

Επίλυση δικτύων διανομής

Δημήτρης Κουτσογιάννης & Ανδρέας Ευστρατιάδης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

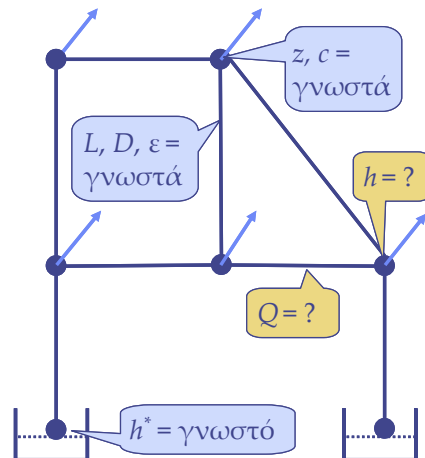
Διατύπωση του προβλήματος

Δεδομένου ενός δικτύου αγωγών με:

- γνωστά γεωμετρικά χαρακτηριστικά κλάδων (μήκος L , εσωτερική διάμετρος D , τραχύτητα ε).
- γνωστά τοπογραφικά υψόμετρα z και γνωστές παροχές εξόδου c κόμβων.
- γνωστά ενεργειακά υψόμετρα h^* των σημείων τροφοδοσίας (π.χ. δεξαμενών).

ζητείται ο υπολογισμός:

- των ενεργειακών υψομέτρων h σε όλους τους κόμβους ή, ισοδύναμα,
- των διερχόμενων παροχών Q (ή των ταχυτήτων V) σε όλους τους κλάδους.



Θεμελιώδης παραδοχή: Οι σημειακές και μη σημειακές καταναλώσεις του δικτύου ανάγονται σε παροχές εξόδου κόμβων.

Πρακτικό ζητούμενο: Ο έλεγχος των ελάχιστων πιέσεων στους κόμβους.

Περιγραφή της τοπολογίας

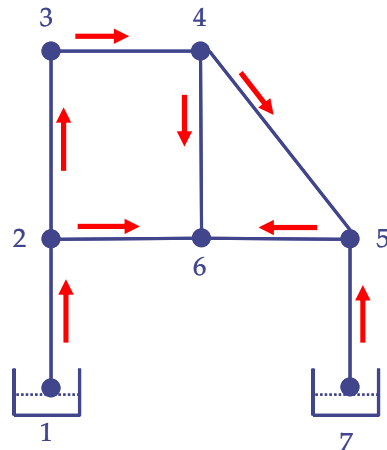
- Σε ένα δίκτυο n κόμβων, m κλάδων και r βρόχων ισχύει η θεμελιώδης σχέση:

$$m = n + r - 1$$

- Η τοπολογία του δικτύου (γράφου) περιγράφεται αλγεβρικά από:
 - το $n \times m$ μητρώο πρόσπτωσης (incidence matrix), με στοιχεία $\{0, 1, -1\}$ ($a_{ik} = -1$ αν ο κλάδος k ξεκινά από τον κόμβο i και $a_{ik} = 1$ αν καταλήγει στον κόμβο i).
 - το $n \times n$ μητρώο γειτνίασης (adjacency matrix), με στοιχεία $\{0, 1\}$ ($a_{ij} = 1$ αν υπάρχει κλάδος κατά τη φορά $i \rightarrow j$).

Μητρώο πρόσπτωσης του δικτύου του σχήματος

	1-2	2-3	2-6	3-4	4-5	4-6	5-6	7-5
1	-1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	-1	-1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	-1	-1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	-1	1
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	-1



Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αστικά Υδραυλικά Έργα – Υδρεύσεις – Επίλυση δικτύων διανομής 3

Εξισώσεις συνέχειας κόμβων

- Με την υπόθεση ότι κατά μήκος των κλάδων δεν υπάρχουν εισροές ή εκροές νερού, σε κάθε κόμβο i ισχύει η εξίσωση συνέχειας, που προκύπτει από την αρχή διατήρησης της μάζας:

