2-12-2021

Στοχαστικές Μέθοδοι

Παπαδόπουλος Β.

Μάθημα 8ο

→ βασικό θεωρητικό υπόβαθρο στις πιθανότητες.

→ έμφαση στο δομοστατικό κομμάτι. (κοινή αντιμετώπιση με ταυτόσημα σημεία.

Θεωρία πιθανοτήτων:

1) Στοχαστικές (aleatory)	2) Επιστημικές αβεβαιότητες	3) Αβεβαιότητα στη λήψη αποφάσεων
υπάρχουν στην φύση, πραγματική διακύμανση γύρω από ένα μέγεθος πχ η θέση των ηλεκτρονίων στην κβαντική φυσική	προκύπτουν από έλλειψη γνώσης πάνω στο πρόβλημα. μειώνονται με την πάροδο του χρόνου και την αύξηση της παρατήρησης.	αφορά ανθρωπογενείς παράγοντες διαφορετική εκτίμηση, άρα διαφορετική απόφαση.

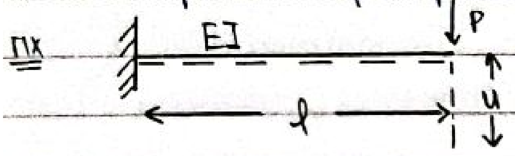
→ εμείς ασχολούμαστε με τις 2 πρώτες κατηγορίες.

→ χρησιμοποιούμε πάντα ένα μοντέλο (model) παίρνει δεδομένα και δίνει αποτελέσματα άρα κάνει προβλέψεις. ↳ πχ μιας κατασκευής (ένας πρόβολος ή ένα πλαίσιο)

↳ Μοντελοποίηση ή Προσομοίωση (μίμηση της πραγματικής συμπεριφοράς)

→ τα δεδομένα του προβλήματος δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα, έχουν μια μεταβλητότητα.

πχ

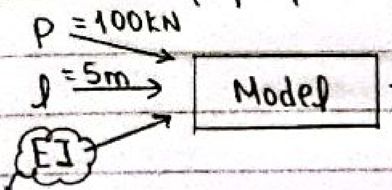


θα μετακινηθεί κατά u και με αρχή δυνατών έργων:

Δεδομένα: 1) Φορτίο P
2) Μήκος l
3) Ιδιότητες EI

$$u = \frac{P \cdot l^3}{384 EI}$$ ⇝ γραμμική ως προς P και u

αβέβαιες παράμετροι



→ u → σ, ε, M, N, Q

μπορώ να προβλέψω

αβεβαιότητα. → Αυτός ο πρόβολος θα κατασκευασθεί

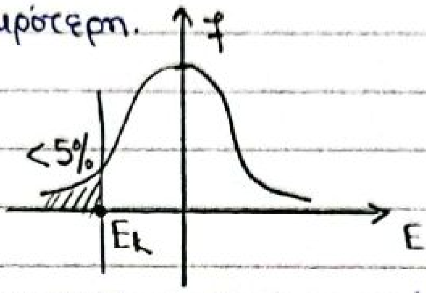
με διατομή 0,3 × 0,5 ⇝ Άρα το J είναι ντετερμινιστικά προσδιορισμένο και όχι αβέβαιο.

→ Για το E = μέτρο ελαστικότητας φτιάχνουμε δοκίμια και τα μετράμε στο εργαστήριο

→ χρειαζόμαστε κατ'ελάχιστο 6 δοκίμια. Οι μετρήσεις δεν είναι ταυτόσημες.

→ δεν μπορώ να πάρω τον μέσο όρο (μ.ο), αλλά παίρνω την χαρακτηριστική τιμή E_k που αντιστοιχεί σε πιθανότητα <5% να είναι μικρότερη.

↳ κατασκευάζω μια κατανομή



→ συντελεστής ασφαλείας: $\gamma_k = \frac{E_{Mo}}{E_k}$

→ το ίδιο κάνω και για τις δράσεις.

→ ουσιαστικά αυτό κάνει ο κανονισμός

→ μπορεί όμως να έχω και μικρότερο E => κ μεγαλύτερο => τάσεις, ροπές, δυνάμεις μεγαλύτερες. (πχ μπαλκόνι κατέρρευσε στο Χαλάνδρι)

→ Τώρα δεν μιλάμε για συντελεστές ασφαλείας, αλλά υπολογίζει με προσομοίωση όλη την πιθανοτική συμπεριφορά της απόκρισης. => Κάνουμε ένα τυχαίο πείραμα.

Αναπαραγωγή πολλών πειραμάτων στον υπολογιστή
⇓
και παίρνουμε πολλά αποτελέσματα ⇐ μετρήσεις στην συμπεριφορά χωρίς να έχω φτιάξει την κατασκευή μου.

→ Εμείς κάνουμε προσομοίωση MONTE CARLO

→ Θα κάνουμε γέννεση τυχαίων αριθμών στο excel. (rand)

Γενικές κατηγορίες επιστημονικής προσέγγισης

1) Deductive reasoning = Συμπερασματική λογική → Κλασική προσέγγιση της αξιωματικής θεωρίας. Ξεκινάει από μια υπόθεση-αξίωμα που δεν επιδέχεται αμφισβήτηση και μπορεί να είναι αυθαίρετο. Αν το αξίωμα είναι αληθινό όλα τα μέλη της κλάσης είναι σωστά ανεξάρτητα από την αρχική υπόθεση.

2) Inductive reasoning = Επαγωγική λογική
↳ Η λογική της παρατήρησης. Κάνει γενικεύσεις από ένα σύνολο παρατηρήσεων. Από μια σειρά παρατηρήσεων βγάζει ένα γενικό κανόνα ο οποίος προσπαθεί να περιγράψει το φαινόμενο. Ακόμα και αν όλες οι παρατηρήσεις είναι αληθείς (υπάρχουν) αυτό δεν μας εξασφαλίζει σε καμία περίπτωση ότι το συμπέρασμα που εξάγουμε είναι ασφαλές και όχι λανθασμένο. πχ ένα μεγάλο ποσοστό καπνιστών έχει καρκίνο του πνεύμονα (παρατήρηση) → παίρνω σαν συμπέρασμα ότι το τσιγάρο προκαλεί καρκίνο του πνεύμονα;

→ Η θεωρία πιθανοτήτων πατάει πάνω και στις 2 λογικές. Πρώτα επαγωγικά και μετά τον 20ο αιώνα ντύθηκε με την συμπερασματική λογική (δικύρωση λογικής πάνω στις παρατηρήσεις)

Δειγματικός χώρος Ω:
Είναι το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων
Γεγονότα:
Είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο αυτού του δειγματικού χώρου.

→ Στα ανεξάρτητα η τομή είναι Φ
(*) Διαφορά συνόλων => $A-B=A\cap B'$
(*) $(A\cup B)' = A'\cap B'$
→ Τα διαγράμματα Venn μας βοηθάνε να έχουμε μια εποπτική θεώρηση του προβλήματος.
Ορισμός πιθανότητας:
"Πιθανό είναι αυτό που έχει την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης" Αριστοτέλης.
$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$ → ο αριθμός που απαντάτε στο σύνολο Α προς τον ~~συνολικό αριθμό των γεγονότων που περιέχει ο~~ δειγματικός χώρος

Μειονεκτήματα ορισμού: 1) Αφορά απαριθμήσιμο σύνολο (όχι σε άπειρο)
↓ 2) Αφορά γεγονότα ισοπίθανα
Είναι ιδανικός ορισμός για την ρίψη του ζαριού.
Γεωμετρικός ορισμός πιθανότητας
→ για άπειρα σύνολα.
$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ → Δεν το απαριθμούμε, αλλά το μετράμε με ένα σχετικό ~~μέγεθος πχ μήκος ή εμβαδόν ή όγκο.~~

→ εφαρμογή είναι η βελόνα του Buffon
Συχνοτικός ορισμός πιθανότητας:
→ Είναι ένας συνδυασμός των προηγούμενων για πάρα πολλές μετρήσεις.
$P(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mu(A)}{n}$ → Είναι ο αριθμός των φορών που παρατηρείται ένα γεγονός, προς τον συνολικό αριθμό των γεγονότων των πειραμάτων, όταν αυτός ο αριθμός των πειραμάτων τείνει στο ∞
Αξιωματική θεωρία των πιθανοτήτων:
Από τον Kolmogorov
1) $P(A)\geq 0$
2) $P(\Omega)=1$
$\boxed{0\leq P(A)\leq 1}$
3) Αν τα $A_1, A_2, A_3 \dots$ είναι ανεξάρτητα => Η πιθανότητα της ένωσής τους ισούται με το άθροισμα των επιμέρους πιθανοτήτων: $\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)}$

Πιθανότητες υπό συνθήκη

"Η πιθανότητα του A υπό την προϋπόθεση ότι έχει συμβεί το B."

