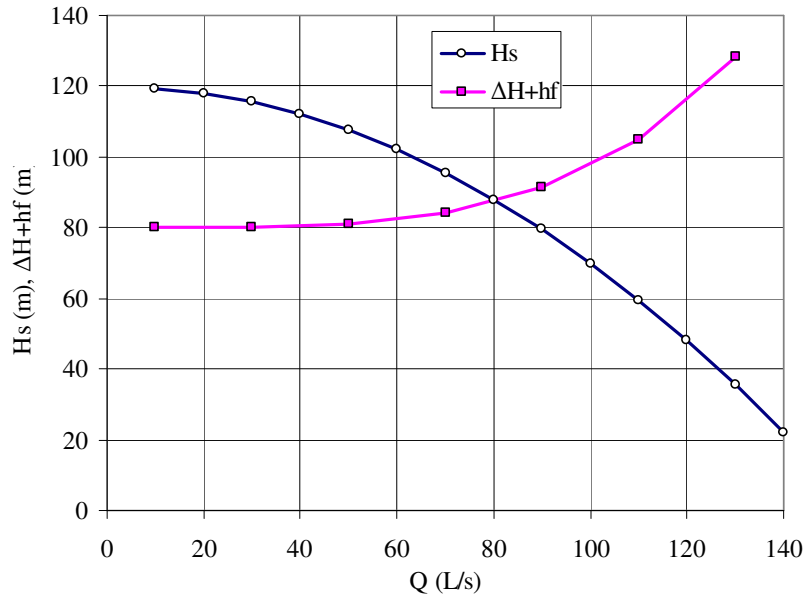
Για το νερό θεωρήστε  $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\nu = 1.10 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Απάντηση

(α) Υπολογίζουμε τις απώλειες ενέργειας στο σωλήνα μεταβάλλοντας την παροχή σύμφωνα με το πρώτο τυπικό πρόβλημα.

| D    | Q                   | Ks     | L    | V     | Re      | f       | J      | hf    |
|------|---------------------|--------|------|-------|---------|---------|--------|-------|
| (m)  | (m <sup>3</sup> /s) | (m)    | (m)  | (m/s) | VD/ν    |         | (m/m)  | (m)   |
| 0.25 | 0.03                | 0.0005 | 1000 | 0.61  | 152 789 | 0.00188 | 0.0001 | 0.14  |
| 0.25 | 0.05                | 0.0005 | 1000 | 1.02  | 254 648 | 0.00511 | 0.0011 | 1.08  |
| 0.25 | 0.07                | 0.0005 | 1000 | 1.43  | 356 507 | 0.00993 | 0.0041 | 4.12  |
| 0.25 | 0.09                | 0.0005 | 1000 | 1.83  | 458 366 | 0.01634 | 0.0112 | 11.20 |
| 0.25 | 0.11                | 0.0005 | 1000 | 2.24  | 560 225 | 0.02432 | 0.0249 | 24.90 |
| 0.25 | 0.13                | 0.0005 | 1000 | 2.65  | 662 085 | 0.03389 | 0.0485 | 48.47 |
| 0.25 | 0.15                | 0.0005 | 1000 | 3.06  | 763 944 | 0.04505 | 0.0858 | 85.76 |

Στη συνέχεια καταρτίζουμε το γράφημα  $(Q, H_s)$  και  $(Q, \Delta H+hf)$ . Το σημείο όπου τέμνονται οι δύο καμπύλες μας δίνει το ζητούμενο, δηλαδή  $Q=80 \text{ L/s}$ .



### 9.5 Παράλληλη σύνδεση αντλιών

Όταν μια αντλία παρέχει το απαιτούμενο μανομετρικό ύψος αλλά όχι και την απαιτούμενη παροχή, τότε πρέπει να συνδυάσουμε δύο ή περισσότερες αντλίες του ίδιου ή και διαφορετικού τύπου έτσι ώστε να πάρουμε την απαιτούμενη παροχή. Για το σύστημα π.χ. N ίδιων αντλιών έχουμε

$$H_{S1} = H_{S2} = \dots = H_{SN} = H_S \quad (9.5)$$

και

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N = Q. \quad (9.6)$$

### 9.6 Σύνδεση αντλιών σε σειρά

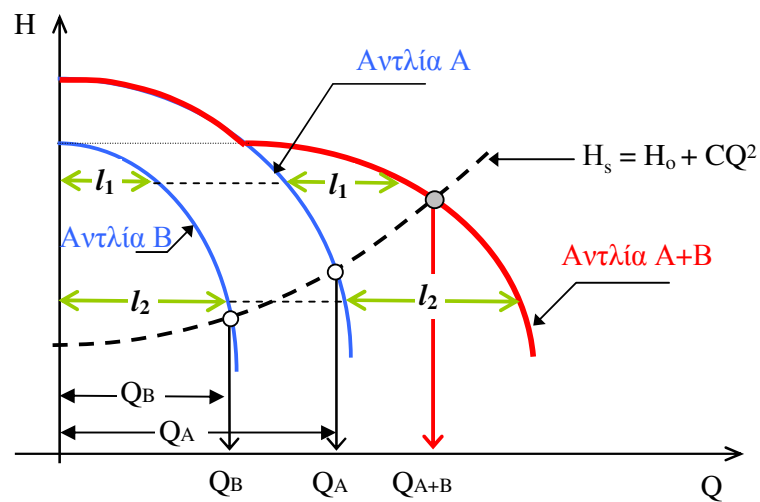
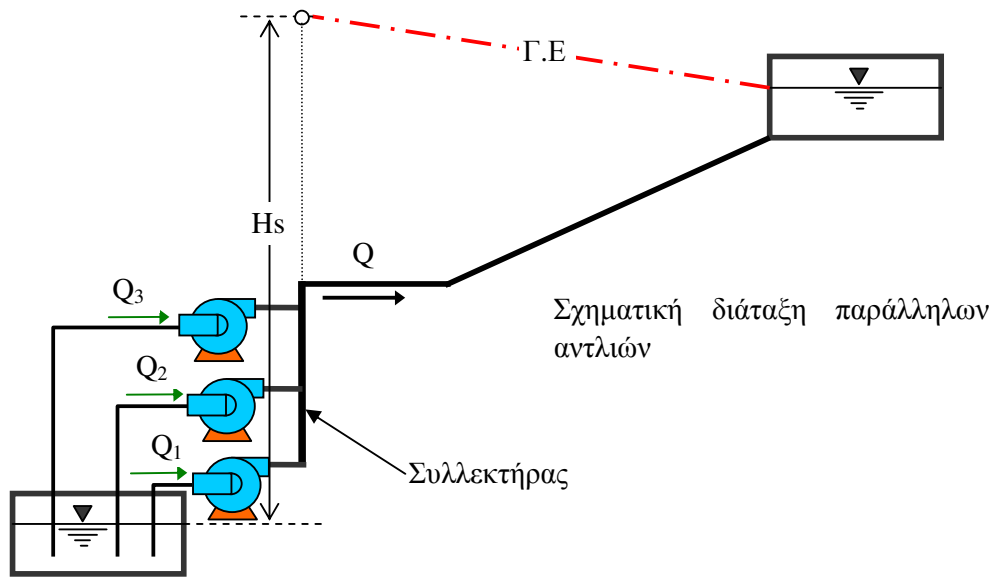
Σε περίπτωση που διαθέτουμε αντλίες που μας παρέχουν την απαιτούμενη παροχή αλλά σε χαμηλότερο μανομετρικό ύψος από το απαιτούμενο, τότε στην έξοδο της πρώτης αντλίας προσθέτουμε και δεύτερη, στην έξοδο της δεύτερης και τρίτη, κοκ, έως ότου πετύχουμε το μανομετρικό ύψος που απαιτείται. Για σύστημα λοιπόν N αντλιών σε σειρά έχουμε

$$H_{S1} + H_{S2} + \dots + H_{SN} = H_S \quad (9.7)$$

και

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_N = Q. \quad (9.8)$$

**Εφαρμογή 9.1:** Σύνδεση δύο αντλιών σε παράλληλη διάταξη - σημείο λειτουργίας.



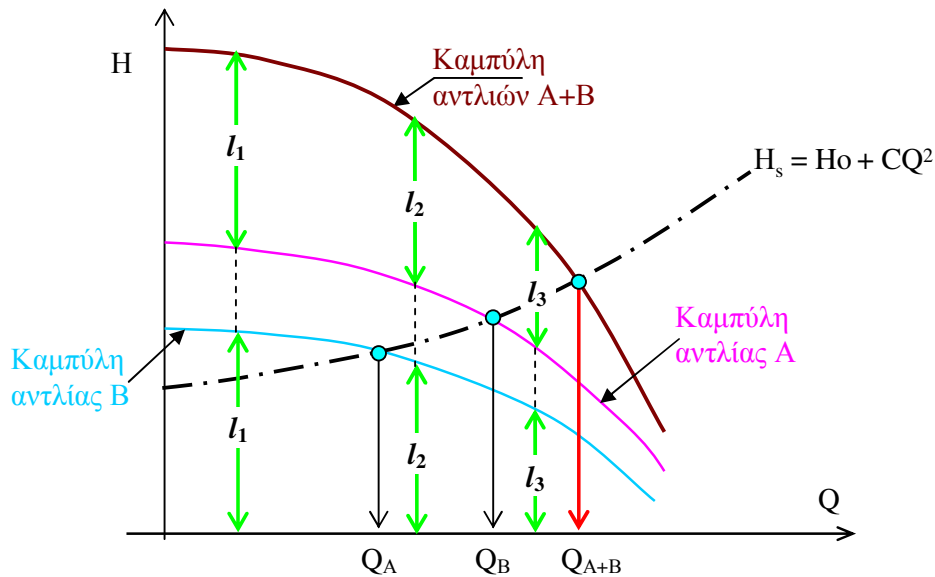
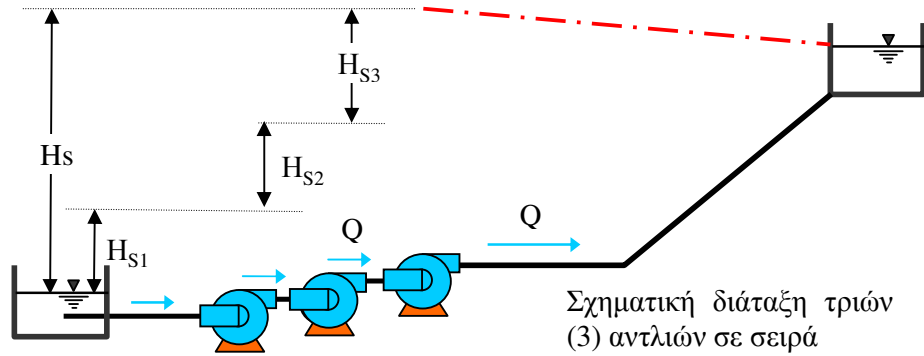
Αθροίζουμε τις παροχές των αντλιών για κάθε μανομετρικό και προσδιορίζουμε την καμπύλη  $Q - H$  του συστήματος.

**Εφαρμογή 9.2:** Σύνδεση δύο αντλιών σε σειρά - σημείο λειτουργίας συστήματος.

Αθροίζουμε τα μανομετρικά των αντλιών για κάθε παροχή και προσδιορίζουμε την καμπύλη  $Q - H$  του συστήματος.

Σε ένα σύστημα δύο αντλιών που συνδέονται παράλληλα ή σε σειρά ο συντελεστής απόδοσης του συστήματος είναι

$$\eta_{A+B} = \frac{\gamma Q_{A+B} H_{A+B}}{\sum P_{motors}} \quad (9.9)$$



### 9.7 Σπηλαιώση (cavitation)

Πίεση (ή τάση) ατμών ορίζουμε την πίεση εκείνη για την οποία το υγρό και οι ατμοί του βρίσκονται σε ισορροπία. Σε περίπτωση που σε ένα υγρό με ελεύθερη επιφάνεια η πίεση στη μάζα του υγρού είναι μεγαλύτερη από την πίεση των ατμών του, τότε η μοναδική εναλλαγή ατμών - υγρού συμβαίνει στη διεπιφάνεια (ελεύθερη επιφάνεια). Όταν η πίεση ενός κινούμενου υγρού γίνει μικρότερη από την πίεση των ατμών του (για δεδομένη θερμοκρασία), τότε στα σημεία χαμηλής πίεσης αρχίζουν να εμφανίζονται φυσαλίδες ατμού, με αποτέλεσμα την έναρξη βρασμού στο υγρό (λόγω υποπίεσης). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **σπηλαιώση** (cavitation).

Η παράμετρος που εκφράζει το βρασμό σε ένα υγρό που κινείται είναι ο αριθμός σπηλαιώσης (cavitation number) που ορίζεται ως

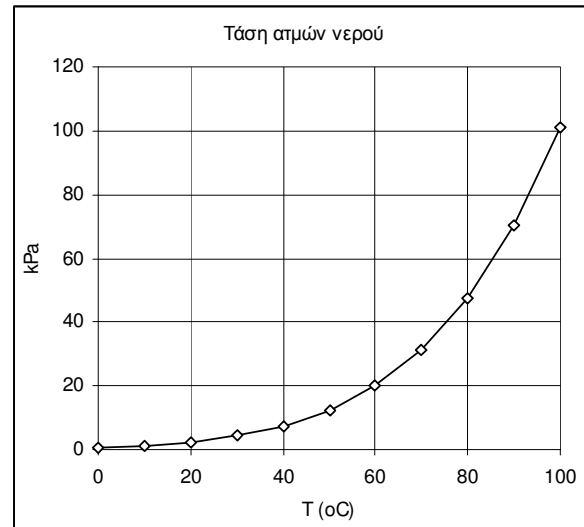
$$C_a = \frac{p_a - p_v}{\frac{1}{2} \rho V^2} \quad (9.10)$$

όπου  $p_a$  ... η πίεση του περιβάλλοντος ρευστού

- $p_v$  ... η πίεση των ατμών  
 $V$  ... χαρακτηριστική ταχύτητα (π.χ. μέση ταχύτητα του ρευστού)

Όταν η φυσαλίδα του ατμού μετακινηθεί σε περιοχή με μεγαλύτερη πίεση, τότε καταστρέφεται με τη σύγχρονη δημιουργία μιας μικρο-έκρηξης που έχει αρνητικές επιπτώσεις στο περιβάλλον. Π.χ σε περίπτωση που αυτό συμβεί κοντά σε στερεό τοίχωμα, η επιφάνειά του καταστρέφεται σταδιακά. Σπηλαιώση εμφανίζεται στις προπέλες των πλοίων, στα κινούμενα μέρη των αντλιών και των υδροστροβίλων, σε περιοχές αποκόλλησης λόγω απότομης διεύρυνσης της διατομής ενός αγωγού κλπ.

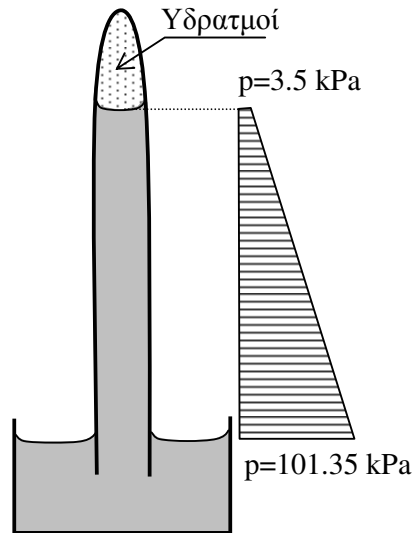
Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η τάση των ατμών του νερού σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας.



**Σχήμα 9.7** Τάση των ατμών νερού σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας.

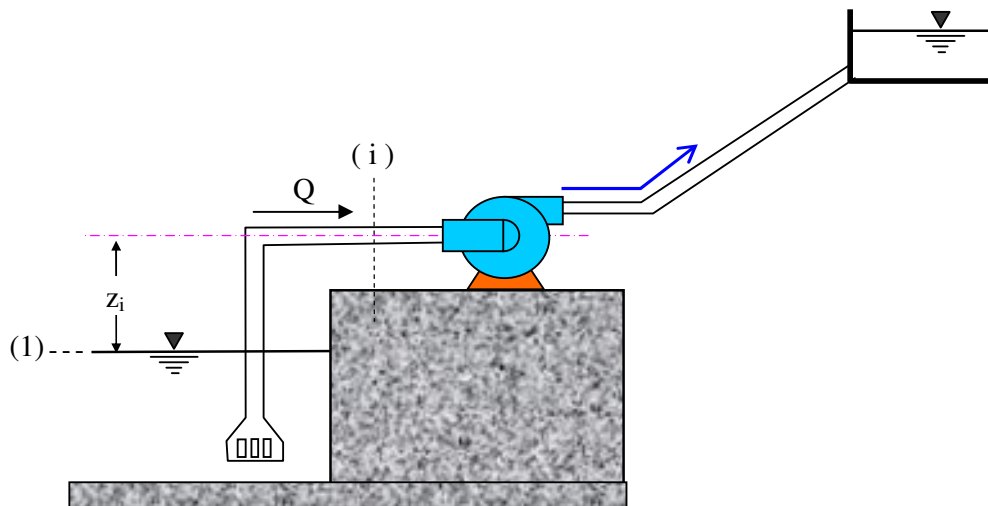
### 9.8 Καθαρό ύψος αναρρόφησης αντλίας (Net positive suction head - NPSH)

*Στήλη νερού σε εφελκυσμό.* Θεωρούμε ένα κατακόρυφο πιστόνι που η επιφάνεια του εμβόλου εφάπτεται στο νερό, ενώ ο περιμετρικός δακτύλιος δεν επιτρέπει την είσοδο αέρα ανάμεσα στην επιφάνεια του εμβόλου και του νερού. Καθώς μετακινούμε το έμβολο κατακόρυφα προς τα επάνω, δημιουργείται μια στήλη νερού μέσα στο σωλήνα που το ακολουθεί. Αυτό συμβαίνει επειδή η ατμοσφαιρική πίεση ωθεί το νερό προς τα επάνω. Όταν η στήλη του νερού φτάσει σε ύψος περίπου 10 m, όσο περίπου είναι και το ύψος πίεσης της ατμόσφαιρας  $p/\rho g$ , η πίεση στην επιφάνεια του εμβόλου είναι περίπου μηδέν. Σε περίπτωση που μετακινήσουμε το έμβολο παραπάνω, το νερό θα βρεθεί υπό την επίδραση εφελκυστικών δυνάμεων, όταν δε η υποπίεση ξεπεράσει την τάση των υδρατμών  $p_v$  ( $p_v/\rho g = 0.24 \text{ m H}_2\text{O}$ , σε θερμοκρασία 20 °C) τότε το νερό θα (βράσει) εξατμιστεί και θα δημιουργηθεί μια φυσαλίδα υδρατμού ανάμεσα στο έμβολο και την επιφάνεια του νερού.



Το ίδιο μπορούμε να επιτύχουμε ρουφώντας νερό με ένα καλαμάκι, πράγμα που σημαίνει ότι εάν βρισκόμαστε σε απόσταση περίπου 10 m πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού του δοχείου θα ρουφάμε υδρατμούς, δεδομένου ότι η στάθμη του νερού δεν θα ξεπεράσει τα 10 m περίπου. Στην περίπτωση μιας αντλίας το νερό που κινείται μέσα στο σωλήνα αναρρόφησης υποβοηθείται από την ατμοσφαιρική πίεση, ενώ παράλληλα έχει και απώλειες ενέργειας λόγω τριβών με τα τοιχώματα.

Καθαρό ύψος αναρρόφησης μιας αντλίας (NPSH στο εξής) είναι το ύψος της ενέργειας ή η στάθμη τοποθέτησης της αντλίας σε σχέση με τη στάθμη του αντλούμενου υγρού, που απαιτείται για την αποφυγή δημιουργίας φυσαλίδας υδρατμών (βρασμού ή σπηλαιώσης).



**Σχήμα 9.8** Αναρρόφηση υγρού από αντλία που βρίσκεται σε στάθμη  $z_i$  υπεράνω της ελεύθερης επιφάνειας.

Η εξίσωση ενέργειας από τη διατομή (1) στη διατομή της εισόδου του αγωγού στην αντλία (i) γράφεται ως εξής

$$H_1 = H_i + h_{f(1-i)} \quad (9.11)$$

και αναλυτικότερα

$$\frac{P_a}{\rho g} + 0 + 0 = \frac{P_i}{\rho g} + z_i + \frac{V_i^2}{2g} + h_{f(1-i)} \quad (9.12)$$

όπου  $p_a$  ... η ατμοσφαιρική πίεση  
 $p_i$  ... η πίεση στην είσοδο (eye) της αντλίας  
 $V_i$  ... ταχύτητα του ρευστού στην είσοδο της αντλίας  
 $z_i$  ... η υψομετρική διαφορά ελ. επιφάνειας και άξονα της αντλίας.

Στη συνέχεια ορίζουμε το NPSH σαν τη διαφορά

$$NPSH = \frac{P_i}{\rho g} + \frac{V_i^2}{2g} - \frac{P_v}{\rho g} = \frac{P_a - P_v}{\rho g} - z_i - h_{f(1-i)} \quad (9.13)$$

όπου  $p_v$  ... η πίεση των ατμών και  
 $h_{f(1-i)}$  ... οι απώλειες ενέργειας στο σωλήνα εισόδου.

Για να μη διακοπεί η λειτουργία της αντλίας λόγω διακοπής της στήλης νερού από βρασμό ή εξαέρωση από την υποπίεση θα πρέπει

$$\frac{P_i}{\rho g} + \frac{V_i^2}{2g} > \frac{P_v}{\rho g} \quad (9.14)$$

δηλαδή

$$NPSH = \frac{P_i}{\rho g} + \frac{V_i^2}{2g} - \frac{P_v}{\rho g} = \frac{P_a - P_v}{\rho g} - z_i - h_{f(1-i)} > 0. \quad (9.15)$$

Για αντλίες στις οποίες ο αγωγός εισόδου έχει μικρό μήκος, δηλαδή  $h_{f(1-i)} \approx 0$ , θα πρέπει η απόσταση του άξονα της αντλίας  $z_i$  από την ελεύθερη επιφάνεια να είναι μικρότερη από τη διαφορά  $(p_a - p_v) / \rho g$ . Όμως για θερμοκρασία 20 °C,

$$p_a = 1 \text{ atm} \quad (p_a / \rho g = 10.33 \text{ m H}_2\text{O})$$

$$p_v = 2.337 \text{ kPa} \quad (p_v / \rho g = 0.24 \text{ m H}_2\text{O})$$

και επομένως πρέπει

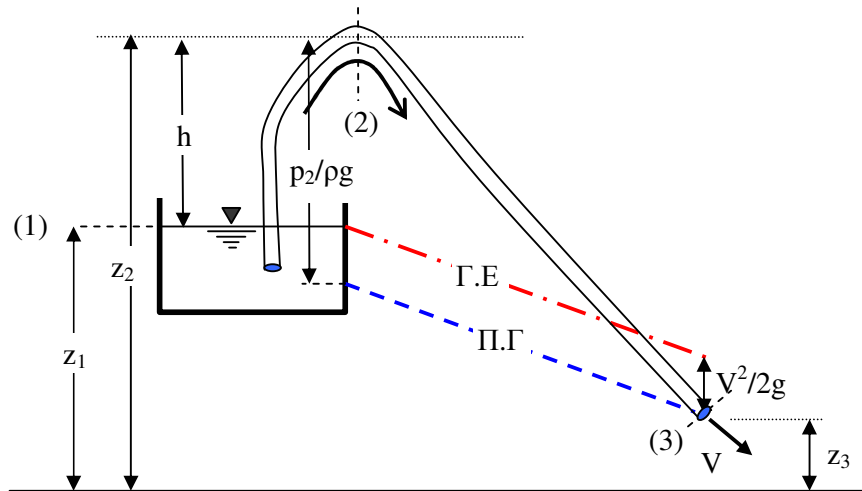
$$\frac{P_a - P_v}{\rho g} \approx 10.09 \text{ m} > z_i. \quad (9.16)$$

Για λόγους ασφάλειας όμως θεωρούμε  $z_i < 7 \text{ m}$ , δηλαδή η αντλία δεν τοποθετείται σε απόσταση που υπερβαίνει τα 7 m (στάθμη αναρρόφησης) πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια.

Ερώτηση: Υπάρχει περίπτωση η στάθμη αναρρόφησης της αντλίας να είναι κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια και να έχουμε διακοπή λειτουργίας της λόγω σπηλαιώσης;



### 9.9 Σίφωνα



**Σχήμα 9.9** Σίφωνα.

Σίφωνα είναι ένας σωλήνας μικρής διαμέτρου που χρησιμοποιείται για παροχέτευση υγρών από δεξαμενή ή δοχείο σε άλλη δεξαμενή ή δοχείο. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο αντεστραμμένος σίφωνα, στον οποίο η ψηλότερη διατομή βρίσκεται πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια.

Όταν ο σίφωνα είναι σε λειτουργία η εξίσωση ενέργειας μεταξύ των διατομών (1), (2) και (3) γράφεται ως εξής

$$H_1 = H_2 + h_{f(1-2)} = H_3 + h_{f(1-3)} \quad (9.17)$$

και αναλυτικότερα

$$\frac{p_a}{\rho g} + z_1 + 0 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_{f(1-2)} = \frac{p_3}{\rho g} + z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + h_{f(1-3)}. \quad (9.18)$$

Επομένως

$$\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_a}{\rho g} = z_1 - z_2 - \frac{V_2^2}{2g} - h_{f(1-2)} = -h - \frac{V^2}{2g} - h_{f(1-2)} < 0. \quad (9.19)$$

Για να μην υπάρχει επομένως διακοπή της στήλης του νερού θα πρέπει η σχετική πίεση (πάνω από την ατμοσφαιρική) στη διατομή (2) να είναι μεγαλύτερη από την πίεση των ατμών του νερού, δηλαδή

$$\left( \frac{p_2}{\rho g} \right)_{\sigma\chi} = \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_a}{\rho g} > \frac{p_v}{\rho g}. \quad (9.20)$$

Δηλαδή, χρησιμοποιώντας τον ορισμό NPSH, όπου η βαρύτητα οδηγεί το νερό αντί της αντλίας,

$$NPSH = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} - \frac{p_v}{\rho g} = \frac{p_a - p_v}{\rho g} - h - h_{f(1-2)} > 0 \quad (9.21)$$

που σημαίνει ότι

$$h + h_{f(1-2)} < \frac{P_a - P_v}{\rho g} = 10.33 - 0.24 = 10.09 \text{ m}. \quad (9.22)$$

Για  $h_f = 1 \text{ m}$ , πρέπει πρακτικά  $h < 9.0 \text{ m}$ . Στην πράξη όμως  $h < 7.0 \text{ m}$  από την επιφάνεια του νερού για λόγους ασφαλείας.

**Σημείωση:** Η έναρξη λειτουργίας του σίφωνα γίνεται με αναρρόφηση νερού, έτσι που να γεμίσει ο σωλήνας και να υπάρξει συνέχεια στη στήλη του νερού. Τότε η βαρύτητα αρχίζει να κινεί το νερό. Σε περίπτωση όμως που

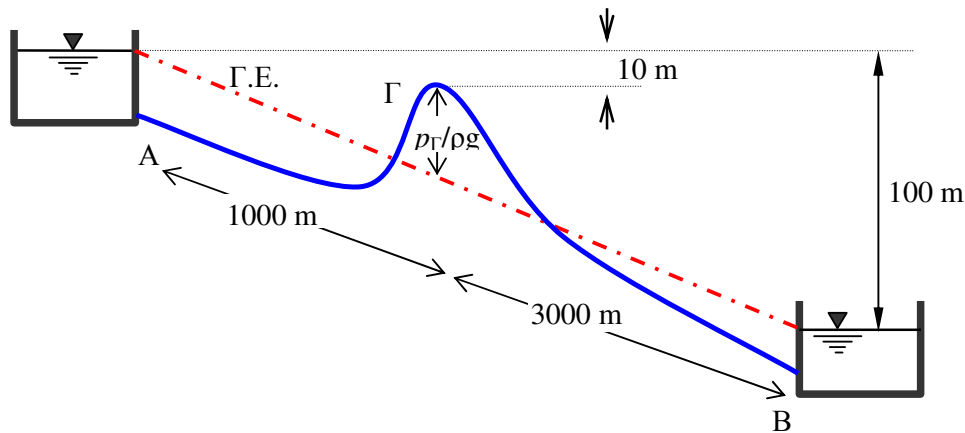
$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} < \frac{p_v}{\rho g}, \quad (9.23)$$

η υποπίεση δημιουργεί εξάτμιση και επομένως μεγάλη φυσαλίδα ατμών που διακόπτει τη ροή.

Για να υπάρξει κίνηση θα πρέπει  $H_1 > H_3$ , δηλαδή από την εξίσωση (9.18) προκύπτει ότι

$$z_1 - z_2 + \frac{V^2}{2g} > h_{f(1-3)}. \quad (9.24)$$

### Παράδειγμα 9.3



(α) Σε περίπτωση που χρησιμοποιηθεί ο λείος ( $k_s = 0$ ) αγωγός μήκους 4000m και ενιαίας διαμέτρου που προκύπτει χρησιμοποιώντας την διαφορά στάθμης των δεξαμενών A και B σαν μήκος γραμμικών απωλειών ενέργειας, υπάρχει περίπτωση να διέλθει από τον αυχένα η παροχή των 200 L/s;

(β) Αν όχι, ποια ή ποιες είναι οι θεωρητικές διαμέτροι των αγωγών που πρέπει να χρησιμοποιηθούν ώστε να μεταφέρεται παροχή 200 L/s;

**Δεδομένα:**  $L(AG)=1000 \text{ m}$ ,  $L(GB)=3000 \text{ m}$ ,  $\nu = 1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Να αμελήσετε τοπικές απώλειες.

Απάντηση

(α) Υπολογίζουμε τη διάμετρο του τμήματος AB για παροχή 200 L/s με βάση το τρίτο τυπικό πρόβλημα.

|                                |                  |
|--------------------------------|------------------|
| <u>Δεδομένα</u>                | <u>Ζητούμενο</u> |
| $k_s = 0$                      | D                |
| $Q = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ |                  |
| $L = 4000 \text{ m}$           |                  |
| $h_f = 100 \text{ m}$          |                  |
| $k_s/D = 0$                    |                  |
| $g = 9.81 \text{ m/s}^2$       |                  |

Με διαδοχικές προσεγγίσεις υπολογίζουμε τη διάμετρο D. Οι υπολογισμοί φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

| f      | D            | V    | Re     | $k_s/D$ | f      |
|--------|--------------|------|--------|---------|--------|
| 0.0200 | 0.305        | 2.74 | 725752 | 0.0000  | 0.0118 |
| 0.0118 | 0.275        | 3.38 | 806525 | 0.0000  | 0.0121 |
| 0.0121 | <b>0.276</b> | 3.34 | 802486 | 0.0000  | 0.0121 |

Επομένως **D(AB) = 0.276 m**. Η κλίση απωλειών υπολογίζεται κατά τα γνωστά στον παρακάτω πίνακα

| D<br>(m) | Q<br>(m <sup>3</sup> /s) | $k_s$<br>(m) | V<br>(m/s) | Re<br>VD/ν | f      | J<br>m/m |
|----------|--------------------------|--------------|------------|------------|--------|----------|
| 0.276    | 0.200                    | 0            | 3.34       | 922 638    | 0.0121 | 0.02497  |

Επομένως, οι γραμμικές απώλειες μέχρι το σημείο Γ είναι

$$h_f(\text{ΑΓ}) = 1000 J_E = 1000 \times 0.02497 = 24.97 \text{ m}$$

Η στάθμη της Γραμμής Ενέργειας (ΓΕ) H(Γ) στο σημείο Γ θα είναι

$$100 - 24.97 = 75.03 \text{ m}$$

Το υψόμετρο στο Γ είναι  $z_\Gamma = 100 - 10 = 90 \text{ m}$ .

Επομένως

$$\left( \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right)_\Gamma = H(\Gamma) - z_\Gamma = 75.03 - 90 \approx -15.00 \text{ m.}$$

Για να μην υπάρξει διακοπή της στήλης του νερού πρέπει

$$\left( \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right)_\Gamma > -7.00 \text{ m.}$$

Αλλά  $-15.00 \text{ m} < -7.00 \text{ m}$  και επομένως θα υπάρξει διακοπή της στήλης νερού. Άρα δεν περνά η παροχή των 200 L/s από αγωγό με ενιαία διάμετρο.

Σημείωση: Το ερώτημα μπορεί να απαντηθεί απ' ευθείας. Επειδή η διάμετρος θα είναι ενιαία, οι γραμμικές απώλειες στο ¼ του αγωγού (1000 m) θα είναι  $\Delta H/4 = 25 \text{ m}$ . Επομένως, η Γ.Ε. θα βρίσκεται 15m κάτω από το υψόμετρο του άξονα του αγωγού, δηλαδή το ύψος υποπίεσης υπερβαίνει τα 10 m που συνεπάγεται τη διακοπή της στήλης του νερού από τη δημιουργία υδρατμών.

(δ) Για να διέλθει η παροχή των 200 L/s, θα χρησιμοποιήσουμε αγωγούς διαφορετικής διαμέτρου ανάμεσα στα σημεία ΑΓ και ΓΒ, έτσι ώστε

$$\left( \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right)_\Gamma \geq -7.00 \text{ m, ή ότι } h_f(\text{ΑΓ}) \leq 10 + 7 = 17 \text{ m.}$$

Έστω ότι  $h_f(\text{ΑΓ}) = 15 \text{ m}$ . Από το 3<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα έχουμε ότι

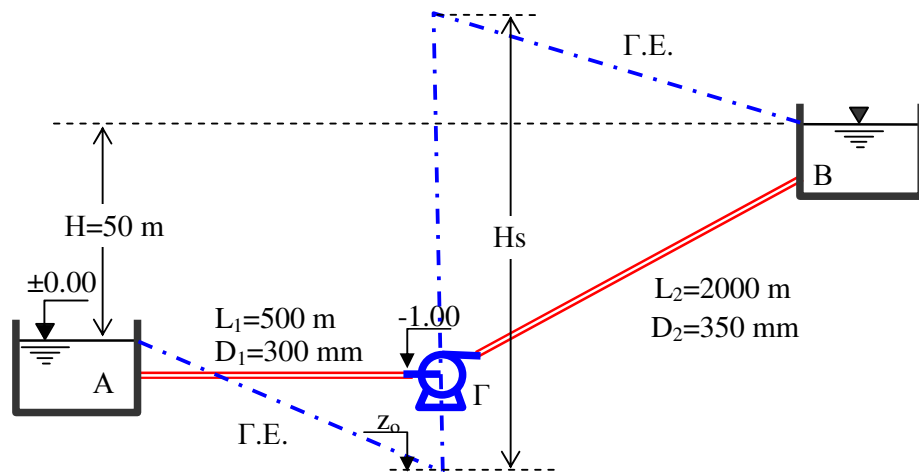
| <u>Δεδομένα</u>                                  | <u>Ζητούμενο</u> |
|--|------------------|
| $k_s = 0 \text{ mm}$                             | <b>D</b>         |
| $Q = 200 \text{ L/s}$                            |                  |
| $L = 1000 \text{ m}$                             |                  |
| $h_f = 15 \text{ m}$                             |                  |
| $\nu = 1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ |                  |
| $k_s/D = 0$                                      |                  |
| $g = 9.81 \text{ m/s}^2$                         |                  |

απ' όπου προκύπτει κατά τα γνωστά **D = 307 mm**. Τότε  $h_f(\text{ΓΒ}) = 85 \text{ m}$ . Από το 3<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα έχουμε ότι

| <u>Δεδομένα</u>       | <u>Ζητούμενο</u> |
|-----------------------|------------------|
| $k_s = 0 \text{ mm}$  | <b>D</b>         |
| $Q = 200 \text{ L/s}$ |                  |
| $L = 3000 \text{ m}$  |                  |
| $h_f = 85 \text{ m}$  |                  |
| $k_s/D = 0$           |                  |

απ' όπου προκύπτει κατά τα γνωστά **D = 269 mm**.

### Παράδειγμα 9.4



Αντλία μεταφέρει παροχή νερού από τη δεξαμενή Α στη δεξαμενή Β. Ζητούνται: (α) Η μέγιστη παροχή που μπορεί να μεταφέρει η αντλία χωρίς να διακοπεί η λειτουργία της. (β) Το μανομετρικό της αντλίας για τη μέγιστη παροχή. (γ) Η ισχύς του κινητήρα εάν ο βαθμός απόδοσης είναι 75%.

Δεδομένα: Η ισοδύναμη τραχύτητα των σωλήνων είναι 0.5 mm,  $v=1.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  και  $\rho=1000 \text{ Kg/m}^3$ .

Απάντηση

(α) Πρέπει το ύψος υποπίεσης (κάτω από την ατμοσφαιρική) στην είσοδο του αγωγού αναρρόφησης ΑΓ να μην ξεπερνά τα 7 m, δηλαδή  $z_o=-8 \text{ m}$ . Επομένως  $h_f(\text{ΑΓ})=8 \text{ m}$ . Πρέπει στη συνέχεια να λύσουμε το 2<sup>ο</sup> τυπικό με δεδομένα  $L_1=500 \text{ m}$ ,  $D_1=200 \text{ mm}$ ,  $k_s=0.5 \text{ mm}$  και  $h_f=8 \text{ m}$ . Ο υπολογισμός φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

| D     | $h_f$ | L   | $k_s$  | $k_s/D$ | $Re\sqrt{f}$ | f      | V     | Q                         |
|-------|-------|-----|--------|---------|--------------|--------|-------|---------------------------|
| (m)   | (m)   | (m) | (m)    |         |              |        | (m/s) | ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) |
| 0.300 | 8.00  | 500 | 0.0005 | 0.0017  | 83695        | 0.0227 | 2.038 | <b>0.1440</b>             |

(β) Οι απώλειες ενέργειας στον καταθλιπτικό αγωγό ΓΒ θα υπολογιστούν με το 1<sup>ο</sup> τυπικό πρόβλημα με δεδομένα  $L_2=2000 \text{ m}$ ,  $D_2=350 \text{ mm}$ ,  $Q=144 \text{ L/s}$  και  $k_s=0.5 \text{ mm}$ . Ο υπολογισμός φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

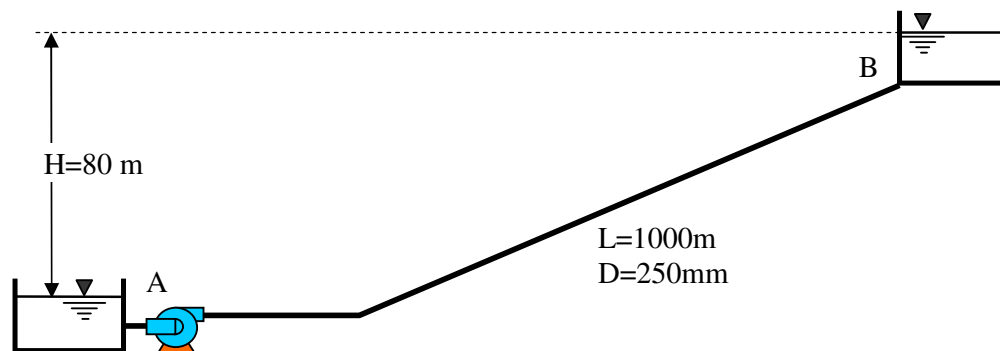
| D     | Q                         | $k_s$  | L    | V     | $k_s/D$ | Re      | $f_1$      | $f_2$  | J       | $h_f$        |
|-------|---------------------------|--------|------|-------|---------|---------|------------|--------|---------|--------------|
| (m)   | ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) | (m)    | (m)  | (m/s) |         | VD/v    | Hypothesis | Calc   | (m/m)   | (m)          |
| 0.350 | 0.144                     | 0.0005 | 2000 | 1.497 | 0.0014  | 476 225 | 0.0150     | 0.0220 | 0.00489 | <b>9.79</b>  |
| 0.350 | 0.144                     | 0.0005 | 2000 | 1.497 | 0.0014  | 476 225 | 0.0220     | 0.0219 | 0.00719 | <b>14.37</b> |
| 0.350 | 0.144                     | 0.0005 | 2000 | 1.497 | 0.0014  | 476 225 | 0.0219     | 0.0219 | 0.00715 | <b>14.31</b> |

Επομένως  $h_f=14.31 \text{ m}$  και  $H_s = H+8+h_f=50+8+14.31=72.31 \text{ m}$ .

(γ) Η ισχύς της αντλίας πρέπει να είναι

$$P = \rho g Q H_s / \eta = 1000 \times 9.81 \times 0.144 \times 72.31 / 0.75 = \mathbf{136.2 \text{ kW}}$$

**Παράδειγμα 9.5**



Με δεδομένο ότι διαθέτουμε δύο αντλίες με χαρακτηριστικές καμπύλες

$Pump_1: H=120-0.005Q^2$  και  $Pump_2: H=100-0.0045Q^2$  ( $Q$  σε  $\text{m}^3/\text{s}$ ,  $H$  σε m) ζητούνται:

(α) Για  $H = 80\text{m}$  και δύο αντλίες τύπων  $Pump_1$  και  $Pump_2$  που λειτουργούν σε σειρά ποιά είναι η παροχή  $Q$  που μεταφέρουν στη Δεξαμενή Β;

(β) Για  $H = 80\text{m}$  και δύο αντλίες τύπου Pump 1 που λειτουργούν σε παράλληλη διάταξη ποιά είναι η παροχή  $Q$  που μεταφέρουν στη Δεξαμενή Β;

Δεδομένα:  $L=1000\text{m}$ ,  $D=250\text{mm}$ ,  $k_s=0.5\text{ mm}$  και  $\nu=1.10 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ .

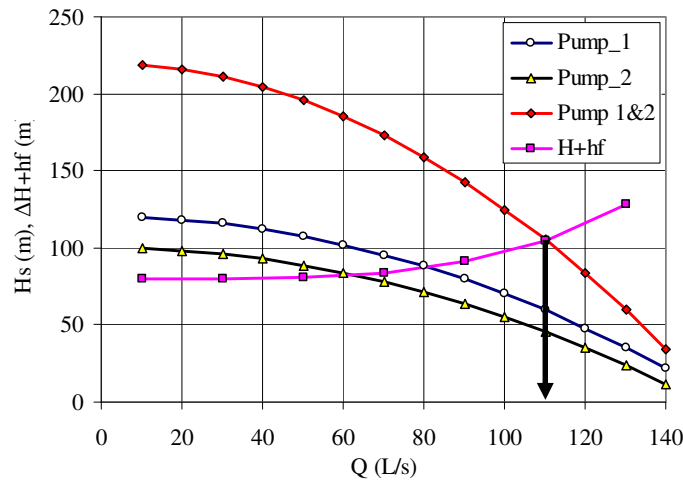
Απάντηση

Υπολογισμός  $h_f$  ίδιος με παράδειγμα 9.2 (ίδια μήκος, διάμετρος και τραχύτητα σωλήνα).

(α) Αντλίες Pump\_1 και Pump\_2 σε σειρά.

$$H(Q) = H_1(Q) + H_2(Q)$$

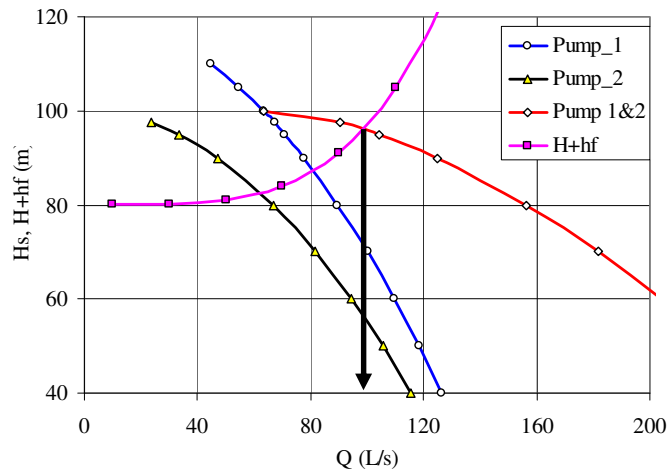
Από το παρακάτω σχήμα προκύπτει ότι η παροχή που μεταφέρει το σύστημα είναι 110 L/s (σημείο λειτουργίας αντλίας-δικτύου).



(β) Δύο αντλίες Pump\_1 σε παράλληλη διάταξη.

$$Q(H) = Q_1(H) + Q_2(H)$$

Από το παρακάτω σχήμα προκύπτει ότι η παροχή που μεταφέρει το σύστημα είναι 90 L/s (σημείο λειτουργίας αντλίας-δικτύου).



## 10. ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ - ΑΓΩΓΟΙ ΥΠΟ ΠΙΕΣΗ

Στο Εργαστήριο Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, υφίσταται ένα σύστημα μέτρησης των απωλειών φορτίου σε αγωγούς υπό πίεση. Είναι η Πειραματική συσκευή H16 - Losses in Piping Systems που κατασκευάστηκε από τον Οίκο TecQuipment<sup>10</sup> Limited, που έχει έδρα στο Ηνωμένο Βασίλειο. Η συσκευή αποτελείται από δύο κυκλώματα σωλήνων που ελέγχονται από τις δικλίδες Α και Β, που στο εξής θα αποκαλούμε κύκλωμα Α και κύκλωμα Β. Τα μήκη των σωλήνων ανάμεσα σε διαδοχικά πιεζόμετρα είναι 0.914 m.

Το **κύκλωμα Α** αποτελείται από τα παρακάτω τμήματα μήκους 0.914 m το καθένα:

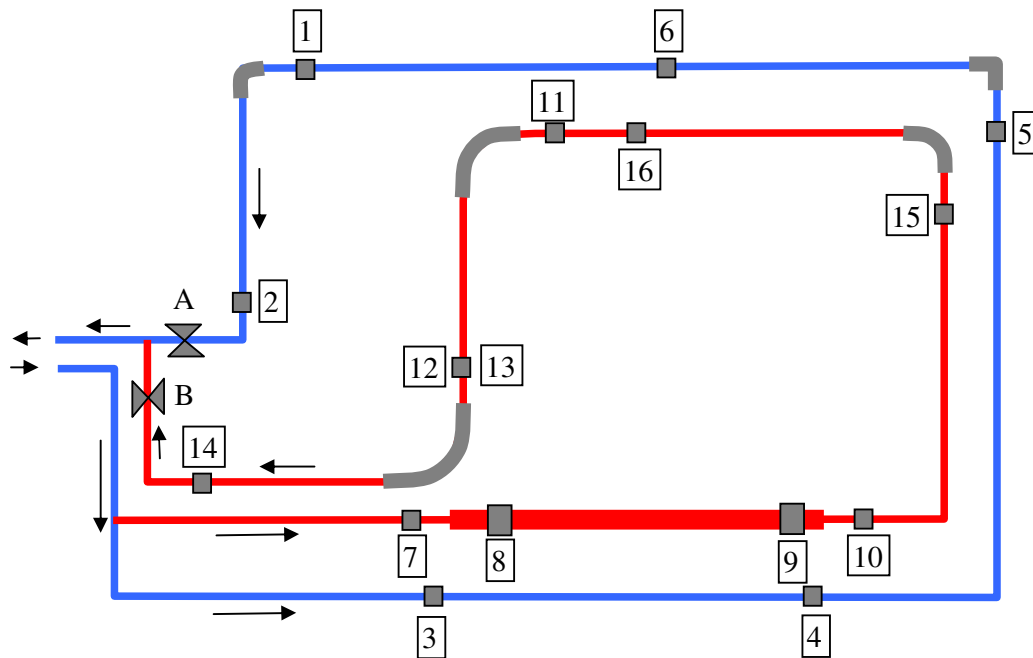
- Ευθύγραμμο σωλήνα  $l = 0.914\text{m}$ ,  $D = 13.7\text{mm}$  (3 – 4)
- Σωλήνα  $l = 0.914\text{m}$ ,  $D = 13.7\text{mm}$  με γωνία  $90^\circ$  (5 – 6)
- Σωλήνα  $l = 0.914\text{m}$ ,  $D = 13.7\text{mm}$  με καμπύλη  $90^\circ$  μικρής R (1–2)

Το **κύκλωμα Β** αποτελείται από τα παρακάτω τμήματα μήκους 0.914 m το καθένα:

- Απότομη διεύρυνση από 13.7mm σε 26.4mm (7 – 8)
- Ευθύγραμμο σωλήνα  $l = 0.914\text{m}$ ,  $D = 26.4\text{mm}$  (8 – 9)
- Απότομη στένωση από 26.4 mm σε 13.7 mm (9 – 10)
- Σωλήνα  $l = 0.914\text{m}$ ,  $D = 13.7\text{mm}$  με καμπύλη  $90^\circ$  R = 52 mm (15 – 16)
- Σωλήνα  $l = 0.914\text{m}$ ,  $D = 13.7\text{mm}$  με καμπύλη  $90^\circ$  R = 102 mm (11 – 12)
- Σωλήνα  $l = 0.914\text{m}$ ,  $D = 13.7\text{mm}$  με καμπύλη  $90^\circ$  R = 152 mm (13 – 14)

---

<sup>10</sup> TecQuipment Limited, Bonsall St., Long Eaton, Nottingham, NG10 2AN, ENGLAND.



Από παλαιότερα πειράματα που διεξήχθησαν στο εργαστήριο έχουμε τα παρακάτω δεδομένα: Η θερμοκρασία στο εργαστήριο ήταν 20 °C.

**(α) Δεδομένα για το κύκλωμα A**

Η παροχή του κυκλώματος A ήταν  $Q = 337.21 \text{ cc/s}$ .

Οι πιέσεις που μετρήθηκαν στα πιεζόμετρα (p/ρg, σε mm H<sub>2</sub>O) είναι:  $p_1=723$ ,  $p_2=50$ ,  $p_3=740$ ,  $p_4=305$ ,  $p_5=1040$  και  $p_6=140$ .

**Ζητείται να υπολογίσετε:** (α) Το συντελεστή f των γραμμικών απωλειών του σωλήνα, τι παρατηρείτε; (β) τις τοπικές απώλειες στη γωνία 90° ανάμεσα στα πιεζόμετρα 5 και 6 και τον αντίστοιχο συντελεστή τοπικών απωλειών και (γ) τις τοπικές απώλειες στην καμπύλη 90° ανάμεσα στα πιεζόμετρα 1 και 2 και τον αντίστοιχο συντελεστή τοπικών απωλειών.

**(β) Δεδομένα για το κύκλωμα B**

Η παροχή του κυκλώματος B ήταν  $Q = 336.42 \text{ cc/s}$ .

Οι πιέσεις που μετρήθηκαν στα πιεζόμετρα (p/ρg, σε mm H<sub>2</sub>O) είναι:  $p_7=480$ ,  $p_8=570$ ,  $p_9=548$ ,  $p_{10}=102$ ,  $p_{11}=695$ ,  $p_{12}=229$ ,  $p_{13}=556$ ,  $p_{14}=75$ ,  $p_{15}=657$  και  $p_{16}=160$ .

**Ζητείται να υπολογίσετε:** (α) Το συντελεστή γραμμικών απωλειών του σωλήνα (8-9) διαμέτρου 26.4mm, (β) τις τοπικές απώλειες στην διεύρυνση (7-8) και τη στένωση (9-10) και τους αντίστοιχους συντελεστές τοπικών απωλειών, (γ) τις τοπικές απώλειες στις καμπύλες 90°  $R = 52 \text{ mm}$  (15–16),  $R = 102 \text{ mm}$  (11–12) και  $R = 152 \text{ mm}$  (13–14) και τους αντίστοιχους συντελεστές τοπικών απωλειών.

Απάντηση



*Κύκλωμα Α:*

Από πιεζόμετρα 3 και 4 προέκυψε ότι  $f = 0.024$

Από πιεζόμετρα 1 και 2 προέκυψε ότι για καμπύλη  $90^\circ$   $K = 0.892$

Από πιεζόμετρα 5 και 6 προέκυψε ότι για γωνία  $90^\circ$   $K = 1.743$

*Κύκλωμα Β:*

Από πιεζόμετρα 8 και 9 προέκυψε ότι  $f = 0.033$

Από πιεζόμετρα 7 και 8 προέκυψε ότι για τη διεύρυνση  $K = 0.59$

Από πιεζόμετρα 9 και 10 προέκυψε ότι για τη στένωση  $K = 0.75$

Από πιεζόμετρα 11 και 12 προέκυψε ότι για καμπύλη  $90^\circ$  102mm  $K = 0.124$

Από πιεζόμετρα 13 και 14 προέκυψε ότι για καμπύλη  $90^\circ$  152mm  $K = 0.181$

Από πιεζόμετρα 15 και 16 προέκυψε ότι για καμπύλη  $90^\circ$  52mm  $K = 0.241$

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γκανούλης, Π, 1982. *Εισαγωγή στη Μηχανική των Ρευστών*. Θεσσαλονίκη.
- Δημητρίου, ΙΔ, 1997. Ρευστομηχανική, Τεύχος 1 - Εισαγωγή. Αθήνα.
- Δημητρίου, ΙΔ, 1995. Εφαρμοσμένη υδραυλική, Τεύχος Α - Εισαγωγή. Αθήνα.
- Δημητρίου, ΙΔ, 1995. Εφαρμοσμένη υδραυλική, Τεύχος Β - Εφαρμογές. Αθήνα.
- Κωτσοβίνος ΝΕ, 1983. *Υδραυλική, Τόμος πρώτος*. Ξάνθη.
- Νουτσόπουλος, Γ 1972. Μαθήματα θεωρητικής και εφαρμοσμένης υδραυλικής, Τεύχος Α. Αθήνα.
- Νουτσόπουλος, Γ 1973. *Μαθήματα θεωρητικής και εφαρμοσμένης υδραυλικής, Τεύχος Β*. Ροή εις κλειστούς αγωγούς υπό πίεσιν. Αθήνα.
- Νουτσόπουλος, Γ & Χριστοδούλου, Γ, 1996. *Μαθήματα Μηχανικής των Ρευστών για Πολιτικούς Μηχανικούς*. Α' Έκδοση, ΕΜ Πολυτεχνείο.
- Παπαϊωάννου, ΑΘ, 1976. *Μηχανική των ρευστών*, Τόμοι Ι και ΙΙ. Αθήνα.
- Ξανθόπουλος, ΘΣ, 1975. Μόνιμος ροή υπό πίεσιν εντός κυλινδρικών αγωγών. Τόμος ΙΙ, Εγχειρίδιον γενικής υδραυλικής. Θεσσαλονίκη.
- Τσαγγάρης, Σ, 1995. *Μηχανική των ρευστών*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
- Brater, EF and King, HW, 1976. *Handbook of hydraulics*. Sixth Edition, McGraw-Hill.
- Chow, VT, 1964, Editor in Chief. *Handbook of applied hydrology*. McGraw-Hill.
- Currie, IG, 1974. *Fundamental mechanics of fluids*. McGraw-Hill.
- Daily, JW, & Harlemman, DRF, 1966. *Fluid dynamics*. Addison-Wesley.
- F. Durst, S. Ray, B. Ünsal & O.A. Bayoumi, 2005. *The development lengths of laminar pipe and channel flows*. Trans. ASME, 127, 1154-1160.
- Jain, AK, 1976. Accurate explicit equation for friction factor. J. Hyd. Eng. ASCE, 102, 674-677.
- Japan Society of Mechanical Engineers Ed., 1988, *Visualized flow*. Pergamon Press.
- Monin, AS and Yaglom, AM (1971). *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of turbulence*. Volume 1, MIT Press.
- Rouse, H, 1961. *Fluid mechanics for hydraulic engineers*. Dover.
- Schlichting, H, 1979. *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill.
- Streeter, VL, 1961. *Handbook of fluid dynamics*. McGraw-Hill.
- Tullis, JP, (Editor) 1971. *Control of flow in closed conduits*. Fort Collins, Colorado.
- Vardy, A, 1990. *Fluid principles*. McGraw-Hill.
- Viessman, Jr, W, & Hammer, MJ, 1993. *Water supply and pollution control*. Harper Collins.
- White, FM, 1994. *Fluid mechanics*. 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

### A.1 Το θεώρημα των Π του Buckingham

Το θεώρημα του Buckingham μπορεί να διατυπωθεί σε δύο φράσεις:

1. Όλα τα φυσικά φαινόμενα μπορούν να περιγραφούν με αδιάστατα μονώνυμα που αποτελούνται από μεταβλητές που το περιγράφουν.
2. Ο αριθμός των φυσικών μεταβλητών υπερβαίνει τον αριθμό των ανεξάρτητων αδιάστατων μονωνύμων κατά ποσότητα, όση και ο αριθμός των θεμελιωδών διαστάσεων που εμφανίζονται στο φαινόμενο.

Δηλαδή, εάν σε ένα φυσικό φαινόμενο υπεισέρχονται  $n$  μεταβλητές και εμφανίζονται  $m$  θεμελιώδεις διαστάσεις, τότε υπάρχουν  $n-m$  αδιάστατα μονώνυμα τα οποία μπορούν να το περιγράψουν.

Οι συνήθεις διαστάσεις που εμφανίζονται σε προβλήματα Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου είναι το μήκος ( $L$ ), η μάζα ( $M$ ) και ο χρόνος ( $T$ ).

**Παράδειγμα A.1** Να βρείτε τη σχέση προσδιορισμού της φυσικής συχνότητας ταλάντωσης μάζας  $m$  στην κορυφή αβαρούς ράβδου μήκους  $l$  και διαμέτρου  $d$  με ακαμψία  $EI$  όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου και  $I$  η ροπή αδράνειας της διατομής.

#### Απάντηση

Η φυσική συχνότητα ταλάντωσης  $\omega$  είναι συνάρτηση των εξής μεταβλητών

$$\omega = f(E, d, l, m) = f(EI, l, m). \quad (1)$$

Στην εξίσωση εμφανίζονται 4 μεταβλητές ( $\omega, EI, l, m$ ) και 3 διαστάσεις, επομένως αναζητούμε  $4-3=1$  αδιάστατο μονώνυμο.

#### Διαστάσεις

$$[\omega] = T^{-1}$$

$$[E] = [F/A] = MLT^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[I] = L^4$$

$$[EI] = ML^3T^{-2}$$

$$[l] = L$$

$$[m] = M$$

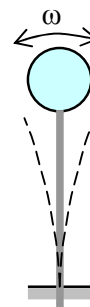
Επομένως  $\omega = (EI)^a l^b m^c$  και λαμβάνοντας τις διαστάσεις

$$T^{-1} = (ML^3T^{-2})^a L^b M^c \quad (2)$$

απ' όπου εξισώνοντας τους εκθέτες των ίδιων διαστάσεων προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων

$$M: \quad 0 = a + c$$

$$L: \quad 0 = 3a + b$$



T:  $-1 = -2a$

από την επίλυση του οποίου προκύπτουν οι εκθέτες  $a = 1/2$ ,  $b = -3/2$ ,  $c = -1/2$ . Επομένως η εξίσωση που δίνει τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης της ράβδου είναι η

$$\omega = C \frac{(EI)^{1/2}}{(ml^3)^{1/2}} \tag{3}$$

όπου C είναι μία σταθερά που μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά. Για τον προσδιορισμό της σταθεράς αυτής χρειάζεται να γίνει ένα μόνο πείραμα και να μετρηθεί η συχνότητα.

*Φυσική συχνότητα ράβδου από αλουμίνιο*

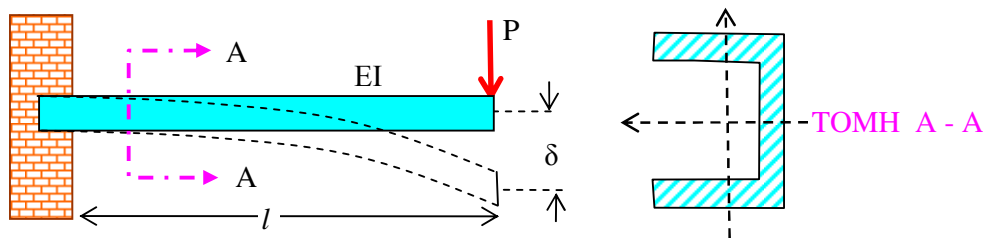
Ας πούμε ότι μετρήσαμε συχνότητα 0.9 Hz σε μια χαλύβδινη ( $E=2.03 \times 10^{11}$  Pa) ράβδο μήκους 0.40 m και διαμέτρου 12mm τοποθετώντας μάζα 2 Kg. Ποια θα είναι η φυσική συχνότητα αλουμινένιας ( $E=7.4 \times 10^{10}$  Pa) ράβδου των ίδιων διαστάσεων όταν τοποθετηθεί μάζα 1 Kg στο άκρο της;

Από το πείραμα της χαλύβδινης ράβδου, προσδιορίζουμε τη σταθερά C από τη σχέση

$$C = \frac{\omega(ml^3)^{1/2}}{(EI)^{1/2}} = \frac{(0.9)[(2.0)(0.4)^3]^{1/2}}{[(2.03)10^{11}(\pi/4)(0.006)^4]^{1/2}} = 0.0224$$

Δεδομένης της σταθεράς  $C = 0.0224$ , αντικαθιστώντας στη παραπάνω εξίσωση της συχνότητας  $E = 7.4 \times 10^{10}$  Pa και  $m = 1.0$  Kg, βρίσκουμε ότι η συχνότητα ταλάντωσης της αλουμινένιας ράβδου είναι 0.77 Hz.

**Παράδειγμα A.2** Θεωρείστε ότι η κατακόρυφη μετακίνηση  $\delta$  (βέλος κάμψης) του άκρου ενός προβόλου μήκους  $l$  με ακαμψία  $EI$  όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου και  $I$  η ροπή αδράνειας της διατομής είναι συνάρτηση της δύναμης  $P$  που εφαρμόζεται στο άκρο του. Να προσδιορίσετε τη σχέση υπολογισμού του  $\delta$ .



