

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ, ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ & ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΘΕΜΑ:

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΥΚΛΟΣΤΑΣΙΜΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ
ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ
ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΜΝΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ
ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΕΜΜΟΝΗΣ

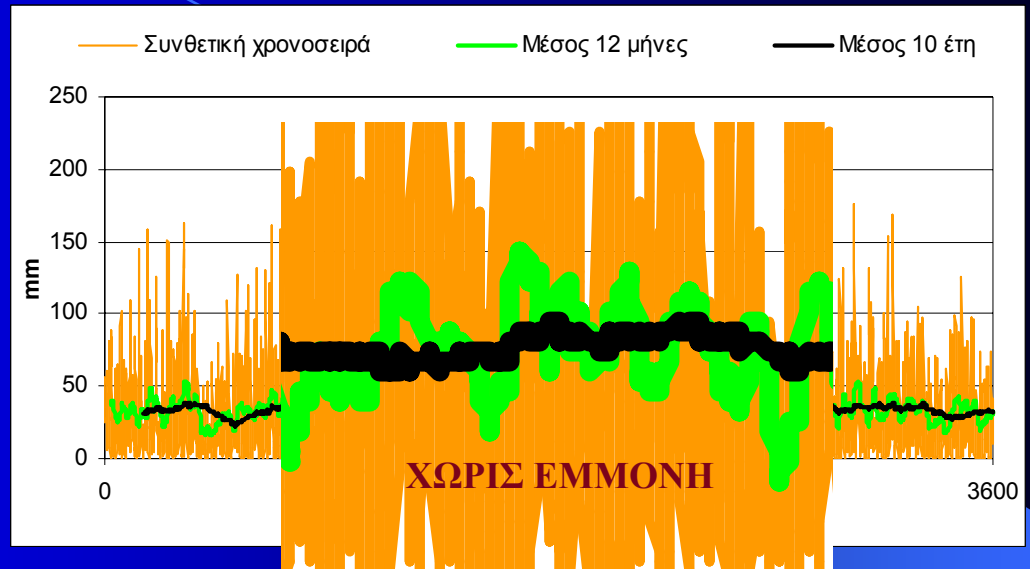
Ανδρέας Λαγγούσης

Αθήνα, Ιούλιος 2003

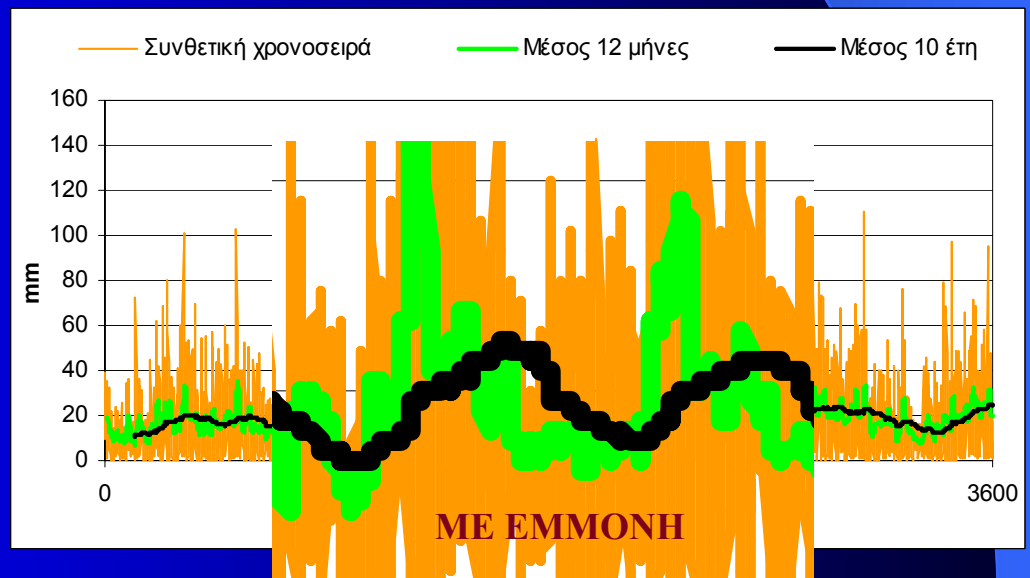
Επιβλέπων: Δ. Κουτσογιάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (1)

Υπάρχοντα εποχιακά
μοντέλα άμεσης
σειριακής
προσομοίωσης



Αναπτυχθέντα
εποχιακά μοντέλα
άμεσης σειριακής
προσομοίωσης



ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (2)

Αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι η ανάπτυξη νέων στοχαστικών υδρολογικών μοντέλων που:

- θα είναι εύχρηστα και φειδωλά (σε παραμέτρους),
- θα παράγουν άμεσα χρονοσειρές σε εποχιακή κλίμακα,
- θα αναπαράγουν την περιοδικότητα των στατιστικών χαρακτηριστικών και της βραχυπρόθεσμης μνήμης σε κατώτερη χρονική κλίμακα (εποχιακή),
- θα αναπαράγουν τις περιθώριες κατανομές και την μακροπρόθεσμη εμμονή των ετήσιων χρονοσειρών (ανώτερη χρονική κλίμακα)

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗ ΕΜΜΟΝΗ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ (1)

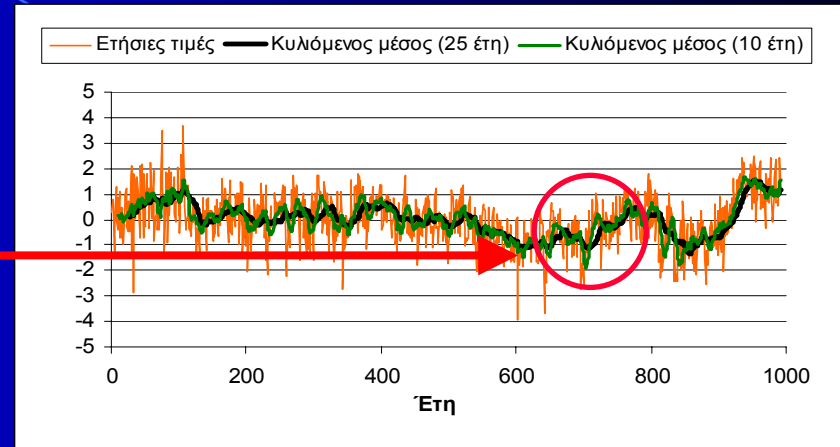
Ιστορική αναδρομή

- Ο Hurst (1951) μελετώντας τις υδρολογικές χρονοσειρές του ποταμού Νείλου (στα πλαίσια της μελέτης του φράγματος του Ασουάν) διαπιστώνει την ιδιότητα των υγρών και ξηρών ετών να εμφανίζονται κατά ομάδες σχηματίζοντας υγρές και ξηρές περιόδους αντίστοιχα.
- Η μακροπρόθεσμη εμμογή των φυσικών χρονοσειρών λαμβάνει την ονομασία «φαινόμενο Hurst» (Hurst phenomenon) ενώ αργότερα εισάγεται από τον Mandelbrot (1977) ο εναλλακτικός όρος «φαινόμενο Ιωσήφ» (Joseph effect) (από τον ομώνυμο Βιβλικό μύθο).
- Η μακροπρόθεσμη εμμογή εντοπίζεται σε πλήθος κλιματολογικών και γεωφυσικών χρονοσειρών: χρονοσειρές διακυμάνσεων εντάσεως ανέμων, χρονοσειρές διακυμάνσεως της μέσης παγκόσμιας θερμοκρασίας, χρονοσειρές απορροών του ποταμού Νείλου, του ποταμού Βάρτα στην Πολωνία, χρονοσειρές ημερήσιων και μηνιαίων εισροών στην λίμνη Ματζόρε στην Ιταλία, χρονοσειρές ετησίων απορροών ποταμών κατά μήκος της Ηπειρωτικής Αμερικής, χρονοσειρές πάχους δακτυλίων δένδρων κ.α.

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗ ΕΜΜΟΝΗ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ (2)

Μηχανισμός γένεσης

Το φαινόμενο οφείλει την ύπαρξή του στην ταυτόχρονη εμφάνιση πολλών τυχαίων διακυμάνσεων διαφορετικής χρονικής κλίμακας στην μελετούμενη στάσιμη χρονοσειρά.



Τιμές ιστορικής χρονοσειράς μέσω ετήσιων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998)

Εντοπισμός του φαινομένου

Η μακροπρόθεσμη εμμογή των φυσικών χρονοσειρών εντοπίζεται υπό τη μορφή υψηλών θετικών τιμών των συντελεστών αυτοσυσχέτισης της στάσιμης χρονοσειράς ακόμα και για μεγάλα βήματα χρονικής μετατόπισης (lags).

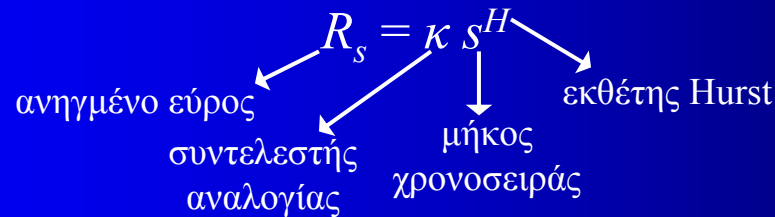


Αυτοσυσχετόγραμμα ιστορικής χρονοσειράς μέσω ετήσιων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998)

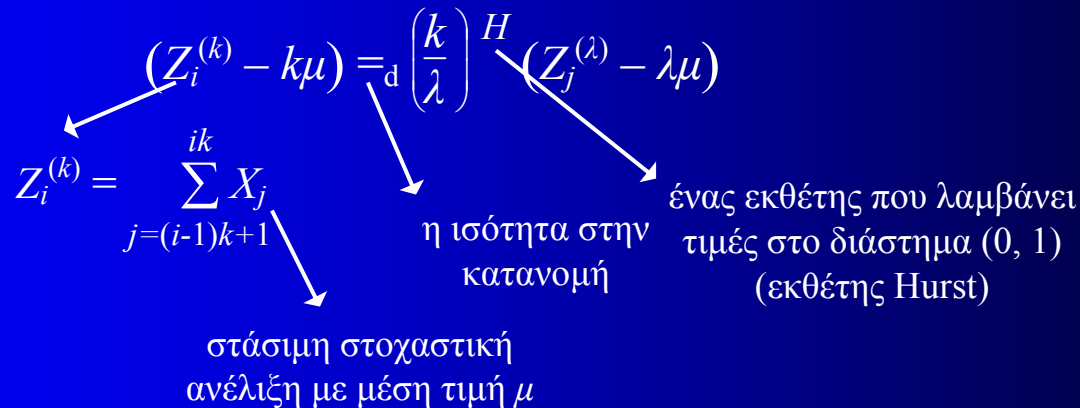
ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗ ΕΜΜΟΝΗ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ (3)

Περιγραφή του φαινομένου

Ο Hurst (1951) περιγράφει την μακροπρόθεσμη εμμονή με χρήση της έννοιας του ανηγμένου εύρους.



Ο Mandelbrot (1965) προκειμένου να περιγράψει το φαινόμενο Hurst ορίζει μία διαδικασία γνωστή ως «Κλασματικός Γκαουσιανός Θόρυβος» [Fractional Gaussian Noise (FGN)], η οποία μπορεί να περιγραφεί ως μία αυτό-όμοια διαδικασία που κείται σε χώρο μίας κλασματικής διαστάσεως από την σχέση:



ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗ ΕΜΜΟΝΗ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ (4)

Ποσοτικοποίηση της μακροπρόθεσμης εμμόνης

- Η ποσοτικοποίηση της μακροπρόθεσμης εμμόνης πραγματοποιείται μέσω της τιμής του συντελεστή Hurst της στάσιμης στοχαστικής ανελίξεως
 - αν $H \in (0.5, 1) \Rightarrow$ έμμονες χρονοσειρές (θετικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης)
 - αν $H \in (0, 0.5) \Rightarrow$ αντιέμμονες χρονοσειρές (αρνητικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης)
- Το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα του «Κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου» (FGN):
 - είναι ανεξάρτητο της χρονικής κλίμακας της συναθροίσεως της στοχαστικής ανελίξεως $Z_i^{(k)}$,
 - φθίνει ως συνάρτηση δύναμης του βήματος χρονικής μετατόπισης j ,
 - περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\rho_j^{(k)} = \rho_j = \rho_{|j|} = \left(\frac{1}{2}\right) [(|j|+1)^{2H} + (|j|-1)^{2H}] - |j|^{2H}, \quad j \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

