Επίλυση δικτύων διανομής

Δημήτρης Κουτσογιάννης & Ανδρέας Ευστρατιάδης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

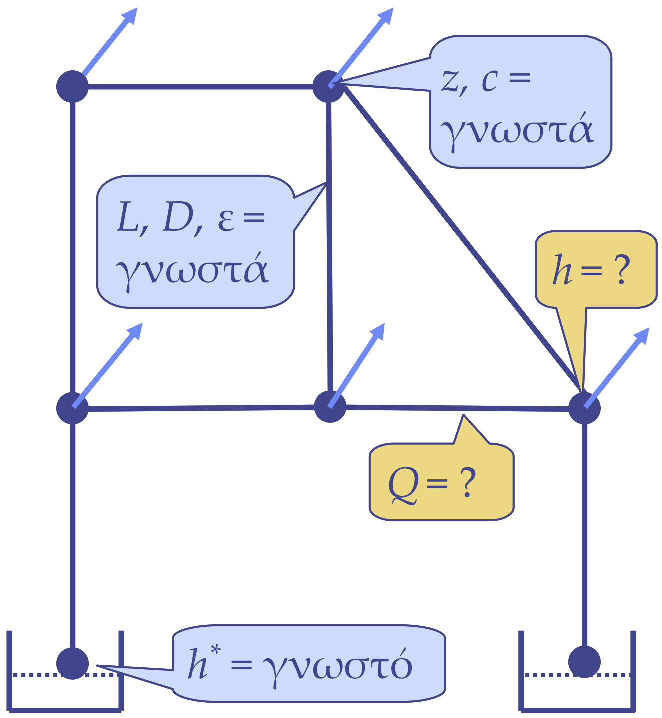
Διατύπωση του προβλήματος

Δεδομένου ενός δικτύου αγωγών με:

- γνωστά γεωμετρικά χαρακτηριστικά κλάδων (μήκος L, εσωτερική διάμετρος D, τραχύτητα ε)·
- γνωστά τοπογραφικά υψόμετρα z και γνωστές παροχές εξόδου c κόμβων·
- γνωστά ενεργειακά υψόμετρα h^* των σημείων τροφοδοσίας (π.χ. δεξαμενών)·

ζητείται ο υπολογισμός:

- των ενεργειακών υψομέτρων h σε όλους τους κόμβους ή, ισοδύναμα,
- των διερχόμενων παροχών Q (ή των ταχυτήτων V) σε όλους τους κλάδους.



Θεμελιώδης παραδοχή: Οι σημειακές και μη σημειακές καταναλώσεις του δικτύου ανάγονται σε παροχές εξόδου κόμβων.
Πρακτικό ζητούμενο: Ο έλεγχος των ελάχιστων πιέσεων στους κόμβους.

Περιγραφή της τοπολογίας

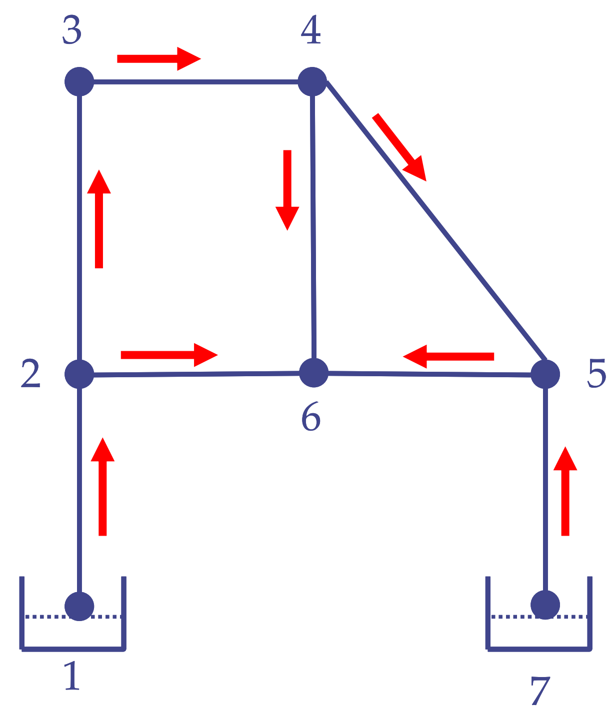
- Σε ένα δίκτυο n κόμβων, m κλάδων και r βρόχων ισχύει η θεμελιώδης σχέση:

$$m = n + r - 1$$

- Η τοπολογία του δικτύου (γράφου) περιγράφεται αλγεβρικά από:
  - το $n \times m$ μητρώο πρόσπτωσης (incidence matrix), με στοιχεία {0, 1, –1} ($a_{ik} = -1$ αν ο κλάδος k ξεκινά από τον κόμβο i και $a_{ik} = 1$ αν καταλήγει στον κόμβο i)·
  - το $n \times n$ μητρώο γειτνίασης (adjacency matrix), με στοιχεία {0, 1} ($a_{ij} = 1$ αν υπάρχει κλάδος κατά τη φορά $i \rightarrow j$).