Απάντηση

Οι παράμετροι και οι αντίστοιχες διαστάσεις τους είναι

|          |            |     |              |
|----------|------------|-----|--------------|
| $\delta$ | $P$        | $l$ | $EI$         |
| L        | $MLT^{-2}$ | L   | $ML^3T^{-2}$ |

Οι παράμετροι είναι 4 και οι θεμελιώδεις διαστάσεις είναι 3 επομένως υπάρχει  $4-3=1$  αδιάστατο μονώνυμο που περιγράφει το φαινόμενο. Θεωρώντας τη σχέση

$$\delta = P^a l^b (EI)^c, \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε τις διαστάσεις, εξισώνουμε τους εκθέτες των αντίστοιχων θεμελιωδών διαστάσεων

$$L = (MLT^{-2})^a L^b (ML^3T^{-2})^c$$

και προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$0 = a + c$$

$$1 = a + b + 3c$$

$$0 = -2a - 2c \Leftrightarrow a + c = 0$$

που αποτελεί σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Προσδιορίζοντας τον ένα άγνωστο, έστω  $a = 1$ , τότε  $c = -1$  και  $b = 3$ . Η εξίσωση του βέλους κάμψης του προβόλου γράφεται

$$\delta = C \frac{Pl^3}{EI}, \quad (5)$$

η δε σταθερά προκύπτει από τη θεωρία της αντοχής των υλικών ότι είναι  $C=1/3$ .

## A.2 Συστηματοποίηση της εφαρμογής του θεωρήματος Π.

Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- 1 Επιλογή των σχετικών με το πρόβλημα  $n$  μεταβλητών που συνδέονται με τη σχέση  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
- 2 Επιλέγονται οι επαναλαμβανόμενες μεταβλητές, δηλαδή αυτές που θα εμφανίζονται σε κάθε μονώνυμο  $\Pi$ , που είναι και όσος είναι ο αριθμός των  $m$  θεμελιωδών ποσοτήτων που υπεισέρχονται στις  $n$  μεταβλητές. Πρακτικά, στα προβλήματα της ρευστομηχανικής όπου υπεισέρχονται και οι τρεις θεμελιώδεις διαστάσεις, επιλέγουμε την πυκνότητα  $\rho$ , μια ταχύτητα  $V$  και ένα χαρακτηριστικό μήκος  $l$  που τις περιλαμβάνουν.
- 3 Ομαδοποιούνται οι μεταβλητές ανά  $m+1$  και διαμορφώνονται τα μονώνυμα  $\Pi_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n-m$ ). Κάθε μονώνυμο περιέχει τις  $m$  επαναλαμβανόμενες μεταβλητές και μια μεταβλητή με εκθέτη 1.
- 4 Προσδιορίζονται οι εκθέτες των επαναλαμβανόμενων μεταβλητών στα μονώνυμα.
- 5 Γράφεται η εξίσωση στη μορφή  $f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0$
- 6 Η εξίσωση αυτή μπορεί να επιλυθεί συνήθως ως προς ένα από τα μονώνυμα.
- 7 Τέλος, μερικά από τα μονώνυμα μπορούν να αντικατασταθούν από άλλα που προκύπτουν από συνδυασμούς τους, αρκεί τα νέα μονώνυμα να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

**Παράδειγμα A.3** Να μελετηθεί διαστατικά η μόνιμη ροή ρευστού σε τραχείς σωλήνες.

Θα ακολουθήσουμε τα παραπάνω βήματα για τον προσδιορισμό της σχέσης που συσχετίζει τις απώλειες ενέργειας με τα χαρακτηριστικά του ρευστού, του αγωγού και του πεδίου ροής. Οι απώλειες ενέργειας σε σωλήνες είναι συνακόλουθο φαινόμενο της μέσης διατμητικής τάσης στο στερεό όριο. Η γενική σχέση είναι της μορφής

$$\varphi(\tau_o, \rho, \mu, V, d, k_s) \quad (6)$$

όπου (σε παρένθεση δίνονται οι διαστάσεις της κάθε μεταβλητής)

|          |     |   |
|----------|-----|---|
| $\tau_o$ | ... | η μέση διατμητική τάση στο όριο ( $ML^{-1}T^{-2}$ ) |
| $\rho$   | ... | η πυκνότητα του ρευστού ( $ML^{-3}$ )               |
| $\mu$    | ... | το ιξώδες του ρευστού ( $ML^{-1}T^{-1}$ )           |
| $V$      | ... | η μέση ταχύτητα ροής ( $LT^{-1}$ )                  |
| $d$      | ... | η διάμετρος του σωλήνα (L)                          |
| $k_s$    | ... | η ισοδύναμη τραχύτητα του αγωγού (L)                |

περιέχει 6 μεταβλητές και 3 θεμελιώδεις διαστάσεις, ζητούνται επομένως  $6-3=3$  αδιάστατα μονώνυμα Π.

Θεωρούμε σαν επαναλαμβανόμενες μεταβλητές την πυκνότητα  $\rho$ , την ταχύτητα  $V$  και τη διάμετρο  $d$  του αγωγού. Τα τρία μονώνυμα θα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \tau_o / \rho^{X1} V^{Y1} d^{Z1} \\ \Pi_2 &= \mu / \rho^{X2} V^{Y2} d^{Z2} \\ \Pi_3 &= k_s / \rho^{X3} V^{Y3} d^{Z3} \end{aligned}$$

Τα παραπάνω μονώνυμα είναι αδιάστατα. Γράφοντας τις εξισώσεις των διαστάσεων για το κάθε μονώνυμο, προκύπτουν τρία συστήματα εξισώσεων με τρεις αγνώστους το καθένα που θα καθορίσουν τους εκθέτες των επαναλαμβανόμενων μεταβλητών.

$$\Pi_1: \quad ML^{-1}T^{-2} = (ML^{-3})^{X1}(LT^{-1})^{Y1}(L)^{Z1}$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} 1 &= X1 \\ -1 &= -3X1 + Y1 + Z1 \\ -2 &= -Y1 \end{aligned}$$

επομένως  $X1 = 1$ ,  $Y1 = 2$  και  $Z1 = 0$  και το μονώνυμο που προκύπτει είναι

$$\Pi_1 = \frac{\tau_o}{\rho V^2} \quad (7)$$

Όμοια

$$\Pi_2: \quad ML^{-1}T^{-1} = (ML^{-3})^{X2}(LT^{-1})^{Y2}(L)^{Z2}$$

απ' όπου προκύπτει ότι  $X2 = 1$ ,  $Y2 = 1$  και  $Z2 = 1$  και το μονώνυμο που προκύπτει είναι

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V d} \quad (8)$$

$$\text{και } \Pi_3: L = (ML^{-3})^{X_3}(LT^{-1})^{Y_3}(L)^{Z_3}$$

απ' όπου προκύπτει ότι  $X_3 = 0$ ,  $Y_3 = 0$  και  $Z_3 = 1$  και το μονώνυμο που προκύπτει είναι

$$\Pi_3 = \frac{k_s}{d}. \quad (9)$$

Η αδιάστατη επομένως εξίσωση τριβών σε σωλήνα είναι

$$\frac{\tau_o}{\rho V^2} = F\left(\Re, \frac{k_s}{d}\right); \Re = \frac{Vd\rho}{\mu}. \quad (10)$$

Το μονώνυμο  $\Pi_1$  δεν είναι τίποτα άλλο από το συντελεστή αντίστασης τριβών  $f/8$ , γνωστό από την υδραυλική και προσδιοριστέο από την εξίσωση των Darcy-Weisbach ή το διάγραμμα Moody.

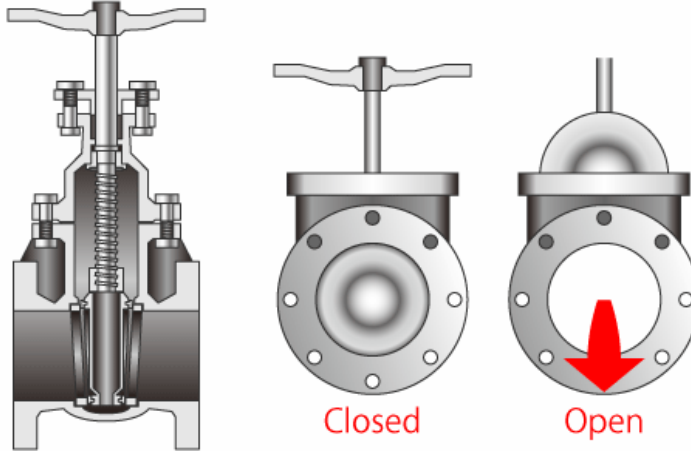
Στο παραπάνω παράδειγμα, στην περίπτωση που ο αγωγός είναι λείος, δηλαδή η ισοδύναμη τραχύτητα δεν επηρεάζει τη ροή, η παραπάνω σχέση είναι μόνο συνάρτηση του αριθμού Reynolds, ενώ στην περίπτωση της πλήρως τραχείας περιοχής όπου το ιξώδες δεν παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη διατμητικής τάσης σε σχέση με την τραχύτητα των οριών, είναι μόνο συνάρτηση του λόγου  $k_s/d$ .



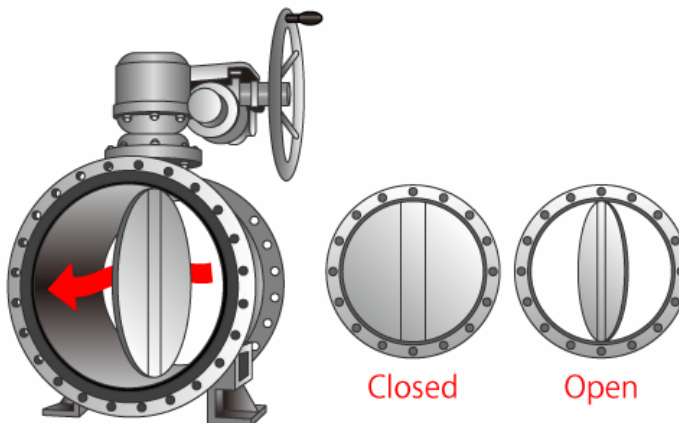


## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΔΙΚΛΙΔΕΣ (ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ)

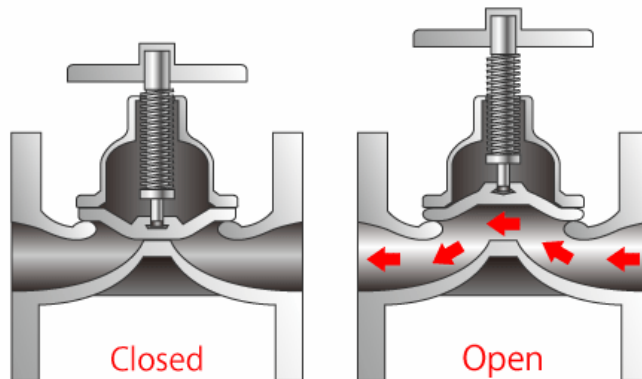
### 1. Συρταρωτή δικλίδα (Gate Valve)



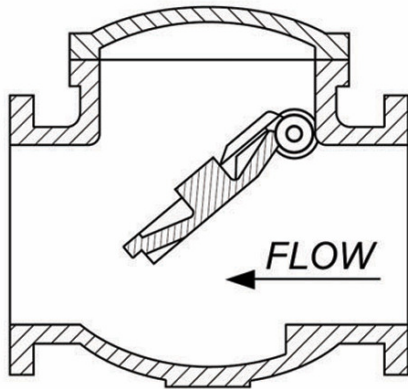
### 2. Δικλίδα πεταλούδας (Butterfly Valve)



### 3. Διαφραγματική δικλίδα (Diaphragm Valve)

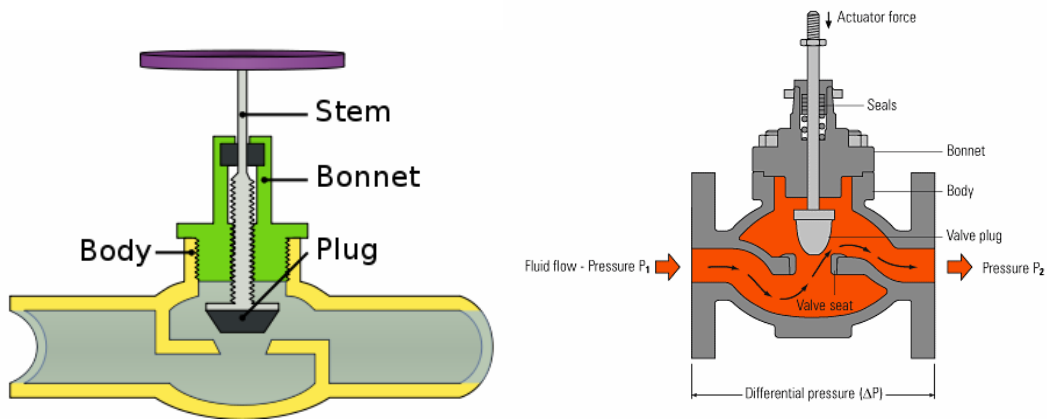


### 4. Βάνα αντεπιστροφής (Check Valve)



SWING CHECK VALVE

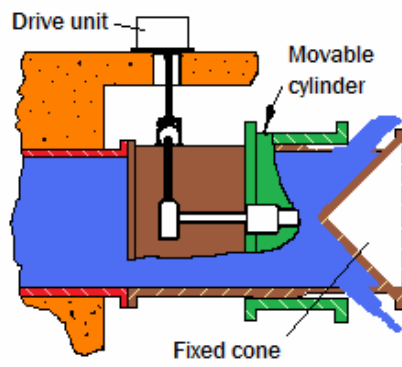
5. Βάνα βύσματος (Globe Valve)



6. Δικλίδα κοίλης φλέβας (Needle Valve)



7. Κωνική βάνα Howell Bunger (καταστροφής ενέργειας)



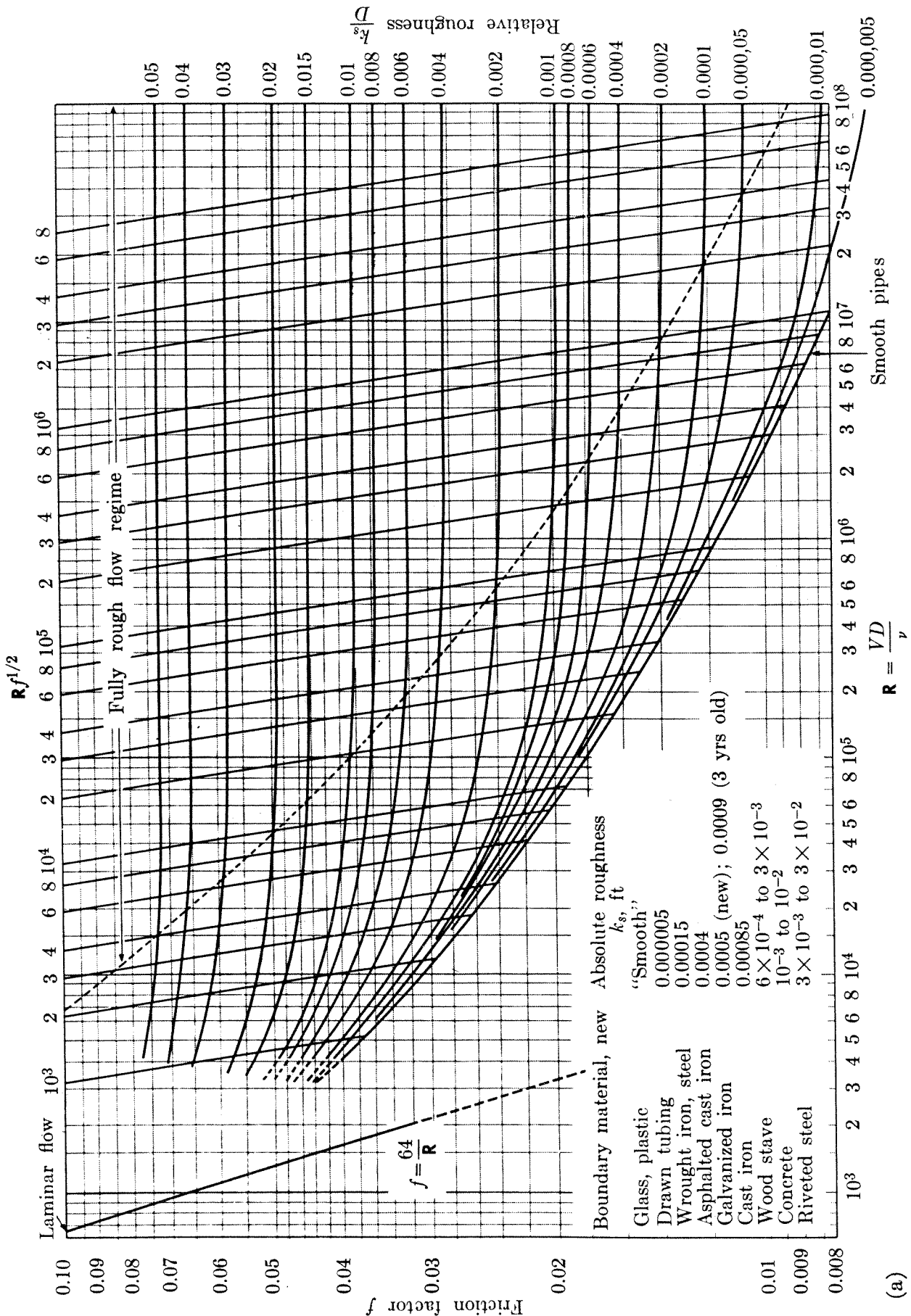
Σε λειτουργία





**ΔΙΑΦΟΡΑ ΧΡΗΣΙΜΑ  
ΦΥΛΛΑΔΙΑ**





(a)

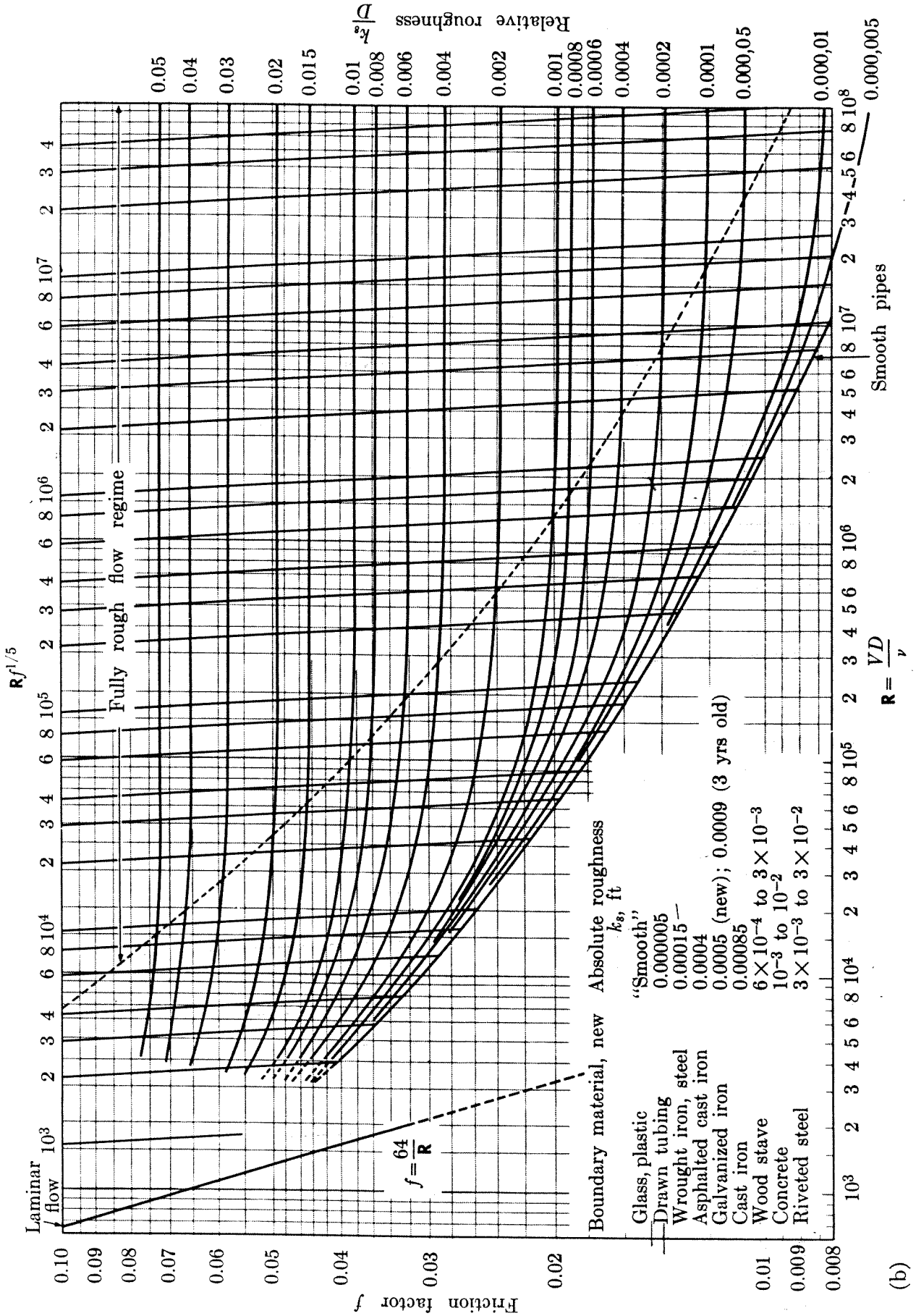


FIG. 13-12. Friction factor versus Reynolds number and relative roughness [6].

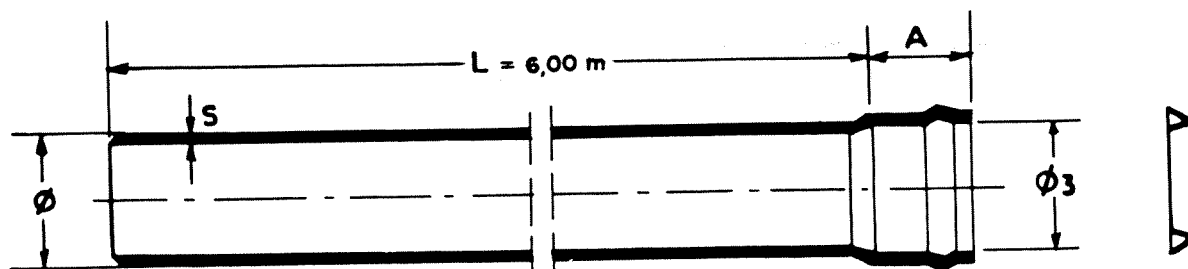


# 6. ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

## 6.1. Σωλήνες πίεσεως PVC 100 και εξαρτήματα

### 6.1.1. Σωλήνες πίεσεως κατά DIN 8061, 8062 και σχέδιο ΕΛΟΤ 474

Οι σωλήνες PVC 100 «ΕΛΛΕΝΙΤ» κατασκευάζονται με ενσωματωμένο σύνδεσμο για σύνδεση με ελαστικό δακτύλιο στεγανότητας τύπου V που παραδίδεται μαζί με τον σωλήνα. Το χρώμα των σωλήνων είναι **Γκρι σκούρο**.



#### Σωλήνες πίεσεως Σειράς 3 (6 ATM)

(Διαστάσεις σε χιλιοστά - Βάρος για μέσο πάχος των σωλήνων).

| ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΗ<br>ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ<br>ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ<br>Φ | ΠΑΧΟΣ S  |         | ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ<br>ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ<br>ΚΕΦΑΛΗΣ<br>Φ <sub>3</sub> | ΒΑΘΟΣ<br>ΚΕΦΑΛΗΣ<br>A | ΒΑΡΟΣ<br>kg/m |
|---|----------|---------|---|-----------------------|---------------|
|   | ΕΛΑΧΙΣΤΟ | ΜΕΓΙΣΤΟ |   |                       |               |
| 50  | 1,8      | 2,2     | 50,4  | 51,0                  | 0,422         |
| 63  | 1,9      | 2,3     | 63,4  | 98,9                  | 0,562         |
| 75  | 2,2      | 2,7     | 75,5  | 100,0                 | 0,782         |
| 90  | 2,7      | 3,2     | 90,6  | 107,0                 | 1,130         |
| 110                                       | 3,2      | 3,8     | 110,8   | 109,0                 | 1,640         |
| 125                                       | 3,7      | 4,3     | 125,9   | 115,5                 | 2,130         |
| 140                                       | 4,1      | 4,8     | 141,0   | 117,0                 | 2,650         |
| 160                                       | 4,7      | 5,4     | 161,0   | 131,0                 | 3,440         |
| 180                                       | 5,3      | 6,1     | 181,0   | 155,0                 | 4,370         |
| 200                                       | 5,9      | 6,7     | 201,0   | 155,0                 | 5,370         |
| 225                                       | 6,6      | 7,5     | 226,5   | 190,5                 | 6,760         |
| 250                                       | 7,3      | 8,3     | 251,5   | 190,5                 | 8,310         |
| 280                                       | 8,2      | 9,3     | 281,5   | 190,5                 | 10,400        |
| 315                                       | 9,2      | 10,4    | 316,5   | 190,5                 | 13,200        |
| 355                                       | 10,4     | 11,7    | 356,5   | 207,5                 | 16,700        |
| 400                                       | 11,7     | 13,1    | 402   | 207,5                 | 21,100        |

# helidur®-12,5

**ΚΩΔ. ΑΡ. 13232**  
**ΥΔΡΕΥΣΕΩΣ, ΑΡΔΕΥΣΕΩΣ ΥΠΟΓΕΙΩΝ**  
**ΔΙΚΤΥΩΝ ΑΠΟ ΣΚΛΗΡΟ PVC 100**

## ΤΕΧΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

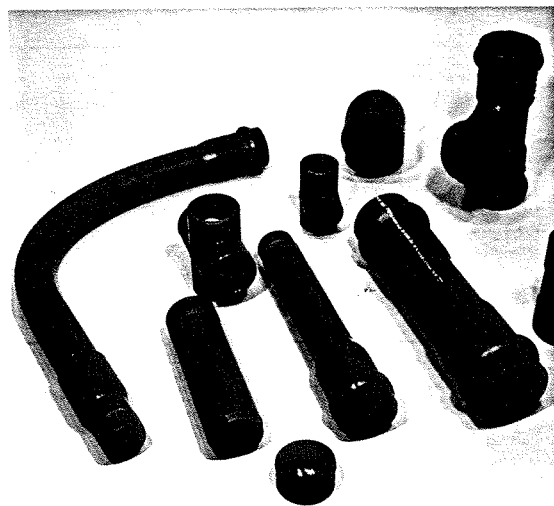
- Πίεση λειτουργίας στους 20° C: 12,5 atm
- Προσφερόμενα ωφέλιμα μήκη: 6 m
- Χρώμα: Γκρι σκούρο (RAL 7011)

## ΚΩΔ. ΑΡ. 13232

| ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ<br>D | ΠΑΧΟΣ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ<br>s | ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ<br>d | ΒΑΡΟΣ<br>~<br>G |
|--------------------------|-----------------------|--------------------------|-----------------|
| mm                       | mm                    | mm                       | kg/m            |
| 90                       | 5,3                   | 79,4                     | 2,10            |
| 110                      | 6,5                   | 97,0                     | 3,15            |
| 125                      | 7,4                   | 110,2                    | 3,97            |
| 140                      | 8,2                   | 123,6                    | 5,05            |
| 160                      | 9,4                   | 141,2                    | 6,58            |
| 200                      | 11,8                  | 176,4                    | 10,31           |
| 225                      | 13,2                  | 198,6                    | 13,00           |
| 250                      | 14,7                  | 220,6                    | 16,03           |
| 280                      | 16,5                  | 247,0                    | 20,04           |
| 315                      | 18,5                  | 278,0                    | 25,40           |
| 400                      | 23,5                  | 353,0                    | 40,93           |
| 450 <sup>(1)</sup>       | 26,5                  | 397,0                    | 51,88           |
| 500 <sup>(1)</sup>       | 29,4                  | 441,2                    | 63,95           |

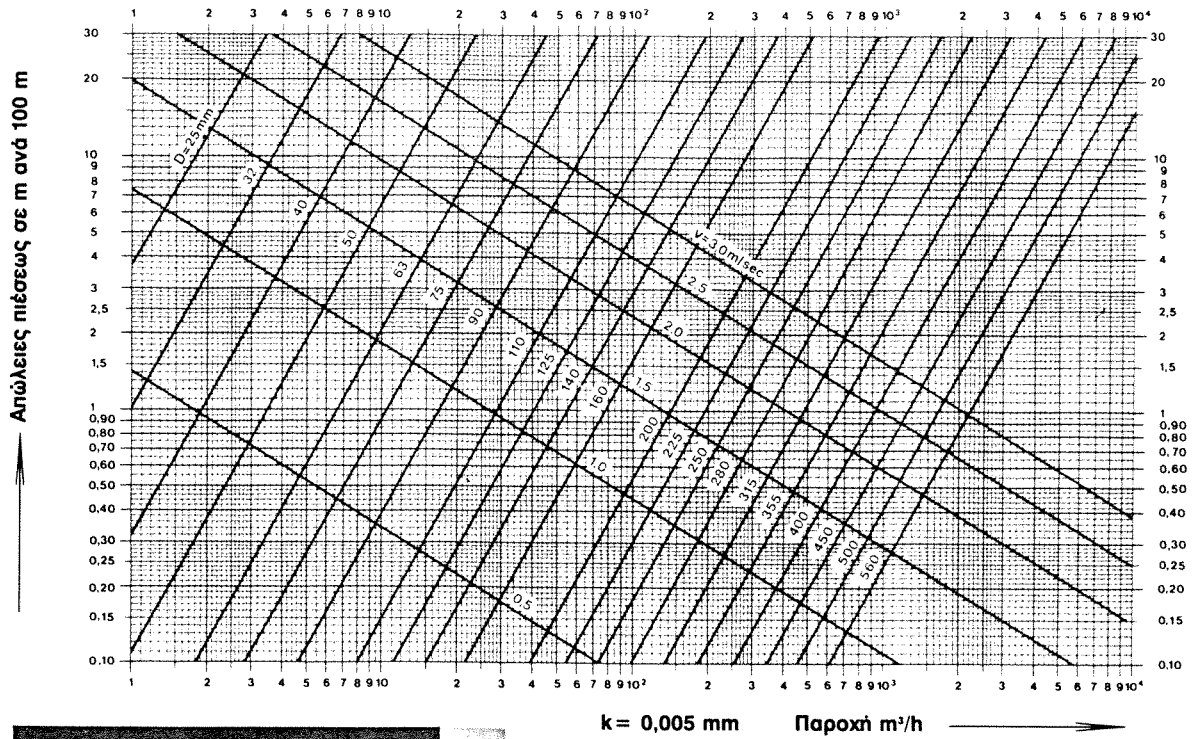
**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Οι υπολογισμοί πάχους τοιχώματος και βάρους, καθώς και οι έλεγχοι, γίνονται κατά DIN 8061/8062.

(1) Κατόπιν ειδικής παραγγελίας.



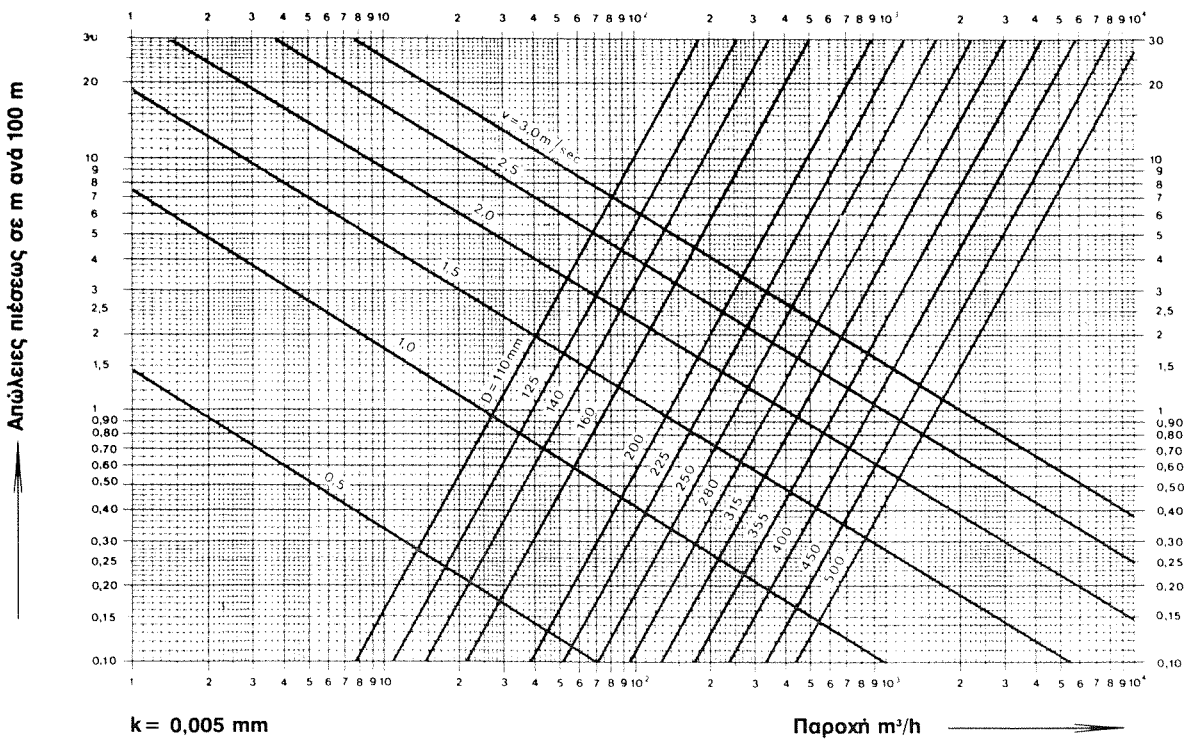
# helidur<sup>®</sup>

## ΝΟΜΟΓΡΑΦΗΜΑ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΠΕΣΕΩΣ ΣΩΛΗΝΩΝ HELIDUR<sup>®</sup> - 10



# helidur<sup>®</sup>

## ΝΟΜΟΓΡΑΦΗΜΑ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΠΕΣΕΩΣ ΣΩΛΗΝΩΝ HELIDUR<sup>®</sup> - 12,5



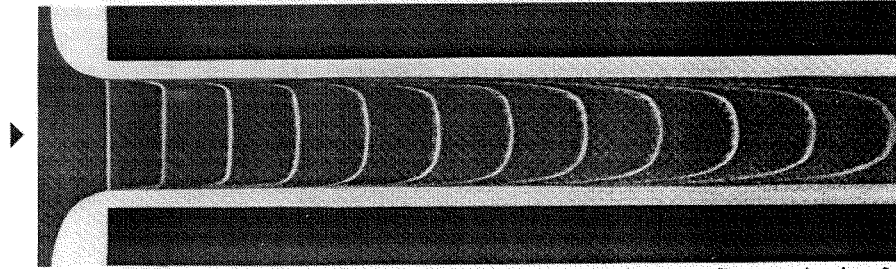
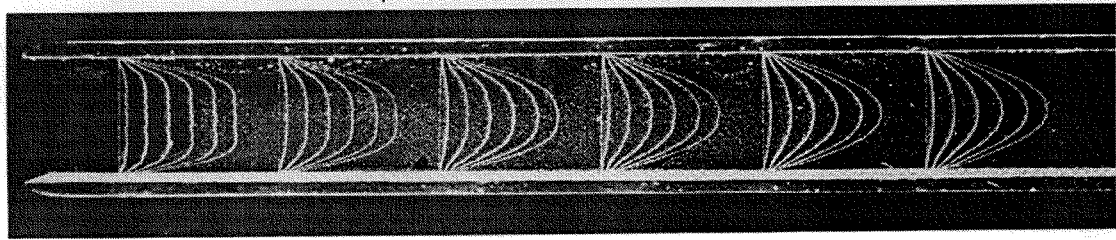
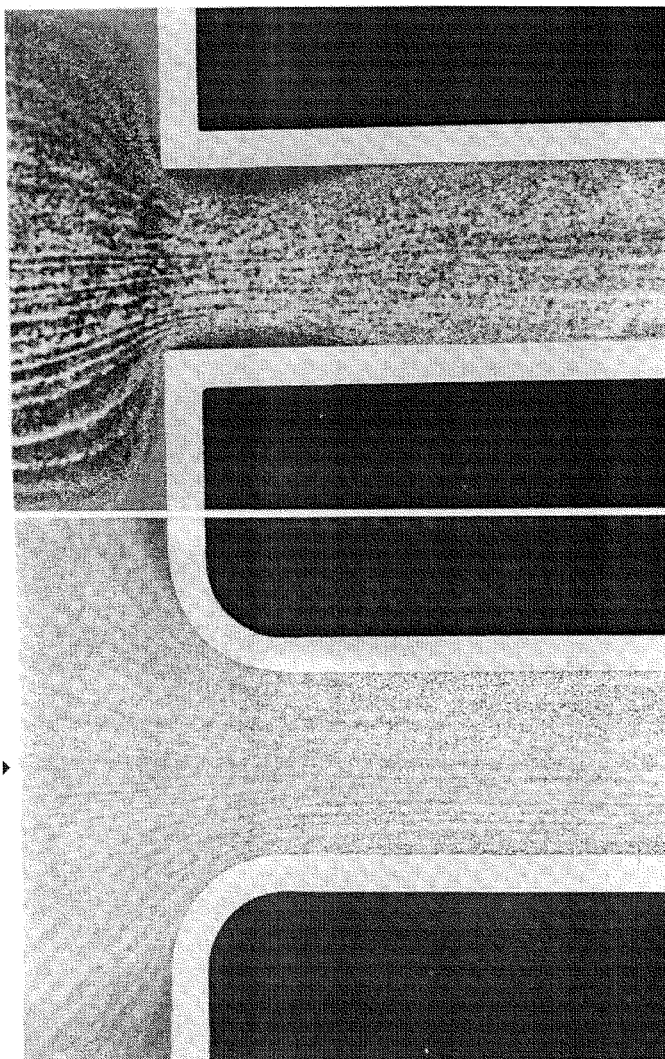


Fig. 13. Flow in an inlet region of a circular pipe (water, flow velocity 6 cm/s, pipe diameter 27 mm,  $Re = 1.6 \times 10^3$ , hydrogen bubble method).

Fig. 14. Flow in an inlet region between parallel plates (water, flow velocity 3.2 cm/s, distance between two plates 20 mm,  $Re = 640$ , hydrogen bubble method).

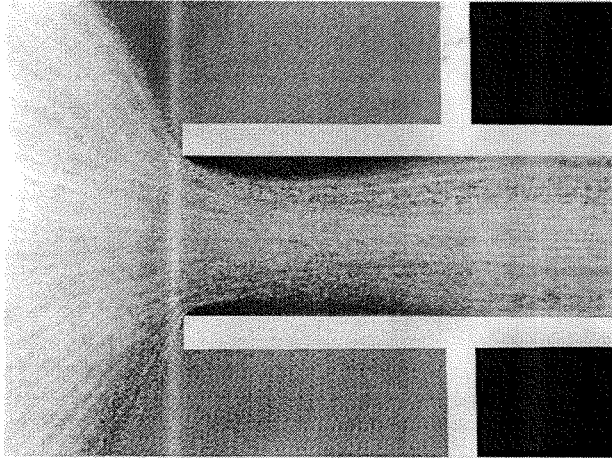


Κατανομή (προφίλ) ταχύτητας κατά την είσοδο ρευστού σε σωλήνα (επάνω) και ανάμεσα σε παράλληλες πλάκες (κάτω)



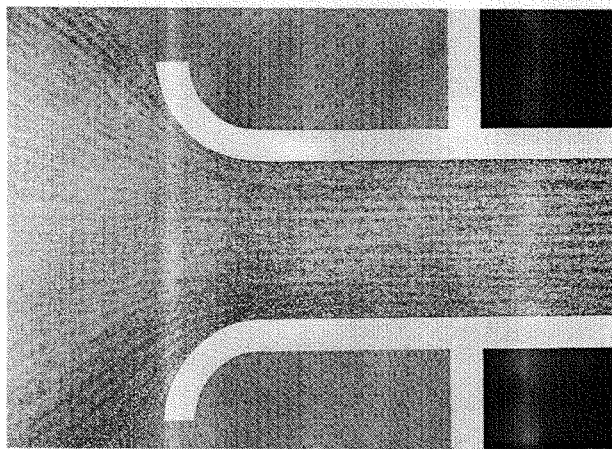
Απότομη είσοδος σε σωλήνα

Είσοδος σε σωλήνα με  
τρογγυλευμένο στόμιο.



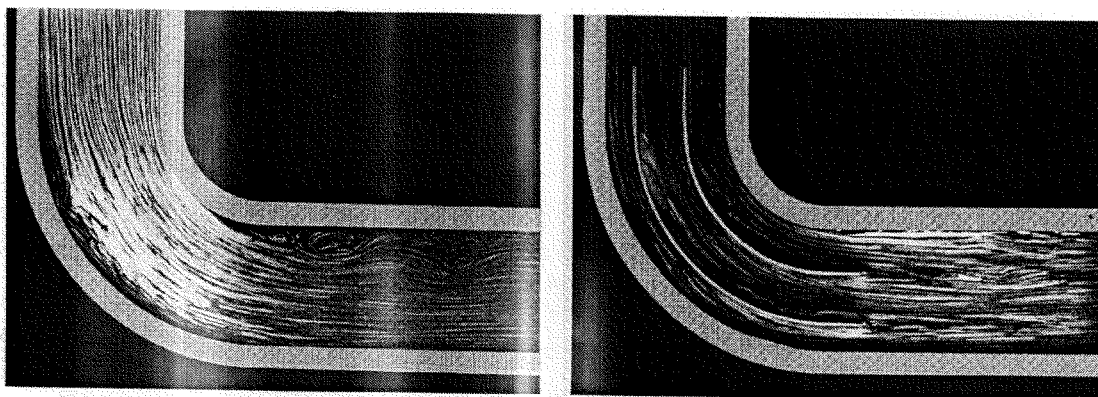
Είσοδος σε σωλήνα με  
σημαντικές απώλειες ενέργειας

Fig. 103. Water, velocity = 3.4 cm/s, passage width = 20 mm,  $Re = 500$ , hydrogen bubble method.



Είσοδος σε σωλήνα με  
ελάχιστες απώλειες ενέργειας

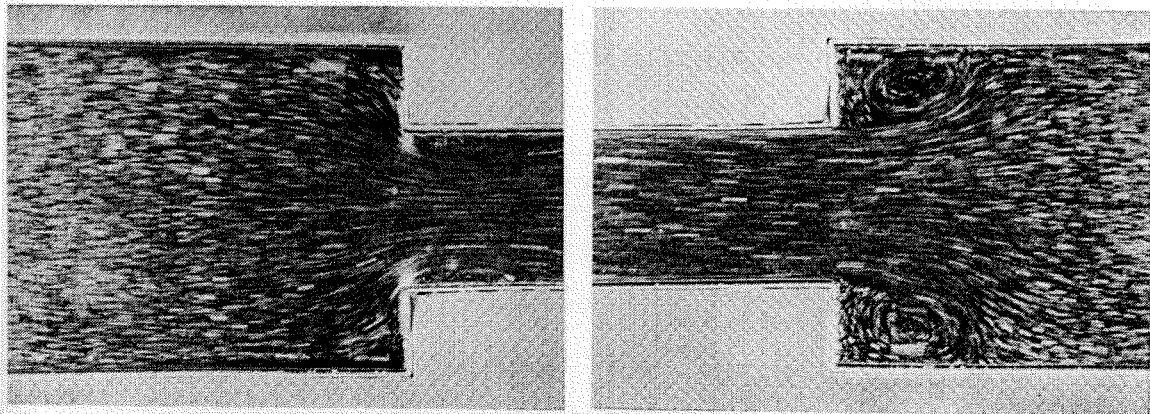
Fig. 104. Water, velocity = 3.4 cm/s, passage width 20 mm,  $Re = 600$ , hydrogen bubble method.



Figs. 108 and 109. Flow through a turning passage with and without guide vanes (water, velocity = 10 cm/s, passage width = 20 mm,  $Re = 2 \times 10^3$ , surface tracer method).

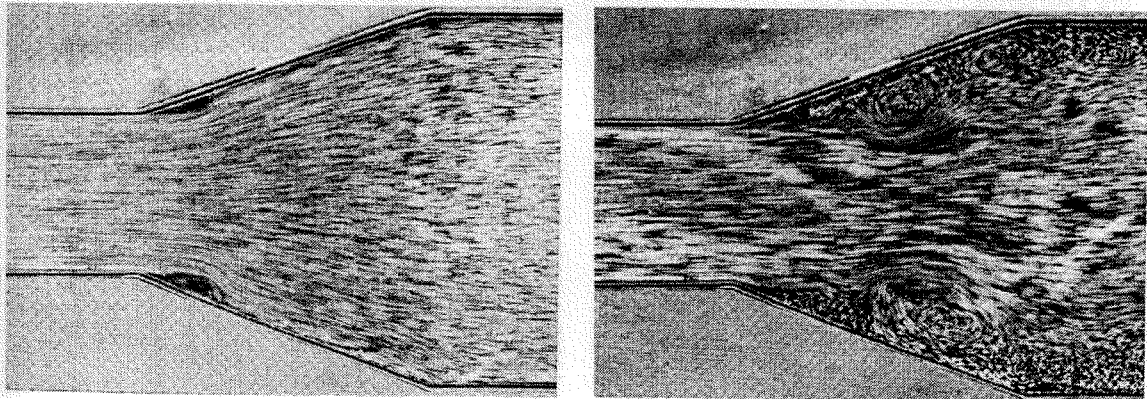
Ροή σε καμπύλη χωρίς (αριστερά) ή με (δεξιά) καθοδηγητικά πτερύγια. Εμφανείς περιοχές αποκόλλησης αριστερά.





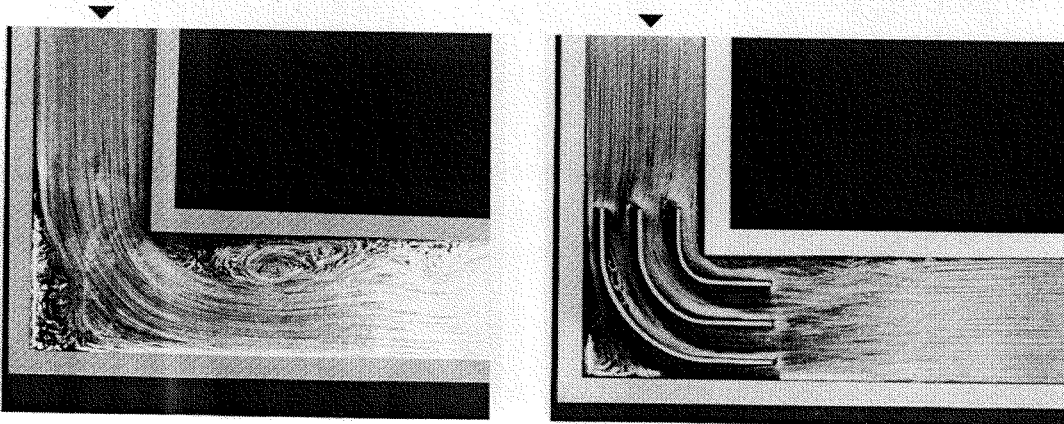
Figs. 112 and 113. Flow through sudden contraction and enlargement (water, velocity = 15 cm/s (112), 20 cm/s (113), width of narrower passage = 400 mm, tracer method).

Figs. 114 and 115. Slow and fast diverging flow (water, velocity = 3 ~ 4 cm/s (114), 15 ~ 20 cm/s (115), width of narrower passage = 600 mm, diverging angle = 20°, tracer method).



Ροή σε απότομη στένωση (πάνω αριστερά) και απότομη διεύρυνση (πάνω δεξιά). Ροή σε διεύρυνση υπό γωνία 20° (κάτω), με χαμηλή ταχύτητα (αριστερά) και μεγαλύτερη ταχύτητα (δεξιά). Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις είναι εμφανέστατες οι περιοχές αποκόλλησης.

Figs. 110 and 111. Passages connected in right angle with and without guide vanes (water, velocity = 10 cm/s, passage width = 20 mm,  $Re = 2 \times 10^3$ , surface tracer method).



Ροή σε ορθή γωνία χωρίς (αριστερά) ή με (δεξιά) καθοδηγητικά περύγια. Εμφανείς περιοχές αποκόλλησης αριστερά και δεξιά.

## E. Compound Pipelines

The principles presented in all the foregoing discussion can be used in combination to solve problems involving compound pipelines. Figure 7-6 is an example of a compound pipeline which consists of an entrance, a sudden expansion, a sudden contraction, a valve, a bend, a gradual expansion, an outlet, and pipes of different diameters. Each of these items involves a head loss. The straight pipe involves shear

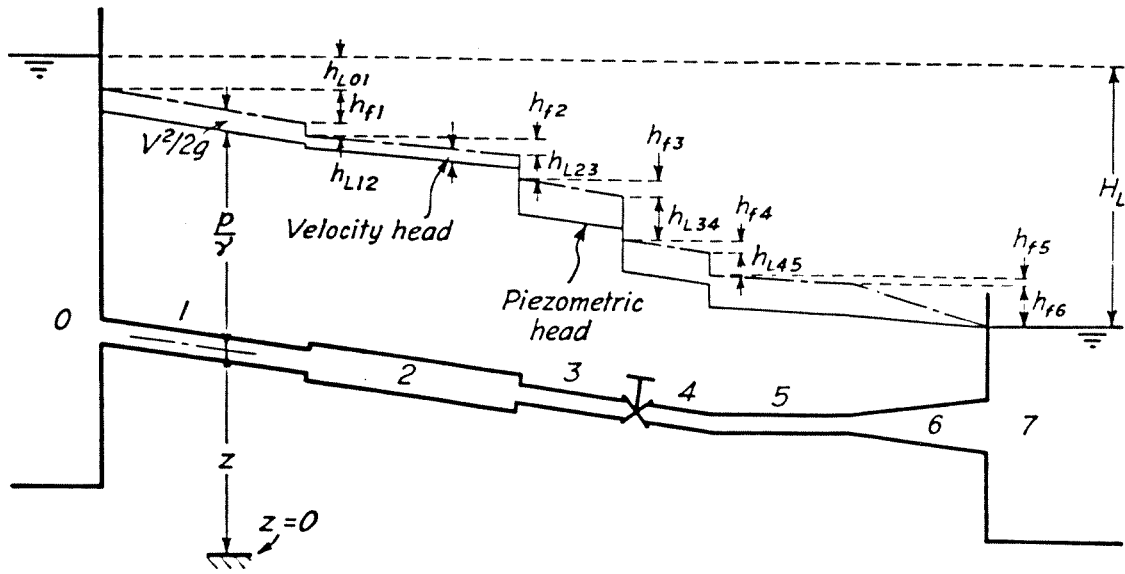


FIG. 7-6. Energy diagram for compound pipelines.

resistance, and each of the others involves both shear and pressure resistance to make up the form losses. The energy equation [Eq. (7-26)] may be written for any reach of pipe between sections  $a$  and  $b$ :

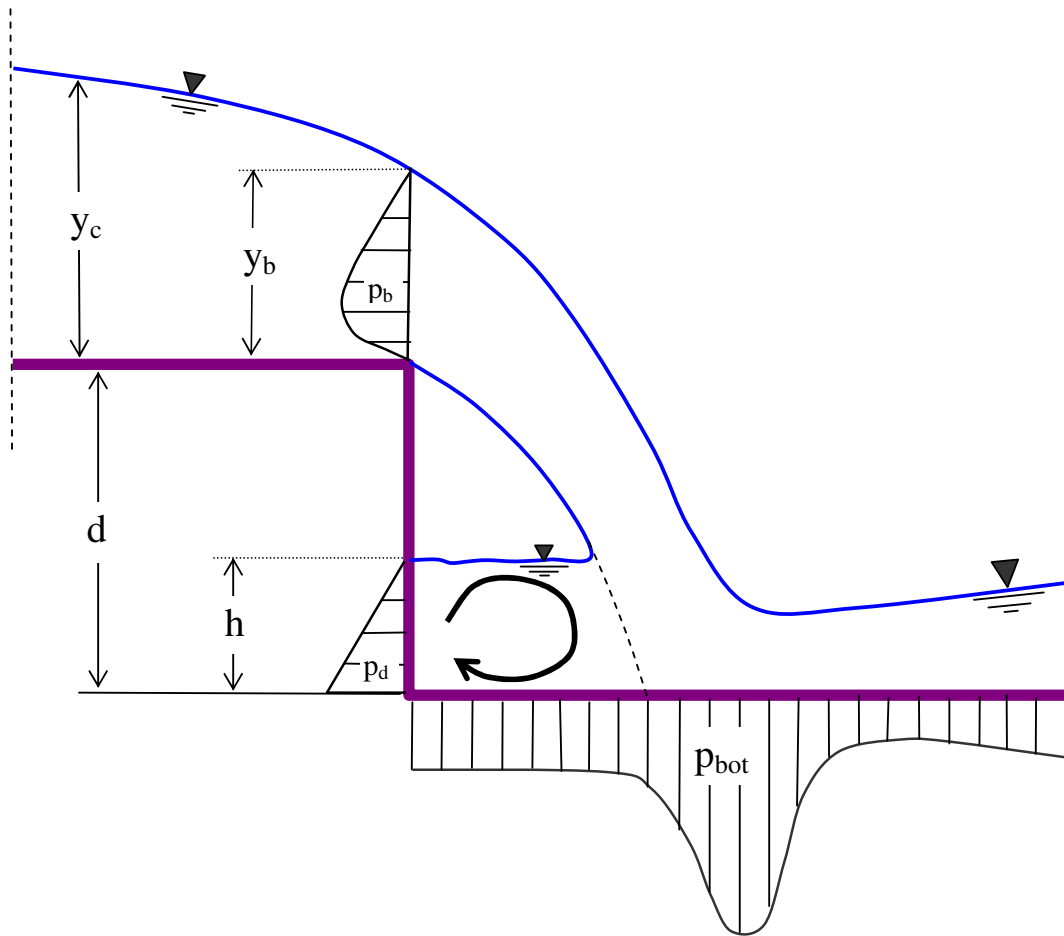
$$\frac{V_a^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} + z_a = \frac{V_b^2}{2g} + \frac{p_b}{\gamma} + z_b + H_L \quad (7-43)$$

If the upstream reservoir is chosen as section  $a$  and the downstream reservoir as  $b$ , then  $H_L$  is the sum of all the losses indicated in Fig. 7-6, or

$$\begin{aligned} H_L = & h_{L01} + h_{f1} + h_{L12} + h_{f2} \\ \text{total} & \text{entrance pipe expansion pipe} \\ \text{loss} & \text{loss loss loss loss} \\ & + h_{L23} + h_{f3} + h_{L34} + h_{f4} + h_{L45} + h_{f5} + h_{L57} + h_{L67} \\ & \text{contraction pipe valve pipe bend pipe gradual exit} \\ & \text{loss loss loss loss loss loss loss expansion loss} \\ & \text{loss} \end{aligned} \quad (7-44)$$







# ΑΓΩΓΟΙ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Παναγιώτης Ν. Παπανικολάου, PhD

ΑΘΗΝΑ, 2014



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1    | ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....   | 1  |
| 1.1  | Ορισμός   | 1  |
| 1.2  | Κύριες εφαρμογές.   | 2  |
| 1.3  | Χαρακτηριστικά των ανοικτών αγωγών.   | 2  |
| 1.4  | Γεωμετρικά χαρακτηριστικά.  | 2  |
| 1.5  | Κατηγορίες ροής με ελεύθερη επιφάνεια   | 3  |
| 1.6  | Ταχύτητα μετάδοσης κύματος (celerity) σε ανοικτό αγωγό.                                     | 6  |
| 1.7  | Μεθοδολογία ανάλυσης της ροής   | 7  |
| 2    | ΑΡΧΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗΣ (ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΚΙΝΗΣΗΣ) .....   | 11 |
| 2.1. | Ειδική ενέργεια - διάγραμμα ειδικής ενέργειας   | 12 |
| 2.2  | Διάγραμμα παροχής   | 14 |
| 2.3. | Εξίσωση ορμής (ποσότητας της κίνησης)   | 15 |
| 2.4. | Διάγραμμα ειδικής δύναμης   | 15 |
| 2.5. | Αδιάστατοποιημένα διαγράμματα ειδικής ενέργειας και ειδικής δύναμης σε ορθογωνικούς αγωγούς | 17 |
| 2.6. | Υπολογισμός του κρίσιμου βάθους   | 17 |
| 2.7. | Ανακεφαλαίωση   | 21 |
| 2.8  | Επαναληπτικά προβλήματα   | 21 |
| 3    | ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΒΑΘΟΥΣ.....  | 27 |
| 3.1. | Ομαλή μεταβολή του υψόμετρου πυθμένα χωρίς μεταβολή του πλάτους ορθογωνικής διώρυγας        | 28 |
| 3.2. | Μεταβολή του πλάτους ορθογωνικής διώρυγας χωρίς μεταβολή υψόμετρου πυθμένα                  | 29 |
| 3.3. | Ανύψωση πυθμένα - υποκρίσιμη ροή  | 31 |
| 3.4. | Στένωση διατομής - υποκρίσιμη ροή   | 33 |
| 3.5. | Υδροδότηση ορθογωνικής διώρυγας από ταμειυτήρα με ρυθμιστικό θυρόφραγμα.                    | 37 |
| 3.6. | Το υδραυλικό άλμα.  | 40 |
| 3.7. | Κατηγορίες υδραυλικού άλματος   | 43 |
| 4    | ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ .....  | 45 |
| 4.1. | Εμπειρικές σχέσεις υπολογισμού ομοιόμορφης ροής   | 47 |
| 4.2  | Υπολογισμός του βάθους ομοιόμορφης ροής σε απλές διατομές                                   | 49 |

|                    |   |     |
|--------------------|---|-----|
| 4.3.               | Σύνθετη τραχύτητα σε απλή διατομή   | 58  |
| 4.4.               | Υπολογισμός της ομοιόμορφης ροής σε σύνθετες διατομές                         | 60  |
| 5                  | ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΠΕΝΔΥΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΝΕΠΕΝΔΥΤΩΝ ΔΙΩΡΥΓΩΝ ΣΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ .....       | 63  |
| 5.1                | Το ελεύθερο ύψος και το ύψος επένδυσης  | 64  |
| 5.2                | Η επιλογή βέλτιστης και οικονομικής διατομής                                  | 65  |
| 5.3                | Καθορισμός των διαστάσεων της διατομής  | 67  |
| 5.4                | Σχεδιασμός ανεπένδυτων ανοικτών αγωγών – τάφρων                               | 69  |
| 5.5                | Μέθοδος υπολογισμού.  | 69  |
| 6                  | ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ - ΒΑΘΜΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΡΟΗ (BMP) .....                         | 71  |
| 6.1                | Γενικά  | 71  |
| 6.2                | Διερεύνηση της διαφορικής εξίσωσης της BMP                                    | 72  |
| 6.3                | Καμπύλες (προφίλ) ελεύθερης επιφάνειας  | 73  |
| 6.4                | Καμπύλες (προφίλ) της ελεύθερης επιφάνειας σε BMP                             | 75  |
| 6.5                | Κατηγοριοποίηση των καμπυλών (profile) ελεύθερης επιφάνειας.                  | 76  |
| 6.6                | Μορφές της ελεύθερης επιφάνειας σε κατά τμήματα πρισματικό αγωγό.             | 78  |
| 7                  | ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΒΑΘΜΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗΣ ΡΟΗΣ .....                            | 85  |
| 7.1                | Μέθοδος 1η. Άμεση βήμα προς βήμα ολοκλήρωση (Direct step method).             | 87  |
| 7.2                | Μέθοδος 2η. Τυπική μέθοδος βήμα προς βήμα ολοκλήρωσης (Standard step method). | 90  |
| 7.3                | Προσδιορισμός της παροχής πρισματικού αγωγού                                  | 94  |
|                    | <b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>   | 97  |
| <br>               |   |     |
| <b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ</b> |   |     |
| A.                 | ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ                              | 99  |
| B.                 | ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΟΥΣ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ                                   | 103 |

# 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

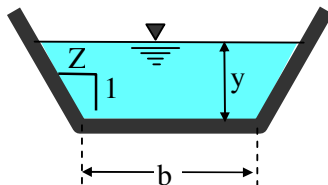
## 1.1 Ορισμός

Ανοικτοί αγωγοί ονομάζονται αυτοί στους οποίους το ρευστό (νερό) ρέει με ελεύθερη επιφάνεια, καταλαμβάνει δηλαδή τμήμα μόνο της διατομής. Ροή με ελεύθερη επιφάνεια εμφανίζεται στους αγωγούς ομβρίων και ακαθάρτων, σε οχετούς, διώρυγες, κανάλια ναυσιπλοΐας, υδατορρέυματα, κλπ. Η βασική οριακή συνθήκη είναι ότι πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι ατμοσφαιρική. Στη ροή σε αγωγό με ελεύθερη επιφάνεια η παροχή ορίζεται ως

$$Q = AV$$

όπου  $A$  είναι το εμβαδόν της υγρής διατομής και  $V$  η μέση ταχύτητα ροής της υγρής διατομής. Το εμβαδόν της υγρής διατομής  $A$  είναι συνάρτηση της γεωμετρίας της διατομής και της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας

$$A = A(\text{γεωμετρια}, y)$$



όπου ως  $y$  ορίζουμε το βάθος ροής. Για παράδειγμα, σε τραπεζοειδή διατομή με πλάτος πυθμένα  $b$ , βάθος νερού  $y$  και κλίση πρανών  $Z$ , το εμβαδόν της υγρής διατομής δίδεται από τη σχέση

$$A(b, y, Z) = (b + Zy)y .$$

Σε περίπτωση διάβασης πλημμύρας σε κάποιο ποτάμι ή υδατόρρευμα, η υγρή διατομή μεταβάλλεται χρονικά κατά τη διάρκεια του πλημμυρικού φαινομένου με αποτέλεσμα το εμβαδόν της υγρής διατομής να εξαρτάται και από το χρόνο, δηλαδή

$$A = A(\text{γεωμετρια}, y, \text{χρονος}) .$$

## 1.2 Κύριες εφαρμογές.

Οι σημαντικότερες εφαρμογές της ροής με ελεύθερη επιφάνεια εμφανίζονται στα κανάλια και διώρυγες μεταφοράς νερού, στα κανάλια ναυσιπλοΐας, στην ποτάμια υδραυλική, σε μελέτες αποχέτευσης και αποστράγγισης, σε υπερχειλιστές φραγμάτων, αναβαθμούς κλπ.

Στην ανάλυση της ροής αγωγών με ελεύθερη επιφάνεια εμφανίζονται αρκετές δυσκολίες που προκύπτουν από δευτερεύουσα ροή που δημιουργείται. Ο ρόλος της βαρύτητας είναι ουσιαστικός δεδομένου ότι αυτή καθορίζει κατά κύριο λόγο την κίνηση του ρευστού.

