

Μαθηματικά μοντέλα δικτύων

Σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος:

Τυπικά υδραυλικά έργα

Ακαδημαϊκό έτος 2004-05

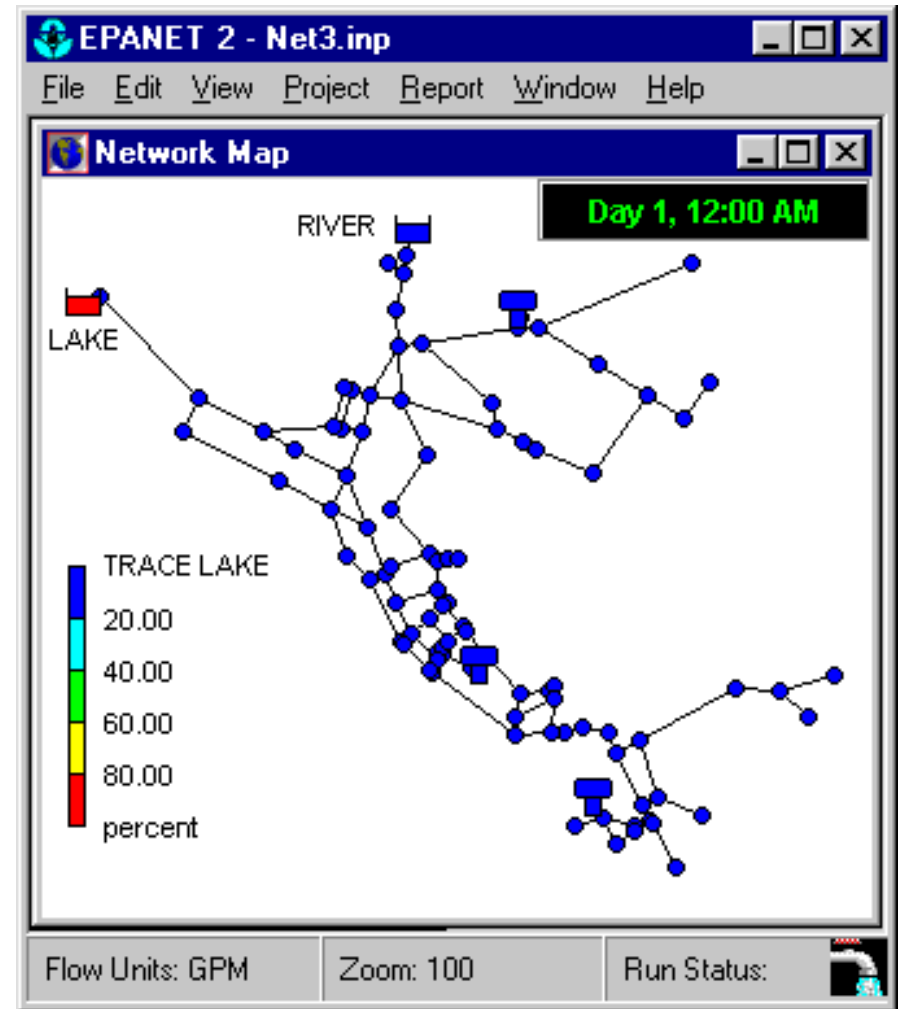
Ανδρέας Ευστρατιάδης & Δημήτρης Κουτσογιάννης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Τομέας Υδατικών Πόρων

Μαθηματικά μοντέλα δικτύων ύδρευσης

- ◆ Προϋπόθεση για την εύρυθμη λειτουργία ενός δικτύου ύδρευσης είναι η εξασφάλιση επαρκούς παροχής για την κάλυψη της κατανάλωσης, μέσα σε αποδεκτά όρια πίεσης.
- ◆ Τα υπολογιστικά πακέτα ανάλυσης δικτύων, και τα σχετικά μαθηματικά μοντέλα που αυτά υποστηρίζουν, υποβοηθούν τον μελετητή που σχεδιάζει ή την υπηρεσία που διαχειρίζεται ένα δίκτυο ύδρευσης για την λήψη ορθολογικών αποφάσεων, τόσο από τεχνικής όσο και από οικονομικής άποψης.
- ◆ Κανένα μοντέλο, όσο εξελιγμένο και αν είναι, δεν υποκαθιστά την ανθρώπινη κρίση και εμπειρία!



Πεδία εφαρμογής μοντέλων ανάλυσης δικτύων

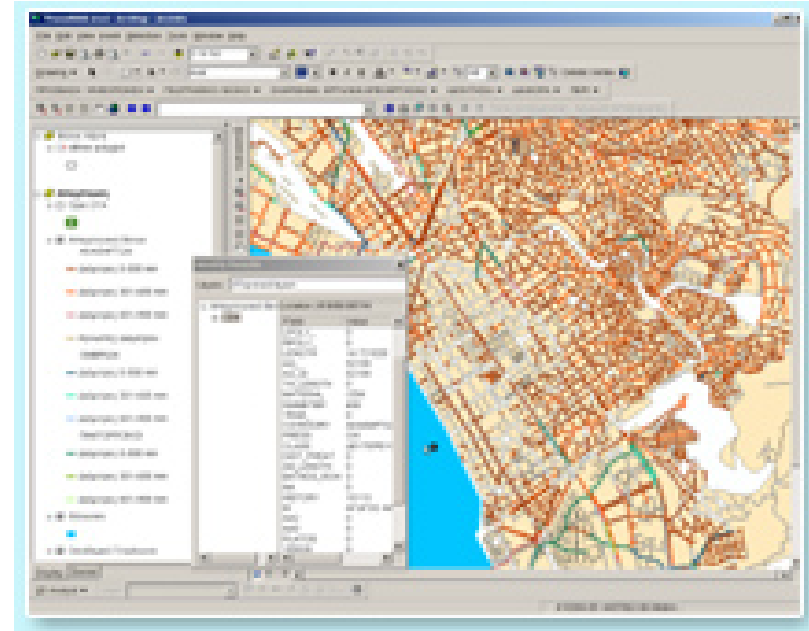
- ◆ **Σχεδιασμός νέου δικτύου:** Παρέχεται στον μελετητή η δυνατότητα να διαστασιολογήσει ένα δίκτυο δεδομένης διάταξης ή ακόμη και να εξετάσει εναλλακτικές διατάξεις δικτύου, προσδιορίζοντας τα χαρακτηριστικά μεγέθη των δεξαμενών, αγωγών (υλικό, κλάση, διάμετρος) και ειδικών διατάξεων (αντλιοστάσια, μειωτές πίεσης, κλπ.), με τρόπο ώστε να πληρούνται οι υδραυλικές απαιτήσεις (παροχές, ελάχιστες και μέγιστες πιέσεις) και να ελαχιστοποιείται το κόστος.
- ◆ **Διαχείριση υφιστάμενου δικτύου:** Παρέχεται στον φορέα του δικτύου (π.χ. ΔΕΥΑ) η δυνατότητα να παρακολουθεί την λειτουργία του σε πραγματικό χρόνο, ελέγχοντας τη διακύμανση των παροχών και πιέσεων, ώστε να εντοπίζει προβλήματα βλαβών και διαρροών. Εξετάζοντας σενάρια εναλλακτικών δυνατοτήτων τροφοδοσίας, είναι δυνατό να αντιμετωπίσει απότομες αιχμές της ζήτησης (π.χ. Ολυμπιακοί Αγώνες), με συνδυασμό πολλαπλών δεξαμενών και αντλιοστασίων. Στην περίπτωση που απαιτείται η αντικατάσταση παλαιών αγωγών, είναι δυνατή η εύρεση της βέλτιστης τεχνοοικονομικά επιλογής, καθώς και ο ορθολογικός προγραμματισμός των έργων.
- ◆ **Επέκταση υφιστάμενου δικτύου:** Εκτός των παραπάνω, παρέχεται η δυνατότητα στον φορέα διαχείρισης να κοστολογεί τα απαιτούμενα έργα (τόσο του νέου όσο και του υφιστάμενου δικτύου), επιλέγοντας την κατάλληλη πολιτική για την ανάκτηση του κόστους των έργων στην περιοχή επέκτασης. Στην περίπτωση αυτή, το δίκτυο πρέπει να αντιμετωπίζεται ως σύστημα και όχι τμηματικά.

Γενικοί ορισμοί

- ◆ **Σύστημα:** Ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους στοιχείων που αλληλεπιδρούν, το οποίο χαρακτηρίζεται από (α) ένα σύνορο που καθορίζει αν ένα στοιχείο ανήκει στο σύστημα ή στο περιβάλλον, (β) αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον (είσοδοι-έξοδοι), και (γ) σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του και των εισόδων-εξόδων.
- ◆ **Είσοδος ή φόρτιση συστήματος:** Ένα σύνολο δράσεων που προέρχονται από το εξωτερικό περιβάλλον και επιφέρουν μεταβολές στην κατάσταση του συστήματος.
- ◆ **Έξοδος ή απόκριση συστήματος:** Κάθε αντίδραση που παράγεται από το σύστημα και γίνεται αντιληπτή από το περιβάλλον.
- ◆ **Μεταβλητές κατάστασης:** Εσωτερικές ιδιότητες που περιγράφουν το τρέχον καθεστώς του συστήματος και μεταβάλλονται ως συνέπεια εξωτερικών φορτίσεων.
- ◆ **Μαθηματικό μοντέλο:** Ένα σύνολο υποθέσεων σχετικών με τη λειτουργία ενός συστήματος, εκφρασμένων υπό μορφή μαθηματικών ή λογικών σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων του συστήματος και κωδικοποιημένων σε γλώσσα υπολογιστή.
- ◆ **Επίλυση μοντέλου:** Η εύρεση της απόκρισης, y , ενός συστήματος ως συνέπεια συγκεκριμένης φόρτισης, x , με εφαρμογή ενός μαθηματικού μοντέλου $y = F(x)$.
- ◆ **Προσομοίωση:** Τεχνική μίμησης ενός συστήματος, όπως εξελίσσεται στον χρόνο. Συνήθως συνίσταται στην βήμα προς βήμα επίλυση του μαθηματικού μοντέλου, συναρτήσει μιας δυναμικής φόρτισης, $x(t)$, ήτοι $y(t) = F(x(t))$, $\forall t = 1, 2, \dots, n$.