συντελεστής
αυτοσυσχέτισης για
υστέρηση j

εκθέτης Hurst

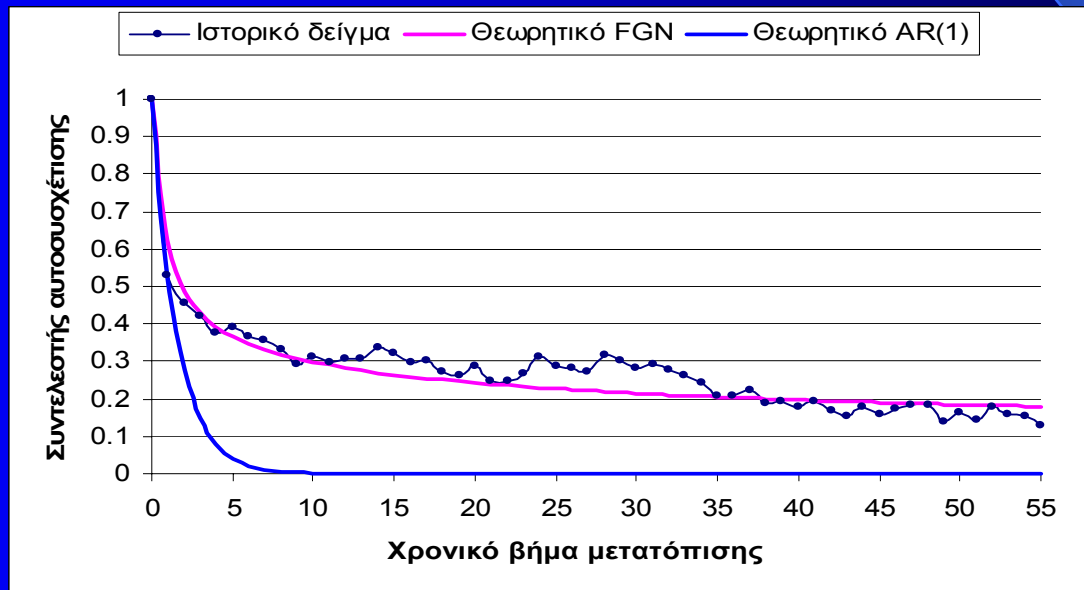
βήμα χρονικής
μετατόπισης
(υστέρηση)

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗ ΕΜΜΟΝΗ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ (5)

Ποσοτικοποίηση της μακροπρόθεσμης εμμόνης (συνέχεια)

- Αντιθέτως, το αυτοσυσχετόγραμμα μίας ανεπίξεως Markov (Markovian process) φθίνει εκθετικά συναρτήσε του βήματος της χρονικής μετατόπισης j [π.χ. AR(1)]

$$\rho_j = (\rho_1)^{|j|}$$



Σύγκριση αυτοσυσχετογράμματος ιστορικού δείγματος μέσωσ ετησίωσ θερμοκρασιώσ Βορείου Ημισφαιρίου και των θεωρητικώσ αυτοσυσχετογραμμάτωσ FGN και AR(1)

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (1)

Μοντέλα της οικογένειας ARMA(p, q) (Autoregressive Moving Average models)

Τα μονομεταβλητά μοντέλα αυτοσυσχέτισης τάξεως p και κινούμενου μέσου όρου τάξεως q δίδονται από την εξίσωση:

$$X_t = \varphi_{p,1} X_{t-1} + \varphi_{p,2} X_{t-2} + \dots + \varphi_{p,p} X_{t-p} + V_t + \theta_{q,1} V_{t-1} + \dots + \theta_{q,q} V_{t-q}$$

στάσιμη στοχαστική ανελίξη παράμετροι μεταβλητή λευκού θορύβου δεδομένης κατανομής

Τα μοντέλα της οικογένειας ARMA(p, q) δύνανται να αναπαράγουν:

- την μέση τιμή της στάσιμης στοχαστικής ανελίξεως,
- την τυπική απόκλιση της στάσιμης στοχαστικής ανελίξεως,
- τον συντελεστή ασυμμετρίας της στάσιμης στοχαστικής ανελίξεως (εφαρμόζοντας λευκό θόρυβο με ασυμμετρία),
- τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης της στάσιμης στοχαστικής ανελίξεως, έως και χρονικό βήμα μετατόπισης $p + q$.

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (2)

- Η κυκλική τυποποίηση ως μέθοδος εφαρμογής των μοντέλων ARMA(p, q) σε κυκλοστάσιμες στοχαστικές ανελίξεις:

Εφαρμογή της μεθόδου

1. «Στασιμοποίηση» της αρχικά κυκλοστάσιμης χρονοσειράς ως προς την μέση τιμή και την τυπική της απόκλιση με χρήση του μετασχηματισμού:

$$Z_s = \frac{X_s - \mu_s}{\sigma_s}$$

τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στην εποχή (μήνα) s , με $E[Z_s]=0$ και $\text{Var}[Z_s]=1$

τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στην εποχή (μήνα) s , με $E[X_s]=\mu_s$ και $\text{Var}[X_s]=(\sigma_s)^2$

2. Εφαρμογή κάποιου απλού μοντέλου της οικογένειας ARMA [π.χ. AR(1), AR(2), ARMA(1, 1)]
3. «Κυκλοστασιμοποίηση» της συνθετικής χρονοσειράς με εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού,

$$X_s = Z_s \sigma_s + \mu_s$$

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (3)

Πλεονεκτήματα της μεθόδου:

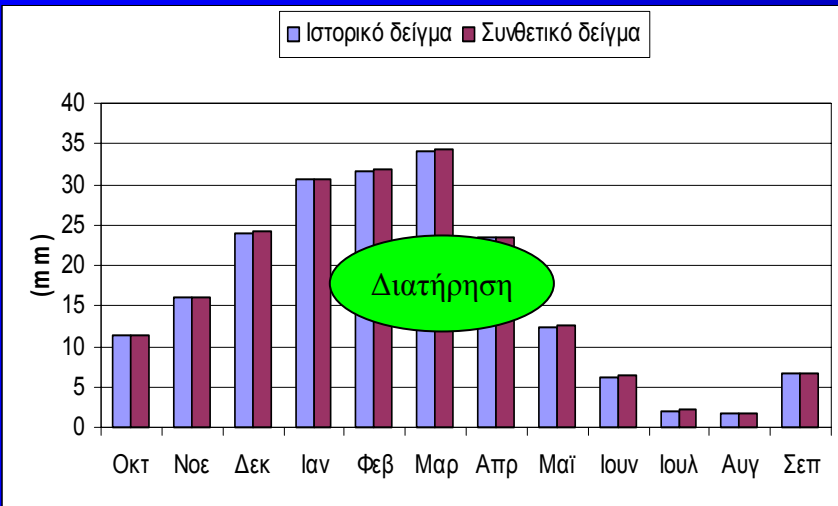
- είναι απλή και γρήγορη,
- αναπαράγει τις εποχιακές μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις,
- αναπαράγει την ετήσια μέση τιμή.

Μειονεκτήματα της μεθόδου:

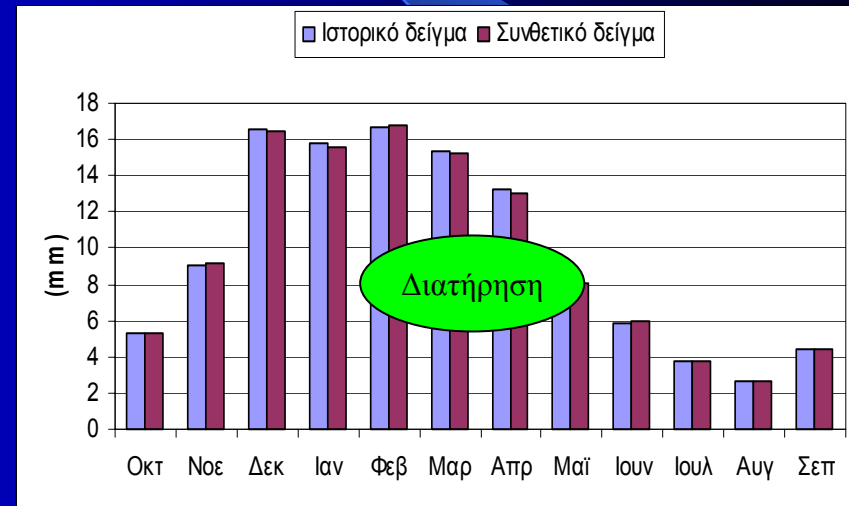
- αδυναμία αναπαραγωγής των εποχιακών συντελεστών ασυμμετρίας,
- αδυναμία αναπαραγωγής των εποχιακών συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των εποχών,
- αδυναμία αναπαραγωγής υψηλοτέρων της πρώτης τάξεως ροπών της ετήσιας χρονοσειράς,
- αδυναμία αναπαραγωγής της μακροπρόθεσμης εμμονής [στην περίπτωση χρήσης απλών μοντέλων της οικογένειας $ARMA(p, q)$].

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (4)

Εφαρμογή της μεθόδου, σε συνδυασμό με ένα μοντέλο AR(1), στην χρονοσειρά μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού



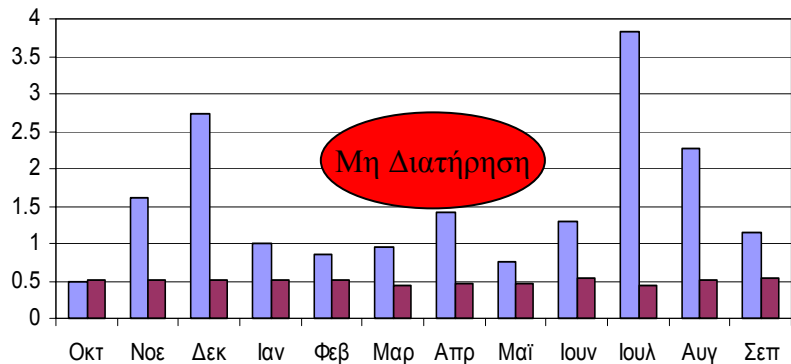
Μηνιαίες μέσες τιμές



Μηνιαίες τυπικές αποκλίσεις

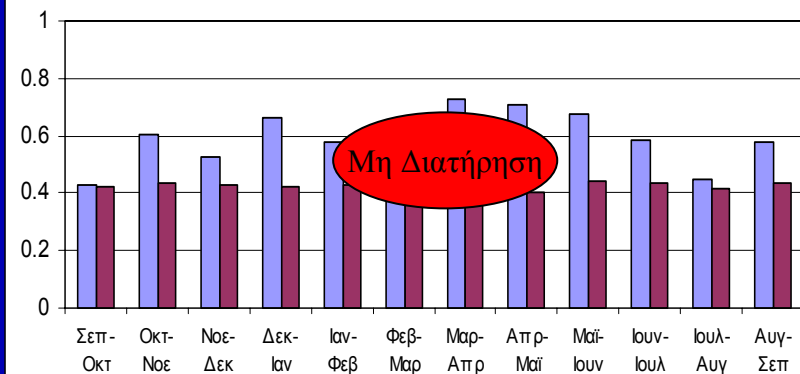
ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (5)

■ Ιστορικό δείγμα ■ Συνθετικό δείγμα



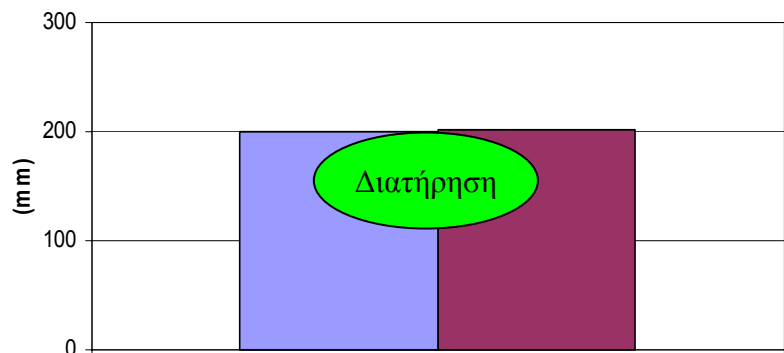
Μηνιαίοι συντελεστές ασυμμετρίας

■ Ιστορικό δείγμα ■ Συνθετικό δείγμα



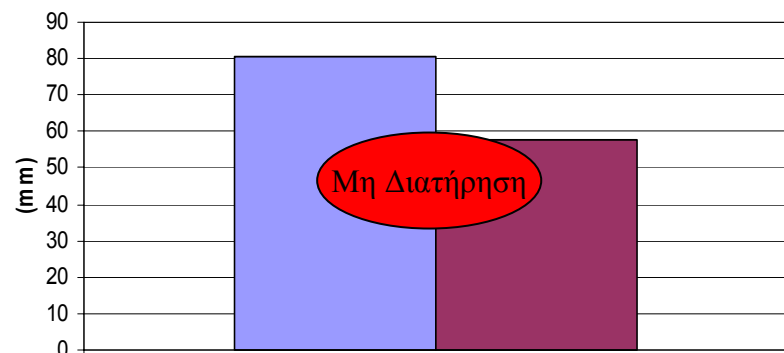
1ης τάξεως συντελεστές αυτοσυσχέτισης των μηνών