## 1.3 Χαρακτηριστικά των ανοικτών αγωγών.

Οι ανοικτοί αγωγοί χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες, τους φυσικούς αγωγούς (ποτάμια, ρυάκια, ρεύματα, χείμαρροι, κλπ) και τους τεχνητούς (διώρυγες ναυσιπλοΐας, αρδευτικές και στραγγιστικές τάφροι, υπόνομοι, κλπ). Οι φυσικοί αγωγοί έχουν ακανόνιστη διατομή, υφίστανται διάβρωση και επομένως μεταβολή των γεωμετρικών τους χαρακτηριστικών και αναλύονται στην ποτάμια υδραυλική. Οι τεχνητοί αγωγοί μπορεί να είναι επενδυμένοι με σκυρόδεμα, σαραζανέτ, ή άλλο υλικό (διώρυγες, υπερχειλιστές, υπόνομοι, κλπ) ή ανεπένδυτοι (τάφροι, κλπ).

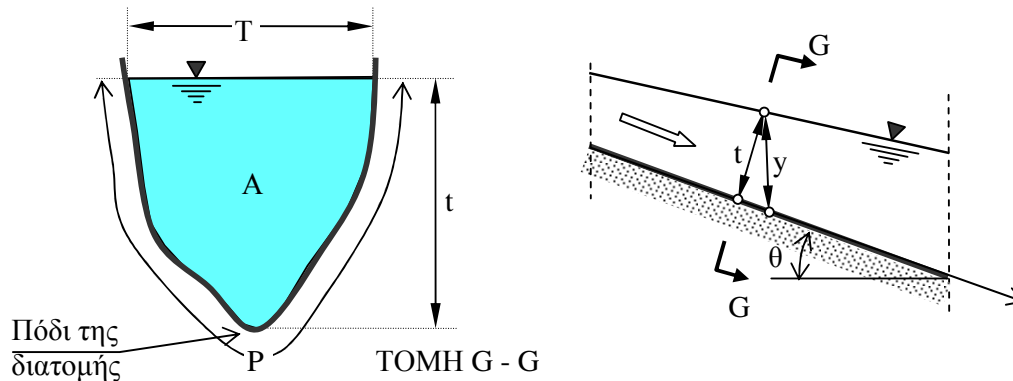
Τα φυσικά χαρακτηριστικά των ανοικτών αγωγών είναι η κατά μήκος κλίση του πυθμένα  $J_0$ , η εγκάρσια (κάθετη) στον πυθμένα διατομή, η κατακόρυφη διατομή, η υγρή διατομή και η στάθμη της ροής σε σχέση με κάποιο επίπεδο αναφοράς.

## 1.4 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά.

Υπάρχουν διάφορα γεωμετρικά είδη ανοικτών διατομών όπως είναι η ορθογωνική, η τραπεζοειδής, η τριγωνική, η παραβολική, καθώς και γεωμετρικά κλειστών όπως η κυκλική, η ελλειπτική και η πεταλοειδής. Ένας αγωγός με ελεύθερη επιφάνεια είναι *πρισματικός* όταν η διατομή του παραμένει αμετάβλητη κατά μήκος. Για παράδειγμα, μια ορθογωνική διώρυγα είναι πρισματικός αγωγός όταν το πλάτος της δεν μεταβάλλεται, μια τραπεζοειδής διώρυγα είναι πρισματικός αγωγός όταν εκτός από το πλάτος πυθμένα, η κλίση των πρανών της παραμένει αμετάβλητη, ενώ ένας κυκλικός αγωγός είναι πρισματικός όταν έχει σταθερή διάμετρο.

Ως *διατομή* (section) ενός ανοικτού αγωγού ορίζεται η εγκάρσια τομή του στην κύρια διεύθυνση ροής, ενώ *κατακόρυφη διατομή* ονομάζουμε αυτή που προκύπτει από ένα κατακόρυφο επίπεδο, κάθετο οριζοντιογραφικά στον άξονα του αγωγού.

Τα κυριότερα χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη της διατομής ενός ανοικτού αγωγού είναι το εγκάρσιο βάθος ροής  $t$  από την ελεύθερη επιφάνεια ως το χαμηλότερο σημείο (πόδι) της διατομής, το κατακόρυφο βάθος ροής  $y$ , το εμβαδόν της υγρής διατομής  $A$ , το πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας  $T$ , η βρεχόμενη περίμετρος  $P$ , η υδραυλική ακτίνα  $R=A/P$  και το υδραυλικό βάθος  $D=A/T$  της διατομής που ορίζεται ως το βάθος της ισοδύναμης ορθογωνικής διατομής πλάτους  $T$ .



**Σχήμα 1.1** Χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη σε ανοικτό αγωγό.

### 1.5 Κατηγορίες ροής με ελεύθερη επιφάνεια

Η ροή με ελεύθερη επιφάνεια χωρίζεται σε κατηγορίες ανάλογα με χαρακτηριστικά που βασίζονται σε κινηματικά ή δυναμικά κριτήρια. *Μόνιμη* (steady) ονομάζουμε τη ροή στην οποία το βάθος  $t$  παραμένει αμετάβλητο στο χρόνο (αλλιώς η ροή ονομάζεται *μη μόνιμη* - unsteady ή χρονικά μεταβαλλόμενη). *Ομοιόμορφη* (uniform) ονομάζεται η ροή όπου το βάθος  $t$  είναι σταθερό καθ' όλο το μήκος του αγωγού, αλλιώς η ροή ονομάζεται *ανομοιόμορφη* (non-uniform). Στη φύση οι ροές που παρουσιάζονται είναι σαφώς μη μόνιμες με χωρική και χρονική μεταβλητότητα.

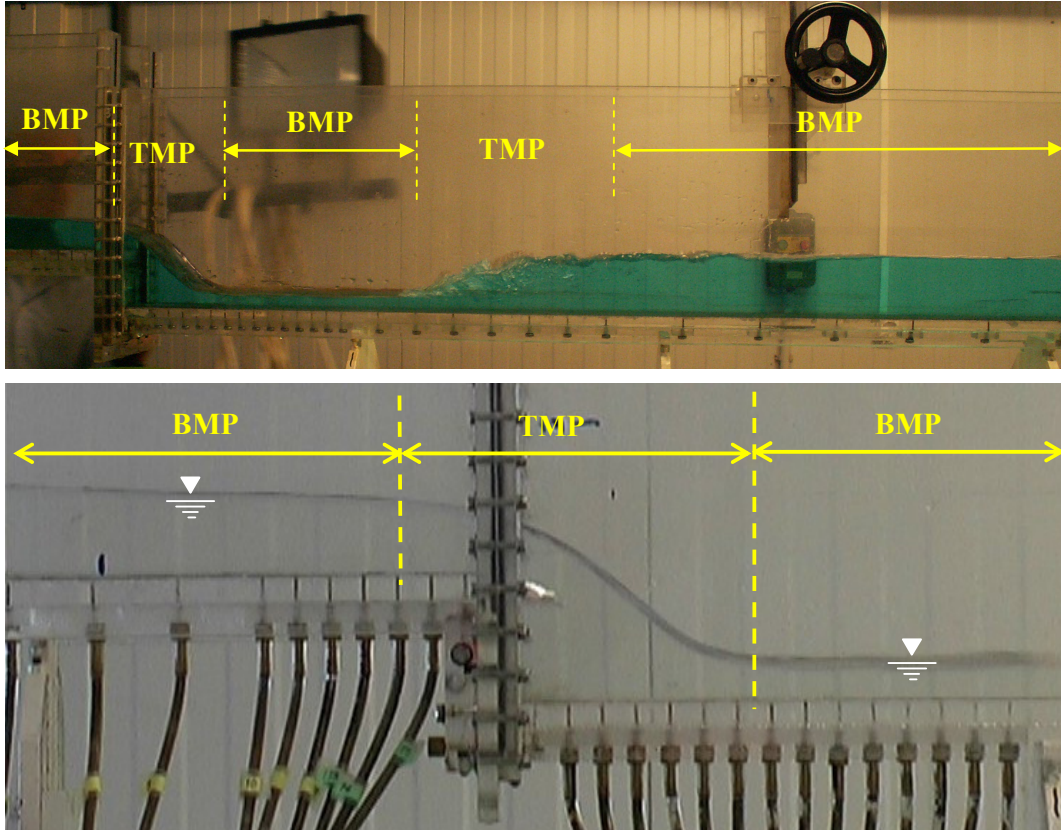
Η ανομοιόμορφη ροή χωρίζεται σε δύο βασικές κατηγορίες, την *ταχέως μεταβαλλόμενη* ροή (TMP) (rapidly varied flow, RVF) και τη *βαθμιαία μεταβαλλόμενη* ροή (BMP) (gradually varied flow, GVF). Στην ταχέως μεταβαλλόμενη ροή το βάθος  $t$  μεταβάλλεται σημαντικά σε μικρό μήκος, ενώ οι γραμμές ροής παρουσιάζουν έντονη καμπύλωση. Στη βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή η ελεύθερη επιφάνεια παρουσιάζει μικρή καμπύλωση και οι γραμμές ροής είναι περίπου παράλληλες. Στη φωτογραφία του Σχήματος 1.2 μπορούμε να παρατηρήσουμε τις δύο κατηγορίες ροής που αναφέρουμε παραπάνω, στην περιοχή αναβαθμού ύψους 7.5 cm, σε εργαστηριακό κανάλι μήκους 5.0 m και πλάτους 0.10 m. Η παροχή είναι 3.50 L/s και ο αριθμός Reynolds της ροής περίπου 35000.

Η ροή για την οποία η παροχή δεν είναι ίδια κατά μήκος του αγωγού, όπως για παράδειγμα η ροή ενός ποταμού, οι συλλεκτήρες στις μονάδες επεξεργασίας νερού, το κανάλι ενός πλευρικού υπερχειλιστή κλπ, ονομάζεται *χωρικά μεταβαλλόμενη ροή* (spatially varied flow), μπορεί δε να είναι είτε μόνιμη είτε μη μόνιμη.

Από κίνηματική άποψη η ροή χωρίζεται στις παρακάτω κατηγορίες:

- (1) *Μόνιμη ομοιόμορφη ροή* είναι αυτή στην οποία το βάθος είναι σταθερό στο χρόνο και καθ' όλο το μήκος του αγωγού.
- (2) *Μόνιμη ανομοιόμορφη ροή* είναι αυτή στην οποία το βάθος ροής μεταβάλλεται χωρικά αλλά όχι και χρονικά. Είναι και το περισσότερο συνηθισμένο είδος ροής που παρουσιάζεται κυρίως στους πρισματικούς αγωγούς. Η ροή αυτή όπως προαναφέραμε έχει δύο υποκατηγορίες, τη *βαθμιαία* και την *ταχέως μεταβαλλόμενη* ροή.

- (3) *Μη μόνιμη ομοιόμορφη* ροή, κατάσταση η οποία είναι πρακτικά αδύνατη, και  
(4) *Μη μόνιμη ανομοιόμορφη* ροή είναι η ροή όπου το βάθος μεταβάλλεται στο χώρο και το χρόνο, ενώ αποτελείται από δύο υποκατηγορίες, τη *βαθμιαία μεταβαλλόμενη* και την *ταχέως μεταβαλλόμενη* μη μόνιμη ανομοιόμορφη ροή.



**Σχήμα 1.2** Ροή σε ορθογωνική διάρρυγα πλάτους 10 cm με βυθισμένο αναβαθμό<sup>1</sup> ύψους 7.5 cm και υδραυλικό άλμα (επάνω). Λεπτομέρεια στην περιοχή του βυθισμένου αναβαθμού (κάτω).

Από δυναμική άποψη η ροή χωρίζεται σε κατηγορίες με βάση τη σχέση των δυνάμεων αδρανείας και βαρύτητας που την επηρεάζουν. Συγκεκριμένα, θεωρώντας μια χαρακτηριστική ταχύτητα  $V$  (π.χ. τη μέση ταχύτητα της διατομής) και ένα χαρακτηριστικό μήκος  $L$  του πεδίου ροής (π.χ. το βάθος ροής ή την υδραυλική ακτίνα), οι δυνάμεις που εμφανίζονται μπορούν να γραφτούν διαστατικά στον πίνακα που ακολουθεί όπου  $a$  είναι η επιτάχυνση του ρευστού,  $\Delta p$  κάποια διαφορά πιέσεων,  $M$  η μάζα,  $\rho$  η πυκνότητα του υγρού,  $A$  το εμβαδόν της διατομής και  $\mu$  το κινηματικό ιξώδες του υγρού. Αδιαστατοποιώντας τις εξισώσεις Navier-Stokes σε ένα ανοικτό αγωγό με βάθος και διαστάσεις τέτοιες που η επιφανειακή τάση και άλλοι παράγοντες δεν επηρεάζουν τη ροή, προκύπτουν δύο αδιάστατα μονώνυμα.

<sup>1</sup>Π.Ν. Παπανικολάου, (2005, 2011), Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής.



| Δυνάμεις                           | Σχέση δυνάμεων            | Διαστατική σχέση                                |
|------------------------------------|---------------------------|---|
| Αδράνειας                          | $F_I = Ma$                | $F_I \propto \rho L^3 (V^2 / L) = \rho L^2 V^2$ |
| Βαρύτητας                          | $F_g = Mg$                | $F_I \propto \rho L^3 g$                        |
| Διαφοράς πιέσεων                   | $F_p = \Delta p A$        | $F_p \propto \Delta p L^2$                      |
| Ιξώδους                            | $F_\mu = \mu (du / dy) A$ | $F_\mu \propto \mu V L$                         |
| Επιφανειακής τάσης, ανωστικές, κλπ |                           |   |

Το πρώτο μονώνυμο, με βάση τον παραπάνω πίνακα, είναι ο λόγος των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις τριβής (λόγω μη μηδενικού ιξώδους) και ονομάζεται αριθμός Reynolds (Re) της ροής

$$Re = \frac{VL}{\nu}, \quad (1.1)$$

όπου  $V$  είναι η μέση ταχύτητα ροής,  $\nu = \mu/\rho$  είναι το κινηματικό ιξώδες και  $L$  κάποιο χαρακτηριστικό μήκος (όπως π.χ. η υδραυλική ακτίνα της διατομής). Εάν ο αριθμός Reynolds της ροής υπερβεί κάποια κρίσιμη τιμή  $Re_c$ , η ροή από στρωτή γίνεται τυρβώδης. Συγκεκριμένα εάν  $Re < 500$  ( $L=R=A/P$  η υδραυλική ακτίνα της διατομής), η ροή θεωρούμε ότι είναι στρωτή, εάν  $Re > 4000$  (ο French, 1985, προτείνει 12500) είναι τυρβώδης και εάν  $500 < Re < 4000$  (ή 12500) βρίσκεται σε μια μεταβατική κατάσταση.

Το δεύτερο αδιάστατο μονώνυμο που προκύπτει είναι ο λόγος των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις βαρύτητας και ονομάζεται αριθμός Froude ( $Fr$ ) της ροής

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}, \quad (1.2)$$

όπου  $V$  είναι η μέση ταχύτητα ροής, ενώ το χαρακτηριστικό μήκος  $L=A/T=D$  ονομάζεται το υδραυλικό βάθος της διατομής. Εάν ο αριθμός του Froude  $Fr < 1$  η ροή ονομάζεται **υποκρίσιμη** (ποτάμια), εάν  $Fr > 1$  η ροή ονομάζεται **υπερκρίσιμη** (χειμαρρώδης) και εάν  $Fr=1$  η ροή ονομάζεται **κρίσιμη**.

Σε ένα ορθογωνικό ανοικτό αγωγό με ελεύθερη επιφάνεια και βάθος ροής  $y$ , μεγάλου πλάτους πυθμένα  $b$  ( $b > 5y$ ), η υδραυλική ακτίνα  $R$  και το υδραυλικό βάθος  $D$  είναι περίπου ίσα επειδή

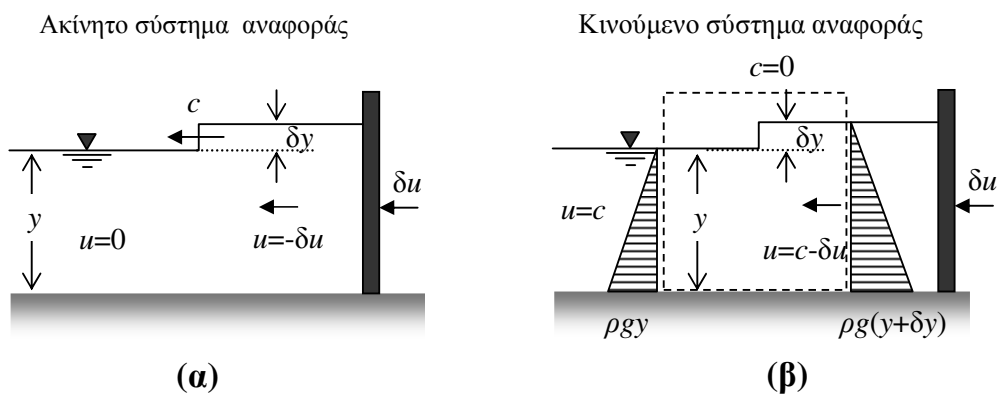
$$R = \frac{A}{P} = \frac{by}{b+2y} \cong y, \quad D = \frac{A}{T} = \frac{by}{b} = y,$$

και ο αριθμοί Reynolds και Froude της ροής γράφονται

$$Re = \frac{VL}{\nu} = \frac{Vy}{\nu} \quad \text{και} \quad Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{V}{\sqrt{gy}}. \quad (1.2a)$$

**1.6 Ταχύτητα μετάδοσης κύματος (celerity) σε ανοικτό αγωγό.**

Ο υπολογισμός της ταχύτητας διάδοσης μικροδιαταραχής (κύματος) σε ένα αγωγό με ελεύθερη επιφάνεια γίνεται με βάση τις παραδοχές (i) ότι το βάθος ροής είναι μικρό (ρηχό νερό) και (ii) το ύψος κύματος στην επιφάνεια είναι πολύ μικρό σε σχέση με το βάθος ροής. Σε κανάλι με νερό βάθους  $y$  δημιουργούμε ένα κύμα ύψους  $\delta y$  με ένα πιστόνι. Το κύμα θα κινηθεί με μία ταχύτητα  $c$  που δεν γνωρίζουμε, ενώ το πιστόνι έχει προσδώσει στο ρευστό ταχύτητα  $\delta u$ . Ακινητοποιώντας το κύμα (κινώντας το σύστημα συντεταγμένων με ταχύτητα  $-c$ ), οι (ανά μονάδα πλάτους του καναλιού) εξισώσεις συνέχειας και ποσότητας κίνησης αμελώντας τις τριβές στον πυθμένα γράφονται ως εξής (βλ. σχήμα 1.3β)



**Σχήμα 1.3** Δημιουργία απειροστού κύματος ύψους  $\delta y$  από πιστόνι (α) σε ακίνητο και (β) σε κινούμενο σύστημα αναφοράς.

$$cy = (c - \delta u)(y + \delta y) \Rightarrow \delta u = c \frac{\delta y}{y + \delta y} \text{ και} \quad (1.3)$$

$$F_p = -\rho Q(u_2 - u_1) \Rightarrow \frac{\rho g}{2} y^2 - \frac{\rho g}{2} (y + \delta y)^2 = \rho c y [(c - \delta u) - c]$$

απ' όπου μετά από πράξεις

$$g \left( 1 + \frac{\delta y}{2y} \right) \delta y = c \delta u \quad (1.4)$$

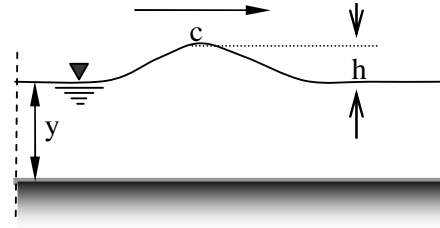
Απαλοίφοντας το  $\delta u$  από τις δύο παραπάνω σχέσεις (1.3) και (1.4) προκύπτει ότι

$$c^2 = gy \left( 1 + \frac{\delta y}{y} \right) \left( 1 + \frac{\delta y}{2y} \right)$$

και για πολύ μικρό  $\delta y \rightarrow 0$

$$c = \sqrt{gy} . \quad (1.5)$$

**Παρατήρηση:** Ο προσδιορισμός της ταχύτητας μετάδοσης κύματος  $c$  (celerity), ύψους  $h$  ( $h \ll y$ ) σε αβαθή ανοικτό αγωγό βάθους  $y$  μπορεί να γίνει σε κινούμενο σύστημα αναφοράς με την προσθήκη αντίθετης μέσης ταχύτητας  $-c$  και θεώρηση μεταφοράς του κύματος σε ρηχή διώρυγα.



Από την εξίσωση ενέργειας σε βάθη  $y$  και  $y+h$  ( $h$  πολύ μικρό) έχουμε ότι

$$\frac{c^2}{2g} + y = \frac{u^2}{2g} + y + h = \text{σταθερά} \Rightarrow \frac{cdc}{g} + dy = 0.$$

Από την εξίσωση συνέχειας

$$cy = u(y + h) = \text{σταθερά} \Rightarrow cdy + ydc = 0.$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\left( \frac{c^2}{gy} - 1 \right) dy = 0 \Rightarrow c = \sqrt{gy}.$$

Με βάση τις σχέσεις (1.2a) και (1.5), προκύπτει ότι εάν  $Fr=1$ , τότε  $V=c$ . Η ροή επομένως σε ένα αγωγό με ελεύθερη επιφάνεια χαρακτηρίζεται σαν

**Υποκρίσιμη:** Όταν  $V < c$  ( $Fr < 1$ ), ένα κύμα κινείται ταχύτερα από τη μέση ροή με αποτέλεσμα τυχόν μικροδιαταραχές στην ελεύθερη επιφάνεια μεταδίδονται και προς τα ανάντη. Οι δυνάμεις βαρύτητας (κύματα) υπερिशύουν των δυνάμεων αδράνειας (ταχύτητα ρευστού).

**Υπερκρίσιμη:** Όταν  $V > c$  ( $Fr > 1$ ), ένα κύμα κινείται βραδύτερα από τη μέση ροή με αποτέλεσμα τυχόν μικροδιαταραχές στην ελεύθερη επιφάνεια παρασύρονται προς τα κατάντη. Οι δυνάμεις αδράνειας (ταχύτητα ρευστού) υπερिशύουν των δυνάμεων βαρύτητας (κύματα).

**Κρίσιμη:** Όταν  $V = c$  ( $Fr = 1$ ), ασταθής ροή που μεταπίπτει από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη και αντίστροφα. Οι δυνάμεις αδράνειας και δυνάμεις βαρύτητας είναι ισοδύναμες.

## 1.7 Μεθοδολογία ανάλυσης της ροής

Στα επόμενα κεφάλαια πρόκειται να μελετήσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά της **μόνιμης** ροής σε αγωγούς με ελεύθερη επιφάνεια. Η ροή είναι κατά κανόνα τρισδιάστατη με μια κύρια συνιστώσα στη διεύθυνση του αγωγού. Η ανάλυση γίνεται προσεγγιστικά σε μια διάσταση, επιλέγοντας κάποιο (ολοκληρωματικό) όγκο αναφοράς και εφαρμόζοντας τους νόμους της ρευστομηχανικής. Σε περίπτωση που δύο διατομές στην κατεύθυνση της ροής που περικλείουν τον όγκο αναφοράς βρίσκονται σε απόσταση  $\Delta x$ , θα αναφερόμαστε σε ένα **πεπερασμένο όγκο αναφοράς**, ενώ αν βρίσκονται σε απόσταση  $dx$ , θα αναφερόμαστε σε ένα **διαφορικό όγκο αναφοράς**.

Οι βασικές εξισώσεις της μόνιμης ροής θεωρώντας ένα ολοκληρωματικό όγκο αναφοράς (Σχήμα 1.4) είναι:

(i) Εξίσωση συνέχειας

$$\int_A \rho(\underline{V} \cdot d\underline{A}) = 0 \Leftrightarrow A_1 V_1 = A_2 V_2 = AV = Q \quad (1.6)$$

(ii) Εξίσωση ποσότητας της κίνησης (ορμής)

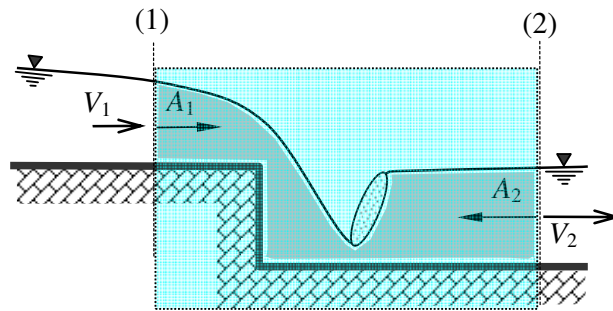
$$\sum \underline{F} = \underline{F}_g + \underline{F}_\tau + \underline{F}_p = \int_A \rho \underline{V} (\underline{V} \circ d\underline{A}) = 0$$

που είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$\sum \underline{F} = \underline{F}_g + \underline{F}_\tau + \underline{F}_p = \rho Q (\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1) \quad (1.7)$$

όπου  $V$  η μέση ταχύτητα στη διατομή και  $\beta$  είναι ένας συντελεστής διόρθωσης όταν αμελείται η πραγματική κατανομή της  $u(z)$  ταχύτητας στον υπολογισμό των αδρανειακών όρων της ορμής και προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\beta = \frac{\int u^2 dA}{V^2 A}.$$



**Σχήμα 1.4** Πεπερασμένος όγκος αναφοράς για την ολοκληρωματική ανάλυση σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια.

(iii) Εξίσωση ενέργειας

Η εξίσωση ενέργειας μεταξύ των δύο εγκάρσιων στον πυθμένα διατομών (1) και (2) γράφεται ως εξής

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{(1-2)}, \quad H = \frac{p}{\rho g} + z + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (1.8)$$

όπου  $\Delta H_{(1-2)}$  οι απώλειες ενέργειας ανάμεσα στις διατομές (1) και (2) και ο αντίστοιχος συντελεστής διόρθωσης για την εξίσωση ενέργειας είναι

$$a = \frac{\int u^3 dA}{V^3 A}.$$

Επειδή η ροή θεωρείται παράλληλη, η κατανομή των πιέσεων είναι υδροστατική (Σχήμα 1.5) και επομένως ισχύει ότι

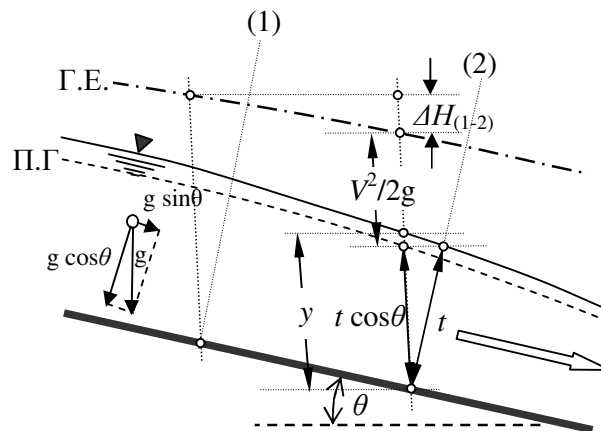
$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_b}{\rho g} + z_b$$

όπου  $p_b$  είναι πίεση στον πυθμένα και  $z_b$  το υψόμετρο πυθμένα σε σχέση με κάποιο επίπεδο αναφοράς, όπως είναι π.χ. η μέση στάθμη της θάλασσας. Όμως

$$p_b = \rho g_t t = \rho (g \cos \theta) t = \rho (g \cos \theta) (y \cos \theta) = \rho g y \cos^2 \theta$$

επειδή η συνιστώσα της βαρύτητας κάθετα στον πυθμένα είναι  $g_t = g \cos \theta$  και το κάθετο στον πυθμένα βάθος  $t = y \cos \theta$ . Επομένως, το ύψος ενέργειας σε μια διατομή για μικρές γωνίες  $\theta$  μπορεί να γραφτεί

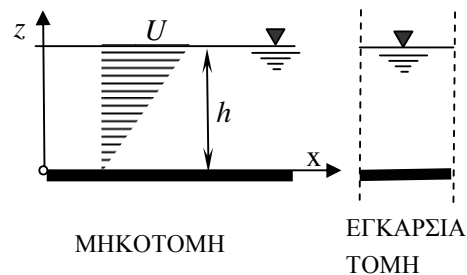
$$H = y \cos^2 \theta + z + \alpha \frac{V^2}{2g} \approx y + z + \alpha \frac{V^2}{2g}. \quad (1.9)$$



**Σχήμα 1.5** Χαρακτηριστικά μεγέθη της ροής σε αγωγό με ελεύθερη επιφάνεια.

**Παράδειγμα 1.1** Στην απείρου πλάτους ορθογωνική διώρυγα του σχήματος, θεωρώντας ότι το βάθος ροής είναι  $h$  και η κατανομή ταχύτητας τριγωνική  $u(z)=U(z)/h$  με  $u(0)=0$ ,  $u(h)=U$ , τότε η μέση ταχύτητα είναι  $V = U/2$ . Οι συντελεστές διόρθωσης που προκύπτουν είναι:

$$\beta = 4/3 \text{ και } \alpha = 2.$$



**Παράδειγμα 1.2** Μέχρι ποια γωνία (κλίση πυθμένα) μπορούμε να θεωρήσουμε πρακτικά ότι  $y = t$ ;

$$\theta=2^\circ \Rightarrow \cos^2 \theta = 0.999 \quad (J_0=0.0349)$$

$$\theta=5^\circ \Rightarrow \cos^2 \theta = 0.992 \quad (J_0=0.0875)$$

$$\theta=7.5^\circ \Rightarrow \cos^2 \theta = 0.983 \quad (J_0=0.1317)$$

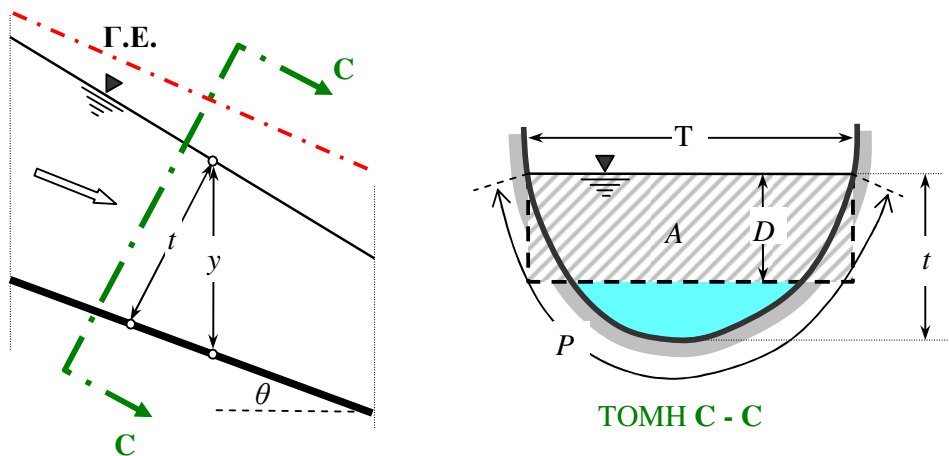
$$\theta=10^\circ \Rightarrow \cos^2 \theta = 0.970 \quad (J_0=0.1763)$$

Πρακτικά για κλίση πυθμένα μέχρι 15% ( $\theta \approx 8^\circ$ ) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $y = t$ .

Αυτή η σελίδα έχει αφηθεί σκόπιμα λευκή.

## 2 ΑΡΧΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗΣ (ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΚΙΝΗΣΗΣ)

Στο Σχήμα 2.1 σημειώνονται γεωμετρικά μεγέθη που θα χρησιμοποιηθούν στις παραγράφους που ακολουθούν. Οι παράμετροι και τα σύμβολα που θα χρησιμοποιηθούν στο εξής είναι συμβατά με τη διεθνή βιβλιογραφία και ορίζονται ως:



Σχήμα 2.1 Ορισμοί – ονοματολογία

- $t$  Βάθος (depth) ροής (κάθετο στον πυθμένα) της διατομής από το βαθύτερο σημείο (πόδα της διατομής).
- $y$  Κατακόρυφο βάθος (vertical depth) ροής από το βαθύτερο σημείο (πόδα) της διατομής.

- $A$  Εμβαδόν υδάτινης επιφάνειας (flow area - υγρή διατομή).  
 $T$  Πλάτος της υγρής διατομής στην ελεύθερη επιφάνεια (top width).  
 $P$  Βρεχόμενη περίμετρος (wetted perimeter) της υγρής διατομής.  
 $R = A/P$  Υδραυλική ακτίνα (hydraulic radius) της διατομής.  
 $D = A/T$  Υδραυλικό βάθος (hydraulic depth) της διατομής, το βάθος της ισοδύναμης ορθογωνικής διατομής με πλάτος πυθμένα  $T$ .

Βασική παραδοχή αποτελεί η υπόθεση ότι η κλίση του πυθμένα (γωνία με το οριζόντιο επίπεδο) θεωρείται ότι είναι μικρή και επομένως μπορούμε να κάνουμε την παραδοχή ότι το κατακόρυφο βάθος ροής είναι 'ταυτόσημο' με το εγκάρσιο βάθος ροής, δηλαδή ότι  $t=y$ , εκτός εάν υποδεικνύεται το αντίθετο. Ακολουθούν επιπλέον ορισμοί με τα αντίστοιχα σύμβολά τους.

- $z$  Ψόμετρο πυθμένα (σε σχέση με το υψόμετρο αναφοράς).  
 $J_o = -dz/dx = \sin \theta$  Κλίση πυθμένα του αγωγού.  
 $J_E = -dH/dx$  Κλίση της γραμμής ενέργειας.  
 $J = -dy/dx$  Κλίση της ελεύθερης επιφάνειας.

## 2.1. Ειδική ενέργεια - διάγραμμα ειδικής ενέργειας

Η εξίσωση ενέργειας σε ένα ανοικτό αγωγό με μικρή σχετικά κλίση πυθμένα γράφεται σαν το άθροισμα τριών μηκών<sup>2</sup> (ενέργειας ανά μονάδα βάρους του ρέοντος ρευστού): (1) τη δυναμική (λόγω θέσης) ενέργεια που είναι το υψόμετρο του πυθμένα της διατομής  $z$ , (2) το έργο πίεσης που είναι το βάθος ροής  $y$  (ή  $t$ ) και (3) το ύψος της κινητικής ενέργειας  $\alpha V^2/2g$

$$H = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (2.1)$$

όπου  $H$  είναι το ύψος ενέργειας,  $z$  το υψόμετρο πυθμένα από το επίπεδο αναφοράς,  $y$  το κατακόρυφο βάθος ροής,  $V$  η μέση ταχύτητα του νερού στη διατομή,  $\alpha$  ο διορθωτικός συντελεστής λόγω ανομοιομορφίας της κατανομής ταχύτητας και  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Ορίζουμε σαν ειδική ενέργεια  $E$  μιας διατομής, το ύψος της ενέργειας στη διατομή πάνω από το υψόμετρο του πυθμένα  $z$ , δηλαδή το άθροισμα των έργου πίεσης και κινητικής ενέργειας

$$E = y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (2.2)$$

Θεωρούμε ένα πρισματικό ανοικτό αγωγό με δεδομένη διατομή, δηλαδή για κάθε βάθος ροής  $y$  γνωρίζουμε το εμβαδόν  $A(y)$  της υγρής διατομής καθώς και τη βρεχόμενη

<sup>2</sup> Επειδή θεωρούμε ότι η ροή είναι παράλληλη, η κατανομή πιέσεων είναι υδροστατική και ως εκ τούτου σε οποιοδήποτε σημείο μιας συγκεκριμένης διατομής ισχύει ότι  $z+y=\text{σταθερό}$ , επειδή  $p/\rho g+z=\text{σταθερό}$ .



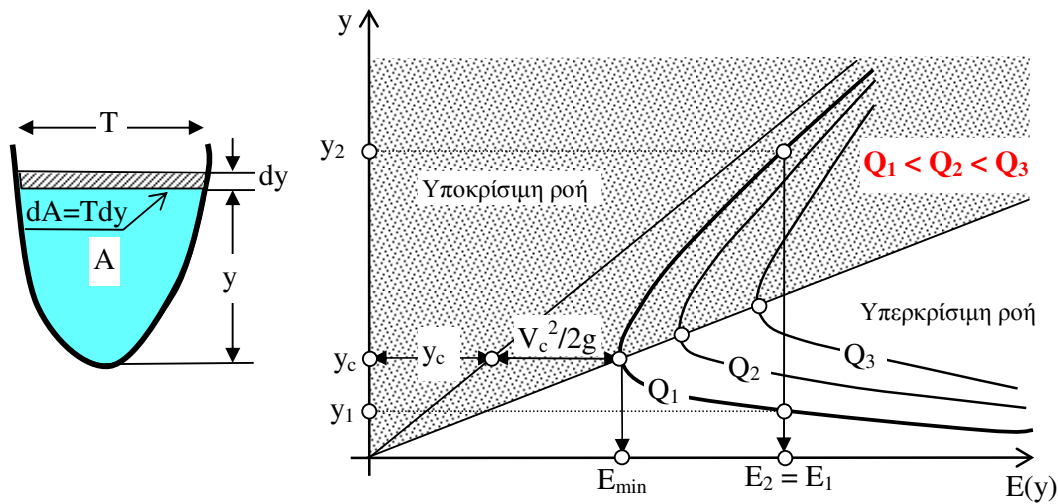
περίμετρο  $P(y)$ . Για δεδομένη την παροχή του αγωγού  $Q$ , τότε η μέση ταχύτητα στη διατομή δίδεται από τη σχέση

$$V = \frac{Q}{A}. \quad (2.3)$$

Η εξίσωση της ειδικής ενέργειας  $E(y)$  σαν συνάρτηση του βάθους για σταθερή (δεδομένη) παροχή  $Q$  δίδεται από τη σχέση

$$E = E(y) = y + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2(y)} = y + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2}. \quad (2.4)$$

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε το διάγραμμα  $y-E$  για τη συγκεκριμένη παροχή  $Q$  μεταβάλλοντας το βάθος ροής  $y$ , το οποίο και ονομάζουμε διάγραμμα ειδικής ενέργειας. Στο σχήμα 2.1 φαίνεται το διάγραμμα ειδικής ενέργειας για μια συγκεκριμένη διατομή για διαφορετικές παροχές  $Q$ . Παρατηρούμε δε ότι όταν  $y \rightarrow 0$  τότε  $A(y) \rightarrow 0$  και επομένως  $E \rightarrow \infty$ . Όταν  $y \rightarrow \infty$ , τότε  $E \rightarrow y$ .



**Σχήμα 2.2** Διάγραμμα ειδικής ενέργειας.

Είναι προφανές από το διάγραμμα της ειδικής ενέργειας ότι για κάθε διαφορετική τιμή της παροχής, η ειδική ενέργεια γίνεται ελάχιστη  $E_{\min}$  για μια συγκεκριμένη τιμή του βάθους ροής  $y$ . Για το βάθος αυτό μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος  $dE/dy$  της ειδικής ενέργειας. Παραγωγίζοντας λοιπόν τη σχέση (2.4) ως προς  $y$  έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dy} &= 1 + \frac{d}{dy} \left( \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = 1 - \frac{Q^2 T}{gA^3} \\ &= 1 - \frac{V^2}{g(A/T)} = 1 - \frac{V^2}{gD} = 0 \end{aligned}$$

όπου  $dA/dy=T$ ,  $D=A/T$ . Επομένως,

$$\frac{V^2}{gD} = Fr^2 = 1 \quad (2.5)$$

Δηλαδή η ροή είναι κρίσιμη ( $Fr=1$ ), το δε βάθος ροής  $y=y_c$  ορίζουμε ως το κρίσιμο βάθος της διατομής για τη δεδομένη παροχή. Για  $y=y_c$  η εξίσωση της ειδικής ενέργειας γράφεται

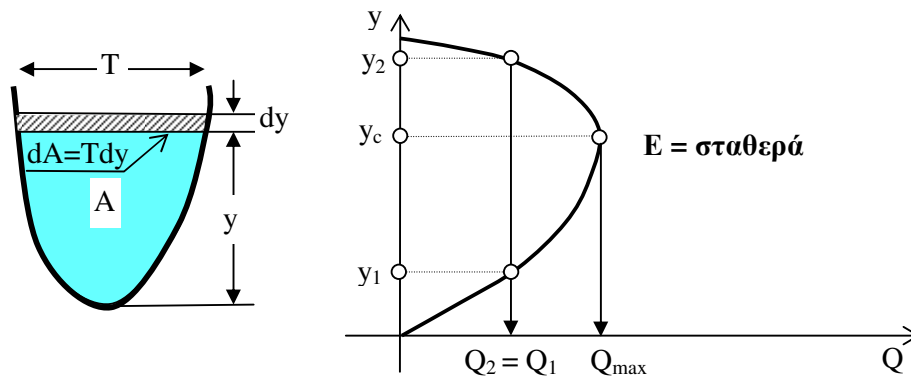
$$E_{\min} = y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{gD_c}{2g} = y_c + \frac{D_c}{2} \quad (2.6)$$

όπου  $D_c$  είναι το υδραυλικό βάθος που αντιστοιχεί στην κρίσιμη ροή. Η αντίστοιχη μέση ταχύτητα ονομάζεται κρίσιμη ταχύτητα και είναι  $V_c = (gD)^{1/2}$ . Για κάθε παροχή  $Q$  και  $E > E_{\min}$  υπάρχουν δύο πιθανά βάθη ροής τα  $y_1$  και  $y_2$  που ονομάζονται **εναλλακτά**. Όταν  $y > y_c$  (βάθος  $y_2$ ) η ροή ονομάζεται *υποκρίσιμη* και ισχύει ότι  $Fr < 1$ . Όταν  $y < y_c$  (βάθος  $y_1$ ) η ροή ονομάζεται *υπερκρίσιμη* και ισχύει ότι  $Fr > 1$ . Σε ορθογωνική διάωρυγα πλάτους  $b$  με παροχή  $Q$  (ή με παροχή ανά μονάδα πλάτους  $q = Q/b$ ), είναι  $y=D$  και  $E_{\min} = 3y_c/2$ , απ' όπου συνάγουμε (εξίσωση 2.5) ότι

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}; \quad q = \frac{Q}{b}. \quad (2.7)$$

όπου  $q$  η ειδική (ανά μονάδα πλάτους του αγωγού) παροχή.

## 2.2 Διάγραμμα παροχής



**Σχήμα 2.3** Διάγραμμα παροχής

Επιλύοντας την εξίσωση (2.4) της ειδικής ενέργειας ως προς  $Q$  έχουμε ότι

$$Q = \sqrt{2gA^2(E - y)} \quad (2.8)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι η ειδική ενέργεια  $E$  είναι δεδομένη  $Q=Q(y)$  και  $A=A(y)$ . Από την εξίσωση (2.8) προκύπτει ότι όταν  $y \rightarrow E \Rightarrow Q = 0$  και όταν  $y \rightarrow 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow Q = 0$  (Σχήμα 2.3). Επομένως, όταν  $0 < y < E$  υπάρχει ένα βάθος ροής για το οποίο  $dQ/dy=0$  και η παροχή γίνεται μέγιστη. Παραγωγίζοντας

$$\frac{dQ}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy} \left( \sqrt{2gA^2(E - y)} \right) = 0$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{1}{2} [2gA^2(E-y)]^{-1/2} \left[ 2g2A \frac{dA}{dy} (E-y) - 2gA^2 \right] = 0$$

Επομένως πρέπει

$$2 \frac{dA}{dy} (E-y) - A = 2T(E-y) - A = 0 \Rightarrow E-y = \frac{1}{2} \frac{A}{T} = \frac{D}{2}.$$

Όμως από την εξίσωση (2.1) προκύπτει ότι

$$E-y = \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{D}{2} \Rightarrow \frac{V^2}{gD} = Fr^2 = 1.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι  $y=y_c$  (κρίσιμο βάθος) και η παροχή που είναι η μέγιστη προκύπτει από τη σχέση

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= \sqrt{2gA_c^2(E-y_c)} \\ &= \sqrt{2gA_c^2 \frac{D_c}{2}} = \sqrt{gA_c^2 \frac{A_c}{T_c}} = \sqrt{g \frac{A_c^3}{T_c}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Για κάθε παροχή  $Q < Q_{\max}$  υπάρχουν δύο βάθη ροής  $y_1$  και  $y_2$  που αντιστοιχούν σε υπερκρίσιμη και υποκρίσιμη ροή αντίστοιχα, ονομάζονται δε **εναλλακτά**.

### 2.3. Εξίσωση ορμής (ποσότητας της κίνησης)

Η εξίσωση της ορμής (ποσότητας κίνησης) σε ανοικτή διώρυγα ανάμεσα σε δύο γειτονικές διατομές μεταξύ των οποίων η παροχή είναι σταθερή γράφεται ως εξής

$$F_{px} + F_{\tau x} + F_{gx} = \rho Q(V_2 - V_1) \quad (2.10)$$

Η δύναμη που ασκείται στο υγρό και προέρχεται από την υδροστατική πίεση είναι

$$F_{px} = \rho g \bar{y} A \quad (2.11)$$

όπου  $\bar{y}$  είναι η απόσταση του Κ.Β. της υγρής διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια.

Διαιρώντας με  $\rho g$  η εξίσωση της ορμής γράφεται ως

$$\frac{F_{\tau x}}{\rho g} + \frac{F_{gx}}{\rho g} + \left( \frac{Q^2}{gA_1} + \bar{y}_1 A_1 \right) - \left( \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{y}_2 A_2 \right) = 0. \quad (2.12)$$

### 2.4. Διάγραμμα ειδικής δύναμης

Ορίζουμε σαν ειδική δύναμη  $M$  την ποσότητα (ορμή ανά μονάδα βάρους του ρευστού)

$$M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{y} A. \quad (2.13)$$

Η εξίσωση της ορμής για οριζόντιο πυθμένα ( $g_x=0$ ) και αμελώντας τις τριβές ( $F_{\tau}=0$ ) γράφεται

$$\left[ \frac{Q^2}{gA_1} + \bar{y}_1 A_1 \right] - \left[ \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{y}_2 A_2 \right] = 0 \quad \text{ή} \quad M_1 = M_2. \quad (2.14)$$

Για δεδομένη παροχή  $Q$ , μεταβάλλοντας το βάθος ροής  $y$  η ειδική δύναμη  $M(y)$  παίρνει τη μορφή του σχήματος 2.4. Παρατηρούμε ότι: (i) η ειδική δύναμη έχει μια ελάχιστη τιμή  $M_{\min}$ , κάτω από την οποία η ροή δεν είναι πραγματοποιήσιμη και (ii) όταν  $M > M_{\min}$  για τη δεδομένη παροχή  $Q$ , υπάρχουν δύο βάθη ροής  $y_1$  και  $y_2$ , για τα οποία  $y_1 > y_2$  αλλά  $M_1 = M_2$ . Τα βάθη αυτά ονομάζονται **συζυγή**.

Η ειδική δύναμη γίνεται ελάχιστη ( $M = M_{\min}$ ) όταν

$$\frac{dM}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy} \left( \frac{Q^2}{gA} + \bar{y}A \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy} \left( \frac{Q^2}{gA} \right) + \frac{d}{dy} (\bar{y}A) = 0.$$

Αλλά

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{Q^2}{gA} \right) = -\frac{Q^2}{gA^2} \frac{dA}{dy} = -\frac{Q^2}{gA^2} T$$

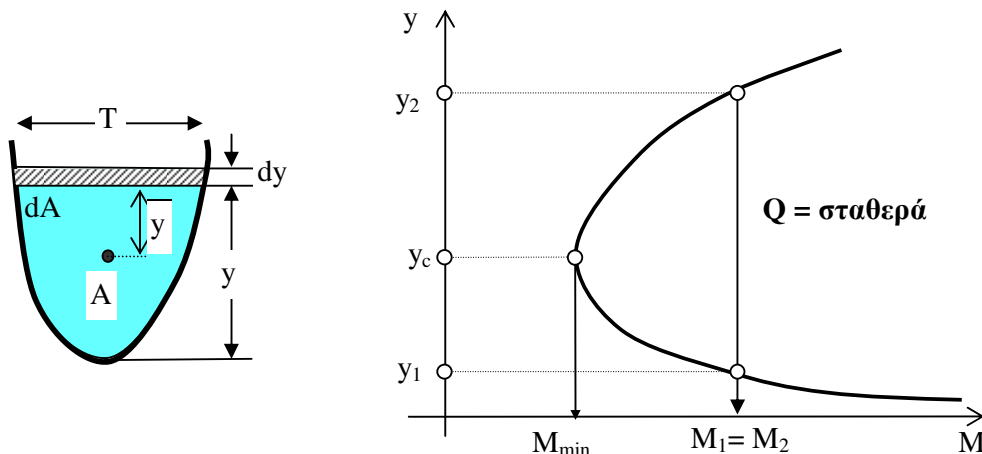
και

$$\frac{d}{dy} (\bar{y}A) = \frac{d(A\bar{y})}{dy} \approx \frac{A(\bar{y} + dy) + Tdy(dy/2) - A\bar{y}}{dy} = A.$$

Επομένως

$$-\frac{Q^2}{gA^2} T + A = 0 \Rightarrow \frac{V^2}{g(A/T)} = \frac{V^2}{gD} = Fr^2 = 1,$$

που υποδεικνύει ότι  $M = M_{\min}$ , όταν η ροή είναι κρίσιμη (το βάθος ροής είναι  $y_c$ ).



**Σχήμα 2.4** Διάγραμμα ειδικής δύναμης.

### 2.5. Αδιάστατοποιημένα διαγράμματα ειδικής ενέργειας και ειδικής δύναμης σε ορθογωνικούς αγωγούς

Στο σημείο αυτό θα ήταν σκόπιμο να αδιαστατοποιήσουμε τα διαγράμματα της ειδικής ενέργειας και δύναμης με το κρίσιμο βάθος  $y_c$ , για μια διώρυγα **ορθογωνικής** διατομής πλάτους  $B$ . Στο διάγραμμα της ειδικής ενέργειας αδιαστατοποιούμε και τους δύο άξονες διαιρώντας τα μήκη διά του κρίσιμου βάθους και καταλήγουμε σε ένα διάγραμμα  $(E/y_c, y/y_c)$ . Έχουμε λοιπόν

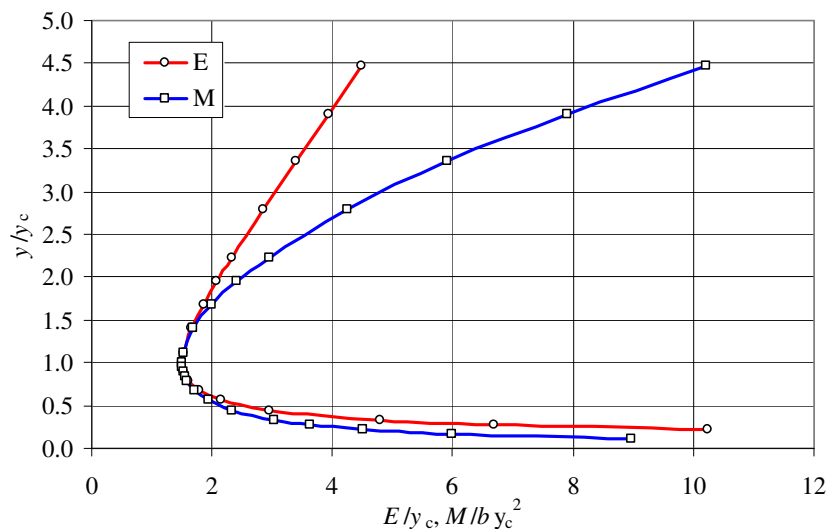
$$E = y + \frac{V^2}{2g} \Rightarrow \frac{E}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{V^2}{2gy_c} \frac{y}{y_c} = \frac{y}{y_c} \left( 1 + \frac{V^2}{2gy} \right) = \frac{y}{y_c} \left( 1 + \frac{Fr^2}{2} \right).$$

Όταν  $Fr=1$  ( $y=y_c$ ),  $E/y_c=1.50$ . Στο διάγραμμα της ειδικής δύναμης αδιαστατοποιούμε το  $M$  διαιρώντας το μήκη διά  $By_c^2$  και καταλήγουμε σε ένα διάγραμμα  $(M/By_c^2, y/y_c)$ . Έχουμε επομένως

$$M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{y}A = \frac{V^2 A^2}{gA} + \frac{y}{2} A \Rightarrow \frac{M}{By_c^2} = \frac{V^2}{gy} \frac{y^2}{y_c^2} + \frac{1}{2} \frac{y^2}{y_c^2} = \frac{y^2}{y_c^2} \left( Fr^2 + \frac{1}{2} \right).$$

Όταν  $Fr=1$  ( $y = y_c$ ),  $M/By_c^2=1.50$ .

Τα δύο αυτά αδιάστατα διαγράμματα φαίνονται στο Σχήμα 2.5 από το οποίο γνωρίζοντας τα δύο εναλλακτά βάθη από το θεώρημα ενέργειας μπορούμε να προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα συζυγή και αντίστροφα (σε ορθογωνικές πάντα διατομές).



**Σχήμα 2.5** Αδιάστατοποιημένο διάγραμμα ειδικής ενέργειας (κύκλοι) και ειδικής δύναμης (τετράγωνα) ορθογωνικής διατομής.

### 2.6. Υπολογισμός του κρίσιμου βάθους

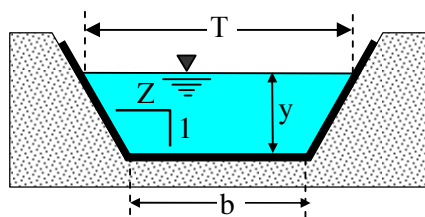
Το κρίσιμο βάθος σε μια διατομή με καθορισμένη γεωμετρία, ορίζεται σαν συνάρτηση της παροχής  $Q$ , υπολογίζεται δε από τη σχέση

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{V_c}{\sqrt{gD_c}} = 1. \quad (2.15)$$

Τα μεγέθη που υπεισέρχονται στην παραπάνω εξίσωση εκφράζονται σαν συνάρτηση της παροχής και των χαρακτηριστικών της διατομής. Ακολουθούν παραδείγματα υπολογισμού του κρίσιμου βάθους σε τραπεζοειδείς και κυκλικές διατομές.

### Εφαρμογή 2.1

Να υπολογιστεί το κρίσιμο βάθος  $y_c$  σε τραπεζοειδή διατομή πλάτους πυθμένα  $b$  και κλίσης πρανών  $Z$  για δεδομένη παροχή  $Q=AV$ . Ισχύουν οι σχέσεις



$$A = (b + Zy)y$$

$$P = b + 2y\sqrt{1 + Z^2}$$

$$T = b + 2Zy$$

$$R = A/P, D = A/T$$

και η εξίσωση (2.15) γράφεται

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{\frac{Q}{(b + Zy)y}}{\sqrt{g(A/T)}} = \frac{\frac{Q}{(b + Zy)y}}{\sqrt{g(b + Zy)y/(b + 2Zy)}} = 1; y = y_c,$$

από την οποία μετά από πράξεις καταλήγουμε στην επαναληπτική σχέση

$$y_c = \frac{1}{(b + Zy_c)} \left( \frac{Q^2}{g} (b + 2Zy_c) \right)^{1/3} \quad (2.16)$$

που συγκλίνει ανεξάρτητα από την αρχική τιμή  $y$  που θεωρούμε (βλ. Παράδειγμα 2.1).

**Παρατήρηση:** Στην περίπτωση της κλειστής **διατομής ισοσκελούς τριγώνου**, το κρίσιμο βάθος υπολογίζεται εάν στην εξίσωση (2.16) θέσουμε  $-Z$  αντί  $Z$  στην κλίση πρανών, δηλαδή το κρίσιμο βάθος υπολογίζεται από τη σχέση

$$y_c = \frac{1}{(b - Zy_c)} \left( \frac{Q^2}{g} (b - 2Zy_c) \right)^{1/3}$$

### Εφαρμογή 2.2

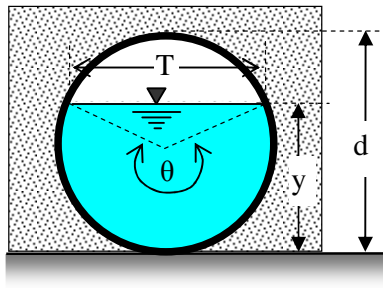
Να υπολογιστεί το κρίσιμο βάθος σε ορθογωνική διατομή πλάτους  $b$  για παροχή  $Q$ . Από τη σχέση (2.16), αντικαθιστώντας  $Z=0$  καταλήγουμε στη σχέση

$$y_c = \left( \frac{Q^2}{b^2 g} \right)^{1/3} = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3}; q = \frac{Q}{B}. \quad (2.17)$$

που είναι η σχέση υπολογισμού του κρίσιμου βάθους ορθογωνικής διατομής.

### Εφαρμογή 2.3

Να υπολογιστεί το κρίσιμο βάθος  $y_c$  σε αγωγό κυκλικής διατομής διαμέτρου  $d$ . Η παροχή  $Q$  θεωρείται δεδομένη. Τα χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη κυκλικής διατομής είναι



$$y = \left[1 - \cos(\theta/2)\right] \frac{d}{2}$$

$$T = d \sin(\theta/2)$$

$$A = \frac{(\theta - \sin \theta)d^2}{8}, \quad P = d\theta/2$$

$$R = A/P = \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) \frac{d}{4}$$

$$D = A/T = \frac{(\theta - \sin \theta)d}{8 \sin(\theta/2)}$$

Επειδή η ροή είναι κρίσιμη

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{V^2}{gD} = \frac{Q^2/A^2}{gA/T} = \frac{Q^2 T}{gA^3} = 1$$

$$\frac{Q^2 T}{gA^3} = \frac{Q^2 d \sin(\theta/2)}{g((\theta - \sin \theta)d^2/8)^3} = 1 \Rightarrow Q = \frac{d^{5/2}}{8^{3/2}} \sqrt{g} = \frac{(\theta - \sin \theta)^{3/2}}{\sin^{1/2}(\theta/2)}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\theta = \sin \theta + \frac{8}{d^{5/3}} \left( \frac{Q^2 \sin(\theta/2)}{g} \right)^{1/3} \quad (2.18)$$

όπου  $\theta$  είναι η επίκεντρη γωνία σε ακίνια (rad),  $Q$  η παροχή,  $d$  η διάμετρος του κυκλικού αγωγού και  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας. Η εξίσωση λύνεται με επαναληπτική διαδικασία ως προς  $\theta$ . Θεωρούμε  $\theta = \theta_1$  και υπολογίζουμε το  $\theta = \theta_2$ . Στη συνέχεια θέτουμε  $\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$  και επαναλαμβάνουμε. Η σύγκλιση επιτυγχάνεται μετά 4-5 επαναλήψεις (βλ. Παράδειγμα 2.2). Με το  $\theta$  γνωστό προκύπτει ότι

$$y_c = \frac{d}{2} [1 - \cos(\theta/2)]; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2.19)$$

Συνήθως θεωρούμε αρχική τιμή της γωνίας  $\theta_1 = \pi$  για την πρώτη δοκιμή, πράγμα που σημαίνει ότι το κρίσιμο βάθος είναι το μισό της διαμέτρου.

**Παράδειγμα 2.1:** Να υπολογιστεί το κρίσιμο βάθος σε τραπεζοειδή διατομή πλάτους 2.5 m και με κλίση πρανών 1:1 ( $Z=1$ ) για παροχή  $7 \text{ m}^3/\text{s}$ .

#### Απάντηση

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.16) τα μεγέθη  $Q$ ,  $Z$  και  $b$  καταλήγουμε στην επαναληπτική σχέση

$$y_c = \frac{1}{(2.50 + y_c)} \left( \frac{7.00^2}{9.81} (2.50 + 2y_c) \right)^{1/3}$$

από την οποία αρχίζοντας με  $y_c = 2.00$  m καταλήγουμε

|                 |   |                 |
|-----------------|---|-----------------|
| $y_1 = 2.000$ m | → | $y_2 = 0.709$ m |
| $y_1 = 0.709$ m | → | $y_2 = 0.840$ m |
| $y_1 = 0.840$ m | → | $y_2 = 0.824$ m |
| $y_1 = 0.824$ m | → | $y_2 = 0.826$ m |
| $y_1 = 0.826$ m | → | $y_2 = 0.826$ m |

Επομένως  $y_c = 0.826$  m.

**Παράδειγμα 2.2** Να υπολογίσετε το κρίσιμο βάθος σε κυκλικό αγωγό με τα ακόλουθα δεδομένα:  $Q=0.10$  m<sup>3</sup>/s και  $d=0.60$  m.

Απάντηση

Καταρτίζουμε τον παρακάτω πίνακα υπολογισμών, όπου θεωρούμε αρχικά ότι  $\theta_1=\pi$ , υπολογίζουμε το  $\theta_2$ , όμως σαν επόμενη τιμή δοκιμής θεωρούμε την  $(\theta_1+\theta_2)/2$ , δεδομένου ότι η επαναληπτική σχέση συγκλίνει ταχύτερα (μετά 3 δοκιμές).