Το δίκτυο ύδρευσης ως φυσικό σύστημα

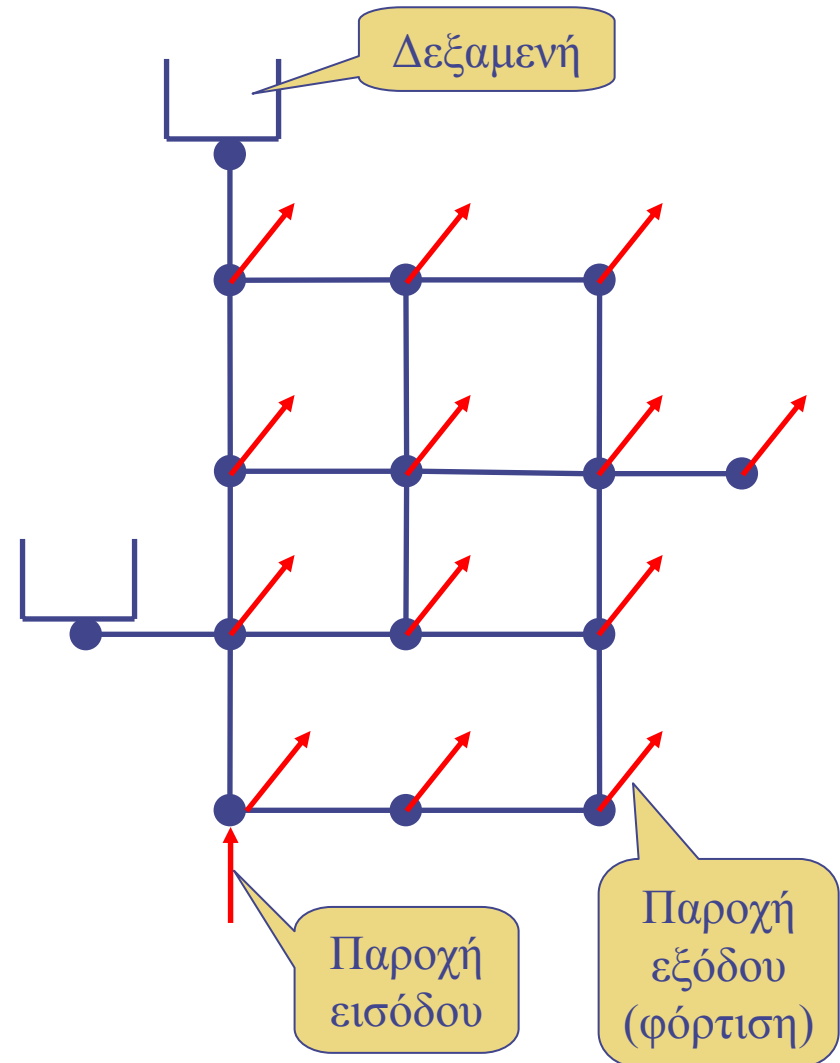
- ◆ **Όριο συστήματος:** από τις δεξαμενές ρύθμισης έως την κατανάλωση (εσωτερικό υδραγωγείο)
- ◆ **Συνιστώσες συστήματος:** έργα αποθήκευσης (δεξαμενές, υδατόπυργοι) έργα μεταφοράς νερού (αγωγοί υπό πίεση), συσκευές ρύθμισης της ροής (δικλείδες, βαλβίδες), έργα ρύθμισης της πίεσης (μειωτές πίεσης, αντλιοστάσια), πάσης φύσεως συσκευές διανομής
- ◆ **Είσοδοι (φορτίσεις) συστήματος:** προσφορά νερού από τις δεξαμενές
- ◆ **Έξοδοι (αποκρίσεις) συστήματος:** κατανάλωση νερού σε κάθε σημείο διανομής του δικτύου
- ◆ **Μεταβλητές κατάστασης:** παροχές και πιέσεις, ως συνέπεια των ενεργειακών απωλειών κατά μήκος των αγωγών



Η μαθηματική περιγραφή ενός δικτύου διανομής γίνεται με μετασχηματισμό του φυσικού συστήματος σε ένα εννοιολογικό **μοντέλο γράφου**, βάσει του οποίου το σύνολο των συνιστωσών του δικτύου αναπαρίσταται υπό μορφή ιδεατών **κόμβων** και **κλάδων**.

Το δίκτυο ύδρευσης ως μοντέλο γράφου

- ◆ **Συνιστώσες μοντέλου:** κόμβοι, κλάδοι και σημεία γνωστού ενεργειακού υψομέτρου (δεξαμενές)
- ◆ **Δεδομένα εισόδου:** το σύνολο των αριθμητικών πληροφοριών, στατικών και δυναμικών, που απαιτούνται για την μαθηματική περιγραφή του δικτύου
- ◆ **Μαθηματική περιγραφή δικτύου:** το σύνολο των μαθηματικών σχέσεων που αναφέρονται στην υδραυλική λειτουργία του δικτύου
- ◆ **Επίλυση δικτύου:** υπολογισμός υδραυλικών χαρακτηριστικών ροής (παροχές αγωγών και ενεργειακά υψόμετρα κόμβων)



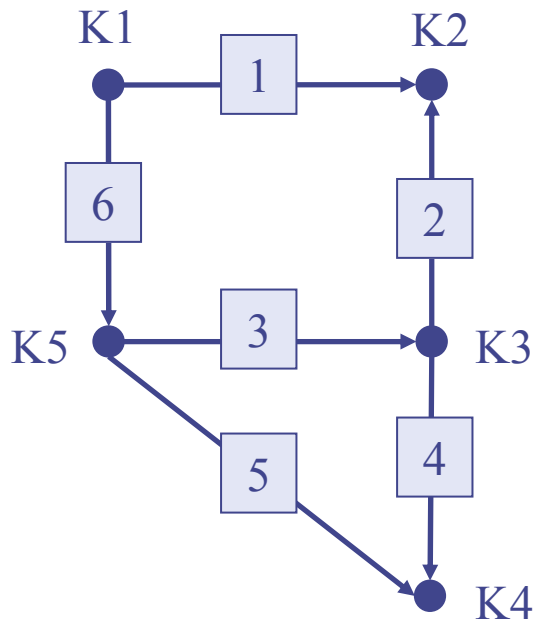
Θεωρείται η γενική περίπτωση **μικτού δικτύου**, που περιλαμβάνει ένα κεντρικό βροχωτό τμήμα με ακτινωτές απολήξεις.

Θεμελιώδεις έννοιες θεωρίας γράφων

- ◆ **Γράφος** (graph) είναι μια μαθηματική οντότητα που ορίζεται από ένα σύνολο n σημείων (κόμβοι) και ένα σύνολο m διατεταγμένων ζευγών αυτών, που ονομάζονται κλάδοι, τόξα ή ακμές.
- ◆ **Διγράφος** ή **διευθετημένος γράφος** (digraph, directed graph) είναι ένας γράφος, οι κλάδοι του οποίου έχουν προσανατολισμένη φορά.
- ◆ **Δίκτυο** (network) ονομάζεται ο γράφος, στα στοιχεία του οποίου αντιστοιχούν ορισμένες ιδιότητες.
- ◆ **Βρόχος** (loop) ονομάζεται κάθε κλειστή διαδρομή, ήτοι ένα σύνολο διαδοχικών κλάδων που ξεκινούν και καταλήγουν στον ίδιο κόμβο.
- ◆ Η **τοπολογία** ενός γράφου που αποτελείται από n κόμβους και m κλάδους προσανατολισμένης φοράς περιγράφεται αλγεβρικά με δύο τύπους μητρώων:
 - το $n \times n$ **μητρώο γειτνίασης** (adjacency matrix), με στοιχεία $a_{ij} = 1$ αν υπάρχει κλάδος κατά τη φορά $i \rightarrow j$, και $a_{ij} = 0$ διαφορετικά
 - το $n \times m$ **μητρώο πρόσπτωσης** (incidence matrix), με στοιχεία $a_{ik} = 1$ αν ο κλάδος k ξεκινά από τον κόμβο i , $a_{ik} = -1$ αν ο κλάδος k καταλήγει στον κόμβο i , και $a_{ik} = 0$ διαφορετικά
- ◆ Σε ένα δίκτυο n κόμβων, m κλάδων και r βρόχων ισχύει η **θεμελιώδης εξίσωση**:

$$m = n + r - 1$$

Παράδειγμα διαμόρφωσης μητρώων τοπολογίας



Πλήθος κλάδων $m = 6$
 Πλήθος κόμβων $n = 5$
 Πλήθος βρόχων $r = 2$
 Ισχύει: $6 = 5 + 2 - 1$

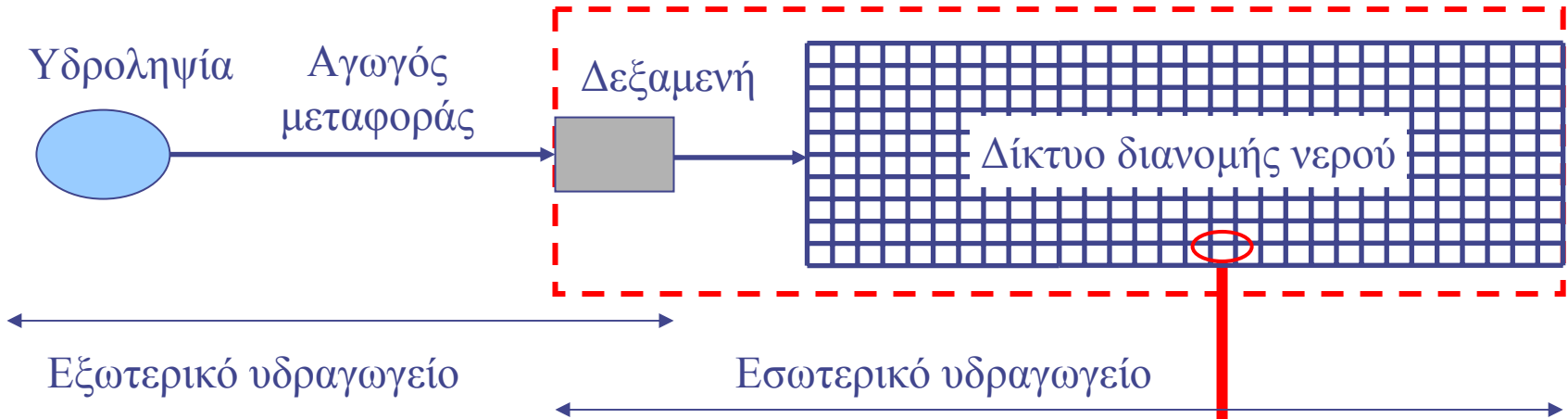
Μητρώο γειτνίασης (5×5)

	K1	K2	K3	K4	K5
K1	0	1	0	0	1
K2	0	0	0	0	0
K3	0	1	0	1	0
K4	0	0	0	0	0
K5	0	0	1	1	0

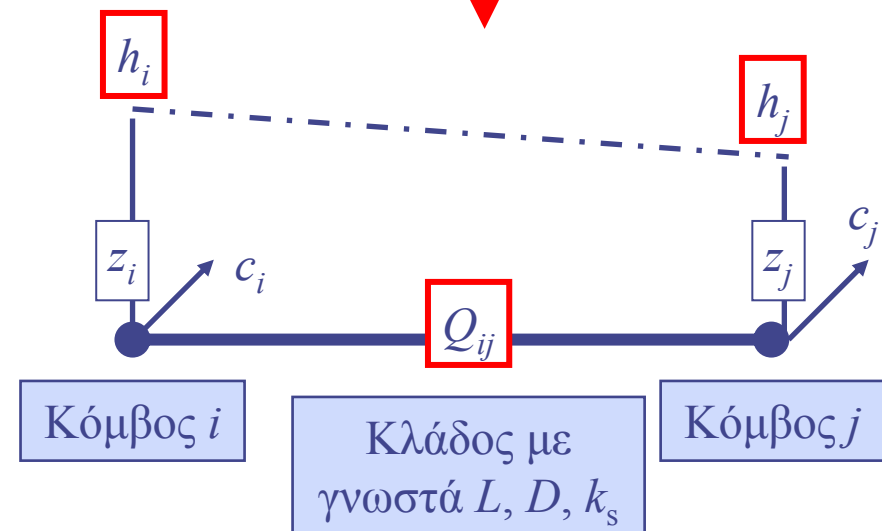
Μητρώο πρόσπτωσης (5×6)