■ Ιστορικό δείγμα ■ Συνθετικό δείγμα



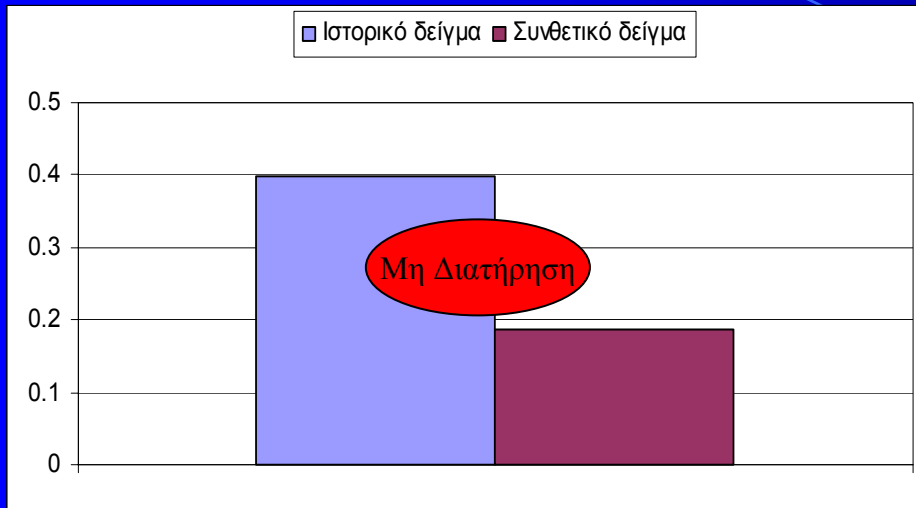
Ετήσια μέση τιμή

■ Ιστορικό δείγμα ■ Συνθετικό δείγμα



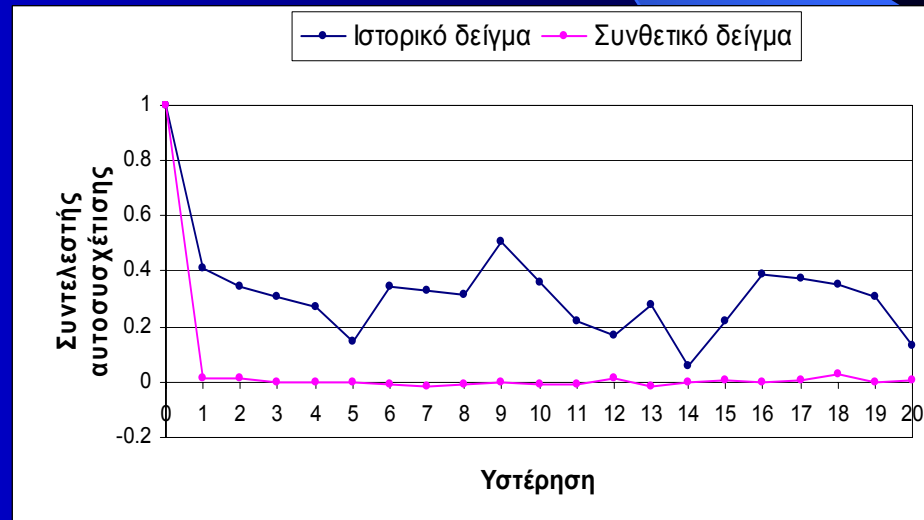
Ετήσια τυπική απόκλιση

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (6)



Ετήσιος συντελεστής ασυμμετρίας

**Αδυναμία διατήρησης
της μακροπρόθεσμης
εμμονής**



Αυτοσυσχετόγραμμα ετήσιας χρονοσειράς

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (7)

- Μοντέλα της οικογένειας **MPARMA**(p, q) (Multivariate Periodic Autoregressive Moving Average models)

Γενικεύοντας τα μονομεταβλητά μοντέλα της οικογένειας **ARMA**(p, q) στον πολυδιάστατο χώρο, και τροποποιώντας τα κατάλληλα για την αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών μίας κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανελίξεως, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{a}_{p,1}^s \mathbf{X}_{s-1} + \mathbf{a}_{p,2}^s \mathbf{X}_{s-2} + \dots + \mathbf{a}_{p,p}^s \mathbf{X}_{s-p} + \mathbf{V}_s + \mathbf{b}_{q,1}^s \mathbf{V}_{s-1} + \dots + \mathbf{b}_{q,q}^s \mathbf{V}_{s-q}$$

$\mathbf{X}_s = [X_s^1, X_s^2, \dots, X_s^n]^T$
 κυκλοστάσιμη στοχαστική ανελίξη της θέσης n , με περίοδο k (k ο αριθμός των εποχών)

$n \times n$ περιοδικά μεταβαλλόμενες μητρικές παράμετροι (περίοδος k)

$\mathbf{V}_s = [V_s^1, V_s^2, \dots, V_s^n]^T$
 κυκλοστάσιμη στοχαστική ανελίξη με μηδενική συσχέτιση ως προς τον χρόνο s , για την θέση n

Τα μοντέλα της οικογένειας **MPARMA**(p, q) δύνανται να αναπαράγουν:

- τις k σε αριθμό εποχιακές ($k=12 \Rightarrow$ μηνιαίες) μέσες τιμές της τυχαίας μεταβλητής X_s^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l ,
- τις k σε αριθμό εποχιακές τυπικές αποκλίσεις της τυχαίας μεταβλητής X_s^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l ,
- τους k σε αριθμό εποχιακούς συντελεστές ασυμμετρίας της τυχαίας μεταβλητής X_s^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l ,

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (8)

- τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης της τυχαίας μεταβλητής X_s^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l έως και χρονικό βήμα μετατόπισης $p + q$,
- τους συντελεστές ετεροσυσχέτισης της τυχαίας μεταβλητής X_s^l της κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l με τις μεταβλητές όλων των υπολοίπων θέσεων ενδιαφέροντος έως και χρονικό βήμα μετατόπισης $p + q$.

Το απλούστερο μοντέλο της οικογένειας MPARMA(p, q) είναι το μοντέλο MPAR(1) (Multivariate Periodic Autoregressive model of order 1),

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{a}_s \mathbf{X}_{s-1} + \mathbf{V}_s$$

οι παράμετροι του οποίου μπορούν να προσδιορισθούν από τις εξισώσεις:

$$\mathbf{a}_s = \text{Cov}[\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_{s-1}] \{\text{Cov}[\mathbf{X}_{s-1}, \mathbf{X}_{s-1}]\}^{-1} \text{ για } s = 1, \dots, k$$

$$\mathbf{b}_s = \text{Cov}[\mathbf{V}_s, \mathbf{V}_s] = \text{Cov}[\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_s] - \mathbf{a}_s \text{Cov}[\mathbf{X}_{s-1}, \mathbf{X}_{s-1}] (\mathbf{a}_s)^T \text{ για } s = 1, \dots, k$$

$$E[\mathbf{V}_s] = (\mathbf{b}_s)^{-1} \{E[\mathbf{X}_s] - \mathbf{a}_s E[\mathbf{X}_{s-1}]\} \text{ για } s = 1, \dots, k$$

$$\text{Cov}[\mathbf{V}_s, \mathbf{V}_s] = \mathbf{I} \text{ για } s = 1, \dots, k$$

$$\mu_3[\mathbf{V}_s] = (\mathbf{b}_s^{(3)})^{-1} \{\mu_3[\mathbf{X}_s] - \mu_3[\mathbf{a}_s \mathbf{X}_{s-1}]\} \text{ για } s = 1, \dots, k$$

Μη αναπαγωγική εμμονής

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (9)

- Μοντέλα αναπαραγωγής της μακροπρόθεσμης εμμοής στάσιμων στοχαστικών ανελίξεων
 - Μοντέλο Συμμετρικά Κινούμενου Μέσου Όρου (Symmetric Moving Average model, SMA):

$$X_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{|j|} V_{i+j} = \dots + \alpha_2 V_{i-2} + \alpha_1 V_{i-1} + \alpha_0 V_i + \alpha_1 V_{i+1} + \alpha_2 V_{i+2} + \dots$$

στάσιμη στοχαστική ανέλιξη με τυχούσας μορφής αυτοσυσχετόγραμμα

παραμέτροι

στάσιμη στοχαστική ανέλιξη ασυσχέτιστη ως προς τον χρόνο $i+j$, με μοναδιαία τυπική απόκλιση

Για μη θετικά ορισμένο πίνακα αυτοσυνδιασπορών της X_i ο προσδιορισμός των παραμέτρων γίνεται μόνο αριθμητικά από την εξίσωση:

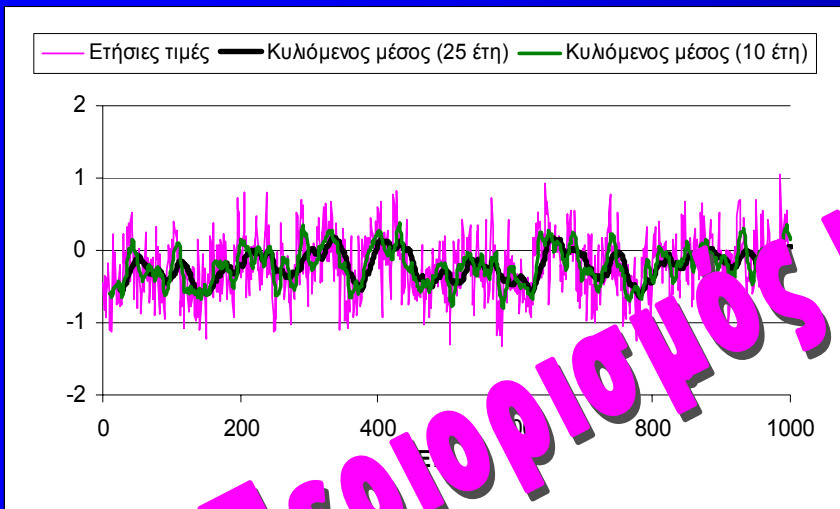
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{|j|} \alpha_{|i+j|} = \gamma_i = \text{Cov}[X_p, X_{p-i}], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Για θετικά ορισμένο πίνακα αυτοσυνδιασπορών της X_i , ο προσδιορισμός των παραμέτρων μπορεί να γίνει αναλυτικά μέσω του φάσματος ισχύος $s_{\gamma}(\omega)$ της X_i

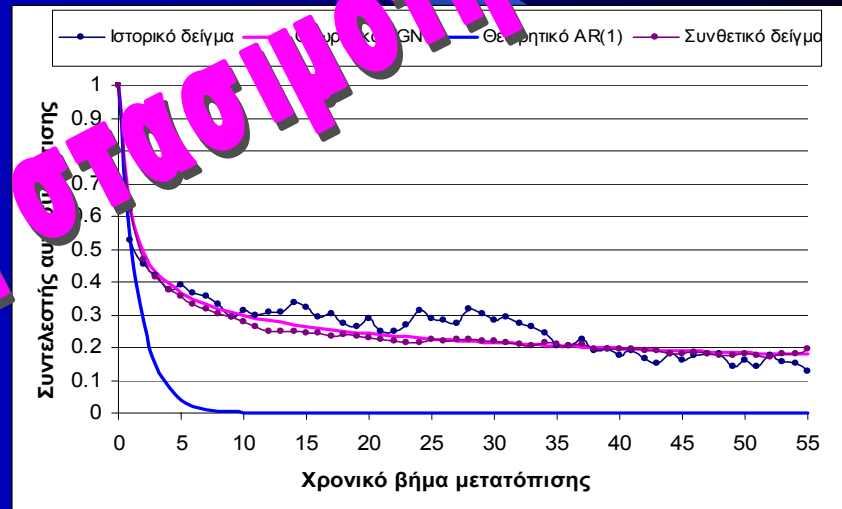
Επέκταση σε πολυμεταβλητό με χρήση ασυσχέτιστου στον χρόνο και συσχετισμένου μεταξύ των θέσεων λευκού θορύβου.

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ (10)

Αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής στάσιμης χρονοσειράς με χρήση του μοντέλου SMA (χρονοσειρά μέσω των ετησίων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου)



Τιμές συνθετικής χρονοσειράς μέσω των ετησίων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου



Οπτικοποιημένη σύγκριση αυτοσυσχετογραμμάτων

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΟΣΤΑΣΙΩΤΗΤΑ

ΥΠΑΡΞΗ ΚΕΝΟΥ ΣΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΜΕΣΗΣ ΣΕΙΡΙΑΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Δεν υφίστανται μοντέλα άμεσης σειριακής προσομοίωσης που να αναπαράγουν ταυτόχρονα:

εμμογή

+

βραχυπρόθεσμη μνήμη

+

κυκλοστασιμότητα

+

στατιστικά χαρακτηριστικά σε πολλαπλές κλίμακες

ΣΤΟΧΟΣ, Η ΠΛΗΡΩΣΗ ΤΟΥ ΥΠΑΡΧΟΝΤΟΣ ΚΕΝΟΥ

Με χρήση:

- βασικών αρχών της κλασσικής στατιστικής και της θεωρίας στοχαστικών ανελίξεων,
- στοιχείων άλγεβρας μητρώων,
- μεθόδων βελτιστοποιήσεως πραγματικών συναρτήσεων διανυσματικής μεταβλητής,

αναπτύξαμε 3 κυκλοστάσιμα στοχαστικά υδρολογικά μοντέλα άμεσης σειριακής προσομοίωσης που αναπαράγουν:

- την βραχυπρόθεσμη μνήμη
- την μακροπρόθεσμη εμμονή,
- τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος σε περισσότερες από μία χρονικές κλίμακες (ετήσια και εποχιακή).