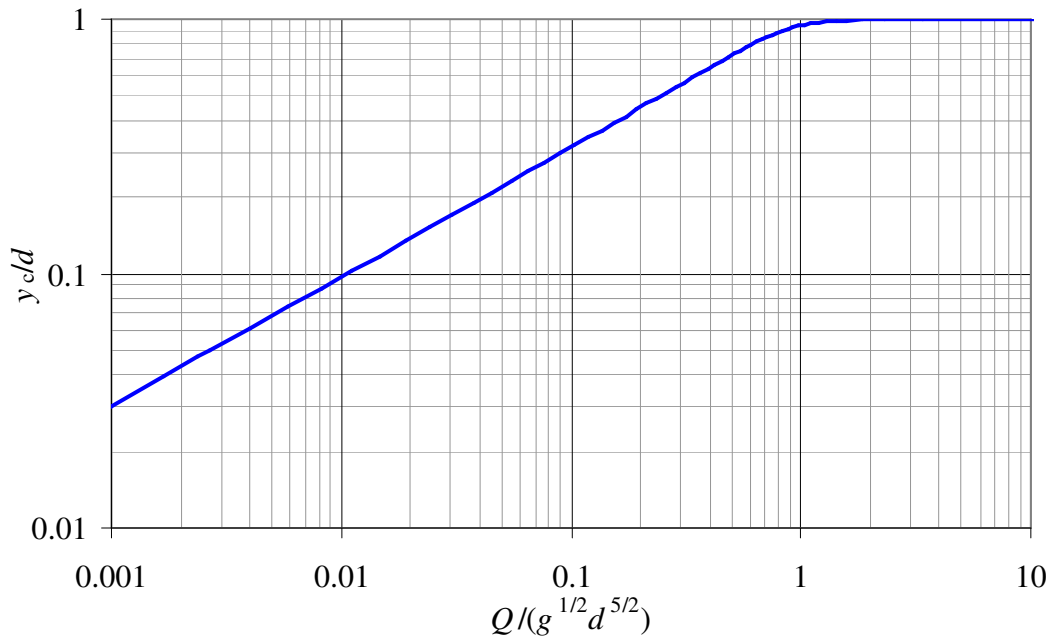
| $(\theta_1+\theta_2)/2$ | $Q$ (m <sup>3</sup> /s) | $g$ (m/s <sup>2</sup> ) | $d$ (m) | $\theta_2$ | $y_c$        |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|---------|------------|--------------|
| $\pi=3.142$             | 0.10                    | 9.81                    | 0.6     | 1.886      | 0.300        |
| 2.514                   | 0.10                    | 9.81                    | 0.6     | 2.442      | 0.207        |
| 2.478                   | 0.10                    | 9.81                    | 0.6     | 2.467      | 0.202        |
| 2.473                   | 0.10                    | 9.81                    | 0.6     | 2.471      | 0.202        |
| 2.472                   | 0.10                    | 9.81                    | 0.6     | 2.472      | <b>0.201</b> |

Επομένως  $y_c = 0.20$  m.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η μεταβολή του αδιαστατο-ποιημένου κρίσιμου βάθους  $y_c/d$  (από εξίσωση 2.19) σαν συνάρτηση της αδιάστατης παραμέτρου  $Q/(gd^5)^{1/2}$ . Πρακτικά, όταν η γωνία  $\theta \approx 3.10$  rad,  $y_c/d=1$ , ενώ  $Q/(gd^5)^{1/2} \approx 3.50$  που αποτελεί την ανώτερη πρακτικά τιμή της αδιάστατης παραμέτρου με βάση την οποία προκύπτει η παροχή για την οποία ο υπολογισμός του κρίσιμου βάθους έχει νόημα ( $y_c < d$ ). Το διάγραμμα που ακολουθεί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον γραφικό προσδιορισμό του κρίσιμου βάθους αγωγού κυκλικής διατομής με δεδομένα τη διάμετρο και την παροχή, εφ' όσον  $Q \leq 3.50(gd^5)^{1/2}$ .





### 2.7. Ανακεφαλαίωση

Όταν η ροή είναι κρίσιμη, δηλαδή όταν  $y=y_c$ ,

(α) Ο αριθμός Froude της ροής γίνεται μονάδα  $Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{V_c}{\sqrt{gD_c}} = 1$ .

(β) Η ειδική ενέργεια  $E$  για δεδομένη παροχή γίνεται ελάχιστη  $E = E_{\min} = y_c + \frac{D_c}{2}$ .

(γ) Η ειδική δύναμη  $M$  γίνεται ελάχιστη.

(δ) Η παροχή  $Q$  για δεδομένη ειδική ενέργεια  $E$  γίνεται μέγιστη  $Q = Q_{\max} = A_c \sqrt{gD_c}$ .

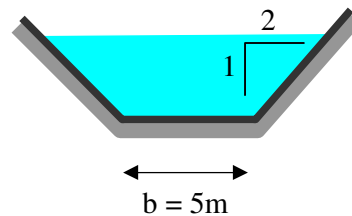
(ε) Το ύψος της κινητικής ενέργειας ισούται με το ήμισυ (1/2) του υδραυλικού βάθους

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{V_c^2}{2g} = \frac{D_c}{2}.$$

### 2.8 Επαναληπτικά προβλήματα

**Παράδειγμα 2.3** Για τον τραπεζοειδή αγωγό του σχήματος να υπολογιστούν:

- (1) Το κρίσιμο βάθος όταν η παροχή είναι  $Q=50 \text{ m}^3/\text{s}$ .
- (2) Το υδραυλικό βάθος που αντιστοιχεί στο κρίσιμο βάθος.
- (3) Η μέγιστη παροχή δεδομένου ότι η ειδική ενέργεια είναι 4.50 m.



Απάντηση

Το κρίσιμο βάθος μιας τραπεζοειδούς διατομής ( $Z=2$ ) για δεδομένη παροχή  $Q$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.16)  $y_c = (b + Zy_c)^{-1} (Q^2 (b + 2Zy_c) / g)^{1/3}$ . Η σχέση αυτή είναι επαναληπτική. Ξεκινώντας από αρχικό  $y_c = 2.00$  m, καταλήγουμε σε  $y_c = \mathbf{1.715}$  m (βλ. πίνακα που ακολουθεί).

| $y_c$        | $Q$   | $b$  | $Z$  | $y_1$        |
|--------------|-------|------|------|--------------|
| 2.000        | 50.00 | 5.00 | 2.00 | 1.656        |
| 1.656        | 50.00 | 5.00 | 2.00 | 1.728        |
| 1.728        | 50.00 | 5.00 | 2.00 | 1.712        |
| 1.712        | 50.00 | 5.00 | 2.00 | 1.716        |
| 1.716        | 50.00 | 5.00 | 2.00 | 1.715        |
| <b>1.715</b> | 50.00 | 5.00 | 2.00 | <b>1.715</b> |

(β) Το υδραυλικό βάθος προκύπτει από τη σχέση

$$D_c = \frac{A_c}{T_c} = \frac{(b + Zy_c)y_c}{b + 2Zy_c} = \dots = 1.219 \text{ m.}$$

(γ) Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη παροχή διέρχεται όταν  $y=y_c$ . Επομένως από την εξίσωση της (ελάχιστης) ειδικής ενέργειας έχουμε ότι

$$\min E = y_c + \frac{V^2}{2g} = y_c + \frac{D_c}{2} = y_c + \frac{(b + Zy_c)y_c}{2(b + 2Zy_c)}.$$

Η παραπάνω σχέση θα να λυθεί ως προς  $y_c$  για  $\min E=4.50$  m. Επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης δίνει δύο λύσεις

$$y_c=3.417 \text{ m και } y_c=-1.317 \text{ m.}$$

Απορρίπτοντας την αρνητική λύση, έχουμε ότι

$$A_c=(b + Zy_c)y_c=40.43 \text{ m}^2$$

και επομένως

$$Q_{\max} = \sqrt{2gA_c^2(E - y_c)} = \mathbf{186.39 \text{ m}^3/\text{s}}.$$

Παρατήρηση: Η μέγιστη παροχή μπορεί να υπολογιστεί και με δοκιμές ακολουθώντας την εξής διαδικασία: (1) Υποθέτω την παροχή  $Q$ , (2) υπολογίζω το κρίσιμο βάθος  $y_c$ , (3) υπολογίζω την ταχύτητα  $V_c$ , (4) υπολογίζω την ελάχιστη ειδική ενέργεια  $\min E = y_c + V_c^2 / 2g$ , (5) εάν  $E=4.50$  m σταματώ τον υπολογισμό. Ο πίνακας που ακολουθεί είναι ενδεικτικός του αλγόριθμου. Χρησιμοποιούμε φυσικά θετικά βάθη ( $y>0$ ) όπως στον πίνακα που ακολουθεί.

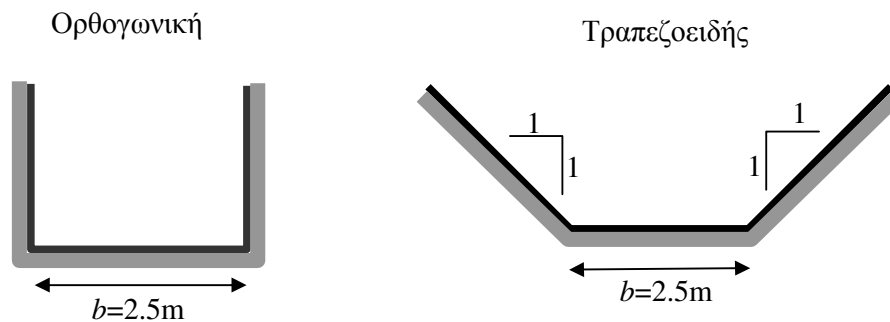
| $Q$         | $Z$  | $b$  | $y_c$ | $A_c$     | $V$   | $\min E$ |
|-------------|------|------|-------|-----------|-------|----------|
| ( $m^3/s$ ) |      | (m)  | (m)   | ( $m^2$ ) | (m/s) | (m)      |
| 100.00      | 2.00 | 5.00 | 2.49  | 24.79     | 4.03  | 3.32     |
| 150.00      | 2.00 | 5.00 | 3.06  | 34.07     | 4.40  | 4.05     |
| 200.00      | 2.00 | 5.00 | 3.54  | 42.73     | 4.68  | 4.65     |
| 190.00      | 2.00 | 5.00 | 3.45  | 41.04     | 4.63  | 4.54     |
| 186.00      | 2.00 | 5.00 | 3.41  | 40.36     | 4.61  | 4.50     |

Επομένως  $Q=186.00 m^3/s$ .

**Παράδειγμα 2.4** Για τις διατομές των ανοικτών αγωγών που εικονίζονται παρακάτω και για παροχή  $7 m^3/s$ .

Ζητούνται:

- (α) Να προσδιορίσετε τα κρίσιμα βάθη.
- (β) Για κάθε διατομή να προσδιορίσετε με ακρίβεια τα διαγράμματα της ειδικής ενέργειας και ειδικής δύναμης σε κατάλληλη κλίμακα.
- (γ) Να υπολογιστούν τα  $E_{\min}$  και  $M_{\min}$ .
- (δ) Να οριστεί για κάθε διατομή η σχέση  $E_{\min} = f(y_c)$ .
- (ε) Για τις παραπάνω διατομές και για ύψος ειδικής ενέργειας  $E=4 m$ , να υπολογιστούν οι μέγιστες παροχές  $Q_{\max}$ .



Απάντηση

**Ορθογωνική διατομή.**

(α) Το κρίσιμο βάθος της διατομής για δεδομένη παροχή  $Q$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$y_c = \left( \frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3} = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left( \frac{7^2}{g(2.50)^2} \right)^{1/3} = \mathbf{0.93 m.}$$

(β) Το διάγραμμα ειδικής ενέργειας (διάγραμμα  $y - E$ ) προκύπτει από τη σχέση

$$E = y + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2}$$

για τη δεδομένη παροχή  $Q$  μεταβάλλοντας το βάθος ροής  $y$ . Στην παραπάνω εξίσωση θεωρούμε  $\alpha = 1.0$ . Το διάγραμμα της ειδικής δύναμης ( $y - M$ ) προκύπτει από τη σχέση

$$M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{y}A = \frac{Q^2}{gA} + \frac{y}{2}A$$

για τη δεδομένη παροχή  $Q$  μεταβάλλοντας το βάθος ροής  $y$ .

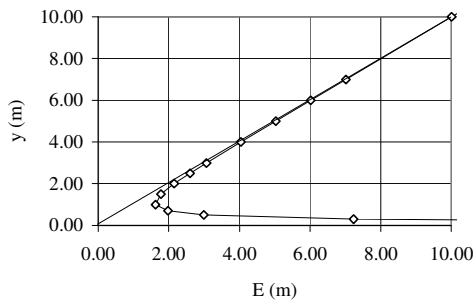
(γ) Οι ελάχιστες τιμές των  $E$  και  $M$  προσδιορίζονται από τις παραπάνω σχέσεις αντικαθιστώντας  $y=y_c$ . Επομένως

$$\min E = y_c + \frac{Q^2}{2gA_c^2} = 0.93 + \frac{7^2}{2g(2.5 \times 0.93)^2} = \mathbf{1.395 \text{ m}}$$

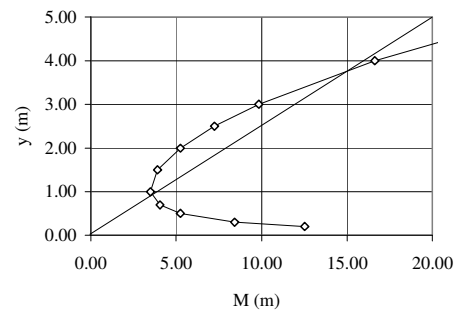
και

$$\min M = \frac{Q^2}{gA_c} + \bar{y}A_c = \frac{7^2}{g(2.5 \times 0.93)} + \frac{0.93}{2}(2.5 \times 0.93) = \mathbf{3.23 \text{ m}^3}.$$

Διάγραμμα Ειδ. Ενέργειας



Διάγραμμα Ειδ. Δύναμης



(δ)

$$\min E = y_c + \frac{Q^2}{2gA_c^2} = y_c + \frac{y_c}{2} = \frac{3y_c}{2}$$

(ε) Η μέγιστη παροχή είναι αυτή που αντιστοιχεί στο κρίσιμο βάθος. Επομένως η ειδική ενέργεια  $E=4 \text{ m}$  γίνεται ελάχιστη όταν

$$\min E = 4 \text{ m} = 1.50 y_c.$$

Επομένως

$$y_c = \mathbf{2.67 \text{ m}}.$$

$$\max Q = A_c \sqrt{gD_c} = A_c \sqrt{2g(E - y_c)} = (2.50 \times 8/3) \sqrt{2g(4 - 8/3)} = 34.10 \text{ m}^3/\text{s}.$$

### Τραπεζοειδής διατομή.

(α) Το κρίσιμο βάθος της διατομής για δεδομένη παροχή  $Q$  υπολογίζεται από την επαναληπτική σχέση

$$y_c = \frac{1}{(b + Zy_c)^3} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g} (b + 2Zy_c)}$$

που λύνεται με διαδοχικές δοκιμές από τις οποίες προκύπτει  $y_c = \mathbf{0.826 \text{ m}}$ .

(β) Το διάγραμμα ειδικής ενέργειας (διάγραμμα  $y - E$ ) προκύπτει από τη σχέση

$$E = y + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2}$$

για τη δεδομένη παροχή  $Q$  μεταβάλλοντας το βάθος ροής  $y$ . Στην παραπάνω εξίσωση θεωρούμε  $\alpha = 1$ . Το διάγραμμα της ειδικής δύναμης ( $y - M$ ) προκύπτει από τη σχέση

$$M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{y}A$$

$$\bar{y} = \frac{y}{3} \left( \frac{(b + 2Zy) + 2b}{(b + 2Zy) + b} \right) = \frac{y}{6} \left( \frac{3b + 2y}{b + y} \right); Z = 1$$

για τη δεδομένη παροχή  $Q$  μεταβάλλοντας το βάθος ροής  $y$ .

(Τα διαγράμματα αφήνονται για άσκηση στο σπουδαστή).

(γ) Οι ελάχιστες τιμές των  $E$  και  $M$  προσδιορίζονται από τις παραπάνω σχέσεις αντικαθιστώντας  $y=y_c$ . Επομένως

$$\min E = y_c + \frac{Q^2}{2gA_c^2} = y_c + \frac{D_c}{2} = \mathbf{1.157 \text{ m}}$$

και

$$\min M = \frac{Q^2}{gA_c} + \bar{y}A_c = \mathbf{2.86 \text{ m}^3}.$$

$$(\delta) \quad \min E = y_c + \frac{Q^2}{2gA_c^2} = y_c + \frac{D_c}{2} = \frac{y_c}{2} \left( \frac{3b + 5y_c}{b + 2y_c} \right); D_c = \frac{(b + y_c)y_c}{b + 2y_c}$$

(ε) Η μέγιστη παροχή είναι αυτή που αντιστοιχεί στο κρίσιμο βάθος. Επομένως η ειδική ενέργεια  $E=4 \text{ m}$  θα γίνει ελάχιστη, όταν  $y=y_c$ . Από την εξίσωση

$$\min E = 4 \text{ m} = y_c + \frac{Q^2}{2gA_c^2} = y_c + \frac{D_c}{2}$$

όπου  $D=(b+Zy_c)y_c/(b+2y_c)$ , με δοκιμές βρίσκουμε ότι  $y_c=\mathbf{2.39 \text{ m}}$  απ' όπου προκύπτει

$$\max Q = A_c \sqrt{gD_c} = A_c \sqrt{2g(E - y_c)} = \mathbf{46.42 \text{ m}^3/\text{s}}$$

Αυτή η σελίδα έχει αφηθεί σκόπιμα λευκή.

### 3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΒΑΘΟΥΣ

Η εξίσωση ενέργειας σε ένα αγωγό με ελεύθερη επιφάνεια που μεταφέρει παροχή  $Q$  σε μόνιμη δίαυτα γράφεται

$$H = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} = z + y + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (3.1)$$

όπου  $H$  είναι το ύψος ενέργειας,  $z$  το υψόμετρο πυθμένα από το επίπεδο αναφοράς,  $y$  το κατακόρυφο βάθος ροής θεωρώντας ότι η κλίση του πυθμένα είναι μικρή,  $V$  η μέση ταχύτητα νερού στη διατομή,  $\alpha$  ο διορθωτικός συντελεστής λόγω ανομοιομορφίας του προφίλ ταχύτητας και  $g$  επιτάχυνση της βαρύτητας. Διαφορίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $x$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \right) \quad (3.2)$$

Θεωρούμε ότι η κίνηση γίνεται προς τη θετική διεύθυνση του άξονα  $x$ . Η κλίση των απωλειών ενέργειας  $J_E$  και η κλίση πυθμένα  $J_o$  προκύπτουν από τις σχέσεις

$$J_E = -\frac{dH}{dx} \quad (3.3)$$

και

$$J_o = -\frac{dz}{dx}. \quad (3.4)$$

Θεωρούμε μια ομαλή μεταβολή της διατομής του ανοικτού αγωγού που μπορεί να είναι είτε μια μεταβολή του υψομέτρου του πυθμένα, είτε μια μεταβολή του πλάτους της

διατομής, είτε και τα δύο συγχρόνως. Η μεταβολή αυτή γίνεται σε μικρό μήκος όπου δεν εμφανίζονται έντονα φαινόμενα (όπως π.χ. αποκόλληση, ανάμειξη, κλπ), έτσι ώστε χωρίς να εισάγουμε ιδιαίτερο σφάλμα να θεωρούμε ότι δεν έχουμε απώλειες ενέργειας κατά τη μεταβολή. Για να ισχύει η εξίσωση ενέργειας χωρίς να υπάρχουν απώλειες, θα πρέπει και η ελεύθερη επιφάνεια να μετακινηθεί κατάλληλα. Εξισώνοντας την ενέργεια στα ανάντη και τα κατόντη της διατομής στην περιοχή όπου η κατανομή των ταχυτήτων ροής είναι ομοιόμορφη, μπορούμε κατ' αρχήν να εκτιμήσουμε τη μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα μελετήσουμε τη μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας σε ένα ορθογωνικό αγωγό όταν (α) μεταβάλουμε το υψόμετρο του πυθμένα και (β) όταν μεταβάλουμε το πλάτος της διατομής.

### 3.1. Ομαλή μεταβολή του υψόμετρου πυθμένα χωρίς μεταβολή του πλάτους ορθογωνικής διώρυγας

Η διαφορική εξίσωση (3.2) γράφεται ( $\alpha = 1$ )

$$-J_E = -J_o + \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = -J_o + \frac{dy}{dx} + \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{-2}{A^3} \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} \right)$$

ή ισοδύναμα

$$J_o - J_E = \frac{dy}{dx} \left( 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} \right) = \frac{dy}{dx} \left( 1 - \frac{Q^2}{gA^3} T \right) = \frac{dy}{dx} \left( 1 - \frac{V^2}{gD} \right) = \frac{dy}{dx} (1 - Fr^2),$$

όπου  $dA = Tdy$  και  $Fr = V/(gD)^{1/2}$  και η διαφορική εξίσωση της καμπύλης της ελεύθερης επιφάνειας γίνεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{J_o - J_E}{1 - Fr^2}. \quad (3.5)$$

Θεωρώντας αμελητέες τις απώλειες ενέργειας ( $J_E = 0$ ) η εξίσωση γίνεται

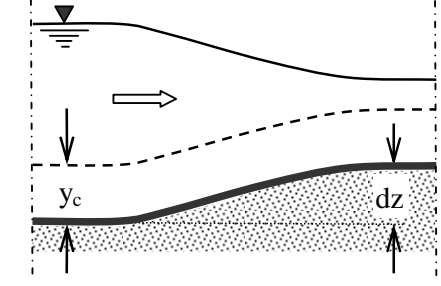
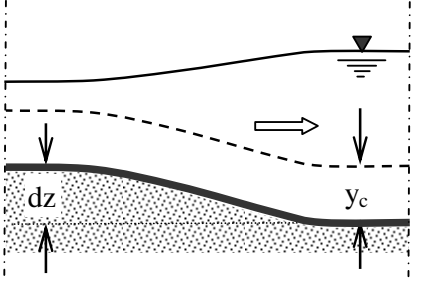
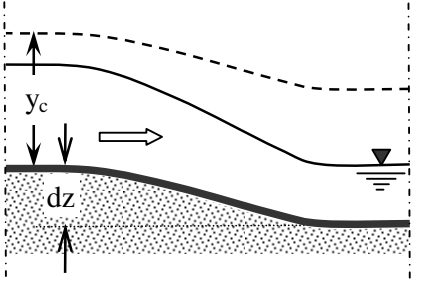
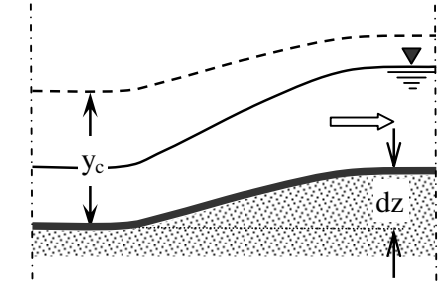
$$\frac{dy}{dx} = \frac{J_o}{1 - Fr^2} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} (1 - Fr^2) + \frac{dz}{dx} = 0. \quad (3.6)$$

#### Διερεύνηση της εξίσωσης (3-6)

| Περίπτωση | $dz/dx$ | $Fr$  | Τύπος ροής  | $dy/dx$ | $y(x)$       |
|-----------|---------|---|-------------|---------|--------------|
| (i)       | $>0$    | $<1$  | υποκρίσιμη  | $<0$    | $\downarrow$ |
| (ii)      | $<0$    | $<1$  | υποκρίσιμη  | $>0$    | $\uparrow$   |
| (iii)     | $<0$    | $>1$  | υπερκρίσιμη | $>0$    | $\downarrow$ |
| (iv)      | $>0$    | $>1$  | υπερκρίσιμη | $<0$    | $\uparrow$   |
| (v)       | $=0$    | Είτε $Fr=1$ (κρίσιμη ροή), είτε $dy/dx=0$ .<br>Εάν $dy/dx \neq 0$ , τότε $Fr=1$ και δυνατότητα εκτίμησης της παροχής. |             |         |              |

Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται αναλυτικά τα αποτελέσματα της παραπάνω διερεύνησης. Το κρίσιμο βάθος παραμένει σταθερό κατά μήκος του αγωγού.



|  |  |
|--|--|
| <p><b>Περίπτωση (i)</b><br/>                     Ροή υποκρίσιμη (<math>Fr &lt; 1</math>) και <math>dz/dx &gt; 0</math>.<br/>                     Από την εξίσωση (3.6) προκύπτει ότι <math>dy/dx &lt; 0</math>.</p>    |    |
| <p><b>Περίπτωση (ii)</b><br/>                     Ροή υποκρίσιμη (<math>Fr &lt; 1</math>) και <math>dz/dx &lt; 0</math>.<br/>                     Από την εξίσωση (3.6) προκύπτει ότι <math>dy/dx &gt; 0</math>.</p>   |    |
| <p><b>Περίπτωση (iii)</b><br/>                     Ροή υπερκρίσιμη (<math>Fr &gt; 1</math>) και <math>dz/dx &lt; 0</math>.<br/>                     Από την εξίσωση (3.6) προκύπτει ότι <math>dy/dx &lt; 0</math>.</p> |   |
| <p><b>Περίπτωση (iv)</b><br/>                     Ροή υπερκρίσιμη (<math>Fr &gt; 1</math>) και <math>dz/dx &gt; 0</math>.<br/>                     Από την εξίσωση (3.6) προκύπτει ότι <math>dy/dx &gt; 0</math>.</p>  |  |

### 3.2. Μεταβολή του πλάτους ορθογωνικής διώρυγας χωρίς μεταβολή υψομέτρου πυθμένα

Η εξίσωση ενέργειας γράφεται ως εξής

$$H = z + y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad (3.7)$$

όπου  $b = b(x)$

$$q = q(x) = Q/b(x)$$

$z = \text{σταθερό}$

Διαφορίζοντας ως προς  $x$

$$\frac{dH}{dx} = 0 = 0 + \frac{dy}{dx} - \frac{q^2}{gy^3} \frac{dy}{dx} + \frac{q}{gy^2} \frac{dq}{dx}$$

αλλά

$$Q = bq \Rightarrow \frac{dQ}{dx} = 0 = q \frac{db}{dx} + b \frac{dq}{dx}$$

και αντικαθιστώντας  $dq/dx$ , η εξίσωση της κλίσης απωλειών γίνεται

$$(1 - Fr^2) \frac{dy}{dx} - Fr^2 \frac{y}{b} \frac{db}{dx} = 0 \quad (3.8)$$

όπου

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{A^2 g D} = \frac{Q^2 b}{A^3 g} = \frac{Q^2 b}{g b^3 y^3} = \frac{q^2}{g y^3}; D = A/b.$$

#### Διερεύνηση της εξίσωσης (3.8)

| Περίπτωση | $db/dx$ | $Fr$ | $1-Fr^2$ | Τύπος ροής  | $dy/dx$ | $y(x)$       |
|-----------|---------|------|----------|-------------|---------|--------------|
| (i)       | $>0$    | $<1$ | $>0$     | υποκρίσιμη  | $>0$    | $\uparrow$   |
| (ii)      | $<0$    | $<1$ | $>0$     | υποκρίσιμη  | $<0$    | $\downarrow$ |
| (iii)     | $>0$    | $>1$ | $<0$     | υπερκρίσιμη | $<0$    | $\downarrow$ |
| (iv)      | $<0$    | $>1$ | $<0$     | υπερκρίσιμη | $>0$    | $\uparrow$   |

Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται αναλυτικά τα αποτελέσματα της παραπάνω διερεύνησης. Το κρίσιμο βάθος μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού.

|   |  |
|---|--|
| <p><b>Περίπτωση (i)</b></p> <p>Ροή υποκρίσιμη (<math>Fr &lt; 1</math>) και <math>db/dx &gt; 0</math>.</p> <p>Από την εξίσωση (3.8) προκύπτει ότι <math>dy/dx &gt; 0</math>.</p> |  |
|---|--|

|  |  |
|--|--|
| <p><b>Περίπτωση (ii)</b><br/>                     Ροή υποκρίσιμη (<math>Fr &lt; 1</math>) και <math>db/dx &lt; 0</math>.<br/>                     Από την εξίσωση (3.8) προκύπτει ότι <math>dy/dx &lt; 0</math>.</p>   |  |
| <p><b>Περίπτωση (iii)</b><br/>                     Ροή υπερκρίσιμη (<math>Fr &gt; 1</math>) και <math>db/dx &gt; 0</math>.<br/>                     Από την εξίσωση (3.8) προκύπτει ότι <math>dy/dx &lt; 0</math>.</p> |  |
| <p><b>Περίπτωση (iv)</b><br/>                     Ροή υπερκρίσιμη (<math>Fr &gt; 1</math>) και <math>db/dx &lt; 0</math>.<br/>                     Από την εξίσωση (3.8) προκύπτει ότι <math>dy/dx &gt; 0</math>.</p>  |  |

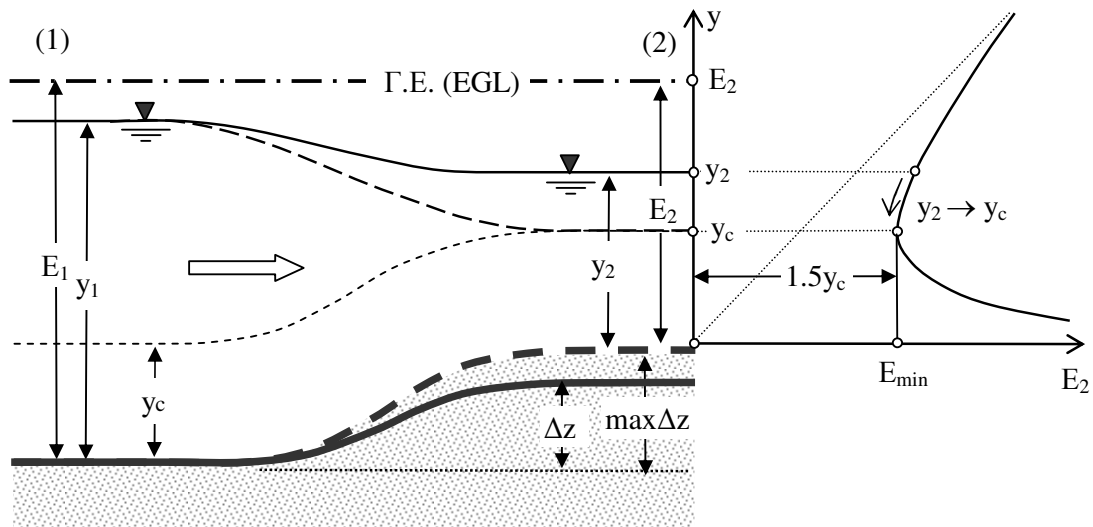
### 3.3. Ανύψωση πυθμένα - υποκρίσιμη ροή

Έστω ότι ο πυθμένας ορθογωνικής διατομής ανυψώνεται κατά  $\Delta z$  όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1. Θεωρούμε ότι οι απώλειες ενέργειας μεταξύ των διατομών (1) και (2) είναι αμελητέες. Επομένως η εξίσωση ενέργειας γράφεται ως εξής

$$H_1 = H_2 \Rightarrow y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Delta z + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (3.9)$$

ή χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ειδικής ενέργειας

$$E_1 = E_2 + \Delta z. \quad (3.10)$$



**Σχήμα 3.1** Ομαλή ανύψωση πυθμένα σε υποκρίσιμη ροή.

Για μια δεδομένη παροχή  $Q$ , η ελάχιστη τιμή της ειδικής ενέργειας είναι

$$E_{\min} = y_c + \frac{D_c}{2} = \frac{3}{2}y_c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2g}} \quad (3.11)$$

κάτω από την οποία η ροή είναι αδύνατη φυσικά. Επειδή  $E_1 > E_2$  και συγχρόνως ισχύει η σχέση (3.9), υπάρχει μια μέγιστη τιμή της ανύψωσης πυθμένα, πάνω από την οποία η ροή παροχής  $Q$  είναι αδύνατη (σχήμα 3.1). Η τιμή αυτή της μέγιστης ανύψωσης  $\max\Delta z$ , αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της ειδικής ενέργειας  $E_2$  και (από σχέσεις 3.10, 3.11) είναι

$$\max\Delta z = E_1 - \min E_2 = E_1 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2g}}. \quad (3.12)$$

Σε περίπτωση που η ανύψωση υπερβεί την τιμή  $\max\Delta z$ , η ειδική ενέργεια μειώνεται στη διατομή (2) και λαμβάνει τιμή μικρότερη από την ελάχιστη τιμή της ειδικής ενέργειας  $E_2$ , πράγμα που σημαίνει ότι είτε η παροχή που διέρχεται θα μειωθεί, είτε για να περάσει παροχή  $Q$  θα πρέπει να αυξηθεί το βάθος (και επομένως η  $E_1$ ) στην διατομή (1) στα ανάντη. Το βάθος ροής  $y_2$  στη διατομή (2), υπολογίζεται από τη σχέση (3.9) αντικαθιστώντας τα γνωστά μεγέθη και λύνοντας ως προς  $y_2$ , τη σχέση

$$y_1 + \frac{Q^2}{2gb^2y_1^2} = \Delta z + y_2 + \frac{Q^2}{2gb^2y_2^2}. \quad (3.13)$$

Η παραπάνω ανάλυση για υπερκρίσιμη ροή θεωρείται πολύ προσεγγιστική λόγω πιθανής αποκόλλησης της ροής.

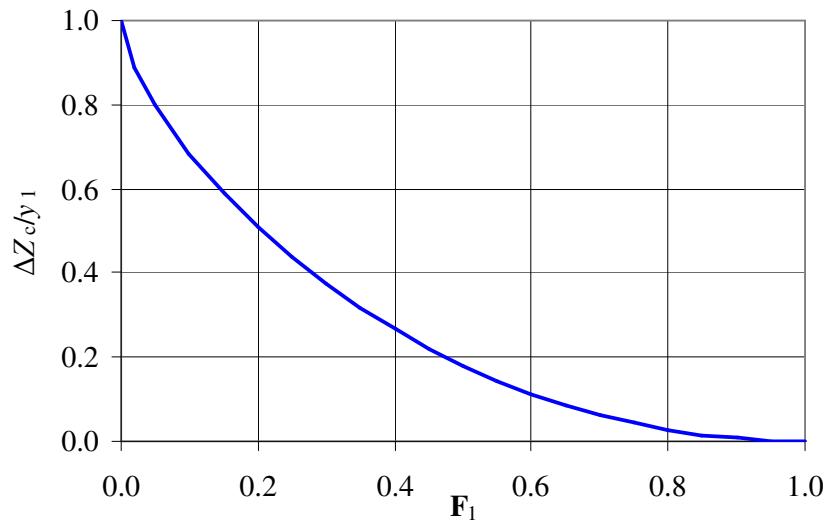
**Εφαρμογή 3.1:** Σε ορθογωνική διώρυγα για υποκρίσιμη ροή μπορούμε να γράψουμε τη μέγιστη ανύψωση πυθμένα  $\max \Delta z / y_1$  σαν συνάρτηση του αριθμού Froude  $F_1$  της ροής, ώστε να διέρχεται δεδομένη παροχή  $Q$ . Έστω  $\min E = E_c$  και  $\max \Delta z = \Delta z_c$  τότε

$$\frac{\Delta z_c}{y_1} = \frac{E_1}{y_1} - 1.5 \frac{y_c}{y_1} = \frac{y_1}{y_1} + \frac{V_1^2}{2gy_1} - 1.5 \frac{y_c}{y_1} = 1 + \frac{F_1^2}{2} - 1.5F_1^{2/3},$$

όπου

$$\frac{y_c}{y_1} = F_1^{2/3} \text{ (γιατί;).}$$

Οι οριακές τιμές του λόγου  $\Delta z_c / y_1$  είναι 1 και 0 όταν ο αριθμός του Froude της ροής  $F_1$  μεταβάλλεται από 0 έως 1 αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 3.2).



**Σχήμα 3.2** Μεταβολή του  $\max \Delta z$  σε ορθογωνική διώρυγα σαν συνάρτηση του αριθμού Froude, όταν η ροή είναι υποκρίσιμη.

### 3.4. Στένωση διατομής - υποκρίσιμη ροή

Θεωρούμε ότι η συναρμογή είναι ομαλή. Επομένως μεταξύ των διατομών (1) και (2) οι απώλειες ενέργειας είναι μηδενικές, δηλαδή

$$H_1 = H_2 \quad \text{ή} \quad E_1 = E_2 \tag{3.14}$$

επειδή η στάθμη του επιπέδου του πυθμένα είναι σταθερή. Επομένως η (3.14) γράφεται

$$y_1 + \frac{Q^2}{2gB^2 y_1^2} = y_2 + \frac{Q^2}{2gb^2 y_2^2}. \tag{3.15}$$

Υπάρχει μια ελάχιστη τιμή του πλάτους  $b$  έτσι ώστε να διέρχεται παροχή  $Q$ , που αντιστοιχεί στην ελάχιστη ειδική ενέργεια  $E_2$ . Εάν το πλάτος  $b$  μειωθεί παραπέρα, τότε είτε η παροχή που διέρχεται μειώνεται, είτε για να διέλθει η αρχική παροχή  $Q$  θα πρέπει να αυξηθεί η στάθμη στη διατομή (1). Η ελάχιστη αυτή τιμή προκύπτει από τη σχέση

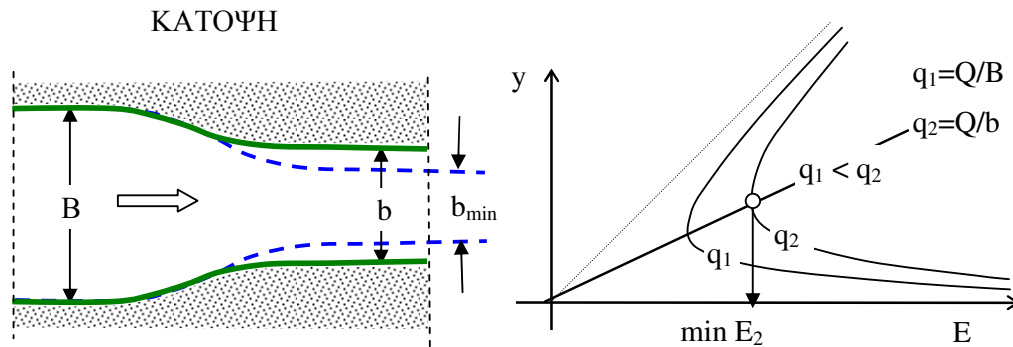
$$E_1 = \min E_2 = \frac{3}{2} \left( \frac{Q^2}{b_{\min}^2 g} \right)^{1/3} \quad (3.16)$$

και είναι

$$b_{\min} = \frac{3}{2} \frac{Q}{E_1^{3/2}} \sqrt{\frac{3}{2g}} \quad (3.17)$$

Σε περίπτωση που  $b > b_{\min}$ , το βάθος ροής στη διατομή (2) υπολογίζεται από τη σχέση (3.15).

Όταν η ροή στη διατομή (1) είναι υπερκρίσιμη, η μονοδιάστατη ανάλυση που έγινε προηγούμενα δεν μπορεί να εφαρμοστεί επειδή εμφανίζονται στάσιμα κύματα (βλ. VT Chow<sup>3</sup> κεφ. 17-3 και Σχήμα 3.4).



**Σχήμα 3.3** Ομαλή στένωση διατομής σε υποκρίσιμη ροή.



FIG. 17-8. Cross waves in a curved transition. (Courtesy of A. T. Ippen.)

**Σχήμα 3.4** Στάσιμα κύματα από ομαλή στένωση διατομής σε υπερκρίσιμη ροή (Chow, 1973).

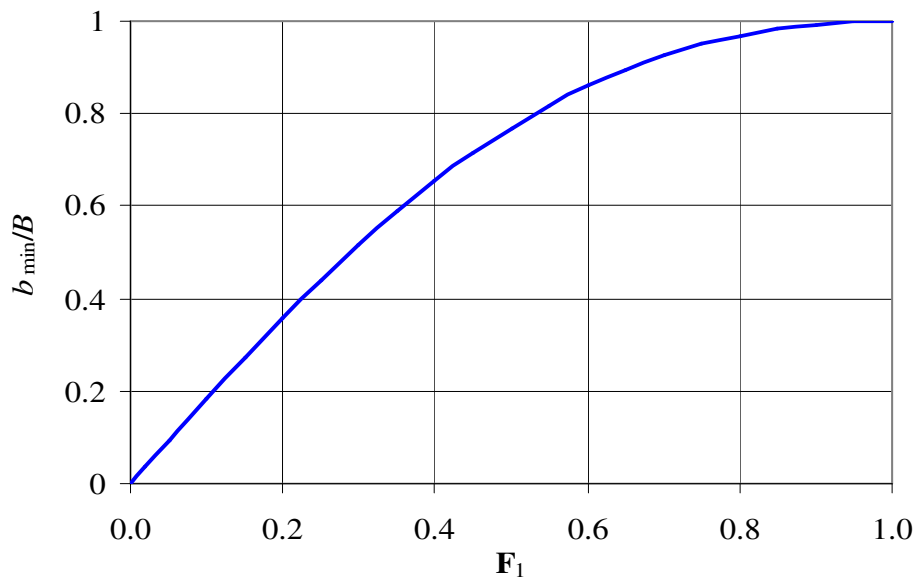
<sup>3</sup> Chow, VT, 1973. Open-channel hydraulics. McGraw-Hill.

**Εφαρμογή 3.2:** Σε ορθογωνική διώρυγα για υποκρίσιμη ροή είναι δυνατόν να γράψουμε ελάχιστη τιμή του πλάτους  $b_{\min}/B$  σαν συνάρτηση του αριθμού Froude  $F_1$  της ροής, ώστε να διέρχεται η δεδομένη παροχή  $Q$ . Από την εξίσωση (3.17)

$$b_{\min} = \frac{3}{2} \frac{Q}{E_1^{3/2}} \sqrt{\frac{3}{2g}} \Leftrightarrow \frac{b_{\min}}{B} = \frac{Q}{B\sqrt{g}} \left( \frac{3}{2E_1} \right)^{3/2} = \frac{V_1 B y_1}{B\sqrt{g}} \left( \frac{3}{2E_1} \right)^{3/2}$$

$$= \frac{V_1 y_1^{3/2}}{\sqrt{g y_1}} \left( \frac{3}{2E_1} \right)^{3/2} = F_1 \left( \frac{3 y_1}{2E_1} \right)^{3/2} = \dots = F_1 \left( \frac{3}{2 + F_1^2} \right)^{3/2}$$

Οι οριακές τιμές του λόγου  $b_{\min}/B$  είναι 0 και 1 όταν ο αριθμός του Froude της ροής  $F_1$  μεταβάλλεται από 0 έως 1 αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 3.5).



**Σχήμα 3.52** Μεταβολή του  $b_{\min}/B$  σε ορθογωνική διώρυγα σαν συνάρτηση του αριθμού Froude στα ανάντη, όταν η ροή είναι υποκρίσιμη.

### Παράδειγμα 3.1

Αγωγός με ορθογωνική διατομή, πλάτος  $B$  και πρακτικά οριζόντιο πυθμένα, στενεύει προς τα κατάντη γραμμικά σε πλάτος  $b$  με ταυτόχρονη γραμμική ανύψωση του πυθμένα κατά  $\Delta z$  σε μήκος  $L$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

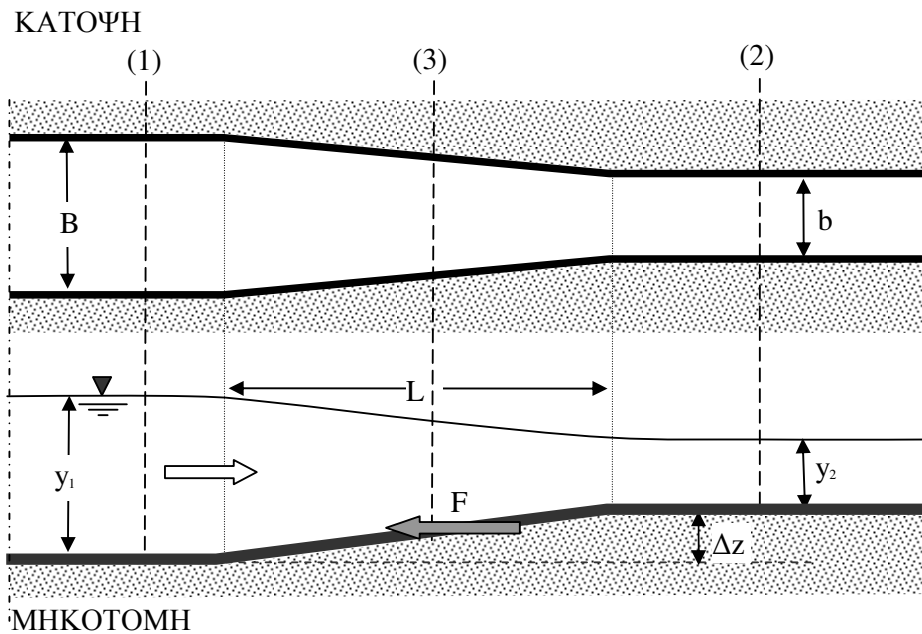
Για παροχή  $Q=3.0 \text{ m}^3/\text{s}$ , πλάτος  $B=2.0 \text{ m}$  και βάθος ροής  $y_1=.5 \text{ m}$  ζητούνται:

(α) Να καθοριστεί το πλάτος  $b$  στη διατομή 2 και η ανύψωση πυθμένα  $\Delta z$  έτσι ώστε

$$y_2=y_{2c}=b.$$

(β) Να υπολογιστεί η οριζόντια δύναμη  $F$  που ασκεί το νερό στη συναρμογή αμελώντας τις απώλειες τριβών.

(γ) Να υπολογιστεί το βάθος ροής  $y$  στο μέσο της συναρμογής.



Απάντηση

(α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ενέργειας από διατομή (1) σε διατομή (2) θεωρώντας μηδενικές απώλειες και ομοιόμορφη ροή

$$H_1 = H_2 \Rightarrow y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Delta z + y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\Delta z = \left[ y_1 + \frac{V_1^2}{2g} \right] - \left[ y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \right] \quad (1)$$

Όμως  $y_1 = 1.50$  m και  $V_1 = Q/(By_1) = 3/(2 \times 1.50) = 1.00$  m/s. Επίσης

$$V_2 = \frac{Q}{by_2} = \frac{Q}{b^2} \quad (2)$$

Σε ορθογωνική διώρυγα πλάτους  $b$

$$y_{2c} = \left( \frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3} = b \quad (3)$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$b = \left( \frac{Q^2}{g} \right)^{1/5} = 0.983 \text{ m.}$$

Επομένως

$$V_2 = \frac{Q}{by_2} = \frac{Q}{b^2} = 3.105 \text{ m.} \quad (4)$$



Αντικαθιστώντας τα  $y_1, y_2, V_1, V_2$  στην (1) προκύπτει ότι

$$\Delta z = 0.079 \text{ m.}$$

(β) Εφαρμόζοντας το θεώρημα διατήρησης της ορμής ανάμεσα στις διατομές ομοιόμορφης ροής (1) και (2) έχουμε ότι

$$-F + Fp_x + Fg_x + F\tau_x = \sum \rho[V(\underline{V} \circ d\underline{E})]_x = \rho Q(V_2 - V_1).$$

Όμως

$$Fg_x = 0 \text{ (κατακόρυφη μόνο συνιστώσα της βαρύτητας).}$$

$$F\tau_x = 0 \text{ (αμελητέα ποσότητα λόγω μικρού μήκους της συναρμογής)}$$

$$Fp_x = \frac{1}{2} \rho g (y_1^2 B - y_2^2 b)$$

θεωρώντας υδροστατική κατανομή πιέσεων. Επομένως,

$$F = Fp_x - \rho Q(V_2 - V_1) = \frac{1}{2} \gamma (y_1^2 B - y_2^2 b) - \rho Q(V_2 - V_1) = 11.098 \text{ kN}$$

Παρατήρηση: Στην παραπάνω δύναμη  $F$  περιλαμβάνεται αυτή που ασκείται στον πυθμένα που ανυψώνεται και στα κατακόρυφα τοιχώματα που συγκλίνουν.

(γ) Το βάθος ροής στο μέσο της συναρμογής θα προκύψει από την εφαρμογή των θεωρημάτων συνέχειας και ενέργειας, θεωρώντας ότι η ανύψωση του πυθμένα εκεί είναι  $\Delta z/2$  και το πλάτος  $(B+b)/2$ . Έχουμε ότι

$$H = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{\Delta z}{2} + y_3 + \frac{V_3^2}{2g} = 1.512 \text{ m}$$

και

$$Q = b_3 y_3 V_3 = y_3 V_3 \frac{B+b}{2}.$$

Αντικαθιστώντας από τη δεύτερη εξίσωση την ταχύτητα  $V_3$  στην πρώτη προκύπτει η εξίσωση 3ου βαθμού

$$y_3^3 - 1.512 y_3^2 + 0.206 = 0$$

Μια από τις λύσεις της, η ζητούμενη, βρίσκεται μεταξύ των βαθών 1.50 m στα ανάντη και 0.983 m στα κατόντη της διατομής (3). Με δοκιμές προκύπτει ότι  $y_3 = 1.408 \text{ m}$ .

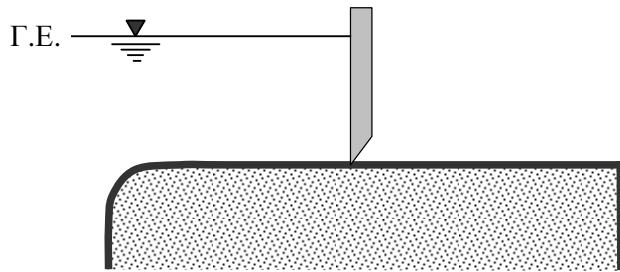
### 3.5. Υδροδότηση ορθογωνικής διώρυγας από ταμιευτήρα με ρυθμιστικό θυρόφραγμα.

Στο παρακάτω σχηματικό διάγραμμα ο ταμιευτήρας από αριστερά τροφοδοτεί οριζόντια ορθογωνική διώρυγα με παροχή  $q$  ανά μονάδα πλάτους. Η διαθέσιμη ενέργεια για την τροφοδοσία της διώρυγας είναι  $E$ , ίση με το βάθος του ακίνητου υγρού ανάντη του θυροφράγματος. Για αυτό το ύψος ενέργειας, η μέγιστη παροχή της διώρυγας θα παρατηρηθεί όταν το βάθος ροής γίνει κρίσιμο, δηλαδή όταν

$$E = y_c + \frac{D_c}{2} = 1.50y_c \quad \text{ή} \quad y_c = \frac{2}{3}E$$

δεδομένου ότι η διώρυγα είναι ορθογωνική. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις λειτουργίας:

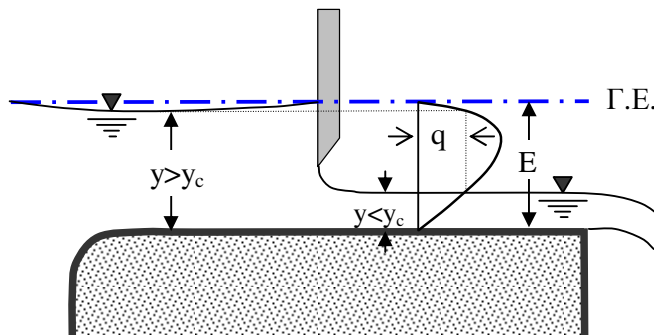
**Περίπτωση 1.** Θυρόφραγμα κλειστό. Τότε  $y = 0$  και επομένως δεν υφίσταται παροχή νερού στην ορθογωνική διώρυγα ( $q = 0$ ).



**Περίπτωση (1)**

$$y = 0, q = 0$$

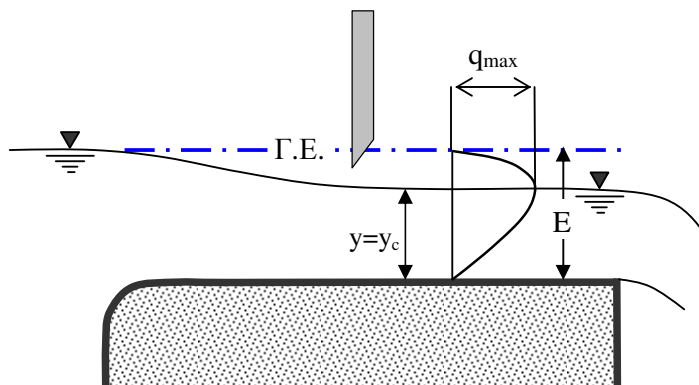
**Περίπτωση 2.** Θυρόφραγμα ανοικτό με άνοιγμα μικρότερο του κρίσιμου βάθους. Τότε  $y < y_c$  και επομένως η παροχή κατάντη του θυροφράγματος είναι  $q < q_{max}$ .



**Περίπτωση (2)**

$$y < y_c, q < q_{max}$$

**Περίπτωση 3.** Θυρόφραγμα τελείως ανοικτό (άνοιγμα μεγαλύτερο του κρίσιμου βάθους). Τότε  $y = y_c$  και επομένως η παροχή κατάντη του θυροφράγματος είναι  $q = q_{max}$ .



**Περίπτωση (3)**

$$y = y_c, q = q_{max}$$

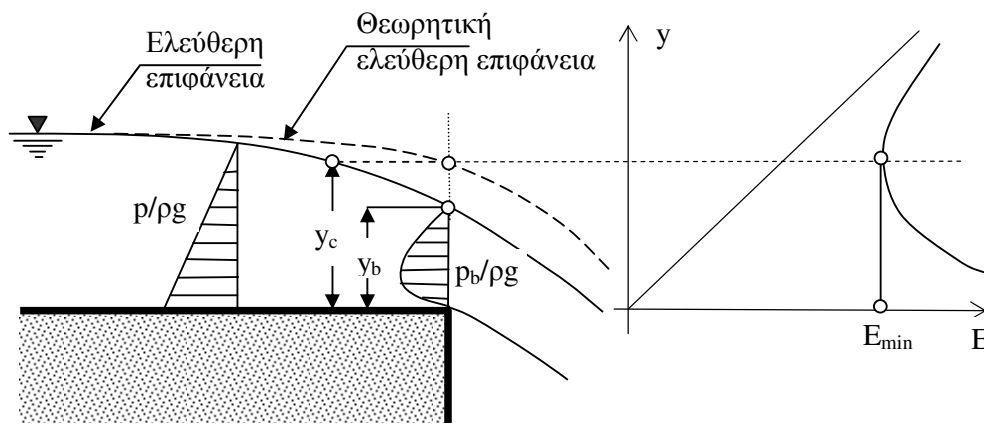
Η μέγιστη ανά μονάδα πλάτους παροχή μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (3.11) εάν αντικαταστήσουμε  $q = Q/b$

$$E = E_{\min} = y_c + \frac{D_c}{2} = \frac{3}{2} y_c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (3.18)$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$q_{\max} = \sqrt{g} \left( \frac{2}{3} E \right)^{3/2} \quad (3.19)$$

Εάν το μήκος της διώρυγας είναι μεγάλο, τότε κατά μήκος αυτής υπάρχουν απώλειες ενέργειας. Σε περίπτωση που η διώρυγα καταλήγει σε πτώση, η διατομή με την ελάχιστη ειδική ενέργεια είναι η διατομή της πτώσης. Δεδομένου ότι η παροχή στην πτώση είναι η μέγιστη, το βάθος ροής στην πτώση θα πρέπει να είναι το κρίσιμο βάθος.



**Σχήμα 3.6** Συνθήκες ροής στην ελεύθερη πτώση ορθογωνικού αγωγού.

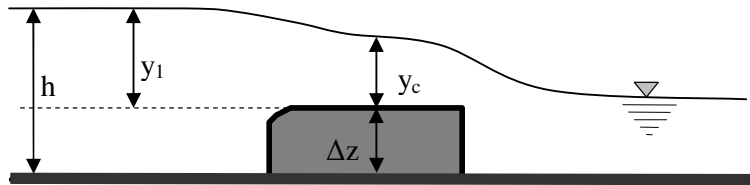
Όλοι οι παραπάνω υπολογισμοί του ύψους ενέργειας βασίζονται στην παραδοχή της υδροστατικής καθ' ύψος κατανομής της πίεσης, πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει στο σημείο της πτώσης, επειδή η πίεση είναι μηδενική (ατμοσφαιρική) στην άνω και κάτω ελεύθερη επιφάνεια. Το αποτέλεσμα της μη υδροστατικής κατανομής της πίεσης στην πτώση είναι η έντονη καμπύλωση της ελεύθερης επιφάνειας ακριβώς ανάντη της πτώσης και η μείωση του βάθους ροής. Ο Hunter Rouse<sup>4</sup> έδειξε πειραματικά ότι το βάθος ροής  $y_b$  στην πτώση (brink depth) είναι  $y_b = 0.715 y_c$ . Το  $y_c$  εμφανίζεται σε απόσταση περί τα  $3y_c - 4y_c$  στα ανάντη της πτώσης. Για πρακτικούς όμως λόγους στους υπολογισμούς θεωρούμε ότι στο χείλος της πτώσης  $y = y_c$ .

**Παράδειγμα 3.2** Υπερχειλιστής ευρείας στέγης τοποθετείται σε ορθογωνικό κανάλι πλάτους  $b$ . Θεωρώντας ότι οι συνθήκες ροής ανάντη είναι τέτοιες που να μπορούμε να αμελήσουμε την κινητική ενέργεια καθώς και τυχόν απώλειες τριβών, να δώσετε μια θεωρητική σχέση που να δίνει την παροχή σαν συνάρτηση του βάθους στα ανάντη.

<sup>4</sup> Civil Engineering, May 1937, pp. 349-350, also July 1937, p. 518.

Απάντηση

Επειδή  $h$  είναι μεγάλο, κάπου πάνω από τον υπερχειλιστή η ροή θα έχει κρίσιμο βάθος. Από την εξίσωση ενέργειας ( $\Delta H=0$ ) στα ανάντη και επί του υπερχειλιστή έχουμε ότι



$$H = y_1 + \Delta z + \frac{V_1^2}{2g} = \Delta z + y_c + \frac{V_c^2}{2g} \Rightarrow y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_c + \frac{D_c}{2} = y_c + \frac{y_c}{2} = \frac{3y_c}{2}$$

Αλλά  $\frac{V_1^2}{2g} \ll y_1$ , επομένως

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} \approx y_1 = \frac{3y_c}{2} \Rightarrow y_c = \frac{2}{3}y_1.$$

Όμως σε ορθογωνική διώρυγα  $y_c = (Q^2 / gb^2)^{1/3}$ . Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$Q = b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} y_1^{3/2} = 1.705by_1^{3/2}.$$

Η σχέση αυτή κρίνεται πολύ καλή σε σύγκριση με εμπειρικές σχέσεις υπολογισμού της παροχής από ελεγχόμενες συνθήκες ροής.

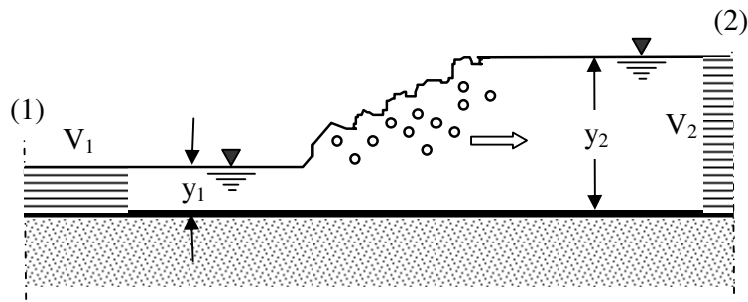
**3.6. Το υδραυλικό άλμα.**

Είναι το φαινόμενο κατά το οποίο έχουμε μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή. Σε περίπτωση που ο πυθμένας του καναλιού είναι οριζόντιος η μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή συνοδεύεται από σημαντικές απώλειες ενέργειας, ενώ η ορμή (ειδική δύναμη) παραμένει πρακτικά αμετάβλητη. Οι απώλειες ενέργειας προκαλούνται από τη δημιουργία έντονης τύρβης στην περιοχή μεταβολής του βάθους.

Η εξίσωση της ορμής στην κατεύθυνση της ροής  $x$ , αμελώντας τη βαρύτητα (οριζόντιος αγωγός) και τις τριβές (λόγω μικρού μήκους του άλματος) γράφεται ως εξής (εξίσωση 2.14)

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow \left[ \frac{Q^2}{gA_1} + \overline{y_1}A_1 \right] - \left[ \frac{Q^2}{gA_2} + \overline{y_2}A_2 \right] = 0. \quad (3.20)$$

Η σχέση αυτή είναι αναγκαία για τη δημιουργία υδραυλικού άλματος, τα δε βάθη ροής στα ανάντη και κατάντη του άλματος είναι συζυγή.



**Σχήμα 3.6** Το υδραυλικό άλμα σχηματικά.

**Εφαρμογή 3.1** Σε ορθογωνικό πρισματικό αγωγό πλάτους  $b$ , που μεταφέρει παροχή  $Q$ , το βάθος ροής είναι  $y_1 < y_c$ . Να προσδιορίσετε το βάθος  $y_2$  της ροής εάν δημιουργηθεί υδραυλικό άλμα.

Η εξίσωση (3.20) γράφεται ως εξής

$$\frac{Q^2}{gA_1} + y_1 A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + y_2 A_2 \Rightarrow \frac{V_1^2 b y_1}{g} + y_1 b \frac{y_1}{2} = \frac{V_2^2 b y_2}{g} + y_2 b \frac{y_2}{2}. \quad (3.21)$$

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε ότι

$$Q = V_1 y_1 = V_2 y_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{y_1}{y_2} \quad (3.22)$$

Από τις εξισώσεις (3.21) και (3.22) αντικαθιστώντας την ταχύτητα  $V_1$  με τον αριθμό του Froude  $F_1$ ,

$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g y_1}} \quad (3.23)$$

καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\left\{ 2F_1^2 - \frac{y_2}{y_1} \left( 1 + \frac{y_2}{y_1} \right) \right\} \left( \frac{y_2}{y_1} - 1 \right) = 0 \quad (3.24)$$

από την οποία επειδή  $y_1 \neq y_2$ , επιλύοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση και απορρίπτοντας την αρνητική λύση καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8F_1^2} - 1 \right]. \quad (3.25)$$

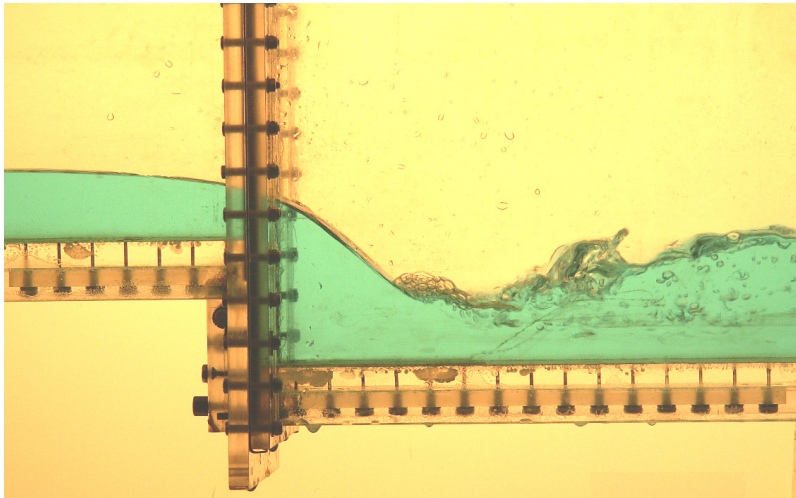
Σε περίπτωση δε που  $F_1 > 2$  η παραπάνω σχέση γράφεται προσεγγιστικά

$$\frac{y_2}{y_1} = \sqrt{2} F_1 - \frac{1}{2}; F_1 > 2. \quad (3.26)$$

**Εφαρμογή 3.2** Να υπολογιστούν οι απώλειες ενέργειας του υδραυλικού άλματος σε ορθογωνικό αγωγό.

Υπόδειξη: Από εξισώσεις ενέργειας συνέχειας και ορμής μετά από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\Delta H = \frac{(y_1 - y_2)^3}{4y_1 y_2}. \quad (3.27)$$



**Σχήμα 3.7** Υδραυλικό άλμα στον πόδα βυθισμένου καταβαθμού με υποκρίσιμη ροή στα ανάντη (Παπανικολάου<sup>5</sup> 2011).