Μητρώο πρόσπτωσης του δικτύου του σχήματος

	1-2	**2-3**	**2-6**	**3-4**	**4-5**	**4-6**	**5-6**	**7-5**
1	-1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	-1	-1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	-1	-1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	-1	1
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	-1



Εξισώσεις συνέχειας κόμβων

- Με την υπόθεση ότι κατά μήκος των κλάδων δεν υπάρχουν εισροές ή εκροές νερού, σε κάθε κόμβο i ισχύει η εξίσωση συνέχειας, που προκύπτει από την αρχή διατήρησης της μάζας:

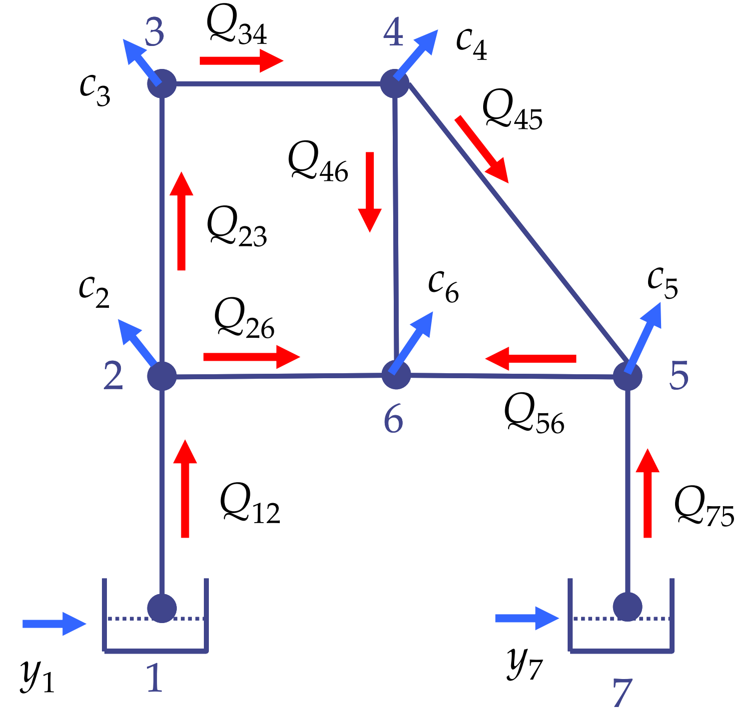
$$\sum a_{ij} Q_{ij} = y_i - c_i$$

όπου a_{ij} το στοιχείο του μητρώου πρόσπτωσης, y_i η παροχή εισόδου (άγνωστη), c_i η παροχή εξόδου και Q_{ij} η παροχή (άγνωστη) από ή προς τον κόμβο i.

- Δεδομένου ότι στο δίκτυο η συνολική προσφορά ισούται με τη συνολική ζήτηση, το άθροισμα των παροχών εισόδου ισούται με το άθροισμα των παροχών εξόδου στους κόμβους, δηλαδή:

$$\sum y_i = \sum c_i$$

- Σε ένα δίκτυο n κόμβων και n_0 δεξαμενών, διατυπώνονται $n - n_0$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις συνέχειας ως προς τις m παροχές.
- Συνεπώς, απαιτούνται $m - (n - n_0)$ επιπλέον εξισώσεις για τον ορισμό του προβλήματος.



Εξισώσεις διατήρησης ενέργειας βρόχων

- Αν στο δίκτυο υπάρχουν $n_0 > 1$ σημεία με γνωστό ενεργειακό υψόμετρο (δεξαμενές), τότε θεωρούνται $n_0 - 1$ επιπλέον ιδεατοί βρόχοι, τοποθετώντας ιδεατούς κλάδους μηδενικής παροχής που συνδέουν τις δεξαμενές ανά δύο (δεν υπολογίζονται στην αρίθμηση), οπότε ισχύει:

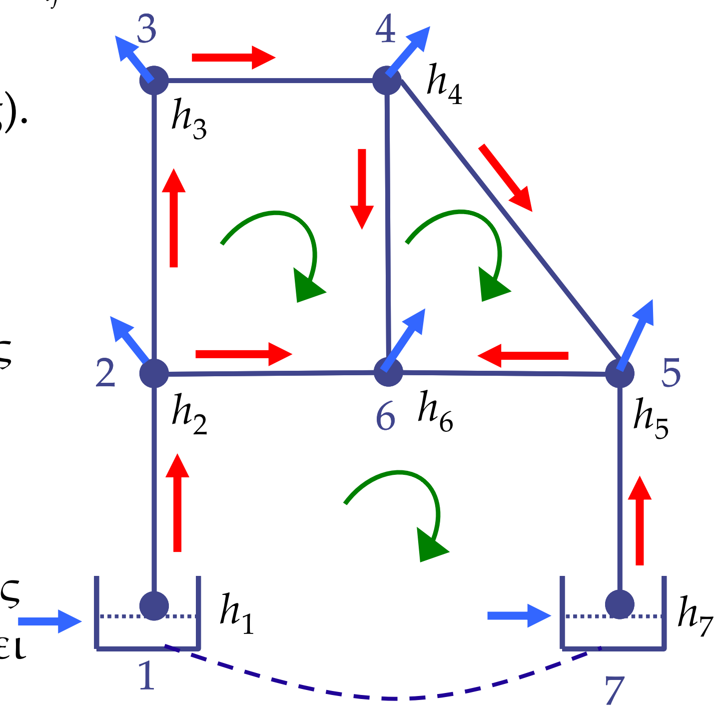
$$m = n + r - n_0$$

- Κατά μήκος κάθε βρόχου ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$\Sigma\, \kappa_{ij}\, Q_{ij}\, |Q_{ij}|^{\lambda} = \Sigma\, \Delta h_{ij}$$