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}} \quad , \text{ με } P(B)>0$$

→ Προκύπτει επίσης ότι:

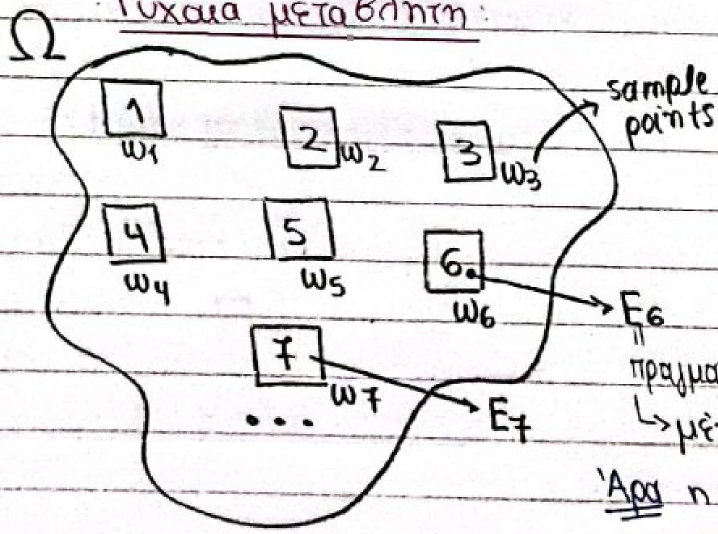
$$\boxed{P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)}$$

Κανόνας συνολικής πιθανότητας

Κανόνας Bayes:

$$\boxed{P(A_i|B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)} = \frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{P(B)}}$$

Τυχαία μεταβλητή:



→ Τυχαία μεταβλητή είναι μια συνάρτηση που συναρτά την κάθε μεταβλητή του χώρου αυτού με μια τιμή.

Απεικόνιση $\Omega \to \mathbb{R}$ και $\omega \to E$

άρα $E(\Omega)$

πραγματικός αριθμός (μέτρηση που βρήκαμε)

↳ μέτρο ελαστικότητας

Άρα η τυχαία μεταβλητή είναι μια συνάρτηση που σε κάθε γεγονός ή σε κάθε σημείο του δειγματικού χώρου δίνει μια τιμή στους πραγματικούς αριθμούς.

Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας: είναι η συνάρτηση που σε κάθε τέτοια τιμή (πχ του μέτρου ελαστικότητας) συνοδεύει την αντίστοιχη πιθανότητά της. Άρα η πιθανότητα έπεται και είναι μια μετρική πάνω στο μέτρο ελαστικότητας. Πρέπει $\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_i = 1}$

πχ Τον αριθμό των φορών που μετράω κεφαλές ως προς την συχνότητα του.

Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας cdf:

Μας δείχνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή μας να είναι μικρότερη ή ίση μιας συγκεκριμένης τιμής x"

$\boxed{F_{\underline{x}}(x) = P(\underline{X} \leq x)}$ με $\lim_{x \to +\infty} F_{\underline{x}}(x) = 1$ και $\lim_{x \to -\infty} F_{\underline{x}}(x) = 0$

$P(a \leq x \leq b) = F_{\underline{x}}(b) - F_{\underline{x}}(a)$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας pdf:

→ Την παίρνουμε αν παραγωγίσουμε την cdf
  ↳ ουσιαστικά τα a και b τα φέρνουμε τόσο κοντά που γίνονται dx.

→ Άρα η κλίση της cdf σε κάθε σημείο.

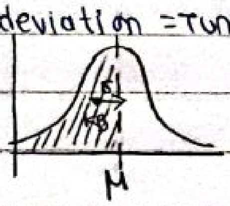
(*) Προσοχή: Δεν υπάρχει η έννοια της σημειακής πιθανότητας στο σύνολο των $\mathbb{R}$
  ↳ Υπάρχει η έννοια του να βρίσκεται σε μια περιοχή

Ροπές = Μέτρα για να εκτιμούμε τις κατανομές.

1η ροπή = μέση τιμή (m ή μ)

→ στις κεντρικές ροπές: αφαιρούμε από τις ροπές τον μέσο όρο τους. ⇒ μηδενικού μέσου όρου.

→ standard deviation = τυπική απόκλιση



↳ η απόσταση του κέντρου βάρους του αριστερού κομματιού από τον μέσο όρο.

(μεγάλο σ σημαίνει ότι η καμπάνα πλατιάζει)

→ Αν δεν έχουμε $y = f(x)$ δηλαδή κάποια εξάρτηση του x με το y τότε σίγουρα δεν υπάρχει και το συσχέτιση. (το αντίστροφο δεν ισχύει)

↳ πχ κύκλος: Ασυσχέτιστες τιμές $\rho = 0$

αλλά υπάρχει εξάρτηση $x^2 + y^2 = 1$

9-12-2021

Στοχαστικές μέθοδοι
Παπαδόπουλος Β, Πυριαλάκος Σ.
Μάθημα 9ο

→ Αν οι τιμές είναι ασυσχέτιστες:
$E[X \cdot Y] = \mu_x \cdot \mu_y$ (δηλαδή $k_{xy}=0$)

→ Συντελεστής συσχέτισης: $\rho_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

συντελεστής αυτοσυσχέτισης

$k_{xy} = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = E[X \cdot Y] - \mu_x \cdot \mu_y$
⇓ μας παρέχει ένα μέτρο της συσχέτισης μεταξύ των 2 μεταβλητών.

τυπικές αποκλίσεις των 2 μεταβλητών (είναι σαν να αδιαστατοποιούμε)

$0 \le \rho_{xy} \le 1$

παίρνει την τιμή 0 στην περίπτωση του κύκλου
⇓
Αν ξέρεις την μια μεταβλητή δεν ξέρεις τίποτα για την άλλη.

κοντά στην ευθεία
αρχίζει και πλαταίνει.

→ στην πολυδιάστατη κατανομή, οι μεταβλητές γίνονται μητρώα μεταβλητής
πχ $x = [X_1, X_2, \ldots, X_n]^T$
και το αντίστοιχο ισχύει για την μ_x και το $cov[X_i, X_j]$
ανά 2 τιμές.

Κεντρικό οριακό θεώρημα:
Εαν N το πλήθος τυχαίες μεταβλητές είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες (ασυσχέτιστες) τότε το άθροισμά τους τείνει να προσεγγίσει την κανονική κατανομή, ~~όταν~~ αυξανομένου του αριθμού των τυχαίων μεταβλητών ⇒ Εξηγεί το γιατί στη φύση πάρα πολλές κατανομές ακολουθούν μια κατανομή αυτού του τύπου.

Ανεξάρτητες
• Αν οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες τότε είναι και ασυσχέτιστες
Δεν υπάρχει κάποια συναρτησιακή σχέση της μιας με την άλλη. (δεν υπάρχει σχέση της μορφής $y=f(x)$)

Ασυσχέτιστες
• Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.
⇓
ο συσχετισμός ή μη είναι τελείως στατιστικός χαρακτήρα, δηλαδή αν κάνουμε πειράματα x, y πως συμπεριφέρονται αυτά τα πειράματα.
πχ ο κύκλος: $y=\sqrt{x^2-1}$, αλλά συναρτησιακά είναι εξαρτημένες.

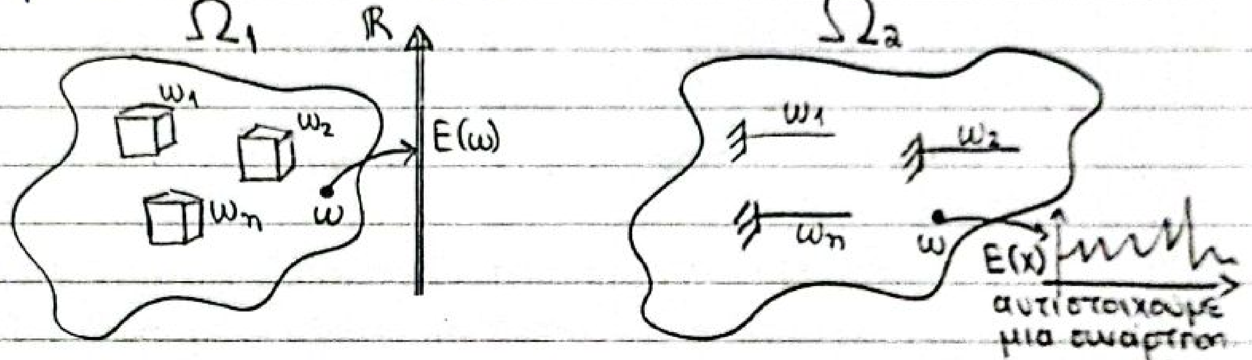
→ Πιο μαθηματική και γενική περιγραφή

Στοχαστική ανέλιξη

(ή) στοχαστική διαδικασία (ή) στοχαστικό πεδίο ⇒ αναφέρονται στο ίδιο πράγμα ανάλογα με το πού εφαρμόζεται

Είναι μια γενίκευση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής στο χώρο των συναρτήσεων.