**Σχήμα 3.8** Το υδραυλικό άλμα στο εργαστήριο (Παπανικολάου<sup>5</sup> 2001).

---

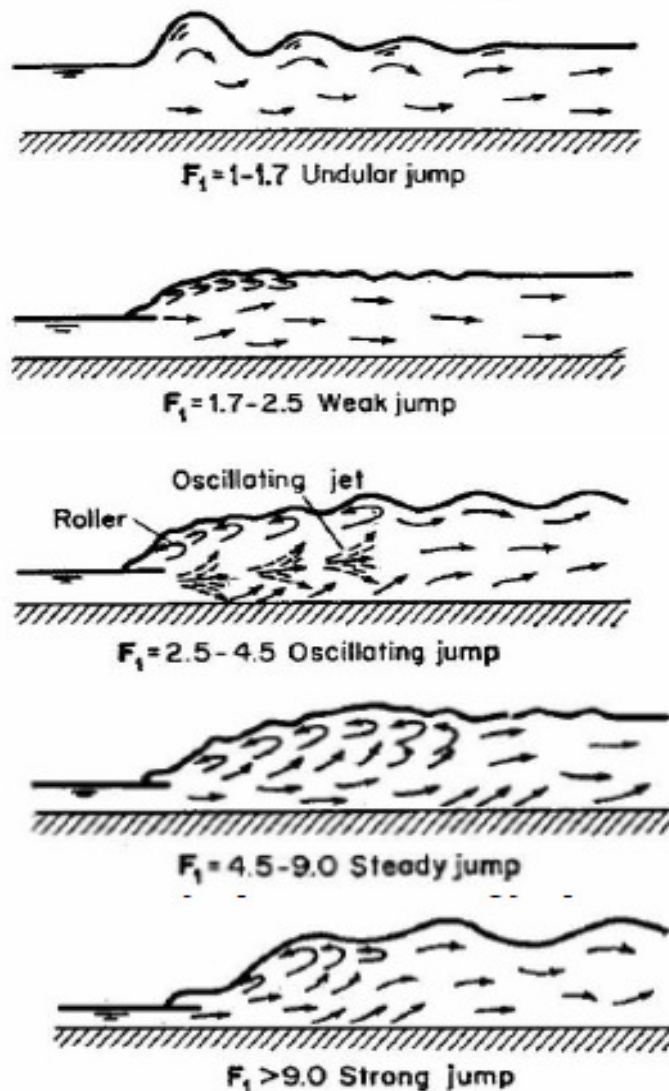
<sup>5</sup> Παπανικολάου, ΠΝ. Εργαστήριο Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

### 3.7. Κατηγορίες υδραυλικού άλματος

Το υδραυλικό άλμα έχει ερευνηθεί πειραματικά σε μεγάλη λεπτομέρεια. Η μορφή και ιδιότητές του (όπως π.χ. το μήκος του) είναι συνάρτηση του αριθμού Froude της υπερκρίσιμης ροής. Οι κατηγορίες του υδραυλικού άλματος που παρατίθενται σχηματικά παραπλεύρως είναι οι εξής:

1. Κυματοειδές (undular ή pre-jump)  $1 < Fr_1 < 1.7$
2. Ασθενές (weak)  $1.7 < Fr_1 < 2.5$
3. Δονούμενο (oscillating)  $2.5 < Fr_1 < 4.5$
4. Μόνιμο (steady)  $4.5 < Fr_1 < 9.0$
5. Ισχυρό (strong)  $Fr_1 > 9.0$

Επιθυμητή κατηγορία του υδραυλικού άλματος ειδικότερα όταν χρησιμοποιείται σαν μηχανισμός καταστροφής ενέργειας (στις λεκάνες ηρεμίσσεως – stilling basins), είναι το μόνιμο, επειδή δεν δημιουργούνται κυματισμοί στα κατάντη.



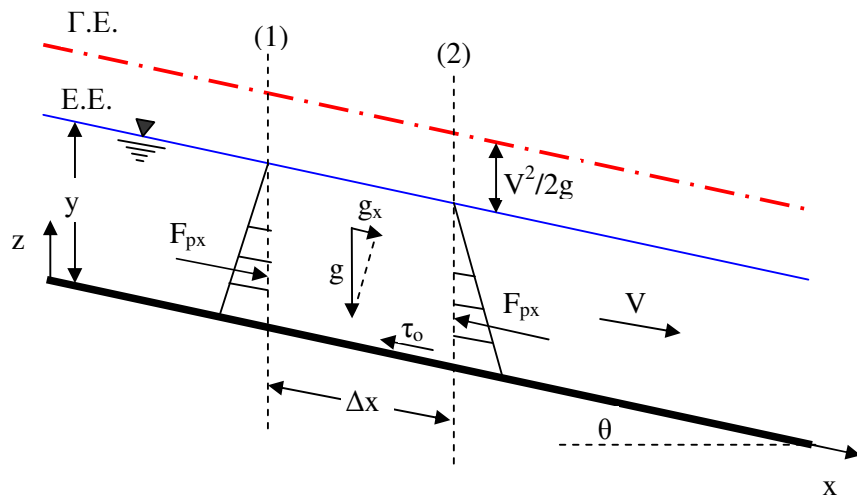
Αυτή η σελίδα έχει αφεθεί σκόπιμα λευκή.



## 4 ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ

Ομοιόμορφη χαρακτηρίζουμε τη μόνιμη ροή στην οποία οι γραμμές ροής είναι παράλληλες με τον αγωγό και επομένως πραγματοποιήσιμη μόνο σε πρισματικούς αγωγούς. Το βάθος ροής είναι σταθερό (δηλαδή η ελεύθερη επιφάνεια είναι παράλληλη με τον πυθμένα), καθώς επίσης και η μέση ταχύτητα είναι ίδια σε κάθε διατομή του αγωγού. Επομένως η επιτάχυνση κατά μήκος του αγωγού είναι μηδενική. Ισχύει ηλαδή η σχέση

$$J_o = J_E = J \quad (4.1)$$



**Σχήμα 4.1** Αγωγός με ελεύθερη επιφάνεια σε ομοιόμορφη ροή.

Στην παραπάνω σχέση οι τρεις κλίσεις είναι

$$J_E = -\frac{dH}{dx} \quad \text{η κλίση των απωλειών ενέργειας}$$

$$J_o = -\frac{dz}{dx} = \sin \theta \quad \text{η κλίση του πυθμένα}$$

$$J = -\frac{d(z+y)}{dx} \quad \text{η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας}$$

Η εξίσωση συνέχειας γράφεται

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \text{ή} \quad A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2 = V.$$

Επειδή η ροή δεν επιταχύνεται, η εξίσωση ορμής (ποσότητας της κίνησης) στον ολοκληρωματικό όγκο συνιστά μια εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων, δηλαδή

$$\sum F_x = F_{gx} + F_{\tau_x} + F_{px} = \rho Q (V_2 - V_1) = 0; \quad \beta = 1$$

όπου

$$F_{px} = 0, \quad F_{\tau_x} = -\tau_o P(\Delta x) \quad \text{και} \quad F_{gx} = \rho g_x A(\Delta x) = \rho (g \sin \theta) A(\Delta x).$$

Επομένως από την ισορροπία των δυνάμεων προκύπτει ότι

$$\tau_o P \Delta x = \rho g A(\Delta x) \sin \theta = \rho g A(\Delta x) J_o.$$

Διαιρώντας με  $\Delta x$

$$\tau_o = \rho g (A/P) \sin \theta = \rho g R J_o; \quad R = A/P, \quad J_o = \sin \theta$$

όπου  $\tau_o$  είναι η μέση διατμητική τάση των τοιχωμάτων,  $A$  είναι το εμβαδόν της υγρής επιφάνειας της διατομής, και  $P$  η βρεχόμενη περίμετρος. Όμως, κατ' αναλογία με τους αγωγούς υπό πίεση, η μέση διατμητική τάση  $\tau_o$  στα τοιχώματα του αγωγού μπορεί να γραφτεί

$$\tau_o = c_f \rho \frac{V^2}{2} = \frac{f}{4} \rho \frac{V^2}{2}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις εξισώνοντας τη μέση διατμητική τάση  $\tau_o$  στο όριο και δεδομένης της σχέσης των Darcy-Weisbach

$$J_o = \frac{f}{4R} \frac{V^2}{2g} = J_E$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$V = \sqrt{\frac{8}{f}} g \sqrt{R J_E} \quad (4.2)$$

όπου  $R$  είναι η υδραυλική ακτίνα ( $R=A/P$ ) του αγωγού. Η παραπάνω σχέση των Darcy-Weisbach μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με το διάγραμμα Moody, για αγωγούς μικρού μεγέθους, ορίζοντας  $D = 4R$ , όπου

$$\Re = \frac{V \times 4R}{\nu} \text{ και } \frac{k_s}{D} = \frac{k_s}{4R} \quad (4.3)$$

Εάν ορίσουμε

$$C = \sqrt{\frac{8}{f}} g \quad (4.4)$$

καταλήγουμε στη εμπειρική σχέση του Chèzy

$$V = C\sqrt{RJ} . \quad (4.5)$$

Στην παραπάνω σχέση,  $C$  είναι σταθερά,  $R$  είναι η υδραυλική ακτίνα σε m και  $V$  η μέση ταχύτητα ροής σε m/s. Η εμπειρική σχέση του Chèzy, προφανώς δεν είναι διαστατικά ομογενής και ως εκ τούτου αλλάζοντας μονάδες στην υδραυλική ακτίνα, θα πρέπει η σταθερά  $C$  να μεταβάλλεται. Επίσης, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι από τη σχέση (4.4) προκύπτει ότι η ‘σταθερά’  $C$  που είναι συνάρτηση της τραχύτητας, δεν είναι τελικά σταθερά, δεδομένου ότι  $C = C(f)$ ;  $f=f(k_s/4R, \Re)$ .

Για μεγαλύτερους αγωγούς και ρεύματα, οι εμπειρικές σχέσεις δίνουν πολύ καλύτερα αποτελέσματα. Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικές τιμές της ισοδύναμης τραχύτητας  $k_s$  για πρισματικούς αγωγούς μικρών διαστάσεων στον πίνακα που ακολουθεί.

| $k_s$ (mm) | Επιφάνεια (περιγραφή)   |
|------------|---|
| 0.15       | Λείο σκυρόδεμα σε λιπανθέντες σιδηρότυπους                                    |
| 0.30       | Πολύ λείες επιφάνειες από τσιμεντοκονία, στοκαρισμένοι αρμοί                  |
| 0.50       | Λείο σκυρόδεμα από σιδηρότυπους, επεξεργασμένοι αρμοί                         |
| 0.60       | Προκατασκευασμένοι σωλήνες, λείες τριφτές επιφάνειες, αργιλοπυριτικοί σωλήνες |
| 1.50       | Σκυρόδεμα από τραχείς ξυλότυπους - gunite                                     |
| 2.40       | Μικρά τμήματα τσιμεντοσωλήνων χωρίς ιδιαίτερη προσοχή στους αρμούς            |
| 3.00       | Ευθύγραμμες χωμάτινες τάφροι  |
| 4.20       | Πρόχειρα κατασκευασμένοι τσιμεντοσωλήνες                                      |
| 6.00       | Ξηρολιθοδομές   |

#### 4.1. Εμπειρικές σχέσεις υπολογισμού ομοιόμορφης ροής

Όπως προαναφέραμε, για αγωγούς μεγαλύτερων διαστάσεων και φυσικά υδατορρεύματα, οι εμπειρικές σχέσεις δίνουν καλύτερα αποτελέσματα από τον προσδιορισμό των απωλειών με βάση τη σχέση των Darcy – Weisbach και την εξίσωση προσδιορισμού του συντελεστή τραχύτητας σε σωλήνες (διάγραμμα Moody). Παραθέτουμε για ιστορικούς λόγους μερικές από τις περισσότερο χρησιμοποιημένες εμπειρικές σχέσεις, αλλά οι υπολογισμοί μας στη συνέχεια θα βασισθούν αποκλειστικά στη σχέση του Manning.

### 1. Τύπος Chèzy

$$V = C\sqrt{RJ}$$

|      |     |   |                                       |
|------|-----|---|---------------------------------------|
| όπου | $J$ | = | κλίση πυθμένα                         |
|      | $R$ | = | υδραυλική ακτίνα (m)                  |
|      | $C$ | = | συντελεστής τραχύτητας της επιφάνειας |
|      | $V$ | = | μέση ταχύτητα ροής (m/s)              |

Όμως, από τη σχέση (4.4) προκύπτει ότι ο συντελεστής  $C$  δεν είναι σταθερά, ειδικότερα όταν μεταβάλλεται η στάθμη ροής και επομένως η υδραυλική ακτίνα, ενώ η τραχύτητα των τοιχωμάτων παραμένει αμετάβλητη. Για το λόγο αυτό έχουν προταθεί και άλλες σχέσεις που λαμβάνουν υπόψη τη σχετική τραχύτητα.

### 2. Τύπος Kutter - Ganguilet

Αποτελεί βελτιωμένη έκδοση του τύπου του Chèzy με μεταβλητό συντελεστή  $C$  σύμφωνα με τη σχέση

$$C = \frac{23 + \frac{0.00155}{J_o} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0.00155}{J_o}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \quad (4.6)$$

|      |       |   |                                       |
|------|-------|---|---------------------------------------|
| όπου | $J_o$ | = | κλίση πυθμένα                         |
|      | $R$   | = | υδραυλική ακτίνα                      |
|      | $n$   | = | συντελεστής τραχύτητας της επιφάνειας |

### 3. Τύπος Bazin

Ισχύει ο τύπος Chèzy με

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{R}} \quad (4.7)$$

|      |          |   |   |
|------|----------|---|---|
| όπου | $\gamma$ | = | συντελεστής που περιγράφει την τραχύτητα της επιφάνειας |
|      | $R$      | = | υδραυλική ακτίνα  |

### 4. Τύπος Manning

Από τη σχέση του Chèzy προκύπτει ότι ο συντελεστής  $C$  παραμένει ίδιος, ανεξάρτητα του βάθους ροής (και κατ' επέκταση της υδραυλικής ακτίνας  $R$ ). Όμως, για έναν αγωγό με συγκεκριμένη ισοδύναμη τραχύτητα  $k_s$ , ο συντελεστής  $C$  θα έπρεπε να αυξάνει με το βάθος ροής, πράγμα που είχαν παρατηρήσει ότι ισχύει στην πράξη, οι μηχανικοί που χρησιμοποιούσαν την εν λόγω σχέση. Οι Manning (1885) και Strickler δουλεύοντας

ανεξάρτητα, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο συντελεστής  $C$  δεν είναι δυνατόν να είναι ανεξάρτητος του βάθους ροής και συγκεκριμένα πρότειναν τη σχέση μεταβολής του  $C$  σαν συνάρτηση της υδραυλικής ακτίνας  $C=R^{1/6}/n$ , όπου  $n$  είναι μια σταθερά που εκφράζει την τραχύτητα της διατομής. Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στη σχέση του Chèzy η μέση ταχύτητα ροής στη διατομή δίδεται από

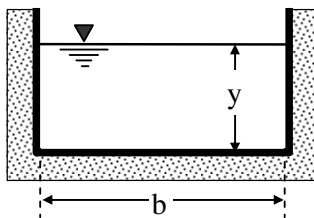
$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2}. \quad (4.8)$$

Η παραπάνω σχέση (που ονομάζεται εξίσωση του Manning και ο συντελεστής  $n$  συντελεστής Manning, προς τιμήν του ερευνητή που την πρότεινε) είναι και αυτή εμπειρική και αποτελεί την ευρύτερα χρησιμοποιούμενη σχέση σε ανοικτούς αγωγούς σήμερα. Ο Ven Te Chow έχει κατηγοριοποιήσει το συντελεστή τραχύτητας  $n$  - Manning για αγωγούς από διάφορα υλικά (βλ. Παράρτημα). Για να ισχύει η παραπάνω σχέση, η υδραυλική ακτίνα  $R$  πρέπει δίδεται σε m, η δε ταχύτητα ροής που προκύπτει είναι σε m/s. Εάν κάποιος προτίθεται να χρησιμοποιήσει την παραπάνω εμπειρική σχέση σε διαφορετικό σύστημα μονάδων με τον ίδιο όμως συντελεστή τραχύτητας  $n$ , θα πρέπει να μεταβάλει το σταθερό συντελεστή (στην προκειμένη περίπτωση 1). Για παράδειγμα, εάν θέλαμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση στο US σύστημα μονάδων ( $R$  σε ft και  $V$  σε ft/s) ο συντελεστής 1 θα πρέπει να αντικατασταθεί με το 1.49. Αυτό γίνεται επειδή η παραπάνω σχέση δεν έχει διαστατική ομογένεια, και επομένως δεν είναι ανεξάρτητη του συστήματος μονάδων που χρησιμοποιούμε.

#### 4.2 Υπολογισμός του βάθους ομοιόμορφης ροής σε απλές διατομές

Παραθέτουμε στη συνέχεια τον τρόπο υπολογισμού του βάθους της ομοιόμορφης ροής σε αγωγούς με χαρακτηριστικές διατομές με τη χρήση της σχέσης του Manning. Οι μονάδες που θα χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς είναι m για το μήκος, m/s για την ταχύτητα,  $m^3/s$  για την παροχή, κλπ.

(α) Ορθογωνική διατομή



$$\begin{aligned} A &= by \\ P &= b + 2y \\ R &= A/P \\ Q &= AV = byV \end{aligned}$$

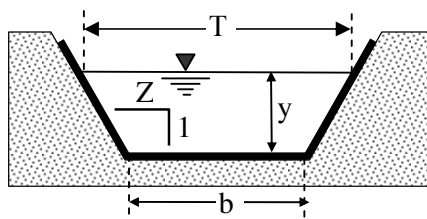
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{by} = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n} \left( \frac{A}{P} \right)^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n} \left( \frac{by}{b+2y} \right)^{2/3} J^{1/2}$$

απ' όπου προκύπτει η σχέση

$$y = \frac{1}{b} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b+2y)^{2/3} \right]^{3/5} \quad (4.9)$$

η οποία λύνεται με επαναληπτική διαδικασία και συγκλίνει ανεξάρτητα από την αρχική τιμή δοκιμής που υποθέτουμε. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε μια τιμή του  $y$ , με την οποία υπολογίζουμε το  $y_1$  από την (4.9). Εάν  $y = y_1$  σταματάμε τον υπολογισμό, διαφορετικά με τη νέα τιμή  $y_1$  από την (4.9) υπολογίζουμε την τιμή  $y_2$ , κ.ο.κ. έως ότου ταυτισθούν οι δύο τιμές του  $y$ .

(β) Τραπεζοειδής διατομή



$$A = (b + Zy)y$$

$$P = b + 2y\sqrt{1 + Z^2}$$

$$R = A/P$$

$$Q = AV$$

Από τη σχέση του Manning

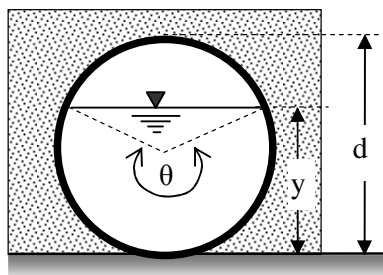
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{(b + Zy)y} = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n} \left( \frac{A}{P} \right)^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n} \left( \frac{(b + Zy)y}{b + 2y\sqrt{1 + Z^2}} \right)^{2/3} J^{1/2}$$

προκύπτει ότι

$$y = \frac{1}{b + Zy} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b + 2y\sqrt{1 + Z^2})^{2/3} \right]^{3/5} \quad (4.10)$$

η οποία λύνεται με επαναληπτική διαδικασία και συγκλίνει ανεξάρτητα από την αρχική τιμή δοκιμής που υποθέτουμε.

(γ) Κυκλική διατομή



$$y = [1 - \cos(\theta/2)] \frac{d}{2}$$

$$A = \frac{(\theta - \sin \theta)d^2}{8}$$

$$P = d\theta/2$$

$$R = A/P = \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) \frac{d}{4}$$

Από την εξίσωση του Manning και τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} = \frac{Q}{(\theta - \sin \theta)d^2/8} = \frac{1}{n} \left[ \frac{(\theta - \sin \theta)d^2/8}{\theta d/2} \right]^{2/3} J^{1/2},$$

απ' όπου λύνοντας ως προς  $\theta$  προκύπτει ότι

$$\theta = \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} \frac{\theta^{2/3}}{(d/2)^{8/3}} \right]^{3/5} + \frac{\sin \theta}{2} + \frac{\theta}{2} \quad (4.11)$$

όπου η γωνία  $\theta$  εκφράζεται σε rad (ακτίνια). Η εξίσωση (4.11) λύνεται με επαναληπτική διαδικασία ως προς  $\theta$ . Με το  $\theta$  γνωστό προκύπτει το ομοιόμορφο βάθος από τη σχέση

$$y = \frac{d}{2} [1 - \cos(\theta/2)]. \quad (4.12)$$

**Παρατήρηση 1:** Εάν στην εξίσωση (4.10) θέσουμε  $Z=0$ , προκύπτει η εξίσωση (4.9) για τους ορθογωνικούς αγωγούς.

**Παρατήρηση 2:** Στην περίπτωση της κλειστής **διατομής ισοσκελούς τριγώνου**, το ομοιόμορφο βάθος υπολογίζεται εάν στην εξίσωση (4.10) θέσουμε  $-Z$  αντί  $Z$  στην κλίση πρανών, δηλαδή το ομοιόμορφο βάθος βάθος υπολογίζεται από τη σχέση

$$y = \frac{1}{b - Zy} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b + 2y\sqrt{1 + Z^2})^{2/3} \right]^{3/5}$$

**Εφαρμογή 4.1.** Σε κυκλικό αγωγό να κατασκευαστεί το διάγραμμα της παροχής αδιαστατοποιημένης με την παροχή πλήρωσης του αγωγού, σαν συνάρτηση του ποσοστού πλήρωσης  $y/D$ .

Για βάθος ροής στον κυκλικό αγωγό  $y$ , η παροχή από τη σχέση του Manning χρησιμοποιώντας τις σχέσεις της προηγούμενης παραγράφου θα είναι

$$Q = \frac{A}{n} R^{2/3} J^{1/2} = \frac{(\theta - \sin \theta)d^2}{8n} \left( \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} \frac{d}{4} \right)^{2/3} J^{1/2} = \frac{(\theta - \sin \theta)^{5/3} d^{8/3}}{2^{13/3} n} J^{1/2}.$$

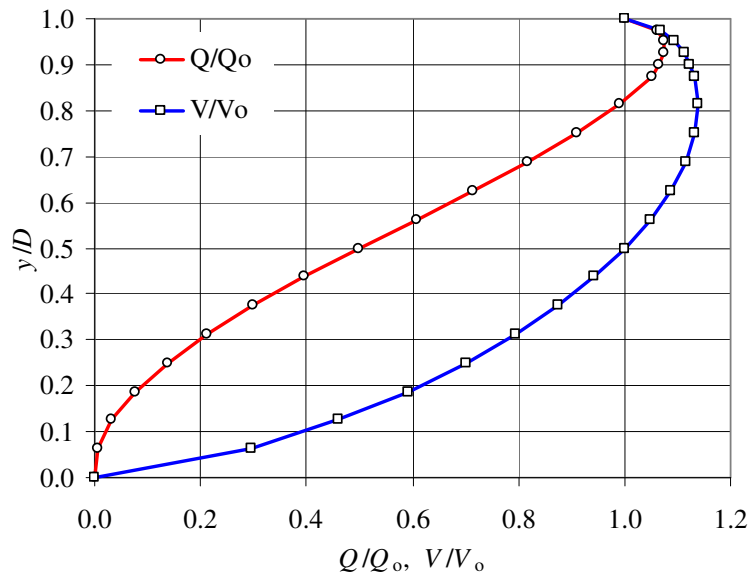
Η παροχή πλήρωσης ( $y = D$ ) του αγωγού χωρίς να βρίσκεται υπό πίεση είναι

$$Q_{full} = \frac{A}{n} R^{2/3} J^{1/2} = \frac{\pi d^2}{4n} \left( \frac{d}{4} \right)^{2/3} J^{1/2} = \frac{d^{8/3}}{2^{10/3} n} J^{1/2}.$$

Ο λόγος των δύο παροχών είναι

$$\frac{Q}{Q_{full}} = \frac{(\theta - \sin \theta)^{5/3}}{2\pi\theta^{2/3}} \quad \text{όπου} \quad \frac{y}{d} = \frac{1 - \cos(\theta/2)}{2}.$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει το διάγραμμα της παροχής ενός σωλήνα σαν συνάρτηση του ποσοστού πλήρωσης όταν ο συντελεστής τραχύτητας θεωρηθεί ότι είναι σταθερός. Από το διάγραμμα του Σχήματος 4.2 παρατηρούμε ότι ο σωληνωτός αγωγός έχει τη μέγιστη παροχεταιυτικότητα όταν  $y/D \approx 0.94$ , που είναι 7.5% μεγαλύτερη από την παροχή πλήρωσης. Επίσης, η παροχή πλήρωσης επιτυγχάνεται όταν  $y/D \approx 0.825$ .

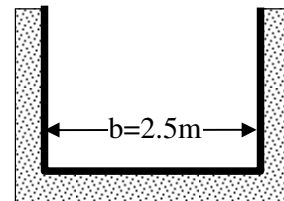


**Σχήμα 4.2** Παροχή (κύκλοι) και ταχύτητα (τετράγωνα) αγωγού κυκλικής διατομής σαν συνάρτηση του ποσοστού πλήρωσης  $y/D$ .  $Q_0$  και  $V_0$  είναι η παροχή και ταχύτητα πλήρους διατομής.

**Παράδειγμα 4.1** Για την ορθογωνική διατομή του σχήματος από σκυρόδεμα (Manning  $n = 0.015$ ) ζητούνται:

(α) Για κατά μήκος κλίσεις πυθμένα 0.01, 0.001 και παροχή  $7 \text{ m}^3/\text{s}$  τα βάθη της ομοιόμορφης ροής.

(β) Να χαρακτηριστεί η ροή σαν υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη για κάθε περίπτωση.



Απάντηση

(α) Το βάθος της ομοιόμορφης ροής σε ορθογωνική διώρυγα προσδιορίζεται από τη σχέση (4.9)

$$y = \frac{1}{b} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b + 2y)^{2/3} \right]^{3/5}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τις γνωστές παραμέτρους και υποθέτοντας  $y_0 = 1 \text{ m}$  κατ' αρχήν, το ομοιόμορφο βάθος προσδιορίζεται με διαδοχικές δοκιμές που φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Για  $Q = 7.0 \text{ m}^3/\text{s}$  και  $J_0 = 0.01$

| $y_0$        | $b$  | $Z$  | $n$   | $J_0$  | $Q$  | $y_1$        |
|--------------|------|------|-------|--------|------|--------------|
| 1.000        | 2.50 | 0.00 | 0.015 | 0.0100 | 7.00 | 0.752        |
| 0.752        | 2.50 | 0.00 | 0.015 | 0.0100 | 7.00 | 0.717        |
| 0.717        | 2.50 | 0.00 | 0.015 | 0.0100 | 7.00 | 0.712        |
| <b>0.712</b> | 2.50 | 0.00 | 0.015 | 0.0100 | 7.00 | <b>0.712</b> |

Επομένως  $y_0 = 0.712 \text{ m}$ .

Όμοια εργαζόμενοι για την κλίση 0.001 βρίσκουμε ότι  $y_0 = 1.663 \text{ m}$ .



(β) Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της ροής θα πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό του Froude της ροής. Εάν  $Fr > 1$ , τότε η ροή είναι υπερκρίσιμη. Εάν  $Fr < 1$ , τότε η ροή είναι υποκρίσιμη. (Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το κρίσιμο βάθος και να το συγκρίνουμε με το ομοιόμορφο. Εάν  $y_c > y_o$ , τότε η ροή είναι υπερκρίσιμη. Εάν  $y_c < y_o$ , τότε η ροή είναι υποκρίσιμη.)

Ο αριθμός του Froude της ροής είναι

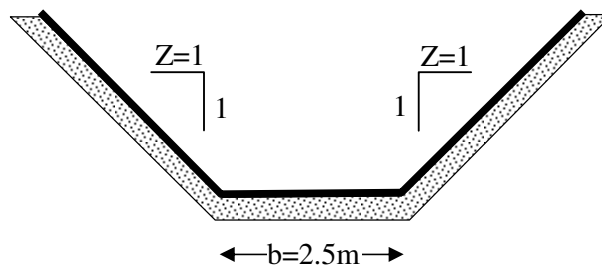
$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}}$$

όπου  $V = Q/A$  η μέση ταχύτητα ροής και  $D = A/T$  είναι το υδραυλικό βάθος της διατομής.

| Q                   | B    | S      | $y_o$ | A                 | T    | V     | D    | Fr           | Χαρ/μός ροής |
|---------------------|------|--------|-------|-------------------|------|-------|------|--------------|--------------|
| (m <sup>3</sup> /s) | (m)  |        | (m)   | (m <sup>2</sup> ) | (m)  | (m/s) | (m)  |              |              |
| 7.00                | 2.50 | 0.0100 | 0.71  | 1.78              | 2.50 | 3.93  | 0.71 | <b>1.489</b> | Υπερκρίσιμη  |
| 7.00                | 2.50 | 0.0010 | 1.66  | 4.16              | 2.50 | 1.68  | 1.66 | <b>0.417</b> | Υποκρίσιμη   |

**Παράδειγμα 4.2** Για την τραπεζοειδή διατομή από σκυρόδεμα (Manning  $n = 0.015$ ) που εικονίζεται παρακάτω ζητούνται:

- (α) Για κατά μήκος κλίσεις πυθμένα 0.01, 0.001 και παροχή 7 m<sup>3</sup>/s τα βάθη της ομοιόμορφης ροής.  
 (β) Να χαρακτηρίσετε τη ροή σαν υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη.



Απάντηση

(α) Σε τραπεζοειδή διώρυγα, από τη σχέση του Manning καταλήγουμε στην σχέση (4.10)

$$y = \frac{1}{b + Zy} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b + 2y\sqrt{1 + Z^2})^{2/3} \right]^{3/5}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τις γνωστές παραμέτρους και υποθέτοντας  $y_o = 1$  m κατ' αρχήν, το ομοιόμορφο βάθος προσδιορίζεται με διαδοχικές δοκιμές που φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Για  $Q = 7.0$  m<sup>3</sup>/s και  $J_o = 0.01$

| $y_o$ | $b$  | $Z$  | $n$   | $J_o$  | $Q$  | $y_1$        |
|-------|------|------|-------|--------|------|--------------|
| 1.000 | 2.50 | 1.00 | 0.015 | 0.0100 | 7.00 | 0.574        |
| 0.574 | 2.50 | 1.00 | 0.015 | 0.0100 | 7.00 | 0.590        |
| 0.590 | 2.50 | 1.00 | 0.015 | 0.0100 | 7.00 | <b>0.590</b> |

Επομένως  $y_o = 0.590$  m.

Εργαζόμενοι παρόμοια για την κλίση 0.001 βρίσκουμε ότι  $y_o = 1.135$  m.

(β) Για  $Q = 7.0$  m<sup>3</sup>/s και  $J_o = 0.01$  και  $y_o = 0.590$  m έχουμε ότι

$$T = b + 2Zy = 3.68\text{m}, A = (b + Zy)y = 1.82, D = A/T = 0.495\text{m}, V = Q/A = 3.85\text{m/s}$$

Επομένως  $Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = 1.745 > 1$ , υπερκρίσιμη ροή.

Παρόμοια, για  $Q = 7.0$  m<sup>3</sup>/s και  $J_o = 0.001$  και  $y_o = 1.135$  m έχουμε ότι

$$T = b + 2Zy = 4.77\text{m}, A = (b + Zy)y = 4.13, D = A/T = 1.16\text{m}, V = Q/A = 1.70\text{m/s}$$

Επομένως  $Fr = 0.503 < 1$ , υποκρίσιμη ροή.

**Παράδειγμα 4.3** Να υπολογίσετε το ομοιόμορφο βάθος σε κυκλικό αγωγό με τα ακόλουθα δεδομένα:  $Q = 0.10$  m<sup>3</sup>/s,  $d = 0.60$  m,  $J = 0.005$  και  $n = 0.016$ .

Απάντηση

Καταρτίζουμε τον πίνακα υπολογισμών

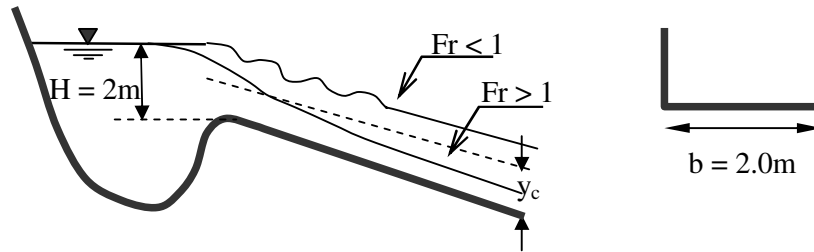
| $\theta_1$   | $Q$ | $d$ | $J$   | $n$   | $\theta_2$   | $y_o$        |
|--------------|-----|-----|-------|-------|--------------|--------------|
| 3.142        | 0.1 | 0.6 | 0.005 | 0.016 | 2.688        | 0.300        |
| 2.688        | 0.1 | 0.6 | 0.005 | 0.016 | 2.613        | 0.233        |
| 2.613        | 0.1 | 0.6 | 0.005 | 0.016 | 2.597        | 0.222        |
| 2.597        | 0.1 | 0.6 | 0.005 | 0.016 | 2.593        | 0.219        |
| 2.593        | 0.1 | 0.6 | 0.005 | 0.016 | 2.592        | 0.219        |
| <b>2.592</b> | 0.1 | 0.6 | 0.005 | 0.016 | <b>2.592</b> | <b>0.219</b> |

Επομένως, το ομοιόμορφο βάθος ροής είναι

$$y_o = 0.22 \text{ m.}$$

**Παράδειγμα 4.4** Διώρυγα με ορθογωνική διατομή όπως φαίνεται στο σχήμα, επενδυμένη με σκυρόδεμα ( $n$ -Manning=0.014) υδροδοτείται από ταμιευτήρα ανάντη.

Να υπολογιστούν οι παροχές  $Q_1$  και  $Q_2$  και τα κρίσιμα βάθη για κλίσεις της διώρυγας 0.01 και 0.001. Θεωρείστε συντελεστή απωλειών εισόδου  $K = 0.20$ .



Απάντηση

(α)  $J = 0.01$ . Έστω ότι η ροή στη διάωρυγα είναι υπερκρίσιμη. Αυτό σημαίνει ότι η ελεύθερη επιφάνεια κάπου κοντά στην είσοδο της διάωρυγας θα τμήσει τη γραμμή του κρίσιμου βάθους. Τότε η εξίσωση ενέργειας γράφεται ως εξής

$$H = y_c + \frac{V_c^2}{2g} + K \frac{V_c^2}{2g} = y_c + (1 + K) \frac{V_c^2}{2g} = 2.00 \text{ m.}$$

Σε ορθογωνικό αγωγό επίσης ισχύει η σχέση

$$Fr = \frac{V_c}{\sqrt{gD_c}} = \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \Rightarrow \frac{V_c^2}{gy_c} = 1.$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις απαλείφοντας το  $V_c$  έχουμε ότι

$$H = y_c + \frac{V_c^2}{2g} + K \frac{V_c^2}{2g} = y_c + (1 + K) \frac{y_c}{2} = (3 + K) \frac{y_c}{2}$$

και λύνοντας ως προς  $y_c$

$$y_c = \frac{2H}{(3 + K)} = 1.25 \text{ m.}$$

Η παροχή επομένως υπολογίζεται από τη σχέση

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} \Rightarrow Q = b(gy_c^3)^{1/2} = 8.754 \text{ m}^3/\text{s.}$$

Από τη σχέση (4.9) το ομοιόμορφο βάθος προκύπτει με διαδοχικές επαναλήψεις ότι είναι

$$y_o = 0.98 < 1.25 \text{ m.}$$

Η υπόθεσή μας λοιπόν ότι η ροή είναι υπερκρίσιμη είναι σωστή.

(β)  $J = 0.001$ . Έστω ότι η ροή στη διάωρυγα είναι υποκρίσιμη λόγω της μικρής κλίσης. Αυτό σημαίνει ότι το βάθος ροής κάπου κοντά στην είσοδο της διάωρυγας θα γίνει ομοιόμορφο. Τότε η εξίσωση ενέργειας γράφεται ως εξής

$$H = y + \frac{V^2}{2g} + K \frac{V^2}{2g} = y + (1 + K) \frac{V^2}{2g} = 2.00 \text{ m.}$$

Επίσης ισχύει και η εξίσωση του Manning

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2},$$

από την οποία αντικαθιστώντας την ταχύτητα στην εξίσωση ενέργειας έχουμε ότι

$$H = y + (1 + K) \frac{R^{4/3} J}{2gn^2} = y + (1 + K) \frac{\left(\frac{by}{b+2y}\right)^{4/3} J}{2gn^2} = 2.00 \text{ m.}$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει μετά από αντικατάσταση η επαναληπτική σχέση

$$y = 2 - (1 + K) \frac{\left(\frac{by}{b+2y}\right)^{4/3} J}{2gn^2} = 2 - 0.312 \left(\frac{y}{1+y}\right)^{4/3}$$

από την οποία μετά από δοκιμές προκύπτει ότι

$$y = 1.826 \text{ m.}$$

Η ταχύτητα από τη σχέση του Manning προκύπτει ότι είναι

$$V = 1.688 \text{ m/s}$$

και επομένως η παροχή

$$Q = 6.164 \text{ m}^3/\text{s.}$$

Το κρίσιμο βάθος υπολογίζεται κατά τα γνωστά

$$y_c = 0.99 \text{ m} < 1.826 \text{ m.}$$

Η υπόθεσή μας λοιπόν ότι η ροή είναι υποκρίσιμη είναι σωστή.

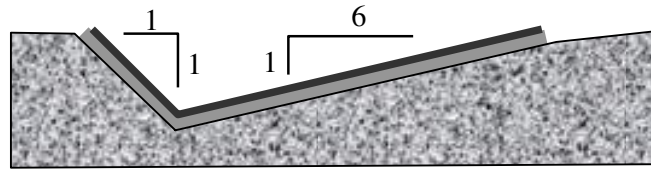
---

**Παράδειγμα 4.5** Για τη διατομή της τριγωνικής τάφρου από σκυρόδεμα (Manning  $n=0.016$ ) που εικονίζεται παραπάνω και εμφανίζεται στην οδοποιία, στο έρεισμα του δρόμου σε όρυγμα, ζητούνται:

(α) Για κατά μήκος κλίσεις πυθμένα 0.01 και 0.0001 και βάθος ομοιόμορφης ροής  $y_0=0.15 \text{ m}$ , οι παροχές που μεταφέρονται και τα αντίστοιχα κρίσιμα βάθη. Να χαρακτηριστεί η ροή σαν υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη για κάθε περίπτωση.

(β) Για παροχές  $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$  και  $0.005 \text{ m}^3/\text{s}$  και βάθος ομοιόμορφης ροής  $y_0=0.10 \text{ m}$  να προσδιοριστούν οι κατά μήκος κλίσεις  $J_0$ . Να χαρακτηριστεί η ροή σαν υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη για κάθε περίπτωση.

(γ) Να υπολογίσετε τα ομοιόμορφα βάθη για παροχές  $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$  και  $0.03 \text{ m}^3/\text{s}$  και κλίσεις πυθμένα 0.01 και 0.0001.



Απάντηση

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για την τριγωνική τάφρο του σχήματος

$$T = y + 6y = 7y$$

$$A = Ty/2 = 3.50 y^2$$

$$P = y (2^{1/2} + (36 + 1)^{1/2}) = 7.50 y$$

$$R = A/P = 0.467 y$$

$$D = A/T = 0.50 y$$

(α) Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων και δεδομένα τα  $y_0$ ,  $J$ ,  $n$  (και επομένως τα  $A$ ,  $R$ ) η παροχή υπολογίζεται από τη σχέση του Manning

$$Q = AV = \frac{A}{n} R^{2/3} J^{1/2}$$

Το κρίσιμο βάθος υπολογίζεται από τη σχέση  $Fr = 1$ , όπου για την τριγωνική τάφρο ισχύει

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{\frac{Q}{3.50y^2}}{\sqrt{g(0.50y)}} = 1 \Leftrightarrow y_c = \left( \frac{Q}{3.50\sqrt{0.50g}} \right)^{2/5}$$

Οι υπολογισμοί των παροχής και κρίσιμου βαθών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μαζί με το χαρακτηρισμό της ροής.

| $y_0$ | $J_0$  | $A$   | $P$   | $R$   | $V$   | $Q$          | $y_c$        | Χαρακτηρισμός |
|-------|--------|-------|-------|-------|-------|--------------|--------------|---------------|
| (m)   |        | (m)   | (m)   | (m)   | (m/s) | (l/s)        | (m)          | Ροής          |
| 0.15  | 0.0100 | 0.079 | 1.125 | 0.070 | 1.062 | <b>83.60</b> | <b>0.163</b> | Υπερκρίσιμη   |
| 0.15  | 0.0010 | 0.079 | 1.125 | 0.070 | 0.336 | <b>26.44</b> | <b>0.103</b> | Υποκρίσιμη    |
| 0.15  | 0.0001 | 0.079 | 1.125 | 0.070 | 0.106 | <b>8.36</b>  | <b>0.065</b> | Υποκρίσιμη    |

(β) Λύνουμε την εξίσωση του Manning ως προς  $J$ , ( $J = n^2 V^2 / R^{4/3}$ ) δεδομένου ότι όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι γνωστοί. Το κρίσιμο βάθος υπολογίζεται κατά τα γνωστά.

| y   | A     | P    | R     | Q     | V     | J <sub>o</sub> | y <sub>c</sub> | Χαρακτηρισμός |
|-----|-------|------|-------|-------|-------|----------------|----------------|---------------|
| (m) | (m)   | (m)  | (m)   | (l/s) | (m/s) |                | (m)            | Ροής          |
| 0.1 | 0.035 | 0.75 | 0.047 | 5     | 0.143 | <b>0.0003</b>  | <b>0.053</b>   | Υποκρίσιμη    |
| 0.1 | 0.035 | 0.75 | 0.047 | 50    | 1.429 | <b>0.0311</b>  | <b>0.133</b>   | Υπερκρίσιμη   |

(γ) Στην παραπάνω τριγωνική διατομή, το ομοιόμορφο βάθος υπολογίζεται από την εξίσωση του Manning λύνοντας ως προς y

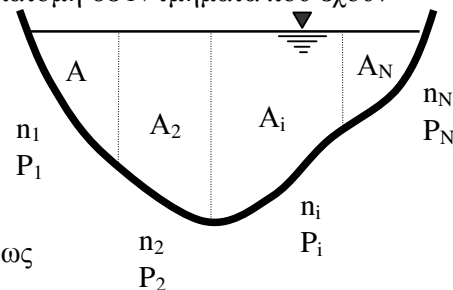
$$y = \left( \frac{nQ}{3.50(0.467)^{2/3} J^{1/2}} \right)^{3/8}$$

| Q (l/s) | n     | J <sub>o</sub> | y <sub>o</sub> (m) | Q (l/s) | n     | J <sub>o</sub> | y <sub>o</sub> (m) |
|---------|-------|----------------|--------------------|---------|-------|----------------|--------------------|
| 50      | 0.016 | 0.0100         | 0.124              | 30      | 0.016 | 0.0100         | 0.102              |
| 50      | 0.016 | 0.0010         | 0.190              | 30      | 0.016 | 0.0010         | 0.157              |
| 50      | 0.016 | 0.0001         | 0.293              | 30      | 0.016 | 0.0001         | 0.242              |

### 4.3. Σύνθετη τραχύτητα σε απλή διατομή

Πολλές φορές καλούμαστε να προσδιορίσουμε την μέση ταχύτητα ή την παροχαρακτηριστική μιας διατομής που δεν έχει ενιαίο συντελεστή τραχύτητας. Αυτό μπορεί να συμβεί είτε σε φυσικά υδατορρέυματα, είτε σε διευθετημένες κοίτες ποταμών στην ευρεία κοίτη των οποίων υπάρχει βλάστηση ή καλλιέργειες. Σε περίπτωση που ο υπό μελέτη (πρισματικός) ανοικτός αγωγός δεν έχει ενιαίο συντελεστή τραχύτητας στα τοιχώματά του, θα πρέπει να χωρίσουμε την υγρή διατομή σε τμήματα με ομοιόμορφο συντελεστή τραχύτητας και να εφαρμόσουμε τη σχέση του Manning ή οποιαδήποτε άλλη σχέση προσδιορισμού της ταχύτητας επιθυμούμε, σαν συνάρτηση των επί μέρους χαρακτηριστικών της υγρής διατομής. Στη συνέχεια παρθέτουμε μερικές από τις μεθόδους προσδιορισμού της σύνθετης τραχύτητας μιας διατομής, (French<sup>6</sup>, 1994) από τις επί μέρους αντίστοιχες. Αρχικά χωρίζουμε τη διατομή σε N τμήματα που έχουν

- (α) τραχύτητες  $n_1, n_2, \dots, n_N$
- (β) εμβαδά  $A_1, A_2, \dots, A_N$
- (γ) βρεχόμενες περιμέτρους  $P_1, P_2, \dots, P_N$
- (δ) μέσες ταχύτητες  $V_1, V_2, \dots, V_N$



Οι υδραυλικές ακτίνες είναι  $R_i = A_i / P_i$  και επομένως

$$V_1 = \frac{1}{n_1} R_1^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n_1} \left( \frac{A_1}{P_1} \right)^{2/3} J^{1/2}$$

<sup>6</sup> French, RH, 1994. Open-channel hydraulics. McGraw-Hill

$$V_2 = \frac{1}{n_2} R_2^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n_2} \left( \frac{A_2}{P_2} \right)^{2/3} J^{1/2}$$

.....

$$V_N = \frac{1}{n_N} R_N^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n_N} \left( \frac{A_N}{P_N} \right)^{2/3} J^{1/2}$$

Ισχύει ότι  $\Sigma A_i = A$ ,  $\Sigma P_i = P$ ,  $R = A/P$  και  $V = Q/A$ , όπου  $R$  και  $V$  είναι η υδραυλική ακτίνα και η μέση ταχύτητα ολόκληρης της διατομής. Θεωρούμε ότι η σύνθετη τραχύτητα της διατομής είναι  $n_e$ . Τότε από τη σχέση του Manning προκύπτει ότι

$$n_e = \frac{A^{5/3} J^{1/2}}{P^{2/3} Q}$$

(1) Μέθοδος των Horton<sup>7</sup> (1933), Einstein & Banks<sup>8</sup> (1950)

Υποθέτοντας ότι για τις επί μέρους ταχύτητες ισχύει

$$V_1 = V_2 = \dots = V_N = V$$

από τη σχέση του Manning για το τμήμα (i) του αγωγού προκύπτει ότι

$$A_i = \left( \frac{V_i n_i}{J^{1/2}} \right)^{3/2} \quad P_i = \left( \frac{V}{J^{1/2}} \right)^{3/2} n_i^{3/2} P_i$$

και επειδή  $A = \Sigma A_i$

$$A = \left( \frac{V}{J^{1/2}} \right)^{3/2} n_e^{3/2} P = \left( \frac{V}{J^{1/2}} \right)^{3/2} \sum_1^N n_i^{3/2} P_i$$

απ' όπου λύνοντας ως προς  $n_e$  προκύπτει η σχέση

$$n_e = \frac{\left( \sum_1^N P_i n_i^{3/2} \right)^{2/3}}{P^{2/3}} \quad (4.13)$$

(2) Υποθέτοντας ότι η **συνολική αντίσταση τριβών** εξισορροπείται από τις επί μέρους δυνάμεις

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_N$$

προκύπτει η σχέση

$$n_e = \frac{\sqrt{\sum_1^N P_i n_i^2}}{\sqrt{P}} \quad (4.14)$$

<sup>7</sup> Horton, RE, 1933. Separate roughness coefficients for channel bottom and sides. Engineering News Record, vol. III, no. 22, Nov. 30, pp. 652-653.

<sup>8</sup> Einstein, HA, & Banks, RB, 1950. Fluid resistance of composite roughness. Trans. Am. Geoph. Union, vol. 31, no. 4, pp. 603-610.

(3) Υποθέτοντας ότι η **συνολική παροχή είναι το άθροισμα των επί μέρους παροχών**

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$$

προκύπτει η σχέση

$$n_e = \frac{PR^{5/3}}{\sum_1^N \frac{P_i R_i^{5/3}}{n_i}} \quad (4.15)$$

(4) Στην περίπτωση **εργαστηριακών διωρύγων** (US Army Corps of Engineers, σύμφωνα με τον Cox<sup>9</sup>, 1973), χωρίζοντας την υγρή επιφάνεια σε τμήματα κατά κάποιο τρόπο (π.χ. διχοτομώντας τις γωνίες) και λαμβάνοντας τα αντίστοιχα εμβαδά

$$n_e = \frac{\sum_1^N A_i n_i}{A} \quad (4.16)$$

(5) ή **κατά Colebatch**

$$n_e = \frac{\left[ \sum_1^N A_i n_i^{3/2} \right]^{2/3}}{A^{2/3}} \quad (4.17)$$

#### 4.4. Υπολογισμός της ομοιόμορφης ροής σε σύνθετες διατομές

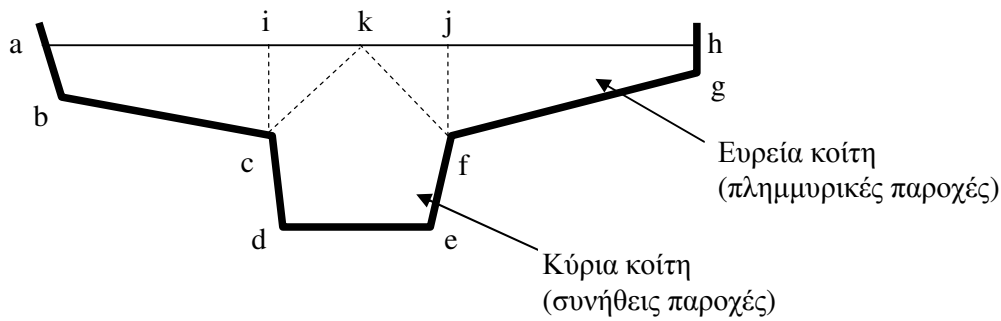
Σύνθετες διατομές θεωρούνται οι διατομές που περιλαμβάνουν την κύρια κοίτη καθώς και τμήματα της πλημμυρικής κοίτης σε φυσικά κυρίως υδατορρέυματα ή σε τεχνητές τάφρους με αναχώματα εκατέρωθεν. Το κυριότερο χαρακτηριστικό της ροής σε σύνθετες διατομές είναι η διαφορά που παρατηρείται στη μέση ανά τμήμα ταχύτητα λόγω της διαφορετικής ανά τμήμα υδραυλικής ακτίνας καθώς επίσης και της διαφορετικής τραχύτητας. Για παράδειγμα, στην ευρεία κοίτη ενός ποταμού η τραχύτητα είναι συνήθως κατά πολύ μεγαλύτερη από αυτή της κύριας κοίτης λόγω ύπαρξης δέντρων, θάμνων, κατασκευών όπως σπίτια, αποθήκες, κλπ. Στη συνέχεια παραθέτουμε τον υπολογισμό της παροχής με δεδομένο το βάθος ομοιόμορφης ροής σε μια σύνθετη διατομή.

**Παράδειγμα 4.6** Να υπολογίσετε την παροχή που μεταφέρεται από τη διατομή του σχήματος εάν η στάθμη νερού είναι δεδομένη. Να θεωρήσετε ότι ο συντελεστής τριβών είναι ενιαίος για όλες τις παρειές της διατομής και η κλίση τυθμένα δεδομένη.

---

<sup>9</sup> Cox, RG, 1973. Effective hydraulic roughness for channels having bed roughness different from bank roughness. Miscellaneous paper H-73-2, U.S. Army Engineers Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS.





(1) Κατ' αρχήν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα (μέση) είναι ίδια παντού. Κατά συνέπεια

$$R = \frac{A(abcdefgh)}{P(abcdefgh)}, \quad V = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} \quad \text{και} \quad Q = A V.$$

(2) Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κυρίως κοίτη είναι αυτή που περιβάλλεται από τα σημεία icdefj, όπου κατά μήκος των ic και fj υπάρχει διατμητική τάση (θεωρούνται σαν τμήματα της υγρής περιμέτρου της διατομής), ενώ τα τμήματα της πλημμυρικής κοίτης abcι και jfgh δεν εμφανίζουν διατμητικές τάσεις κατά μήκος των ic και fj αντίστοιχα. Τότε

$$R = \frac{A(icdefj)}{P(icdefj)}, \quad R_1 = \frac{A(abcι)}{P(abc)}, \quad R_2 = \frac{A(jfgh)}{P(fgh)}$$

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2}, \quad V_1 = \frac{1}{n} R_1^{2/3} J^{1/2}, \quad V_2 = \frac{1}{n} R_2^{2/3} J^{1/2} \quad \text{και}$$

$$Q = A V + A_1 V_1 + A_2 V_2.$$

(3) Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κυρίως κοίτη είναι αυτή της περίπτωσης (2) χωρίς διατμητικές τάσεις κατά μήκος των ic και fj αντίστοιχα τάση (τα ic και fj δεν θεωρούνται σαν τμήματα της υγρής περιμέτρου της διατομής). Τότε

$$R = \frac{A(icdefj)}{P(cdef)}, \quad R_1 = \frac{A(abcι)}{P(abc)}, \quad R_2 = \frac{A(jfgh)}{P(fgh)}$$

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2}, \quad V_1 = \frac{1}{n} R_1^{2/3} J^{1/2}, \quad V_2 = \frac{1}{n} R_2^{2/3} J^{1/2} \quad \text{και}$$

$$Q = A V + A_1 V_1 + A_2 V_2.$$

(4) Μπορούμε να χωρίσουμε την κοίτη στα τμήματα abck, kcdefk και kfgh χωρίς διατμητικές τάσεις κατά μήκος των kc και kf. Τότε

$$R_o = \frac{A_o(abcdefgh)}{P_o(abcdefgh)}$$

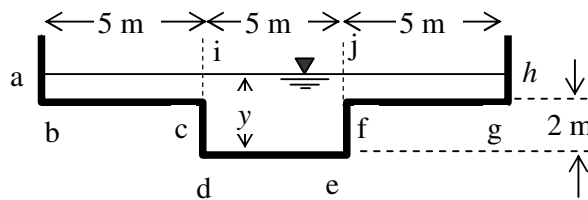
ή αθροίζοντας τις αντίστοιχες παροχές

$$R_o = \left( \frac{A_1^{5/3}(abck)/P_1(abc) + A_2^{5/3}(cdef)/P(cdef) + A_3^{5/3}(kfgh)/P(fgh)}{A_o(abcdefgh)} \right)^{3/2}$$

όπου

$$Q = \frac{1}{n} A_o R_o^{2/3} J^{1/2}.$$

**Παράδειγμα 4.7** Να υπολογίσετε το βάθος ροής για τη διατομή του σχήματος που μεταφέρει παροχή  $100 \text{ m}^3/\text{s}$ , έχει κλίση πυθμένα  $J=0.003$  και  $n = 0.02$ . Να θεωρήσετε ότι κατά μήκος των κατακόρυφων από το χείλος της κύριας κοίτης η διατμητική τάση είναι μηδενική.



Απάντηση

Η παροχετευτικότητα της κύριας κοίτης είναι ( $y = 2.0 \text{ m}$ ,  $R = 10/9 \text{ m}$ )

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{0.02} (10)(10/9)^{2/3} (0.003)^{1/2} = 29.38 \text{ m}^2/\text{s}$$

Το βάθος ροής επομένως θα είναι μεγαλύτερο από  $2.0 \text{ m}$ .

Η εύρεση του ομοιόμορφου βάθους ροής επιτυγχάνεται με δοκιμές θεωρώντας ένα βάθος ροής  $y$ , και υπολογίζοντας την παροχή από τη σχέση

$$Q = \frac{1}{n} (2A_1 R_1^{2/3} + AR^{2/3}) J^{1/2}$$

όπου

$$A_1 = 5(y-2), P_1 = (y-2) + 5, R_1 = A_1/P_1, A = 5y, P = 2+2+5 = 9\text{m}, R = A/P.$$

Η λύση (κατόπιν δοκιμών) είναι  $y = 3.236 \text{ m}$ .

Οι παροχές είναι  $65.50 \text{ m}^3/\text{s}$  και  $17.25 \text{ m}^3/\text{s}$  στην κύρια και πλημμυρική κοίτη εκατέρωθεν αντίστοιχα και οι αντίστοιχες μέσες ταχύτητες ροής είναι  $4.05 \text{ m/s}$  και  $2.79 \text{ m/s}$ .

## 5 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΠΕΝΔΥΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΝΕΠΕΝΔΥΤΩΝ ΔΙΩΡΥΓΩΝ ΣΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ

Επένδυση εφαρμόζεται σε ανοικτές διατομές (διώρυγες, κανάλια, κλπ) για πολλούς και διάφορους λόγους. Μερικοί απ' αυτούς συνοψίζονται σε (1) μείωση των απωλειών ενέργειας λόγω λείας επιφάνειας της διατομής, (2) αποφυγή της διάβρωσης εκεί όπου η ταχύτητα του νερού είναι μεγάλη, (3) μείωση των διαρροών προς τον υδροφόρο λόγω διαπερατών εδαφικών σχηματισμών, (4) οχετοί κάτω από δρόμους, (5) υπόγειοι αγωγοί ομβρίων και ακαθάρτων, οι οποίοι είναι σωλήνες κυρίως από σκυρόδεμα ή PVC, κλπ. Οι παράγοντες που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στο σχεδιασμό των επενδυμένων διωρύγων είναι συνοπτικά οι ακόλουθοι:

**Το υλικό επένδυσης (καθορισμός του  $n$  - Manning).** Σκοπός της επένδυσης είναι να εμποδίζεται η διάβρωση του εδάφους και να ελαχιστοποιείται (όπου χρειάζεται) η διήθηση του νερού στο έδαφος. Υλικά επένδυσης είναι τα ακόλουθα: σκυρόδεμα, σκυροκονιάματα, τσιμεντοκονίες, λιθοδομές, ξηρολιθοδομές, χόρτο, συρματοκιβώτια (σαραζανέτ), κ.ά.

**Η ελάχιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα.** Είναι η ταχύτητα που δεν επιτρέπει την επικάλυψη φερτών στη διώρυγα. Η συνήθης ελάχιστη ταχύτητα είναι 0.60 m/s, ή σε περίπτωση δεδομένης κοκκομετρίας φερτών υλών αυτή που προκύπτει από το διάγραμμα Shields.

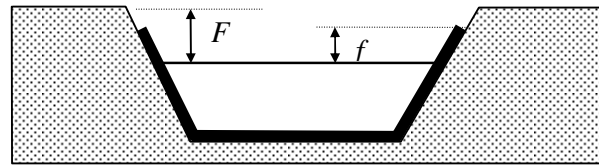
**Η κλίση πυθμένα.** Εξαρτάται από την τοπογραφία της περιοχής, το διαθέσιμο ύψος δυναμικής ενέργειας ή απαιτούμενο ύψος κινητικής ενέργειας και τη λειτουργία του έργου.

**Η κλίση των πρανών.** Εξαρτάται άμεσα από την ποιότητα του εδάφους στο οποίο θα γίνει η εκσκαφή. Επίσης εξαρτάται από το μέγεθος της διώρυγας και τη μέθοδο κατασκευής. Τυπικές τιμές της κλίσης των πρανών 1:Z, όπου Z είναι το οριζόντιο μήκος δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

| ΥΛΙΚΟ                          | ΚΛΙΣΗ Z      |
|--------------------------------|--------------|
| Βράχος                         | 1/5 έως 1/10 |
| Σκληρή άργιλος, γαιώδη εδάφη   | 1/2 έως 1    |
| Σκληρά εδάφη                   | 1/4          |
| Γαιώδη εδάφη με επένδυση λίθων | 1            |
| Συνεκτική άργιλος              | 3/2          |
| Χαλαρά αμμώδη εδάφη            | 2            |
| Αμμώδη εδάφη - πορώδης άργιλος | 3            |

### 5.1 Το ελεύθερο ύψος και το ύψος επένδυσης

Το ελεύθερο ύψος  $F$  είναι η απόσταση από την κορυφή της διώρυγας ως την ελεύθερη επιφάνεια. Πρέπει να επαρκεί για τις διακυμάνσεις της στάθμης ώστε να αποφεύγονται οι υπερχειλίσεις. Το ύψος επένδυσης  $f$  είναι η απόσταση του ανώτερου σημείου επένδυσης από την ελεύθερη επιφάνεια. Εξαρτάται από διάφορους παράγοντες όπως είναι το μέγεθος της διώρυγας, οι διακυμάνσεις της στάθμης που οφείλονται σε κυματισμούς ή σε ρυθμιστές ροής κλπ.