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΡΑΡSΜΑΦ (1)

(Multivariate Periodic Autoregressive model with Symmetric Moving Average Filter)

Το ΜΡΑΡSΜΑΦ βασίζεται:

- στην εφαρμογή ενός μοντέλου ΜΡΑΡ(1) σε συνδυασμό με φίλτρο SMA,
- σε μία ιδιότητα του φαινομένου Hurst,
- στη μικρής τάξεως μνήμη ενός μοντέλου ΜΡΑΡ(1)

Ιδιότητα φαινομένου Hurst

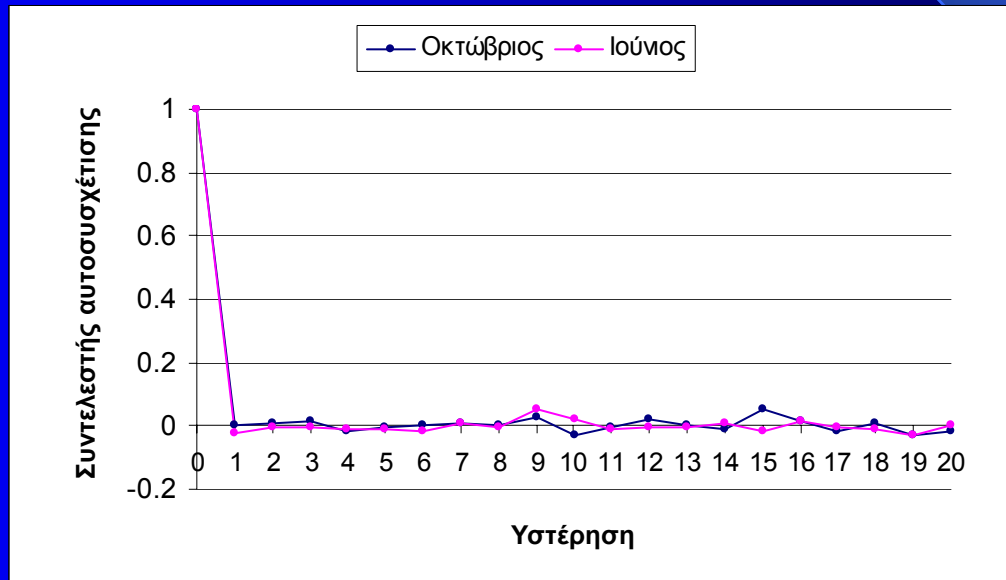
Το άθροισμα δύο στάσιμων στοχαστικών ανελίξεων που έχουν τον ίδιο συντελεστή Hurst, αποτελεί στάσιμη στοχαστική ανέλιξη με συντελεστή Hurst ίσο με τον αρχικό.

Βραχυπρόθεσμη μνήμη ΜΡΑΡ(1)

Αν W_j κυκλοστάσιμη στοχαστική ανέλιξη ΜΡΑΡ(1) με περίοδο k , τότε η ανέλιξη $W_{(j-1)k+s}$ για δεδομένο s ($s = 1, \dots, k$) και $j = 1, \dots$ είναι στάσιμη με αυτοσυσχέτιση που τείνει στο μηδέν εφόσον το k τείνει στο άπειρο.

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΡΑΡSΜΑF (2)

Ακόμα όμως και αν k πεπερασμένο (π.χ. $k=12$ fl μηνιαία κλίμακα), οι συνθετικές χρονοσειρές των εποχών (μηνών) ενός μοντέλου ΜΡΑR(1) είναι, με αρκετά μεγάλη ακρίβεια, χρονοσειρές λευκού θορύβου.

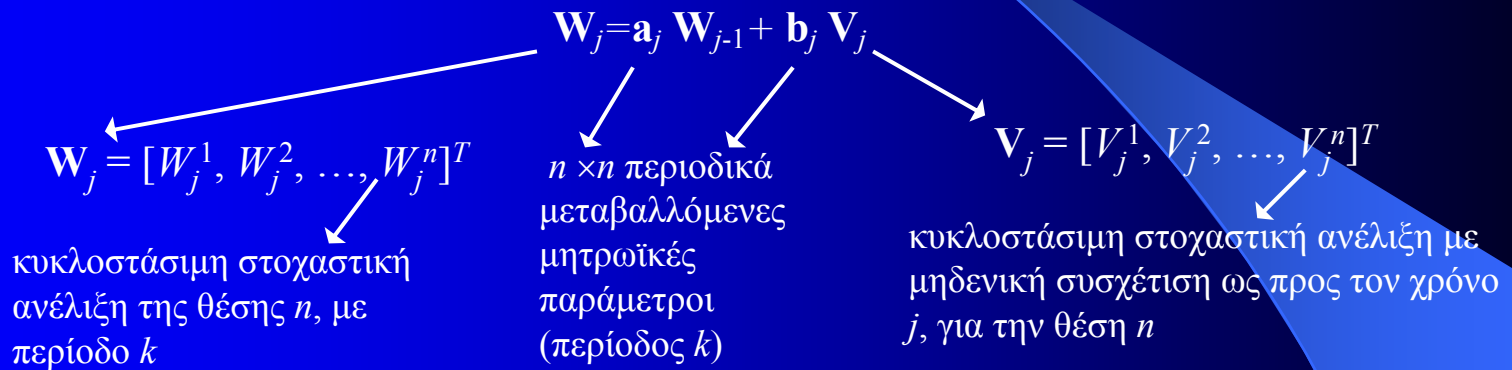


Αυτοσυσχετόγραμμα των μηνών Οκτωβρίου και Ιουνίου της συνθετικής χρονοσειράς απορροών Βοιωτικού Κηφισού που παρήχθη με χρήση μοντέλου ΜΡΑR(1)

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΡΑΡSMAF (3)

Πορεία εφαρμογής του μοντέλου:

1. Παράγουμε χρονοσειρές σε εποχιακή (μηνιαία) κλίμακα με χρήση ενός μοντέλου ΜΡΑΡ(1)



2. Χρησιμοποιούμε τις συνθετικές χρονοσειρές κάθε μήνα κάθε θέσεως ως ασυσχέτιστο στο χρόνο λευκό θόρυβο για ένα μοντέλο SMA

$$X_{(i-1)k+s}^l = \sum_{j=-q}^q \alpha_{|j|}^l W_{(i+j-1)k+s}^l \quad \text{για } s = 1, \dots, k, \quad l=1, 2, \dots, n$$

The diagram illustrates the components of the SMA model equation $X_{(i-1)k+s}^l = \sum_{j=-q}^q \alpha_{|j|}^l W_{(i+j-1)k+s}^l$:

- $X_{(i-1)k+s}^l$: έμμονη στάσιμη ανέλιξη της εποχής s , της θέσης l
- $\alpha_{|j|}^l$: παράμετροι SMA της θέσης l
- q : αριθμός παραμέτρων SMA

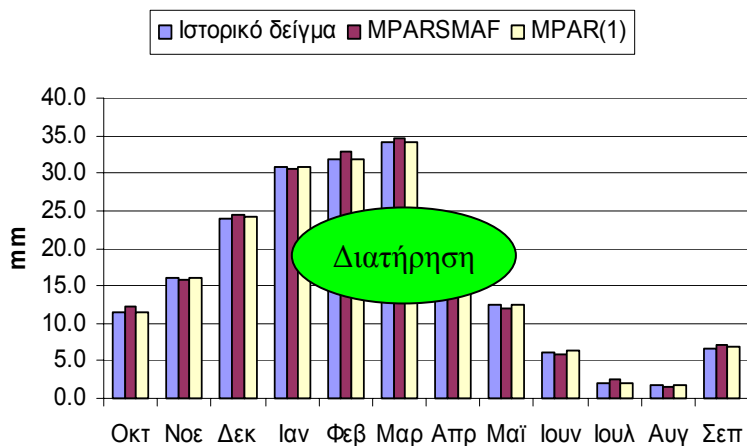
ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΡΑΡSΜΑF (4)

Αναπαράγουμε:

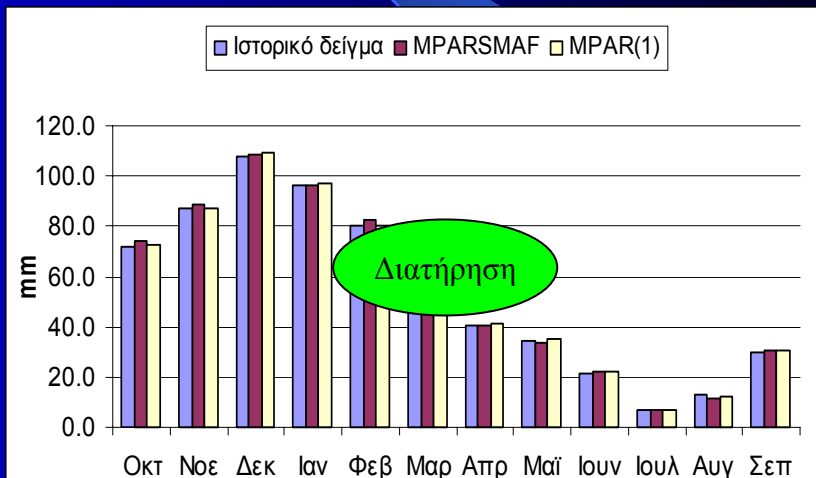
- τις εποχιακές ($k=12 \Rightarrow$ μηνιαίες) μέσες τιμές κάθε θέσεως,
- τις εποχιακές τυπικές αποκλίσεις κάθε θέσεως,
- τους εποχιακούς ($k=12 \Rightarrow$ μηνιαίους) συντελεστές ασυμμετρίας κάθε θέσεως,
- τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης των θέσεων και ετεροσυσχέτισης μεταξύ των θέσεων έως και μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης,
- τις ετήσιες μέσες τιμές των θέσεων,
- **τη μακροπρόθεσμη εμμογή των ετήσιων χρονοσειρών των θέσεων.**

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΡΑΡSΜΑF (5)

Εφαρμογή των μοντέλων ΜΡΑΡSΜΑF και ΜΡΑΡ(1) στην αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών μηνιαίων υψών βροχόπτωσης (βροχομετρικός σταθμός Αλιάρτου) και απορροής (Βοιωτικός Κηφισός)

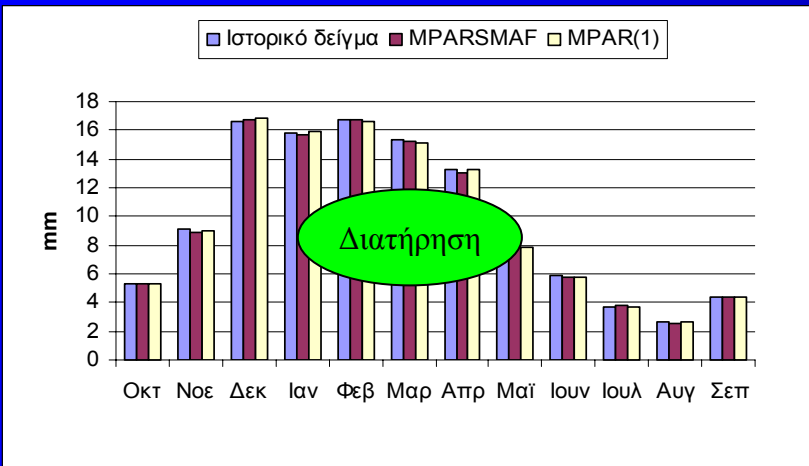


Μηνιαίες μέσες τιμές χρονοσειράς απορροών

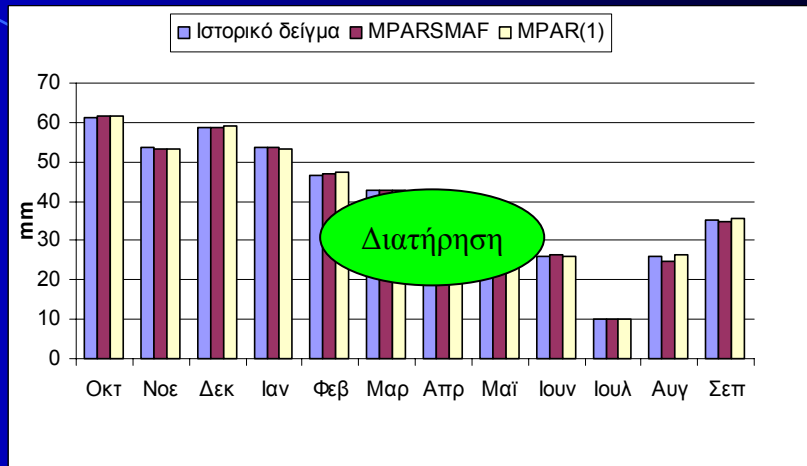


Μηνιαίες μέσες τιμές χρονοσειράς βροχοπτώσεων

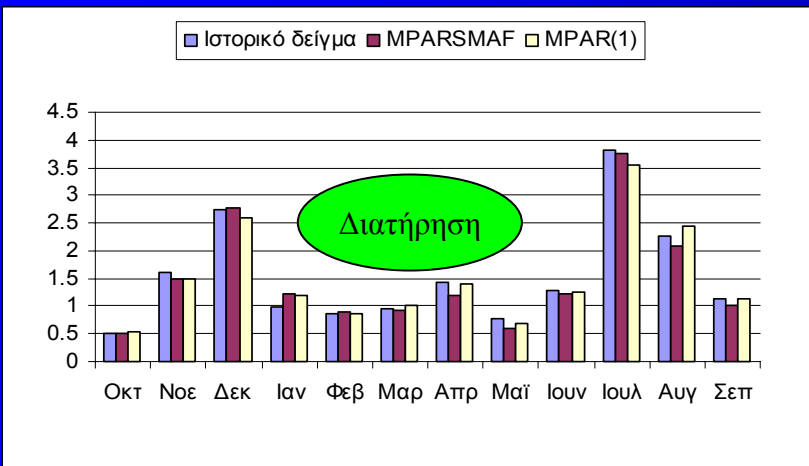
ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΡΑΡSΜΑF (6)



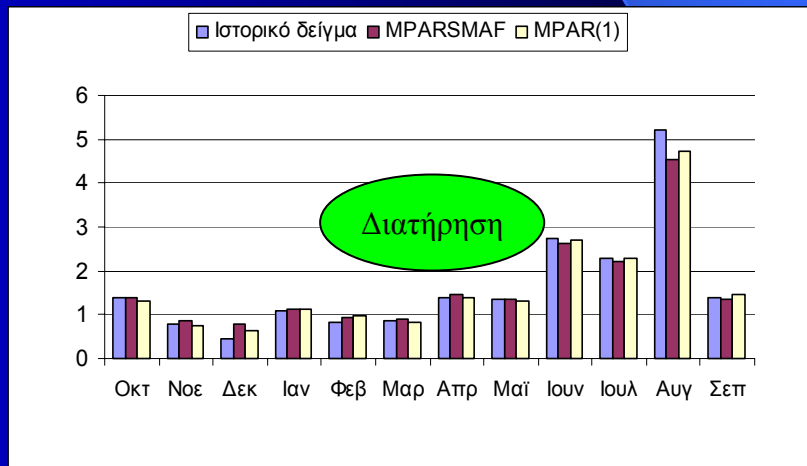
Μηνιαίες τυπικές αποκλίσεις χρονοσειράς απορροών



Μηνιαίες τυπικές αποκλίσεις χρονοσειράς βροχοπτώσεων

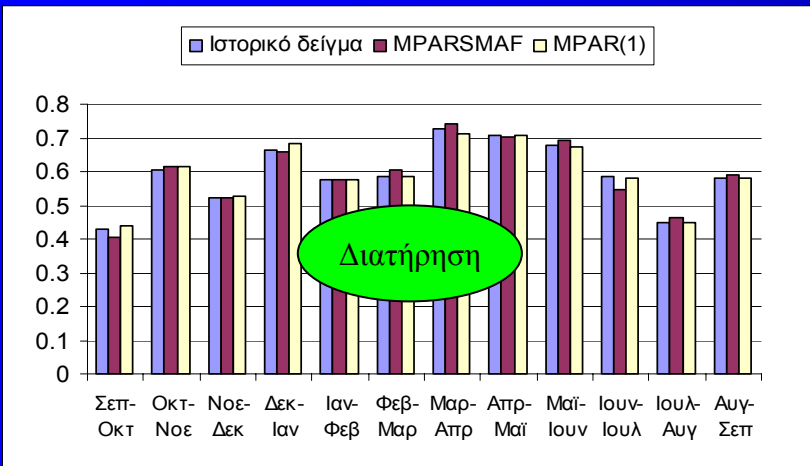


Μηνιαίοι συντελεστές ασυμμετρίας χρονοσειράς απορροών

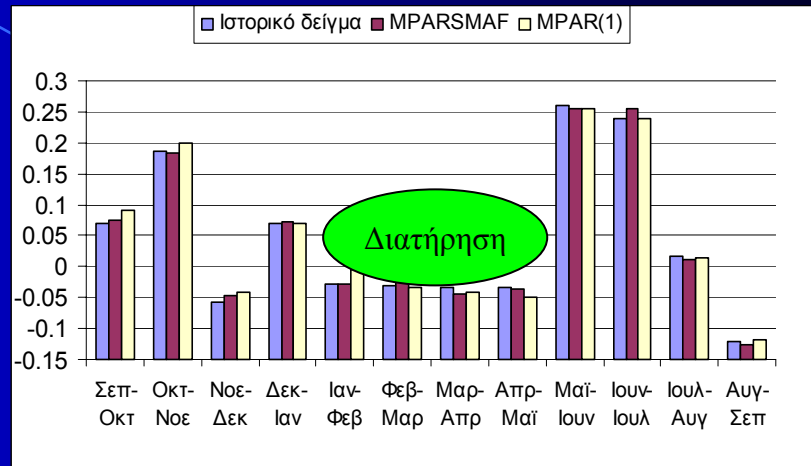


Μηνιαίοι συντελεστές ασυμμετρίας χρονοσειράς βροχοπτώσεων

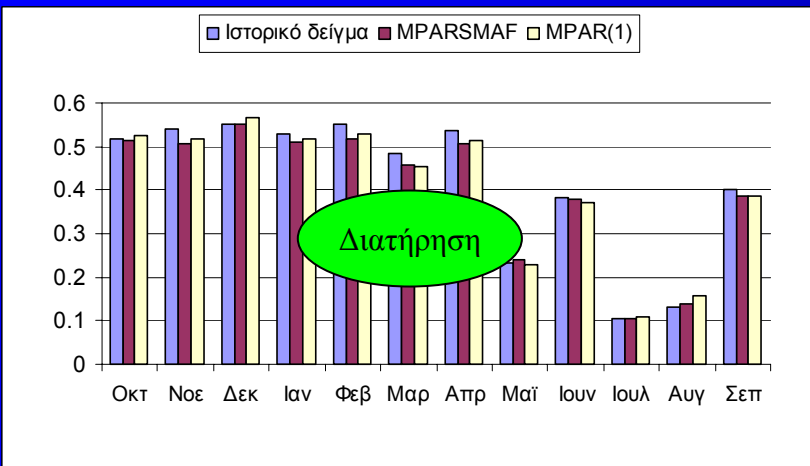
ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΡΑΡSΜΑF (7)



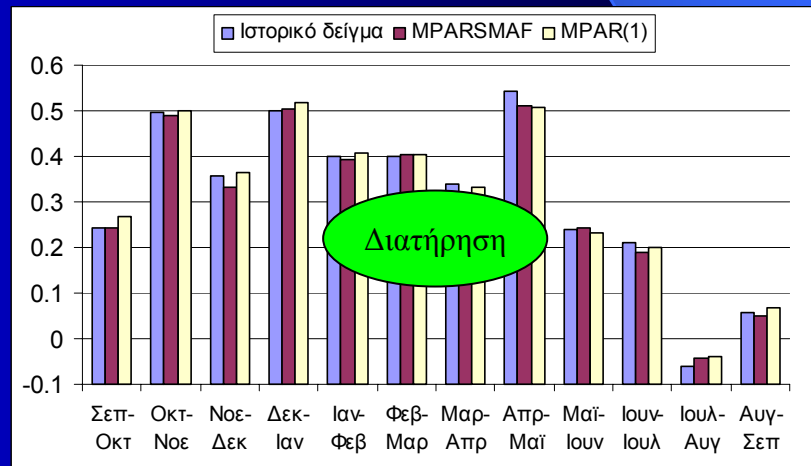
1^{ης} τάξεως συντελεστές αυτοσυσχέτισης χρονοσειράς απορροών



1^{ης} τάξεως συντελεστές αυτοσυσχέτισης χρονοσειράς βροχοπτώσεων

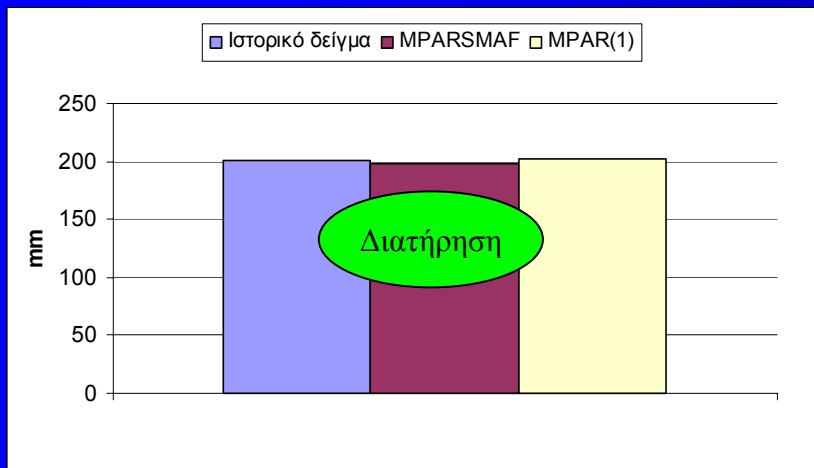


Μηδενικής τάξεως συντελεστές ετεροσυσχέτισης των χρονοσειρών

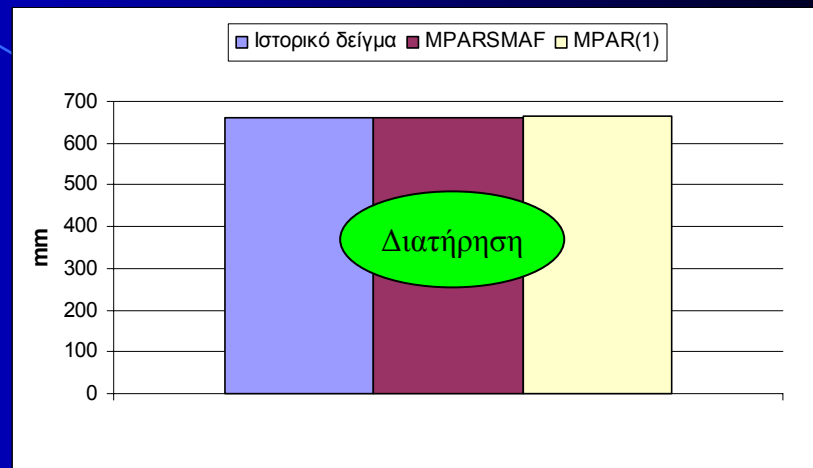


1^{ης} τάξεως συντελεστές ετεροσυσχέτισης των χρονοσειρών

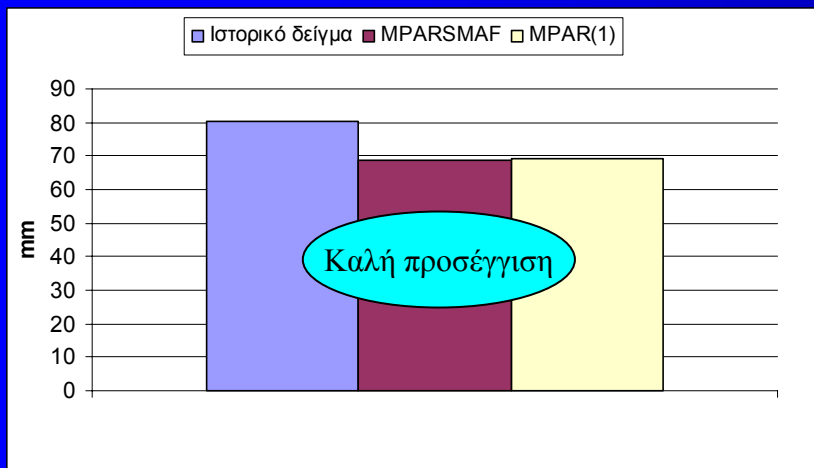
ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΡΑΡSMAF (8)