→ Φτιάχνουμε 2 δειγματόχωρους. Ο ένας έχει δοκιμιάκια από μπετόν και ο άλλος κατασκευές από μπετόν.



Το τυχαίο πείραμα το δοκίμιο

→ εδώ οι βασικές τυχαίες μεταβλητές είναι όπως τις ξέραμε

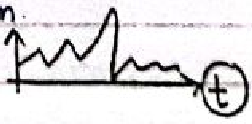
Το τυχαίο πείραμα μια κατασκευή ολόκληρη

→ Εδώ δεν έχουμε μια τιμή στο μέτρο ελαστικότητας, έχουμε πάρα πολλές τιμές, ανάλογα πού θα σημαδέψουμε τον πρόβολο.

δεν αντιστοιχούμε μόνο μια τιμή, αλλά πολλές τιμές. { Άρα η μέτρηση για το ω_1 είναι η $E_1(x)$ που είναι μια συνάρτηση και θα έχει πολλές τιμές.

Αυτή η σειρά από τυχαίες μεταβλητές λέγεται ανέλιξη.

→ Αν η στοχαστική ανέλιξη είναι ως προς τον χρόνο λέγεται "στοχαστική διαδικασία"



→ Αν είναι ως προς κάποια χωρική μεταβλητή (σαν τον πρόβολο που δείξαμε) λέγεται "στοχαστικό πεδίο"

πχ $X_1(t,\omega) = \underset{\text{τ.μ.}}{\omega} \cdot \cos(\underset{\text{χρόνος}}{t})$ → διαφέρει μόνο το πλάτος (πάλλονται ταυτόχρονα με διαφορετικά πλάτη)

→ Αν την τυχαία μεταβλητή την βάλεις μέσα στο cos

πχ $X_2(t,\omega) = \cos(\omega + t)$ ⇒ παίρνω άλλη συνημιτονοειδή καμπύλη, με άλλη αφετηρία με το ίδιο πλάτος όμως.

→ σε κάθε θέση ή χρονική στιγμή η ανέλιξη είναι μια τυχαία μεταβλητή (δηλαδή το μέτρο ελαστικότητας στην θέση $X=3m$ => είναι μια τιμή)

→ για να περιγράψουμε πλήρως την στοχαστική ανέλιξη χρειάζεται να περιγράψουμε πλήρως ουσιαστικά την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών σε όλες τις θέσεις. Άρα θέλαμε την κοινή πολυδιάστατη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όλων αυτών των μεταβλητών. (θα θέλαμε την κοινή πολυδιάστατη κατανομή του μέτρου ελαστικότητας σε όλες τις θέσεις του προβόλου)

Μέση τιμή => είναι η μέση τιμή της κάθε μεταβλητής σε κάθε θέση.

$E(X) = \mu(x)$

↳ η μέση τιμή της X ανέλιξης είναι η μέση τιμή της X σε κάθε θέση.

→ ακριβώς το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και για την τυπική απόκλιση.

→ αν πάρω όλες αυτές τις μετρήσεις και τις ενώσω με γραμμή θα πάρω συνάρτηση μέσης τιμής και συνάρτηση τυπικής απόκλισης.

⇓

Αυτές είναι και οι σωστές μετρικές για την στοχαστική διαδικασία.

(*) Υπάρχει και αυτό που λέμε προσωρινό μέσο όρο. ≠ δειγματικό μέσο όρο.

προσωρινό: αν πάρουμε σε έναν πρόβολο όλες τις τιμές και βρούμε τον μέσο όρο. (αντίστοιχα την προσωρινή τυπική απόκλιση)

δειγματικό: ↳ όλα τα δείγματα σε όλες τις θέσεις (αυτόν τον ορισμό δώσαμε παραπάνω)

→ Μέσος όρος δείγματος ≠ Δειγματικός μέσος όρος (ensemble average)

Μέσος όρος δείγματος ↳ προσωρινός μ.ο

Δειγματικός μέσος όρος ↳ μ.ο. από όλα τα δείγματα

Πολλές φορές αυτοί οι 2 μέσοι όροι ταυτίζονται (είναι ίδιοι)

↳ σημαντική ιδιότητα κάποιων ανελίξεων

(γιατί εξάγουμε συμπεράσματα από τις διαθέσιμες ανελίξεις που έχουμε)

→ στον πραγματικό κόσμο να κάνεις σωληνική μέτρηση, από πολλές κατασκευές είναι αδύνατο. => μπορούμε μόνο προσωρινά.

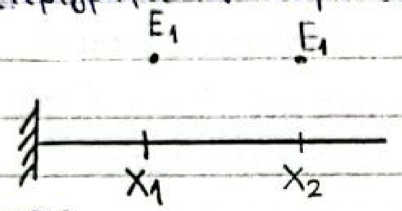
→ μπορούμε να δουλέψουμε με όσες ανελίξεις είναι εργοδικές.

Εργοδικότητα = τα συμπεράσματα που μπορώ να βγάλω από την μέτρηση μιας κατασκευής ή μιας δειγματοσυνάρτησης μπορώ να τα γενικεύσω και να πω ότι ισχύει για όλες. Άρα μπορώ να δουλέψω με ένα δείγμα. (άρα μπορώ να δουλέψω εύκολα)

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης: R

→ βασική ιδιότητα των ανελίξεων

Ορισμός: περιγράφει τον βαθμό συσχέτισης που έχει η τυχαία μεταβλητή από θέση σε θέση.



1η περίπτωση:

Αν ξέρω ότι η συσχέτιση το ρ μεταξύ των 2 μεταβλητών αυτών $\rho(X_1, X_2) = 1$, Άρα αν ξέρω το X_1 έχω όλη την πληροφορία και για το X_2 τότε αφού έχω πάρει την μέτρηση E_1 για το X_1, τότε η μέτρηση για το X_2 είναι E_1 (δηλαδή ίδια)

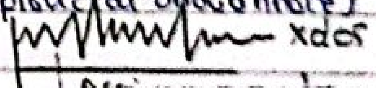
→ Αν έχω παντού συσχέτιση 1 σημαίνει ότι η δειγματοσυνάρτηση μου θα είναι ευθεία ——— E_1

(*) Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι αν έχω την πληροφορία για την θέση X_1 γνωρίζω και για όλο τον πρόβολο. ⇒ μεταπέφτω στο "Random Variable case"

2η περίπτωση:

→ Τώρα αν $\rho(X_1, X_2) = 0$: Με μέτρηση στο X_1 να είναι E_1, τότε στο X_2 δεν μπορώ να ξέρω ποια θα είναι. (άρα η μέτρηση στο X_2 μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε)

↓ Αυτό σημαίνει ότι η συμπεριφορά κατά μήκος είναι χαοτική.



↓ Αφού η αυτοσυσχέτιση είναι μηδενική

"Λευκός Θόρυβος"

(*) Αυτές είναι οι 2 ακραίες περιπτώσεις που μπορεί να έχει το σχήμα μιας διαδικασίας (σταθερή και χαοτική).

→ οι πιο πολλές διαδικασίες στην πραγματικότητα είναι ανάμεσα και έτσι αρχίζουν και εμφανίζονται κάποια σχήματα, που δεν είναι ούτε λευκός θόρυβος, ούτε σταθερά.

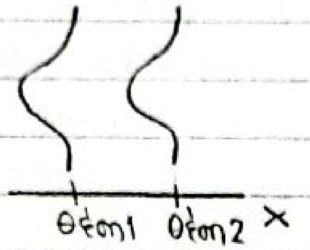
πχ συνημίτονο. $(0<\rho<1)$ ⇒ εξαρτάται το σχήμα / μορφή των ανελίξεων.

Εργοδική διαδικασία

→ Για να είναι εργοδική μια διαδικασία προϋπόθεση είναι να 'ναι στάσιμη. (με τον αυστηρό ορισμό στάσιμη)

κατηγοριοποίηση για τις στοχαστικές διαδικασίες

- Στάσιμη
- Μη στάσιμη



Στάσιμη: Οι ιδιότητες των τυχαίων μεταβλητών δεν μεταβάλλονται από θέση σε θέση. (ή από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή)

Αν στην θέση 1 έχω μια κατανομή Gauss της μορφής του σχήματος, τότε και στην θέση 2 θα έχω μια κατανομή της ίδιας ακριβώς μορφής.

→ με τον ευρύ ορισμό στάσιμες ⇒ είναι σταθερές κατά την έννοια της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.