Σαν οδηγός για τον σχεδιασμό μπορεί να χρησιμοποιηθεί το διάγραμμα του US Bureau of Reclamation (βλ. διάγραμμα που ακολουθεί), που είναι απόρροια μεγάλης εμπειρίας κατασκευών στις ΗΠΑ και δίνει τα μεγέθη  $F$  και  $f$  σαν συνάρτηση της παροχής  $Q$ .

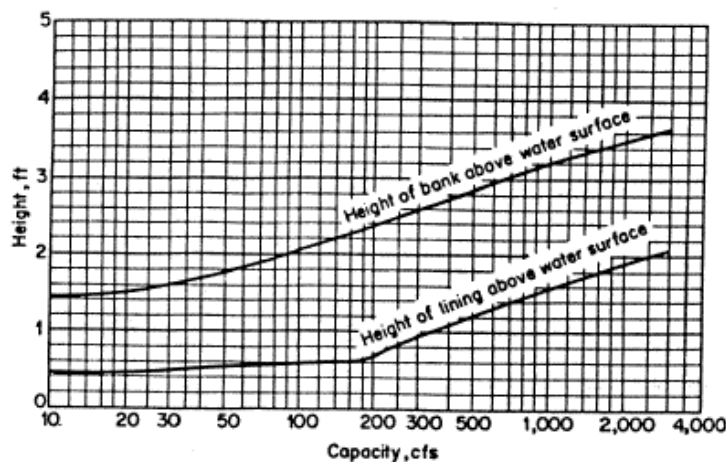


FIG. 7-1. Recommended freeboard and height of bank of lined channels. (U.S. Bureau of Reclamation.)

## 5.2 Η επιλογή βέλτιστης και οικονομικής διατομής

Η αρχή της υδραυλικά βέλτιστης διατομής εφαρμόζεται μόνο για επενδυμένες πρισματικές διώρυγες. Ισχύει η σχέση του Manning

$$Q = AV = \frac{1}{n} AR^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n} \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} J^{1/2} \quad (5.1)$$

Όταν η υδραυλική ακτίνα  $R$  αυξάνεται, τότε η παροχή  $Q$  αυξάνεται, ενώ όταν η βρεχόμενη περίμετρος  $P$  μειώνεται η παροχή  $Q$  αυξάνεται. Για δεδομένο εμβαδόν διατομής  $A$ , η διατομή με την ελάχιστη βρεχόμενη περίμετρο  $P$  που έχει τη μέγιστη παροχεταιυτικότητα (παροχή σχεδιασμού  $Q$ ) ονομάζεται **βέλτιστη διατομή**.

Μια διατομή πρέπει μεν να σχεδιάζεται σαν βέλτιστη, αλλά και να τροποποιείται για πρακτικούς λόγους. Για δεδομένη την παροχή  $Q$ , η βέλτιστη διατομή δίνει την ελάχιστη επιφάνεια, όχι όμως και την ελάχιστη εκσκαφή (που εξαρτάται από το πλάτος επιφάνειας της διώρυγας στο έδαφος).

Για δεδομένο γεωμετρικό σχήμα της διατομής το εμβαδόν και η βρεχόμενη περίμετρος σαν συνάρτηση της γεωμετρίας της διατομής γράφονται ως

$$A = A(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.2)$$

$$P = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.3)$$

όπου  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι ανεξάρτητες μεταβλητές (παράμετροι της διατομής). Η βρεχόμενη περίμετρος  $P$  ελαχιστοποιείται για δεδομένο εμβαδόν υγρής διατομής όταν  $dP = 0$ , δηλαδή

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial P}{\partial x_n} dx_n = 0. \quad (5.4)$$

Επίσης επειδή  $A = A_0$  δεδομένο (δεδομένη παροχή και μέση ταχύτητα ροής),  $dA = 0$ , δηλαδή

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial A}{\partial x_n} dx_n = 0. \quad (5.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση επί  $\lambda$  (Lagrange) και αφαιρώντας την από την πρώτη καταλήγουμε στην εξίσωση

$$dP - \lambda dA = \left( \frac{\partial P}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial P}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left( \frac{\partial P}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial A}{\partial x_n} \right) dx_n = 0 \quad (5.6)$$

Επειδή όμως  $dx_i \neq 0$ , καταλήγουμε στο σύστημα  $n+1$  εξισώσεων με  $n+1$  αγνώστους τους  $x_1, x_2, \dots, x_n$  και  $\lambda$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial A}{\partial x_2} = 0 \quad (5.7)$$

.....

$$\frac{\partial P}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial A}{\partial x_n} = 0$$

$$A - A_o = 0$$

Η παράμετρος  $\lambda$  ορίζεται από μια από τις παραπάνω εξισώσεις όπου  $\partial A / \partial x_k \neq 0$ . Στη συνέχεια απαλοίφοντας τον πολλαπλασιαστή Lagrange  $\lambda$ , καταλήγουμε στις σχέσεις που συνδέουν τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x_1, x_2, \dots$  και  $x_n$ .

Ως βέλτιστη ορθογωνική διατομή προκύπτει αυτή με λόγο πλάτους προς βάθος ροής 2:1, ενώ η βέλτιστη κυκλική είναι το ημικύκλιο.

**Παράδειγμα 5.1** Να ορίσετε την βέλτιστη ισοσκελή τραπεζοειδή διατομή.

Σε ένα τραπέζιο

$$A = A_o = (b + zy)y \text{ και } P = b + 2y\sqrt{1 + z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}(P - \lambda A) = 0 \Rightarrow 1 - \lambda y = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/y \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(P - \lambda A) = 0 \Rightarrow 2(1 + z^2)^{1/2} - \lambda(b + 2zy) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(P - \lambda A) = 0 \Rightarrow \frac{2zy}{(1 + z^2)^{1/2}} - \lambda y^2 = 0 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) αντικαθιστώντας τη σχέση (1) συνάγουμε ότι

$$z = \sqrt{3}/3 (= \tan 30^\circ) \text{ και } b = 2y/\sqrt{3}$$

Επομένως

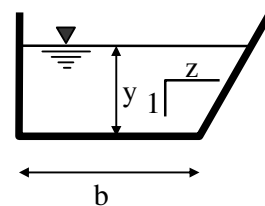
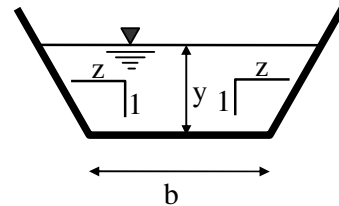
$$A = A_o = (b + zy)y = \sqrt{3}y^2, \quad P = b + 2y\sqrt{1 + z^2} = 2\sqrt{3}y \text{ και } R = A/P = y/2.$$

Τα παραπάνω μεγέθη αντιστοιχούν στο μισό εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο.

**Παράδειγμα 5.2** Να ορίσετε την βέλτιστη ημι-τραπεζοειδή διατομή του σχήματος.

Στην ημιτραπεζοειδή διατομή του σχήματος

$$A = A_o = (2b + zy) \frac{y}{2} \text{ και } P = b + y + y\sqrt{1 + z^2}$$



$$\frac{\partial}{\partial b}(P - \lambda A) = 0 \Rightarrow 1 - \lambda y = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/y \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(P - \lambda A) = 0 \Rightarrow 1 + (1 + z^2)^{1/2} - \lambda(b + zy) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(P - \lambda A) = 0 \Rightarrow \frac{zy}{(1 + z^2)^{1/2}} - \lambda \frac{y^2}{2} = 0 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) αντικαθιστώντας τη σχέση (1) συνάγουμε ότι

$$z = \sqrt{3}/3 (= \tan 30^\circ) \quad \text{και} \quad \frac{b}{y} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$$

Επομένως

$$A = A_o = (2b + zy) \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} y^2$$

$$P = b + y + y\sqrt{1 + z^2} = \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}} y$$

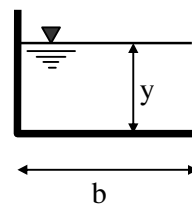
$$R = \frac{A}{P} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} + 3} y$$

**Παράδειγμα 5.3** Να ορίσετε την βέλτιστη ορθογωνική διατομή.

Σε ένα ορθογώνιο

$$A = A_o = by$$

$$P = b + 2y$$



$$\frac{\partial}{\partial b}(P - \lambda A) = 0 \Rightarrow 1 - \lambda y = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/y \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(P - \lambda A) = 0 \Rightarrow 2 - \lambda b = 0 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι  $b = 2y$ .

Επομένως,  $A = A_o = 2y^2$ ,  $P = 4y$  και  $R = y/2$ .

Παρόμοια, η βέλτιστη **ισοσκελής τριγωνική** διατομή είναι αυτή για την οποία  $Z=1$ .

### 5.3 Καθορισμός των διαστάσεων της διατομής

Περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

(1) Συλλογή στοιχείων, εκτίμηση του συντελεστή τριβών  $n$  και κλίσης πυθμένα  $J_o$ .

(2) Υπολογισμός κατά Manning του

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{J^{1/2}} ; Q = \text{παροχή σχεδιασμού}$$

(3) Έκφραση των μεγεθών  $A = A(y)$ ,  $R = R(y)$  ανάλογα και με τα υπόλοιπα στοιχεία της διατομής όπως  $b$ ,  $z$  κλπ.

(4) Χρήση της βέλτιστης διατομής όπου αυτή απαιτείται. Με δοκιμές προσδιορισμός του  $y$ .

(5) Για αρδευτικές διώρυγες το βάθος υπολογίζεται από εμπειρικούς τύπους όπως π.χ.  $y=0.50A^{1/2}$  ( $y$  σε ft,  $A$  σε  $\text{ft}^2$  και  $1\text{ft} = 0.3048\text{m}$ ). Για τραπεζοειδείς διώρυγες  $b/y=4-z$ , κλπ.

(6) Έλεγχος της ελάχιστης ταχύτητας αν είναι μεγαλύτερη από την ελάχιστη επιτρεπόμενη.

(7) Εκλογή των  $F$  και  $f$  από το διάγραμμα του USBR ( $1\text{ft} = 0.3048\text{ m}$ ,  $1\text{m}^3 = 35.31\text{ft}^3$ ).

**Παράδειγμα 5.2** Να προσδιορίσετε την βέλτιστη ορθογωνική διατομή από σκυρόδεμα όταν η κλίση πυθμένα είναι 0.01, ο συντελεστής Manning της διατομής 0.016 και η παροχή που μεταφέρεται είναι  $4\text{ m}^3/\text{s}$ . Η μέγιστη ταχύτητα στον αγωγό να μην υπερβαίνει τα  $6\text{ m/s}$ .

#### Απάντηση

Η βέλτιστη ορθογωνική διατομή είναι αυτή στην οποία το ομοιόμορφο βάθος είναι το 50% του πλάτους. Επομένως, θα πρέπει

$$y = b/2$$

$$A = by = b(0.50b) = 0.50b^2$$

$$P = b + 2y = 2b \text{ και}$$

$$R = A/P = 0.25b$$

δηλαδή

$$Q = \frac{A}{n} R^{2/3} J^{1/2} = \frac{0.50b^2}{n} (0.25b)^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow b = \left( \frac{1}{(0.50)(0.25)^{2/3}} \frac{Qn}{J^{1/2}} \right)^{3/8}$$

Επομένως  **$b = 1.55\text{ m}$** .

Όμως  **$V = Q/A = 4/(0.5 \times 1.55^2) = 3.44\text{m/s} < 6\text{m/s}$**  και  **$P = 3.10\text{m}$** .

Επιλέγουμε λοιπόν ένα αγωγό πλάτους  $b = 1.50\text{m}$ . (Το ομοιόμορφο βάθος που προκύπτει είναι  $y = 0.80\text{m}$ , η μέση ταχύτητα  $V=3.32\text{ m/s} < 6\text{ m/s}$  και η βρεχόμενη περίμετρος  $P = 3.10\text{ m}$  που δεν διαφέρει από τη βέλτιστη).



#### 5.4 Σχεδιασμός ανεπένδυτων ανοικτών αγωγών – τάφρων

Υπάρχουν μεγάλες δυσχέρειες στο σχεδιασμό επειδή η ευστάθεια της διατομής εξαρτάται κυρίως από τις ιδιότητες του εδάφους, παρά από την υδραυλική συμπεριφορά. Ακολουθούνται δύο μέθοδοι σχεδιασμού

(α) **Μέθοδος της επιτρεπόμενης ταχύτητας.** Είναι η μέγιστη ταχύτητα που δεν προκαλεί διάβρωση στη διατομή και καθορίζεται με κρίση ή από την εμπειρία. Οι παλαιότερες τάφροι ανθίστανται γενικά στη διάβρωση καλύτερα από τις καινούριες.

(β) **Η μέθοδος της συρτικής δύναμης** (διατμητικής τάσης) του ορίου. Η διατμητική τάση προκαλεί τη διάβρωση και μεταφορά φερτών και είναι

$$\tau = \tau_o = \rho g R J_o; R = A/P \quad (5.8)$$

Οι Fortier και Scobey<sup>10</sup> (1926) δημοσίευσαν πίνακα με τις μέγιστες επιτρεπόμενες ταχύτητες για ανεπένδυτες διατομές από διάφορα υλικά.

#### 5.5 Μέθοδος υπολογισμού.

Για δεδομένο υλικό εδάφους εκτιμούμε τα  $n$ ,  $Z$  και τη μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα  $\max V$ .

(1) Υπολογίζουμε κατόπιν την υδραυλική ακτίνα από τα  $n$  και  $J_o$

$$R = \left( \frac{nQ}{AJ^{1/2}} \right)^{3/2} \quad (5.9)$$

(2) Από  $Q = AV \Rightarrow A = Q/\max V$

(3) Με γνωστά τα  $R$  και  $A$  υπολογίζουμε τα  $y_o$ ,  $b$ .

(4) Από το διάγραμμα του ελεύθερου ύψους, τροποποιούμε τα παραπάνω μεγέθη κατά το δοκούν.

---

<sup>10</sup> Fortier, S & Scobey, FC, 1926. Permissible canal velocities. Trans. ASCE, vol. 89, pp. 940-984.

Αυτή η σελίδα έχει αφηθεί σκόπιμα λευκή.

## 6 ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ - ΒΑΘΜΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΡΟΗ (BMP)

### 6.1 Γενικά

Σε φυσικά υδατορρέυματα και τεχνητές διώρυγες κατά κανόνα ισχύουν τα εξής: (i) η ομοιόμορφη ροή δεν είναι πραγματοποιήσιμη, (ii) θεωρούμε ότι η μεταβολή του βάθους ροής κατά μήκος του αγωγού είναι μικρή και (iii) η ανάλυση της βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής είναι πρωταρχικής σημασίας στο σχεδιασμό των υδραυλικών έργων.

Για την ανάλυση της βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής (η οποία στο εξής θα αναφέρεται ως BMP), οι παραδοχές που κάνουμε είναι: (i) Η καμπύλωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι μικρή και η ροή θεωρείται πρακτικά ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ σε κάθε διατομή. Μπορούμε επομένως να χρησιμοποιούμε σαν υπολογιστικό εργαλείο τη μονοδιάστατη (ολοκληρωματική) ανάλυση. (ii) Θεωρούμε ότι η κλίση  $J_E$  της γραμμής ενέργειας σε κάθε διατομή μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων της ομοιόμορφης ροής, για δεδομένο βάθος (και κατά συνέπεια υδραυλική ακτίνα) της ροής από την σχέση του Manning

$$J_E = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}}. \quad (6.1)$$

Επί πλέον δεχόμαστε ότι (i) η κατά μήκος κλίση πυθμένα  $J_0$  είναι μικρή και επομένως  $y=t$ , (ii) η κατανομή ταχυτήτων είναι παρόμοια για κάθε βάθος ροής και επομένως ο διορθωτικός συντελεστής  $\alpha$  (συντελεστής συνόρθωσης κινητικής ενέργειας) στην εξίσωση ενέργειας θεωρείται ότι λαμβάνει σταθερή τιμή και (iii) ο συντελεστής τραχύτητας  $n$  είναι ανεξάρτητος από το βάθος ροής και σταθερός σε όλο το μήκος του

αγωγού. Η διαφορική εξίσωση της BMP προκύπτει από την εξίσωση ενέργειας σε μια διατομή ανοικτού αγωγού

$$H = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (6.2)$$

όπου  $H$  είναι το ύψος ενέργειας στη διατομή,  $z$  το υψόμετρο πυθμένα της διατομής από το επίπεδο αναφοράς,  $y$  το βάθος ροής στη διατομή,  $V$  η μέση ταχύτητα νερού στη διατομή,  $\alpha$  διορθωτικός συντελεστής λόγω ανομοιομορφίας του προφίλ ταχύτητας και  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Διαφορίζοντας την εξίσωση ενέργειας ως προς  $x$ , έχουμε ότι

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \alpha \frac{V^2}{2g} \right). \quad (6.3)$$

Για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι  $\alpha = 1$  χωρίς να επηρεάζεται η γενίκευση. Ορίζοντας επίσης  $J_E$  και  $J_o$  τις κλίσεις των γραμμικών απωλειών ενέργειας και πυθμένα αντίστοιχα

$$\frac{dH}{dx} = -J_E \quad \text{και} \quad \frac{dz}{dx} = -J_o$$

η παραπάνω εξίσωση μπορεί γράφεται (βλ. Κεφάλαιο 3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{J_o - J_E}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}} = \frac{J_o - J_E}{1 - Fr^2} \quad (6.4)$$

για δεδομένη παροχή  $Q$ .

Επειδή το βάθος ροής  $y$  στη BMP μεταβάλλεται, ορίζουμε τις ακόλουθες μορφές των καμπυλών της ελεύθερης επιφάνειας:

- εάν  $dy/dx = 0$  τότε  $J_o = J_E$  (ομοιόμορφη ροή)
- εάν  $dy/dx > 0$  τότε καμπύλη υπερύψωσης
- εάν  $dy/dx < 0$  τότε καμπύλη κατάπτωσης.

## 6.2 Διερεύνηση της διαφορικής εξίσωσης της BMP

Για τη διερεύνηση της διαφορικής εξίσωσης της BMP, θεωρούμε την απλούστερη δυνατή γεωμετρία διατομής δηλαδή την ορθογωνική διατομή μεγάλου πλάτους. Για τη διατομή αυτή ισχύουν τα εξής

$$B(y) = B = \text{σταθερά}, \quad (6.5)$$

$$A(y) = By, \quad (6.6)$$

$$P(y) = B + 2y \quad \text{και} \quad (6.7)$$

$$R(y) = A(y) / B(y) = \frac{By}{B + 2y}. \quad (6.8)$$

Θεωρούμε επίσης ότι όταν το πλάτος του αγωγού είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το βάθος ροής ( $B > 5y$ ),  $R(y) \approx y$  με μεγάλη ακρίβεια. Από τη σχέση του Manning, λύνοντας ως προς  $J_E$  προκύπτει ότι

$$J_E = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} = \frac{n^2 (Q/By)^2}{y^{4/3}} = \frac{n^2 Q^2}{B^2 y^{10/3}}. \quad (6.9)$$

Εάν η ροή είναι ομοιόμορφη

$$V_o = \frac{1}{n} R^{2/3} J_o^{1/2} = \frac{1}{n} y_o^{2/3} J_o^{1/2}$$

και από την παροχή του αγωγού προκύπτει

$$Q = A_o V_o = B y_o \frac{1}{n} y_o^{2/3} J_o^{1/2} = \frac{1}{n} B y_o^{5/3} J_o^{1/2} \Rightarrow J_o = \frac{n^2 Q^2}{B^2 y_o^{10/3}}. \quad (6.10)$$

Από τις σχέσεις (6.9) και (6.10) προκύπτει ότι

$$J_E = J_o \left( \frac{y_o}{y} \right)^{10/3} \quad (6.11)$$

Για δεδομένη παροχή ισχύει η συνθήκη κρίσιμου βάθους, δηλαδή

$$Fr^2 = \frac{V_c^2}{g y_c} = 1 \Rightarrow \frac{Q^2}{(B^2 y_c^2) g y_c} = 1 \Rightarrow Q^2 = B^2 g y_c^3 \quad (6.12)$$

και ο λόγος  $(Q^2 B)/(g A^3)$  γίνεται

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = \frac{(B^2 g y_c^3) B}{g (B y)^3} = \left( \frac{y_c}{y} \right)^3. \quad (6.13)$$

Τελικά η εξίσωση της BMP γράφεται ως εξής

$$\frac{dy}{dx} = J_o \frac{1 - \left( \frac{y_o}{y} \right)^{10/3}}{1 - \left( \frac{y_c}{y} \right)^3}. \quad (6.14)$$

Σημείωση: Σε περίπτωση κατά την οποία για την παραπάνω ανάλυση χρησιμοποιηθεί η σχέση του Chèzy, ο εκθέτης του αριθμητή στην παραπάνω εξίσωση γίνεται 3 αντί του 10/3, πράγμα το οποίο δεν επηρεάζει την ανάλυση που θα ακολουθήσει.

### 6.3 Καμπύλες (προφίλ) ελεύθερης επιφάνειας

Η κατά μήκος κλίση του πυθμένα του αγωγού μπορεί να είναι θετική ( $J_o = -dz/dx > 0$ ), αρνητική ή ανάστροφη ( $J_o = -dz/dx < 0$ ) και μηδενική ( $J_o = -dz/dx = 0$ ) όταν ο πυθμένας του αγωγού είναι οριζόντιος.

Για τις θετικές κλίσεις πυθμένα ( $J_o > 0$ ) και δεδομένη παροχή του αγωγού καθορίζουμε το ομοιόμορφο βάθος ροής  $y_o$ . Ορίζουμε σαν **κρίσιμη κλίση** του αγωγού  $J_c$ , την κλίση

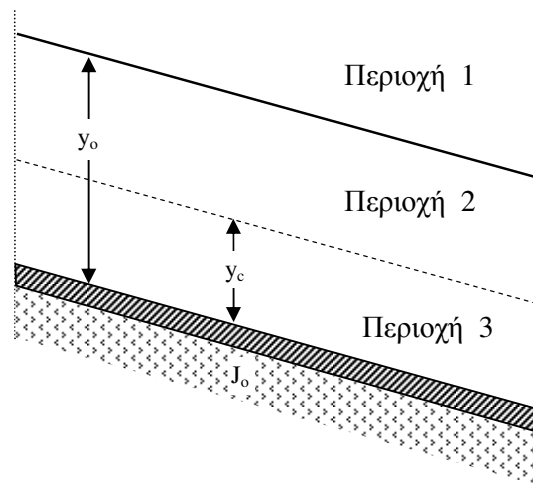
για την οποία το ομοιόμορφο βάθος ροής για συγκεκριμένη παροχή, συμπίπτει με το κρίσιμο βάθος ( $y_o=y_c$ ). Για όλες τις θετικές κλίσεις ( $J_o>0$ ) ισχύουν τα παρακάτω:

- Εάν  $J_o < J_c$ , τότε  $y_o > y_c$  και η κλίση είναι ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗ.
- Εάν  $J_o = J_c$ , τότε  $y_o = y_c$  και η κλίση είναι ΚΡΙΣΙΜΗ.
- Εάν  $J_o > J_c$ , τότε  $y_o < y_c$  και η κλίση είναι ΥΠΕΡΚΡΙΣΙΜΗ.

Οι καμπύλες (προφίλ) της ελεύθερης επιφάνειας που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις συμβολίζονται με τα αρχικά των αντίστοιχων κλίσεων (από την Αγγλική ορολογία) και φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

| Κλίση<br>πυθμένα | Χαρακτηρισμός<br>καμπύλης | Παρατηρήσεις                                   |
|------------------|---------------------------|--|
| $0 < J_o < J_c$  | καμπύλη <b>M</b>          | (από το Αγγλικό <b>Mild</b> = ήπια)            |
| $J_o = J_c$      | καμπύλη <b>C</b>          | (από το <b>Critical</b> = κρίσιμη)             |
| $J_o > J_c$      | καμπύλη <b>S</b>          | (από το <b>Supercritical</b> = υπερκρίσιμη)    |
| $J_o = 0$        | καμπύλη <b>H</b>          | (από το <b>Horizontal</b> = οριζόντιος αγωγός) |
| $J_o < 0$        | καμπύλη <b>A</b>          | (από το <b>Adverse</b> = ανάστροφη κλίση)      |

Για δεδομένη την κλίση, την παροχή και τη γεωμετρία της διατομής ενός ανοικτού αγωγού, μπορούμε να υπολογίσουμε το κρίσιμο και το ομοιόμορφο βάθος ροής με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια, τα οποία συνήθως διαφέρουν. Χαράζουμε τον πυθμένα του αγωγού με τη δεδομένη κλίση, ενώ στη συνέχεια χαράσουμε παράλληλα με τον πυθμένα τις γραμμές του κρίσιμου και ομοιόμορφου βάθους στις αντίστοιχες αποστάσεις όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί. Οι γραμμές του κρίσιμου και του ομοιόμορφου βάθους δεν συμπίπτουν εν γένει.



**Σχήμα 6.1** Περιοχές όπου μπορεί να βρίσκεται η ελεύθερη επιφάνεια.

Ο υποχώρος στον οποίο μπορεί να βρίσκεται η ελεύθερη επιφάνεια χωρίζεται επομένως σε τρεις περιοχές που ονομάζονται:

**Περιοχή 1** ανάμεσα στο ομοιόμορφο ή το κρίσιμο βάθος και το άπειρο

**Περιοχή 2** ανάμεσα στο κρίσιμο και το ομοιόμορφο βάθος και

**Περιοχή 3** ανάμεσα στον πυθμένα και το κρίσιμο ή το ομοιόμορφο βάθος

Η καμπύλη (προφίλ) της ελεύθερης επιφάνειας σε βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή ορίζεται με βάση την κλίση του πυθμένα από την οποία προσδιορίζεται ο τύπος της καμπύλης και δείκτη τον αριθμό του υποχώρου που βρίσκεται. Για παράδειγμα καμπύλη ελεύθερης επιφάνειας M2, σημαίνει υποκρίσιμη κλίση πυθμένα ( $J_0 < J_c$ ) και βάθος ροής στην Περιοχή 2, ανάμεσα στο ομοιόμορφο και το κρίσιμο ( $y_c < y < y_0$ ).

#### 6.4 Καμπύλες (προφίλ) της ελεύθερης επιφάνειας σε BMP

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η καμπύλη (προφίλ) της ελεύθερης επιφάνειας σε βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή (BMP) ορίζεται με βάση την κλίση του πυθμένα (για παράδειγμα καμπύλη M σε περίπτωση που  $J_0 < J_c$ ) και δείκτη τον αριθμό του υποχώρου που βρίσκεται (για παράδειγμα υποχώρος 2 σε περίπτωση που  $y_c < y < y_0$ ), και η καμπύλη της ελεύθερης επιφάνειας θα ονομάζεται M2.

*Γενικές παρατηρήσεις.*

- Για όλες τις θετικές κλίσεις  $J_0 > 0$ , από τη σχέση (6.14) προκύπτει ότι η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας  $dy/dx \rightarrow 0$  όταν  $y \rightarrow y_0$  και επομένως το προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας τείνει ασυμπτωτικά προς το ομοιόμορφο βάθος, δηλαδή η ελεύθερη επιφάνεια γίνεται παράλληλη με τον πυθμένα.
- Για όλες τις κλίσεις, όταν  $y \rightarrow y_c$  από τη σχέση (6.14) προκύπτει ότι η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας  $dy/dx \rightarrow \infty$ , δηλαδή η καμπύλη της ελεύθερης επιφάνειας τείνει προς τη γραμμή του κρίσιμου βάθους με κατακόρυφη εφαπτομένη.
- Η κλίση της γραμμής ενέργειας ορίζεται από τη σχέση (6.9)

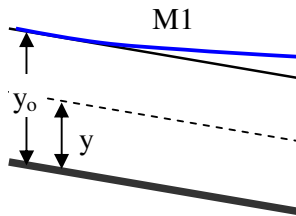
$$J_E = \frac{n^2 V^2}{y^{4/3}} = \frac{n^2 Q^2}{B^2} \frac{1}{y^{10/3}} \quad (6.15)$$

και είναι πάντοτε θετική. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε απώλειες ενέργειας κατά μήκος (διεύθυνση της ροής) του ανοικτού αγωγού.

- Όταν  $dy/dx > 0$  (καμπύλη υπερύψωσης) τότε από την εξίσωση (6.11) προκύπτει ότι η κλίση της γραμμής ενέργειας μειώνεται κατά μήκος του αγωγού και επομένως η γραμμή ενέργειας στρέφει τα κοίλα προς τα επάνω.
- Όταν  $dy/dx < 0$  (καμπύλη κατάπτωσης) τότε από την εξίσωση (6.11) προκύπτει ότι η κλίση της γραμμής ενέργειας αυξάνεται κατά μήκος του αγωγού και επομένως η γραμμή ενέργειας στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

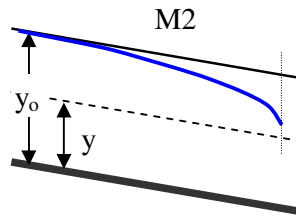
**6.5 Κατηγοριοποίηση των καμπυλών (profile) ελεύθερης επιφάνειας.**

1. Υποκρίσιμη κλίση πυθμένα  $0 < J_o < J_c$  ( $y_o > y_c$ ): **Καμπύλες M.**



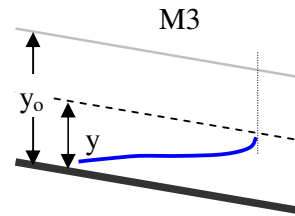
$y_c < y_o < y$   
 $dy/dx > 0$

καμπύλη υπερύψωσης M1



$y_c < y < y_o$   
 $dy/dx < 0$

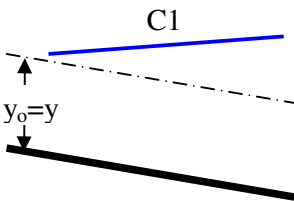
καμπύλη κατάπτωσης M2



$y < y_c < y_o$   
 $dy/dx > 0$

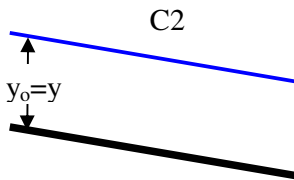
καμπύλη υπερύψωσης M3

2. Υποκρίσιμη κλίση πυθμένα  $J_o = J_c$  ( $y_o = y_c$ ), ο υποχώρος 2 δέν υπάρχει: **Καμπύλες C.**



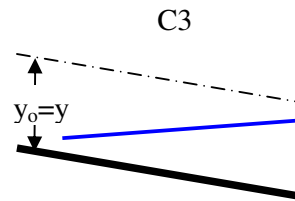
$y_c = y_o < y$   
 $dy/dx = J_o > 0$

καμπύλη υπερύψωσης C1



$y_c = y_o = y$   
 $dy/dx = 0$

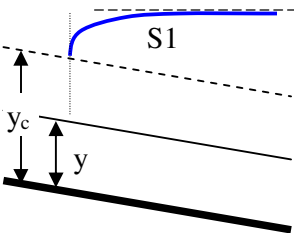
ομοιόμορφη ροή C2



$y < y_c = y_o$   
 $dy/dx = J_o > 0$

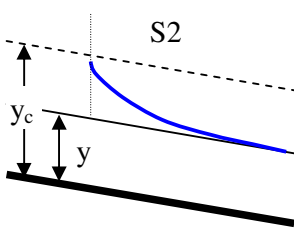
καμπύλη υπερύψωσης C3

3. Υποκρίσιμη κλίση πυθμένα  $0 < J_c < J_o$  ( $y_o < y_c$ ), **Καμπύλες S.**



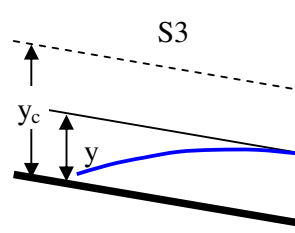
$y_o < y_c < y$   
 $dy/dx > 0$

καμπύλη υπερύψωσης S1



$y_o < y < y_c$   
 $dy/dx < 0$

καμπύλη κατάπτωσης S2



$y < y_o < y_c$   
 $dy/dx > 0$

καμπύλη υπερύψωσης S3



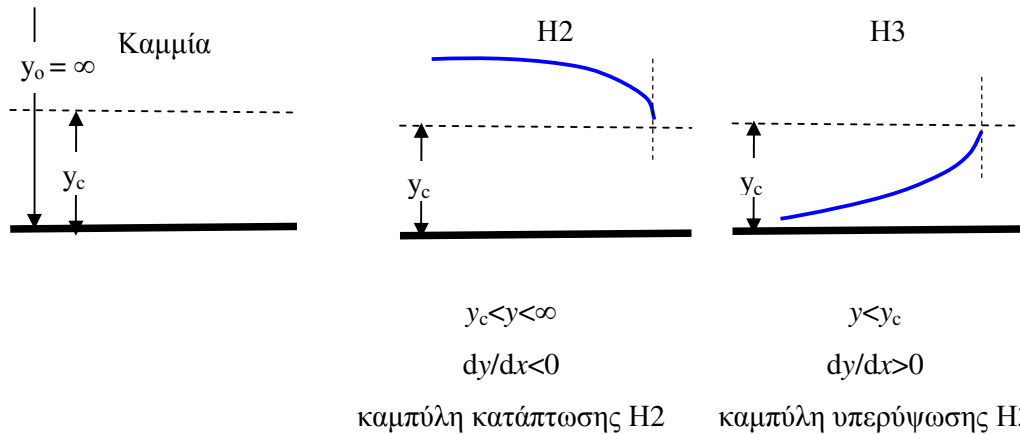
4. Μηδενική κλίση πυθμένα  $J_o=0$  ( $y_o \rightarrow \infty$  και δεν υπάρχει ο υποχώρος 1):  
**Καμπύλες Η.**

Ξεκινώντας από τη διαφορική εξίσωση (6.4) της BMP και αντικαθιστώντας  $J_o=0$ , έχουμε την Δ.Ε. της ελεύθερης επιφάνειας

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-J_E}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}} = \frac{-J_E}{1 - Fr^2}; Fr = \left( \frac{Q^2 B}{gA^3} \right)^{1/2}. \quad (6.16)$$

- Εάν  $J_o=J_E=0$ , τότε  $dy/dx=0$  δηλαδή  $y$ =σταθερό και δεν υπάρχει κίνηση.
- Εάν  $J_E \neq 0$  και  $y > y_c$  (υποκρίσιμη ροή) τότε  $Fr < 1$  και επομένως  $dy/dx < 0$  δηλαδή η καμπύλη της ελεύθερης επιφάνειας είναι καμπύλη κατάπτωσης.
- Εάν  $J_E \neq 0$  και  $y < y_c$  (υπερκρίσιμη ροή) τότε  $Fr > 1$  και επομένως  $dy/dx > 0$  δηλαδή η καμπύλη της ελεύθερης επιφάνειας είναι καμπύλη υπερύψωσης.

Η παραπάνω διερεύνηση φαίνεται πινακοποιημένη στον πίνακα που ακολουθεί.



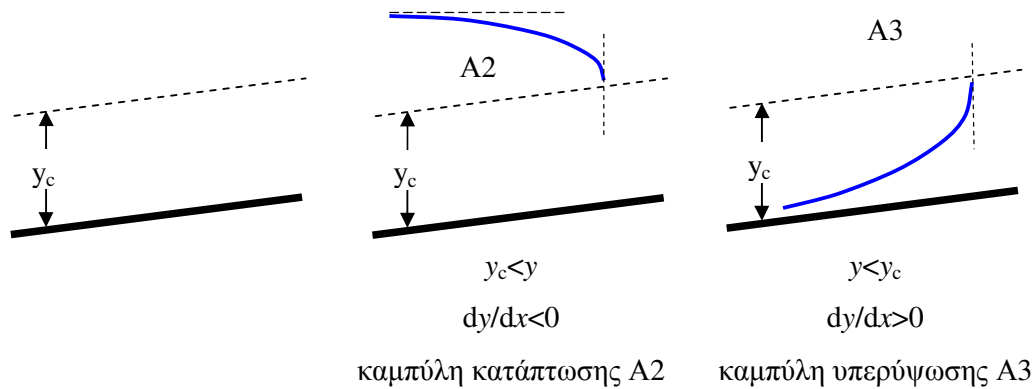
5. Ανάστροφη κλίση πυθμένα  $J_o < 0$  (δεν υπάρχουν  $y_o$  και ο υποχώρος 1):  
**Καμπύλες Α.**

Ξεκινώντας από τη διαφορική εξίσωση (6.4) της BMP και για  $J_o < 0$ , στη διαφορική εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας ο αριθμητής είναι αρνητικός αριθμός ( $J_E > 0$ )

$$\frac{dy}{dx} = \frac{J_o - J_E}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}} = \frac{J_o - J_E}{1 - Fr^2}; Fr = \left( \frac{Q^2 B}{gA^3} \right)^{1/2}. \quad (6.17)$$

- Εάν  $y > y_c$  (υποκρίσιμη ροή) τότε  $Fr < 1$  και επομένως  $dy/dx < 0$  δηλαδή η καμπύλη της ελεύθερης επιφάνειας είναι καμπύλη κατάπτωσης.
- Εάν  $y < y_c$  (υπερκρίσιμη ροή) τότε  $Fr > 1$  και επομένως  $dy/dx > 0$  δηλαδή η καμπύλη της ελεύθερης επιφάνειας είναι καμπύλη υπερύψωσης.

Η παραπάνω διερεύνηση φαίνεται πινακοποιημένη στον πίνακα που ακολουθεί.



**Παρατήρηση:** Στις περιοχές (1) και (3) οι καμπύλες της ελεύθερης επιφάνειας είναι πάντοτε καμπύλες υπερύψωσης, ενώ στην περιοχή (2) πάντοτε καμπύλες κατάπτωσης, ανεξαρτήτως από την κλίση του ανοικτού αγωγού.

### 6.6 Μορφές της ελεύθερης επιφάνειας σε κατά τμήματα πρισματικό αγωγό.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας όταν κατά μήκος ενός πρισματικού αγωγού υπάρχουν αλλαγές κλίσης. Θεωρούμε ένα αγωγό με αλλαγή κλίσης σε κάποιο σημείο του. Θα εξετάσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

**Περίπτωση 1.** Ανάντη κλίση είναι υποκρίσιμη ( $J_1 < J_c$ ).

1.  $J_2 < J_1 < J_c$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $y_2 > y_1$ . Επομένως, η μετάβαση από το ομοιόμορφο βάθος  $y_2$  κατάντη στο ομοιόμορφο βάθος  $y_1$  ανάντη θα πρέπει να γίνει ασυμπτωτικά με μια καμπύλη M1. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν η μετάβαση γίνει από  $y_1$  ή άλλο βάθος ( $y < y_2$ ) ανάντη σε  $y_2$  κατάντη, θα έχουμε μια μεταβατική καμπύλη M2 υπερύψωσης, πράγμα που είναι άτοπο διότι οι καμπύλες M2 είναι καμπύλες κατάπτωσης.
2.  $J_1 < J_2 < J_c$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $y_1 > y_2$ . Επομένως, η μετάβαση από το ομοιόμορφο βάθος  $y_2$  κατάντη στο ομοιόμορφο βάθος  $y_1$  ανάντη θα πρέπει να γίνει ασυμπτωτικά με μια καμπύλη M2. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν η μετάβαση γίνει από  $y_1$  ή άλλο βάθος ( $y > y_2$ ) ανάντη σε  $y_2$  κατάντη, θα έχουμε μια μεταβατική καμπύλη M1 κατάπτωσης, πράγμα που είναι άτοπο διότι οι καμπύλες M1 είναι καμπύλες υπερύψωσης.
3.  $J_1 < J_2 = J_c$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $y_1 > y_2 = y_c$ . Επομένως, η μετάβαση από το ομοιόμορφο και κρίσιμο βάθος  $y_c$  κατάντη στο ομοιόμορφο βάθος  $y_1$  ανάντη θα γίνει ασυμπτωτικά με μια καμπύλη M2.
4.  $J_1 < J_c < J_2$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $y_1 > y_c > y_2$ . Επομένως, η μετάβαση από το ομοιόμορφο βάθος  $y_1$  ανάντη στο ομοιόμορφο βάθος  $y_2$  κατάντη θα γίνει ασυμπτωτικά με δύο καμπύλες: καμπύλη M2 κατάπτωσης ανάντη και καμπύλη S2 κατάπτωσης κατάντη, ενώ στο σημείο αλλαγής της κλίσης η ελεύθερη επιφάνεια θα διέλθει από το κρίσιμο βάθος.

Τα παραπάνω φαίνονται στα διαγράμματα που ακολουθούν.

|  |  |  |
|--|--|--|
|  | <p><math>y=y_2</math></p>  | <p><math>J_2 &lt; J_1 &lt; J_c</math><br/> <math>y_c &lt; y_1 &lt; y_2</math><br/>                     M1 ανάντη αλλαγής κλίσης</p>  |
|  | <p><math>y=y_2</math></p>  | <p><math>J_1 &lt; J_2 &lt; J_c</math><br/> <math>y_c &lt; y_2 &lt; y_1</math><br/>                     M2 ανάντη αλλαγής κλίσης</p>  |
|  | <p><math>y=y_2=y_c</math></p>  | <p><math>J_1 &lt; J_2 = J_c</math><br/> <math>y_c = y_2 &lt; y_1</math><br/>                     M2 ανάντη αλλαγής κλίσης</p>  |
|  | <p>S2</p>  | <p><math>J_1 &lt; J_c &lt; J_2</math><br/> <math>y_2 &lt; y_c &lt; y_1</math><br/>                     M2 ανάντη αλλαγής κλίσης<br/>                     S2 κατάντη αλλαγής κλίσης</p> |
|  | <p><math>H \geq y_0</math><br/> <math>H &gt; y_c</math><br/> <math>H &lt; y_c</math></p> | <p><u>Πτώση</u> <math>J_0 &lt; J_c</math><br/>                     Εάν <math>H &gt; y_0</math> τότε M1<br/>                     Εάν <math>H \leq y_0</math> τότε M2</p>                |

5. Πτώση με  $J_1 < J_c$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $y_0 > y_c$ . Επομένως, εάν η στάθμη  $H$  του αποδέκτη στο σημείο εκβολής της διώρυγας βρίσκεται χαμηλότερα από το κρίσιμο βάθος της ροής, τότε θα έχουμε ελεύθερη πτώση

δηλαδή  $y=y_c$ , η δε μετάβαση στο ομοιόμορφο βάθος  $y_0$  ανάντη θα γίνεται με μια καμπύλη M2. Εάν η στάθμη  $H$  του αποδέκτη στο σημείο εκβολής της διώρυγας είναι  $y_c < H < y_0$ , τότε υπάρχει ομαλή μετάβαση από το βάθος  $y$  στην εκβολή στο βάθος  $y_0$  με καμπύλη M2. Εάν η στάθμη  $H$  του αποδέκτη στο σημείο εκβολής της διώρυγας είναι  $H > y_0$ , τότε υπάρχει ομαλή μετάβαση από το βάθος  $y$  στην εκβολή στο βάθος  $y_0$  με καμπύλη M1.

Παρατήρηση: Σε πολλές περιπτώσεις, ενώ η κλίση πρισματικών αγωγών είναι ενιαία, έχουμε κατά τμήμα μεταβολή του συντελεστή τραχύτητας του αγωγού λόγω μεταβολής του υλικού των τοιχωμάτων του αγωγού. Αυτή η μεταβολή ισοδυναμεί με ‘αλλαγή κλίσης’, δεδομένου ότι εάν για παράδειγμα η διατομή από βραχώδης γίνει διατομή με σκυρόδεμα, η μεταβολή από  $n=0.025$  σε  $n=0.014$  πιθανά θα αντιστοιχεί σε μεταβολή από υποκρίσιμη σε υπερκρίσιμη ροή (βλ. Παράδειγμα 6.2).

**Περίπτωση 2.** Ανάντη κλίση είναι υπερκρίσιμη ( $J_1 > J_c$ ).

1.  $J_1 > J_c > J_2$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $y_1 < y_c$  και  $y_2 > y_c$ . Επομένως, η μετάβαση από το ομοιόμορφο βάθος  $y_1$  ανάντη στο ομοιόμορφο βάθος  $y_2$  κατάντη θα γίνει με ένα υδραυλικό άλμα επειδή έχω μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή. Η θέση του υδραυλικού άλματος καθορίζεται αφού υπολογίσω τα συζυγή βάθη  $y_{1\sigma}$  και  $y_{2\sigma}$  των  $y_1$  και  $y_2$  αντίστοιχα.

(α) Εάν  $y_{1\sigma} = y_2$ , τότε το άλμα θα συμβεί στο σημείο αλλαγής της κλίσης.

(β) Εάν  $y_{1\sigma} < y_2$ , τότε τό άλμα θα συμβεί στα ανάντη του σημείου αλλαγής της κλίσης, θα έχουμε δε μετάβαση από το βάθος  $y_{1\sigma}$  στο  $y_2$  με μία καμπύλη S1.

(γ) Εάν  $y_{1\sigma} > y_2$ , τότε τό άλμα θα συμβεί στα κατάντη του σημείου αλλαγής της κλίσης, θα έχουμε δε μετάβαση από το βάθος  $y_1$  στο  $y_{2\sigma}$  με μία καμπύλη M3.

2.  $J_1 > J_2 = J_c$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $y_1 < y_2 = y_c$ . Επομένως, η μετάβαση από το ομοιόμορφο βάθος  $y_1$  ανάντη στο ομοιόμορφο (κρίσιμο) βάθος  $y_c$  κατάντη θα γίνει με μια καμπύλη C3.

3.  $J_1 > J_2 > J_c$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $y_1 < y_2 < y_c$ . Επομένως, η μετάβαση από το ομοιόμορφο βάθος  $y_1$  ανάντη στο ομοιόμορφο βάθος  $y_2$  κατάντη θα γίνει με μια καμπύλη S3.

4.  $J_1 < J_2 > J_c$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $y_c > y_1 > y_2$ . Επομένως, η μετάβαση από το ομοιόμορφο βάθος  $y_1$  ανάντη στο ομοιόμορφο βάθος  $y_2$  κατάντη θα γίνει με μια καμπύλη S2.

5. Πτώση με  $J > J_c$

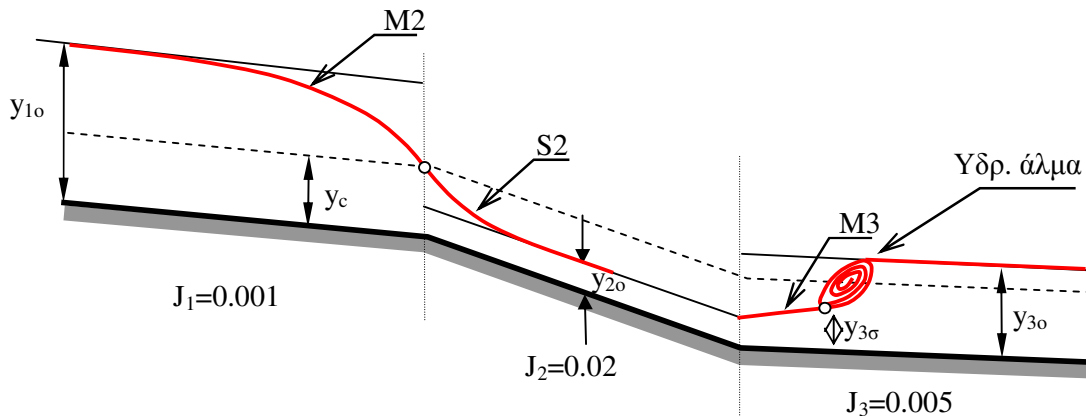
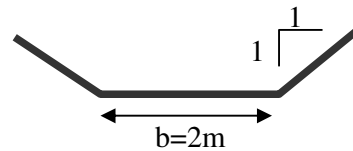
|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  | <p><math>J_2 &lt; J_c &lt; J_1</math></p> <p>Υδραυλικό άλμα</p> <p>Αν <math>y_{1\sigma} &gt; y_2</math> άλμα κατάντη (καμπύλη M3)</p> <p>Αν <math>y_{1\sigma} &lt; y_2</math> άλμα ανάντη (καμπύλη S1)</p> <p>Αν <math>y_{1\sigma} = y_2</math> άλμα στην αλλαγή κλίσης</p>                        |
|  |  | <p><math>J_2 = J_c &lt; J_1</math></p> <p>Καμπύλη C3 κατάντη αλλαγής κλίσης</p>  |
|  |  | <p><math>J_c &lt; J_2 &lt; J_1</math></p> <p>Καμπύλη S3 κατάντη αλλαγής κλίσης</p>   |
|  |  | <p><math>J_c &lt; J_1 &lt; J_2</math></p> <p>Καμπύλη S2 κατάντη αλλαγής κλίσης</p>   |
|  | <p><math>H &gt; y_\sigma</math></p> <p><math>H &lt; y_\sigma</math></p> <p><math>H &lt; y_0</math></p> | <p><u>Πτώση <math>J &gt; J_c</math></u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Εάν <math>H &gt; y_\sigma</math> τότε S1</li> <li>• Εάν <math>y_0 &lt; H &lt; y_\sigma</math> τότε εμφανίζεται ατελές υδραυλικό άλμα</li> <li>• Εάν <math>H &lt; y_0</math> τότε εμφανίζεται πτώση</li> </ul> |

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $y_o < y_c$ . Επομένως, εάν η στάθμη του αποδέκτη  $H$  στο σημείο εκβολής της διώρυγας βρίσκεται χαμηλότερα από το ομοιόμορφο βάθος ροής, τότε θα έχουμε ελεύθερη πτώση δηλαδή  $y=y_o$ . Εάν η στάθμη  $H$  του αποδέκτη στο σημείο εκβολής της διώρυγας βρίσκεται ψηλότερα από το  $y_o$ , τότε έχουμε υδραυλικό άλμα ανάντη και καμπύλη S1. Εάν  $y_o < H < y_c$ , τότε εμφανίζεται ένα ατελές υδραυλικό άλμα.

Για περαιτέρω περιπτώσεις αλλαγών κλίσης βλ. VT Chow (1973).

**Παράδειγμα 6.1** Αποχετευτική τάφρος με τραπεζοειδή διατομή που φαίνεται στο σχήμα, ανεπένδυτη ( $n$ -Manning=0.025) διοχετεύει παροχή  $Q = 5 \text{ m}^3/\text{s}$ . Για τη μηκοτομή που δίνεται παρακάτω με ικανό κατά τμήμα μήκος για ομοιόμορφη ροή:

- (1) Να καθοριστούν τα βάθη της ομοιόμορφης ροής για κάθε τμήμα.
- (2) Να χαραχθούν σε σκαρίφημα και να αιτιολογηθούν πλήρως οι καμπύλες της ελεύθερης επιφάνειας του νερού.



Απάντηση

(α) Υπολογίζουμε το κρίσιμο βάθος και τα ομοιόμορφα βάθη για κάθε μια κλίση κατά τα γνωστά. Οι υπολογισμοί φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| Q    | Z    | n     | b    | $J_o$  | $y_c$       | V    | $y_o$       |
|------|------|-------|------|--------|-------------|------|-------------|
| 5.00 | 1.00 | 0.025 | 2.00 | 0.0010 | <b>0.75</b> | 1.08 | <b>1.37</b> |
| 5.00 | 1.00 | 0.025 | 2.00 | 0.0200 | <b>0.75</b> | 3.19 | <b>0.60</b> |
| 5.00 | 1.00 | 0.025 | 2.00 | 0.0050 | <b>0.75</b> | 1.94 | <b>0.89</b> |

(β) Προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας

- |               |                               |               |           |
|---------------|-------------------------------|---------------|-----------|
| $J_1 = 0.001$ | $y_o > y_c$ ( $1.37 > 0.75$ ) | $\Rightarrow$ | Καμπύλη M |
| $J_2 = 0.02$  | $y_o < y_c$ ( $0.60 < 0.75$ ) | $\Rightarrow$ | Καμπύλη S |
| $J_3 = 0.005$ | $y_o > y_c$ ( $0.89 > 0.75$ ) | $\Rightarrow$ | Καμπύλη M |

Επομένως:

- Στο σημείο αλλαγής κλίσης από  $J_1$  σε  $J_2$  (υποκρίσιμη σε υπερκρίσιμη)  $y=y_c=0.75$  m. Η καμπύλη BMP στο τμήμα 1 θα είναι **M2**.
- Η καμπύλη BMP στο τμήμα 2 θα είναι **S2** (κατάπτωσης) μέχρις ότου το βάθος ροής γίνει ομοιόμορφο (0.60 m).
- Από το τμήμα 2 στο τμήμα 3 έχω μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή, επομένως θα εμφανιστεί υδραυλικό άλμα. Η θέση του άλματος καθορίζεται από τα συζυγή βάθη. Υπολογίζω το συζυγές του  $y_{o2}$  (ομοιόμορφου βάθους του τμήματος 2)  $y_{2o}=0.93$  m  $>$   $y_{3o}=0.89$  m, στον πίνακα που ακολουθεί. Επομένως, το άλμα θα γίνει κατάντη του σημείου αλλαγής κλίσης, μετά την καμπύλη BMP **M3**. Στη συνέχεια η ροή θα είναι **ομοιόμορφη** με βάθος  $y_{3o}=0.89$  m.

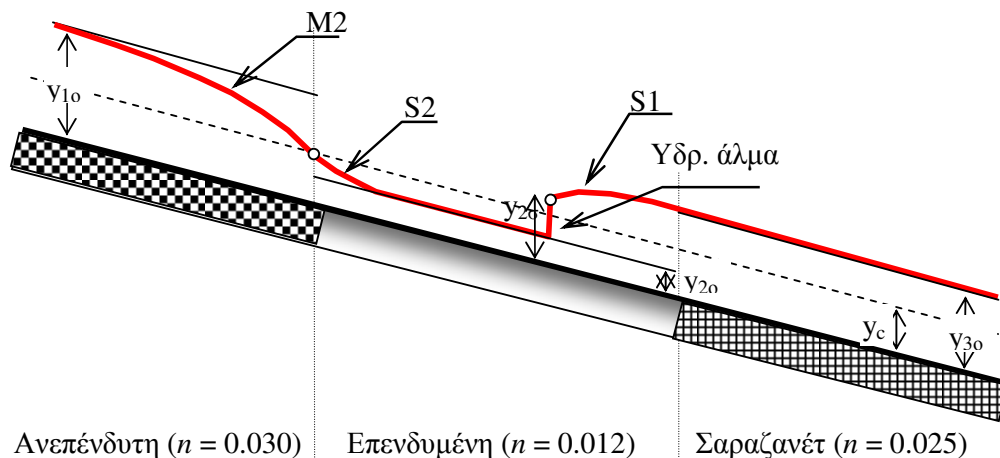
Συζυγή βάθη υπερκρίσιμης κλίσης

| $y_o$ 1,2       | B(m) | Z | T (m) | $y_{bar}$ | Q(m <sup>3</sup> /s) | A (m <sup>2</sup> ) | V (m/s) | M            |
|-----------------|------|---|-------|-----------|----------------------|---------------------|---------|--------------|
| $y_2 = 0.60$    | 2    | 1 | 3.21  | 0.2780    | 5.00                 | 1.57                | 3.19    | <b>2.061</b> |
| $y_{2o} = 0.93$ | 2    | 1 | 3.85  | 0.4137    | 5.00                 | 2.71                | 1.85    | <b>2.061</b> |
| $y_3 = 0.89$    | 2    | 1 | 3.78  | 0.3993    | 5.00                 | 2.57                | 1.94    | 2.018        |

Οι καμπύλες της ελεύθερης επιφάνειας φαίνονται στο σκαρίφημα του σχήματος παραπάνω.

**Παράδειγμα 6.2** Ανοικτός αγωγός με σταθερή ορθογωνική διατομή  $b = 3$  m, μεγάλων κατά τμήμα μηκών, χαράσσεται με ενιαία κλίση πυθμένα  $J_o = 0.005$ . Το ανάντη τμήμα χαράσσεται σε βράχο ( $n = 0.030$ ), ενώ το επόμενο τμήμα όπου το έδαφος δεν είναι ανθεκτικό, επενδύεται με σκυρόδεμα ( $n = 0.012$ ). Τέλος, το κατάντη τμήμα επενδύεται με συρματοκιβώτια (σαραζανέτ  $n = 0.025$ ).

Να διερευνηθεί ποιοτικά και να δοθεί σε σκαρίφημα η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για παροχή  $Q = 15$  m<sup>3</sup>/s.



Απάντηση

(α) Υπολογίζουμε το κρίσιμο βάθος και τα ομοιόμορφα βάθη για κάθε τμήμα χρησιμοποιώντας διαφορετικούς συντελεστές  $n$  κατά τα γνωστά. Οι υπολογισμοί φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| Q     | B    | Z    | $J_o$ | n     | $y_c$        | V           | $y_o$       |
|-------|------|------|-------|-------|--------------|-------------|-------------|
| 15.00 | 3.00 | 0.00 | 0.005 | 0.030 | <b>1.366</b> | <b>2.20</b> | <b>2.27</b> |
| 15.00 | 3.00 | 0.00 | 0.005 | 0.012 | <b>1.366</b> | <b>4.40</b> | <b>1.14</b> |
| 15.00 | 3.00 | 0.00 | 0.005 | 0.025 | <b>1.366</b> | <b>2.54</b> | <b>1.97</b> |

(β) Προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας

1<sup>ο</sup> Τμήμα ( $n=0.030$ )  $y_o > y_c$  ( $2.27 > 1.37$ )  $\Rightarrow$  Καμπύλη M

2<sup>ο</sup> Τμήμα ( $n=0.012$ )  $y_o < y_c$  ( $1.14 < 1.37$ )  $\Rightarrow$  Καμπύλη S

3<sup>ο</sup> Τμήμα ( $n=0.025$ )  $y_o > y_c$  ( $1.97 > 1.37$ )  $\Rightarrow$  Καμπύλη M

Επομένως:

- Στο σημείο αλλαγής τραχύτητας από  $n_1$  σε  $n_2$  (υποκρίσιμη σε υπερκρίσιμη)  $y=y_c=1.37\text{m}$ . Η καμπύλη BMP στο τμήμα 1 θα είναι **M2**.
- Η καμπύλη BMP στο τμήμα 2 θα είναι **S2** (κατάπτωσης) μέχρις ότου το βάθος ροής γίνει ομοιόμορφο (1.14m).
- Από το 2<sup>ο</sup> τμήμα στο 3<sup>ο</sup> τμήμα έχω μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή, επομένως θα εμφανιστεί υδραυλικό άλμα. Η θέση του άλματος καθορίζεται από τα συζυγή βάθη. Από τη σχέση (3.25) υπολογίζω το συζυγές του  $y_{o2}$  (ομοιόμορφου βάθους του 2<sup>ου</sup> τμήματος)  $y_{2o}=1.626\text{ m} < y_{3o}=1.97\text{ m}$ . Επομένως, το άλμα θα γίνει στα ανάντη του σημείου αλλαγής κλίσης, (καμπύλη BMP **S1**). Στη συνέχεια, σε ολόκληρο το 3<sup>ο</sup> τμήμα η ροή θα είναι **ομοιόμορφη** με βάθος  $y_{3o}=1.97\text{ m}$ .



## 7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΒΑΘΜΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗΣ ΡΟΗΣ

Ο υπολογισμός της BMP για μόνιμη ροή ( $Q = \text{σταθερά}$ ) σε ένα ανοικτό αγωγό θα γίνει με αριθμητική ολοκλήρωση. Για τον υπολογισμό της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας θεωρούμε ότι (1) ο αγωγός είναι πρισματικός, (2) γνωρίζουμε επομένως για τη δεδομένη παροχή το ομοιόμορφο και κρίσιμο βάθος και (3) είναι γνωστό το βάθος ροής σε κάποια διατομή ελέγχου, απ' όπου και θα ξεκινήσουμε την αριθμητική ολοκλήρωση. Κατά συνέπεια, γνωρίζουμε τον τύπο της καμπύλης της ελεύθερης επιφάνειας με βάση τη θεωρία που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

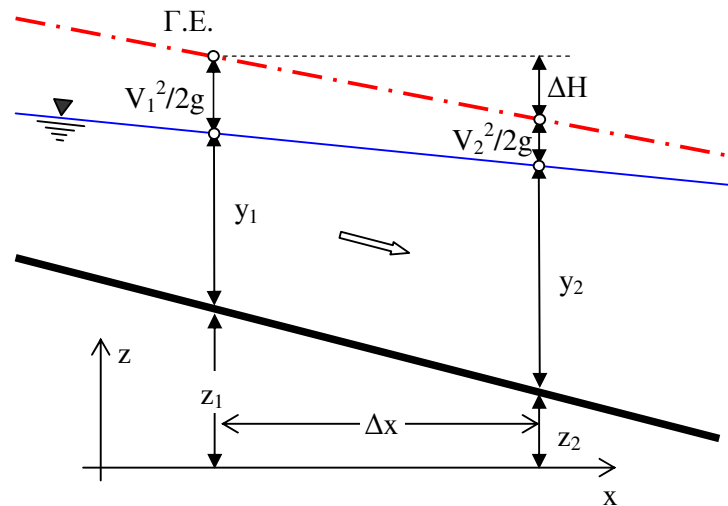
Στις παραγράφους που ακολουθούν παρουσιάζεται η μεθοδολογία της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αφού διακριτοποιηθεί κατάλληλα η εξίσωση ενέργειας, θα εκτιμηθεί η κλίση της γραμμής ενέργειας τοπικά χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Manning, έτσι ώστε να υπολογιστούν οι γραμμικές απώλειες ανάμεσα σε δύο διατομές.