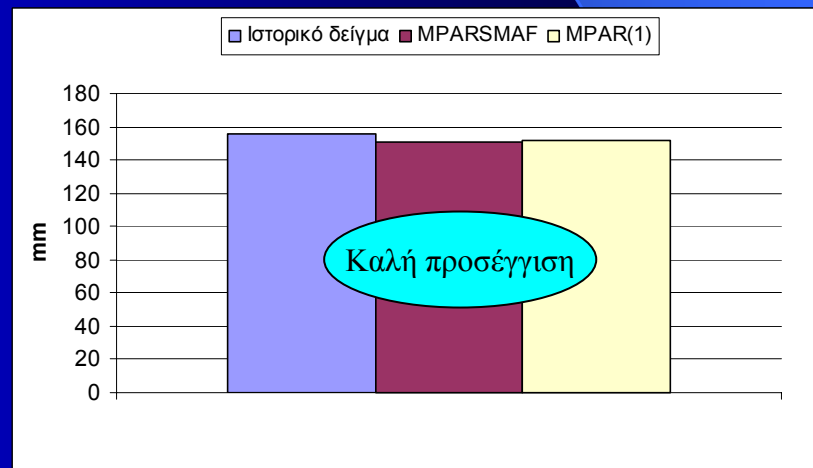
Ετήσια μέση τιμή χρονοσειράς απορροών



Ετήσια μέση τιμή χρονοσειράς βροχοπτώσεων

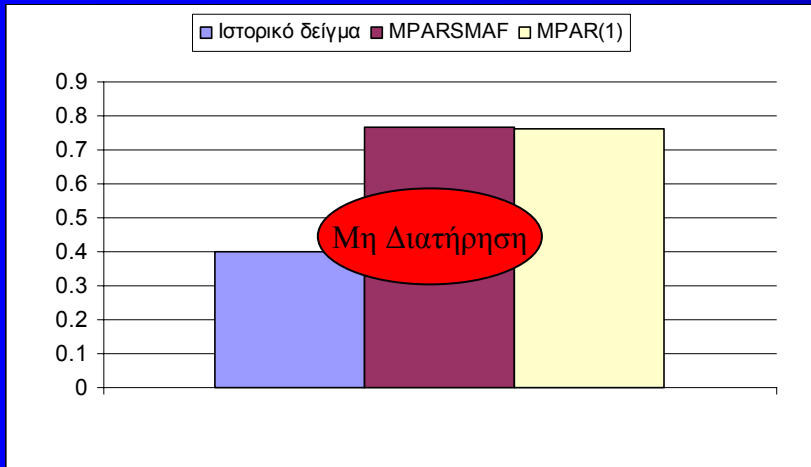


Ετήσια τυπική απόκλιση χρονοσειράς απορροών

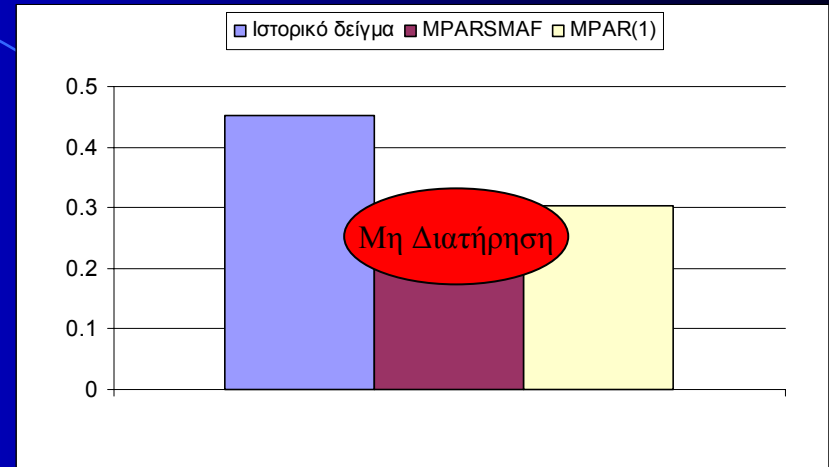


Ετήσια τυπική απόκλιση χρονοσειράς βροχοπτώσεων

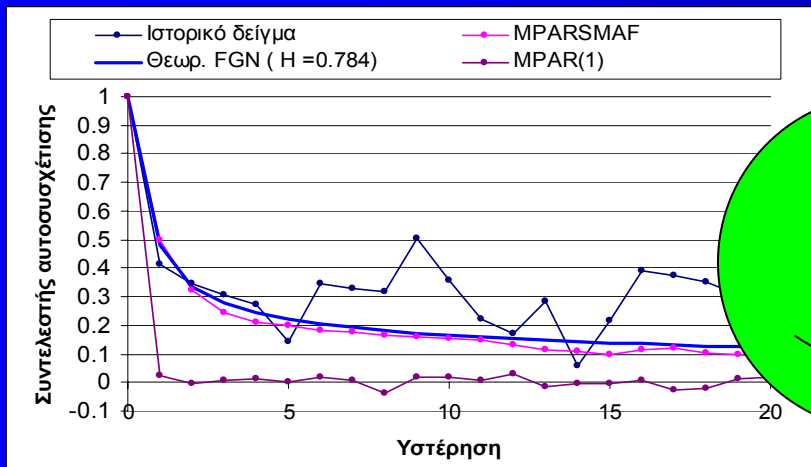
ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΡΑΡSMAF (9)



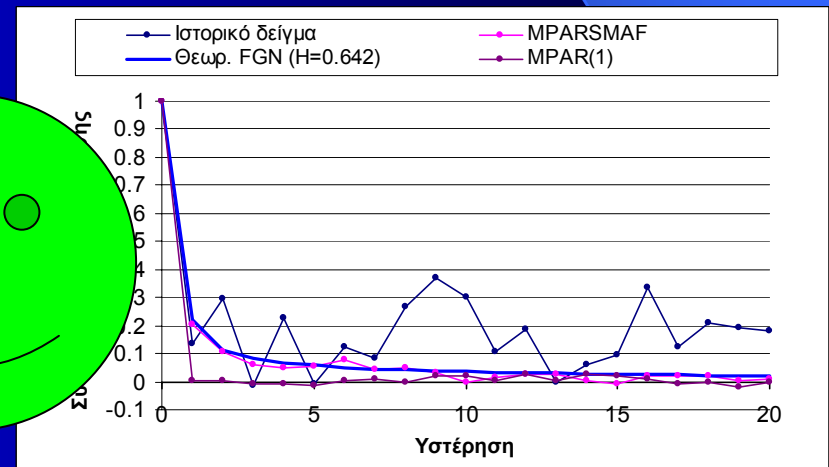
Ετήσιος συντελεστής ασυμμετρίας χρονοσειράς απορροών



Ετήσιος συντελεστής ασυμμετρίας χρονοσειράς βροχοπτώσεων



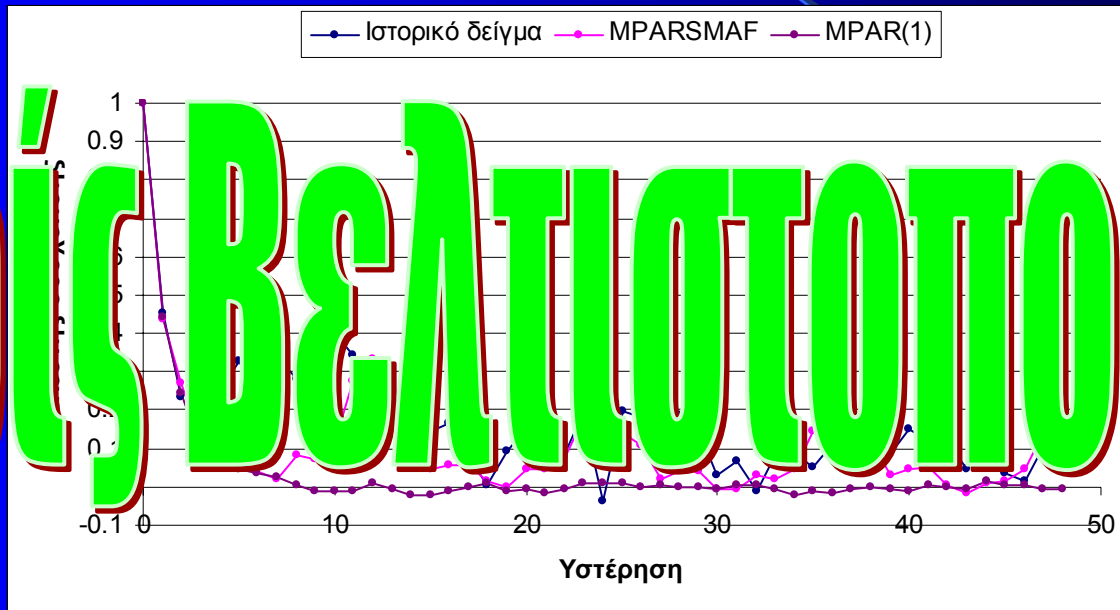
Αυτοσυσχετόγραμμα ετήσιας χρονοσειράς απορροών



Αυτοσυσχετόγραμμα ετήσιας χρονοσειράς βροχοπτώσεων

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΡΑΡSΜΑF (10)

Μηχανισμός λειτουργίας μοντέλου



Διάγραμμα συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες, για την ιστορική και την συνθετική χρονοσειρά απορροών

Το φίλτρο SMA επιτυγχάνει μία περιοδική (δωδεκάμηνη) ανύψωση του εποχιακού αυτοσυσχετογράμματος του μοντέλου ΜΡΑΡ(1).

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ PSMA (1)

(Periodic Symmetric Moving Average model)

Πρόκειται για ένα μοντέλο Συμμετρικά Κινούμενου Μέσου Όρου (SMA) με περιοδικά μεταβαλλόμενες παραμέτρους, με εξίσωση:

$$X_{(i-1)k+s} = \sum_{j=-q}^q \alpha^s_{|j|} V_{(i-1)k+j+s-1} \quad \text{για } s = 1, \dots, k$$

The diagram illustrates the components of the SMA equation. Arrows point from the equation to four descriptive labels: 'στάσιμη ανέλιξη της εποχής s' (seasonal trend), 'αριθμός παραμέτρων SMA για κάθε μήνα s' (number of SMA parameters for each month s), 'στάσιμη στοχαστική ανέλιξη λευκού θορύβου' (stationary stochastic trend of white noise), and 'αριθμός εποχών του έτους' (number of seasons per year).

Οι παράμετροι του μοντέλου προσδιορίζονται με μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης πραγματικών συναρτήσεων διανυσματικής μεταβλητής (π.χ. μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων).

Για την απαιτούμενη βελτιστοποίηση:

- έχει προσδιοριστεί η απαραίτητη αντικειμενική συνάρτηση,
- έχει εξαχθεί ή αναλυτική παράγωγος αυτής (αύξηση ταχύτητας βελτιστοποίησης).

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΡSΜΑ (2)

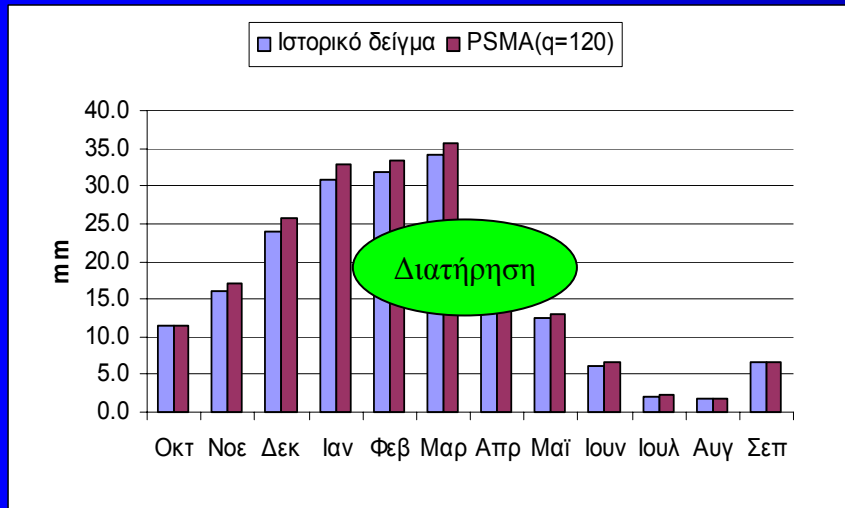
Το μοντέλο αναπαράγει:

- τις εποχιακές μέσες τιμές,
- τις εποχιακές τυπικές αποκλίσεις,
- τους εποχιακούς συντελεστές ασυμμετρίας,
- τους 1^{ης} τάξεως συντελεστές αυτοσυσχέτισης μεταξύ των εποχών,
- την ετήσια μέση τιμή,
- **την ετήσια τυπική απόκλιση,**
- **τον ετήσιο συντελεστή ασυμμετρίας,**
- **την μακροπρόθεσμη εμμονή της ετήσιας χρονοσειράς.**

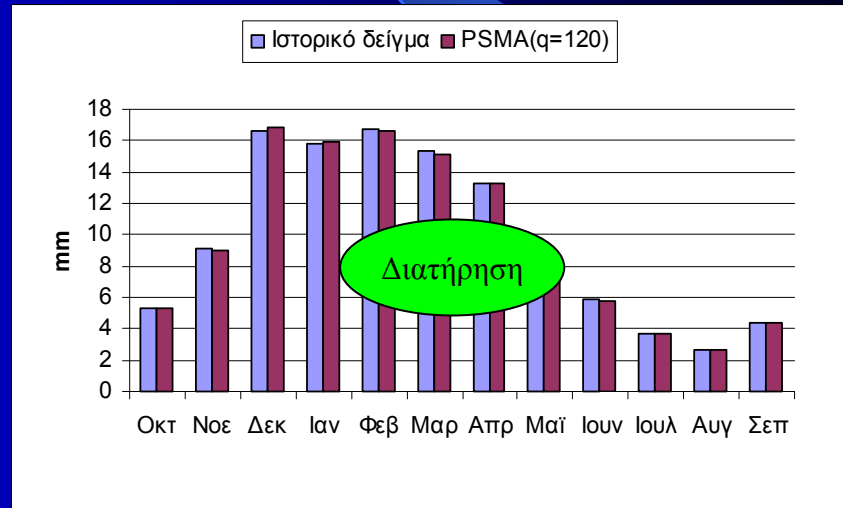
Ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται λόγω της απαιτούμενης βελτιστοποίησης των παραμέτρων του μοντέλου.

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ PSMA (3)

Εφαρμογή του μοντέλου PSMA στην χρονοσειρά μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού.

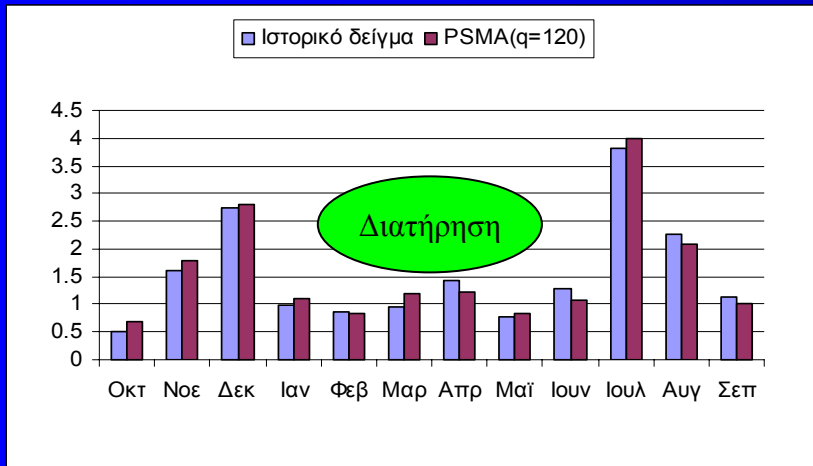


Μηνιαίες μέσες τιμές

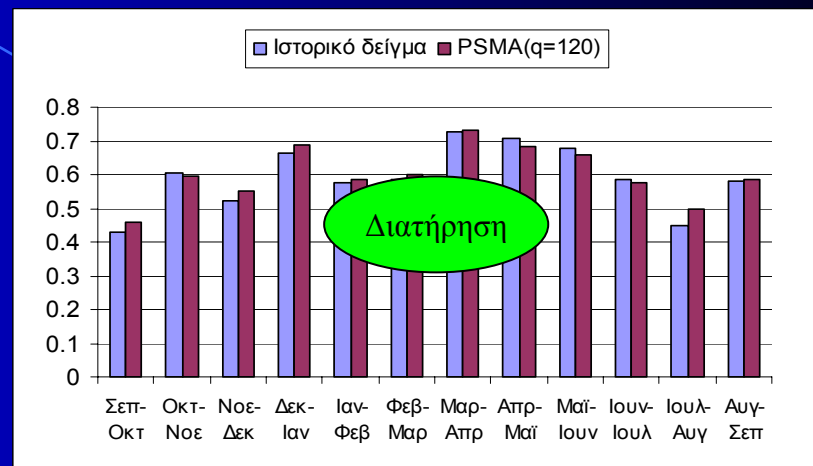


Μηνιαίες τυπικές αποκλίσεις

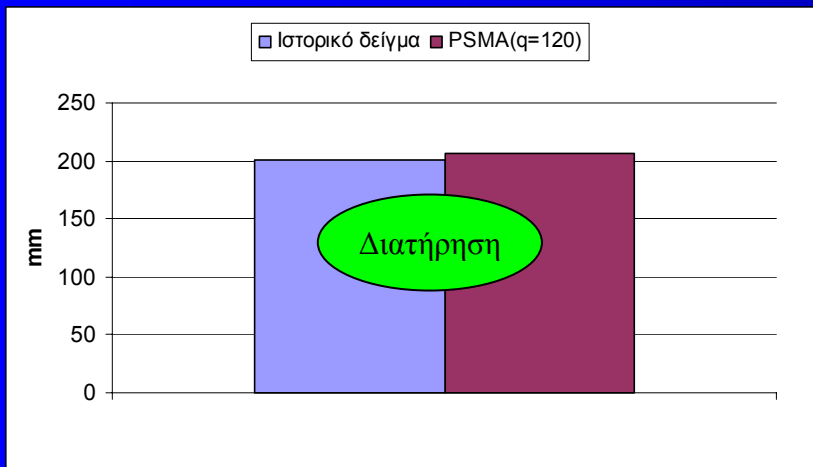
ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ PSMA (4)



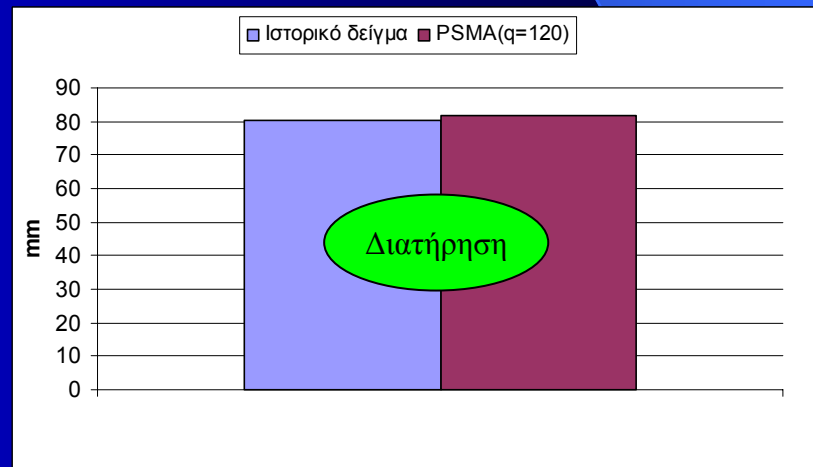
Μηνιαίοι συντελεστές ασυμμετρίας



1ης τάξεως συντελεστές αυτοσυσχέτισης των μηνών

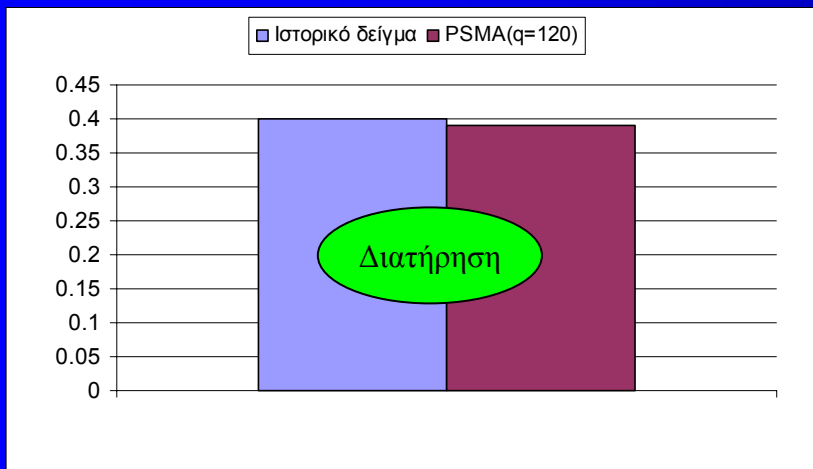


Ετήσια μέση τιμή



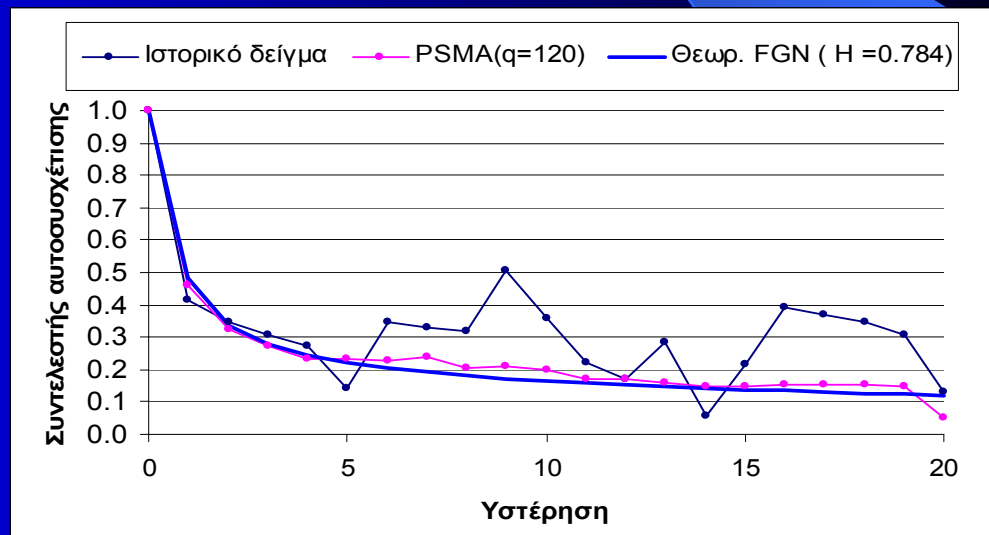
Ετήσια τυπική απόκλιση

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ PSMA (5)



Ετήσιος συντελεστής ασυμμετρίας

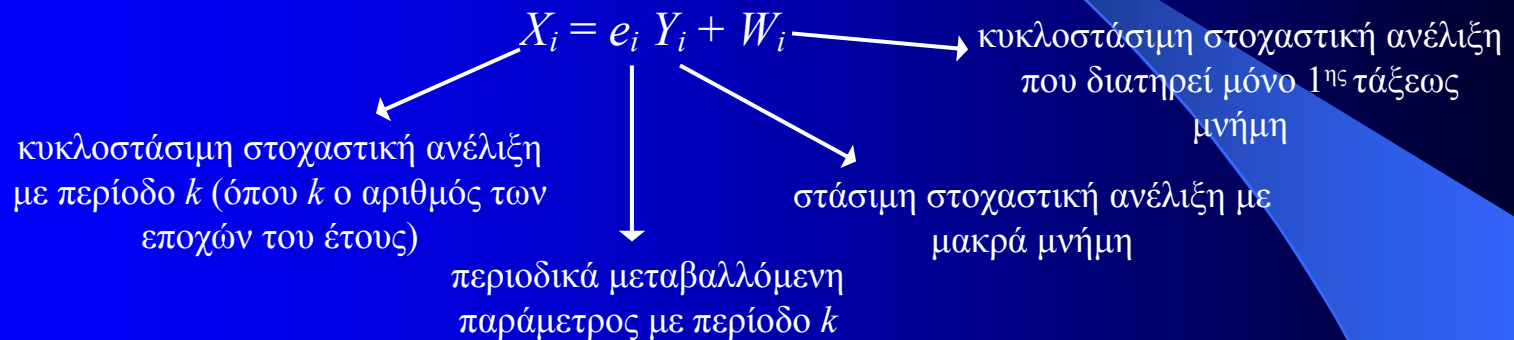
**Διατήρηση
μακροπρόθεσμης
εμμονής**



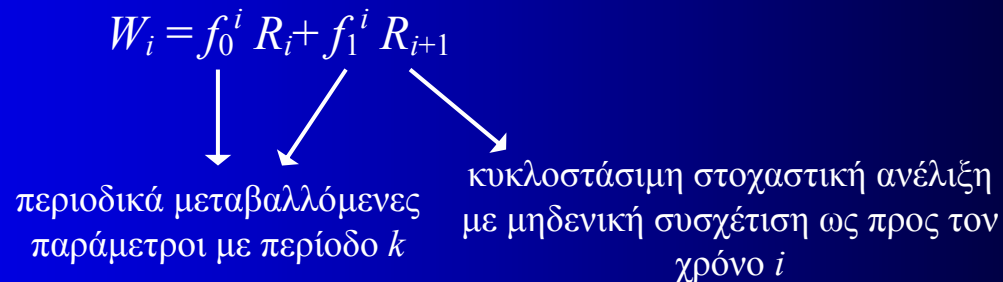
Αυτοσυσχετόγραμμα ετήσιας χρονοσειράς

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ SPLITMODEL (1)

Το Splitmodel αναπαράγει την κυκλοστασιμότητα, τη βραχυπρόθεσμη μνήμη και τη μακροπρόθεσμη εμμονή ως ένα σταθμισμένο άθροισμα μίας στάσιμης στοχαστικής ανελίξεως με μακρά μνήμη και μίας κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανελίξεως με βραχεία μνήμη.



Η τυχαία μεταβλητή W_i μπορεί να περιγραφεί από ένα απλό κυκλοστάσιμο μοντέλο Εμπρός Κινούμενου Μέσου Όρου (Periodic Forward Moving Average model, PFMA)



ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ SPLITMODEL (2)

Η μεταβλητή Y_i παράγεται με χρήση ενός μοντέλου SMA, της μορφής

$$Y_i = \sum_{j=-q}^q \alpha_{|j|} V_{i+j}$$

στάσιμη ανέλιξη

αριθμός παραμέτρων SMA

παράμετροι SMA

στάσιμη στοχαστική ανέλιξη
ασυσχέτιστη ως προς τον
χρόνο $i+j$, με μοναδιαία
τυπική απόκλιση

με παραμέτρους που προσδιορίζονται από το φάσμα ισχύος των αυτοσυνδιασπορών της.

- Τα στατιστικά χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών Y_i και W_s ($s=1, \dots, k$), μπορούν να προσδιοριστούν με χρήση έμμεσων μεθόδων μη γραμμικής βελτιστοποίησης πραγματικών συναρτήσεων διανυσματικής μεταβλητής με περιορισμούς (π.χ. μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων σε συνδυασμό με την μέθοδο των Ποινών).

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ SPLITMODEL (3)

- Οι παράμετροι f_j^i ($j=0, 1$ και $i=1, \dots, k$) και τα απαιτούμενα στατιστικά χαρακτηριστικά των μεταβλητών R_i ($i=1, \dots, k$) προσδιορίζονται επίσης με χρήση έμμεσων μεθόδων μη γραμμικής βελτιστοποίησης πραγματικών συναρτήσεων διανυσματικής μεταβλητής.
- Για ελαχιστοποίηση των προς βελτιστοποίηση αυτοσυνδιασπορών της μεταβλητής Y_i έχει αναπτυχθεί μία εύκολη και γρήγορη μέθοδος που βασίζεται στην χρήση του γενικευμένου αντίστροφου μητρώου ελάχιστης νόρμας (το προκύπτον γραμμικό σύστημα είναι τρισδιαγώνιο f_i αλγόριθμος Thomas).
- Έχουν προσδιοριστεί οι απαιτούμενες, για τις βελτιστοποιήσεις, αντικειμενικές συναρτήσεις και οι αναλυτικές εκφράσεις των παραγώγων τους.

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ SPLITMODEL (4)

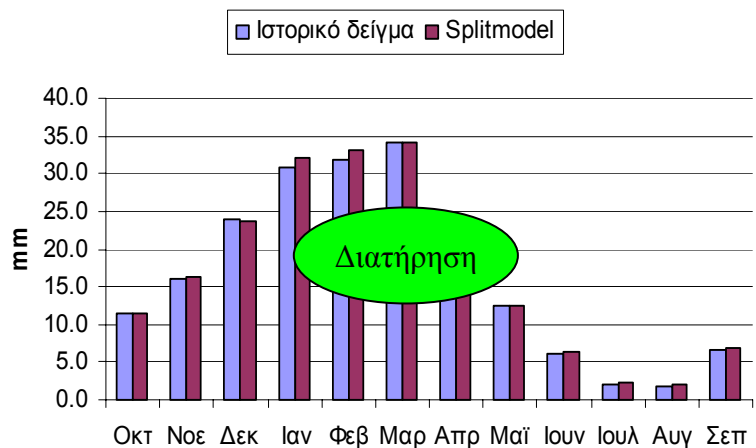
Το μοντέλο αναπαράγει:

- τις εποχιακές μέσες τιμές,
- τις εποχιακές τυπικές αποκλίσεις,
- τους εποχιακούς συντελεστές ασυμμετρίας,
- τους 1^{ης} τάξεως συντελεστές αυτοσυσχέτισης μεταξύ των εποχών,
- την ετήσια μέση τιμή,
- την ετήσια τυπική απόκλιση,
- την μακροπρόθεσμη εμμονή της ετήσιας χρονοσειράς.

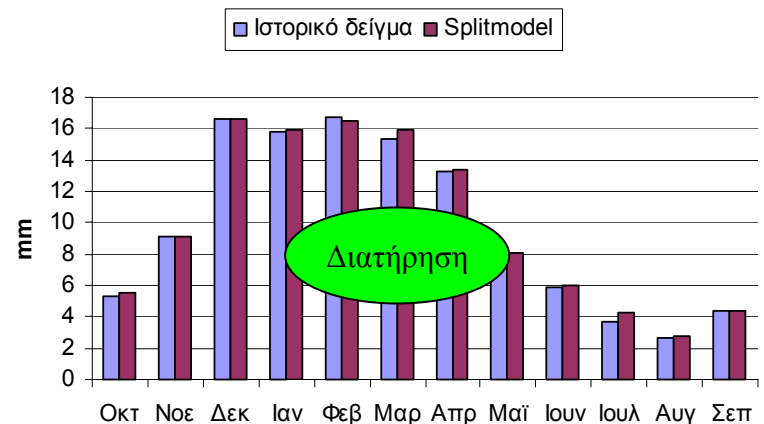
Ταχύτερο του PSMA

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ SPLITMODEL (5)

Εφαρμογή του Splitmodel στην χρονοσειρά μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού.

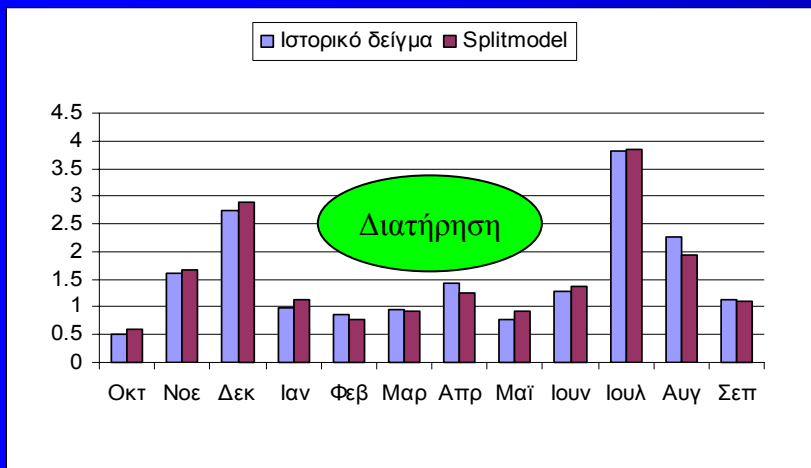


Μηνιαίες μέσες τιμές

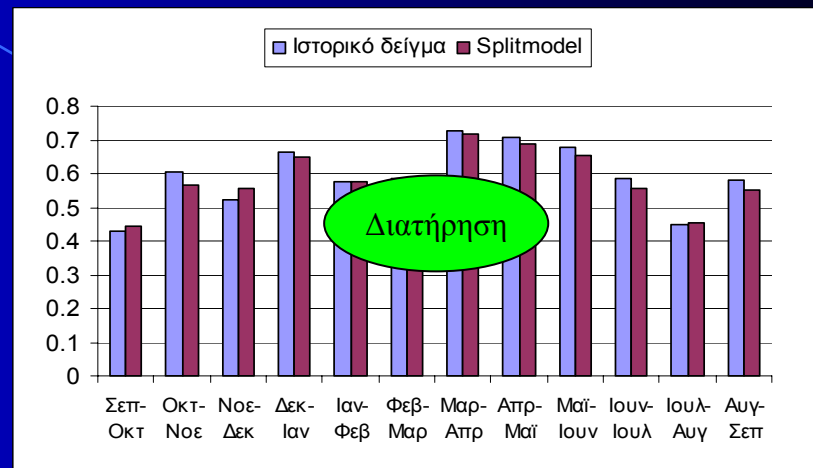


Μηνιαίες τυπικές αποκλίσεις

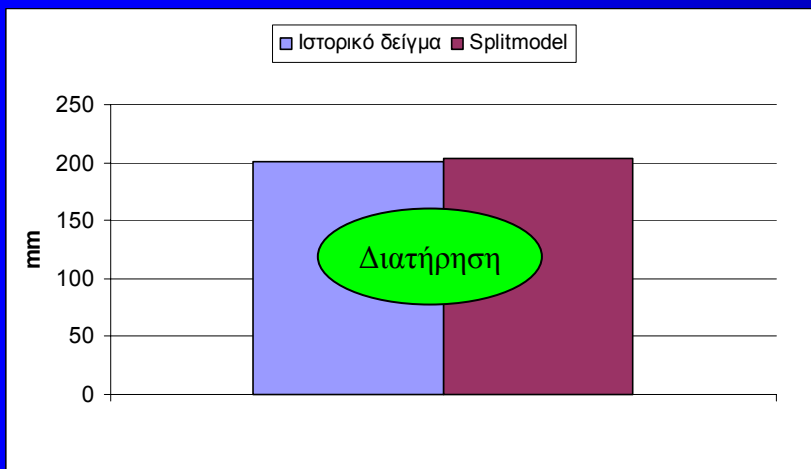
ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ SPLITMODEL (6)



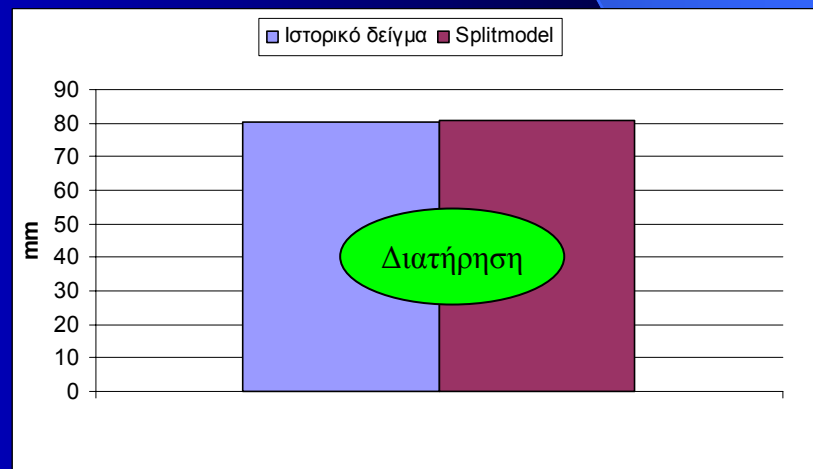
Μηνιαίοι συντελεστές ασυμμετρίας



1ης τάξεως συντελεστές αυτοσυσχέτισης των μηνών

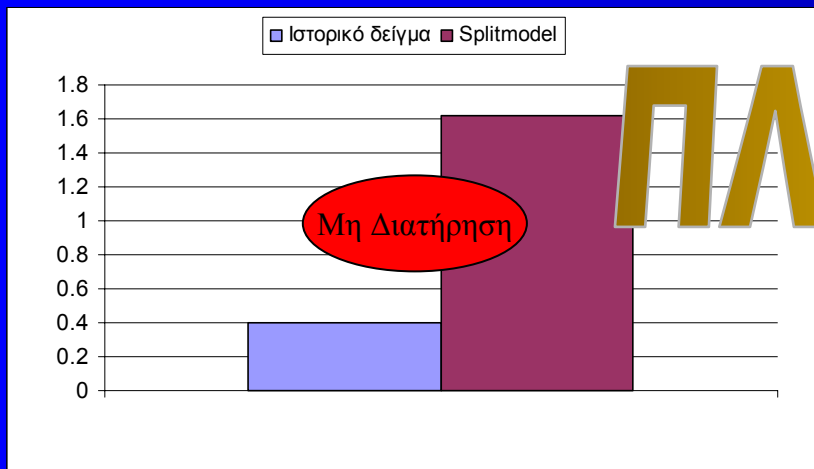


Ετήσια μέση τιμή

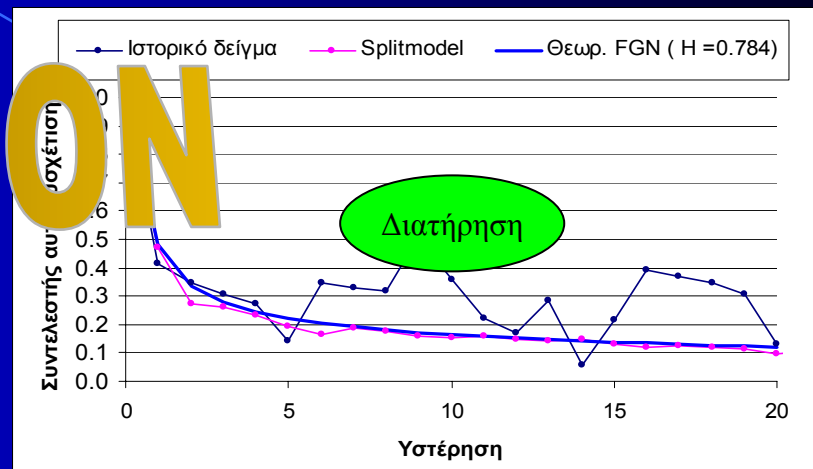


Ετήσια τυπική απόκλιση

ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟ SPLITMODEL (7)

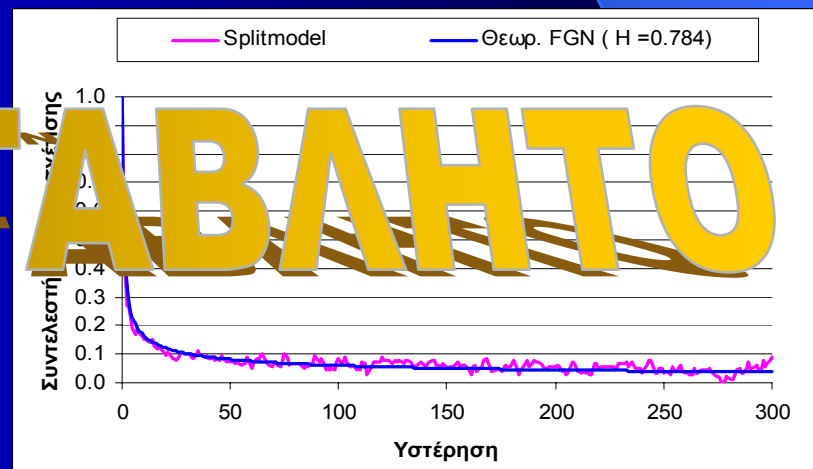


Ετήσιος συντελεστής ασυμμετρίας



Αυτοσυσχετόγραμμα ετήσιας χρονοσειράς (20 πρώτα βήματα χρονικής μετατόπισης)

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ



Αυτοσυσχετόγραμμα ετήσιας χρονοσειράς (300 πρώτα βήματα χρονικής μετατόπισης)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο Στόχος της εργασίας εστέφθη με επιτυχία αφού:

- **ανεπτύχθησαν τρία νέα κυκλοστάσιμα στοχαστικά μοντέλα,**
- **άμεσης σειριακής προσομοίωσης,**
- **που αναπαράγουν την βραχυπρόθεσμη μνήμη και την μακροπρόθεσμη εμμονή,**
- **και διατηρούν τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος σε περισσότερες από μία χρονικές κλίμακες.**