	1	2	3	4	5	6
K1	1	0	0	0	0	1
K2	-1	-1	0	0	0	0
K3	0	1	-1	1	0	0
K4	0	0	0	-1	-1	0
K5	0	0	1	0	1	-1

Συνιστώσες μοντέλου δικτύου



- ◆ **Κόμβος:** Σημείο προσφοράς ή ζήτησης νερού, διακλάδωσης ή μεταβολής των χαρακτηριστικών των αγωγών, με φόρτιση c , απόλυτο υψόμετρο z , και άγνωστο (με εξαίρεση τις δεξαμενές) ενεργειακό υψόμετρο h
- ◆ **Κλάδος:** Τμήμα αγωγού μήκους L , που αποτελείται από σωλήνα ομοιόμορφης διαμέτρου D , κλάσης και τραχύτητας k_s , κατά μήκος του οποίου θεωρείται ενιαία παροχή Q

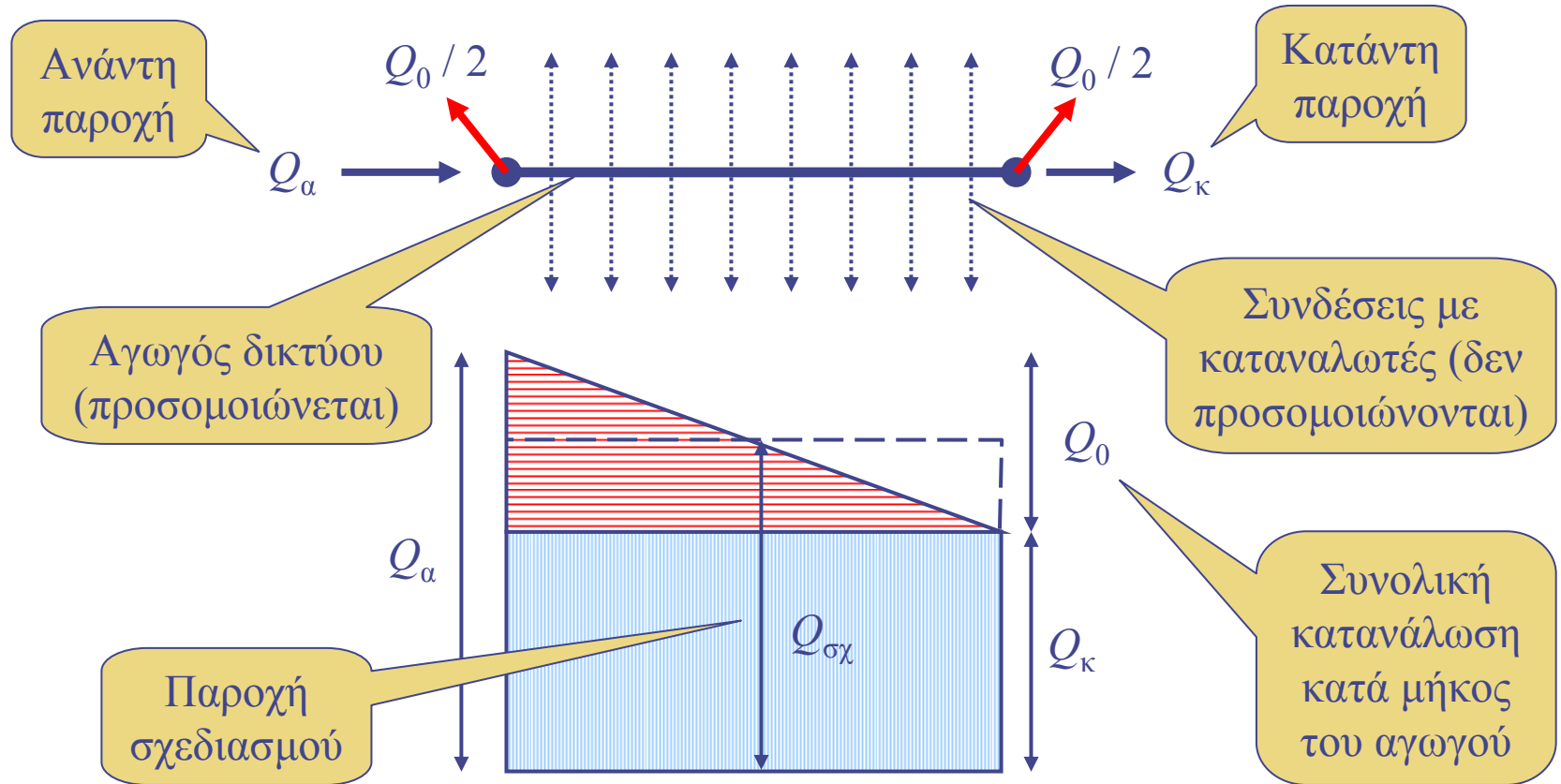


Αρχές διαμόρφωσης μοντέλου δικτύου

- ◆ Ως κλάδος νοείται κάθε τμήμα αγωγού που αποτελείται από σωλήνα ομοιόμορφης διαμέτρου, κλάσης και τραχύτητας, όπου δεν παρεμβάλλεται κανένα σημείο εισόδου ή εξόδου και καμία διακλάδωση. Οι υπολογισμοί των παροχών, πιέσεων και ενεργειακών απωλειών αναφέρονται στους κλάδους.
- ◆ Κάθε κλάδος ορίζεται από δύο κόμβους. Οι **κόμβοι** είναι τα μοναδικά σημεία όπου είναι επιτρεπτό, από μαθηματική άποψη, να πραγματοποιηθούν αλλαγές στην διάμετρο, την τραχύτητα ή την παροχή.
- ◆ Στο μαθηματικό μοντέλο του δικτύου, ο ορισμός των κόμβων είναι **εννοιολογικός**.
- ◆ Όλες οι παροχές εξόδου του φυσικού συστήματος συγκεντρώνονται στους κόμβους του μοντέλου. Γίνεται η παραδοχή ότι κάθε κόμβος αντιπροσωπεύει συγκεκριμένο μήκος αγωγού, από τον οποίο εξέρχεται όλη η παροχή των καταναλωτών που αντιστοιχούν στο εν λόγω μήκος. Συνεπώς, το θεμελιώδες μέγεθος αναφοράς είναι η **ανηγμένη, ανά μέτρο μήκους αγωγού, κατανάλωση**.
- ◆ Εξαίρεση αποτελούν οι **ειδικοί καταναλωτές**, που δεν κατανέμονται αλλά προσομοιώνονται σημειακά.

Η διαμόρφωση του μοντέλου περιλαμβάνει: (α) τον ορισμό των συνιστωσών του δικτύου, ήτοι των κόμβων και κλάδων (**σηματική διάταξη**), και (β) τον υπολογισμό των παροχών εξόδου (**σενάριο φόρτισης**).

Σχηματική ερμηνεία της ανηγμένης κατανάλωσης



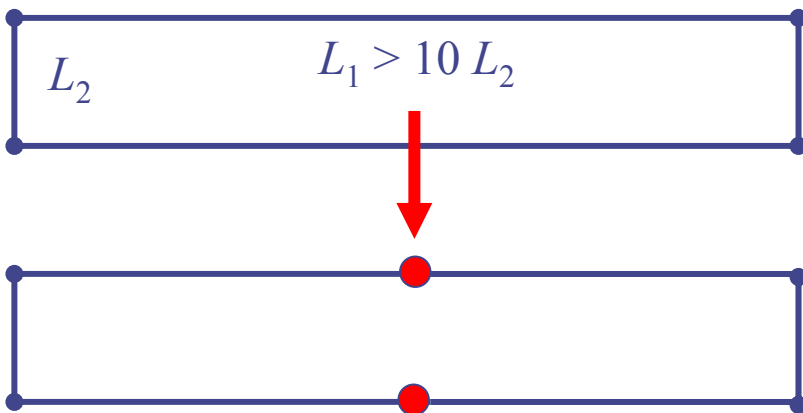
Εφόσον η κατανομή της κατανάλωσης κατά μήκος του αγωγού είναι ομοιόμορφη, η συνολική κατανάλωση Q_0 θεωρείται ότι **ισομοιράζεται** στον ανάντη και κατάντη κόμβο.

Τυπική διαδικασία σχεδιασμού νέου δικτύου

- ◆ Με βάση τη γενική οριζοντιογραφία της περιοχής (τυπική κλίμακα 1:2000), ο μελετητής χαράσσει το δίκτυο των αγωγών, προσπαθώντας να περιορίσει στο ελάχιστο τις **ακτινωτές απολήξεις**, τόσο για λόγους ασφαλείας σε περίπτωση βλάβης ενός αγωγού όσο και για την προστασία του δικτύου από υδραυλικά πλήγματα.
- ◆ Επιλέγονται το υλικό, η κλάση και οι διάμετροι των αγωγών, με τρόπο ώστε να πληρούνται οι προδιαγραφές επαρκούς λειτουργίας του δικτύου και να ελαχιστοποιείται το κόστος επένδυσης (**πρόβλημα βελτιστοποίησης**).
- ◆ Οι **κόμβοι** του δικτύου τοποθετούνται:
 - στα σημεία τροφοδοσίας (δεξαμενές, υδατόπυργοι)·
 - στα σημεία διακλαδώσεων (όχι όμως απαραίτητα σε στροφές αγωγών)·
 - στα σημεία αλλαγής διαμέτρου·
 - στα σημεία αλλαγής των χρήσεων νερού (αστική, ημιαστική, τουριστική)·
 - στα σημεία αλλαγής της πυκνότητας του πληθυσμού και της δόμησης·
 - στις θέσεις των ειδικών καταναλωτών (π.χ. βιομηχανίες, ξενοδοχεία, πάρκα, νοσοκομεία)·
 - στις θέσεις των πυροσβεστικών κρουνών·
 - στις θέσεις των ειδικών διατάξεων (π.χ. αντλίες, μειωτές πίεσης).

Επισημάνσεις σχετικά με την τοποθέτηση των κόμβων

- ◆ Σε ορισμένες περιπτώσεις, συστήνεται η τοποθέτηση κόμβων σε σημεία όπου είναι επιθυμητός, κατά την κρίση του μηχανικού, ο **αυτόματος έλεγχος πιέσεων** κατά την επίλυση του μοντέλου (σε πολύ υψηλά ή πολύ χαμηλά σημεία του δικτύου).
- ◆ Ειδικοί καταναλωτές και κρουνοί που βρίσκονται **σχετικά κοντά** σε κόμβους άλλης αιτιολογίας (π.χ. διακλαδώσεις) είναι δυνατόν να αναχθούν σε αυτούς, ώστε να μην αυξάνεται υπερβολικά το πλήθος των υπολογιστικών μελών του μοντέλου.
- ◆ **Ειδικές διατάξεις** προσομοιώνονται με περισσότερους από έναν κόμβους (συνήθως από δύο έως τέσσερις, ανάλογα με το μαθηματικό σχήμα που υιοθετείται).
- ◆ Η τοποθέτηση κόμβων είναι δυνατόν να υπαγορεύεται για λόγους **ευστάθειας του αριθμητικού σχήματος επίλυσης**. Συστήνεται ο σχετικός λόγος των μηκών των κλάδων του ίδιου βρόχου να μην ξεπερνά το 10.