Διαφορίζοντας την μονοδιάστατη εξίσωση ενέργειας σε ένα ανοικτό αγωγό

$$H = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (7.1)$$

όπου  $H$  είναι το ύψος ενέργειας,  $z$  το υψόμετρο πυθμένα από επίπεδο αναφοράς,  $y$  το βάθος ροής,  $V$  η μέση ταχύτητα νερού,  $\alpha$  ο συντελεστής συνόρθωσης και  $g$  η επιτάχυνση βαρύτητας ως προς  $x$  έχουμε

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \alpha \frac{V^2}{2g} \right) \quad (7.2)$$



Η εξίσωση γράφεται υπό μορφή διαφορών ως εξής

$$\frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \alpha \frac{V^2}{2g} \right). \quad (7.3)$$

Στην εξίσωση  $\Delta H/\Delta x = -\bar{J}_E$  είναι η μέση κλίση απωλειών ενέργειας,  $\Delta z/\Delta x = -J_o$  η κλίση του πυθμένα και  $\Delta y = y_2 - y_1$  είναι η διαφορά του βάθους νερού ανάμεσα σε δύο γειτονικές διατομές. Αντικαθιστώντας και αναδιατάσσοντας τους όρους, η εξίσωση ενέργειας υπό μορφή διαφορών γράφεται

$$J_o - \bar{J}_E = \frac{y_2 - y_1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x} \left( \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \right). \quad (7.4)$$

Στην εξίσωση αυτή παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος είναι η διαφορά της ειδικής ενέργειας διηρημένης με  $\Delta x$  ανάμεσα στις διατομές 1 και 2. Αντικαθιστώντας την ειδική ενέργεια στις διατομές 1 και 2 στην παραπάνω σχέση και λύνοντας ως προς  $\Delta x$  έχουμε ότι

$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{J_o - \bar{J}_E} = \frac{\Delta E}{J_o - \bar{J}_E} \quad (7.5)$$

όπου

$$E_i = y_i + \alpha_i \frac{V_i^2}{2g}. \quad (7.6)$$

Για τον υπολογισμό της κλίσης της γραμμής ενέργειας χρησιμοποιούμε τη σχέση του Manning

$$J_{Ei} = \frac{n^2 V_i^2}{R_i^{4/3}}, \quad (7.7)$$

ενώ η μέση κλίση της γραμμής ενέργειας υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\bar{J}_E = \frac{J_{E1} + J_{E2}}{2} \quad (7.8)$$

Στη σχέση (7.5) που είναι η δικριτοποιημένη εξίσωση ενέργειας ανάμεσα σε δύο γειτονικές διατομές, συσχετίζονται τα βάθη ροής  $y_1$  και  $y_2$  και η μεταξύ τους απόσταση  $\Delta x$ . Στις παραγράφους που ακολουθούν παρουσιάζονται δύο κλασσικές μέθοδοι για τον υπολογισμό της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος του αγωγού.

### 7.1 Μέθοδος 1η. Άμεση βήμα προς βήμα ολοκλήρωση (Direct step method).

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε πρισματικούς αγωγούς. Τα δεδομένα μας είναι η γεωμετρία της διατομής, η κλίση του πυθμένα και η παροχή, από τα οποία υπολογίζουμε το ομοιόμορφο και το κρίσιμο βάθος κατά τα γνωστά. Με βάση αυτά τα δεδομένα προσδιορίζουμε τον τύπο του προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας (π.χ. καμπύλη M1). Ξεκινάμε από ένα γνωστό βάθος σε κάποια διατομή ελέγχου (οριακή συνθήκη). Τέτοια βάθη για παράδειγμα είναι το κρίσιμο βάθος σε ελεύθερη πτώση, ή σε σημείο αλλαγής της κλίσης από υποκρίσιμη σε υπερκρίσιμη ροή, κλπ. Κατόπιν μεταβάλλουμε το βάθος κατά  $\Delta y$  και υπολογίζουμε την απόσταση  $\Delta x$  μεταξύ των διατομών που έχουν διαφορά βάθους  $\Delta y$ . Οι υπολογισμοί σε δεδομένο αγωγό με σταθερή κλίση πυθμένα σταματούν είτε όταν καλύψουμε το μήκος του αγωγού ή όταν το βάθος ροής γίνει ίσο με το ομοιόμορφο βάθος ροής.

Τυπική (κατά Chow) πινακοποίηση των υπολογισμών φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

| 1    | 2    | 3    | 4         | 5    | 6               | 7    | 8          | 9       | 10                  | 11        | 12         | 13      |
|------|------|------|-----------|------|-----------------|------|------------|---------|---------------------|-----------|------------|---------|
| $y$  | $A$  | $R$  | $R^{4/3}$ | $V$  | $\alpha V^2/2g$ | $E$  | $\Delta E$ | $J_E$   | $(J_{E1}+J_{E2})/2$ | $J_o-J_E$ | $\Delta x$ | $x$     |
| 2.00 | 4.00 | 0.67 | 0.58      | 1.00 | 0.05097         | 2.05 |            | 0.00056 |                     |           |            | 0.00    |
|      |      |      |           |      |                 |      | -0.04735   |         | 0.00057             | 0.00043   | -111.19    |         |
| 1.95 | 3.90 | 0.66 | 0.58      | 1.03 | 0.05362         | 2.00 |            | 0.00059 |                     |           |            | -111.19 |

| Στήλη         | Περιγραφή                                    |
|---------------|--|
| 1             | Βάθος ροής, $y$                              |
| 2             | Εμβαδόν διατομής, $A$                        |
| 3             | Υδραυλική ακτίνα, $R$                        |
| 4             | $R^{4/3}$                                    |
| 5             | Ταχύτητα ροής, $V = Q/A$                     |
| 6             | Ύψος κινητικής ενέργειας                     |
| 7 (= 1 + 6)   | Ειδική ενέργεια $E$                          |
| 8             | Διαφορά ειδικής ενέργειας, $\Delta E$        |
| 9             | Κλίση γραμμής ενέργειας από τύπο του Manning |
| 10            | Μέση κλίση γραμμής ενέργειας, $J_E$          |
| 11            | $J_o - J_E$                                  |
| 12 (= 8 / 11) | $\Delta x = \Delta E / (J_o - J_E)$          |
| 13            | Απόσταση από αρχή, $x$                       |

**Παράδειγμα 7.1** Ορθογωνικός αγωγός μήκους  $L=2$  Km και πλάτους  $B=2$  m μεταφέρει παροχή  $Q=4$  m<sup>3</sup>/s και έχει κλίση πυθμένα  $J_0=0.001$ . Ο αγωγός εκβάλλει σε λίμνη με στάθμη που μεταβάλλεται μεταξύ 0.50 m και 2.00 m πάνω από τον πυθμένα της διώρυγας στο σημείο της εκβολής. Να υπολογίσετε την απόσταση για την οποία το βάθος ροής γίνεται ομοιόμορφο στον αγωγό για τη μέγιστη και την ελάχιστη στάθμη της λίμνης. Ο συντελεστής τραχύτητας της διώρυγας να ληφθεί  $n=0.018$ .

Απάντηση

Για τη δεδομένη παροχή κατά τα γνωστά υπολογίζουμε τα ακόλουθα μεγέθη

Κρίσιμο βάθος:  $y_c=0.74$  m

Ομοιόμορφο βάθος:  $y=1.58$  m

Μέση ταχύτητα:  $V=1.27$  m/s

Επομένως για την μέγιστη στάθμη της λίμνης το προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας θα είναι M1 ( $y_0=1.57$  m < 2 m) και για την ελάχιστη M2 ( $y_0=1.57$  m > 0.50 m).

**Μέγιστη στάθμη λίμνης:  $Y=2.00$  m, καμπύλη υπερύψωσης M1.**

Η διατομή ελέγχου είναι αυτή της εκβολής του αγωγού στη λίμνη, όπου το βάθος ροής είναι 2.00 m. Η ολοκλήρωση γίνεται προς τα ανάντη (backwater curve), δεδομένου ότι η κλίση είναι υποκρίσιμη, μειώνοντας το βάθος ροής κατά 0.05m σε κάθε βήμα. Οι υπολογισμοί φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί, το δε τελικό ανάντη βάθος στο οποίο θα καταλήξουμε ολοκληρώνοντας τους υπολογισμούς μας, είναι το ομοιόμορφο βάθος ροής  $y_0=1.57$  m.

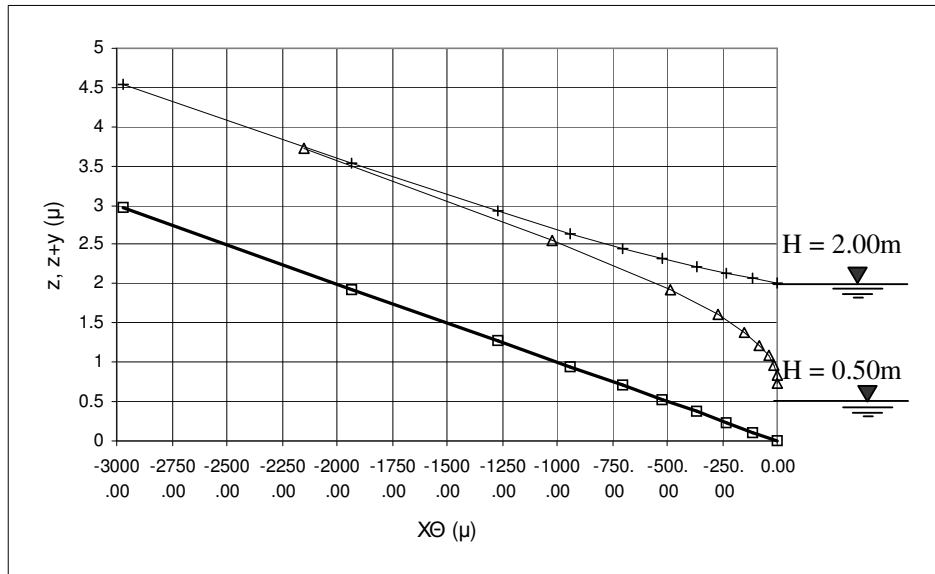
| 1    | 2    | 3    | 4         | 5    | 6               | 7    | 8          | 9       | 10                  | 11        | 12         | 13       |
|------|------|------|-----------|------|-----------------|------|------------|---------|---------------------|-----------|------------|----------|
| $y$  | $A$  | $R$  | $R^{4/3}$ | $V$  | $\alpha V^2/2g$ | $E$  | $\Delta E$ | $J_E$   | $(J_{E1}+J_{E2})/2$ | $J_0-J_E$ | $\Delta x$ | $x$      |
| 2.00 | 4.00 | 0.67 | 0.58      | 1.00 | 0.05097         | 2.05 |            | 0.00056 |                     |           |            | 0.00     |
|      |      |      |           |      |                 |      | -0.04735   |         | 0.00057             | 0.00043   | -111.19    |          |
| 1.95 | 3.90 | 0.66 | 0.58      | 1.03 | 0.05362         | 2.00 |            | 0.00059 |                     |           |            | -111.19  |
|      |      |      |           |      |                 |      | -0.04714   |         | 0.00061             | 0.00039   | -121.31    |          |
| 1.90 | 3.80 | 0.66 | 0.57      | 1.05 | 0.05647         | 1.96 |            | 0.00063 |                     |           |            | -232.50  |
|      |      |      |           |      |                 |      | -0.04691   |         | 0.00065             | 0.00035   | -134.91    |          |
| 1.85 | 3.70 | 0.65 | 0.56      | 1.08 | 0.05957         | 1.91 |            | 0.00067 |                     |           |            | -367.41  |
|      |      |      |           |      |                 |      | -0.04664   |         | 0.00070             | 0.00030   | -154.12    |          |
| 1.80 | 3.60 | 0.64 | 0.55      | 1.11 | 0.06292         | 1.86 |            | 0.00072 |                     |           |            | -521.53  |
|      |      |      |           |      |                 |      | -0.04635   |         | 0.00075             | 0.00025   | -183.25    |          |
| 1.75 | 3.50 | 0.64 | 0.55      | 1.14 | 0.06657         | 1.82 |            | 0.00077 |                     |           |            | -704.77  |
|      |      |      |           |      |                 |      | -0.04603   |         | 0.00080             | 0.00020   | -232.53    |          |
| 1.70 | 3.40 | 0.63 | 0.54      | 1.18 | 0.07054         | 1.77 |            | 0.00083 |                     |           |            | -937.30  |
|      |      |      |           |      |                 |      | -0.04566   |         | 0.00086             | 0.00014   | -333.68    |          |
| 1.65 | 3.30 | 0.62 | 0.53      | 1.21 | 0.07488         | 1.72 |            | 0.00090 |                     |           |            | -1270.98 |
|      |      |      |           |      |                 |      | -0.04525   |         | 0.00093             | 0.00007   | -658.16    |          |
| 1.60 | 3.20 | 0.62 | 0.52      | 1.25 | 0.07964         | 1.68 |            | 0.00097 |                     |           |            | -1929.14 |
|      |      |      |           |      |                 |      | -0.01797   |         | 0.00098             | 0.00002   | -1039.51   |          |
| 1.58 | 3.16 | 0.61 | 0.52      | 1.27 | 0.08167         | 1.66 |            | 0.00100 |                     |           |            | -2968.65 |

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι για να επιτευχθεί ομοιόμορφη ροή το μήκος της διώρυγας με ενιαία κλίση πυθμένα  $J_0=0.001$  θα πρέπει να υπερβαίνει τα 3000m.

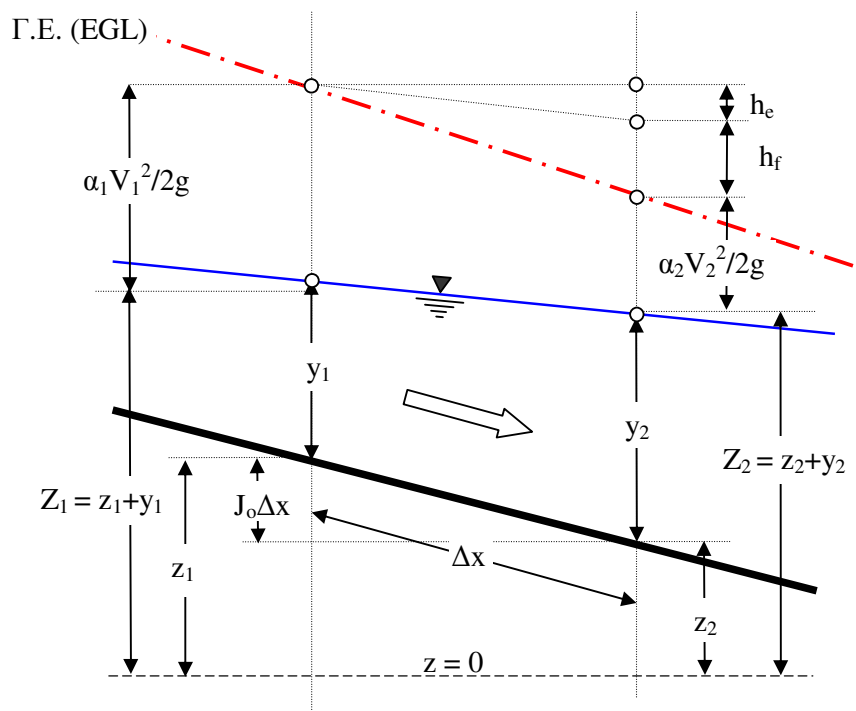
**Ελάχιστη στάθμη λίμνης:  $Y=0.50$  m, καμπύλη κατάπτωσης M2.** Και εδώ η διατομή ελέγχου είναι στην εκβολή του αγωγού στη λίμνη, όπου το βάθος ροής είναι  $0.50m < y_c = 0.74$  m. Η ολοκλήρωση γίνεται προς τα ανάντη (backwater curve) δεδομένου ότι η κλίση είναι υποκρίσιμη. Η κλίση του αγωγού είναι υποκρίσιμη και επομένως αρχίζουμε τον υπολογισμό από το κρίσιμο βάθος στην εκβολή, αυξάνοντας το βάθος ροής κατά 0.10 m σε κάθε βήμα. Οι υπολογισμοί φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί, το δε τελικό ανάντη βάθος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το ομοιόμορφο βάθος ροής  $y_0=1.57$  m.

| 1    | 2    | 3    | 4         | 5    | 6               | 7    | 8          | 9       | 10                  | 11        | 12         | 13       |
|------|------|------|-----------|------|-----------------|------|------------|---------|---------------------|-----------|------------|----------|
| $y$  | $A$  | $R$  | $R^{4/3}$ | $V$  | $\alpha V^2/2g$ | $E$  | $\Delta E$ | $J_E$   | $(J_{E1}+J_{E2})/2$ | $J_0-J_E$ | $\Delta x$ | $x$      |
| 0.74 | 1.48 | 0.43 | 0.32      | 2.70 | 0.3723          | 1.11 |            | 0.00740 |                     |           |            | 0.00     |
|      |      |      |           |      |                 |      | 0.01663    |         | 0.00631             | -0.00531  | -3.13      |          |
| 0.84 | 1.68 | 0.46 | 0.35      | 2.38 | 0.28894         | 1.13 |            | 0.00523 |                     |           |            | -3.13    |
|      |      |      |           |      |                 |      | 0.04179    |         | 0.00454             | -0.00354  | -11.81     |          |
| 0.94 | 1.88 | 0.48 | 0.38      | 2.13 | 0.23073         | 1.17 |            | 0.00385 |                     |           |            | -14.94   |
|      |      |      |           |      |                 |      | 0.05776    |         | 0.00340             | -0.00240  | -24.09     |          |
| 1.04 | 2.08 | 0.51 | 0.41      | 1.92 | 0.18849         | 1.23 |            | 0.00294 |                     |           |            | -39.03   |
|      |      |      |           |      |                 |      | 0.06838    |         | 0.00263             | -0.00163  | -42.06     |          |
| 1.14 | 2.28 | 0.53 | 0.43      | 1.75 | 0.15687         | 1.30 |            | 0.00231 |                     |           |            | -81.09   |
|      |      |      |           |      |                 |      | 0.07572    |         | 0.00208             | -0.00108  | -69.99     |          |
| 1.24 | 2.48 | 0.55 | 0.45      | 1.61 | 0.13259         | 1.37 |            | 0.00185 |                     |           |            | -151.08  |
|      |      |      |           |      |                 |      | 0.08095    |         | 0.00169             | -0.00069  | -117.99    |          |
| 1.34 | 2.68 | 0.57 | 0.48      | 1.49 | 0.11354         | 1.45 |            | 0.00152 |                     |           |            | -269.07  |
|      |      |      |           |      |                 |      | 0.08478    |         | 0.00139             | -0.00039  | -217.29    |          |
| 1.44 | 2.88 | 0.59 | 0.50      | 1.39 | 0.09832         | 1.54 |            | 0.00126 |                     |           |            | -486.35  |
|      |      |      |           |      |                 |      | 0.08765    |         | 0.00116             | -0.00016  | -535.30    |          |
| 1.54 | 3.08 | 0.61 | 0.51      | 1.30 | 0.08596         | 1.63 |            | 0.00106 |                     |           |            | -1021.65 |
|      |      |      |           |      |                 |      | 0.03570    |         | 0.00103             | -0.00003  | -1130.41   |          |
| 1.58 | 3.16 | 0.61 | 0.52      | 1.27 | 0.08167         | 1.66 |            | 0.00100 |                     |           |            | -2152.06 |

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι για να επιτευχθεί ομοιόμορφη ροή το μήκος της διώρυγας με ενιαία κλίση πυθμένα  $J_0=0.001$  θα πρέπει να υπερβαίνει τα 2200 m. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται ο πυθμένασκαθώς και τα προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας που υπολογίσαμε για την ανώτερη και κατώτερη στάθμη της λίμνης που είναι 2.00 και 0.50 m αντίστοιχα. Η ροή στη διώρυγα θα γίνει ομοιόμορφη σε απόσταση 2970 m και 2150 m όταν η στάθμη της λίμνης είναι 2.00 m και 0.50 m αντίστοιχα.



**7.2 Μέθοδος 2η. Τυπική μέθοδος βήμα προς βήμα ολοκλήρωσης (Standard step method).**



Εφαρμόζεται και σε μη πρισματικούς αγωγούς, όπου τα υδραυλικά στοιχεία εξαρτώνται από τη θέση της διατομής. Ξεκινάμε από γνωστά υδραυλικά στοιχεία διατομών καθώς και την απόσταση μεταξύ τους και αναζητούμε το βάθος ροής στις διατομές. Η διαδικασία γίνεται με τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων.

Έστω οι διατομές 1 και 2 που απέχουν απόσταση  $\Delta x$  μεταξύ τους, τότε

$$H_1 = H_2 + \Delta H \quad (7.9)$$

ή

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H . \quad (7.10)$$

Έστω  $Z=z+y$  το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας υπεράνω κάποιου επίπεδου αναφοράς (π.χ. μέση επιφάνεια θάλασσας). Οι απώλειες ενέργειας  $\Delta H$  μεταξύ των διατομών 1 και 2 οφείλονται αφενός σε δυνάμεις από τριβές στα τοιχώματα και αφετέρου στις τοπικές απώλειες λόγω μεταβολής σχήματος (στροβιλισμοί κλπ), δηλαδή

$$\Delta H = h_f + h_e \quad (7.11)$$

όπου οι απώλειες τριβών είναι

$$h_f = J_E \Delta x = (J_{E1} + J_{E2})/2 . \quad (7.12)$$

Οι "τοπικές" απώλειες λόγω μεταβολής σχήματος εκφράζονται σαν κάποιο ποσοστό της διαφοράς ύψους κινητικής ενέργειας μεταξύ των διατομών 1 και 2, δηλαδή

$$h_e = k\Delta(\alpha V^2 / 2g)$$

όπου  $k$  συντελεστής που λαμβάνει ανάλογα με την περίπτωση τις (συνήθεις) τιμές

- $k = 0 \div 0.1$  σε βαθμιαία συγκλίνοντες αγωγούς
- $k \approx 0.2 \div 0.3$  σε βαθμιαία αποκλίνοντες αγωγούς
- $k = 0.5$  σε απότομες μεταβολές διατομής.

Πολλές φορές για ευχέρεια στους υπολογισμούς αυξάνουμε το συντελεστή  $n$  του Manning και θεωρούμε ότι  $h_e=0$ . Η βασική λοιπόν εξίσωση της BMP μετά από τα παραπάνω γίνεται

$$Z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f + h_e . \quad (8-13)$$

Η περαιτέρω πορεία των υπολογισμών είναι η παρακάτω. Υποθέτουμε ένα  $Z$  και υπολογίζουμε τα μεγέθη  $y$ ,  $A$ ,  $P$ ,  $R$ ,  $V$  και  $H$ . Κατόπιν από τη σχέση του Manning υπολογίζουμε την κλίση της γραμμής ενέργειας σε δύο διαδοχικές διατομές

$$J_E = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}}$$

από τις οποίες υπολογίζουμε τη μέση κλίση της γραμμής ενέργειας και συνεπώς τις απώλειες ενέργειας. Κατόπιν τις προσθέτουμε στις απώλειες του προηγούμενου βήματος, και το άθροισμα πρέπει να δίνει το ύψος ενέργειας  $H$  της διατομής. Αν το  $H$  διαφέρει, τότε δοκιμάζουμε ένα νέο  $Z$ . Η πινακοποίηση των υπολογισμών φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

| Στήλη | Περιγραφή   |
|-------|---|
| 1     | ΧΘ από την αρχή   |
| 2     | Επιλεγόμενο δοκιμαστικό υψόμετρο της επιφάνειας του νερού $z$ |
| 3     | Βάθος ροής, $y$   |

|                              |   |
|------------------------------|---|
| 4                            | Εμβαδόν διατομής, $A$   |
| 5                            | Βρεχόμενη περίμετρος $P$  |
| 6                            | Ταχύτητα ροής $V = Q/A$   |
| 7                            | Ύψος κινητικής ενέργειας  |
| 8 (= 2 + 7)                  | Ύψος ενέργειας $H$  |
| 9                            | Υδραυλική ακτίνα, $R = A / P$   |
| 10                           | Κλίση γραμμής ενέργειας $J_E$ της διατομής από τύπο του Manning   |
| 11                           | Μέση κλίση γραμμής ενέργειας, $J_E$   |
| 12                           | Απόσταση μεταξύ διατομών $\Delta x$   |
| 13 (= 11 x 12)               | Γραμμικές απώλειες ενέργειας λόγω τριβών  |
| 14                           | Τοπικές απώλειες που εκτιμήθηκαν  |
| 15<br>(= $H_1^* + 13 + 14$ ) | Υψόμετρο γραμμής ενέργειας. Εάν η τιμή αυτή συμπίπτει με αυτή στη στήλη 7 τότε προχωρούμε στον υπολογισμό του βάθους ροής της επόμενης διατομής, αλλιώς υποθέτουμε μια άλλη τιμή του $Z$ στη στήλη 2. |

**Παράδειγμα 7.2** Τραπεζοειδής διώρυγα με κλίση πρανών  $Z=2$  μεταφέρει παροχή  $Q=11.33 \text{ m}^3/\text{s}$ . Το πλάτος πυθμένα είναι  $b=6.10 \text{ m}$ , η κλίση της  $J_0=0.0016$  και ο συντελεστής τραχύτητας  $n=0.025$ . Να προσδιορίσετε τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας αν η διώρυγα εκβάλλει σε ταμειυτήρα με στάθμη νερού  $+184.40\text{m}$ , σε απόσταση  $725 \text{ m}$  ανάντη του σημείου εκβολής. Ο πυθμένας της διώρυγας στο σημείο της εκβολής βρίσκεται  $1.52 \text{ m}$  κάτω από τη στάθμη του ταμειυτήρα.

Για τον υπολογισμό να θεωρήσετε  $a=1.10$  και μηδενικές τοπικές απώλειες  $h_e = 0$  (πρισματικός αγωγός).

### Απάντηση

Υπολογίζουμε κατά τα γνωστά τα μεγέθη  $y_c=0.68 \text{ m}$  και  $y_o=1.02 \text{ m} < 1.52 \text{ m}$  και υποκρίσιμη ροή. Επομένως η καμπύλη της ελεύθερης επιφάνειας είναι M1. Γνωρίζοντας τις αποστάσεις των διατομών από το σημείο εκβολής, υπολογίζουμε με δοκιμές τα αντίστοιχα βάθη με τη μεθοδολογία που προτείναμε παραπάνω. Για τον υπολογισμό της BMP καταρτίζουμε τον παρακάτω πίνακα. Ο υπολογισμός του βάθους ροής σε κάθε διατομή ολοκληρώνεται όταν η διαφορά ενεργειακής στάθμης στις στήλες 8 και 15 του παρακάτω πίνακα είναι της τάξης του  $0.001 \text{ m}$ .

---

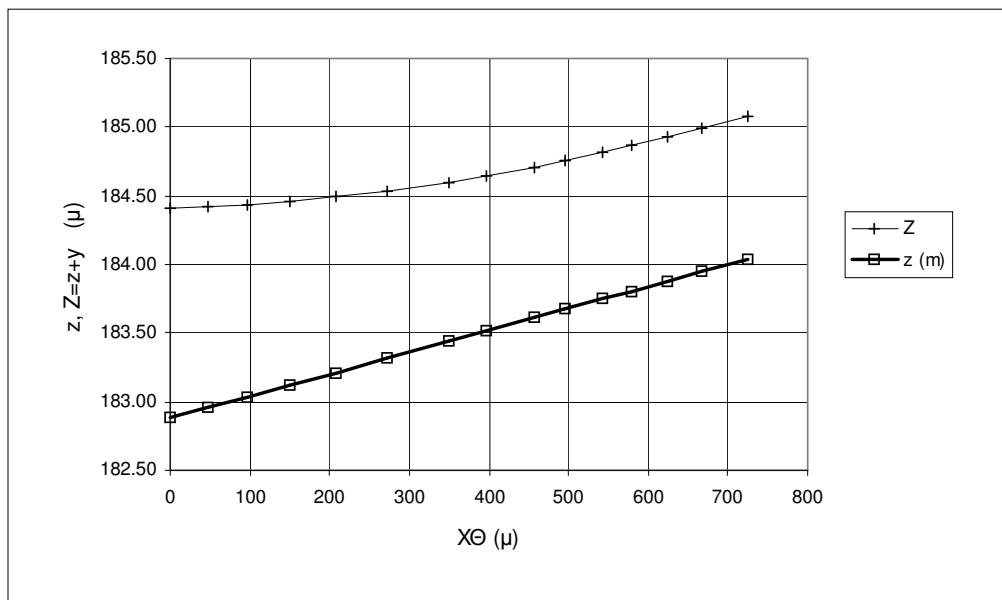
\*  $H_1$  = ύψος ενέργειας του προηγούμενου βήματος. Στο 1ο βήμα λαμβάνουμε σαν ύψος ενέργειας στη στήλη 15 αυτό της στήλης 8.



| 1   | 2      | 3    | 4                 | 5     | 6     | 7               | 8      | 9    | 10      | 11            | 12         | 13    | 14    | 15     |
|-----|--------|------|-------------------|-------|-------|-----------------|--------|------|---------|---------------|------------|-------|-------|--------|
| XΘ  | Z      | y    | A                 | P     | V     | $\alpha V^2/2g$ | H      | R    | $J_E$   | $(J_1+J_2)/2$ | $\Delta x$ | $h_f$ | $h_c$ | H      |
| (m) |        | (m)  | (m <sup>2</sup> ) | (m)   | (m/s) | (m)             | (m)    | (m)  |         |               | (m)        | (m)   | (m)   | (m)    |
| 0   | 184.40 | 1.52 | 13.89             | 12.90 | 0.82  | 0.04            | 184.44 | 1.08 | 0.00038 |               |            |       |       | 184.44 |
| 47  | 184.42 | 1.46 | 13.21             | 12.64 | 0.86  | 0.04            | 184.46 | 1.04 | 0.00043 | 0.00041       | 47         | 0.02  | 0.00  | 184.46 |
| 97  | 184.44 | 1.40 | 12.49             | 12.37 | 0.91  | 0.05            | 184.48 | 1.01 | 0.00051 | 0.00047       | 50         | 0.02  | 0.00  | 184.48 |
| 150 | 184.46 | 1.34 | 11.78             | 12.10 | 0.96  | 0.05            | 184.51 | 0.97 | 0.0006  | 0.00055       | 53         | 0.03  | 0.00  | 184.51 |
| 207 | 184.49 | 1.28 | 11.09             | 11.83 | 1.02  | 0.06            | 184.55 | 0.94 | 0.00071 | 0.00065       | 57         | 0.04  | 0.00  | 184.55 |
| 272 | 184.54 | 1.22 | 10.42             | 11.56 | 1.09  | 0.07            | 184.60 | 0.90 | 0.00085 | 0.00078       | 65         | 0.05  | 0.00  | 184.60 |
| 349 | 184.60 | 1.16 | 9.75              | 11.28 | 1.16  | 0.08            | 184.67 | 0.86 | 0.00103 | 0.00094       | 77         | 0.07  | 0.00  | 184.67 |
| 397 | 184.64 | 1.13 | 9.43              | 11.14 | 1.20  | 0.08            | 184.72 | 0.85 | 0.00113 | 0.00108       | 48         | 0.05  | 0.00  | 184.73 |
| 457 | 184.71 | 1.10 | 9.10              | 11.01 | 1.24  | 0.09            | 184.80 | 0.83 | 0.00125 | 0.00119       | 60         | 0.07  | 0.00  | 184.80 |
| 495 | 184.76 | 1.08 | 8.95              | 10.94 | 1.27  | 0.09            | 184.84 | 0.82 | 0.00131 | 0.00128       | 38         | 0.05  | 0.00  | 184.84 |
| 542 | 184.82 | 1.07 | 8.79              | 10.88 | 1.29  | 0.09            | 184.91 | 0.81 | 0.00138 | 0.00134       | 47         | 0.06  | 0.00  | 184.91 |
| 579 | 184.87 | 1.06 | 8.70              | 10.83 | 1.30  | 0.10            | 184.96 | 0.80 | 0.00142 | 0.0014        | 37         | 0.05  | 0.00  | 184.96 |
| 625 | 184.93 | 1.05 | 8.60              | 10.79 | 1.32  | 0.10            | 185.03 | 0.80 | 0.00147 | 0.00144       | 46         | 0.07  | 0.00  | 185.03 |
| 667 | 184.99 | 1.04 | 8.54              | 10.76 | 1.33  | 0.10            | 185.09 | 0.79 | 0.0015  | 0.00148       | 42         | 0.06  | 0.00  | 185.09 |
| 725 | 185.08 | 1.04 | 8.47              | 10.74 | 1.34  | 0.10            | 185.18 | 0.79 | 0.00153 | 0.00152       | 57         | 0.09  | 0.00  | 185.18 |

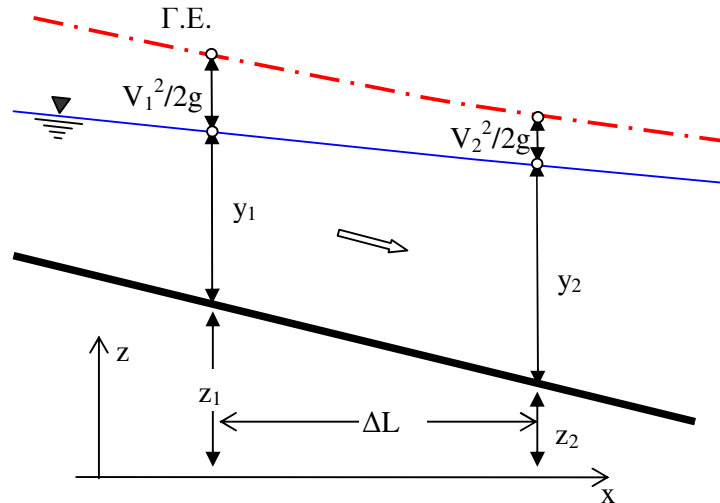
Το βάθος νερού σε απόσταση 725 m ανάντη του χείλους της διώρυγας είναι 1.04 m.

Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνονται το υψόμετρο πυθμένα και η στάθμη του νερού μέχρι τη XΘ 0+725 ανάντη του σημείου εκβολής της διώρυγας.



**Παρατήρηση:** Η ανάπτυξη των προσωπικών υπολογιστών και του λογισμικού με υπολογιστικά φύλλα (π.χ. MS Excel®), με υπολογιστικές ρουτίνες που δουλεύουν στο background, μας παρέχει σήμερα τεράστιες δυνατότητες για τον υπολογισμό της BMP. Ο καθένας μας μπορεί να δημιουργήσει ένα υπολογιστικό φύλλο όπως αυτό βολεύει.

### 7.3 Προσδιορισμός της παροχής πρισματικού αγωγού



Ο προσδιορισμός της παροχής πρισματικού αγωγού με γνωστή τραχύτητα είναι δυνατόν να γίνει με μέτρηση της στάθμης σε δύο διατομές που απέχουν γνωστή απόσταση, όταν η ροή είναι μόνιμη. Έστω ο πρισματικός αγωγός του σχήματος με τραχύτητα Manning  $n$ , ο οποίος μεταφέρει παροχή  $Q$ , με κλίση πυθμένα  $J$ , πλάτος πυθμένα  $b$  και στάθμες  $y_1$  και  $y_2$  στις διατομές που απέχουν απόσταση  $\Delta L$ . Η εξίσωση ενέργειας ανάμεσα στις δύο διατομές γράφεται ως

$$\Delta L = \frac{E_2 - E_1}{J_o - \bar{J}_E} = \frac{\Delta E}{J_o - \bar{J}_E} \quad (1)$$

όπου

$$E_1 = y_1 + \alpha \frac{V_1^2}{2g} \quad \text{και} \quad E_2 = y_2 + \alpha \frac{V_2^2}{2g}. \quad (2)$$

είναι οι ειδικές ενέργειες στις διατομές (1) και (2) αντίστοιχα και  $\bar{J}_E$  η μέση κλίση της γραμμής ενέργειας

$$\bar{J}_E = \frac{J_{E1} + J_{E2}}{2}. \quad (3)$$

Για τον υπολογισμό της κλίσης της γραμμής ενέργειας στις δύο διατομές χρησιμοποιούμε τη σχέση του Manning, επομένως

$$J_{E1} = \frac{n^2 V_1^2}{R_1^{4/3}}, \quad J_{E2} = \frac{n^2 V_2^2}{R_2^{4/3}}, \quad (4)$$

όπου  $R_1$  και  $R_2$  είναι οι υδραυλικές ακτίνες στις δύο διατομές, που υπολογίζονται ως οι λόγοι των υγρών διατομών προς τις αντίστοιχες βρεχόμενες περιμέτρους. Επομένως

$$\begin{aligned} \Delta E = E_2 - E_1 &= \left( y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \right) - \left( y_1 + \frac{V_1^2}{2g} \right) \\ &= y_2 - y_1 + \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Επίσης

$$\bar{J}_E = \frac{1}{2}(J_{E1} + J_{E2}) = \frac{1}{2} \left( \frac{n^2 V_1^2}{R_1^{4/3}} + \frac{n^2 V_2^2}{R_2^{4/3}} \right) = \frac{Q^2 n^2}{2} \left( \frac{1}{A_1^2 R_1^{4/3}} + \frac{1}{A_2^2 R_2^{4/3}} \right) \quad (6)$$

Από τις εξισώσεις (1), (5) και (6) προκύπτει η παροχή  $Q$ , από τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$Q^2 = \frac{J_o \Delta L + (y_1 - y_2)}{\frac{1}{2g} \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) + \frac{n^2 \Delta L}{2} \left( \frac{1}{A_1^2 R_1^{4/3}} + \frac{1}{A_2^2 R_2^{4/3}} \right)} \quad (7)$$

**Παρατήρηση:** Ο υπολογισμός της παροχής μπορεί να γίνει και με δοκιμές με βάση την εξίσωση

$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{J_o - \bar{J}_E} = \frac{\Delta E}{J_o - \bar{J}_E} \quad (8)$$

Θεωρούμε την παροχή δεδομένη, ενώ από τη γνωστή στάθμη στις διατομές (1) και (2) υπολογίζουμε την απόσταση  $\Delta x$ . Ο υπολογισμός ολοκληρώνεται όταν  $\Delta x = \Delta L$ .

**Παράδειγμα 7.3** Ορθογωνική διώρυγα με πλάτος πυθμένα  $b=2$  m έχει κλίση πυθμένα  $J_o=0.002$  και συντελεστή τραχύτητας  $n=0.025$ . Σε δύο διατομές που απέχουν 200 m μεταξύ τους μετρήσαμε βάθη ροής 1.35 m και 1.27 m. Ποια είναι η παροχή που μεταφέρεται;

Απάντηση

1) Απ' ευθείας λύση:

$$R_1 = 2 \times 1.35 / (2 + 2 \times 1.35) = 0.574 \text{ m}$$

$$R_2 = 2 \times 1.27 / (2 + 2 \times 1.27) = 0.559 \text{ m}$$

$$Q^2 = \frac{0.002 \times 200 + (1.35 - 1.27)}{\frac{1}{2g} \left( \frac{1}{2.54^2} - \frac{1}{2.70^2} \right) + \frac{0.018^2 \times 200}{2} \left( \frac{1}{2.54^2 \times 0.559^{4/3}} + \frac{1}{2.70^2 \times 0.574^{4/3}} \right)} = 22.762 \text{ m}^6 / \text{s}^2$$

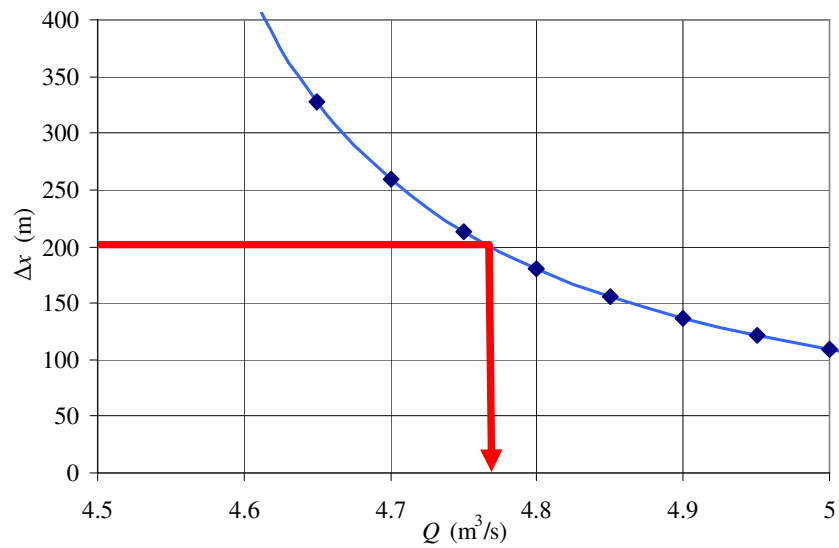
Επομένως  $Q=4.771 \text{ m}^3/\text{s}$ .

2) Λύση με δοκιμές

Δοκιμάζουμε διαφορετικές τιμές της παροχής μέχρι να πετύχουμε το ζητούμενο  $\Delta x$  από τη σχέση

$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{J_o - \bar{J}_E} = \frac{\Delta E}{J_o - \bar{J}_E}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα, απ' όπου προκύπτει  $Q \approx 4.77 \text{ m}^3/\text{s}$  για  $\Delta x = 200 \text{ m}$ .



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γκανούλης, Π, 1982. *Εισαγωγή στη Μηχανική των Ρευστών*. Θεσσαλονίκη.
2. Δημητρίου, ΙΔ, 1997. *Ρευστομηχανική, Τεύχος 1 - Εισαγωγή*. Αθήνα.
3. Δημητρίου, ΙΔ, 1995. *Εφαρμοσμένη υδραυλική, Τεύχος Α - Εισαγωγή*. Αθήνα.
4. Δημητρίου, ΙΔ, 1995. *Εφαρμοσμένη υδραυλική, Τεύχος Β - Εφαρμογές*. Αθήνα.
5. Κωτσοβίνος ΝΕ, 1983. *Υδραυλική, Τόμος πρώτος*. Ξάνθη.
6. Νουτσόπουλος, Γ 1972. *Μαθήματα θεωρητικής και εφαρμοσμένης υδραυλικής, Τεύχος Α*. Αθήνα.
7. Νουτσόπουλος, Γ 1976. *Αγωγοί με ελεύθερη επιφάνεια, Ανοικτοί αγωγοί, Σημειώσεις*, ΕΜ Πολυτεχνείο, Αθήνα.
8. Νουτσόπουλος, Γ & Χριστοδούλου, Γ, 1996. *Μαθήματα Μηχανικής των Ρευστών για Πολιτικούς Μηχανικούς*. Α' Έκδοση. ΕΜ Πολυτεχνείο.
9. Παπαϊωάννου, ΑΘ, 1976. *Μηχανική των ρευστών, Τόμοι Ι και ΙΙ*. Αθήνα.
10. Τσαγγάρης, Σ, 1995. *Μηχανική των ρευστών*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
11. Bakhmeteff, ΒΑ, 1932. *Hydraulics of open channels*. McGraw-Hill.
12. Brater, ΕF and King, ΗW, 1976. *Handbook of hydraulics*. Sixth Edition, McGraw-Hill.
13. Chow, VΤ, 1973. *Open-channel hydraulics*. McGraw-Hill.
14. Chow, VΤ, 1964, Editor in Chief. *Handbook of applied hydrology*. McGraw-Hill.
15. Currie, ΙG, 1974. *Fundamental mechanics of fluids*. McGraw-Hill.
16. Daily, JW, & Harlemman, DRF, 1966. *Fluid dynamics*. Addison-Wesley.
17. Fortier, S & Scobey, FC, 1926. Permissible canal velocities. Trans. ASCE, vol. 89, pp. 940-984
18. French, RH, 1985. *Open-channel hydraulics*. McGraw-Hill.
19. Henderson, FM, 1966. *Open channel flow*. Macmillan.
20. Kumar, SG, 1993. *Transitional flow in channel junctions*. J. Hyd. Res., 31(5), 601-604.
21. Rouse, H, 1961. *Fluid mechanics for hydraulic engineers*. Dover.
22. Schlichting, H, 1979. *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill.
23. Streeter, VL, 1961. *Handbook of fluid dynamics*. McGraw-Hill.
24. Sturm, TW, 2001. *Open channel hydraulics*. McGraw-Hill.
25. Vardy, A, 1990. *Fluid principles*. McGraw-Hill.
26. Viessman, Jr, W, & Hammer, MJ, 1993. *Water supply and pollution control*. Harper Collins.
27. White, FM, 1994. *Fluid mechanics*. 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill.

Αυτή η σελίδα έχει αφεθεί σκόπιμα λευκή.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

### Α. ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

1) Εξίσωση ενέργειας  $H = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g}$

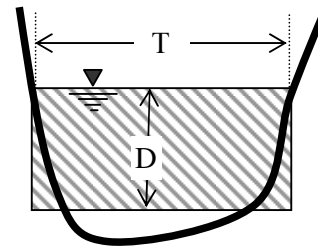
2) Ειδική ενέργεια  $E = y + \alpha \frac{V^2}{2g}$

3) Ειδική δύναμη  $M = \frac{Q^2}{gA} + yA$

4) Αριθμός του Froude  $Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}}; D = A/T$

5) Κρίσιμο βάθος: Συνθήκη  $Fr = V/\sqrt{gD} = 1; D = A/T$

6) Εξίσωση του Manning  $V = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2}; R = A/P, Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} J^{1/2}$



| Διατομή | Κρίσιμο βάθος  | Ομοιόμορφο βάθος   |
|---------|--|--|
|         | $y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$   | $y = \frac{1}{b} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b + 2y)^{2/3} \right]^{3/5}$   |
|         | $y_c = \frac{1}{(b + Zy_c)} \left[ \frac{Q^2}{g} (b + 2Zy_c) \right]^{1/3}$  | $y = \frac{1}{b + zy} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b + 2y\sqrt{1+z^2})^{2/3} \right]^{3/5}$  |
|         | $\theta = \sin \theta + \frac{8}{d^{5/3}} \left[ \frac{Q^2 \sin(\theta/2)}{g} \right]^{1/3}$<br>$y_c = \frac{d}{2} [1 - \cos(\theta/2)]$ | $\theta = \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} \frac{\theta^{2/3}}{(d/2)^{8/3}} \right]^{3/5} + \frac{\sin \theta}{2} + \frac{\theta}{2}$<br>$y = \frac{d}{2} [1 - \cos(\theta/2)]$ |

7) Υδραυλικό άλμα (ορθογωνική διατομή)

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8F_1^2} - 1 \right] \quad (\text{Συζυγή βάθη}) \quad \Delta H = \frac{(y_1 - y_2)^3}{4y_1 y_2} \quad (\text{Απώλειες ενέργειας})$$

8) Μεταβολή του υψόμετρου πυθμένα ορθογωνικής διώρυγας

$$\frac{dy}{dx} (1 - Fr^2) + \frac{dz}{dx} = 0, \quad \max \Delta z = E_1 - \min E_2 = E_1 - \frac{3}{2} \left( \frac{Q^2}{b^2 g} \right)^{1/3}$$

9) Μεταβολή του πλάτους ορθογωνικής διώρυγας

$$(1 - Fr^2) \frac{dy}{dx} - Fr^2 \frac{y}{b} \frac{db}{dx} = 0, \quad Fr^2 = \frac{V^2}{gD} = \frac{Q^2 b}{A^3 g} = \frac{Q^2 b}{gb^3 y^3} = \frac{q^2}{gy^3}, \quad b_{\min} = \frac{3}{2} \frac{Q}{E_1^{3/2}} \sqrt{\frac{3}{2g}}$$

10) Καμπύλες (προφίλ) ελεύθερης επιφάνειας

|                      |                                   |                    |                    |
|----------------------|-----------------------------------|--------------------|--------------------|
| $J_o=0$              | Καμμία<br>$y_o = \infty$<br>$y_c$ | H2<br>$y_c$        | H3<br>$y_c$        |
| $0 < J_o < J_c$      | M1<br>$y_o$<br>$y$                | M2<br>$y_o$<br>$y$ | M3<br>$y_o$<br>$y$ |
| $0 < J_o = J_c$      | C1<br>$y_o = y$                   | C2<br>$y_o = y$    | C3<br>$y_o = y$    |
| $J_o > J_c$          | S1<br>$y_c$<br>$y$                | S2<br>$y_c$<br>$y$ | S3<br>$y_c$<br>$y$ |
| Adverse<br>$J_o < 0$ | Καμμία<br>$y_c$                   | A2<br>$y_c$        | A3<br>$y_c$        |

$J_o < J_c$  ( $y_o > y_c$ ) ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗ,  $J_o = J_c$  ( $y_o = y_c$ ) ΚΡΙΣΙΜΗ,  $J_o > J_c$  ( $y_o < y_c$ ) ΥΠΕΡΚΡΙΣΙΜΗ κλίση

11) Υπολογισμός μηκοτομής της ελεύθερης επιφάνειας (BMP)

1. Άμεση βήμα προς βήμα ολοκλήρωση (Direct step method).

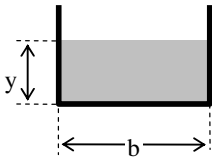
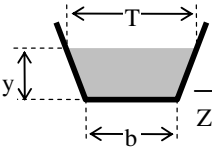
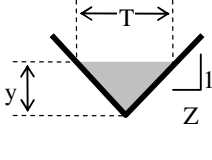
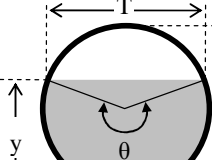
$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{J_o - \bar{J}_E} = \frac{\Delta E}{J_o - \bar{J}_E}, \quad E_i = y_i + \alpha_i \frac{V_i^2}{2g}, \quad J_{Ei} = \frac{n^2 V_i^2}{R_i^{4/3}}, \quad \bar{J}_E = \frac{J_{E1} + J_{E2}}{2}$$

2. Τυπική μέθοδος βήμα προς βήμα ολοκλήρωσης (Standard step method)

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H, \quad \Delta H = h_f + h_e, \quad \text{όπου}$$

$$h_f = J_E \Delta x = (J_{E1} + J_{E2})/2 \quad \text{και} \quad h_e = k\Delta(\alpha V^2 / 2g)$$



| Διατομή   | A                                      | P                      | T   | R   | D  | $\bar{y}$ και $y$   |
|---|--|------------------------|---|---|--|---|
|    | $by$                                   | $b + 2y$               | $b$   | $\frac{by}{b + 2y}$                                       | $y$  | $\frac{y}{2}$   |
|    | $(b + Zy)y$                            | $b + 2y\sqrt{1 + Z^2}$ | $b + 2Zy$   | $\frac{(b + Zy)y}{b + 2y\sqrt{1 + Z^2}}$                  | $\frac{(b + Zy)y}{b + 2Zy}$  | $\bar{y} = \frac{y}{3} \frac{3b + 2Zy}{2b + 2Zy} = \frac{y}{3} \frac{2b + T}{b + T}$  |
|    | $Zy^2$                                 | $2y\sqrt{1 + Z^2}$     | $2Zy$   | $\frac{Zy}{2\sqrt{1 + Z^2}}$                              | $\frac{y}{2}$  | $\frac{y}{3}$   |
|  | $\frac{(\theta - \sin \theta)}{8} d^2$ | $\frac{\theta}{2} d$   | $d \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ή<br>$2\sqrt{y(d - y)}$ | $\left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) \frac{d}{4}$ | $\frac{(\theta - \sin \theta)}{8 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} d$ | $y = [1 - \cos(\theta/2)] \frac{d}{2}$<br>$\frac{2d(\sin(\theta/2))^3}{3(\theta - \sin \theta)} - \frac{d}{2} \cos(\theta/2)$ |

A = εμβαδόν υγρής διατομής, P = βρεχόμενη περίμετρος, T = πλάτος ελεύθερης επιφάνειας, R = υδραυλική ακτίνα, D = υδραυλικό βάθος,  $\bar{y}$  = απόσταση KB υγρής διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια.

Αυτή η σελίδα έχει αφεθεί σκόπιμα λευκή.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

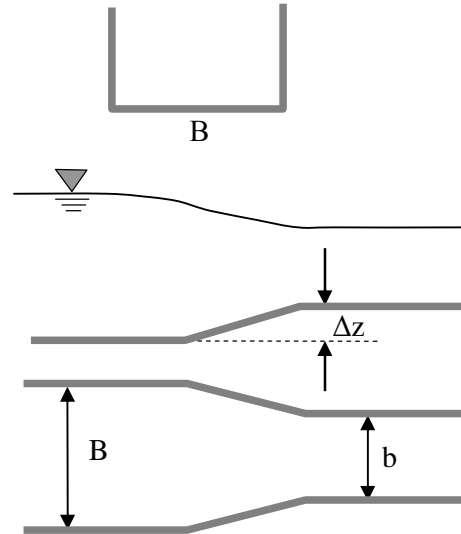
### Β. ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΟΥΣ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

#### Άσκηση Β.1

(α) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ειδικής ενέργειας και ειδικής δύναμης ενός ορθογωνικού αγωγού πλάτους  $B = 2.00 \text{ m}$ , για παροχές  $Q = 5, 10, \text{ και } 15 \text{ m}^3/\text{s}$ .

(β) Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος  $\Delta z$  ανύψωσης του πυθμένα για να διέρχονται οι τρεις παροχές όταν το πλάτος του αγωγού παραμένει σταθερό, και τα βάθη ροής ανάντη είναι 1.5, 2.25 και 3 m αντίστοιχα.

(γ) Να υπολογίσετε το ελάχιστο πλάτος  $b$  βαθμιαίας στένωσης του αγωγού όταν το υψόμετρο του πυθμένα παραμένει σταθερό, ώστε να διέρχονται οι τρεις παροχές με βάθη ροής ανάντη είναι 1.5, 2.25 και 3 m αντίστοιχα.

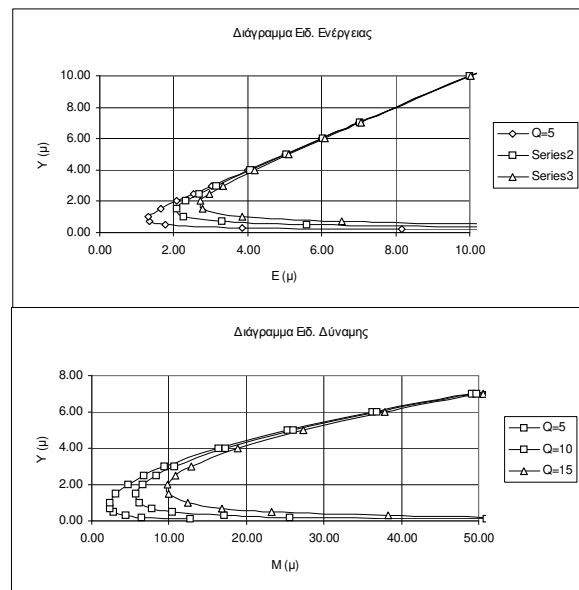


#### Απάντηση

(α) Τα διαγράμματα ειδικής ενέργειας και ειδικής δύναμης προκύπτουν από τις σχέσεις

$$E = y + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \quad \text{και} \quad M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{y}A = \frac{Q^2}{gA} + \frac{y}{2}A; \quad A = b y$$

για δεδομένες παροχές  $Q$  μεταβάλλοντας το βάθος ροής  $y$ .



(β) Σύμφωνα με τη θεωρία πρέπει

$$\max \Delta z = E_1 - \min E.$$

Καταρτίζουμε τον παρακάτω πίνακα για τις δεδομένες παροχές.

| Q     | y <sub>1</sub> | A <sub>1</sub> | V <sub>1</sub> =Q/By <sub>1</sub> | E <sub>1</sub> | min E | max Δz      |
|-------|----------------|----------------|-----------------------------------|----------------|-------|-------------|
| 5.00  | 1.50           | 3.00           | 1.67                              | 1.64           | 1.29  | <b>0.35</b> |
| 10.00 | 2.25           | 4.50           | 2.22                              | 2.50           | 2.05  | <b>0.45</b> |
| 15.00 | 3.00           | 6.00           | 2.50                              | 3.32           | 2.68  | <b>0.63</b> |

Στον παραπάνω πίνακα έχουν γίνει οι εξής υπολογισμοί

$$A_1 = By_1, V_1 = Q / A_1, E_1 = y_1 + V_1^2 / 2g$$

$$\min E = 1.50y_c = \frac{3}{2} \left( \frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3}$$

(γ) Από τη θεωρία έχουμε ότι

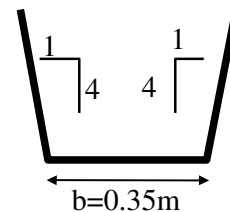
$$b_{\min} = \frac{3}{2} \frac{Q}{E_1^{3/2}} \sqrt{\frac{3}{2g}}$$

το οποίο υπολογίζεται στον πίνακα που ακολουθεί.

| Q     | y <sub>1</sub> | A <sub>1</sub> | V <sub>1</sub> =Q/By <sub>1</sub><br>1 | E <sub>1</sub> | b <sub>min</sub> |
|-------|----------------|----------------|--|----------------|------------------|
| 5.00  | 1.50           | 3.00           | 1.67                                   | 1.64           | <b>1.39</b>      |
| 10.00 | 2.25           | 4.50           | 2.22                                   | 2.50           | <b>1.48</b>      |
| 15.00 | 3.00           | 6.00           | 2.50                                   | 3.32           | <b>1.46</b>      |

### Άσκηση Β.2

Για τη διατομή της τάφρου του σχήματος από σκυρόδεμα (Manning n = 0.016) και εμφανίζεται στην οδοποιία σε υψηλό επίχωμα στο έρεισμα του δρόμου ζητούνται:



(α) Για κατά μήκος κλίσεις πυθμένα 0.01 και 0.0001 και βάθος ομοιόμορφης ροής  $y_o = 0.15$  m, οι παροχές που μεταφέρονται και τα αντίστοιχα κρίσιμα βάθη. Να χαρακτηριστεί η ροή σαν υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη.

(β) Για παροχές  $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$  και  $0.005 \text{ m}^3/\text{s}$  και βάθος ομοιόμορφης ροής  $y_o = 0.10$  m να προσδιοριστούν οι κατά μήκος κλίσεις  $J_o$ . Να χαρακτηριστεί η ροή σαν υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη για κάθε περίπτωση.

(γ) Για παροχές  $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$  και  $0.03 \text{ m}^3/\text{s}$  και για κλίσεις πυθμένα 0.01 και 0.0001 να υπολογίσετε τα ομοιόμορφα βάθη.

Απάντηση

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$T = b + 2Zy = b + 0.50 y$$

$$A = (b + 0.25 y) y$$

$$P = b + 2y (1 + 0.25^2)^{1/2} = b + 2.06 y$$

$$R = A/P$$

$$D = A/T$$

(α) Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων και δεδομένα τα  $y_0$ ,  $J$ ,  $n$  (και επομένως τα  $A$ ,  $R$ ) η παροχή υπολογίζεται από τη σχέση του Manning

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} J^{1/2}$$

Το κρίσιμο βάθος ( $Fr = 1$ ) υπολογίζεται με την επαναληπτική σχέση

$$y_c = \frac{1}{(b + Zy_c)} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g} (b + 2Zy_c)}$$

Οι υπολογισμοί των παροχής και κρίσιμου βαθών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μαζί με το χαρακτηρισμό της ροής.

| $y$<br>(μ) | $J_0$  | $Z$   | $B$<br>(μ) | $A$<br>(μ) | $P$<br>(μ) | $R$<br>(μ) | $V$<br>(μ/δλ) | $Q$<br>(λ/δλ) | $y_c$<br>(μ) | Χαρακτηρισμός<br>ροής |
|------------|--------|-------|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|--------------|-----------------------|
| 0.15       | 0.0100 | 0.250 | 0.35       | 0.058      | 0.659      | 0.088      | 1.238         | <b>71.97</b>  | <b>0.157</b> | Υπερκρίσιμη           |
| 0.15       | 0.0010 | 0.250 | 0.35       | 0.058      | 0.659      | 0.088      | 0.392         | <b>22.76</b>  | <b>0.074</b> | Υποκρίσιμη            |
| 0.15       | 0.0001 | 0.250 | 0.35       | 0.058      | 0.659      | 0.088      | 0.124         | <b>7.20</b>   | <b>0.035</b> | Υποκρίσιμη            |

(β) Λύνουμε την εξίσωση του Manning ως προς  $J$ , δεδομένου ότι όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι γνωστοί. Το κρίσιμο βάθος υπολογίζεται κατά τα γνωστά.

$$J = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}}$$

| $y$<br>(μ) | $B$<br>(μ) | $A$<br>(μ) | $P$<br>(μ) | $R$<br>(μ) | $Q$<br>(λ/δλ) | $V$<br>(μ/δλ) | $J_0$         | $y_c$<br>(μ) | Χαρακτηρισμός<br>ροής |
|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|---------------|--------------|-----------------------|
| 0.1        | 0.35       | 0.038      | 0.556      | 0.067      | 5             | 0.13          | <b>0.0002</b> | <b>0.027</b> | Υποκρίσιμη            |
| 0.1        | 0.35       | 0.038      | 0.556      | 0.067      | 50            | 1.33          | <b>0.0166</b> | <b>0.124</b> | Υπερκρίσιμη           |

(γ) Στην τραπεζοειδή διατομή το ομοιόμορφο βάθος υπολογίζεται από την επαναληπτική σχέση

$$y = \frac{1}{b + zy} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b + 2y\sqrt{1+z^2})^{2/3} \right]^{3/5}$$

| Q<br>(λδλ) | Z    | n     | B<br>(μ) | J <sub>o</sub> | y <sub>o</sub><br>(μ) |
|------------|------|-------|----------|----------------|-----------------------|
| 50         | 0.25 | 0.016 | 0.35     | 0.0100         | <b>0.118</b>          |
| 50         | 0.25 | 0.016 | 0.35     | 0.0010         | <b>0.251</b>          |
| 50         | 0.25 | 0.016 | 0.35     | 0.0001         | <b>0.525</b>          |
| 30         | 0.25 | 0.016 | 0.35     | 0.0100         | <b>0.085</b>          |
| 30         | 0.25 | 0.016 | 0.35     | 0.0010         | <b>0.179</b>          |
| 30         | 0.25 | 0.016 | 0.35     | 0.0001         | <b>0.379</b>          |

**Άσκηση Β.3**

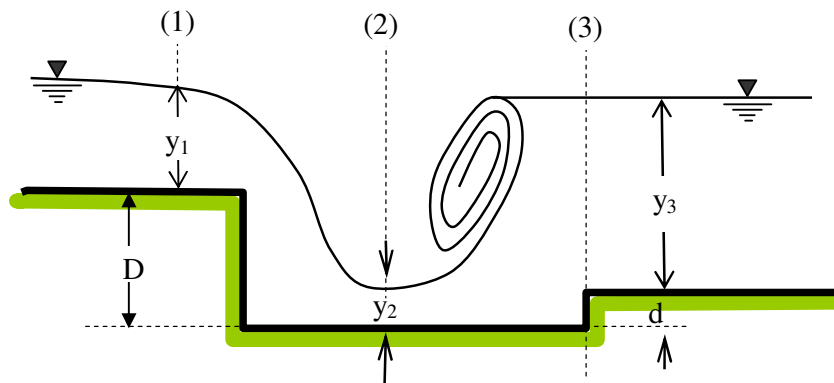
Σε ένα διευθετημένο ρέμα υπάρχει η ανάγκη της καταστροφής της ενέργειας του νερού με την δημιουργία λεκάνης κατάντη του αναβαθμού όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογιστεί το βάθος ροής στη διατομή (2) του ορθογωνικού αγωγού για ύψος πτώσης D = 2.00 m με χρήση του θεωρήματος ενέργειας.