όπου $\kappa_{ij} = L_{ij}\,[4^{3+\beta}\, N^2 / (\pi^2\, D_{ij}^{5+\beta})]^{1/(1+\gamma)}$ και $\lambda = (1-\gamma)/(1+\gamma)$ (γενικευμένη σχέση Manning). Το πρόσημο της Q είναι θετικό αν η φορά της συμπίπτει με τη φορά διαγραφής του βρόχου και αλλιώς αρνητικό.

- Κατά μήκος των ιδεατών βρόχων, οι απώλειες ενέργειας είναι ίσες με τη γνωστή διαφορά στάθμης μεταξύ των δεξαμενών.
- Κατά μήκος όλων των υπόλοιπων βρόχων, οι συνολικές απώλειες ενέργειας είναι μηδενικές (η πιεζομετρική γραμμή αρχίζει και καταλήγει στην ίδια στάθμη).



Τεχνικές επίλυσης του προβλήματος

- Σε ένα δίκτυο n κόμβων, n_0 δεξαμενών και r βρόχων προκύπτει ένα μικτό σύστημα από $n - n_0$ γραμμικές εξισώσεις συνέχειας και r μη γραμμικές εξισώσεις διατήρησης ενέργειας, ως προς τις $m = n + r - n_0$ παροχές.
- Οι τεχνικές επίλυσης του συστήματος είναι επαναληπτικές, καθώς ορίζουν αυθαίρετες αρχικές τιμές στις μεταβλητές του προβλήματος και επιδιώκουν την σταδιακή μείωση του σφάλματος μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση.
- Υπάρχουν δύο πορείες επίλυσης του προβλήματος:
  - Μέθοδος βρόχων: δίνονται αρχικές τιμές στις παροχές των κλάδων και διορθώνονται οι εξισώσεις διατήρησης ενέργειας στους βρόχους·
  - Μέθοδος κόμβων: δίνονται αρχικές τιμές στα ενεργειακά υψόμετρα των κόμβων και διορθώνονται οι εξισώσεις συνέχειας στους κόμβους.
- Ανάλογα με την αλγοριθμική προσέγγιση οι μέθοδοι διακρίνονται σε:
  - τεχνικές διόρθωσης του σφάλματος ανά εξίσωση (μέθοδος Cross)·
  - τεχνικές επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων (μέθοδος Newton-Raphson)·
  - τεχνικές επίλυσης γραμμικοποιημένων συστημάτων, με χαλάρωση του σφάλματος.

Μέθοδος κόμβων με γραμμικοποίηση

- Στην αρχή κάθε κύκλου, είναι γνωστή μια εκτίμηση των ενεργειακών υψομέτρων h_i στους κόμβους (αρχικά, η εκτίμηση είναι αυθαίρετη).
- Για τα δεδομένα υψόμετρα υπολογίζονται οι ενεργειακές απώλειες Δh_{ij} και, συναρτήσει αυτών, οι παροχές Q_{ij} των κλάδων.
- Υπολογίζονται το μέγιστο και καθολικό σφάλμα παροχών στους κόμβους (δεν ισχύουν οι εξισώσεις συνέχειας) και ελέγχεται αν ξεπερνούν μια τιμή ανοχής.
- Οι παροχές διατυπώνονται συναρτήσει των ενεργειακών υψομέτρων ως εξής:

$$Q_{ij} = \frac{1}{\kappa_{ij} \, | \, Q_{ij} \, |^{\lambda}} (h_i - h_j) = r_{ij} \, (h_i - h_j)$$

- Οι εξισώσεις συνέχειας των κόμβων διατυπώνονται με τη μορφή του γραμμικοποιημένου συστήματος **B h** = **c**, όπου **B** μητρώο που περιέχει τους όρους r_{ij} (= συναρτήσεις των εκτιμημένων ενεργειακών υψομέτρων), **h** διάνυσμα ενεργειακών υψομέτρων και **c** διάνυσμα γνωστών παροχών εξόδου.
- Επιλύοντας το σύστημα ως προς το διάνυσμα **h**, λαμβάνεται μια βελτιωμένη εκτίμηση των ενεργειακών υψομέτρων στους κόμβους.
- Ελέγχεται η σχετική απόκλιση μεταξύ της αρχικής και βελτιωμένης εκτίμησης των ενεργειακών υψομέτρων.
- Η μέθοδος εγγυάται ταχεία σύγκλιση, ακόμη και για μεγάλο αριθμό κόμβων.