Σε κάθε κόμβο του δικτύου δίνεται χαρακτηριστική **ονομασία**. Αυτό επιβάλλεται από το πρόγραμμα, χωρίς προφανώς να παίζει κανέναν ρόλο στην επίλυση. Μνημονικοί κανόνες βοηθούν τον μηχανικό να αναγνωρίζει τη θέση του κόμβου μόνο από την ονομασία του.

Γενική μεθοδολογία εκτίμησης παροχής εξόδου κόμβων

- ◆ Η επίλυση του δικτύου προϋποθέτει τον καθορισμό **σεναρίων φόρτισης**, βάσει των οποίων ελέγχεται η υδραυλική επάρκεια του δικτύου.
- ◆ Ως φόρτιση νοείται η κατανάλωση νερού σε κάθε κόμβο του δικτύου (**παροχή εξόδου**).
- ◆ Ως παροχή σχεδιασμού νοείται η **παροχή αιχμής** (= μέγιστη ωριαία) της πλέον δυσμενούς ημέρας του έτους (συνήθως θερινής). Απαιτείται προσοχή για την ορθή αναγωγή χρήσεων που παρουσιάζουν αιχμή σε διαφορετική εποχή (π.χ. ελαιοτριβεία).
- ◆ Για τους ειδικούς καταναλωτές, η παροχή σχεδιασμού μεταφέρεται στον κοντινότερο κόμβο ως **σημειακή φόρτιση**.
- ◆ Για τους λοιπούς καταναλωτές, η ολική παροχή σχεδιασμού q_k ανά χρήση νερού k επιμερίζεται στους κόμβους με χρήση κατάλληλων **συντελεστών κατανομής**:

$$c_{jk} = w_{jk} q_k$$

- ◆ Οι συντελεστές κατανομής w_{jk} εκφράζουν το ποσοστό της συνολικής ζήτησης μιας χρήσης που εξυπηρετείται από κάθε κόμβο του δικτύου.
- ◆ Κάθε αγωγός εξυπηρετεί το σύνολο της κατανάλωσης νερού που εκδηλώνεται κατά μήκος αυτού, η οποία μοιράζεται εξίσου στους δύο κόμβους του. Συνεπώς, η παροχή εξόδου κάθε κόμβου ισούται με το ήμισυ της κατανάλωσης κατά μήκος όλων των αγωγών που συμβάλλουν σε αυτόν.

Υπολογισμός συντελεστών κατανομής

- ◆ Υπολογίζονται τα **πραγματικά μήκη** των κλάδων του δικτύου, L_{ij} .
- ◆ Για την συγκεκριμένη χρήση νερού, υπολογίζεται ο **συντελεστής μήκους** θ_{ij} , που εκφράζει σε τι κλάσμα ή πολλαπλάσιο του μήκους του υπολογιστικού μέλους (i, j) εκδηλώνεται η συγκεκριμένη χρήση. Γενικά, ισχύει:
 - $\theta_{ij} = 0$ αν δεν εκδηλώνεται η χρήση κατά μήκος της διαδρομής (i, j)
 - $\theta_{ij} = 1$ αν η χρήση εκδηλώνεται ομοιόμορφα κατά μήκος της διαδρομής (i, j)
 - $\theta_{ij} < 1$ αν η χρήση εκδηλώνεται ανομοιόμορφα ή σε τμήμα της διαδρομής (i, j)
- ◆ Υπολογίζεται το **ισοδύναμο μήκος επιρροής** του κόμβου j προς το μέλος (i, j) ως:

$$L_{ij}^* = 0.5 \theta_{ij} L_{ij}$$

- ◆ Το **ολικό ισοδύναμο μήκος επιρροής** του κόμβου j προκύπτει ως άθροισμα των επιμέρους μηκών όλων των κλάδων που συμβάλλουν στον κόμβο, ήτοι:

$$L_j^* = \sum L_{ij}^*$$

- ◆ Το **ολικό ισοδύναμο μήκος** της συγκεκριμένης χρήσης προκύπτει ως:

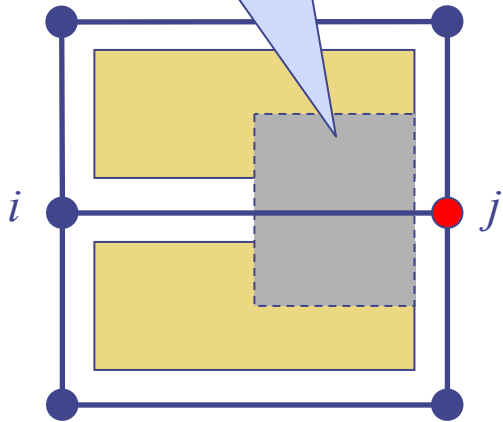
$$L^* = \sum L_j^*$$

- ◆ Ο **συντελεστής κατανομής** της ολικής παροχής σχεδιασμού της συγκεκριμένης χρήσης στον κόμβο j υπολογίζεται ως το κλάσμα:

$$w_j = L_j^* / L^*$$

Χαρακτηριστικά παραδείγματα

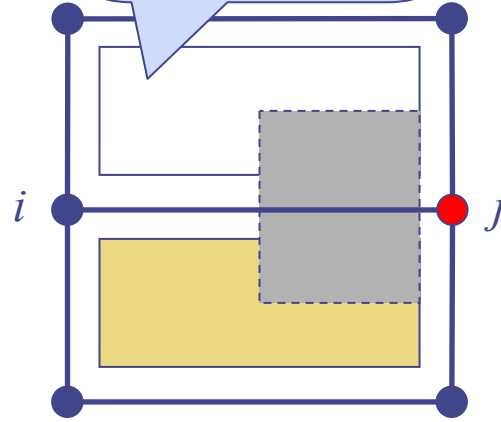
Ζώνη φόρτισης
κόμβου j



Αμφίπλευρη
κατανάλωση,
ομοιόμορφα
κατανομημένη:

$$\theta_{ij} = 1$$

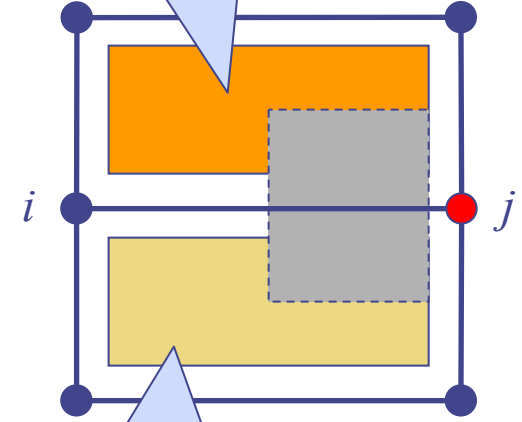
Δεν εκδηλώνεται
η συγκεκριμένη
χρήση νερού



Μονόπλευρη
κατανάλωση,
ομοιόμορφα
κατανομημένη:

$$\theta_{ij} = 0.5$$

Πληθυσμός Π_1



Πληθυσμός $\Pi_2 < \Pi_1$

Αμφίπλευρη κατανάλωση,
ανομοιόμορφα κατανομημένη:

$$\theta_{ij} = 0.5 (1 + \Pi_2 / \Pi_1)$$

Διαμόρφωση σεναρίων φόρτισης

- ◆ Η ολική παροχή εξόδου κάθε κόμβου υπολογίζεται αθροίζοντας τις επιμέρους φορτίσεις, σημειακές και κατανεμημένες, που αναφέρονται στην **κανονική λειτουργία** του δικτύου.
- ◆ Ο έλεγχος υδραυλικής επάρκειας του δικτύου δεν γίνεται για την κατάσταση κανονικής λειτουργίας, αλλά για έκτακτες καταστάσεις, κατά τις οποίες ζητείται η **οριακή** ικανοποίηση των περιορισμών ελάχιστων πιέσεων.
- ◆ Με εξαίρεση ορισμένες πολύ μεγάλες πόλεις, η τυπική δυσμενέστερη κατάσταση λειτουργίας είναι η περίπτωση **πυρκαγιάς**, οπότε προκύπτουν εξαιρετικά υψηλές σημειακές φορτίσεις εξαιτίας της ενεργοποίησης κρουνών.
- ◆ Τα **σενάρια πυρκαγιάς** διαμορφώνονται κατά την κρίση του μηχανικού, για την κάλυψη δυσμενών περιπτώσεων. Τα σενάρια πρέπει να είναι **ρεαλιστικά**, ώστε να μην οδηγούν σε υπερβολικά δαπανηρό σχεδιασμό.
- ◆ Συστήνεται η κατά προτεραιότητα εξέταση σεναρίων πυρκαγιάς με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:
 - σενάρια με κρουνούς σε ακτινωτές απολήξεις·
 - σενάρια με κρουνούς στα υψηλά σημεία του δικτύου·
 - σενάρια που επιβαρύνουν διαφορετικές ομάδες κλάδων·
 - σενάρια με ενεργοποίηση γειτονικών κρουνών.

Προσαρμογή μοντέλου υφιστάμενου δικτύου

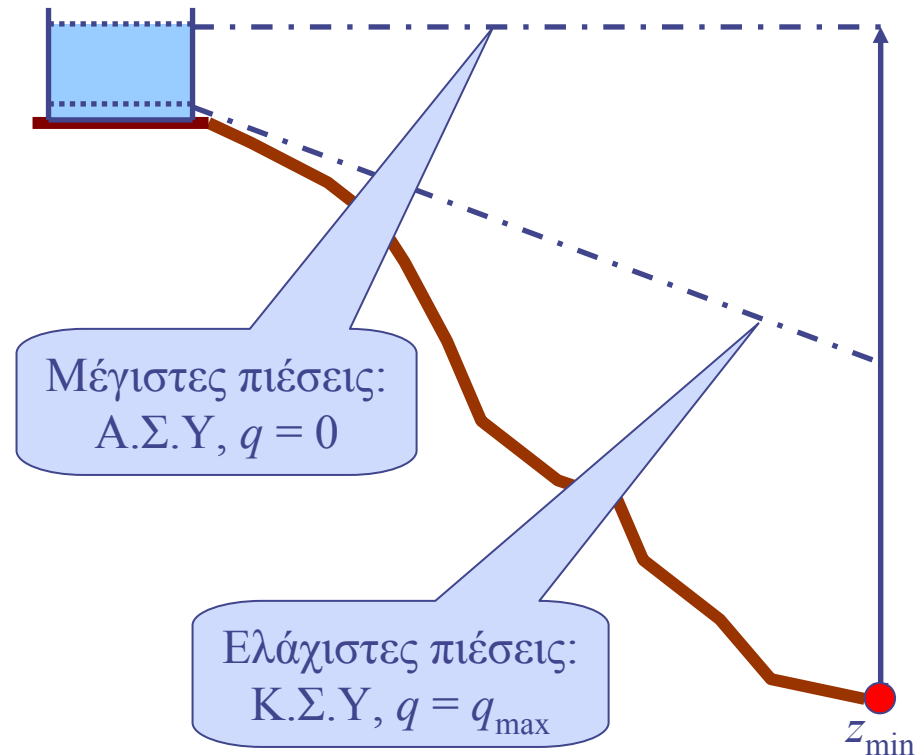
- ◆ Πρόκειται για την **συνήθη περίπτωση**, που επιβάλλεται για τη διαχείριση ενός υφιστάμενου δικτύου καθώς και τον σχεδιασμό μελλοντικών επεκτάσεών του.
- ◆ Απαραίτητη προϋπόθεση είναι η **απογραφή** του υφιστάμενου δικτύου και η συλλογή των αρχείων των υδρομετρητών όλων των καταναλωτών, διαδικασία που είναι εξαιρετικά επίπονη και χρονοβόρα, εφόσον δεν υπάρχει κατάλληλη υποδομή.
- ◆ Ακολουθείται η τυπική διαδικασία σχηματοποίησης του μοντέλου, με τη διαφορά ότι οι παροχές εξόδου προκύπτουν όχι βάσει υποθέσεων αλλά λαμβάνοντας υπόψη τις **πραγματικές καταναλώσεις**.
- ◆ Το μοντέλο που διαμορφώνεται πρέπει να προσαρμοστεί στις πραγματικές συνθήκες λειτουργίας του δικτύου. Η εν λόγω διαδικασία ονομάζεται **ρύθμιση** του μοντέλου.
- ◆ Η ρύθμιση προϋποθέτει πολλαπλές επιλύσεις του μοντέλου, ώσπου η απόκλιση των αποτελεσμάτων του σε σχέση με τις πραγματικές (μετρούμενες) τιμές να είναι αποδεκτή. Αποκλίσεις αναμένονται, μεταξύ άλλων, και για τους εξής λόγους:
 - ασυνέπεια μεταξύ των αρχικών σχεδίων και της υλοποίησής τους (αβεβαιότητα στον καθορισμό των μηκών και διαμέτρων)·
 - θραύσεις αγωγών και παράνομες συνδέσεις (σφάλματα στην εκτίμηση των παροχών εξόδου)·
 - δυσκολία εκτίμησης συντελεστών τραχύτητας (γήρανση, τοπικές απώλειες).