→ με τον αυστηρό ορισμό στάσιμες ⇒ είναι όταν όλη η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δεν αλλάζει. (Gaussian παντού πχ)

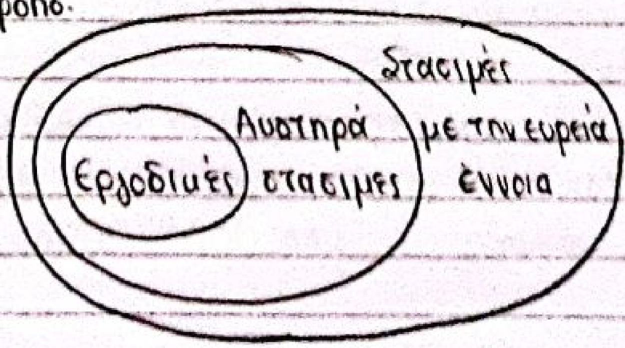
Ιδιότητα στάσιμης

Η συσχέτιση μεταξύ 2 θέσεων i, j παραμένει σταθερή εάν προσθέσω ένα μικρό διάστημα a στις i, j. (αν μεταφέρω δηλαδή το i και το j λίγο δεξιά ή αριστερά)

⇒ Αυτό σημαίνει ότι ο βαθμός συσχέτισης δεν εξαρτάται από την ακριβή θέση των i και j αλλά από την απόστασή τους, πόσο απέχουν μεταξύ τους.

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(x_1 - x_2) = \rho(\underbrace{\tau}_{\text{η απόσταση μεταξύ τους}})$$

(*) Αν $\tau = 0$ ⇒ το x_1 με τον εαυτό του ⇒ $\rho(0) = \rho(x_1 - x_1) = \rho(x_1, x_1) = 1$ και όσο απομακρύνομαι από την θέση μου λογικό είναι η συσχέτιση που θα έχω να μικραίνει κατά κάποιο τρόπο.



Συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς

$$C_x(t_1,t_2) = E[(X(t_1)-\mu_x(t_1))\cdot(X(t_2)-\mu_x(t_2))]$$

αν $t_1 = t_2 \Rightarrow$ είναι η διασπορά

→ με την κανονικοποίηση για $t_1 = t_2 \Rightarrow$ προκύπτει 1

→ για να επεξεργαστούμε τις στοχαστικές ανελίξεις πρέπει να κάνουμε κάποιες παραδοχές για να μπορέσουμε να τις επεξεργαστούμε.

Συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ή φάσμα ισχύος

Αν θεωρήσουμε ότι η ανέλιξή μας είναι τουλάχιστον ασθενώς στάσιμη, μπορούμε να εξάγουμε από αυτή, με έναν μετασχηματισμό Fourier, μια συνάρτηση ως προς τις συχνότητες. Δηλαδή αν έχουμε μια ανέλιξη που πχ εκφράζεται στον χρόνο μπορούμε να βγάλουμε την αντίστοιχη συνάρτηση στο πεδίο των συχνοτήτων. Έτσι η συνάρτηση που προκύπτει λέγεται συνάρτηση φασματικής πυκνότητας. ⇒ Έχει ως μεταβλητή την γωνιακή συχνότητα ω.

↳ Με λίγα λόγια μας λέει το πως η κάθε συχνότητα επηρεάζει την ανέλιξή μας (πόση πληροφορία μας δίνει η κάθε συχνότητα)

Ενέργεια της ανέλιξης

↳ Αναφερόμαστε στην ποσότητα $E[X(t)^2] = \mu^2 + \sigma^2$

$$\boxed{\mu^2 + \sigma^2 = R_x(0)}$$

↳ η αυτοσυνδιασπορά για διαφορά μεταξύ των χρόνων 0 δηλαδή $t_1 = t_2$ (και συμμετρική ως προς τον άξονα) ⇓ την γράφουμε $2\cdot S_x(\omega)$

(x) η αυτοσυνδιασπορά και το φάσμα ονομάζονται ζευγάρια Fourier

Μετασχηματισμός διακριτού Fourier DFT

$$\hat{S}(\omega_k) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{n=0}^{N-1} y\cdot(n\Delta t)e^{-i\omega_k n\Delta t}\cdot\Delta t\right|^2$$

↙ Θα το χρειαστούμε και στην άσκηση

Στην ουσία χωρίζουμε σε τμήματα την δειγματοσυνάρτησή μας και υπολογίζουμε για αυτά το εμπειρικό φάσμα, για κάθε συχνότητα.

Γκαουσιανές ανελίξεις

→ οι πιο συχνές και εύκολες ανελίξεις.
→ έχουν τις καλύτερες ιδιότητες.
→ είναι ανελίξεις για τις οποίες όλες οι τυχαίες μεταβλητές (που ανήκουν σε αυτή την ανέλιξη) εκφράζονται από μια Gaussian τυχαία μεταβλητή.

"Βασικό χαρακτηριστικό των Gaussian ανελίξεων είναι ότι σε τέτοιες ανελίξεις, η στασιμότητα με την ασθενή έννοια ισοδυναμεί με την στασιμότητα με την ισχυρή έννοια."

⇓ Αυτό εξηγείται:
Η Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εξαρτάται από τις 2 πρώτες ροπές (μέση τιμή και τυπική απόκλιση), οπότε όταν είναι ασθενής είναι ταυτόχρονα και ισχυρή.

Στοχαστικές ανελίξεις χωρίς μνήμη

→ Μια μελλοντική τυχαία μεταβλητή μπορούμε να την προβλέψουμε γνωρίζοντας μόνο την προηγούμενη τυχαία μεταβλητή, δεν μας ενδιαφέρουν καθόλου οι πριν από αυτή

πχ Markovian ανέλιξη ⇒ η από κοινού πιθανότητα όλων των τυχαίων μεταβλητών της ανέλιξης μέχρι και την μελλοντική που θέλουμε να προβλέψουμε τυχαία μεταβλητή, δεν είναι μια συνάρτηση "n" διαστάσεων αλλά μπορούμε να την δούμε σαν μια συνάρτηση 2 διαστάσεων. (παίρνει μόνο 2 τιμές, όλες οι υπόλοιπες παραλείπονται)

Μαρκοβιανή αλυσίδα:

→ Βλέπουμε το κυκλάκι με τι πιθανότητα συνδέεται.
(μπορεί να σχηματιστεί και με την μορφή ενός πίνακα)

$$\begin{array}{ccc} & & 1\;\;2\;\;3\;\dots \qquad \text{τυχαίες μεταβλητές} \\ \text{τυχαίες μεταβλητές} & \begin{matrix}1\\2\\3\\\vdots\end{matrix} & \begin{bmatrix}\text{πιθανότητες να}\\ \text{γίνεται μετάβαση}\\ \text{από το ένα στο άλλο}\end{bmatrix}\end{array}$$

Η Θεωρητική διασπορά μας λέει ότι η διασπορά είναι ίση με τον αριθμό των βημάτων

Τυχαίος περίπατος → Η κατανομή που προσεγγίζει η τελευταία θέση είναι η κανονική.

→ πρόκειται για παράδειγμα της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

→ ξεκινάμε την χρονική στιγμή $t=0$ και κάθε επόμενο βήμα έχουμε πιθανότητα 50% να πάμε πάνω και 50% να πάμε ένα βήμα κάτω. Ουσιαστικά γνωρίζουμε μόνο το σημείο στο οποίο βρισκόμαστε τώρα προβλέπουμε που θα πάμε μετά.

↳ Αυτή είναι η διακριτή περίπτωση + Στοχαστική ανέλιξη που ξεκινάει από το $\emptyset$.

→ η συνεχής περίπτωση είναι η Wiener ανέλιξη ή Brownian κίνηση (λίγο πιο περίπλοκο, αλλά εκφράζει και κάποια φυσικά φαινόμενα όπως την κίνηση ενός σώματος όταν βυθιστεί σε ένα υγρό) κάθε βήμα "κ" καθορίζεται από μια γκαουσιανή κατανομή η οποία έχει μ.τ = 0 και τ.α = $t-s$

↳ παρελθοντικές τιμές.

('Ασκηση 4 → 3) με μαρκοβιανή αλυσίδα.
Ⓐ Ⓑ Ⓒ οι 3 πόλεις.

(*) Η παράγωγος της Brownian κίνησης είναι ο λευκός θόρυβος, γιατί η παράγωγος ουσιαστικά είναι η κλίση κάθε στιγμή της μετακίνησης, οπότε η κλίση είναι εντελώς τυχαία και αυτό ισχύει σε κάθε μετάβαση από ένα σημείο σε ένα άλλο. ⇒ Γι' αυτό η παράγωγος - κλίση μπορεί να πάρει ότι τιμή θέλει, δεν υπάρχει κάποια αυτοσυσχέτιση.