(β) Να υπολογιστεί το βάθος ροής στη διατομή (3) του ορθογωνικού αγωγού κατάντη, για ύψος αναβαθμού d = 0.50 m με χρήση του θεωρήματος ορμής.

(γ) Να υπολογιστούν οι απώλειες ενέργειας του υδραυλικού άλματος μεταξύ των διατομών (2) και (3).

**Λεδομένα:** παροχή Q = 140 m<sup>3</sup>/s, πλάτος B = 14 m και βάθος ανάντη y<sub>1</sub> = 2.17 m. Η ροή να θεωρηθεί ομοιόμορφη στις διατομές (1), (2) και (3) και η πίεση ότι κατανέμεται υδροστατικά. Να αμεληθούν οι απώλειες λόγω διατμητικών τάσεων στο όριο.



**Απάντηση**

(α) Η ταχύτητα στη διατομή (1) είναι

$$V_1 = Q / by_1 = 140 / (14 \times 2.17) = 4.61 \text{ m/s.}$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση ενέργειας μεταξύ των διατομών (1) και (2)

$$D + E_1 = E_2 \Leftrightarrow D + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = y_2 + \frac{Q^2}{2g(by_2)^2}.$$

Με δοκιμές υπολογίζουμε το βάθος ροής στη διατομή (2)

$$y_2 = \mathbf{1.11 \text{ m.}}$$

(β) Εφαρμόζουμε την εξίσωση ορμής μεταξύ των διατομών (2) και (3)

$$F_{px} + F_{tx} + F_{gx} = \rho Q(V_3 - V_2)$$

όπου  $F_{tx} \approx 0$ ,  $F_{gx} \approx 0$  και

$$F_{px} = F_{p2} - F_{p3} = \rho g \frac{by_2^2}{2} - \rho g \frac{b(y_3 + d)^2}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ορμής τη δύναμη των πιέσεων και τις ταχύτητες  $V_2 = Q/by_2$ ,  $V_3 = Q/by_3$  καταλήγουμε στη σχέση

$$F_{px} = \rho g \frac{by_2^2}{2} - \rho g \frac{b(y_3 + d)^2}{2} = \rho Q^2 \left( \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{by_2^2}{2} - \frac{b(y_3 + d)^2}{2} = \frac{Q^2}{g} \left( \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_2} \right) \Rightarrow$$

$$A_2 \frac{y_2}{2} - A_3 \frac{y_3}{2} - A_3 d - \frac{bd^2}{2} = \frac{Q^2}{g} \left( \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_2} \right) \Rightarrow$$

$$A_2 \bar{y}_2 - A_3 \bar{y}_3 - A_3 d - \frac{bd^2}{2} = \frac{Q^2}{g} \left( \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_2} \right); \bar{y}_2 = \frac{y_2}{2}, \bar{y}_3 = \frac{y_3}{2}$$

Επομένως

$$A_2 \bar{y}_2 + \frac{Q^2}{gA_2} = A_3 \bar{y}_3 + \frac{Q^2}{gA_3} + A_3 d + \frac{bd^2}{2} \Leftrightarrow M_2 = M_3 + A_3 d + \frac{bd^2}{2}$$

Η λύση επιτυγχάνεται με δοκιμές απ' όπου προκύπτει ότι

$$y_3 = \mathbf{3.15 \text{ m.}}$$

(γ) Οι απώλειες ενέργειας στο άλμα υπολογίζονται από τη σχέση

$$H_2 - H_3 = \left( y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \right) - \left( d + y_3 + \frac{V_3^2}{2g} \right)$$

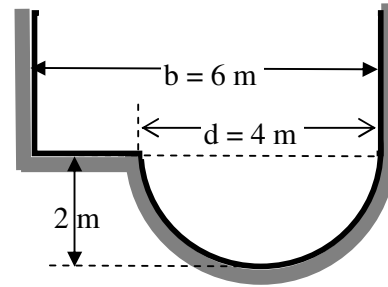
όπου  $V_2 = Q/by_2 = \mathbf{9.01 \text{ m/s}}$  και  $V_3 = Q/by_3 = \mathbf{3.17 \text{ m/s}}$

Επομένως

$$H_2 - H_3 = 5.25 - 4.16 = \mathbf{1.08 \text{ m.}}$$

Άσκηση Β.4

Για τη διώρυγα του σχήματος με **ημικυκλικό** το χαμηλότερο τμήμα της ( $d=4\text{m}$ ):



(α) Να προσδιορίσετε την παροχή που μεταφέρει όταν το βάθος ροής είναι 2m και η ροή είναι **κρίσιμη**.

(β) Ποια είναι η (κρίσιμη) κλίση του αγωγού;

(γ) Ποιο θα είναι το βάθος ροής σε περίπτωση που η παροχή της διώρυγας τριπλασιαστεί;

(δ) Να χαρακτηρίσετε τη ροή του ερωτήματος (γ) σαν υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη.

Δεδομένα: Συντ. τραχύτητας Manning  $n = 0.016$ .

Απάντηση

(α) Εφόσον η ροή είναι κρίσιμη, ισχύει ότι

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{V_c}{\sqrt{gD_c}} = 1$$

και ότι το κρίσιμο βάθος είναι  $y_c=2\text{m}$ . Όμως

$$A_c = \pi d^2/8 = 2\pi = 6.28\text{m}^2$$

$$T_c = 4\text{m}$$

$$D_c = A_c/T_c = 0.5\pi = 1.57\text{m}$$

και επομένως

$$V_c = \sqrt{gD_c} = 3.93\text{m} \Rightarrow Q = V_c A_c = \mathbf{24.66\text{m}^3/\text{s}}.$$

(β) Η (κρίσιμη) κλίση του αγωγού θα προκύψει από τη σχέση του Manning

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2}; R = A/P,$$

όπου  $A_c = \pi d^2/8 = 2\pi = 6.28\text{m}^2$

$$P_c = \pi d/2 = 2\pi = 6.28\text{m}$$

$$R_c = 1\text{m}$$

Επομένως

$$J_c = \left[ \frac{nV}{R^{2/3}} \right]^2 = \mathbf{0.0039}.$$

(γ) Το βάθος ροής θα προσδιοριστεί με δοκιμές. Εάν το βάθος ροής πάνω από το επίπεδο τμήμα της διατομής είναι  $y$ , τότε

$$A = \pi d^2/8 + 6y = 2\pi + 6y = 6.28 + 6y$$

$$P = \pi d/2 + 2y + 2 = 6.28 + 2(y+1)$$



$$R = \frac{6.28 + 6y}{6.28 + 2(y + 1)}$$

Η παροχή είναι  $Q_1 = 3Q = 3 \times 24.66 = 74 \text{m}^3/\text{s}$ , και η σχέση του Manning γίνεται

$$Q_1 = \frac{1}{n} AR^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow 74 = \frac{1}{0.016} (6.28 + 6y) \left( \frac{6.28 + 6y}{6.28 + 2(y + 1)} \right)^{2/3} (0.0039)^{1/2},$$

απ' όπου με δοκιμές προκύπτει ότι  $y = 1.51 \text{m}$ , δηλαδή το βάθος ροής είναι

$$y_1 = 2 + 1.51 = 3.51 \text{m}.$$

(δ) Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$A = \pi d^2/8 + 6y = 2\pi = 6.28 + 6 \times 1.51 = 15.37 \text{m}^2$$

$$T = 6 \text{m}$$

$$D = A/T = 2.56 \text{m}$$

$$V = Q_1/A = 4.82 \text{m/s}$$

Επομένως

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{4.82}{\sqrt{2.56g}} = 0.96 < 1$$

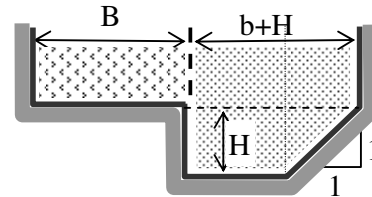
και η ροή είναι **υποκρίσιμη**.

### Άσκηση Β.5

(α) Να προσδιορίσετε την παροχή που μεταφέρει η διώρυγα, όταν η μικρή κοίτη (τραπέζιο) βάθους  $H$  ρέει πλήρης.

(β) Να χαρακτηρίσετε τη ροή.

(γ) Σε περίπτωση που μεταφέρεται τριπλάσια παροχή, ποιο θα είναι το βάθος της ομοιόμορφης ροής με δεδομένο ότι η ταχύτητα δεν είναι ίδια σε ολόκληρη τη διατομή.



Δεδομένα:  $J_0=0.0015$ ,  $n=0.016$ ,  $b=3\text{m}$ ,  $H=2\text{m}$ ,  $B=4\text{m}$ .

### Απάντηση

(α) Όταν η ελεύθερη επιφάνεια είναι στη διακεκομμένη γραμμή,  $A=8\text{m}^2$  και  $P=7.83\text{m}$ , επομένως  $R=1.02\text{m}$  και από τη σχέση του Manning

$$Q = AV = \frac{A}{n} R^{2/3} J^{1/2} = 19.65 \text{m}^3/\text{s}.$$

(β) Στη μικρή κοίτη  $T=5\text{m}$  και  $D=A/T=1.60\text{m}$  και  $V=Q/A=2.46\text{m/s}$ , επομένως

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = 0.62 < 1$$

και η ροή χαρακτηρίζεται ως υποκρίσιμη.

$$(\gamma) 3Q = 58.94 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Χωρίζουμε την κοίτη όπως στο σχήμα. Το τμήμα αριστερά έχει πλάτος ελεύθερης επιφάνειας B, ενώ το δεξιά b+H. Εάν οι παροχές που μεταφέρονται από τα δύο τμήματα είναι Q<sub>1</sub> και Q<sub>2</sub> αντίστοιχα, τότε

$$3Q = Q_1 + Q_2 = \frac{J^{1/2}}{n} (A_1 R_1^{2/3} + A_2 R_2^{2/3})$$

όπου μετρώντας το βάθος y από τον πυθμένα της ευρείας κοίτης

$$A_1 = By, P_1 = B + y, R_1 = By / (B + y) \text{ και}$$

$$A_2 = 8 + by, P_2 = 7.83 + y, R_2 = (8 + by) / (7.83 + y).$$

Μετά από δοκιμές προκύπτει ότι  $y = 1.27 \text{ m}$ , δηλαδή ότι το βάθος ροής είναι **3.27m**.

### Άσκηση Β.6

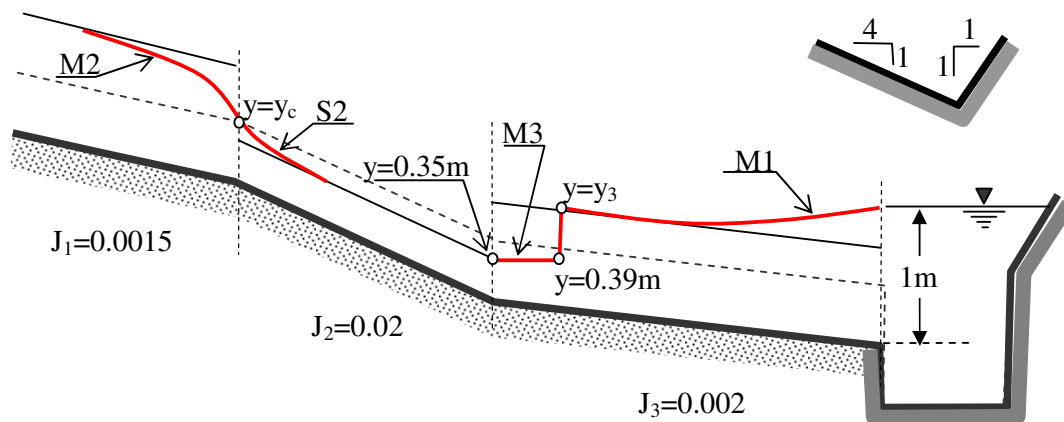
Η τριγωνική τάφρος του σχήματος με κλίσεις πρανών 4:1 και 1:1 που βρίσκεται στο πλάι ενός δρόμου, έχει συντελεστή τριβών του Manning  $n = 0.016$  και μεταφέρει παροχή  $0.8 \text{ m}^3/\text{s}$ .

(α) Να προσδιορίσετε το κρίσιμο βάθος.

(β) Για τις κλίσεις πυθμένα του σχήματος να προσδιορίσετε τα ομοιόμορφα βάθη ροής.

(γ) Να προσδιορίσετε τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας σχηματικά και να χαρακτηρίσετε τις καμπύλες.

Τα μήκη των τριών τμημάτων της τάφρου είναι επαρκώς μεγάλα.



### Απάντηση

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για την τριγωνική τάφρο του σχήματος

$$T = y + 4y = 5y \quad R = A/P = 0.451 y$$

$$A = Ty/2 = 2.50 y^2 \quad D = A/T = 0.50 y$$

$$P = y (2^{1/2} + (16 + 1)^{1/2}) = 5.537 y$$

(α) Το κρίσιμο βάθος υπολογίζεται από τη σχέση  $Fr = 1$ , όπου για την τριγωνική τάφρο ισχύει

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{\frac{Q}{A}}{\sqrt{g(0.50y)}} = 1 \Leftrightarrow y_c = \left( \frac{Q}{2.50\sqrt{0.50g}} \right)^{2/5} = \mathbf{0.461m}.$$

(β) Τα ομοιόμορφα βάθη για κάθε μια κλίση θα υπολογιστούν από τη σχέση του Manning

$$Q = AV = \frac{A}{n} R^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow Q = \frac{2.5y^2}{n} \left( \frac{2.5y^2}{5.537y} \right)^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow y = \left[ \frac{nQ}{J^{1/2}} \frac{(5.537)^{2/3}}{(2.5)^{5/3}} \right]^{3/8}.$$

Τα ομοιόμορφα βάθη που προκύπτουν είναι

κλίση  $J_1 = 0.0015 \quad y_1 = \mathbf{0.571m} > y_c \quad (\text{υποκρίσιμη ροή})$

κλίση  $J_2 = 0.02 \quad y_2 = \mathbf{0.351m} < y_c \quad (\text{υπερκρίσιμη ροή})$

κλίση  $J_3 = 0.002 \quad y_3 = \mathbf{0.541m} > y_c \quad (\text{υποκρίσιμη ροή})$

(γ) Από το τμήμα 1 στο τμήμα 2 έχουμε μετάβαση από υποκρίσιμη σε υπερκρίσιμη ροή, επομένως **καμπύλες M2 και S2**.

Από το τμήμα 2 στο τμήμα 3 έχουμε μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή, επομένως θα δημιουργηθεί **υδραυλικό άλμα**. Η θέση του άλματος προσδιορίζεται αφού υπολογίσουμε τα συζυγή βάθη των  $y_2$  και  $y_3$ . Από την εξίσωση της ειδικής δύναμης έχουμε ότι

$$M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{y}A = \frac{Q^2}{2.5y^2g} + \frac{y}{3}(2.5y^2).$$

Από την παραπάνω εξίσωση  $M_2 = M_{2\sigma}$  προκύπτει ότι  $y_{2\sigma} = 0.593m > y_3 = 0.541m$ , δηλαδή το άλμα θα δημιουργηθεί στα κατάντη της αλλαγής κλίσης. Από την παραπάνω εξίσωση  $M_3 = M_{3\sigma}$  προκύπτει ότι  $y_{3\sigma} = 0.39m$ . Επομένως στην αρχή του τρίτου τμήματος έχουμε **καμπύλη M3** με βάθη 0.351m στα ανάντη και 0.39m στο σημείο δημιουργίας υδραυλικού άλματος.

Επειδή η στάθμη της δεξαμενής είναι  $1m > y_3 = 0.541m$ , στην κατάληξη της διατομής 3 έχουμε **καμπύλη M1**.

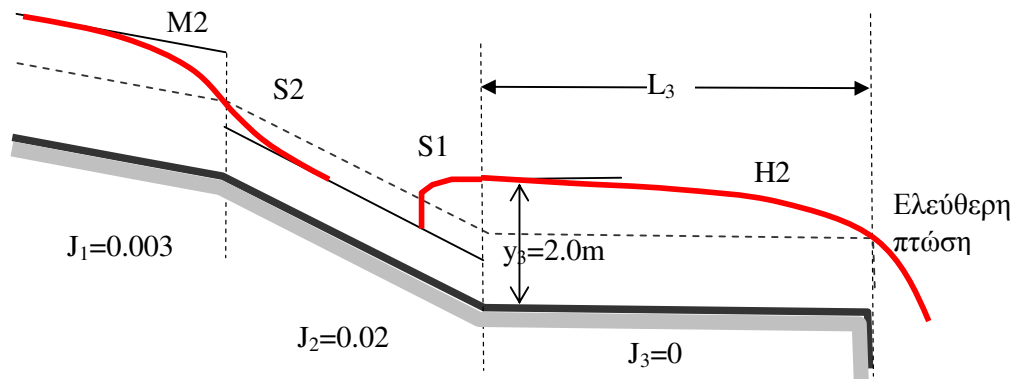
Τα προφίλ ελεύθερης επιφάνειας φαίνονται σχηματικά στην εκφώνηση.

### Άσκηση B.7

Επενδυμένη ορθογωνική τάφρος πλάτους  $b=2m$  με συντ. τραχύτητας Manning  $n=0.016$ , μεταφέρει παροχή  $10m^3/s$  από ταμειυτήρα ανάντη και καταλήγει σε ελεύθερη πτώση.

Για τη μηκοτομή του σχήματος με δεδομένες τις κλίσεις πυθμένα και μεγάλα κατά τμήμα μήκη  $L_1$  και  $L_2$ :

- (1) Να καθοριστούν το κρίσιμο βάθος και τα βάθη της ομοιόμορφης ροής σε κάθε τμήμα.
- (2) Εάν το βάθος ροής στα ανάντη της τάφρου με κλίση  $J_3 = 0$  είναι  $y = 2.00\text{m}$ , να χαραχθούν σε σκαρίφημα και να αιτιολογηθούν πλήρως οι καμπύλες της ελεύθερης επιφάνειας του νερού καθ' όλο το μήκος του αγωγού.
- (3) Να υποδείξετε και αιτιολογήσετε τον τρόπο υπολογισμού του μήκους  $L_3$  της τάφρου με οριζόντιο πυθμένα.



Απάντηση

(1) Το κρίσιμο βάθος υπολογίζεται από τη σχέση  $Fr = 1$ , όπου για την ορθογωνική τάφρο ισχύει

$$y_c = \left( \frac{Q^2}{b^2 g} \right)^{1/3} = 1.37\text{m}.$$

(2) Τα ομοιόμορφα βάθη για κάθε μια κλίση θα υπολογιστούν από τη σχέση του Manning για ορθογωνική διατομή

$$Q = AV = \frac{A}{n} R^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow y = \frac{1}{b} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b + 2y)^{2/3} \right]^{3/5}$$

Τα ομοιόμορφα βάθη που προκύπτουν μετά από διαδοχικές δοκιμές είναι

- |                     |                            |                   |
|---------------------|----------------------------|-------------------|
| κλίση $J_1 = 0.003$ | $y_1 = 1.93\text{m} > y_c$ | (υποκρίσιμη ροή)  |
| κλίση $J_2 = 0.02$  | $y_2 = 0.92\text{m} < y_c$ | (υπερκρίσιμη ροή) |
| κλίση $J_3 = 0.00$  | $y_3 = \infty > y_c$       | (υποκρίσιμη ροή)  |

(γ) Από το τμήμα 1 στο τμήμα 2 έχουμε μετάβαση από υποκρίσιμη σε υπερκρίσιμη ροή, επομένως **καμπύλες M2 και S2**.

Από το τμήμα 2 στο τμήμα 3 έχουμε μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή, επομένως θα δημιουργηθεί **υδραυλικό άλμα**. Η θέση του άλματος προσδιορίζεται αφού

υπολογίσουμε τα συζυγή βάθη των  $y_2$  και  $y_3$ . Από την εξίσωση της ειδικής δύναμης έχουμε ότι

$$M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{y}A = \frac{Q^2}{gby} + \frac{y}{2}(by).$$

Από την παραπάνω εξίσωση  $M_2 = M_{2\sigma}$  προκύπτει ότι  $y_{2\sigma} = 1.943\text{m} < y_3 = 2.0\text{m}$ , δηλαδή το άλμα θα δημιουργηθεί στα ανάντη της αλλαγής κλίσης. Επομένως στο πέρας του 2<sup>ου</sup> τμήματος έχουμε καμπύλη υπερύψωσης S1, ενώ στο πέρας του τρίτου τμήματος έχουμε **καμπύλη H2** που στο σημείο της ελεύθερης πτώσης διέρχεται από το κρίσιμο βάθος.

Τα προφίλ ελεύθερης επιφάνειας φαίνονται σχηματικά στην εκφώνηση.

(3) Θα γίνει αριθμητική ολοκλήρωση προς τα πίσω, από το σημείο της ελεύθερης πτώσης  $y=y_c$  έως  $y = 2\text{m}$  για τον προσδιορισμό του μήκους που χρειάζεται να αναπτυχθεί το προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας. Ο υπολογισμός φαίνεται παρακάτω για  $Q=10\text{m}^3/\text{s}$ ,  $b=2\text{m}$ ,  $J_o=0$ ,  $n=0.016$ :

| y    | A   | P    | R    | V    | E     | ΔE    | J <sub>E</sub> | J <sub>E</sub> (bar) | J <sub>o</sub> -J <sub>E</sub> | Δx     | XΘ     |
|------|-----|------|------|------|-------|-------|----------------|----------------------|--------------------------------|--------|--------|
| 1.37 | 2.7 | 4.73 | 0.58 | 3.66 | 2.049 |       | 0.00714        |                      |                                |        | 0.00   |
| 1.40 | 2.8 | 4.80 | 0.58 | 3.57 | 2.050 | 0.001 | 0.00670        | 0.00692              | -0.00692                       | -0.18  | -0.18  |
| 1.45 | 2.9 | 4.90 | 0.59 | 3.45 | 2.056 | 0.006 | 0.00613        | 0.00641              | -0.00641                       | -0.93  | -1.10  |
| 1.50 | 3.0 | 5.00 | 0.60 | 3.33 | 2.066 | 0.010 | 0.00562        | 0.00587              | -0.00587                       | -1.75  | -2.85  |
| 1.55 | 3.1 | 5.10 | 0.61 | 3.23 | 2.080 | 0.014 | 0.00517        | 0.00540              | -0.00540                       | -2.60  | -5.46  |
| 1.60 | 3.2 | 5.20 | 0.62 | 3.13 | 2.098 | 0.017 | 0.00478        | 0.00497              | -0.00497                       | -3.49  | -8.95  |
| 1.65 | 3.3 | 5.30 | 0.62 | 3.03 | 2.118 | 0.020 | 0.00442        | 0.00460              | -0.00460                       | -4.41  | -13.36 |
| 1.70 | 3.4 | 5.40 | 0.63 | 2.94 | 2.141 | 0.023 | 0.00410        | 0.00426              | -0.00426                       | -5.37  | -18.73 |
| 1.75 | 3.5 | 5.50 | 0.64 | 2.86 | 2.166 | 0.025 | 0.00382        | 0.00396              | -0.00396                       | -6.35  | -25.08 |
| 1.80 | 3.6 | 5.60 | 0.64 | 2.78 | 2.193 | 0.027 | 0.00356        | 0.00369              | -0.00369                       | -7.37  | -32.46 |
| 1.85 | 3.7 | 5.70 | 0.65 | 2.70 | 2.222 | 0.029 | 0.00333        | 0.00344              | -0.00344                       | -8.43  | -40.88 |
| 1.90 | 3.8 | 5.80 | 0.66 | 2.63 | 2.253 | 0.031 | 0.00312        | 0.00322              | -0.00322                       | -9.52  | -50.40 |
| 1.95 | 3.9 | 5.90 | 0.66 | 2.56 | 2.285 | 0.032 | 0.00292        | 0.00302              | -0.00302                       | -10.64 | -61.05 |
| 2.00 | 4.0 | 6.00 | 0.67 | 2.50 | 2.319 | 0.033 | 0.00275        | 0.00284              | -0.00284                       | -11.80 | -72.85 |

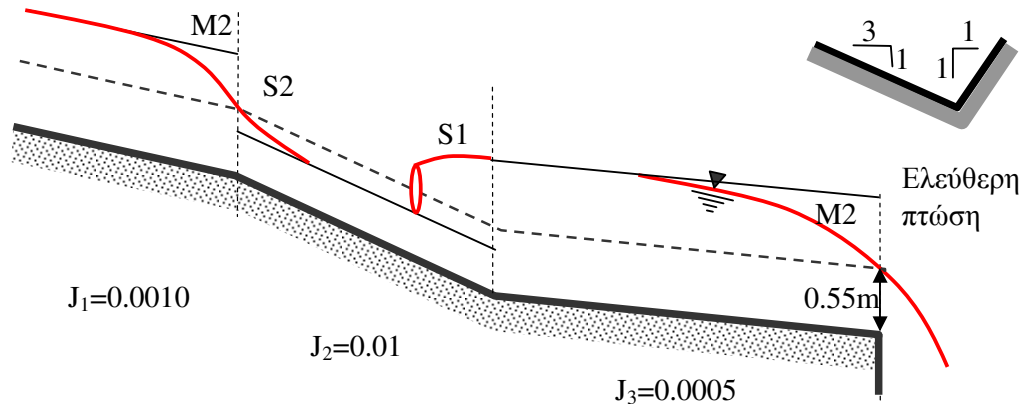
Το βάθος ροής θα είναι 2m σε απόσταση περίπου 73m ανάντη της ελεύθερης πτώσης.

Άσκηση Β.8

Η τριγωνική τάφρος του σχήματος με κλίσεις πρανών 3:1 και 1:1 που βρίσκεται στο πλάι ενός δρόμου, έχει συντελεστή τριβών του Manning  $n=0.014$  και ελεύθερη πτώση σε οχετό του δρόμου. Εάν το βάθος ροής στην πτώση είναι 0.55m:

- (α) Για τις κλίσεις πυθμένα του σχήματος να προσδιορίσετε τα ομοιόμορφα βάθη ροής.
- (β) Να προσδιορίσετε τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας σχηματικά και να χαρακτηρίσετε τις καμπύλες.

Τα μήκη των τριών τμημάτων της τάφρου είναι επαρκώς μεγάλα.



Απάντηση

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για την τριγωνική τάφρο του σχήματος

$$T = y + 3y = 4y$$

$$A = Ty/2 = 2y^2$$

$$P = y(2\frac{1}{2} + (9 + 1)\frac{1}{2}) = 4.576y$$

$$R = A/P = 0.437 y$$

$$D = A/T = 0.50 y$$

(α) Η κλίση πριν από την ελεύθερη πτώση είναι πολύ μικρή, μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε ότι η ροή στο τρίτο τμήμα είναι υποκρίσιμη (πράγμα που θα πρέπει να αποδειχθεί) και επομένως το βάθος ροής στην πτώση είναι το κρίσιμο βάθος. Το κρίσιμο βάθος υπολογίζεται από τη σχέση  $Fr = 1$ , όπου για την τριγωνική τάφρο ισχύει

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{\frac{Q}{2y^2}}{\sqrt{g(0.50y)}} = 1 \Leftrightarrow y_c = 0.55 = \left( \frac{Q}{2\sqrt{0.50g}} \right)^{2/5} \Rightarrow Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Τα ομοιόμορφα βάθη για κάθε μια κλίση θα υπολογιστούν από τη σχέση του Manning

$$Q = AV = \frac{A}{n} R^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow Q = \frac{2y^2}{n} \left( \frac{2y^2}{4.576y} \right)^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow y = \left[ 0.868 \frac{nQ}{J^{1/2}} \right]^{3/8}$$

και προκύπτουν ως

|                      |                             |  |
|----------------------|-----------------------------|--|
| κλίση $J_1 = 0.001$  | $y_1 = 0.699\text{m} > y_c$ | (υποκρίσιμη ροή)   |
| κλίση $J_2 = 0.01$   | $y_2 = 0.454\text{m} < y_c$ | (υπερκρίσιμη ροή)  |
| κλίση $J_3 = 0.0005$ | $y_3 = 0.796\text{m} > y_c$ | (υποκρίσιμη ροή – <b>παραδοχή ότι <math>y=y_c</math> στη πτώση είναι σωστή</b> ) |

(β) Από το τμήμα 1 στο τμήμα 2 έχουμε μετάβαση από υποκρίσιμη σε υπερκρίσιμη ροή, επομένως καμπύλες M2 και S2.

Από το τμήμα 2 στο τμήμα 3 έχουμε μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή, επομένως θα δημιουργηθεί υδραυλικό άλμα. Η θέση του άλματος προσδιορίζεται αφού υπολογίσουμε τα συζυγή βάθη των  $y_2$  και  $y_3$ . Από την εξίσωση της ειδικής δύναμης έχουμε ότι

$$M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{y}A = \frac{Q^2}{2y^2g} + \frac{y}{3}(2y^2).$$

Από την παραπάνω εξίσωση  $M_2 = M_{2\sigma}$  προκύπτει ότι  $y_{2\sigma} = 0.663\text{m} < y_3 = 0.796\text{m}$ , δηλαδή το άλμα θα δημιουργηθεί στα ανάντη της αλλαγής κλίσης Καμπύλη S1.

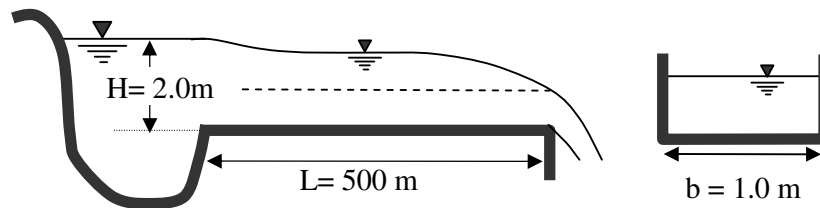
Τέλος πριν από την πτώση θα δημιουργηθεί καμπύλη M2.

Τα προφίλ ελεύθερης επιφάνειας φαίνονται σχηματικά στην εκφώνηση.

### Άσκηση Β.9

Οριζόντια διάωρυγα με ορθογωνική διατομή όπως φαίνεται στο σχήμα, επενδυμένη με σκυρόδεμα  $n = 0.016$  και μήκους 500 m υδροδοτείται από ταμειυτήρα ανάντη και καταλήγει σε πτώση.

Να υπολογιστεί η παροχή  $Q$  που μεταφέρεται. Θεωρείστε συντελεστή απωλειών εισόδου  $K = 0.20$ .



### Απάντηση

Έστω ότι η παροχή στη διάωρυγα είναι γνωστή. Τότε γνωρίζουμε και το βάθος ροής στην πτώση (κρίσιμο βάθος). Ολοκληρώνουμε αριθμητικά την καμπύλη H2 από την πτώση έως τον ταμειυτήρα και υπολογίζουμε το ύψος ενέργειας εκεί. Αν είναι  $H = 2.0$  τότε η αρχική μας υπόθεση είναι σωστή αλλιώς επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό με διαφορετική παροχή. Στον ταμειυτήρα ( $x = -500\text{m}$ ) ισχύει

$$H = y + \frac{V^2}{2g} + K \frac{V^2}{2g} = y + (1 + K) \frac{V^2}{2g}.$$

**1η Δοκιμή:**  $Q = 1.0 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $y_c = (Q^2/b^2g)^{1/3} = 0.47 \text{ m}$ .

Με αριθμητική ολοκλήρωση (καμπύλη H2) προκύπτει ότι  $H \approx E = 1.31 \text{ m} < 2.0 \text{ m}$  (βλ. συνημμένο πίνακα υπολογισμών). Επομένως  $Q > 1.0 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**2η Δοκιμή:**  $Q = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $y_c = (Q^2/b^2g)^{1/3} = 0.61 \text{ m}$ .

Με αριθμητική ολοκλήρωση (καμπύλη H2) προκύπτει ότι  $H \approx E = 1.66 \text{ m} < 2.0 \text{ m}$  (βλ. συνημμένο πίνακα υπολογισμών). Επομένως  $Q > 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**3η Δοκιμή:**  $Q = 2.0 \text{ m}^3/\text{s}$ .

$y_c = (Q^2/b^2g)^{1/3} = 0.74 \text{ m}$ .

Με αριθμητική ολοκλήρωση (καμπύλη H2) προκύπτει ότι  $H \approx E = 2.00 \text{ m}$  που είναι το ζητούμενο ύψος ενέργειας (βλ. συνημμένο πίνακα υπολογισμών). ( $H = 2.005 \text{ m}$ ).

Επομένως  **$Q = 2.0 \text{ m}^3/\text{s}$** .

## Καμπύλες H2

**Δεδομένα:**  $B=1\text{m}$ ,  $Z=0$ ,  $n=0.016$ ,  $J_o=0$

### 1η Δοκιμή $Q=1\text{m}^3/\text{s}$

| y    | Q | A     | P    | R    | V    | E            | $\Delta E$ | $J_E$  | $J_E(\text{bar})$ | $J_o - J_E$ | $\Delta x$ | x    |
|------|---|-------|------|------|------|--------------|------------|--------|-------------------|-------------|------------|------|
| 0.47 | 1 | 0.467 | 1.93 | 0.24 | 2.14 | 0.701        |            | 0.0078 |                   |             |            | 0    |
| 0.57 | 1 | 0.567 | 2.13 | 0.27 | 1.76 | 0.726        | 0.02       | 0.0047 | 0.0062            | -0.0062     | -4.00      | -4   |
| 0.67 | 1 | 0.667 | 2.33 | 0.29 | 1.50 | 0.782        | 0.06       | 0.0031 | 0.0039            | -0.0039     | -14.53     | -19  |
| 0.77 | 1 | 0.767 | 2.53 | 0.30 | 1.30 | 0.854        | 0.07       | 0.0021 | 0.0026            | -0.0026     | -27.75     | -46  |
| 0.87 | 1 | 0.867 | 2.73 | 0.32 | 1.15 | 0.935        | 0.08       | 0.0016 | 0.0019            | -0.0019     | -43.71     | -90  |
| 0.97 | 1 | 0.967 | 2.93 | 0.33 | 1.03 | 1.022        | 0.09       | 0.0012 | 0.0014            | -0.0014     | -62.46     | -152 |
| 1.07 | 1 | 1.067 | 3.13 | 0.34 | 0.94 | 1.112        | 0.09       | 0.0009 | 0.0011            | -0.0011     | -84.06     | -237 |
| 1.17 | 1 | 1.167 | 3.33 | 0.35 | 0.86 | 1.205        | 0.09       | 0.0008 | 0.0009            | -0.0009     | -108.54    | -345 |
| 1.27 | 1 | 1.267 | 3.53 | 0.36 | 0.79 | 1.299        | 0.09       | 0.0006 | 0.0007            | -0.0007     | -135.94    | -481 |
| 1.28 | 1 | 1.280 | 3.56 | 0.36 | 0.78 | <b>1.311</b> | 0.01       | 0.0006 | 0.0006            | -0.0006     | -19.77     | -501 |

$(1+k)V^2/2g = \mathbf{0.037}$



**2η Δοκιμή**

| y    | Q   | A     | P    | R    | V    | E            | ΔE   | J <sub>E</sub> | J <sub>E</sub> (bar) | J <sub>0</sub> -J <sub>E</sub> | Δx      | x    |
|------|-----|-------|------|------|------|--------------|------|----------------|----------------------|--------------------------------|---------|------|
| 0.61 | 1.5 | 0.612 | 2.22 | 0.28 | 2.45 | 0.918        |      | 0.0086         |                      |                                |         | 0    |
| 0.71 | 1.5 | 0.712 | 2.42 | 0.29 | 2.11 | 0.938        | 0.02 | 0.0058         | 0.0072               | -0.0072                        | -2.79   | -3   |
| 0.81 | 1.5 | 0.812 | 2.62 | 0.31 | 1.85 | 0.986        | 0.05 | 0.0042         | 0.0050               | -0.0050                        | -9.56   | -12  |
| 0.91 | 1.5 | 0.912 | 2.82 | 0.32 | 1.64 | 1.050        | 0.06 | 0.0031         | 0.0036               | -0.0036                        | -17.53  | -30  |
| 1.01 | 1.5 | 1.012 | 3.02 | 0.33 | 1.48 | 1.124        | 0.07 | 0.0024         | 0.0028               | -0.0028                        | -26.73  | -57  |
| 1.11 | 1.5 | 1.112 | 3.22 | 0.34 | 1.35 | 1.205        | 0.08 | 0.0019         | 0.0022               | -0.0022                        | -37.18  | -94  |
| 1.21 | 1.5 | 1.212 | 3.42 | 0.35 | 1.24 | 1.290        | 0.09 | 0.0016         | 0.0017               | -0.0017                        | -48.89  | -143 |
| 1.31 | 1.5 | 1.312 | 3.62 | 0.36 | 1.14 | 1.379        | 0.09 | 0.0013         | 0.0014               | -0.0014                        | -61.88  | -205 |
| 1.41 | 1.5 | 1.412 | 3.82 | 0.37 | 1.06 | 1.470        | 0.09 | 0.0011         | 0.0012               | -0.0012                        | -76.16  | -281 |
| 1.51 | 1.5 | 1.512 | 4.02 | 0.38 | 0.99 | 1.562        | 0.09 | 0.0009         | 0.0010               | -0.0010                        | -91.75  | -372 |
| 1.61 | 1.5 | 1.612 | 4.22 | 0.38 | 0.93 | 1.656        | 0.09 | 0.0008         | 0.0009               | -0.0009                        | -108.66 | -481 |
| 1.62 | 1.5 | 1.620 | 4.24 | 0.38 | 0.93 | <b>1.664</b> | 0.01 | 0.0008         | 0.0008               | -0.0008                        | -9.36   | -490 |

$(1+k)V^2/2g = \mathbf{0.052}$

**3η Δοκιμή**

| y    | Q | A     | P    | R    | V    | E            | ΔE   | J <sub>E</sub> | J <sub>E</sub> (bar) | J <sub>0</sub> -J <sub>E</sub> | Δx      | x    |
|------|---|-------|------|------|------|--------------|------|----------------|----------------------|--------------------------------|---------|------|
| 0.74 | 2 | 0.742 | 2.48 | 0.30 | 2.70 | 1.112        |      | 0.0093         |                      |                                |         | 0    |
| 0.89 | 2 | 0.892 | 2.78 | 0.32 | 2.24 | 1.148        | 0.04 | 0.0059         | 0.0076               | -0.0076                        | -4.70   | -5   |
| 1.04 | 2 | 1.042 | 3.08 | 0.34 | 1.92 | 1.229        | 0.08 | 0.0040         | 0.0049               | -0.0049                        | -16.47  | -21  |
| 1.19 | 2 | 1.192 | 3.38 | 0.35 | 1.68 | 1.335        | 0.11 | 0.0029         | 0.0035               | -0.0035                        | -30.57  | -52  |
| 1.34 | 2 | 1.342 | 3.68 | 0.36 | 1.49 | 1.455        | 0.12 | 0.0022         | 0.0025               | -0.0025                        | -47.05  | -99  |
| 1.49 | 2 | 1.492 | 3.98 | 0.37 | 1.34 | 1.583        | 0.13 | 0.0017         | 0.0019               | -0.0019                        | -65.95  | -165 |
| 1.64 | 2 | 1.642 | 4.28 | 0.38 | 1.22 | 1.717        | 0.13 | 0.0014         | 0.0015               | -0.0015                        | -87.30  | -252 |
| 1.79 | 2 | 1.792 | 4.58 | 0.39 | 1.12 | 1.855        | 0.14 | 0.0011         | 0.0012               | -0.0012                        | -111.12 | -363 |
| 1.94 | 2 | 1.942 | 4.88 | 0.40 | 1.03 | <b>1.996</b> | 0.14 | 0.0009         | 0.0010               | -0.0010                        | -137.45 | -501 |

$(1+k)V^2/2g = \mathbf{0.065}$

Αυτή η σελίδα έχει αφεθεί σκόπιμα λευκή.

TABLE 5-6. VALUES OF THE ROUGHNESS COEFFICIENT  $n$   
(**Boldface** figures are values generally recommended in design)

| Type of channel and description   | Minimum | Normal       | Maximum |
|---|---------|--------------|---------|
| <b>A. CLOSED CONDUITS FLOWING PARTLY FULL</b>                                   |         |              |         |
| <b>A-1. Metal</b>   |         |              |         |
| <b>a. Brass, smooth</b>   | 0.009   | <b>0.010</b> | 0.013   |
| <b>b. Steel</b>   |         |              |         |
| 1. Lockbar and welded   | 0.010   | 0.012        | 0.014   |
| 2. Riveted and spiral   | 0.013   | 0.016        | 0.017   |
| <b>c. Cast iron</b>   |         |              |         |
| 1. Coated   | 0.010   | 0.013        | 0.014   |
| 2. Uncoated   | 0.011   | 0.014        | 0.016   |
| <b>d. Wrought iron</b>  |         |              |         |
| 1. Black  | 0.012   | 0.014        | 0.015   |
| 2. Galvanized   | 0.013   | 0.016        | 0.017   |
| <b>e. Corrugated metal</b>  |         |              |         |
| 1. Subdrain   | 0.017   | 0.019        | 0.021   |
| 2. Storm drain  | 0.021   | <b>0.024</b> | 0.030   |
| <b>A-2. Nonmetal</b>  |         |              |         |
| <b>a. Lucite</b>  | 0.008   | 0.009        | 0.010   |
| <b>b. Glass</b>   | 0.009   | <b>0.010</b> | 0.013   |
| <b>c. Cement</b>  |         |              |         |
| 1. Neat, surface  | 0.010   | 0.011        | 0.013   |
| 2. Mortar   | 0.011   | 0.013        | 0.015   |
| <b>d. Concrete</b>  |         |              |         |
| 1. Culvert, straight and free of debris   | 0.010   | 0.011        | 0.013   |
| 2. Culvert with bends, connections, and some debris                             | 0.011   | <b>0.013</b> | 0.014   |
| 3. Finished   | 0.011   | 0.012        | 0.014   |
| 4. Sewer with manholes, inlet, etc., straight                                   | 0.013   | 0.015        | 0.017   |
| 5. Unfinished, steel form   | 0.012   | 0.013        | 0.014   |
| 6. Unfinished, smooth wood form   | 0.012   | <b>0.014</b> | 0.016   |
| 7. Unfinished, rough wood form  | 0.015   | 0.017        | 0.020   |
| <b>e. Wood</b>  |         |              |         |
| 1. Stave  | 0.010   | 0.012        | 0.014   |
| 2. Laminated, treated   | 0.015   | 0.017        | 0.020   |
| <b>f. Clay</b>  |         |              |         |
| 1. Common drainage tile   | 0.011   | <b>0.013</b> | 0.017   |
| 2. Vitrified sewer  | 0.011   | 0.014        | 0.017   |
| 3. Vitrified sewer with manholes, inlet, etc.                                   | 0.013   | 0.015        | 0.017   |
| 4. Vitrified subdrain with open joint   | 0.014   | <b>0.016</b> | 0.018   |
| <b>g. Brickwork</b>   |         |              |         |
| 1. Glazed   | 0.011   | 0.013        | 0.015   |
| 2. Lined with cement mortar   | 0.012   | 0.015        | 0.017   |
| <b>h. Sanitary sewers coated with sewage slimes, with bends and connections</b> | 0.012   | 0.013        | 0.016   |
| <b>i. Paved invert, sewer, smooth bottom</b>                                    | 0.016   | 0.019        | 0.020   |
| <b>j. Rubble masonry, cemented</b>  | 0.018   | 0.025        | 0.030   |

TABLE 5-6. VALUES OF THE ROUGHNESS COEFFICIENT  $n$  (continued)

| Type of channel and description                        | Minimum | Normal       | Maximum |
|--|---------|--------------|---------|
| <b>B. LINED OR BUILT-UP CHANNELS</b>                   |         |              |         |
| <b>B-1. Metal</b>                                      |         |              |         |
| <b>a. Smooth steel surface</b>                         |         |              |         |
| 1. Unpainted   | 0.011   | <b>0.012</b> | 0.014   |
| 2. Painted   | 0.012   | 0.013        | 0.017   |
| 3. Corrugated  | 0.021   | 0.025        | 0.030   |
| <b>b. Nonmetal</b>                                     |         |              |         |
| <b>a. Cement</b>                                       |         |              |         |
| 1. Neat, surface                                       | 0.010   | 0.011        | 0.013   |
| 2. Mortar  | 0.011   | 0.013        | 0.015   |
| <b>b. Wood</b>   |         |              |         |
| 1. Planed, untreated                                   | 0.010   | 0.012        | 0.014   |
| 2. Planed, crosoted                                    | 0.011   | 0.012        | 0.015   |
| 3. Unplaned  | 0.011   | 0.013        | 0.015   |
| 4. Plank with battens                                  | 0.012   | 0.015        | 0.018   |
| 5. Lined with roofing paper                            | 0.010   | 0.014        | 0.017   |
| <b>c. Concrete</b>                                     |         |              |         |
| 1. Trowel finish                                       | 0.011   | <b>0.013</b> | 0.015   |
| 2. Float finish  | 0.013   | 0.015        | 0.016   |
| 3. Finished, with gravel on bottom                     | 0.015   | 0.017        | 0.020   |
| 4. Unfinished  | 0.014   | 0.017        | 0.020   |
| 5. Gunite, good section                                | 0.016   | 0.019        | 0.023   |
| 6. Gunite, wavy section                                | 0.018   | 0.022        | 0.025   |
| 7. On good excavated rock                              | 0.017   | 0.020        | 0.025   |
| 8. On irregular excavated rock                         | 0.022   | 0.027        | 0.030   |
| <b>d. Concrete bottom float finished with sides of</b> |         |              |         |
| 1. Dressed stone in mortar                             | 0.015   | 0.017        | 0.020   |
| 2. Random stone in mortar                              | 0.017   | 0.020        | 0.024   |
| 3. Cement rubble masonry, plastered                    | 0.016   | 0.020        | 0.024   |
| 4. Cement rubble masonry                               | 0.020   | 0.025        | 0.030   |
| 5. Dry rubble or riprap                                | 0.020   | 0.030        | 0.035   |
| <b>e. Gravel bottom with sides of</b>                  |         |              |         |
| 1. Formed concrete                                     | 0.017   | 0.020        | 0.025   |
| 2. Random stone in mortar                              | 0.020   | 0.023        | 0.026   |
| 3. Dry rubble or riprap                                | 0.023   | 0.033        | 0.036   |
| <b>f. Brick</b>  |         |              |         |
| 1. Glazed  | 0.011   | <b>0.013</b> | 0.015   |
| 2. In cement mortar                                    | 0.012   | <b>0.015</b> | 0.018   |
| <b>g. Masonry</b>                                      |         |              |         |
| 1. Cemented rubble                                     | 0.017   | 0.025        | 0.030   |
| 2. Dry rubble  | 0.023   | 0.032        | 0.035   |
| <b>h. Dressed ashlar</b>                               | 0.013   | 0.015        | 0.017   |
| <b>i. Asphalt</b>                                      |         |              |         |
| 1. Smooth  | 0.013   | 0.013        | 0.013   |
| 2. Rough   | 0.016   | 0.016        | 0.016   |
| <b>j. Vegetal lining</b>                               | 0.030   | .....        | 0.500   |

TABLE 5-6. VALUES OF THE ROUGHNESS COEFFICIENT  $n$  (continued)

| Type of channel and description   | Minimum | Normal | Maximum |
|---|---------|--------|---------|
| <b>C. EXCAVATED OR DREDGED</b>  |         |        |         |
| <b>a. Earth, straight and uniform</b>   |         |        |         |
| 1. Clean, recently completed  | 0.016   | 0.018  | 0.020   |
| 2. Clean, after weathering  | 0.018   | 0.022  | 0.025   |
| 3. Gravel, uniform section, clean   | 0.022   | 0.025  | 0.030   |
| 4. With short grass, few weeds  | 0.022   | 0.027  | 0.033   |
| <b>b. Earth, winding and sluggish</b>   |         |        |         |
| 1. No vegetation  | 0.023   | 0.025  | 0.030   |
| 2. Grass, some weeds  | 0.025   | 0.030  | 0.033   |
| 3. Dense weeds or aquatic plants in deep channels   | 0.030   | 0.035  | 0.040   |
| 4. Earth bottom and rubble sides  | 0.028   | 0.030  | 0.035   |
| 5. Stony bottom and weedy banks   | 0.025   | 0.035  | 0.040   |
| 6. Cobble bottom and clean sides  | 0.030   | 0.040  | 0.050   |
| <b>c. Dragline-excavated or dredged</b>   |         |        |         |
| 1. No vegetation  | 0.025   | 0.028  | 0.033   |
| 2. Light brush on banks   | 0.035   | 0.050  | 0.060   |
| <b>d. Rock cuts</b>   |         |        |         |
| 1. Smooth and uniform   | 0.025   | 0.035  | 0.040   |
| 2. Jagged and irregular   | 0.035   | 0.040  | 0.050   |
| <b>e. Channels not maintained, weeds and brush uncut</b>                                  |         |        |         |
| 1. Dense weeds, high as flow depth  | 0.050   | 0.080  | 0.120   |
| 2. Clean bottom, brush on sides   | 0.040   | 0.050  | 0.080   |
| 3. Same, highest stage of flow  | 0.045   | 0.070  | 0.110   |
| 4. Dense brush, high stage  | 0.080   | 0.100  | 0.140   |
| <b>D. NATURAL STREAMS</b>   |         |        |         |
| <b>D-1. Minor streams (top width at flood stage &lt; 100 ft)</b>                          |         |        |         |
| <b>a. Streams on plain</b>  |         |        |         |
| 1. Clean, straight, full stage, no rifts or deep pools                                    | 0.025   | 0.030  | 0.033   |
| 2. Same as above, but more stones and weeds   | 0.030   | 0.035  | 0.040   |
| 3. Clean, winding, some pools and shoals  | 0.033   | 0.040  | 0.045   |
| 4. Same as above, but some weeds and stones   | 0.035   | 0.045  | 0.050   |
| 5. Same as above, lower stages, more ineffective slopes and sections                      | 0.040   | 0.048  | 0.055   |
| 6. Same as 4, but more stones   | 0.045   | 0.050  | 0.060   |
| 7. Sluggish reaches, weedy, deep pools  | 0.050   | 0.070  | 0.080   |
| 8. Very weedy reaches, deep pools, or floodways with heavy stand of timber and underbrush | 0.075   | 0.100  | 0.150   |

TABLE 5-6. VALUES OF THE ROUGHNESS COEFFICIENT  $n$  (continued)

| Type of channel and description   | Minimum | Normal | Maximum |
|---|---------|--------|---------|
| <b>b. Mountain streams, no vegetation in channel, banks usually steep, trees and brush along banks submerged at high stages</b>   |         |        |         |
| 1. Bottom: gravels, cobbles, and few boulders   | 0.030   | 0.040  | 0.050   |
| 2. Bottom: cobbles with large boulders  | 0.040   | 0.050  | 0.070   |
| <b>D-2. Flood plains</b>  |         |        |         |
| <b>a. Pasture, no brush</b>   |         |        |         |
| 1. Short grass  | 0.025   | 0.030  | 0.035   |
| 2. High grass   | 0.030   | 0.035  | 0.050   |
| <b>b. Cultivated areas</b>  |         |        |         |
| 1. No crop  | 0.020   | 0.030  | 0.040   |
| 2. Mature row crops   | 0.025   | 0.035  | 0.045   |
| 3. Mature field crops   | 0.030   | 0.040  | 0.050   |
| <b>c. Brush</b>   |         |        |         |
| 1. Scattered brush, heavy weeds   | 0.035   | 0.050  | 0.070   |
| 2. Light brush and trees, in winter   | 0.035   | 0.050  | 0.060   |
| 3. Light brush and trees, in summer   | 0.040   | 0.060  | 0.080   |
| 4. Medium to dense brush, in winter   | 0.045   | 0.070  | 0.110   |
| 5. Medium to dense brush, in summer   | 0.070   | 0.100  | 0.160   |
| <b>d. Trees</b>   |         |        |         |
| 1. Dense willows, summer, straight  | 0.110   | 0.150  | 0.200   |
| 2. Cleared land with tree stumps, no sprouts  | 0.030   | 0.040  | 0.050   |
| 3. Same as above, but with heavy growth of sprouts  | 0.050   | 0.060  | 0.080   |
| 4. Heavy stand of timber, a few down trees, little undergrowth, flood stage below branches  | 0.080   | 0.100  | 0.120   |
| 5. Same as above, but with flood stage reaching branches  | 0.100   | 0.120  | 0.160   |
| <b>D-3. Major streams (top width at flood stage &gt; 100 ft). The <math>n</math> value is less than that for minor streams of similar description, because banks offer less effective resistance.</b> |         |        |         |
| <b>a. Regular section with no boulders or brush</b>   |         |        |         |
|   | 0.025   | .....  | 0.060   |
| <b>b. Irregular and rough section</b>   |         |        |         |
|   | 0.035   | .....  | 0.100   |

TABLE 5-5. VALUES FOR THE COMPUTATION OF THE ROUGHNESS COEFFICIENT BY Eq. (5-12)

| Channel conditions                  |                          | Values |             |
|-------------------------------------|--------------------------|--------|-------------|
| Material involved                   | Earth                    | $n_0$  | 0.020       |
|                                     | Rock cut                 |        | 0.025       |
|                                     | Fine gravel              |        | 0.024       |
|                                     | Coarse gravel            |        | 0.028       |
| Degree of irregularity              | Smooth                   | $n_1$  | 0.000       |
|                                     | Minor                    |        | 0.005       |
|                                     | Moderate                 |        | 0.010       |
|                                     | Severe                   |        | 0.020       |
| Variations of channel cross section | Gradual                  | $n_2$  | 0.000       |
|                                     | Alternating occasionally |        | 0.005       |
|                                     | Alternating frequently   |        | 0.010-0.015 |
| Relative effect of obstructions     | Negligible               | $n_3$  | 0.000       |
|                                     | Minor                    |        | 0.010-0.015 |
|                                     | Appreciable              |        | 0.020-0.030 |
|                                     | Severe                   |        | 0.040-0.060 |
| Vegetation                          | Low                      | $n_4$  | 0.005-0.010 |
|                                     | Medium                   |        | 0.010-0.025 |
|                                     | High                     |        | 0.025-0.050 |
|                                     | Very high                |        | 0.050-0.100 |
| Degree of meandering                | Minor                    | $m_5$  | 1.000       |
|                                     | Appreciable              |        | 1.150       |
|                                     | Severe                   |        | 1.300       |

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4) m_5$$

TABLE 7-2. BEST HYDRAULIC SECTIONS

| Cross section                   | Area<br>$A$                | Wetted<br>perimeter<br>$P$ | Hydraulic<br>radius<br>$R$ | Top<br>width<br>$T$      | Hydrau-<br>lic depth<br>$D$ | Section<br>factor<br>$Z$       |
|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| Trapezoid, half<br>of a hexagon | $\sqrt{3} y^2$             | $2 \sqrt{3} y$             | $\frac{1}{2} y$            | $\frac{4}{3} \sqrt{3} y$ | $\frac{3}{4} y$             | $\frac{3}{2} y^{2.5}$          |
| Rectangle, half<br>of a square  | $2y^2$                     | $4y$                       | $\frac{1}{2} y$            | $2y$                     | $y$                         | $2y^{2.5}$                     |
| Triangle, half of<br>a square   | $y^2$                      | $2 \sqrt{2} y$             | $\frac{1}{4} \sqrt{2} y$   | $2y$                     | $\frac{1}{2} y$             | $\frac{\sqrt{2}}{2} y^{2.5}$   |
| Semicircle                      | $\frac{\pi}{2} y^2$        | $\pi y$                    | $\frac{1}{2} y$            | $2y$                     | $\frac{\pi}{4} y$           | $\frac{\pi}{4} y^{2.5}$        |
| Parabola,<br>$T = 2 \sqrt{2} y$ | $\frac{4}{3} \sqrt{2} y^2$ | $\frac{8}{3} \sqrt{2} y$   | $\frac{1}{2} y$            | $2 \sqrt{2} y$           | $\frac{2}{3} y$             | $\frac{8}{9} \sqrt{3} y^{2.5}$ |
| Hydrostatic<br>catenary         | $1.39586y^2$               | $2.9836y$                  | $0.46784y$                 | $1.917532y$              | $0.72795y$                  | $1.19093y^{2.5}$               |

TABLE 7-3. MAXIMUM PERMISSIBLE VELOCITIES RECOMMENDED BY FORTIER AND SCOBAY AND THE CORRESPONDING UNIT-TRACTIVE-FORCE VALUES CONVERTED BY THE U.S. BUREAU OF RECLAMATION\* (For straight channels of small slope, after aging)

| Material                                 | $n$   | Clear water  |                                  | Water trans-<br>porting col-<br>loidal silts |                                  |
|--|-------|--------------|----------------------------------|--|----------------------------------|
|  |       | $V$ ,<br>fps | $\tau_0$ ,<br>lb/ft <sup>2</sup> | $V$ ,<br>fps                                 | $\tau_0$ ,<br>lb/ft <sup>2</sup> |
| Fine sand, colloidal                     | 0.020 | 1.50         | 0.027                            | 2.50   | 0.075                            |
| Sandy loam, noncolloidal                 | 0.020 | 1.75         | 0.037                            | 2.50   | 0.075                            |
| Silt loam, noncolloidal                  | 0.020 | 2.00         | 0.048                            | 3.00   | 0.11                             |
| Alluvial silts, noncolloidal             | 0.020 | 2.00         | 0.048                            | 3.50   | 0.15                             |
| Ordinary firm loam                       | 0.020 | 2.50         | 0.075                            | 3.50   | 0.15                             |
| Volcanic ash                             | 0.020 | 2.50         | 0.075                            | 3.50   | 0.15                             |
| Stiff clay, very colloidal               | 0.025 | 3.75         | 0.26                             | 5.00   | 0.46                             |
| Alluvial silts, colloidal                | 0.025 | 3.75         | 0.26                             | 5.00   | 0.46                             |
| Shales and hardpans                      | 0.025 | 6.00         | 0.67                             | 6.00   | 0.67                             |
| Fine gravel                              | 0.020 | 2.50         | 0.075                            | 5.00   | 0.32                             |
| Graded loam to cobbles when noncolloidal | 0.030 | 3.75         | 0.38                             | 5.00   | 0.66                             |
| Graded silts to cobbles when colloidal   | 0.030 | 4.00         | 0.43                             | 5.50   | 0.80                             |
| Coarse gravel, noncolloidal              | 0.025 | 4.00         | 0.30                             | 6.00   | 0.67                             |
| Cobbles and shingles                     | 0.035 | 5.00         | 0.91                             | 5.50   | 1.10                             |

\* The Fortier and Scobey values were recommended for use in 1926 by the Special Committee on Irrigation Research of the American Society of Civil Engineers.

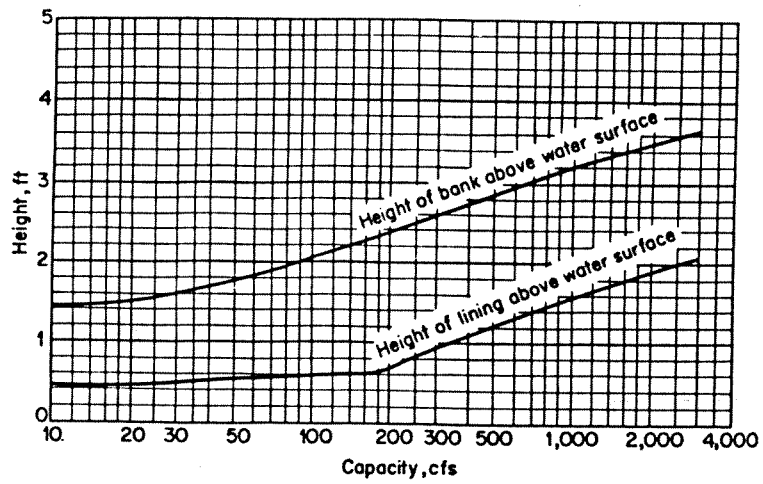


FIG. 7-1. Recommended freeboard and height of bank of lined channels. (U.S. Bureau of Reclamation.)

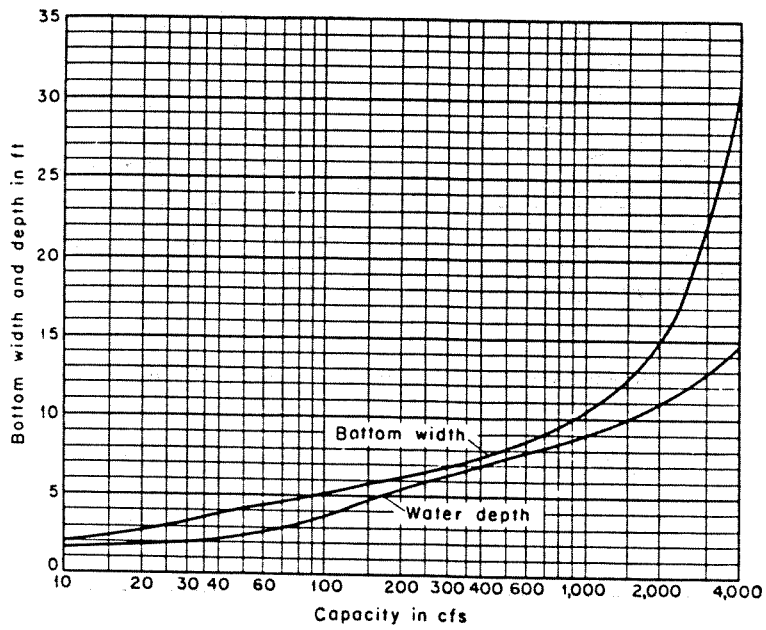


FIG. 7-2. Experience curves showing bottom width and depth of lined channels. (U.S. Bureau of Reclamation.)