Προδιαγραφές επαρκούς υδραυλικής λειτουργίας δικτύων ύδρευσης

- ◆ **Περιορισμοί μέγιστης πίεσης:** Για την προστασία των υδραυλικών εγκαταστάσεων των σπιτιών και των οικιακών συσκευών, η πίεση σε κάθε σημείο του δικτύου δεν θα πρέπει να ξεπερνά τα 60 έως 70 m.
- ◆ **Περιορισμοί ελάχιστης πίεσης:** Η πιεζομετρική γραμμή της οικιακής παροχής στο υψηλότερο σημείο των κτηρίων (υφιστάμενων ή προβλεπόμενων, με βάση τον πολεοδομικό σχεδιασμό) θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 4 m. Θεωρώντας απώλειες ενέργειας της τάξης του 1 m ανά όροφο και τυπικό ύψος ορόφου 3 m, προκύπτει απαιτούμενο ύψος πίεσης ίσο με $4(n + 1)$, όπου ο n αριθμός των ορόφων του κτηρίου.
- ◆ **Έλεγχος αντιπληγματικής προστασίας:** Το δίκτυο πρέπει να ελέγχεται έναντι της εμφάνισης μεγάλων υποπιέσεων και υπερπιέσεων, που οφείλονται σε υδραυλικό πλήγμα λόγω απότομης μεταβολής της παροχής. Κίνδυνο υδραυλικού πλήγματος αντιμετωπίζουν τα ακτινωτά τμήματα ενός δικτύου. Η μελέτη γίνεται για κατάσταση μη μόνιμης ροής και απαιτεί εξειδικευμένα μοντέλα.
- ◆ Οι παραπάνω προδιαγραφές οφείλουν να πληρούνται σε όλη τη διάρκεια της **οικονομικής ζωής** του δικτύου (40 έτη με βάση το Π.Δ. 696/74, 40-50 έτη διεθνώς). Για τον λόγο αυτό, ο σχεδιασμός ενός δικτύου γίνεται με βάση τον πληθυσμό και τις συνθήκες κατανάλωσης 40ετίας.

Έλεγχος μέγιστων πιέσεων

- ◆ Ο έλεγχος γίνεται πριν την επίλυση του δικτύου, θεωρώντας την οριακή (και ιδεατή) κατάσταση **μηδενικής φόρτισης** (οριζόντια πιεζομετρική γραμμή) και **ανώτατης στάθμης ύδατος** (Α.Σ.Υ.) στη δεξαμενή.
- ◆ Εντοπίζεται το **χαμηλότερο σημείο** (κόμβος) του δικτύου, με απόλυτο υψόμετρο z_{\min} , και ελέγχεται αν:
$$A.S.Y - z_{\min} < 60-70 \text{ m}$$
- ◆ Εφόσον το δίκτυο τροφοδοτείται από περισσότερες της μίας δεξαμενών (με ελεύθερη επικοινωνία), λαμβάνεται ως **δεξαμενή ελέγχου** αυτή με την υψηλότερη Α.Σ.Υ.



Αν δεν ικανοποιείται ο έλεγχος μέγιστων πιέσεων (που είναι η συνήθης περίπτωση σε αμφιθεατρικούς οικισμούς, με μεγάλες υψομετρικές διαφορές), το δίκτυο χωρίζεται σε **πιεζομετρικές ζώνες**, οι οποίες είναι ανεξάρτητες (δεν επικοινωνούν υδραυλικά).

Έλεγχος ελάχιστων πιέσεων

- ◆ Ο έλεγχος γίνεται διαμορφώνοντας πολλαπλά **δυσμενή σενάρια φόρτισης** (ήτοι σενάρια έκτακτης λειτουργίας του δικτύου), με θεώρηση της **κατώτατης στάθμης ύδατος** (Κ.Σ.Υ.) στις δεξαμενές.

- ◆ Σε κάθε κόμβο με γνωστό απόλυτο υψόμετρο z_i , η υδροστατική πίεση είναι:

$$p_i = h_i - z_i$$

όπου το ενεργειακό υψόμετρο του κόμβου h_i είναι συνάρτηση της φόρτισης του δικτύου (= παροχές εξόδου κόμβων).

- ◆ Ο προσδιορισμός των ενεργειακών υψομέτρων h_i είναι το βασικό ζητούμενο της **επίλυσης** του δικτύου.
- ◆ Γενικά, δεν μπορεί εκ των προτέρων να καθοριστεί ο πλέον δυσμενής κόμβος για κάθε σενάριο, ούτε, αντίστροφα, το πλέον δυσμενές σενάριο για κάθε κόμβο.
- ◆ Εξαιτίας της τοπογραφίας, στα **πολύ υψηλά σημεία** του δικτύου που βρίσκονται κοντά στις δεξαμενές, είναι ορισμένες φορές αναπόφευκτο η τιμή της πίεσης να είναι μικρότερη της επιθυμητής. Στην περίπτωση αυτή δεν θεωρείται γενική αστοχία του δικτύου, αν οι πιέσεις των υπόλοιπων κόμβων κυμαίνονται στα επιτρεπόμενα όρια.

Η ανεπαρκής πίεση σε μια περιοχή του δικτύου αντιμετωπίζεται με αντικατάσταση των ανάντη κλάδων από αγωγούς **μεγαλύτερης διαμέτρου**, ώστε να περιορίζονται οι γραμμικές απώλειες. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, απαιτείται προσθήκη **αντλιοστασίου**.

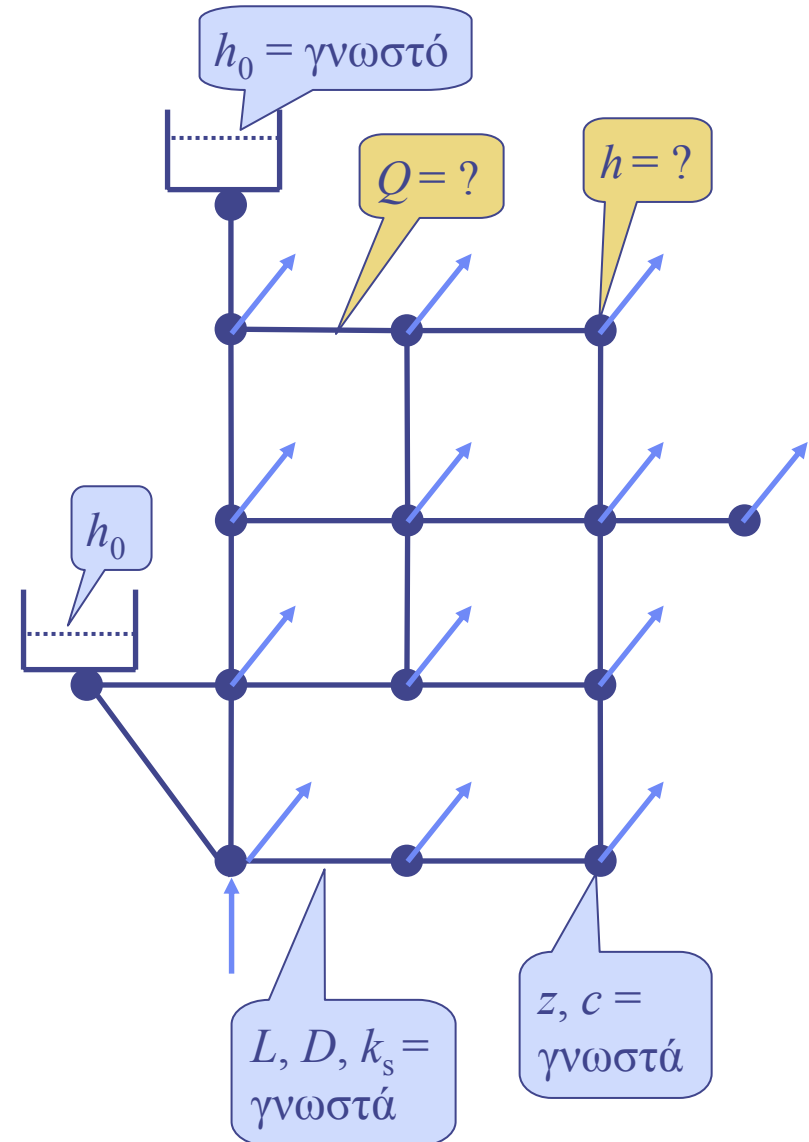
Ορισμός του τυπικού προβλήματος ανάλυσης δικτύων

Δεδομένου ενός μοντέλου δικτύου αγωγών οποιασδήποτε διάταξης με:

- γνωστά γεωμετρικά χαρακτηριστικά, ήτοι μήκος L , εσωτερική διάμετρο D και συντελεστή τραχύτητας k_s για κάθε κλάδο
- γνωστά τοπογραφικά υψόμετρα z , και γνωστές παροχές εισόδου και εξόδου c (φορτίσεις) των κόμβων
- γνωστά ενεργειακά υψόμετρα h_0 στα σημεία τροφοδοσίας (δεξαμενές)

ζητείται ο υπολογισμός των εξής μεγεθών:

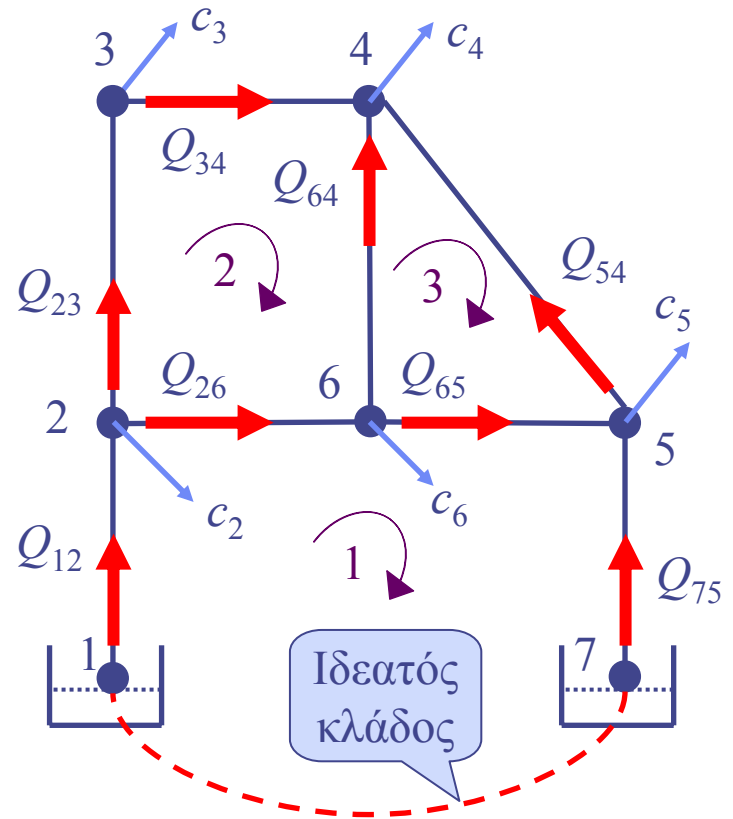
- των παροχών Q σε όλους τους κλάδους
- των ενεργειακών υψομέτρων h σε όλους τους κόμβους, βάσει των οποίων υπολογίζονται οι αντίστοιχες πιέσεις p



Συμβατικές εργασίες πριν την επίλυση του δικτύου

- ◆ Σε ένα βροχωτό δίκτυο, η φορά της ροής είναι άγνωστη, και μάλιστα αναστρέφεται ανάλογα με τις συνθήκες φόρτισης. Πριν την επίλυση, ορίζονται **τυχαίες φορές** στους κλάδους.
- ◆ Συμβατικά, θεωρείται πως κάθε βρόχος διαγράφεται με δεξιόστροφη φορά. Στην πορεία της διαγραφής, η **παροχή** θεωρείται θετική εφόσον συμπίπτει με τη φορά διαγραφής του βρόχου, και αντίστροφα. Οι **ενεργειακές απώλειες** στους κλάδους ακολουθούν τη φορά της αντίστοιχης παροχής.
- ◆ Αν στο δίκτυο υπάρχουν $n_0 > 1$ σημεία τροφοδοσίας με γνωστό ενεργειακό υψόμετρο, τότε θεωρούνται $n_0 - 1$ επιπλέον **ιδεατοί βρόχοι**, τοποθετώντας ιδεατούς κλάδους μηδενικής παροχής που συνδέουν τα σημεία τροφοδοσίας ανά δύο (δεν υπολογίζονται στην αρίθμηση). Η θεμελιώδης εξίσωση γράφεται:

$$m = n + r - n_0$$



Στο δίκτυο του σχήματος: $m = 8$ κλάδοι, $n = 7$ κόμβοι, $r = 3$ βρόχοι (2 + 1 ιδεατός), $n_0 = 2$ δεξαμενές. Ισχύει: $8 = 7 + 3 - 2$

Εξισώσεις συνέχειας κόμβων

- ◆ Σε κάθε κόμβο i ισχύει η εξίσωση συνέχειας (εξίσωση διατήρησης μάζας):

$$q_{i,\text{εισόδου}} - q_{i,\text{εξόδου}} = c_i - y_i$$

όπου $q_{i,\text{εισόδου}}$ το άθροισμα των εισερχόμενων παροχών, $q_{i,\text{εξόδου}}$ το άθροισμα των εξερχόμενων παροχών, y_i η παροχή εισόδου (εφόσον πραγματοποιείται τροφοδοσία νερού) και c_i η παροχή εξόδου (φόρτιση) του κόμβου i .

- ◆ Θεωρώντας τα στοιχεία του $n \times n$ μητρώου γειτνίασης \mathbf{A} , ήτοι $a_{ij} = 1$ αν υπάρχει κλάδος κατά τη φορά $i \rightarrow j$ και $a_{ij} = 0$ διαφορετικά, η εξίσωση συνέχειας για κάθε κόμβο i ($i = 1, 2, \dots, n$) γράφεται:

$$\sum_{j=1}^n a_{ji} Q_{ji} - \sum_{k=1}^n a_{ik} Q_{ik} = c_i - y_i$$

- ◆ Δεδομένου ότι στο δίκτυο η συνολική προσφορά ισούται με τη συνολική ζήτηση q , το άθροισμα των παροχών εισόδου (τροφοδοσία δεξαμενών) ισούται με το άθροισμα των παροχών εξόδου στους κόμβους, ήτοι:

$$\sum_{j=1}^n y_j = \sum_{j=1}^n c_j$$

Διαμόρφωση εξισώσεων συνέχειας παραδείγματος

Γράφουμε τις εξισώσεις συνέχειας για τους 7 κόμβους του δικτύου:

1: $-Q_{12} = -y_1$

2: $Q_{12} - Q_{23} - Q_{26} = c_2$

3: $Q_{23} - Q_{34} = c_3$

4: $Q_{34} + Q_{54} + Q_{64} = c_4$

5: $Q_{65} + Q_{75} - Q_{54} = c_5$

6: $Q_{26} - Q_{64} - Q_{65} = c_6$

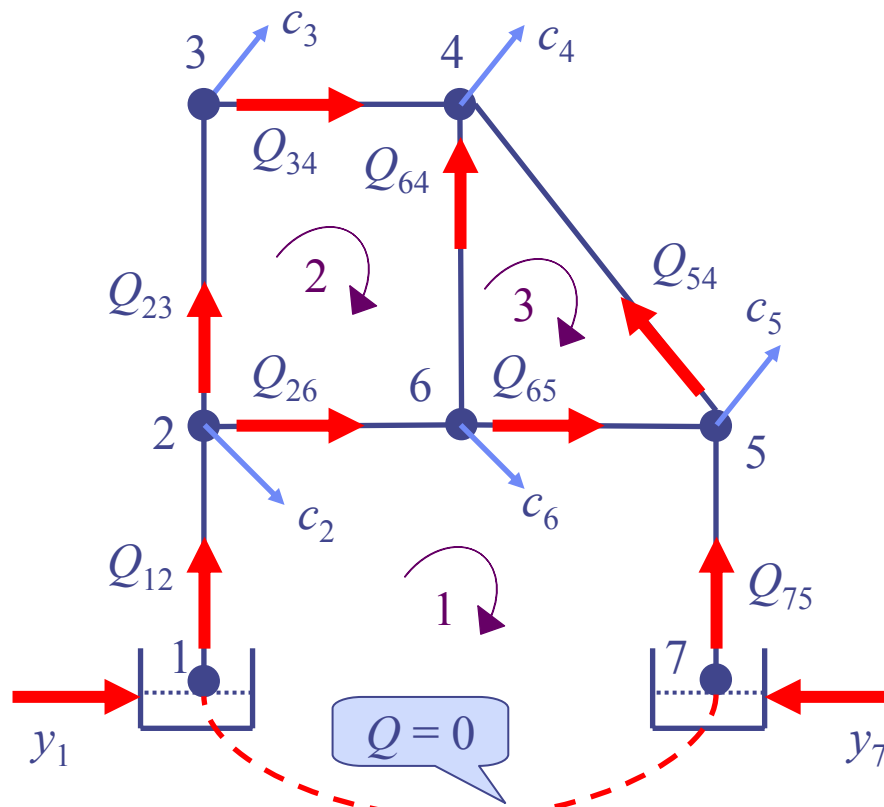
7: $-Q_{75} = -y_7$

Το συνολικό ισοζύγιο προσφοράς-ζήτησης γράφεται:

$$y_1 + y_7 = c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$$



Σύστημα 8 εξισώσεων (7 γραμμικά ανεξάρτητες) με 10 αγνώστους (= παροχές Q_{ij} και εισροές y_i)



Οι τρεις επιπλέον γραμμικά ανεξάρτητες σχέσεις που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος προκύπτουν με τη διαμόρφωση των εξισώσεων διατήρησης ενέργειας στους βρόχους του δικτύου.

Εξισώσεις ενεργειακών απωλειών κλάδων

- ◆ Σε κάθε κλάδο (i, j) ισχύει η γενική σχέση γραμμικών ενεργειακών απωλειών:

$$\Delta h_{ij} = h_i - h_j = \kappa_{ij} Q_{ij}^\lambda$$

- ◆ Οι τιμές των κ_{ij} και λ διαφοροποιούνται ανάλογα με την σχέση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των απωλειών.

- κατά **Darcy-Weisbach**: $\kappa_{ij} = 8 f_{ij} L_{ij} / \pi^2 g D_{ij}^5$, $\lambda = 2$

- κατά **Hazen-Williams**: $\kappa_{ij} = 10.675 L_{ij} / c_{ij}^{1.852} D_{ij}^{4.704}$, $\lambda = 1.852$

- ◆ Η εφαρμογή της σχέσης Darcy-Weisbach (πιο ακριβής), προϋποθέτει την εκτίμηση του **συντελεστή απωλειών** f , που είναι συνάρτηση της παροχής Q_{ij} .

- ◆ Η εξίσωση ενεργειακών απωλειών διατυπώνεται στη **γραμμικοποιημένη** μορφή:

$$\Delta h_{ij} = h_i - h_j = \kappa_{ij} |Q_{ij}|^{\lambda-1} Q_{ij}$$

όπου το πρόσημο των απωλειών προκύπτει από το πρόσημο της παροχής Q_{ij} .

- ◆ Εκτός των γραμμικών απωλειών, στα δίκτυα υπάρχουν και **τοπικές απώλειες**, οι οποίες διακρίνονται σε τυπικές (στις συνδέσεις των αγωγών, τις στροφές και τις διακλαδώσεις) και ειδικές (στις θέσεις των ειδικών συσκευών), και υπολογίζονται από τη σχέση $h_L = \alpha V^2 / 2g$, όπου V η ταχύτητα ροής και α συντελεστής.
- ◆ Για απλούστευση, οι **τυπικές τοπικές απώλειες** λαμβάνονται έμμεσα υπόψη, με επαύξηση του συντελεστή τραχύτητας.

Εξισώσεις διατήρησης ενέργειας βρόχων

- ◆ Σε κάθε βρόχο του δικτύου ισχύει η εξίσωση διατήρησης ενέργειας:

$$\sum \Delta h_{ij} = \sum \kappa_{ij} Q_{ij}^\lambda = 0$$

- ◆ Κατά μήκος ενός **ιδεατού βρόχου**, οι απώλειες ενέργειας είναι ίσες με τη διαφορά στάθμης Δh_0 μεταξύ των σημείων γνωστού ενεργειακού υψομέτρου (δεξαμενές).