→ Η αυτοσυσχέτιση είναι μηδέν και το φάσμα ισχύος σταθερό στον Λευκό Θόρυβο.

'Ασκηση 4Δ

1) μας δίνει 100 δειγματοσειρές και 512 χρονικές περίοδοι για κάθε δειγματοσειρά.

→ βρίσκω μέση τιμή και τυπική απόκλιση. (σε κάθε χρονικό βήμα)

x = χρονικές στιγμές

y = τυχαία μεταβλητή για κάθε χρονική στιγμή

→ μπορούμε να βγάλουμε και ένα διάγραμμα.

→ σε θεωρητικά άπειρες δειγματοσυναρτήσεις η μέση τιμή θα πρέπει να συγκλίνει στο $\emptyset$. (στις τυπικές αποκλίσεις μπορεί να βγει και χειρότερη σύγκλιση)

→ αν βρω τον μέσο όρο της γραμμής εκφράζει τον προσωρινό μέσο όρο. (για μια δειγματοσειρά τον μέσο όρο)

→ θα βρούμε την αυτοσυσχέτιση όλων των σημείων ως προς το πρώτο σημείο που θα το θεωρήσουμε standar. (αλλιώς δεν είναι εύκολο να τα βρούμε όλα με όλα).

→ 1º κελί = αυτοδιακύμανση της 1ης τιμής ως προς την 1η τιμή, άρα είναι και η διακύμανση της 1ης τυχαίας μεταβλητής. (αυτοσυσχέτιση που εδώ ταυτίζεται με την διακύμανση)
→ για τα επόμενα κελιά είναι απλώς η αυτοσυσχέτιση της επόμενης τιμής με την αρχική.
→ βρίσκουμε και την αναλυτική αυτοσυνδιασπορά για λόγους σύγκρισης
↓
σε κάθε χρόνο βάζουμε την χρονική διαφορά.
→ παίρνουμε 1 δειγματοσυνάρτηση και βρίσκουμε το φάσμα ισχύος. (με τον τύπο DFT)
πάμε file → options → add-ins → Analysis tool Pak → επιλέγω → Go → Επιλέγω με ✓ analysis tool pak → ok → και στο data ανοίγει το data analysis και έτσι μπορούμε να επιλέξουμε Fourier Analysis.
→ input range = οι τιμές που επιλέξαμε. (για την δειγματοσυνάρτηση που μας αντιστοιχεί)
→ output range = εκεί που θέλω να βγει, δηλαδή στην επόμενη στήλη. (να είναι ίδιο το μήκος με το input range)
→ βγαίνουν μιγαδικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στο $e^{-i\omega_k n\Delta t}$ του τύπου.
→ πρέπει να βρούμε την απόλυτη τιμή του μιγαδικού
→ πολλαπλασιάζουμε με το χρονικό βήμα $= 0{,}05 = \Delta t$ και βάζουμε στο τετράγωνο.
→ διαιρούμε με το $\frac{1}{2\pi T}$ για να βρούμε το φάσμα. με $T = 25{,}55$
↳ μέχρι ότι χρόνο πάμε την δειγματοσυνάρτησή μας.
→ συνηθίζεται να παίρνουμε το φάσμα από την μια μεριά, δηλαδή από τον θετικό άξονα.
→ το θεωρητικό φάσμα προκύπτει από αναλυτικές σχέσεις. Το φάσμα για αυτή την αυτοσυνδιασπορά είναι: " $2 \cdot \sigma^2 / [\pi \cdot b \cdot (1/b^2 + \omega^2)]$ "
$b = 5$ (παράμετρος αυτοσυνδιασποράς) κυκλική συχνότητα
→ αρχικά υπολογίζουμε την κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f / \Delta t$, από την συχνότητα f → λόγω του μετασχηματισμού Fourier που το excel αποφασίζει και έβαλε μόνο του χρονικό βήμα = 1.
↓ θα μας χρειαστεί μέχρι την μέση αφού παίρνουμε το μισό φάσμα.
→ τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αναλυτικό τύπο.
→ πλοτάρουμε τα 2 φάσματα και βρίσκουμε τις διαφορές. x = κυκλικές συχνότητες
y = εμπειρικό και αναλυτικό φάσμα.

→ μπορούμε να βάλουμε λιγότερες τιμές για να φανεί.

→ υπάρχει διαφορά (κανονικά θα έπρεπε να βγαίνουν ίδια).

εμείς έχουμε πάρει μόνο μια δειγματοσυνάρτηση.

Αν το κάναμε αυτό για όλες τις δειγματοσυναρτήσεις μας και βγάζαμε ένα μέσο όρο φάσματος θα έπρεπε να συγκλίνει στο αναλυτικό.

Φάσμα:

→ εκφράζει κάθε μια από τις συχνότητες πόσο συνεισφορά έχει στην ανέλιξη μας (αν θεωρητικά τις διακριτοποιήσουμε λίγο θα δίνεται σε κάθε ω μια τιμή και θα μας δίνει την συνεισφορά)

→ οι δειγματοσειρές είναι μια πραγματοποίηση ενός συνόλου τυχαίων μεταβλητών

είναι οι χρονικές στιγμές

→ όταν λέμε παίρνουμε πολλές δειγματοσειρές ⇒ εκτελούμε πολλές φορές ένα πείραμα.

16-12-2021

Στοχαστικές Μέθοδοι
Κυριακάκος Σ.
Μάθημα 10ο

Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

→ Ιδέα: Αν επαναλάβουμε πολλές φορές ένα πείραμα στο τέλος θα μπορούμε να εξάγουμε κάποια στατιστικά συμπεράσματα, για το πείραμα αυτό. (η εφαρμογή είναι πολύ δύσκολη)

→ συνδέθηκε με την εμφάνιση των υπολογιστών.

→ βασίζεται στις αρχές της επαγωγικής στατιστικής.

Επαγωγική στατιστική: Απο κάτι ειδικό (τυχαίο δείγμα) μπορούμε να βγάλουμε → (πληθυσμός) συμπεράσματα για κάτι γενικό.

- Πληθυσμός = ένα σύνολο παραδειγμάτων
- Δείγμα = ένα κανονικό υποσύνολο του πληθυσμού
- Ένα τυχαίο δείγμα του πληθυσμού τείνει να επιδεικνύει τις ίδιες ιδιότητες με αυτές του πληθυσμού.

→ η Monte Carlo βασίζεται στον νόμο των μεγάλων αριθμών.

Νόμος των μεγάλων αριθμών:

Αν εκτελέσουμε πάρα πολλές φορές ανεξάρτητες δοκιμές μεταξύ τους τότε θα συγκλίνουμε στην πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός, αν το κανονικοποιήσουμε (δηλαδή το διαιρέσουμε με τον αριθμό των δοκιμών).

→ μπορούμε να βγάλουμε κάποια στατιστικά/εμπειρικά στοιχεία πχ εμπειρικός μέσος όρος ή εμπειρική διακύμανση, αυτά ποτέ δεν θα είναι απολύτως ακριβή αλλά θα συγκλίνουν όσο περισσότερα δείγματα παίρνουμε.

Αυτά βγαίνουν μέσα από τις δοκιμές μας

Πόσα δείγματα χρειαζόμαστε για να πάρουμε αξιόπιστο αποτέλεσμα;

→ Δεν είναι σταθερό, εξαρτάται από το είδος του προβλήματος.

Προσομοίωση:

Είναι η αναπαράσταση ενός πραγματικού ή αφηρημένου συστήματος με ένα μοντέλο.

Θεωρητική: να περιγράψουμε ένα φυσικό φαινόμενο/σύστημα με κάποιες εξισώσεις και να το λύσουμε αναλυτικά ή με πεπερασμένα στοιχεία.

Πειραματική: εκτελούμε πείραμα σε ένα εργαστήριο πχ μονοαξονική θλίψη σε δοκίμιο ⇒ κοστίζει λιγότερο.

Μοντέλο: κατασκευάζεται με παραδοχές και απλοποιήσεις. Δεν περιγράφει στο 100% την πραγματική κατάσταση.

"Αξιοπιστία = 1 − Πιθανότητα Αστοχίας"

→ Η βάση της Monte Carlo προσομοίωσης είναι οι γεννήτριες τυχαίων αριθμών.
πχ rand() με την κανονική κατανομή

→ μπορούμε να βγάλουμε τυχαίους αριθμούς από οποιαδήποτε κατανομή μέσω του τύπου: $x_i = F^{-1}(u_i)$

↳ μέσω του αντιστρόφου της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας.