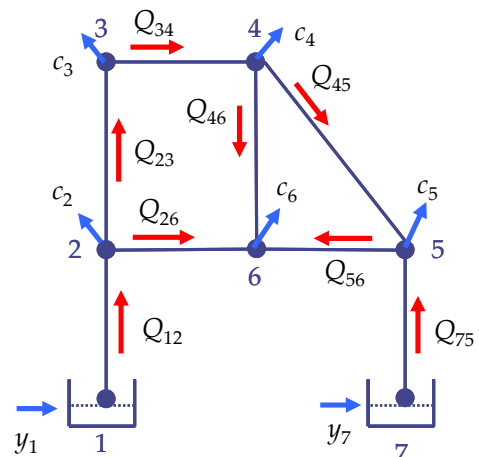
$$\sum a_{ij} Q_{ij} = y_i - c_i$$

όπου a_{ij} το στοιχείο του μητρώου πρόσπτωσης, y_i η παροχή εισόδου (άγνωστη), c_i η παροχή εξόδου και Q_{ij} η παροχή (άγνωστη) από ή προς τον κόμβο i .

- Δεδομένου ότι στο δίκτυο η συνολική προσφορά ισούται με τη συνολική ζήτηση, το άθροισμα των παροχών εισόδου ισούται με το άθροισμα των παροχών εξόδου στους κόμβους, δηλαδή:

$$\sum y_i = \sum c_i$$

- Σε ένα δίκτυο n κόμβων και n_0 δεξαμενών, διατυπώνονται $n - n_0$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις συνέχειας ως προς τις m παροχές.
- Συνεπώς, απαιτούνται $m - (n - n_0)$ επιπλέον εξισώσεις για τον ορισμό του προβλήματος.



Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αστικά Υδραυλικά Έργα – Υδρεύσεις – Επίλυση δικτύων διανομής 4

Εξισώσεις διατήρησης ενέργειας βρόχων

- Αν στο δίκτυο υπάρχουν $n_0 > 1$ σημεία με γνωστό ενεργειακό υψόμετρο (δεξαμενές), τότε θεωρούνται $n_0 - 1$ επιπλέον ιδεατοί βρόχοι, τοποθετώντας ιδεατούς κλάδους μηδενικής παροχής που συνδέουν τις δεξαμενές ανά δύο (δεν υπολογίζονται στην αρίθμηση), οπότε ισχύει:

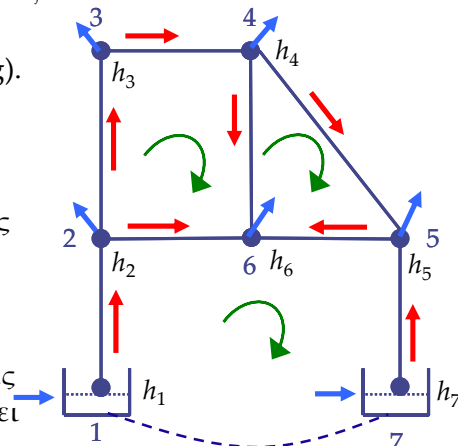
$$m = n + r - n_0$$

- Κατά μήκος κάθε βρόχου ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$\sum \kappa_{ij} Q_{ij} |Q_{ij}|^\lambda = \sum \Delta h_{ij}$$

όπου $\kappa_{ij} = L_{ij} [4^{3+\beta} N^2 / (\pi^2 D_{ij}^{5+\beta})]^{1/(1+\gamma)}$ και $\lambda = (1-\gamma)/(1+\gamma)$ (γενικευμένη σχέση Manning). Το πρόσημο της Q είναι θετικό αν η φορά της συμπίπτει με τη φορά διαγραφής του βρόχου και αλλιώς αρνητικό.

- Κατά μήκος των ιδεατών βρόχων, οι απώλειες ενέργειας είναι ίσες με τη γνωστή διαφορά στάθμης μεταξύ των δεξαμενών.
- Κατά μήκος όλων των υπόλοιπων βρόχων, οι συνολικές απώλειες ενέργειας είναι μηδενικές (η πιεζομετρική γραμμή αρχίζει και καταλήγει στην ίδια στάθμη).



Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αστικά Υδραυλικά Έργα – Υδρεύσεις – Επίλυση δικτύων διανομής 5

Τεχνικές επίλυσης του προβλήματος

- Σε ένα δίκτυο n κόμβων, n_0 δεξαμενών και r βρόχων προκύπτει ένα μικτό σύστημα από $n - n_0$ γραμμικές εξισώσεις συνέχειας και r μη γραμμικές εξισώσεις διατήρησης ενέργειας, ως προς τις $m = n + r - n_0$ παροχές.
- Οι τεχνικές επίλυσης του συστήματος είναι επαναληπτικές, καθώς ορίζουν αυθαίρετες αρχικές τιμές στις μεταβλητές του προβλήματος και επιδιώκουν την σταδιακή μείωση του σφάλματος μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση.
- Υπάρχουν δύο πορείες επίλυσης του προβλήματος:
 - Μέθοδος βρόχων: δίνονται αρχικές τιμές στις παροχές των κλάδων και διορθώνονται οι εξισώσεις διατήρησης ενέργειας στους βρόχους.
 - Μέθοδος κόμβων: δίνονται αρχικές τιμές στα ενεργειακά υψόμετρα των κόμβων και διορθώνονται οι εξισώσεις συνέχειας στους κόμβους.
- Ανάλογα με την αλγοριθμική προσέγγιση οι μέθοδοι διακρίνονται σε:
 - τεχνικές διόρθωσης του σφάλματος ανά εξίσωση (μέθοδος Cross).
 - τεχνικές επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων (μέθοδος Newton-Raphson).
 - τεχνικές επίλυσης γραμμικοποιημένων συστημάτων, με χαλάρωση του σφάλματος.

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αστικά Υδραυλικά Έργα – Υδρεύσεις – Επίλυση δικτύων διανομής 6

Μέθοδος κόμβων με γραμμικοποίηση

- Στην αρχή κάθε κύκλου, είναι γνωστή μια εκτίμηση των ενεργειακών υψομέτρων h_i στους κόμβους (αρχικά, η εκτίμηση είναι αυθαίρετη).
- Για τα δεδομένα υψόμετρα υπολογίζονται οι ενεργειακές απώλειες Δh_{ij} και συναρτήσει αυτών, οι παροχές Q_{ij} των κλάδων.
- Υπολογίζονται το μέγιστο και καθολικό σφάλμα παροχών στους κόμβους (δεν ισχύουν οι εξισώσεις συνέχειας) και ελέγχεται αν ξεπερνούν μια τιμή ανοχής.
- Οι παροχές διατυπώνονται συναρτήσει των ενεργειακών υψομέτρων ως εξής:

$$Q_{ij} = \frac{1}{k_{ij} |Q_{ij}|^\lambda} (h_i - h_j) = r_{ij} (h_i - h_j)$$

- Οι εξισώσεις συνέχειας των κόμβων διατυπώνονται με τη μορφή του γραμμικοποιημένου συστήματος $\mathbf{B} \mathbf{h} = \mathbf{c}$, όπου \mathbf{B} μητρώο που περιέχει τους όρους r_{ij} (= συναρτήσεις των εκτιμημένων ενεργειακών υψομέτρων), \mathbf{h} διάνυσμα ενεργειακών υψομέτρων και \mathbf{c} διάνυσμα γνωστών παροχών εξόδου.
- Επιλύοντας το σύστημα ως προς το διάνυσμα \mathbf{h} , λαμβάνεται μια βελτιωμένη εκτίμηση των ενεργειακών υψομέτρων στους κόμβους.
- Ελέγχεται η σχετική απόκλιση μεταξύ της αρχικής και βελτιωμένης εκτίμησης των ενεργειακών υψομέτρων.
- Η μέθοδος εγγυάται ταχεία σύγκλιση, ακόμη και για μεγάλο αριθμό κόμβων.