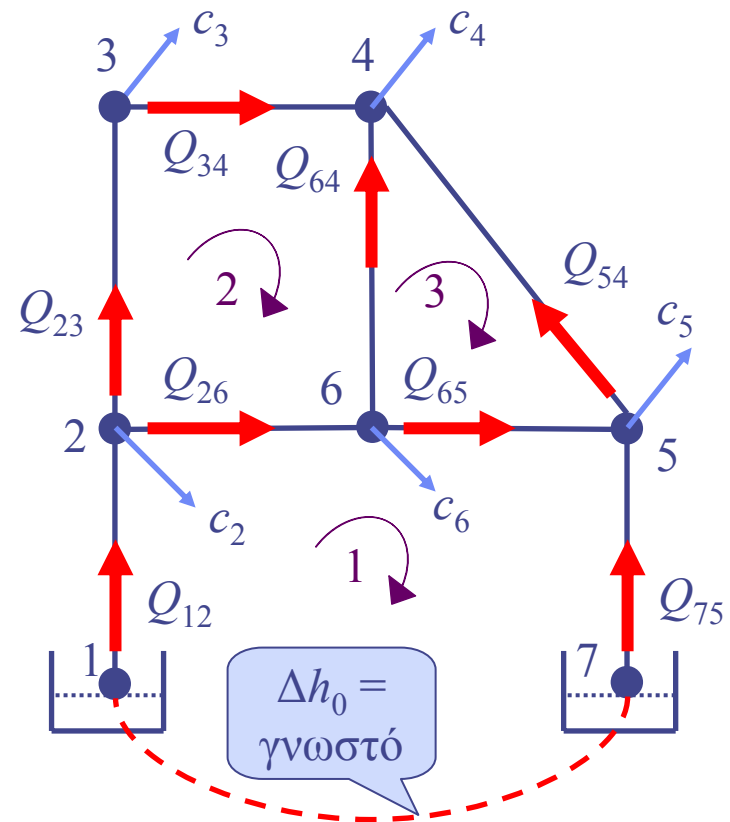
- ◆ Στο δίκτυο του παραδείγματος:

$$\kappa_{12} Q_{12}^\lambda + \kappa_{26} Q_{26}^\lambda + \kappa_{65} Q_{65}^\lambda - \kappa_{57} Q_{57}^\lambda + \Delta h_0 = 0$$

$$\kappa_{23} Q_{23}^\lambda + \kappa_{34} Q_{34}^\lambda - \kappa_{64} Q_{64}^\lambda - \kappa_{26} Q_{26}^\lambda = 0$$

$$\kappa_{64} Q_{64}^\lambda - \kappa_{54} Q_{54}^\lambda - \kappa_{65} Q_{65}^\lambda = 0$$

- ◆ Συνεπώς, προκύπτουν οι τρεις επιπλέον γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό των άγνωστων μεγεθών (= παροχές).



Το σύστημα που προκύπτει είναι μη γραμμικό ως προς τις παροχές Q_{ij} , και επιλύεται μόνο με **αριθμητικές μεθόδους**. Η μη γραμμικότητα οφείλεται στους όρους Q_{ij}^λ αλλά και τα κ_{ij} , που είναι συνάρτηση των Q_{ij} (γραμμικές απώλειες κατά Darcy-Weisbach).

Τεχνικές επίλυσης

- ◆ Οι τεχνικές επίλυσης είναι **επαναληπτικές**, καθώς ορίζουν αυθαίρετες αρχικές τιμές στις μεταβλητές του προβλήματος και επιδιώκουν την σταδιακή μείωση του σφάλματος μέχρι να επέλθει σύγκλιση.
- ◆ Ανάλογα με τις μεταβλητές που χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι διακρίνονται σε:
 - τεχνικές επίλυσης των **Q-εξισώσεων** (δίνονται αρχικές τιμές στις παροχές των κλάδων και διορθώνονται οι εξισώσεις διατήρησης ενέργειας στους βρόχους)
 - τεχνικές επίλυσης των **H-εξισώσεων** (δίνονται αρχικές τιμές στα ενεργειακά υψόμετρα των κόμβων και διορθώνονται οι εξισώσεις συνέχειας στους κόμβους)
- ◆ Ανάλογα με τη μεθοδολογία επίλυσης των εξισώσεων οι μέθοδοι διακρίνονται σε:
 - τεχνικές διόρθωσης ανά εξίσωση (μέθοδος Cross).
 - τεχνικές επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων (μέθοδος Newton-Raphson).
 - τεχνικές επίλυσης γραμμικοποιημένων συστημάτων, με διόρθωση.

Παρόμοιες αρχές με τα δίκτυα ύδρευσης ισχύουν στα ηλεκτρικά κυκλώματα, όπου η ένταση του ρεύματος αντιστοιχεί στην παροχή ενός αγωγού και η τάση στο ενεργειακό υψόμετρο ενός κόμβου. Πριν την εξέλιξη των υπολογιστών, αλλά και μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1970, τα **μοντέλα ηλεκτρικών αναλόγων** αποτέλεσαν μια πρόσφορη μέθοδο προσομοίωσης δικτύων.

Μέθοδος γραμμικοποίησης Η-εξισώσεων

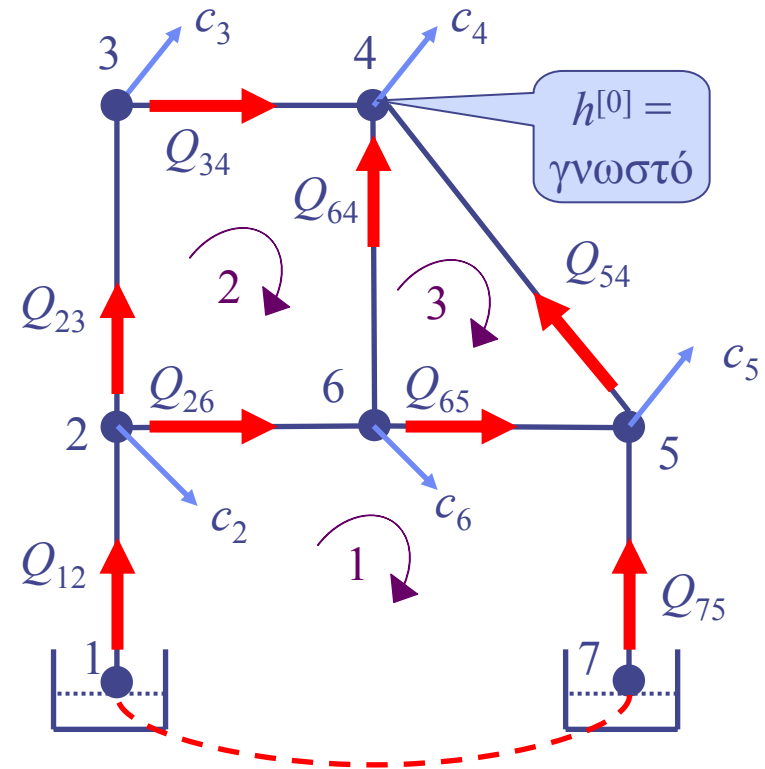
- ◆ Ορίζονται αυθαίρετες τιμές **αρχικών ενεργειακών υψομέτρων** $h_i^{[0]}$ (οι τιμές πρέπει να είναι διαφορετικές για κάθε κόμβο i), συναρτήσει των οποίων εκτιμώνται οι αρχικές παροχές $Q_{ij}^{[0]}$.
- ◆ Η γραμμικοποιημένη εξίσωση των ενεργειακών απωλειών σε κάθε κλάδο (i, j) επιλύεται ως προς τα Q_{ij} ως:

$$Q_{ij} = \frac{1}{\kappa_{ij}(Q_{ij}) |Q_{ij}|^{\lambda-1}} (h_i - h_j) = r_{ij} (h_i - h_j)$$

όπου r_{ij} η **γραμμικοποιημένη αντίσταση** του αγωγού, που εκτιμάται συναρτήσει της αρχικής παροχής $Q_{ij}^{[0]}$.

- ◆ Η εξίσωση συνέχειας στους κόμβους i γράφεται στη μορφή:

$$\sum_{j \neq i}^n r_{ij} h_j - \left(\sum_{j \neq i}^n r_{ij} \right) h_i = c_i - y_i$$



Η εξίσωση συνέχειας στον κόμβο 4 γράφεται:

$$Q_{34} + Q_{54} + Q_{64} = c_4 \Rightarrow$$

$$r_{34} (h_3 - h_4) + r_{54} (h_5 - h_4) + r_{64} (h_6 - h_4) = c_4 \Rightarrow$$

$$r_{34} h_3 + r_{54} h_5 + r_{64} h_6 - (r_{34} + r_{54} + r_{64}) h_4 = c_4$$

Μητρική διατύπωση προβλήματος

- ◆ Ορίζεται ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων συνέχειας, διατυπωμένων συναρτήσεων των ενεργειακών υψομέτρων h_i , που υπό μορφή μητρώων γράφεται:

$$\mathbf{B} \mathbf{h} = \mathbf{c} - \mathbf{y}$$

όπου \mathbf{B} $n \times n$ μητρώο συντελεστών (συμμετρικό), με στοιχεία:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\sum_{j \neq i}^n a_{ij} r_{ij} & \text{αν } i = j \text{ (διαγώνια στοιχεία)} \\ a_{ij} r_{ij} & \text{αν } i \neq j \text{ (μη διαγώνια στοιχεία)} \end{cases}$$

- ◆ Η επίλυση του συστήματος απαιτεί **αντιστροφή** του μητρώου \mathbf{B}' , που προκύπτει με θεώρηση των $n' = n - n_0$ γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων. Το σύστημα γράφεται:

$$\mathbf{B}' \mathbf{h}' = \mathbf{c} - \mathbf{y} - \mathbf{B}^* \mathbf{h}^*$$

όπου \mathbf{h}^* το διάνυσμα των n_0 γνωστών ενεργειακών υψομέτρων h_j^* και \mathbf{B}^* το $n' \times n_0$ μητρώο που περιέχει όλα τα στοιχεία b_{ij} που αντιστοιχούν στους κόμβους j^* .

- ◆ Χαρακτηριστικά του μητρώου \mathbf{B}' είναι η **ισχυρή διαγώνιος** και το μεγάλο πλήθος μηδενικών (**αραιό μητρώο**).
- ◆ Για προβλήματα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά εφαρμόζονται ειδικοί αλγόριθμοι, κατάλληλους για **πολύ μεγάλα συστήματα**, που είναι εξαιρετικά ταχύτεροι σε σχέση με τις τυπικές αριθμητικές μεθόδους για κοινά συστήματα.

Επίλυση με τη μέθοδο Gauss-Seidel με χαλάρωση

- ◆ Συμβολίζοντας με u_i τους γνωστούς όρους (δεξί μέλος) των n' γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων και επιλύοντας ως προς τη μεταβλητή h_1 προκύπτει:

$$h_1^* = (u_1 - b_{12} h_2^{[0]} - b_{13} h_3^{[0]} - \dots - b_{1n'} h_n^{[0]}) / b_{11}$$

- ◆ Για επιτάχυνση της σύγκλισης, η τιμή h_1^* διορθώνεται με βάση τη σχέση:

$$h_1^{[1]} = h_1^{[0]} + \omega (h_1^* - h_1^{[0]})$$

όπου $\omega > 1$ **συντελεστής χαλάρωσης** (για δίκτυα συστήνεται η τιμή $\omega = 1.8$).