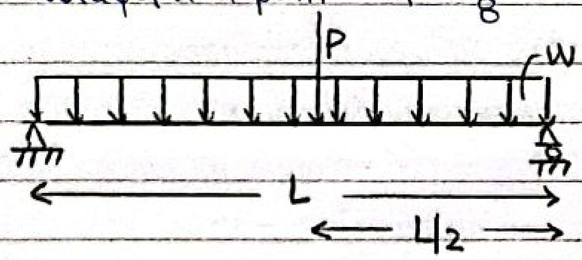
Μεθοδολογία:

1) παίρνουμε μια τυχαία τιμή από την ομοιόμορφη κατανομή
2) πάμε στην αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της ομοιόμορφης: ισχύει ότι $F_U(u)=u$ (γραμμική συνάρτηση $y=x$)
3) θέλουμε το $F_X(x) = F_U(u)$
4) άρα θέλουμε $F_X(x) = u$ και χρησιμοποιούμε την αντίστροφη συνάρτηση $\Rightarrow x = F^{-1}(u)$

Παράδειγμα:

→ Έχουμε μια δοκό (ισοστατικό σύστημα) που θεωρούμε ότι έχουμε 2 τυχαίες μεταβλητές που χαρακτηρίζονται από αυτές τις κατανομές:
1) το σημειακό φορτίο $P \sim N(10, 4)$
2) το κατανεμημένο φορτίο $w \sim N(1,\ 0{,}04)$

και μας ενδιαφέρει η ροπή $M = \frac{wL^2}{8} + \frac{PL}{4}$ τι κατανομή θα έχει; με τι μέσο όρο και τι διακύμανση; με $L = 2m$



$$M = \frac{w \cdot 4}{8} + \frac{P \cdot 2}{4} = \frac{w}{2} + \frac{P}{2}$$

→ Θα είναι κανονική κατανομή το M σίγουρα, γιατί ισχύει η ιδιότητα:
"όταν αθροίζονται 2 τυχαίες μεταβλητές από κανονικές συναρτήσεις, τότε αυτό που προκύπτει έχει και αυτό κανονική κατανομή"

→ μπορούμε να βγάλουμε ακριβώς τι κατανομή θα έχει το M. μέσος όρος

$M = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}P \Rightarrow E[M] = \frac{1}{2}E[w] + \frac{1}{2}[P] = \frac{1}{2}\cdot 10 + \frac{1}{2}\,1 = 5 + 0{,}5 = 5{,}5$

βάζουμε αναμενόμενες τιμές

Για την διακύμανση:

$$M=\frac{1}{2}W+\frac{1}{2}P \Leftrightarrow E[M^2]=\frac{1}{4}\underbrace{E[W^2]}_{var(w)}+\frac{1}{4}\underbrace{[P^2]}_{var(P)}+\frac{1}{2}E[\overset{\to 0}{P\cdot W}] \Rightarrow$$

$$E[M^2]=\frac{1}{4}\cdot 0{,}04+\frac{1}{4}4=1{,}01$$

Άρα $M\sim N(5{,}5\ ,\ 1{,}01)$

→ μέχρι τώρα είχαμε διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

→ πρέπει να το επεκτείνουμε σε συστήματα που περιγράφονται από στοχαστικές ανελίξεις.

Πως μπορούμε να βάλουμε δειγματοσυναρτήσεις μέσα από ανελίξεις;

μια απεικόνιση από ένα δειγματοχώρο στο πεδίο των συναρτήσεων. (υπεραριθμήσιμα άπειρες τυχαίες μεταβλητές)

Ανάπτυγμα σε σειρά

Ουσιαστικά το υπεραριθμήσιμο πλήθος των τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να το μετατρέψουμε σε ένα αριθμήσιμο και αντίστοιχα πεπερασμένο πλήθος. (για να λυθεί με υπολογιστή)

1) Ανάπτυγμα σε σειρά Karhunen-Loeve (εκτός ύλης) => κάνει σύντομη ανάπτυξη

2) Μέθοδος Spectral Representation => μέθοδος φασματικής απεικόνισης

Μέθοδος φασματικής απεικόνισης: Εδώ βασίζεται η άσκηση.

→ κάνει χρήση του φάσματος ισχύος. (με τα ζεύγη μετασχηματισμού Fourier)
του μονόπλευρου φάσματος ισχύος G.

→ η ανέλιξη πρέπει να είναι τουλάχιστον στάσιμη με την ασθενή έννοια.] Παραδοχές.
→ -//- -//- Gaussian και μηδενικού μέσου όρου.

ορίζεται για κάθε συχνότητα. (x)

$$\boxed{X(t)=\sqrt{2}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\sqrt{G(\omega_n)\Delta\omega}\cdot\cos(\omega_n t+\underbrace{\Phi_n}_{U[0,2\pi]})}$$

με $\omega_n=n\Delta\omega=\frac{\omega_u}{N}$ (συχνότητα αποκοπής)

(το φάσμα μας δίνει πληροφορία για το πως κατανέμεται η ενέργεια της ανέλιξης για τις διάφορες συχνότητες.)

και $G(\omega)\to 0$ με $\omega\to\infty$
έτσι το εμβαδόν του φάσματος είναι πρακτικά $\emptyset$.

(x) Έχουμε αριθμό · cos( ) => Αν για κάποια συχνότητα ω αντιστοιχεί ένας μεγάλος αριθμός του φάσματος G(ω), τότε θα πάρουμε μεγάλο πλάτος για το συγκεκριμένο cos.
πλάτος του cos

→ το στοχαστικό μας κομμάτι είναι η Φ_n με ομοιόμορφη κατανομή.
στοχαστική φάση

→ το ολοκλήρωμα το φάσματος $= \mu^2 + \sigma^2$

στην διακριτή περίπτωση χωρίζω σε κομματάκια και εκφράζεται σαν άθροισμα. $\sum E_n = \sum G(\omega_n)\cdot\Delta\omega = \sigma^2$

γιατί για να εφαρμόσουμε την στοχαστική απεικόνιση πρέπει η συνάρτηση να έχει $\mu = 0$.

$$\boxed{E_n = G(\omega_n)\cdot\Delta\omega}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} E_n = \sigma^2}$$

→ επίσης το ω_n καθορίζει το μήκος του cos()

→ πρέπει να διακριτοποιηθούν και οι χρονικές στιγμές.

Επιλογή χρονικού βήματος (για να μην εμφανιστούν πράγματα που θα αλλοιώσουν την ποιότητα του αποτελέσματός μας)

1) $\Delta t \leq \frac{\pi}{\omega_u}$, για να αποφευχθεί το φαινόμενο aliasing

Πιο κρίσιμο (SOS)

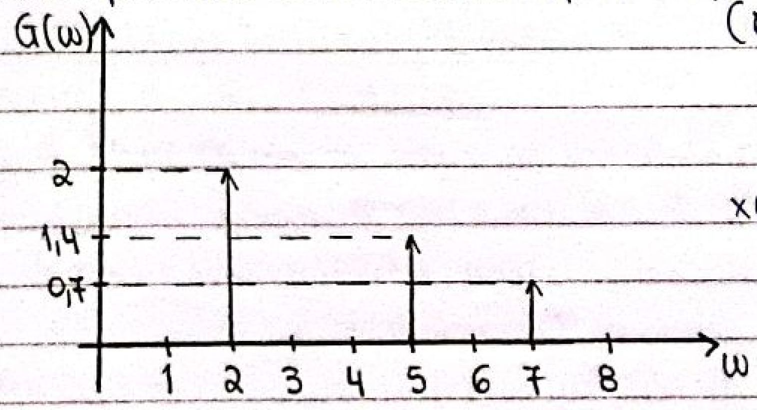
2) $T_{min} = \frac{2\pi}{\omega_u} \Rightarrow \Delta t = \frac{T_{min}}{4 \text{ ή } 8}$

Ελάχιστη περίοδος που έχουμε.

μέγιστη συχνότητα μας λέει την ελάχιστη περίοδο.

Παράδειγμα:

Με την μέθοδο της φασματικής απεικόνισης, να δημιουργήσετε δειγματοσυναρτήσεις της στάσιμης Γκαουσιανής συνάρτησης με το παρακάτω φάσμα ισχύος:



(Έχουμε μεμονωμένες τιμές στο φάσμα, (όχι διαστήματα) θεωρούμε ότι συγκεντρώνεται εκεί.)

⇓ Μορφή φασματικής Απεικόνισης.

$$x(t) = \sqrt{2}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\sqrt{G(\omega_n)\cdot\Delta\omega}\cdot\cos(\omega_n t + \Phi_n)$$

Θα πάρει την μορφή:

$$x^{(i)}(t) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(2t + \Phi_1^{(i)}) + \sqrt{2}\cdot\sqrt{1{,}4}\cdot\cos(5t + \Phi_2^{(i)}) + \sqrt{2}\,\sqrt{0{,}7}\cdot\cos(7t + \Phi_3^{(i)})$$

→ μέσα από αυτή μπορούμε να βγάλουμε δειγματοσυναρτήσεις.