- ◆ Στις επόμενες εξισώσεις, χρησιμοποιείται η νέα τιμή $h_1^{[1]}$, οπότε:

$$h_2^* = (u_2 - b_{21} h_1^{[1]} - b_{23} h_3^{[0]} - \dots - b_{2n'} h_n^{[0]}) / b_{22}$$

- ◆ Αφού υπολογιστεί το διάνυσμα $\mathbf{h}^{[1]} = (h_1^{[1]}, h_2^{[1]}, \dots, h_n^{[1]})$, η διαδικασία διόρθωσης επαναλαμβάνεται. Στην k επανάληψη, το ενεργειακό υψόμετρο i υπολογίζεται ως :

$$h_i^* = (u_i - b_{i1} h_1^{[k]} - \dots - b_{i, i-1} h_{i-1}^{[k]} - b_{i, i+1} h_{i+1}^{[k-1]} - \dots - b_{in'} h_n^{[k-1]}) / b_{ii}$$

Στις θέσεις των πρώτων $i - 1$ όρων τίθενται οι διορθωμένες τιμές των h_i

Στις υπόλοιπες θέσεις τίθενται οι εκτιμήσεις του βήματος $k - 1$

Διορθώνεται με εφαρμογή της σχέσης: $h_i^{[k]} = h_i^{[k-1]} + \omega (h_i^* - h_i^{[k-1]})$

Περιγραφή της εξωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας

- ◆ Επιλύοντας το σύστημα με τη μέθοδο Gauss-Seidel (**εσωτερική επαναληπτική διαδικασία**), υπολογίζονται τα άγνωστα ενεργειακά υψόμετρα h_i . Επειδή στο στάδιο αυτό δεν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια, συνήθως αρκούν 10-12 δοκιμές.
- ◆ Οι τιμές των συντελεστών r_{ij} έχουν προκύψει συναρτήσει των αρχικών εκτιμήσεων $h_i^{[0]}$, και προφανώς $h_i \neq h_i^{[0]}$. Για τον λόγο αυτό, ακολουθείται μια **εξωτερική επαναληπτική διαδικασία**, βάσει της οποίας σε κάθε κύκλο διορθώνονται τα r_{ij} με βάση τις επίκαιρες τιμές των ενεργειακών υψομέτρων h_i .
- ◆ Έστω $h_i^{[\tau]}$ οι επίκαιρες εκτιμήσεις των ενεργειακών υψομέτρων στους κόμβους i και $h_i^{[\tau-1]}$ οι προηγούμενες εκτιμήσεις, συναρτήσει των οποίων έχουν υπολογιστεί οι παροχές $Q_{ij}^{[\tau-1]}$, οι γραμμικοποιημένες αντιστάσεις $r_{ij}^{[\tau-1]}$ και το μητρώο $\mathbf{B}^{[\tau-1]}$.

- Αρχικά, σε όλους τους κλάδους εκτιμάται μια **ενδιάμεση** τιμή παροχής:

$$Q_{ij}^* = r_{ij}^{[\tau-1]} (h_i^{[\tau]} - h_j^{[\tau]})$$

- Η εν λόγω τιμή διορθώνεται με βάση τη σχέση:

$$Q_{ij}^{[\tau]} = \varphi Q_{ij}^* + (1 - \varphi) Q_{ij}^{[\tau-1]}$$

όπου $\varphi < 1$ **συντελεστής στάθμισης** (για δίκτυα συστήνεται η τιμή $\varphi = 0.6$).

- Με βάση τα $Q_{ij}^{[\tau]}$ υπολογίζονται οι νέες αντιστάσεις $r_{ij}^{[\tau]}$ και το μητρώο $\mathbf{B}^{[\tau]}$.
- Επιλύεται το γραμμικοποιημένο σύστημα: $\mathbf{B}^{[\tau]} \mathbf{h} = \mathbf{c} - \mathbf{y}$

Κριτήρια σύγκλισης

- ◆ Στη μέθοδο γραμμικοποίησης των Η-εξισώσεων **ισχύουν** πάντοτε οι εξισώσεις ενέργειας στους βρόχους και **διορθώνονται** οι εξισώσεις συνέχειας στους κόμβους.
- ◆ Σε κάθε επαναληπτικό κύκλο, για κάθε κόμβο i υπολογίζονται δύο τύποι σφαλμάτων:

- το απόλυτο σφάλμα παροχών (σφάλμα εξίσωσης συνέχειας):

$$\Delta q_i = |\sum Q_{ij}^{[\tau]} - c_i + y_i|$$

- το απόλυτο σφάλμα σύγκλισης των ενεργειακών υπομέτρων:

$$\Delta h_i = |h_i^{[\tau]} - h_i^{[\tau-1]}|$$

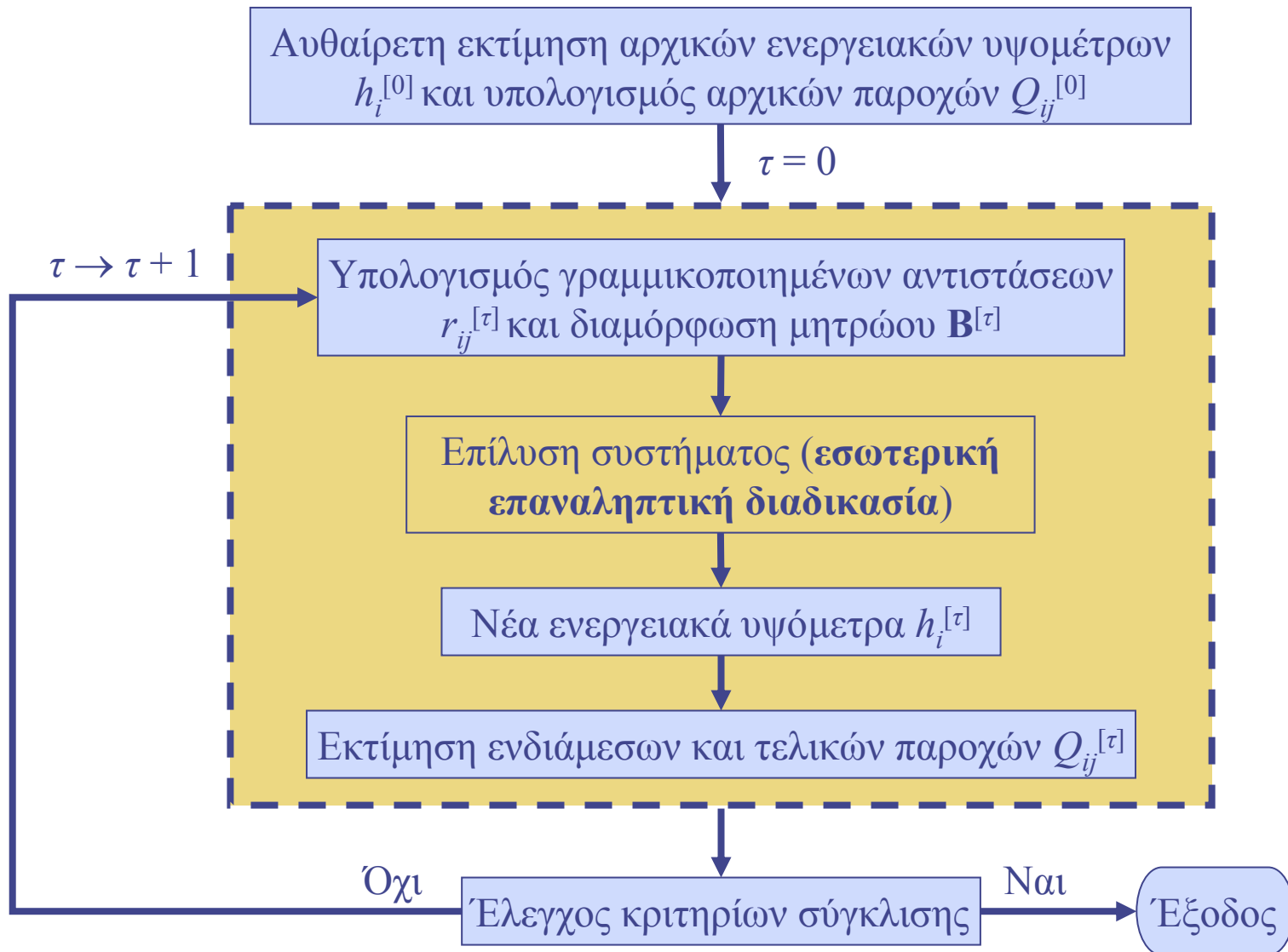
- ◆ Επειδή στα σημεία γνωστού ενεργειακού υπομέτρου (δεξαμενές) και κοντά σε αυτά η σύγκλιση είναι βραδύτερη, ελέγχεται επιπλέον η απόλυτη διαφορά μεταξύ της συνολικής προσφοράς $\sum y_i$ και της συνολικής ζήτησης q , ήτοι η ποσότητα:

$$\Delta y = |\sum y_i^{[\tau]} - q|$$

- ◆ Ο έλεγχος σύγκλισης ικανοποιείται εφόσον $\Delta q_i < 0.01$ l/s και $\Delta h_i < 0.01$ m για κάθε κόμβο $i = 1, 2, \dots, n$, και επιπλέον $\Delta y < 0.01$ l/s.

Ιδιαίτερα κρίσιμος, τόσο όσον αφορά την ακρίβεια όσο και την ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου, είναι ο καθορισμός των **αρχικών ενεργειακών υπομέτρων** $h_i^{[0]}$. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται ειδικοί ευρετικοί αλγόριθμοι που ορίζουν αυθαίρετες πλην όμως συμβατές, με βάση τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε μοντέλου δικτύου, τιμές.

Επίλυση δικτύου ύδρευσης: Λογικό διάγραμμα ροής



Προσομοίωση μόνιμης και χρονικά μεταβαλλόμενης κατάστασης

- ◆ **Προσομοίωση μόνιμης κατάστασης (steady-state):** Η επίλυση του μαθηματικού μοντέλου του δικτύου, ήτοι ο υπολογισμός των υδραυλικών χαρακτηριστικών της ροής (παροχές, πιέσεις), γίνεται θεωρώντας σταθερή φόρτιση στους κόμβους (ο έλεγχος γίνεται για τη δυσμενέστερη φόρτιση). Η προσέγγιση αυτή είναι κατάλληλη για εφαρμογές διαστασιολόγησης αγωγών και αντλιών, καθώς και αποτίμησης της υδραυλικής επάρκειας υφιστάμενων δικτύων.
- ◆ **Προσομοίωση χρονικά μεταβαλλόμενης κατάστασης (extended-period):** Η επίλυση του μοντέλου γίνεται σε διακριτά χρονικά βήματα, θεωρώντας χρονικά μεταβαλλόμενη φόρτιση. Στόχος είναι ο έλεγχος της δυναμικής λειτουργίας του δικτύου σε κανονικές και έκτακτες συνθήκες. Κατά κανόνα, η διάρκεια της προσομοίωσης είναι μεγαλύτερη των 24 ωρών (τυπική τιμή 72 ώρες), ενώ το χρονικό βήμα εξαρτάται από τη διακύμανση των φορτίσεων στο δίκτυο (τυπική τιμή μία ώρα). Η εν λόγω προσέγγιση θεωρείται κατάλληλη για εφαρμογές χωροθέτησης και ελέγχου της επάρκειας δεξαμενών, υπολογισμού της ενέργειας άντλησης και ανάλυσης της δίαιτας των ποιοτικών παραμέτρων του νερού (η τελευταία λειτουργία γίνεται μέσω συνδυασμένων μοντέλων προσομοίωσης τόσο των υδραυλικών όσο και των ποιοτικών χαρακτηριστικών της ροής).