→ Πολύ συχνά έχουμε δεδομένα μέσω φασμάτων μας βολεύει η μέθοδος για να βγάλουμε δειγματοσυναρτήσεις.

Άσκηση 5 (για παράδοση)

→ πρόβολος κυκλικής διατομής $d=0,05m$

→ Μέτρο ελαστικότητας: $E(x)=E_0(1+f(x))$ ⇒ στοχαστική συνάρτηση. Για ομογενές στοχαστικό πεδίο με μέση τιμή $=\phi$.
με $E_0=200GPa$.

→ Φάσμα ισχύος:

$$G(\omega)=\begin{cases}0{,}01 & , 1\leq\omega\leq5\\ \phi & , \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

→ έχουμε ντετερμινιστικό οριζόντιο φορτίο στην άκρη $P=1000kN$

→ να φτιάξουμε 100 δειγματοσυναρτήσεις + οριζόντια μετατόπιση + έλεγχος πιθανότητας αστοχίας (μέσω ενός κριτηρίου αστοχίας)

→ βρίσκουμε το εμβαδόν $A(m^2)=\pi\cdot\frac{d^2}{4}$

→ διακριτοποίηση πεδίου $\Delta x(m)=1$ (επιλογή)
τα κριτήρια για Δt

→ διακριτοποίηση στις συχνότητες $\Delta\omega=1$ (επιλογή)

→ παίρνω $\omega=\underbrace{3\quad 4\quad 5}$ ⇒ Βρίσκω $G(\omega)$
εμείς πολύ περισσότερες πχ 100 μεταξύ του 1 και 5.

Για να βγάλουμε δειγματοσυνάρτηση:

Θέσεις: 1 2 3 4 5 (Διακριτοποίηση 1 και μήκος 5.)

Δειγμ. f ⇒ με τον τύπο της φασματικής απεικόνισης.
↓ χρειαζόμαστε κάποια $\Phi\sim U[0,2\pi]$ ⇒ $\Phi=2\cdot\pi\cdot rand$

→ εμείς έχουμε στοχαστικό πεδίο, γιατί είναι στο χώρο η δειγματοσυνάρτησή μας.

→ βγάζουμε το μέτρο ελαστικότητας με $f(x)$ τις δειγματοσυναρτήσεις.

→ Θέλουμε να βρούμε την μετακίνηση $u=\frac{P\,L}{E\,A}$ → βάζουμε Δx
θέλουμε σε κάθε υποτμήμα του προβόλου (μόνο στο κομματάκι)
το μόνο στοχαστικό κομμάτι

Προσοχή στις μονάδες: $/10^6$

→ Συνολική μετακίνηση = άθροισμα των προηγούμενων. (+) έλεγχος αν ικανοποιείται το κριτήριο.
(+) ποσοστό που αστοχεί.

13-01-2022

Στοχαστικές Μέθοδοι
Στέφανος
Μάθημα 11ο

Αξιοπιστία των κατασκευών:
Βασική Αρχή: "Οι δράσεις που ασκούνται στην κατασκευή πρέπει να είναι μικρότερες από την αντοχή της"
Τα φορτία να μην ξεπερνούν την αντοχή της κατασκευής

$$\boxed{S_d \leq R_d}$$

φορτίο σχεδιασμού — Αντοχή σχεδιασμού.
γενικά χρησιμοποιούνται κάποιοι συντελεστές. ⇒ Δεν είναι το βέλτιστο (ορίζονται για συγκεκριμένες περιπτώσεις)

ως η πιθανότητα μη αστοχίας της:
Αξιοπιστία: $\boxed{L = 1 - P_f}$

Πιθανότητα αστοχίας: $\boxed{P_f = P(R - S \leq 0)}$ ⇒ εμβαδόν επικάλυψης των 2 κανονικών κατανομών.
↳ Αν δεν συναντώνται καθόλου δεν έχουμε πιθανότητα αστοχίας

→ το Τχρόνια μας δίνει πόσο κρίσιμα είναι τα μεγέθη.

Μέθοδοι ποσοτικοποίησης αξιοπιστίας:
1) Τυχαίες παράμετροι με μοντελοποίηση μέσω μιας χαρακτηριστικής τιμής.
2) Χρήση τυχαίων μεταβλητών μέσω μέσων τιμών, τυπικών αποκλίσεων κτλπ.
   ↓ κανονικής κατανομής (εύκολο)
3) Τώρα με όποια κατανομή θέλουμε
4) Επιπλέον στοιχεία όπως συνέπειες και κόστη αστοχίας. (όχι για το μάθημα)

Συντελεστής ασφαλείας:

$$\boxed{G + Q = S < R/s}$$, όπου $s > 1$ ο συντελεστής ασφαλείας

Μερικοί συντελεστές ασφαλείας:

$$\boxed{R_d = \frac{R_k}{\gamma_R} \geq (G_k \cdot \gamma_G + Q_k \cdot \gamma_Q) = S_d}$$

k = χαρακτηριστική τιμή
γ_i = αναφέρονται στους αντίστοιχους συντελεστές ασφαλείας.

Πιθανοτική Θεώρηση ανίσωσης σχεδιασμού:
↳ για να λάβουμε υπόψη της επιρροή των τυχαίων μεταβλητών

$$\boxed{P(S_d \geq R_d, \text{ σε Τχρόνια}) = p(\%)}$$

⇓

Βρίσκουμε την αλληλοκάλυψη → πιθανότητα αστοχίας

→ ορίζουμε επίπεδο αστοχίας και μεταβλητές
→ υπολογίζουμε την αξιοπιστία
→ αν δεν βγει ok ο έλεγχος κάνουμε αλλαγές στο σχεδιασμό.
→ ορίζουμε μια οριακή κατάσταση: $g(r,s) = r - s$

Αν $g<0$ έχουμε αστοχία.

↳ Από κοινή συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας f_{RS}.

→ ολοκληρώνουμε μόνο στα σημεία που $g<0$

→ r και s θεωρούνται ανεξάρτητες

$$P_f = \int_{g<0} f(r)\cdot f(s)\,dr\,ds$$

→ ο όγκος δεξιά από την κόκκινη γραμμή εκφράζει την πιθανότητα αστοχίας.

Reliability Index Method:

→ όλες οι παράμετροι ακολουθούν κανονική κατανομή.
→ Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $M=R-S$ (κανονική)

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_M &= \mu_R - \mu_S\\ \sigma_M &= \sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}\end{aligned}}$$

νέα τυχαία μεταβλητή που και αυτή ακολουθεί την κανονική μεταβλητή

Την κανονικοποιούμε

Θέλουμε $P_f = P(M\le 0) = P\left(\frac{M-\mu_M}{\sigma_M} \le 0 - \frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left(\frac{0-\mu_M}{\sigma_M}\right)$

↓ SOS Αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής — Πίνακα

ή $\boxed{P_f = \Phi\left[\frac{-(\mu_R-\mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}\right] = \Phi(-\beta)}$

με $\boxed{\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}}$, δείκτης ασφαλείας

Hasofer-Lind safety index:

→ έχουμε τα R και S. και βρίσκουμε τις τυποποιημένες κανονικές μεταβλητές

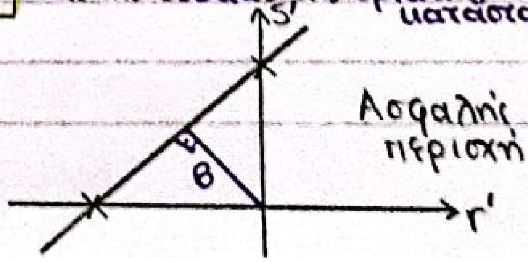
$\boxed{R' = \frac{R-\mu_R}{\sigma_R}}$ και $\boxed{S' = \frac{S-\mu_S}{\sigma_S}}$ ΚΑΙ $\boxed{r' = \frac{r-\mu_R}{\sigma_R}}$ και $\boxed{s' = \frac{s-\mu_S}{\sigma_S}}$

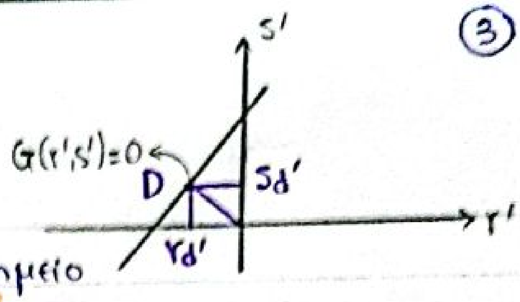
→ η $r-s$ περνάει από την αρχή των αξόνων αλλά λόγω μετασχηματισμού αλλάζει θέση

$$\boxed{g(r,s) = r-s = \sigma_R\cdot r' - \sigma_S\cdot s' + \mu_R - \mu_S = g(r',s') = 0}$$

για $r'=0$ => βρίσκω s' } σημεία τομής
$s'=0$ => -//- r' } με τους άξονες
⇓
βλέπε σχήμα

"Ο δείκτης ασφαλείας β είναι η απόσταση μεταξύ της αρχής των αξόνων και της ευθείας της οριακής κατάστασης"





Το σημείο σχεδιασμού D είναι το σημείο με συντεταγμένες (r_d', S_d') με $r_d = S_d$ (είναι το πιθανότερο σημείο για την αστοχία) $\boxed{a_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}}$ και $\boxed{a_S = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}}$

$\boxed{r_d' = -\beta \cdot a_R \Rightarrow}$
$\boxed{r_d = \mu_R - \sigma_R \cdot \beta \cdot a_R}$

Βρίσκουμε το σημείο σχεδιασμού
→ Πιθανότερο σημείο για την αστοχία, γιατί επειδή είναι κάθετη είναι η πιο μικρή απόσταση από την αρχή των αξόνων.
↓ Ουσιαστικά το μικρότερο β => Άρα το μεγαλύτερο Φ
→ γιατί η Φ είναι ↑ συνάρτηση.

$\boxed{S_d' = +\beta \cdot a_S \Rightarrow}$
$\boxed{S_d = \mu_S + \sigma_S \cdot \beta \cdot a_S}$

Χαρακτηριστικές τιμές τ.μ. "Αν συμβολίσουμε ως X_k την τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X η οποία αντιστοιχεί σε μια προκαθορισμένη πιθανότητα υπερβάσεως της (ή υποσκελίσεως):
$\boxed{P(X \le X_k) = P_k}$ τότε η X_k ονομάζεται χαρακτηριστική τιμή της τυχαίας μεταβλητής X"
↓ χαρακτηριστική τιμή.
→ έχουμε σκυρόδεμα C20 σημαίνει ότι μόνο το 5% των δοκιμίων έχουν αντοχή μικρότερη των 20MPa
↳ χαρακτηριστική τιμή.

$\boxed{S_d = \gamma_S \cdot S_k}$ Δράσεις
$\boxed{r_d = \frac{r_k}{\gamma_R}}$ Αντοχές

→ εμείς ορίζουμε την πιθανότητα αστοχίας με την κρίση μας και την σπουδαιότητα της κατασκευής.
Αντοχές => Υποσκελίσεως , Δράσεις => Υπερβάσεως

Παράδειγμα καθηγητή.
Δίνονται τα εξής δεδομένα: $R \sim N(30,5)$ και $S \sim N(20,10)$ σε kN
Ζητείται να υπολογιστεί ο δείκτης ασφαλείας β και το σημείο σχεδιασμού D, να παρασταθούν γραμμικά και τέλος να υπολογιστεί η πιθανότητα αστοχίας.

→ Από τα δεδομένα: Αντοχές $\mu_R = 30$ και Δράσεις $\mu_S = 20$
$\sigma_R = 5$ $\sigma_S = 10$

$M = R - S \Rightarrow \mu_M = \mu_R - \mu_S = 30 - 20 = 10$ $M \sim N(10, 11{,}18)$
$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 11{,}18$

Άρα ο δείκτης ασφαλείας $\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{10}{11{,}18} = 0{,}8944$

Για το σημείο σχεδιασμού D:
$a_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 10^2}} = 0{,}4472$ και $a_S = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{10}{\sqrt{5^2 + 10^2}} = 0{,}8944$

$r_d = \mu_R - \sigma_R \cdot \beta \cdot \alpha_R$ ⇒ και $S_d = \mu_S + \sigma_S \cdot \beta \cdot \alpha_S$ ⇒

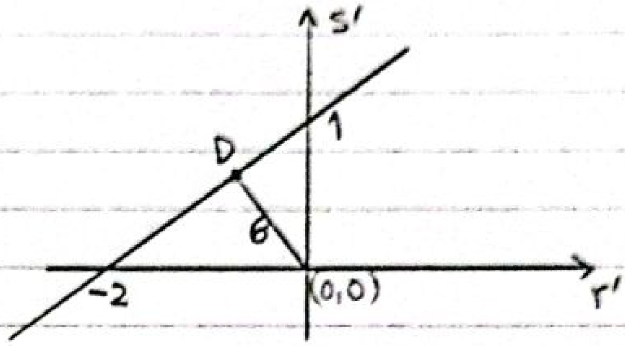
$r_d = 30 - 5 \cdot 0{,}8944 \cdot 0{,}4472$ ⇒ $S_d = 20 + 10 \cdot 0{,}8944 \cdot 0{,}8944$ ⇒

$r_d = 28\,kN$ $S_d = 27{,}9995 \simeq 28\,kN$

→ με $r_d = S_d$ είναι το πιθανότερο σημείο αστοχίας

και $P_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-0{,}8944) = 18{,}6\%$.

Από πίνακα της αθροιστικής συνάρτησης



Για το διάγραμμα:

1) Βρίσκουμε το D σαν σημείο

2) Ενώνουμε με την αρχή των αξόνων που είναι το β

3) Στο β φέρνουμε κάθετη που είναι η επιφάνεια αστοχίας.

Για $S' = 0 \Rightarrow \sigma_R \cdot r' - 0 + \mu_R - \mu_S = 0$ ⇒

$$r' = \frac{\mu_S - \mu_R}{\sigma_R} = \frac{20-30}{5} = -2$$

Για $r' = 0 \Rightarrow 0 - \sigma_S \cdot S' + \mu_R - \mu_S = 0$ ⇒

$$S' = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_S} = \frac{30-20}{10} = 1$$

Έτσι βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

Παράδειγμα καθηγητή:

Έστω διατομή από οπλισμένο σκυρόδεμα με αντοχή $R \sim N(500, 50)$. Στη διατομή ασκούνται οι δράσεις $S_1 \sim N(200, 20)$ και $S_2 \sim N(100, 0)$

Ζητείται να υπολογιστεί ο δείκτης ασφαλείας β και το σημείο σχεδιασμού D, οι χαρακτηριστικές τιμές δράσεων και αντοχών, για πιθανότητα υποσκελίσεως / υπέρβασης 5%, οι συντελεστές ασφαλείας και τέλος να υπολογιστεί η πιθανότητα αστοχίας.

→ τώρα αφού έχουμε 2 δράσεις S_1 και S_2 που ακολουθούν την κανονική κατανομή θα βγάλουμε μια S.

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu_S = \mu_{S1} + \mu_{S2} = 200 + 100 = 300 \\ \sigma_S = \sqrt{\sigma_{S1}^2 + \sigma_{S2}^2} = \sqrt{20^2 + 0^2} = 20 \end{array}\right\} \text{Δράση } S \sim N(300, 20)$$

→ Από τα δεδομένα:

	Αντοχές	Δράσεις
	$\mu_R = 500$	$\mu_S = 300$
	$\sigma_R = 50$	$\sigma_S = 20$

$M = R - S \Rightarrow \mu_M = \mu_R - \mu_S = 500 - 300 = 200$ $\quad M \sim N(200,\ 53{,}852)$

$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} = \sqrt{50^2 + 20^2} = 53{,}852$

Άρα ο συντελεστής ασφαλείας: $\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{200}{53{,}852} = 3{,}714$

Για το σημείο σχεδιασμού D:

$$a_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{50}{53{,}852} = 0{,}9285$$

$$a_S = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{20}{53{,}852} = 0{,}3714$$

$r_d = \mu_R - \sigma_R \cdot \beta \cdot a_R \Leftrightarrow$ και $S_d = \mu_S + \sigma_S \cdot \beta \cdot a_S \Leftrightarrow$

$r_d = 500 - 50 \cdot 3{,}714 \cdot 0{,}9285 \Leftrightarrow$ $\quad S_d = 300 + 20 \cdot 3{,}714 \cdot 0{,}3714 \Leftrightarrow$

$r_d = 327{,}58\,kN$ $\quad S_d = 327{,}59\,kN$

→ με $r_d = S_d = 327{,}59\,kN$ να είναι το πιθανότερο σημείο αστοχίας και $P(-\beta) = P_f = 901\%$

Για τους συντελεστές ασφαλείας:

$S_d = \gamma_S \cdot S_k \Rightarrow \gamma_S = \frac{S_d}{S_k} = \frac{327{,}59}{S_k}$

$r_d = \frac{r_k}{\gamma_R} \Rightarrow \gamma_R = \frac{r_k}{r_d} = \frac{r_k}{327{,}59}$

$\left.\begin{array}{l} P(R \geq \gamma_R) = 0{,}95 \\ P(S \leq \gamma_S) = 0{,}05 \end{array}\right\}$ με την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας,