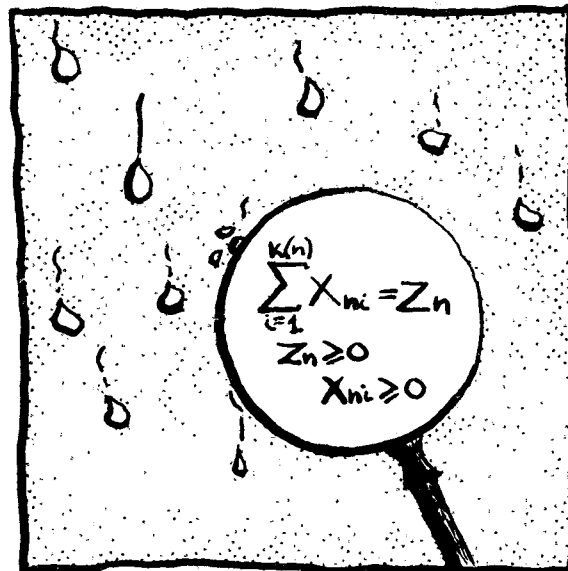


ΔΗΜΗΤΡΗ ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΗ



# ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ ΣΗΜΕΙΑΚΗΣ ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΗΣ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΓΙΑ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ-ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΕΡΓΩΝ  
ΑΘΗΝΑ 1988

## ΙΣΤΟΡΙΚΟ

Η διατριβή αυτή εκπονήθηκε στον Τομέα Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ. Η εκπόνηση της έγινε με τη διαδικασία που προβλέπεται από το ν.1268/1982 (άρθρο 36), για τις διατριβές που αποσκοπούν στην απόκτηση διδακτορικού διπλώματος.

Ουσιαστικά η εκπόνηση της διατριβής ξεκίνησε τον Μάρτιο του 1983. Με την από 13-12-1983 απόφαση της Γ.Σ. του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών ορίστηκε η προβλεπόμενη από τον παραπάνω νόμο τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. **Θ. Ξανθόπουλο** και μέλη τον επίκουρο καθηγητή κ. **Μ. Μποναζούντα** και τον λέκτορα κ. **Α. Ανδρεαδάκη**.

Κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας συντάχτηκαν 1 εισαγωγική και 3 κύριες τμηματικές εκθέσεις, ενώ τον Ιούλιο του 1986 παρουσιάστηκαν σε πρώτη μορφή τα συμπεράσματα της έρευνας. Στη συνέχεια έγιναν αρκετές διορθώσεις και βελτιώσεις των μοντέλων και η τελική εφαρμογή τους. Από τον Σεπτέμβριο 1987 μέχρι και τον Φεβρουάριο 1988 έγινε η συγγραφή της διατριβής, που παρουσιάστηκε τμηματικά σε 5 τεύχη. Στην παρούσα τελική μορφή έγιναν κάποιες (επουσιώδεις) διορθώσεις και η προσθήκη του τέταρτου κεφαλαίου.

---

*Η έγκριση διδακτορικής διατριβής δεν υποδηλώνει την αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.*

*(Άρθρο 202 ν.5343/32)*

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ τον καθηγητή **Θέμη Ξανθόπουλο** για την επιστημονική καθοδήγηση και ηθική υποστήριξη του. Επίσης τον επίκουρο καθηγητή **Μάρκο Μποναζούντα** για τη βοήθειά του αρχικά στην επιλογή του θέματος και για την μετέπειτα συνεργασία του, και τον λέκτορα **Ανδρέα Ανδρεαδάκη** για τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις του στη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής και στο τελικό κείμενο.

Ακόμα ευχαριστώ

> τον επίκουρο καθηγητή **Γιώργο Τσακίρη** για τις χρήσιμες παρατηρήσεις του στο τελικό κείμενο και την αναπληρώτρια καθηγήτρια **Μαρία Μιμίκου** για τις επίσης χρήσιμες παρατηρήσεις της στις αρχικές εκθέσεις,

> τις συναδέλφισσες **Λυδία Βαμβακερίδου** και **Διονυσία Παναγούλια** και το συνάδελφο **Ηλία Βασιλόπουλο** που επιβαρύνθηκαν αναλαμβάνοντας δικές μου διδακτικές υποχρεώσεις το τελευταίο εξάμηνο που ολοκλήρωνα την εργασία,

> τους πλωτάρχες **Σταύρο Μπούκη** και **Υπάτιο Δρόσο**, προϊσταμένους μου στη θητεία μου στο Ναυτικό, που χάρις στην κατανόησή τους μπόρεσα να συνεχίσω τη διατριβή στα δύο χρόνια της θητείας μου, και

> τον **Γιάννη Ραγκούση** και τους συνεργάτες του που επιμελήθηκαν με ιδιαίτερη φροντίδα την εκτύπωση της διατριβής.

Τέλος ευχαριστώ την γυναίκα μου **Άννα Πατρικίου** για την πνευματική συμπαράσταση της, αλλά και για τη βοήθεια της σε γραφικά θέματα, καθώς και τον **Κετζάλ** για το σκίτσο του εξωφύλλου.

Αθήνα, ΕΜΠ, Μάιος 1988

Δημήτρης Ν. Κουτσογιάννης

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## 0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

0.1.	ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	1
0.2.	ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	6
0.3	ΠΡΩΤΟΤΥΠΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	9

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ

1.1.	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	11
1.1.1.	Εισαγωγικές έννοιες - Ορισμοί	11
1.1.2.	Περιγραφή του μονοδιάστατου προβλήματος επιμερισμού	13
1.1.3.	Μορφοποίηση και χαρακτηρισμός του μοντέλου επιμερισμού	15
1.1.4.	Το πολυδιάστατο πρόβλημα επιμερισμού	16
1.1.5.	Πλεονεκτήματα των μοντέλων επιμερισμού	17
1.2.	ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ (VALECIA - SCHAAKE)	19
1.2.1.	Γενική περιγραφή και αρχική διατύπωση του	19
1.2.2.	Γενική συμπεριφορά και χρήσεις του γραμμικού μοντέλου	21
1.2.3.	Παραλλαγές του μοντέλου με αθροιστική μνήμη	22
1.2.4.	Παραλλαγές του μοντέλου για μη κανονικές κατανομές	24
1.3.	ΑΛΛΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ	28
1.3.1.	Το μοντέλο εβδομαδιαίων απορροών του Singh	28
1.3.2.	Το μοντέλο καταιγίδων Grace - Eagleson	28
1.3.3.	Το μοντέλο ημερήσιων βροχοπτώσεων Schaake κλπ.	29
1.3.4.	Το μοντέλο επιμερισμού καταιγίδων των Woolhiser και Osborn	31
1.3.5.	Το μοντέλο βροχής των Marien και Vandewiele	31



1.4.	ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ	32
1.4.1.	Η ανάγκη για την ανάπτυξη ενός νέου μοντέλου επιμερισμού	32
1.4.2.	Γενική συλλογιστική του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού	33
1.4.3.	Απαιτήσεις διατήρησης	35
1.4.4.	Γενική μεθοδολογία παραγωγής εξαρτημένων στοχαστικών μεταβλητών	37
1.5.	ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΧΑΣΜΟΥ	40
1.5.1.	Ορισμοί και συμβολισμοί	40
1.5.2.	Υπολογισμός των ροπών της αναλογικής μεταβλητής	41
1.5.3.	Υπολογισμός των δεσμευμένων ροπών της αναλογικής μεταβλητής	45
1.5.4.	Ειδικές εκφράσεις των ροπών της αναλογικής μεταβλητής	46
1.5.5.	Διερεύνηση για αναλογική μεταβλητή στοχαστικά ανεξάρτητη της αθροιστικής	50
1.5.6.	Οριακή συμπεριφορά του μοντέλου για μεταβλητές με κατανομή γάμα	53
1.5.7.	Αριθμητική διερεύνηση και έλεγχος του μοντέλου διχασμού	55
1.5.8.	Η περίπτωση τμηματικών μεταβλητών με ασυνεχή κατανομή	60
1.5.9.	Σύγκριση με το γραμμικό μοντέλο	62
1.6.	ΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΜΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΜΕ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΔΟΜΗ	65
1.6.1.	Βασικές υποθέσεις	65
1.6.2.	Αρχικές παράμετροι του μοντέλου: Περιθώριες και αμοιβαίες ροπές	66
1.6.3.	Τελικές παράμετροι του μοντέλου: Δεσμευμένες ροπές	68
1.6.4.	Αλγόριθμος υπολογισμού των παραμέτρων του μοντέλου	71
1.6.5.	Διερεύνηση και εξέταση ειδικών περιπτώσεων	75
1.6.6.	Διαδικασία εφαρμογής του μοντέλου	77
1.7.	ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΤΜΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	80
1.7.1.	Η περίπτωση ισόνομων ανεξάρτητων τμηματικών μεταβλητών	80

1.7.2.	Η περίπτωση ανεξάρτητων τμηματικών μεταβλητών με κατανομή γάμα	82
1.8.	ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	84
1.8.1.	Η περίπτωση τμηματικών μεταβλητών με αυτοσυσχέτιση ανώτερης τάξης	84
1.8.2.	Η περίπτωση κατανομών διαφορετικών από τη γάμα Η χρήση διαφορετικών μοντέλων δικασμού	85
1.8.3.	Το πολυδιάστατο δυναμικό μοντέλο επιμερισμού	88

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΡΟΧΗΣ

2.1.	ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	93
2.1.1.	Δυνατότητες και δυσκολίες ανάλυσης της βροχόπτωσης	93
2.1.2.	Το μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής με εσωτερική δομή	94
2.2.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Α ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΡΟΧΗΣ	97
2.2.1.	Η δομή της βροχόπτωσης σε ετήσια και μηνιαία κλίμακα	97
2.2.2.	Δομή και μοντέλα βροχής σε ημερήσια κλίμακα	99
2.2.3.	Δομή και μοντέλα βροχής σε ωριαία κλίμακα και σε συνεχή χρόνο	101
2.2.4.	Το επεισόδιο βροχής και οι μεταβλητές χρονικού εντοπισμού του	102
2.2.5.	Το ύψος βροχής και η εσωτερική δομή του επεισοδίου	106
2.3.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Β ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ	109
2.3.1.	Γενικές έννοιες για τις σημειακές ανελίξεις	109
2.3.2.	Μοντέλα ανέλιξης Poisson	111
2.3.3.	Μοντέλα Neyman-Scott	115
2.3.4.	Μοντέλα Cox	119

2.4.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Γ ΔΥΟ ΙΔΙΑΙΤΕΡΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΡΟΧΗΣ	121
2.4.1.	Το μοντέλο εσωτερικής δομής των Marien και Vandewiele	121
2.4.2.	Το μοντέλο επιμερισμού των Woolhiser και Osborn	124
2.5.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Δ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΡΟΧΗΣ	127
2.5.1.	Γενικά χαρακτηριστικά	127
2.5.2.	Μερικά βασικά μοντέλα της βιβλιογραφίας	128
2.6.	ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΕΠΕΙΣΟΔΙΩΝ ΒΡΟΧΗΣ	131
2.6.1.	Γενικές θεωρήσεις	131
2.6.2.	Θεωρητική βάση του κριτηρίου διαχωρισμού	135
2.6.3.	Έλεγχος της προσαρμογής της ανέλιξης Poisson	143
2.6.4.	Διερεύνηση των αποτελεσμάτων του ελέγχου Κολμογκόροφ Σμίρνοφ	146
2.6.5.	Τελική διατύπωση του κριτηρίου και σύγκριση με άλλα κριτήρια	149
2.7.	Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΤΟΥ ΕΠΕΙΣΟΔΙΟΥ ΒΡΟΧΗΣ	154
2.7.1.	Γενικά	154
2.7.2.	Παραγωγή των συναρτήσεων κατανομής	156
2.7.3.	Περιθώριες και δεσμευμένες ροπές των μεταβλητών	163
2.7.4.	Εφαρμογή - Έλεγχος του μοντέλου	169
2.8.	Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΥΨΟΥΣ ΒΡΟΧΗΣ	178
2.8.1.	Γενικά	178
2.8.2.	Δεσμευμένες ροπές	179
2.8.3.	Περιθώριες ροπές	183
2.8.4.	Αριθμητικές τιμές των παραμέτρων και ροπών	185
2.8.5.	Συναρτήσεις κατανομής	185

2.9.	Η ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΕΠΕΙΣΟΔΙΟΥ ΒΡΟΧΗΣ	189
2.9.1.	Γενικά χαρακτηριστικά της εσωτερικής δομής και δυσκολίες στην περιγραφή της	189
2.9.2.	Το μοντέλο περιγραφής του ωριαίου ύψους βροχής	193
2.9.3.	Παράμετροι και ροπές του μοντέλου περιγραφής του ωριαίου ύψους βροχής	196
2.9.4.	Έλεγχος του μοντέλου: Α. Η επίδραση της διάρκειας	202
2.9.5.	Έλεγχος του μοντέλου: Β. Η επίδραση της χρονικής θέσης	204
2.9.6.	Έλεγχος του μοντέλου: Γ. Η ομογένεια της μεταβλητής Z.	208
2.9.7.	Έλεγχος του μοντέλου: Δ. Οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης της μεταβλητής Z.	211
2.9.8.	Η κατανομή του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής	214
2.9.9.	Η πιθανότητα μηδενισμού του ωριαίου ύψους βροχής	218
2.10.	Η ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΗ ΣΕ ΜΗΝΙΑΙΑ ΒΑΣΗ	220
2.10.1.	Γενικά	220
2.10.2.	Ο μηνιαίος αριθμός επεισοδίων βροχής (N)	220
2.10.3.	Το μηνιαίο ύψος βροχής (S)	222
2.10.4.	Η μηνιαία διάρκεια βροχής (U)	227
2.10.5.	Στοχαστική εξάρτηση μηνιαίας διάρκειας και μηνιαίου ύψους βροχής	227
2.10.6.	Αριθμητικές τιμές των ροπών και παραμέτρων	230
2.11.	ΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΒΡΟΧΗΣ ΚΑΙ Η ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥΣ	234
2.11.1.	Ανακεφαλαίωση του μοντέλου βροχής και των παραμέτρων του	234
2.11.2.	Κατάταξη και γενική μεθοδολογία εκτίμησης των παραμέτρων	235
2.11.3.	Εκτίμηση της ομάδας παραμέτρων (a, b, σ <sub>φ</sub> )	236
2.11.4.	Εκτίμηση των παραμέτρων g <sub>1</sub> και σ <sub>Z</sub>	239
2.11.5.	Απλοποίηση του μοντέλου και μείωση του αριθμού των παραμέτρων	241

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ

3.1.	ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	243
3.1.1.	Εισαγωγή	243
3.1.2.	Η φάση του εξωτερικού επιμερισμού	244
3.1.3.	Η φάση του εσωτερικού επιμερισμού	247
3.1.4.	Η κωδικοποίηση του μοντέλου σε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή	247
3.2.	ΕΙΔΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	251
3.2.1.	Ο χειρισμός της πιθανότητας μηδενισμού των τμηματικών μεταβλητών. Ο χειρισμός της κατανομής Weibull.	251
3.2.2.	Περιορισμοί που ακολουθούν οι τμηματικές μεταβλητές και αντιμετώπιση τους	254
3.2.3.	Γεννήτριες τυχαίων αριθμών	256
3.2.4.	Παραγωγή των μεταβλητών αφετηρίας για τη φάση εξωτερικού επιμερισμού.	256
3.3.	ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	262
3.3.1.	Γενικά	262
3.3.2.	Σύγκριση μέσων τιμών και τυπικών αποκλίσεων	263
3.3.3.	Σύγκριση συναρτήσεων κατανομής	267
3.3.4.	Σύγκριση συντελεστών αυτοσυσχέτισης	269
3.3.5.	Σύγκριση πιθανοτήτων μηδενισμού των τμηματικών μεταβλητών	270
3.3.6.	Έλεγχος των μη επιμεριστικών διαδικασιών του μοντέλου	270

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

4.1.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	293
4.1.1.	Γενικά	293
4.1.2.	Το δυναμικό μοντέλο επιμερισμού	293

4.1.3.	Το μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής με εσωτερική δομή	294
4.1.4.	Αποτελέσματα της εφαρμογής του μοντέλου	296
4.2.	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΑΛΛΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ	298
4.2.1.	Σύγκριση του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού	298
4.2.2.	Σύγκριση του μοντέλου ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής	299
4.3.	ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ	300
4.4.	ΠΙΘΑΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	301
	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	<b>305</b>

# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

- 1.1. Επεξηγηματικό σκαρίφημα για τον ορισμό των χρονικών κλιμάκων και των τμηματικών και αθροιστικών μεταβλητών. 12
- 1.2. Σχηματική εικόνα των μεταβλητών του πολυδιάστατου δυναμικού μοντέλου επιμερισμού, όταν ακολουθεί οριζόντια πορεία. 90

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

- 2.1. Τρόπος σχηματισμού και χαρακτηριστικά των επεισοδίων βροχής. 134
- 2.2. Μεταβολή της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής του χρόνου διαδοχής,  $v$ , συναρτ. του χρόνου διαχωρισμού,  $c$ . 145
- 2.3. Μεταβολή της προσαρμογής της κατανομής του χρόνου διαδοχής και του χρόνου διακοπής προς την εκθετική κατανομή, συναρτήσει της δοκιμαστικής τιμής του χρόνου διαχωρισμού. 147
- 2.4. Τυπική μορφή συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ωριαίου ύψους βροχής. 151
- 2.5. Επίδραση του χρόνου διαχωρισμού,  $c$ , στη συνάρτηση κατανομής του ωριαίου ύψους βροχής. 151
- 2.6. Μεταβολή των συντελεστών διασποράς του χρόνου διαδοχής,  $V$ , και του χρόνου διακοπής,  $B$ , συναρτήσει του χρόνου διαχωρισμού,  $c$ . 153
- 2.7. Γενική εικόνα της δεσμευμένης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας βροχής,  $f_{X|Z}(x,z)$ . 155

2.8.	Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διαδοχής, V.	172-173
2.9.	Συνάρτηση κατανομής της διάρκειας βροχής, D.	174-175
2.10.	Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διακοπής, B.	176-177
2.11.	Μεταβολή της μέσης τιμής του ύψους επεισοδίου βροχής συναρτήσει της διάρκειας βροχής.	179
2.12.	Μεταβολή της τυπικής απόκλισης του ύψους επεισοδίου βροχής συναρτήσει της διάρκειας βροχής.	180
2.13.	Δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια.	187-188
2.14.	Δεσμευμένος συντελεστής διασποράς ωριαίου ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια βροχής.	202
2.15.	Δεσμευμένη μέση τιμή του ωριαίου ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια βροχής.	203
2.16.	Συγκριτική εικόνα της μεταβολής της μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης του μετασχηματισμένου ωριαίου ύψους βροχής (Y) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).	205
2.17.	Σύγκριση θεωρητικής και εμπειρικής μεταβολής της μέσης τιμής του μετασχηματισμένου ωριαίου ύψους βροχής (Y) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).	206-207
2.18.	Μεταβολή της εμπειρικής μέσης τιμής του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής (Z) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).	209
2.19.	Μεταβολή της εμπειρικής τυπικής απόκλισης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής (Z) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).	210



2.20.	Μεταβολή του εμπειρικού συντελεστή αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής (Z) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).	212
2.21.	Μεταβολή του συντελεστή αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής συναρτήσει της διάρκειας επεισοδίου βροχής (d).	213
2.22.	Μεταβολή του συντελεστή αυτοσυσχέτισης k-τάξης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής συναρτήσει του χρονικού βήματος (k).	215
2.23.	Συνάρτηση κατανομής του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής, Z.	216-217
2.24.	Συνάρτηση κατανομής του μηνιαίου ύψους βροχής, S.	224-225
2.25.	Συνάρτηση κατανομής της μηνιαίας διάρκειας βροχής, U.	228-229
2.26.	Συσχέτιση ύψους και διάρκειας βροχής σε μηνιαία βάση.	232-233

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1	Σχηματική εικόνα των δύο φάσεων επιμερισμού της σημειακής βροχόπτωσης.	244
3.2.	Η δομή και η πορεία υπολογισμών του προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή για τον επιμερισμό της σημειακής βροχόπτωσης.	250
3.3.	Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διαδοχής, V.	272-273
3.4.	Συνάρτηση κατανομής της διάρκειας βροχής, D.	274-275
3.5.	Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διακοπής, B.	276-277

3.6.	Μεταβολή της μέσης τιμής του ύψους επεισοδίου βροχής συναρτήσει της διάρκειας βροχής.	278
3.7.	Μεταβολή της τυπικής απόκλισης του ύψους επεισοδίου βροχής συναρτήσει της διάρκειας βροχής.	279
3.8.	Δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια.	280-281
3.9.	Δεσμευμένη μέση τιμή του ωριαίου ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια βροχής.	282
3.10.	Δεσμευμένος συντελεστής διασποράς ωριαίου ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια βροχής.	283
3.11.	Μέση τιμή και τυπική απόκλιση του μετασχηματισμένου ύψους βροχής ( $Y$ ) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).	284
3.12.	Συνάρτηση κατανομής του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής, $Z$ .	285-286
3.13.	Συντελεστής αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής συναρτήσει της διάρκειας επεισοδίου βροχής ( $d$ ).	287
3.14.	Συντελεστής αυτοσυσχέτισης $k$ -τάξης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής συναρτήσει του χρονικού βήματος ( $k$ ).	288
3.15.	Συνάρτηση κατανομής του μηνιαίου ύψους βροχής, $S$ .	289-290
3.16.	Συνάρτηση κατανομής της μηνιαίας διάρκειας βροχής, $U$ .	291-292

# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

- 1.1. Αποτελέσματα αριθμητικής εφαρμογής του μοντέλου  
δικασμού 57- 60

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

- 2.1. Σύγκριση θεωρητικών και εμπειρικών ροπών των  
χρονικών μεταβλητών του επεισοδίου βροχής 170
- 2.2. Παράμετροι και ροπές του ύψους επεισοδίου βροχής 186
- 2.3. Παράμετροι και ροπές του ωριαίου ύψους βροχής,  $X$ ,  
και των μετασχηματισμών του  $Y$  και  $Z$  198
- 2.4. Εμπειρικές συχνότητες μηδενισμού του ωριαίου ύψους  
βροχής ( $p_0$ ) και αντίστοιχες θεωρητικές πιθανότητες 219
- 2.5. Σύγκριση θεωρητικών και εμπειρικών ροπών και  
παραμέτρων μηνιαίας βροχόπτωσης 231

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

- 3.1. Χαρακτηριστικά μεγέθη των συνθετικών χρονοσειρών  
που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο του μοντέλου 262
- 3.2. Σύγκριση θεωρητικών μέσων τιμών των υδρολογικών  
μεταβλητών με τις εμπειρικές μέσες τιμές των  
συνθετικών χρονοσειρών 264
- 3.3. Σύγκριση θεωρητικών τυπικών αποκλίσεων των υδρολογικών  
μεταβλητών με τις εμπειρικές τυπικές αποκλίσεις των  
συνθετικών χρονοσειρών 265
- 3.4. Εμπειρικές συχνότητες μηδενισμού του ωριαίου ύψους  
βροχής σε σύγκριση με τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές 271

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΩΝ

(αποτελούν ιδιαίτερο τεύχος)

### ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

A.1. Βασικά υποπρογράμματα αριθμητικής ανάλυσης - πιθανοτήτων	A.1.1-A.1.3
A.2. Υποπρογράμματα στατιστικών υπολογισμών	A.2.1-A.2.5
A.3. Υποπρογράμματα παραγωγής τυχαίων αριθμών	A.3.1-A.3.2
A.4. Πρόγραμμα DisagModel	A.4.1-A.4.28
A.5. Πρόγραμμα AnalData	A.5.1-A.5.29
A.6. Πρόγραμμα EventSepar	A.6.1-A.6.11

### ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β : ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΕΩΝ

B.1. Αρχείο ιστορικών βροχοπτώσεων 1 (Χάλαρα-Απρίλιος)	B.1.1-B.1.4
B.2. Αρχείο ιστορικών βροχοπτώσεων 2 (Χάλαρα-Μάιος)	B.2.1-B.1.4
B.3. Αρχείο ιστορικών βροχοπτώσεων 3 (Τρίβουνο-Απρίλιος)	B.3.1-B.3.4
B.4. Αρχείο ιστορικών βροχοπτώσεων 4 (Τρίβουνο-Μάιος)	B.4.1-B.4.3
B.5. Αρχείο συνθετικών βροχοπτώσεων 1 (Χάλαρα-Απρίλιος)	B.5.1-B.5.15
B.6. Αρχείο συνθετικών βροχοπτώσεων 2 (Χάλαρα-Μάιος)	B.6.1-B.6.14
B.7. Αρχείο συνθετικών βροχοπτώσεων 3 (Τρίβουνο-Απρίλιος)	B.7.1-B.7.17
B.8. Αρχείο συνθετικών βροχοπτώσεων 4 (Τρίβουνο-Μάιος)	B.8.1-B.8.15

### ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ : ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΕΩΝ

Γ.1. Επεξεργασία ιστορικών δεδομένων 1 (Χάλαρα-Απρίλιος)	Γ.1.1-Γ.1.47
Γ.2. Επεξεργασία ιστορικών δεδομένων 2 (Χάλαρα-Μάιος)	Γ.2.1-Γ.1.44
Γ.3. Επεξεργασία ιστορικών δεδομένων 3 (Τρίβουνο-Απρίλιος)	Γ.3.1-Γ.3.44
Γ.4. Επεξεργασία ιστορικών δεδομένων 4 (Τρίβουνο-Μάιος)	Γ.4.1-Γ.4.44
Γ.5. Επεξεργασία συνθετικών δεδομένων 1 (Χάλαρα-Απρίλιος)	Γ.5.1-Γ.5.25
Γ.6. Επεξεργασία συνθετικών δεδομένων 2 (Χάλαρα-Μάιος)	Γ.6.1-Γ.6.24
Γ.7. Επεξεργασία συνθετικών δεδομένων 3 (Τρίβουνο-Απρίλιος)	Γ.7.1-Γ.7.25
Γ.8. Επεξεργασία συνθετικών δεδομένων 4 (Τρίβουνο-Μάιος)	Γ.8.1-Γ.8.24

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ : ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΥΠΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Δ.1. Ομοιόμορφη κατανομή	Δ.1.1
Δ.2. Τριγωνική κατανομή	Δ.2.1
Δ.3. Εκθετική κατανομή	Δ.3.1
Δ.4. Φραγμένη εκθετική κατανομή	Δ.4.1
Δ.5. Κατανομή γάμα (2 παραμέτρων)	Δ.5.1-Δ.5.3
Δ.6. Κατανομή βήτα	Δ.6.1-Δ.6.2
Δ.7. Κατανομή Weibull (2 παραμέτρων)	Δ.7.1-Δ.7.2
Δ.8. Κανονική κατανομή	Δ.8.1-Δ.8.2
Δ.9. Κατανομή Poisson	Δ.9.1





# Ο . ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 0.1. ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Σχεδόν όλες οι υδρολογικές μεταβλητές εμφανίζουν ένα έντονα τυχαίο χαρακτήρα, και γι' αυτό η Υδρολογία βασίζεται στη θεωρία των πιθανοτήτων. Όταν στην εξέταση ενός υδρολογικού φαινομένου ενδιαφέρει η χρονική εξέλιξη του, τότε οι μεταβλητές που συνδέονται μ' αυτό περιγράφονται μαθηματικά από **τυχαίες συναρτήσεις** του χρόνου. Μια τυχαία συνάρτηση είναι μια απειροπληθής οικογένεια τυχαίων μεταβλητών, και έχει καθιερωθεί να αποκαλείται **στοχαστική ανέλιξη** (stochastic process).<sup>1</sup> Ο χρόνος, που είναι το όρισμα της τυχαίας συνάρτησης, αποτελεί το **δεικτοσύνολο** της στοχαστικής ανέλιξης. Σε ορισμένα φαινόμενα που εξελίσσονται στο χώρο και το χρόνο, το δεικτοσύνολο των αντίστοιχων ανελιξεων είναι πολυδιάστατο, και περιλαμβάνει, εκτός από τη χρονική διάσταση, και τις απαραίτητες χωρικές διαστάσεις.

Η συναγωγή συμπερασμάτων για μια στοχαστική ανέλιξη, η οποία αντιπροσωπεύει κάποιο μέγεθος που χαρακτηρίζει ένα υδρολογικό φαινόμενο, βασίζεται συνήθως σε ένα σύνολο παρατηρήσεων του, δηλαδή μια σειρά από μετρήσεις του μεγέθους, που έχουν πραγματοποιηθεί σε καθορισμένες χρονικές στιγμές. Η σειρά αυτή των μετρήσεων λέγεται **χρονοσειρά ή δειγματοσυνάρτηση**.

Η μελέτη ενός υδρολογικού φαινομένου, ή ενός συστήματος που επηρεάζεται από ένα τέτοιο φαινόμενο, προϋποθέτει τη μελέτη της μαθηματικής δομής των στοχαστικών ανελιξεων που συνδέονται μ' αυτό. Όταν είναι πλήρως γνωστή η μαθηματική δομή των ανελιξεων, τότε θεωρητικά είναι δυνατό να συνάγουμε συμπεράσματα για όποια ιδιότητα ή παράμετρο του φαινομένου ή του συστήματος μας ενδιαφέρει. Στην πράξη αυτό δεν είναι τόσο εύκολο, γιατί συνήθως οι μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο ή το σύστημα, είναι αρκετά πολύπλοκες για να λυθούν με αναλυτικό τρόπο. Μια απλή μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων που χαρακτηρίζονται από πολύπλοκες εξισώσεις είναι η **προσομοίωση** (simulation), που δεν είναι τίποτε άλλο από μια τεχνική παραγωγής συνθετικών πειραμάτων: Αφού είναι πλήρως γνωστή η δομή των ανελιξεων, είναι δυνατό να

-----  
1. Για την απόδοση του όρου "stochastic process" στα ελληνικά έχουν χρησιμοποιηθεί ισοδύναμα οι όροι "στοχαστική ανέλιξη" και "στοχαστική διαδικασία". Εδώ χρησιμοποιείται ο πρώτος όρος που έχει υιοθετηθεί από τον καθηγητή Θ. Κάκουλλο [1978] στο βιβλίο του "Στοχαστικές Ανελιξεις". (Από το βιβλίο αυτό έχουν αντληθεί και χρησιμοποιούνται σε αυτή τη διατριβή και άλλοι επιστημονικοί όροι σχετικοί με τις στοχαστικές ανελιξεις.) Η λέξη ανέλιξη προέρχεται από το ρήμα ανελίσσω (= ξετυλίγω, εξελίσσομαι). Τέλος ο όρος "στοχαστικός" (stochastic), με την έννοια του τυχαίου, είναι ελληνικής προέλευσης (αν και έχει εισαχθεί από τον ελβετό μαθηματικό Giacomo Bernoulli πριν 300 χρόνια) αφού προέρχεται από το ελληνικό ρήμα "στοχάζομαι" με την έννοια του "εικάζω" (η αρχική έννοια του "στοχάζομαι" είναι "σημαδεύω στο στόχο" κατόπιν έγινε "εικάζω", "νομίζω" και τέλος "συλλογίζομαι").



παραχθούν συνθετικές δειγματοσυναρτήσεις τους (ή συνθετικές χρονοσειρές), με την κατάλληλη μαθηματική τεχνική, και στη συνέχεια μπορεί να εξεταστεί πώς μεταβάλλεται η παράμετρος του συστήματος ή του φαινομένου που μας ενδιαφέρει.

Ας αναφερθούμε σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, από το χώρο της τεχνικής υδρολογίας. Ας υποθέσουμε ότι μας απασχολεί η εκτίμηση του νεκρού όγκου ενός ταμιευτήρα που θα κατασκευαστεί σε μια θέση ενός υδατορεύματος. Η εκτίμηση αυτή θα βασιστεί στην αναμενόμενη τιμή του όγκου των φερτών που θα έχουν παγιδευτεί στον ταμιευτήρα μετά από κάποια καθορισμένη χρονική περίοδο. Η αναμενόμενη τιμή αυτή είναι η παράμετρος που μας απασχολεί. Το υδρολογικό φαινόμενο που ενδιαφέρει εδώ είναι η στερεοπαροχή. Η εξέλιξη της στερεοπαροχής έχει στοχαστικό χαρακτήρα, αλλά εδώ θα υποθέσουμε ότι δεν είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τη δομή της αντίστοιχης στοχαστικής ανελίξης (πκ. λόγω έλλειψης μετρήσεων), και γι' αυτό είμαστε υποχρεωμένοι να καταφύγουμε στη μελέτη των γενεσιουργών αιτιών της, δηλαδή της βροχόπτωσης και της απορροής. Τα φαινόμενα αυτά μαθηματικά αντιπροσωπεύονται από αντίστοιχες στοχαστικές ανελίξεις, που μάλιστα εξαρτώνται έντονα μεταξύ τους. Ας υποθέσουμε ότι μετά από μελέτη των δύο παράλληλων χρονοσειρών έχουμε προσδιορίσει πλήρως τη μαθηματική δομή τους. Το ερώτημα είναι με ποιο τρόπο μπορούμε να παράγουμε την τιμή της παραμέτρου που μας απασχολεί, δηλαδή τον όγκο φερτών. Είναι γνωστό ότι η χρονική περιγραφή του φαινομένου της στερεοπαροχής, σαν συνέπεια της βροχής και απορροής, δεν μπορεί να γίνει σε ετήσια κλίμακα, επειδή το μεγαλύτερο ποσοστό των φερτών μεταφέρεται κατά τη διάρκεια των καταιγίδων και πλημμυρών. Συνέπεια αυτού είναι η μεγάλη πολυπλοκότητα των εξισώσεων που συνδέουν τη στερεοπαροχή με τα δύο γενεσιουργά φαινόμενα. Ακόμα πρέπει να προστεθεί και η πολυπλοκότητα των εξισώσεων που περιγράφουν την παγίδευση των φερτών στον ταμιευτήρα, στις οποίες υπεισέρχεται και η διακύμανση της στάθμης του, που πάλι έχει στοχαστικό χαρακτήρα. Με όλη αυτή την πολυπλοκότητα, γίνεται αδύνατο να παράγουμε με αναλυτικό τρόπο, λύνοντας δηλαδή τις εξισώσεις άμεσα, την τιμή του νεκρού όγκου. Έτσι την (μοναδική ίσως) ορθολογιστική απάντηση στο πρόβλημα δίνει η προσομοίωση.<sup>2</sup> Ξέροντας τη δομή των στοχαστικών ανελίξεων βροχής-απορροής, και τις μεταξύ τους σχέσεις, είναι δυνατό να παράγουμε συνθετικές (υπολογιστικές) χρονοσειρές βροχής-απορροής για οσοδήποτε μεγάλη περίοδο θέλουμε. Στη συνέχεια με βάση και τις εξισώσεις που συνδέουν τη στερεοπαροχή με τις γενεσιουργές της διεργασίες, μπορούμε να παράγουμε μια αντίστοιχη χρονοσειρά στερεοπαροχής. Επίσης σχετικά εύκολα μπορούμε να παράγουμε την χρονοσειρά διακύμανσης της στάθμης στον ταμιευτήρα, προσομοιώνοντας τη λειτουργία του ταμιευτήρα. Με τις

2. Βεβαίως υπάρχουν και οι εμπειρικές προσεγγιστικές μέθοδοι, που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά.

τελευταίες δύο χρονοσειρές και χρησιμοποιώντας και τις εξισώσεις που περιγράφουν την παγίδευση φερτών, μπορούμε να έχουμε μια συνθετική εικόνα της εξέλιξης της παγίδευσης των φερτών στο χρόνο, και τελικά να βρούμε την αναμενόμενη τιμή του όγκου φερτών στο χρονικό μήκος που μας ενδιαφέρει. Αν για παράδειγμα αυτό το χρονικό μήκος είναι 50 χρόνια, και θέλουμε να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή του όγκου αποθήκευσης ως μέση τιμή 10 πιθανών τιμών, θα πρέπει να ξεκινήσουμε παράγοντας 10 συνθετικά σενάρια βροχής-απορροής διάρκειας 50 ετών το καθένα, δηλαδή θα χρειαστούν χρονοσειρές συνολικού μήκους 500 ετών. Από το παράδειγμα φαίνεται ότι οι υπολογισμοί που απαιτεί η μέθοδος της προσομοίωσης είναι μακροσκελέστατοι, αλλά συνίστανται σε πολλαπλές επαναλήψεις του ίδιου αλγορίθμου.

Μετά τα παραπάνω η προσομοίωση μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια αριθμητική μέθοδος επίλυσης πολύπλοκων εξισώσεων που συνδέουν στοχαστικές ανελίξεις. Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι οι συνθετικές χρονοσειρές που παράγονται δεν προσθέτουν καμία ουσιαστική πληροφορία για τη δομή και τις παραμέτρους των ανελίξεων που διέπουν τὸ φαινόμενο, δηλαδή δεν αυξάνουν την ουσιαστική πληροφορία για το φαινόμενο, η οποία προέρχεται μόνο από τις μετρήσεις, τις ιστορικές δηλαδή χρονοσειρές. Μας επιτρέπει όμως να μελετήσουμε συστηματικά παραμέτρους που δεν μπορούν άμεσα να εξαχθούν από τις μετρήσεις, ή και να μελετήσουμε συστήματα που δεν έχουν υπάρξει στην πραγματικότητα (και δεν ήταν δυνατό να παρατηρηθούν).

Η εργασία αυτή έχει σκοπό την ανάπτυξη μιας τεχνικής προσομοίωσης ενός συγκεκριμένου υδρολογικού φαινομένου, της βροχόπτωσης, που οι ανελίξεις που το περιγράφουν έχουν αρκετές ιδιαιτερότητες. Η βροχόπτωση δεν εξετάζεται εδώ σε συνδυασμό με άλλα υδρολογικά φαινόμενα, ούτε και αναπτύσσονται εφαρμογές της τεχνικής αυτής, που να εξυπηρετούν κάποιο συγκεκριμένο σκοπό. Από αυτή την άποψη η εργασία είναι θεωρητική. Η βασική ανάλυση που περιγράφει το φαινόμενο της βροχής είναι η ανάλυση του ύψους βροχής, χρησιμοποιείται όμως και η ανάλυση εντασης βροχής, που είναι η παράγωγος της πρώτης ως προς το χρόνο. Αυτές οι ανελίξεις έχουν επιφανειακό χαρακτήρα, αφού η βροχή είναι ένα φαινόμενο που συμβαίνει σε επιφανειακή βάση. Με όρους της θεωρίας των στοχαστικών ανελίξεων, αυτό σημαίνει ότι οι εν λόγω ανελίξεις έχουν ως δεικτοσύνολο όχι μόνο τον χρόνο, αλλά ένα τριδιάστατο σύνολο, με δύο διαστάσεις χώρου και μια χρόνου. Αν όμως εντοπίσουμε το ενδιαφέρον μας σε ένα σημείο του χώρου, τότε απλοποιούμε το πρόβλημα, και οδηγούμαστε σε μια ανάλυση με μονοδιάστατο δεικτοσύνολο, τον χρόνο. Σ' αυτή την περίπτωση, που εξετάζεται και στην εργασία αυτή, μιλάμε για **σημειακή βροχόπτωση** (χωρίς ο όρος να υποδηλώνει ότι το φαινόμενο της βροχής είναι σημειακό).

Μια ιδιαίτερη περίπτωση των τεχνικών προσομοίωσης αποτελούν τα **μοντέλα<sup>3</sup> επιμερισμού<sup>4</sup>**. Σε αντίθεση με τις κλασικές σειριακές τεχνικές, που παράγουν τιμές μιας συνθετικής δειγματοσυνάρτησης τη μια μετά την άλλη, τα μοντέλα επιμερισμού πυκνώνουν τα γνωστά σημεία μιας δειγματοσυνάρτησης, παράγοντας ένα σύνολο από ενδιάμεσα σημεία. Το πιο ολοκληρωμένο και συστηματικό μοντέλο επιμερισμού που έχει καταρτιστεί είναι το μοντέλο των *Valencia και Schaake* [1972] στο οποίο έχουν γίνει αρκετές τροποποιήσεις και βελτιώσεις από άλλους ερευνητές. Αυτό το μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα προσομοίωσης της απορροής για την πύκνωση κρονοσειρών από την ετήσια κλίμακα φθάνοντας μέχρι την ημερήσια. Έχει επίσης χρησιμοποιηθεί και σε προβλήματα προσομοίωσης της βροχής, αλλά η πύκνωση εδώ φτάνει μέχρι τη μηνιαία κλίμακα. Ο λόγος είναι ότι το εν λόγω μοντέλο μπορεί να αντιπροσωπεύει ανεπίξεις με περίπου κανονικές συναρτήσεις κατανομής, ενώ η βροχόπτωση σε μικρή χρονική κλίμακα εμφανίζει έντονα ασύμμετρες κατανομές.

Αυτό το κενό προσπαθεί να καλύψει αυτή η εργασία, διατυπώνοντας και αναπτύσσοντας ένα διαφορετικό και σε δομή και σε λειτουργία **μοντέλο επιμερισμού σημειακής βροχόπτωσης**, που να μπορεί να προχωρήσει την πύκνωση των κρονοσειρών τουλάχιστον μέχρι την ωριαία κλίμακα. Αν και έχει αναπτυχθεί με στόχο την περιγραφή της βροχόπτωσης, έχει μια πιο γενική θεωρητική δομή, έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε άλλη ανέλιξη, με συνάρτηση κατανομής που να προσεγγίζει την κατανομή γάμα. Υπό ορισμένους όρους το μοντέλο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για ανεπίξεις Gauss, αυτό όμως δεν έχει επιβεβαιωθεί στην πράξη. Το μοντέλο αυτό, για διάκριση από άλλα μοντέλα της βιβλιογραφίας, χαρακτηρίζεται με τον όρο **δυναμικό<sup>5</sup>**, επειδή οι παράμετροι του δεν έχουν προκαθορισμένες τιμές, αλλά μεταβάλλονται συνεχώς σε κάθε βήμα, σε συνάρτηση με τις "εξόδους" (δηλαδή τα αποτελέσματα) των προηγούμενων βημάτων.

Πρακτικά η λειτουργία του μοντέλου μπορεί να συνοψιστεί στα ακόλουθα: Ξεκινά με ορισμένες γνωστές τιμές αφετηρίας, που στην εφαρμογή είναι τα μηνιαία ύψη βροχής. (Θα μπορούσε όμως, χωρίς κανένα περιορισμό να είναι και τα ετήσια ύψη.) Καταλήγει στην παραγωγή συνθετικών κρονοσειρών ωριαίας βροχόπτωσης, σε τρόπο ώστε (α) το μηνιαίο άθροισμα τους να είναι ίσο με την

3. Η λέξη "μοντέλο" έχει πια ενσωματωθεί στην ελληνική γλώσσα, αποκτώντας το νεοελληνικό τυπικό των ουσιαστικών. Ο Θ. Καρζής στο βιβλίο του "Τα σωστά ελληνικά" την κατατάσσει στις ξενικές λέξεις της νεότερης γλωσσικής εισβολής, οι οποίες έχουν οριστικά ενσωματωθεί στο νεοελληνικό λεξιλόγιο. Παλιότερα είχαν χρησιμοποιηθεί στη θέση της οι λέξεις "πρότυπο", "υπόδειγμα" και "ομοίωμα", χωρίς όμως να επικρατήσει καμιά.

4. Ο όρος "μοντέλο επιμερισμού" αποτελεί απόδοση του αγγλικού όρου "disaggregation model"

5. Ο όρος εδώ δεν έχει την έννοια της δύναμης αλλά της συνεχούς μεταβολής.

αντίστοιχη τιμή αφετηρίας (έτσι αιτιολογείται η χρήση του όρου "επιμερισμός"), και (β) η στοχαστική δομή των παραγόμενων χρονοσειρών να είναι ίδια με την αντίστοιχη δομή της πραγματικής βροχόπτωσης, όπως έχει προκύψει από την ανάλυση των ιστορικών δεδομένων. Είναι προφανές ότι με πολλαπλή εφαρμογή του μοντέλου, για ένα συγκεκριμένο μήνα με γνωστό (από παρατήρηση ή σαν αποτέλεσμα άλλου ή και του ίδιου μοντέλου προσομοίωσης) μηνιαίο ύψος βροχής, είναι δυνατό να πάρουμε οσαδήποτε ισοπίθανα σενάρια ωριαίας βροχής επιθυμούμε. Η πύκνωση από τη μηνιαία κλίμακα στην ωριαία, γίνεται σε δύο φάσεις, στις οποίες χρησιμοποιείται ακριβώς το ίδιο μοντέλο. Στην πρώτη φάση επιμερίζεται η μηνιαία βροχόπτωση σε μεμονωμένα επεισόδια βροχής, που η χρονική τους τοποθέτηση ελέγχεται πάλι από το ίδιο μοντέλο επιμερισμού. Στη δεύτερη φάση επιμερίζεται το ύψος κάθε μεμονωμένου επεισοδίου σε ωριαία ύψη βροχής. Ας σημειωθεί ότι αν η χρονική κλίμακα πέρατος ήταν η ημερήσια, αντί της ωριαίας, ο επιμερισμός θα μπορούσε να γίνει σε μια μόνο φάση. Ακόμα αν η χρονική κλίμακα αφετηρίας ήταν η ετήσια, θα χρειαζόταν μια ακόμα φάση, για τον επιμερισμό του ετήσιου σε μηνιαία ύψη βροχής.

## 0.2. ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η εργασία αποτελείται από τρία κύρια μέρη, που αναπτύσσονται στα αντίστοιχα τρία κεφάλαια.

Στο **πρώτο μέρος**, που αποτελεί τον πυρήνα της εργασίας, αναπτύσσεται το γενικό **δυναμικό μοντέλο επιμερισμού**. Στην αρχή τοποθετείται το πρόβλημα του επιμερισμού στη γενικότητα του, και εισάγονται οι βασικές αρχές και η λογική δομή του δυναμικού μοντέλου. Στη συνέχεια αναπτύσσεται η μαθηματική δομή του δυναμικού μοντέλου, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην εφαρμογή του πάνω σε διακριτές ανελιξείς Μάρκοφ. Επίσης εξετάζονται θεωρητικά ορισμένες οριακές ιδιότητες του και η ασυμπτωτική του συμπεριφορά. Τέλος αναπτύσσονται οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι και γίνεται ένας υπολογιστικός έλεγχος του μοντέλου.

Το **δεύτερο μέρος** περιλαμβάνει την ανάλυση της δομής της βροκόπτωσης, από τη μηνιαία μέχρι και την ωριαία κλίμακα, και τη σύνθεση ενός μοντέλου συνολικής περιγραφής της. Αυτό το δεύτερο μοντέλο της εργασίας βασίστηκε σε βροχογραφικά δεδομένα της λεκάνης του Αλιάκμονα, και είναι απόλυτα συμβιβαστό με το δυναμικό μοντέλο επιμερισμού. Για διάκριση από άλλα μοντέλα της βιβλιογραφίας, χαρακτηρίζεται με τον όρο **"μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής με εσωτερική δομή"**. Ο όρος αιτιολογείται από το γεγονός ότι χρησιμοποιεί, σαν βασική κλίμακα περιγραφής της βροχής, την κλίμακα του επεισοδίου βροχής, ενώ παράλληλα στο κάθε επεισόδιο αντιστοιχεί μια εσωτερική στοχαστική δομή, που περιέχει την πληροφορία για τη μετάβαση σε μικρότερη χρονική κλίμακα (ωριαία). Ο χαρακτηρισμός "ανεξάρτητων" μπαίνει για να υποδηλώσει το γεγονός ότι το επεισόδιο ορίζεται σε τρόπο ώστε να είναι τελείως ανεξάρτητο από όλα τα προηγούμενα και επόμενα του. Αυτό κάνει αρκετά εύκολη την μετάβαση σε αραιότερες χρονικές κλίμακες (μηνιαία) ή σε πυκνότερες (ωριαία). Τα θέματα που αναπτύσσονται στο κεφάλαιο αυτό είναι σε συντομία: (α) ο ορισμός και το κριτήριο εντοπισμού του επεισοδίου βροχής, (β) η μελέτη της βασικής ανέλιξης πραγματοποίησης (εμφάνισης) της βροχής, η οποία αφορά τον χρονικό εντοπισμό των επεισοδίων, (γ) η μελέτη της συνάρτησης κατανομής του ύψους επεισοδίου βροχής, και της στοχαστικής εξάρτησης με τη διάρκεια βροχής, (δ) η ανάλυση της εσωτερικής στοχαστικής δομής του επεισοδίου, (ε) η παράγωγή της συνάρτησης κατανομής του μηνιαίου ύψους και της μηνιαίας διάρκειας βροχής, και (στ) η μελέτη των παραμέτρων του μοντέλου και η ανάπτυξη αλγορίθμου για τον υπολογισμό τους.

Το μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής είναι εποχιακό, με την έννοια ότι οι παράμετροι του παίρνουν σταθερές τιμές κατά τη διάρκεια μιας εποχής, αλλά μεταβάλλονται από εποχή σε εποχή. Σαν "εποχή" θεωρήθηκε στην εργασία αυτή ένας ημερολογιακός μήνας, πιθανότατα όμως μπορεί να γίνει μείωση του αριθμού

των εποχών, με ομαδοποίηση των κλιματικά ομογενών μηνών. Έγινε προσπάθεια πάντως να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των παραμέτρων σε κάθε μήνα. Έτσι τελικά για την πλήρη περιγραφή της βροχής από την ωριαία μέχρι τη μηνιαία κλίμακα, για κάθε εποχή (μήνα) απαιτούνται το πολύ 12 ανεξάρτητες παράμετροι, που σχεδόν στο σύνολο τους έχουν φυσικό ή στατιστικό νόημα (πχ. μέσες τιμές διαρκειών και υψών βροχής). Με σχετική μείωση της ακρίβειας του μοντέλου οι παράμετροι μπορούν να μειωθούν σε 4 (το λιγότερο). Οι αριθμοί αυτοί είναι αρκετά μικροί, συγκρινόμενοι με τον αριθμό των παραμέτρων σε άλλα μοντέλα της βιβλιογραφίας.

Το **τρίτο μέρος** της εργασίας αποτελεί τη σύνθεση των δύο προηγούμενων και περιλαμβάνει το πλήρες **μοντέλο επιμερισμού της σημειακής βροχόπτωσης**. Σ' αυτό συγκεκριμενοποιείται η τεχνική και οι φάσεις του επιμερισμού της βροχής, και καταρτίζονται οι σχετικοί αλγόριθμοι και το πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή, για την εφαρμογή του μοντέλου. Ακόμα εδώ επιλύονται ορισμένα θέματα που αφορούν γεννήτριες τυχαίων αριθμών για μη τυποποιημένες συναρτήσεις κατανομής που εμφανίζονται στην φάση του επιμερισμού της βροχής. Ένα μεγάλο τμήμα του τρίτου κεφαλαίου αφιερώνεται στην παρουσίαση και τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του μοντέλου.

Ένα τέταρτο (και τελευταίο) κεφάλαιο της εργασίας αφιερώνεται στη συναγωγή συμπερασμάτων, την κωδικοποίηση των σημείων που χρειάζονται περαιτέρω έρευνα, καθώς και την εξέταση των πιθανών εφαρμογών που θα μπορούσαν να έχουν τα μοντέλα της εργασίας.

Μια αρκετά εκτεταμένη επισκόπηση των μοντέλων επιμερισμού της βιβλιογραφίας υπάρχει στην αρχή του πρώτου κεφαλαίου. Αντίστοιχα, την αρχή του δεύτερου κεφαλαίου της εργασίας γίνεται μια επισκόπηση των εργασιών που αναφέρονται στη δομή της βροχόπτωσης και των πιο σύγχρονων μοντέλων βροχής της βιβλιογραφίας.

Η εργασία συνοδεύεται από τέσσερα παραρτήματα που αποτελούν ξεχωριστό τόμο. Το **παράρτημα Α'** περιέχει τα δύο κύρια προγράμματα της εργασίας, ήτοι το πρόγραμμα `DisagModel`, που είναι η κωδικοποιημένη μορφή του μοντέλου επιμερισμού, και το πρόγραμμα `AnaIData`, κατάλληλο για τη στατιστική ανάλυση και επεξεργασία των δεδομένων (ιστορικών και συνθετικών) που χρησιμοποιήθηκε για τη διατύπωση, τον υπολογισμό των παραμέτρων, και τον έλεγχο του μοντέλου ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής, καθώς και για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του μοντέλου επιμερισμού σημειακής βροχόπτωσης. Στο ίδιο παράρτημα δίνεται το (δευτερεύον) πρόγραμμα `EventSepar` που χρησιμοποιήθηκε για τον εντοπισμό των επεισοδίων βροχής στα ιστορικά δείγματα και την ανάπτυξη του σχετικού κριτηρίου, και τέλος δίνονται ξεχωριστά μερικά βασικά υποπρογράμματα (διαδικασίες και συναρτήσεις) που είναι κωδικοποιημένες λύσεις ορισμένων προβλημάτων

αριθμητικής ανάλυσης, πιθανοτήτων, στατιστικής και παραγωγής τυχαίων αριθμών, που αντιμετωπίστηκαν στην εργασία αυτή.

Όλα τα προγράμματα υπολογιστή που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία είναι γραμμένα σε γλώσσα Pascal και αναπτύχθηκαν (από το μηδέν) και έτρεξαν σε μικροϋπολογιστή Sinclair QL (512 KB). Αυτό εγγυάται την δυνατότητα των μοντέλων να τρέξουν σε οποιοδήποτε μικροϋπολογιστή, χωρίς ειδικές απαιτήσεις μνήμης, ταχύτητας κλπ.

Στο **παράρτημα Β'** δίνονται, για λόγους πληρότητας, οι ιστορικές χρονοσειρές βροχής που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη του μοντέλου ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής, καθώς και οι συνθετικές χρονοσειρές που παρήγαγε το δυναμικό μοντέλο επιμερισμού, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο του. Στο **παράρτημα Γ'** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επεξεργασίας των δεδομένων του παραρτήματος Β', ιστορικών και συνθετικών, με βάση τα οποία καταρτίστηκαν οι πίνακες και τα διαγράμματα της εργασίας. Τέλος το **παράρτημα Δ'** περιέχει μια μικρή επιλογή θεμάτων από τη θεωρία πιθανοτήτων, χρήσιμων στην πορεία της εργασίας, ώστε να μπορεί κανείς να προσφύγει εκεί, χωρίς να χρειάζεται να ανατρέξει στη βιβλιογραφία.

### 0.3. ΠΡΩΤΟΤΥΠΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Σε πολλά από τα θέματα, που ερευνηθήκαν στην εργασία αυτή, έχουν γίνει πρωτότυπες αναλύσεις, οι κυριότερες από τις οποίες κωδικοποιούνται παρακάτω.

1. Το γενικό πρόβλημα επιμερισμού τοποθετείται σε νέα θεωρητική βάση και εισάγονται και ορισμένοι όροι που χαρακτηρίζουν και ταξινομούν τα μοντέλα επιμερισμού.
2. Το *δυναμικό μοντέλο επιμερισμού* είναι πρωτότυπο, σχεδόν στο σύνολο του. Σημειώνεται πάντως ότι τα τελευταία δύο χρόνια έχουν παρουσιαστεί στη διεθνή βιβλιογραφία δύο ειδικά μοντέλα βροχής (παρουσιάζονται αναλυτικά στη βιβλιογραφική ανασκόπηση των μοντέλων βροχής), που παρουσιάζουν κάποιες ομοιότητες στην τεχνική επιμερισμού με το μοντέλο της εργασίας αυτής<sup>6</sup>, χωρίς όμως να έχουν ούτε τη λογική δομή, ούτε τα δυναμικά χαρακτηριστικά, ούτε τη γενικότητα του τελευταίου.
3. Το κριτήριο διαχωρισμού των επεισοδίων βροχής σε ένα ιστορικό δείγμα είναι πρωτότυπο, όχι όμως και ο ορισμός του επεισοδίου βροχής.
4. Η ανάλυση της στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ του ύψους και της διάρκειας βροχής έχει κάποιο βαθμό πρωτοτυπίας.
5. Στην ανάλυση και μοντελοποίηση της εσωτερικής στοχαστικής δομής του επεισοδίου βροχής υπάρχουν ορισμένα πρωτότυπα σημεία. Σαν παράδειγμα αναφέρεται η διαπίστωση ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης του ωριαίου ύψους βροχής είναι αύξουσα συνάρτηση της διάρκειας του επεισοδίου βροχής.
6. Το *μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής με εσωτερική δομή* δεν είναι πρωτότυπο σαν ιδέα, δεν είναι όμως και αντιγραφή ή προσαρμογή κανενός άλλου μοντέλου. Θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν μια σύνθεση των αποτελεσμάτων της στατιστικής ανάλυσης των ιστορικών χρονοσειρών βροχής της εργασίας αυτής, η οποία περιλαμβάνει και γνωστά από τη βιβλιογραφία στοιχεία και θεωρητικά εργαλεία. Πάντως

---

6. Το δυναμικό μοντέλο επιμερισμού παρουσιάστηκε στην πρώτη του έκδοση στην έκθεση πρόόδου της διατριβής αρ. 4, τον Φεβρουάριο του 1984.



δεν χρησιμοποιήθηκε κανένα έτοιμο στοιχείο, χωρίς προηγουμένως να ελεγχθεί η προσαρμογή του με τα ιστορικά δεδομένα.

7. Τέλος έγιναν μερικές πρωτότυπες θεωρητικές αναλύσεις που αναφέρονται σε δεσμευμένες συναρτήσεις κατανομής ορισμένων μεταβλητών, και τις αντίστοιχες γεννήτριες τυχαίων αριθμών υπό συνθήκη, για να αντιμετωπιστούν διάφορα επί μέρους θέματα της εφαρμογής του μοντέλου επιμερισμού σημειακής βροχόπτωσης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ

### 1.1. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

#### 1.1.1. Εισαγωγικές έννοιες - Ορισμοί

Θα διατυπωθεί πρώτα το **μονοδιάστατο πρόβλημα επιμερισμού**, και στη συνέχεια το **πολυδιάστατο πρόβλημα**, αφού γίνουν οι απαραίτητες γενικεύσεις. Προκειμένου να κρατηθεί κάποια γενικότητα και αυστηρότητα στις διατυπώσεις, δεν θα γίνει προς το παρόν αναφορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα που εξετάζεται στην εργασία αυτή, δηλαδή στον επιμερισμό της σημειακής βροχόπτωσης.

Ας θεωρήσουμε δύο στοχαστικές ανελίξεις  $I(t)$  και  $H(t)$ , σε συνεχή χρόνο  $t$ , που συνδέονται με τη σχέση :

$$H(t) = \int_0^t I(\tau) d\tau \quad (1.1.1)$$

Τέτοια ζεύγη στοχαστικών ανελίξεων, σαν το  $I(t) - H(t)$ , συναντούμε πολύ συχνά στην Υδρολογία, όπως για παράδειγμα τα ζεύγη: "ένταση βροχής" - "ύψος βροχής" και "παροχή" - "όγκος απορροής". Σε όλες σχεδόν τις στοχαστικές ανελίξεις που αντιπροσωπεύουν υδρολογικές μεταβλητές, η ανέλιξη  $I(t)$  είναι μη αρνητική, δηλαδή :

$$I(t) \geq 0 \quad (1.1.2)$$

Συνεπώς η  $H(t)$  είναι ανέλιξη μονότονα αύξουσα ως προς το χρόνο  $t$ .

Θεωρούμε τώρα μια τυχούσα διαίρεση του χρόνου:

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, \text{ όπου } t_n \leq t_{n+1} \text{ και } t_0 = 0$$

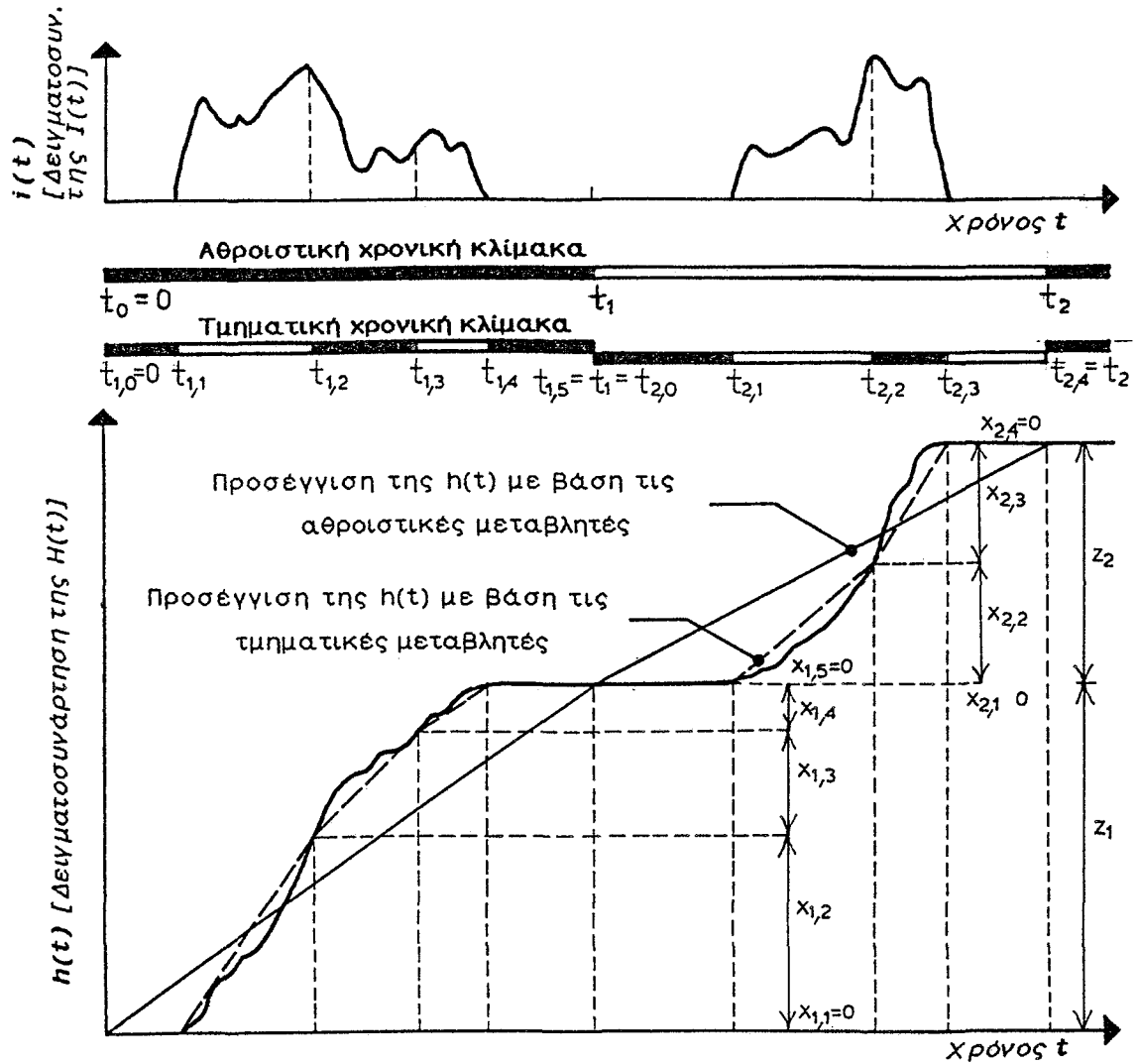
Τη διαίρεση αυτή θα την ονομάσουμε **αθροιστική χρονική κλίμακα ή μακροκλίμακα**. Επίσης για κάθε χρονικό διάστημα  $[t_n, t_{n+1}]$  ορίζουμε ανά μία υποδιαίρεση του χρόνου με πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων  $k(n)$ , που θα την ονομάσουμε **τμηματική χρονική κλίμακα ή μικροκλίμακα**, ως εξής:

$$t_{n,0} = t_{n-1}, t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,k(n)} = t_n \quad \text{με } t_{n,i} \leq t_{n,i+1}$$

Τέλος ορίζουμε τις εξής δύο ακολουθίες στοχαστικών μεταβλητών (ή συναρτήσεων):

α. τις **αθροιστικές μεταβλητές ή μεταβλητές μακροκλίμακας**:

$$Z_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} I(t) dt = H(t_n) - H(t_{n-1}) \quad (1.1.3)$$



Σχήμα 1.1: Επεξηγηματικό σκαρίφημα για τον ορισμό των χρονικών κλιμάκων και των τμηματικών και αθροιστικών μεταβλητών.

β. τις τμηματικές μεταβλητές ή μεταβλητές μικροκλίμακας:

$$X_{n,k} = \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} I(t) dt = H(t_{n,i}) - H(t_{n,i-1}), \quad i = 1..k(n) \quad (1.1.4)$$

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς θα ισχύει:

$$X_{n,1} + X_{n,2} + \dots + X_{n,k(n)-1} + X_{n,k(n)} = Z_n \quad (1.1.5)$$

ενώ αν ισχύει η (1.1.2) θα είναι:

$$Z_n \geq 0 \quad \text{και} \quad X_{n,i} \geq 0, \quad i = 1..k(n) \quad (1.1.6)$$

Ένα παράδειγμα δειγματοσυναρτήσεων των ανελιξεων  $I(t)$  και  $H(t)$  και των αντίστοιχων τιμών των τμηματικών και αθροιστικών μεταβλητών  $X$  και  $Z$  φαίνεται διαγραμματικά στο σχήμα 1.1.

Οι μεταβλητές  $X$  και  $Z$  μπορούν να ορισθούν επίσης και για την περίπτωση που η  $I(t)$  είναι ανέλιξη σε διακριτό χρόνο. Τότε βέβαια θα πρέπει να αντικατασταθούν τα ολοκληρώματα στις σχέσεις (1.1.1), (1.1.3) και (1.1.4), με τα αντίστοιχα αθροίσματα.

Η εξίσωση (1.1.5) (σε συνδυασμό και με τις ανισώσεις (1.1.6)), είναι η βασική σχέση του προβλήματος επιμερισμού. Για λόγους απλοποίησης, θα την ξαναγράψουμε με παράλειψη του δείκτη  $n$ , και η απλοποιημένη αυτή σχέση θα χρησιμοποιείται όταν δεν παίζει κάποιο ρόλο το διάστημα της αθροιστικής χρονικής κλίμακας, στο οποίο αναφερόμαστε:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_{k-1} + X_k = Z \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^k X_i = Z \quad (1.1.7)$$

Αντίστοιχα οι ανισώσεις (1.1.6) γράφονται

$$Z \geq 0, \quad X_i \geq 0 \quad (1.1.8)$$

#### 1.1.2. Περιγραφή του μονοδιάστατου προβλήματος επιμερισμού

Η μέθοδος του επιμερισμού ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία των μεθόδων προσομοίωσης (simulation). Το γενικό πρόβλημα της προσομοίωσης είναι η παραγωγή δειγματοσυναρτήσεων ή συνθετικών χρονοσειρών των στοχαστικών ανελιξεων που συνδέονται με κάποιο σύστημα, προκειμένου να μελετηθεί με βάση αυτές, πειραματικά, η συμπεριφορά του συστήματος. Η μέθοδος χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που οι μεταβλητές του συστήματος έχουν στοχαστικό χαρακτήρα και οι εξισώσεις που το διέπουν δεν επιδέχονται αναλυτική επίλυση.

Οι τεχνικές που διαθέτουμε για την συνθετική παραγωγή δειγματοσυναρτήσεων μιας στοχαστικής ανέλιξης, εντάσσονται σε δύο γενικές κατηγορίες μεθόδων. Σύμφωνα με την κλασική (ή σειριακή) μέθοδο, αποκτούμε, μία μετά την άλλη, τιμές  $h(t_i)$  της δειγματοσυνάρτησης  $h(t)$ , για διαδοχικούς χρόνους  $t_i$ , που συνήθως ισαπέχουν κατά ένα διάστημα  $\Delta t$ . Αντίθετα με τη δεύτερη μέθοδο, του επιμερισμού, ξεκινάμε από ορισμένα γνωστά σημεία της δειγματοσυνάρτησης, που αντιστοιχούν στην αθροιστική χρονική κλίμακα, και στη συνέχεια πυκνώνουμε τα σημεία αυτά, υπολογίζοντας τιμές των τμηματικών μεταβλητών  $X$ , σε συμφωνία με τις γνωστές τιμές των αθροιστικών μεταβλητών  $Z$  (βλέπε και σχήμα 1.1). Προφανώς μπορούμε να συνδυάσουμε τις δύο μεθόδους, υπολογίζοντας πρώτα με μία σειριακή

τεχνική αραιά σημεία της δειγματοσυνάρτησης και στη συνέχεια να τα πυκνώσουμε, με μια τεχνική επιμερισμού.

Η μέθοδος του επιμερισμού, λοιπόν, συνίσταται σε μία τεχνική παραγωγής χρονοσειρών των τμηματικών μεταβλητών  $X$ , όταν είναι γνωστή μία σειρά τιμών των αθροιστικών μεταβλητών  $Z$ , σε τρόπο ώστε να ικανοποιείται η πολυδιάστατη, τάξης  $m$ , συνάρτηση κατανομής, για οποιαδήποτε τιμή του  $m$ :

$$F = F_{X,Z} (x_{1,1}, \dots, x_{1,k(1)}, \dots, x_{m,1}, \dots, x_{m,k(m)} ; z_1, \dots, z_m) \quad (1.1.9)$$

Από τον ορισμό των  $X$  και  $Z$  προκύπτει ότι, εφόσον ικανοποιείται η πολυδιάστατη συνάρτηση κατανομής (1.1.9), θα ικανοποιούνται και οι σχέσεις (1.1.5), που αφορούν τη διατήρηση των δεδομένων τιμών των αθροιστικών μεταβλητών  $Z$ .

Στην πιο πάνω συνάρτηση κατανομής, κανονικά, η τιμή του  $m$  θα πρέπει να θεωρηθεί ίση με το συνολικό αριθμό των διαστημάτων της αθροιστικής χρονικής κλίμακας, που αφορά το εξεταζόμενο, κάθε φορά, πρόβλημα επιμερισμού (δηλαδή ίση με το πλήθος των γνωστών τιμών του  $Z$ ). Τότε, βέβαια, η παραγωγή των τιμών των τυχαίων μεταβλητών  $X$  ταυτόχρονα σε όλη τη χρονική κλίμακα, με διατήρηση της συνάρτησης κατανομής (1.1.9), είναι πρακτικά ανέφικτη. Για το λόγο αυτό εισάγεται η σταδιακή αντιμετώπιση του προβλήματος και η σταδιακή διατήρηση της συνάρτησης κατανομής. Η πορεία παραγωγής τιμών γίνεται σε διαδοχικά στάδια, όπου σε κάθε στάδιο παράγονται τιμές των τμηματικών μεταβλητών ενός διαστήματος της αθροιστικής χρονικής κλίμακας. Ο όρος που τίθεται τώρα, αντί της πλήρους διατήρησης της κατανομής (1.1.9), είναι η διατήρηση της από κοινού συνάρτησης κατανομής των μεταβλητών  $X$  και  $Z$  του παρόντος σταδίου ( $n$ ), και ορισμένου αριθμού ( $h$ ) προηγούμενων σταδίων. Δηλαδή, για το  $n$  στάδιο και για  $h \leq n$ , παράγονται οι τιμές  $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k(n)}$  με διατήρηση της πολυδιάστατης συνάρτησης κατανομής:

$$F_{n,h} = F_{X,Z} (x_{n-h,1}, \dots, x_{n-h,k(n-h)}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,k(n)} ; z_{n-h}, \dots, z_n) \quad (1.1.10)$$

Τον αριθμό  $h$ , που δείχνει πόσα προς τα πίσω χρονικά διαστήματα της αθροιστικής χρονικής κλίμακας επηρεάζουν τις μεταβλητές του υπό μελέτη διαστήματος, θα τον ονομάσουμε **αθροιστική μνήμη**.

Ειδικότερα, αν θεωρήσουμε μηδενική αθροιστική μνήμη ( $h = 0$ ), τότε στην ουσία δεν παίρνουμε υπόψη καμιά συσχέτιση με μεταβλητές των προηγούμενων διαστημάτων της αθροιστικής χρονικής κλίμακας, οπότε το κάθε στάδιο είναι ανεξάρτητο από τα προηγούμενα. Για αυτή την περίπτωση, παραλείποντας το δείκτη  $n$ , όπως και στις σχέσεις (1.1.7) και (1.1.8), η (1.1.10) παίρνει την απλού-

στερη μορφή:

$$F_0 = F_{X,Z} (x_1, x_2, \dots, x_k ; Z) \quad (1.1.11)$$

Στην πραγματικότητα οι συναρτήσεις κατανομής (1.1.10) και (1.1.11) έχουν πολύπλοκη μαθηματική έκφραση, και, εκτός από ειδικές οριακές περιπτώσεις, είναι αδύνατο ακόμη και να διατυπωθούν μαθηματικά. Έτσι, αντί να θέσουμε σαν όρο στο πρόβλημα του επιμερισμού την ικανοποίηση των πλήρων εκφράσεων των συναρτήσεων κατανομής, αρκούμαστε στον όρο της διατήρησης περιορισμένου αριθμού στατιστικών ροπών (περιθώριων και από κοινού) των αθροιστικών και τμηματικών μεταβλητών που εμφανίζονται στις συναρτήσεις κατανομής (1.1.10) ή (1.1.11). Στην περίπτωση αυτή πρέπει να θεωρηθεί σαν ξεχωριστός όρος η διατήρηση της βασικής σχέσης επιμερισμού (1.1.5) (ή (1.1.7)) εφόσον τώρα η ικανοποίηση της δεν απορρέει από τη διατήρηση των ροπών. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι αναγκαία και η εισαγωγή πρόσθετων ειδικών όρων, όπως στην περίπτωση που οι περιθώριες συναρτήσεις των τμηματικών μεταβλητών παρουσιάζουν ασυνέχεια, οπότε θα τεθεί ο όρος της διατήρησης αυτής της ασυνέχειας. Όσο αφορά την τάξη των ροπών που λαμβάνονται υπόψη, είναι σαφές ότι όσο μεγαλύτερη είναι αυτή, τόσο μεγαλύτερη είναι και η ακρίβεια του μοντέλου. Στην πραγματικότητα όμως είναι πρακτικά ανέφικτη η γενική χρησιμοποίηση ροπών τάξης μεγαλύτερης από 2. Είναι δυνατό πάντως να χρησιμοποιηθούν και οι τρίτης τάξης περιθώριες ροπές.

### 1.1.3. Μορφοποίηση και χαρακτηρισμός του μοντέλου επιμερισμού

Σύμφωνα με όσα περιγράφηκαν παραπάνω, μια τεχνική επιμερισμού είναι μια μεθοδολογία παραγωγής τιμών των τμηματικών μεταβλητών, όταν είναι γνωστές οι τιμές των αθροιστικών μεταβλητών, σε τρόπο ώστε, στο (n) στάδιο επιμερισμού, να διατηρούνται τα ακόλουθα:

1. Η βασική σχέση επιμερισμού (1.1.5) ή (1.1.7), και, αν η ανέλιξη αφετηρίας  $I(t)$  είναι μη αρνητική, οι ανισώσεις (1.1.6) ή (1.1.8), αντίστοιχα.
2. Οι μέσες τιμές, οι διασπορές, ή και μεγαλύτερης τάξης περιθώριες ροπές των τμηματικών μεταβλητών του σταδίου.
3. Οι συνδιασπορές ή και μεγαλύτερης τάξης από κοινού ροπές των τμηματικών μεταβλητών του σταδίου μεταξύ τους, με την αθροιστική μεταβλητή του σταδίου, καθώς και με τις τμηματικές και αθροιστικές μεταβλητές η προηγούμενων σταδίων.
4. Τυχόν ειδικά χαρακτηριστικά των περιθώριων συναρτήσεων κατανομής, όπως ασυνέχειες των συναρτήσεων. (π.χ. πιθανότητες μηδενικής τιμής των  $X_i$ , αν αυτές είναι πεπερασμένες).

Ο όρος **μοντέλο επιμερισμού** χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη συστηματική ανάλυση και σύνθεση της τεχνικής επιμερισμού, και περιλαμβάνει:

- α. Τη θεωρητική θεμελίωση της τεχνικής, που συμπεριλαμβάνει και τις μαθηματικές εξισώσεις υπολογισμού των παραμέτρων του μοντέλου.
- β. Τον αλγόριθμο υπολογισμού των παραμέτρων και τον αλγόριθμο παραγωγής των τιμών των τμηματικών μεταβλητών, με βάση τυπικές γεννήτριες τυχαίων αριθμών.
- γ. Την κωδικοποίηση των παραπάνω αλγορίθμων σε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Τα κύρια σημεία που χαρακτηρίζουν ένα μοντέλο επιμερισμού είναι σε κωδικοποιημένη μορφή τα ακόλουθα:

- i. Η δυνατότητα του να λειτουργεί με σταθερή ή μεταβλητή αθροιστική και τμηματική χρονική κλίμακα κατά στάδιο επιμερισμού. Συνέπεια αυτής είναι η δυνατότητα του να επιδέχεται σταθερό ή μεταβλητό πλήθος τμηματικών μεταβλητών σε κάθε στάδιο επιμερισμού.
- ii. Η αθροιστική μνήμη του.
- iii. Η μέγιστη τάξη των περιθωρίων και από κοινού ροών των μεταβλητών που παίρνει υπόψη και διατηρεί.
- iv. Η δυνατότητα του να επεξεργάζεται μεταβλητές με ασυνεχείς περιθώριες συναρτήσεις κατανομής, διατηρώντας τις ασυνέχειες αυτές.
- v. Η ασυμπτωτική ή οριακή συμπεριφορά του, που εκφράζεται με τη μορφή των συναρτήσεων κατανομής που μπορεί να διατηρηθούν από το μοντέλο σε πλήρη μορφή, κάτω από ειδικές οριακές συνθήκες.

#### 1.1.4. Το πολυδιάστατο πρόβλημα επιμερισμού

Χωρίς σημαντικές προσθήκες σε όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για το μονοδιάστατο πρόβλημα, μπορεί να διατυπωθεί και το πολυδιάστατο πρόβλημα επιμερισμού. Θα θεωρήσουμε τώρα  $q$  παράλληλες ομοειδείς στοχαστικές ανεξίτηλες αφετηρίας, που θα τις συμβολίσουμε με το διάνυσμα  $\underline{I}(t)$ , με διάσταση  $q$ . Από τη σχέση (1.1.1), εφαρμοζόμενη για όλες τις συνιστώσες της  $\underline{I}(t)$ , προκύπτουν  $q$  συνιστώσες στοχαστικές ανεξίτηλες, που αποτελούν το διάνυσμα  $\underline{H}(t)$ . Υποτίθεται ότι ο χρόνος  $t$  είναι ενιαίος για όλες τις συνιστώσες των  $\underline{I}(t)$  και  $\underline{H}(t)$ . Αν τώρα θεωρήσουμε μία διαίρεση του χρόνου χαμηλού επιπέδου και μια αντίστοιχη υψηλού επιπέδου, κοινή για όλες τις συνιστώσες των πολυδιάστατων στοχαστικών ανεξίτηλων  $\underline{I}(t)$  και  $\underline{H}(t)$ , τότε από τις σχέσεις (1.1.3) και (1.1.4), εφαρμοζόμενες

για όλες τις συνιστώσες, προκύπτουν οι διανυσματικές αθροιστικές και τμηματικές μεταβλητές  $Z_n(t)$  και  $X_{n,k}(t)$ , που θα ικανοποιούν την αντίστοιχη με την (1.1.5) διανυσματική σχέση :

$$X_{n,1} + X_{n,2} + \dots + X_{n,k(n)-1} + X_{n,k(n)} = Z_n \quad (1.1.12)$$

και εφόσον ισχύει και η (1.1.2) θα είναι :

$$Z_n \geq \underline{0} \quad \text{και} \quad X_{n,i} \geq \underline{0}, \quad i = 1..k(n) \quad (1.1.13)$$

όπου με  $\underline{0}$  συμβολίζεται το μηδενικό διάνυσμα, και η σχέση ανισότητας εννοείται ότι εφαρμόζεται σε όλες τις συνιστώσες, μία προς μία.

Μετά τα παραπάνω, είναι σαφές, ότι το πολυδιάστατο πρόβλημα επιμερισμού αφορά την παραγωγή όλων των συνιστωσών τμηματικών μεταβλητών, δηλαδή στο n στάδιο αφορά την παραγωγή  $q * k(n)$  αριθμητικών τιμών. Θεωρητικά και εδώ θα πρέπει να διατηρούνται οι πολυδιάστατες συναρτήσεις κατανομής (1.1.10) ή (1.1.11) γραμμένες με διανυσματικά ορίσματα  $\underline{x}$  και  $\underline{z}$ . Δηλαδή εδώ θεωρούμε, ως ορίσματα των συναρτήσεων κατανομής, το σύνολο των  $q$  συνιστωσών των μεταβλητών  $X$  και  $Z$ .

Στην πράξη το πρόβλημα μορφοποιείται όπως και το αντίστοιχο μονοδιάστατο (υποπαράγραφος 1.1.3), με τη διαφορά ότι η βασική σχέση επιμερισμού είναι η (1.1.12) αντί της (1.1.5) και η βασική ανίσωση είναι η (1.1.13), αντί της (1.1.6) (εδάφιο 1.). Διευκρινίζεται για το εδάφιο (3.) ότι ως συνδιασπορές μεταξύ των τμηματικών μεταβλητών εδώ θα εννοούνται οι συνδιασπορές κάθε συνιστώσας τμηματικής μεταβλητής με όλες τις συνιστώσες όλων των άλλων τμηματικών μεταβλητών (οριζόντια και κατακόρυφη έννοια). Το ίδιο ισχύει και για τις συνδιασπορές των τμηματικών μεταβλητών με τις αθροιστικές, καθώς και για τις συνδιασπορές μεταβλητών διαφορετικών σταδίων.

#### 1.1.5. Πλεονεκτήματα των μοντέλων επιμερισμού

Τα μοντέλα επιμερισμού, αν συγκριθούν με τα μοντέλα σειριακής προσομοίωσης, παρουσιάζουν μερικά σαφή πλεονεκτήματα, που προκύπτουν από την ιδιότητα τους να πυκνώνουν τη δειγματοσυνάρτηση αφετηρίας, διατηρώντας όσα σημεία της είναι γνωστά από πριν.

Το πρώτο πλεονέκτημα τους είναι ότι μπορούν να προχωρούν σταδιακά στην όλο και ακριβέστερη αναπαράσταση μιας στοχαστικής ανέλιξης, πυκνώνοντας μια δειγματοσυνάρτηση αφετηρίας, με δυνατότητα πολλαπλής διαδοχικής εφαρμογής του ίδιου βασικού μοντέλου σε όλο και πυκνότερες χρονικές (τμηματικές) κλίμακες. Στην πράξη, βέβαια, υπάρχει κάποιο όριο στην πύκνωση που μπορεί να φτάσουμε, το οποίο καθορίζεται από την συμφωνία της πραγματικής στοχαστικής δομής της



ανέλιξης με την ασυμπτωτική συμπεριφορά του μοντέλου.

Ένα δεύτερο πλεονέκτημα τους είναι η ευελιξία τους να συνδυάζονται με οποιοδήποτε μοντέλο σειριακής προσομοίωσης, κατάλληλο να παράγει τις τιμές αφετηρίας των αθροιστικών μεταβλητών. Αυτή η δυνατότητα αποκτά ιδιαίτερη σημασία όταν η **μακροδομή**, δηλαδή η στοχαστική δομή των αθροιστικών μεταβλητών είναι διαφορετική από τη **μικροδομή**, τη στοχαστική δομή, δηλαδή των τμηματικών μεταβλητών. Σε μια τέτοια περίπτωση η απευθείας χρησιμοποίηση ενός σειριακού μοντέλου σε βάση τμηματικής χρονικής κλίμακας, θα έδινε μια συνθετική χρονοσειρά με σωστή μικροδομή, αλλά με μακροδομή ασύμφωνη με την πραγματική. Αντίθετα η χρήση ενός σειριακού μοντέλου για τη μακροκλίμακα, σε συνδυασμό με ένα μοντέλο επιμερισμού για τη μικροκλίμακα, θα δώσει συνθετικές χρονοσειρές που διατηρούν και τη μακροδομή και τη μικροδομή.

Το δεύτερο πλεονέκτημα έχει μεγάλη σημασία στην Υδρολογία, όπου συχνά εμφανίζονται αναντιστοιχίες μακροδομής - μικροδομής. Πολλές φορές εμφανίζονται ανελιξεις με πολύ απλή μακροδομή (π.χ. μόνιμες χρονοσειρές με κατανομή Gauss ή εκθετική) αλλά με σύνθετη μικροδομή (π.χ. χωρίς μονιμότητα, με περιοδικότητες, και πολύπλοκες εσωτερικές συσχετίσεις). Συχνά συμβαίνει και το αντίστροφο, δηλαδή πολύπλοκες ιδιότητες της μακροδομής να μη ανιχνεύονται και στη μικροδομή. Τέτοιο παράδειγμα είναι το φαινόμενο Hurst, που χαρακτηρίζει τους ετήσιους όγκους απορροής, και που η αντιμετώπιση του απαιτεί ειδικά μοντέλα σειριακής προσομοίωσης. Στην ίδια κατηγορία συγκαταλέγεται και το αποκαλούμενο φαινόμενο του Ιωσήφ (*Kottegoda [1980]*).

Το τρίτο πλεονέκτημα των μοντέλων επιμερισμού είναι η δυνατότητα τους να συνδυάζονται με πραγματικά δεδομένα, με αποτέλεσμα να μπορούν να πυκνώνουν ιστορικές χρονοσειρές με συνθετικά δεδομένα. Αυτή η ιδιότητα τους τα κάνει χρήσιμα όταν οι υπάρχουσες μετρήσεις είναι αραιές, ενώ η ανάλυση του υπό μελέτη συστήματος απαιτεί πυκνότερα δεδομένα.

Ένα τελευταίο πλεονέκτημα τους αφορά τη δυνατότητα τους να δίνουν πολλαπλές λεπτομερείς (πυκνωμένες) εκδοχές της ίδιας βασικής πραγματοποίησης μιας στοχαστικής ανέλιξης. Αν θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο "επεισόδιο" της στοχαστικής ανέλιξης με καθορισμένα αθροιστικά χαρακτηριστικά, ένα μοντέλο επιμερισμού μπορεί να μας δώσει μια σειρά από λεπτομερή σενάρια του επεισοδίου, ώστε να μελετηθεί με μεγαλύτερη αξιοπιστία η απόκριση του υπό μελέτη συστήματος στο συγκεκριμένο επεισόδιο.

Τα βασικά μειονεκτήματα των μοντέλων επιμερισμού, που τα κάνει να έχουν περιορισμένη χρήση, είναι η πολυπλοκότητα στη μαθηματική δομή και υπολογιστική διαδικασία τους, και παράλληλα το περιορισμένο εύρος στοχαστικών ανελιξεων, που μπορούν να αναπαραστήσουν με ακρίβεια.

## 1.2. ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ (VALENCIA - SCHAAKE)

### 1.2.1. Γενική περιγραφή και αρχική διατύπωση του

Το σπουδαιότερο μοντέλο που έχει αναπτυχθεί και χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα υδρολογικής προσομοίωσης, είναι το γραμμικό μοντέλο των Valencia και Schaake (VS), είτε στην αρχική του διατύπωση (*Valencia και Schaake* [1972], [1973]), είτε σε μεταγενέστερες τροποποιημένες εκδόσεις του. Στην ουσία είναι το μόνο μοντέλο της βιβλιογραφίας με θεωρητική θεμελίωση και ευρύτητα εφαρμογών, και για το λόγο αυτό ο όρος "μοντέλο επιμερισμού" (disaggregation model) έχει επικρατήσει να χρησιμοποιείται αποκλειστικά για το μοντέλο αυτό. Εδώ όμως, για διάκριση από το προτεινόμενο μοντέλο, προσθέσαμε το χαρακτηρισμό "γραμμικό", που δικαιολογείται από το γραμμικό τύπο σχέσεων, που χρησιμοποιεί για την παραγωγή των τμηματικών μεταβλητών. Στην παράγραφο αυτή (1.2.) γίνεται μία συνοπτική επισκόπηση των διάφορων εκδόσεων του μοντέλου, ενώ στην παράγραφο 1.3. δίνονται συνοπτικά στοιχεία για άλλα μοντέλα επιμερισμού που συναντώνται στη βιβλιογραφία.

Στην παρουσίαση του μοντέλου που ακολουθεί, έχουν γίνει ορισμένες επουσιώδεις τροποποιήσεις στον αυθεντικό συμβολισμό του, ώστε να τηρηθεί συμβολισμός ενιαίος με αυτόν της παραγράφου 1.1. Έτσι οι αθροιστικές μεταβλητές του  $n$  διαστήματος της μακροκλίμακας, υπό μορφή διανύσματος, είναι:

$$\underline{Z}_n = [Z_{1n}, Z_{2n}, \dots, Z_{qn}]^T \quad (1.2.1)$$

Το σύμβολο  $T$  σημαίνει το ανάστροφο μητρώο. Ο πρώτος δείκτης στις μεταβλητές του δεύτερου μέλους φανερώνει την "θέση αναφοράς" της μεταβλητής (στο χώρο) και παίρνει  $q$  τιμές. Αντίστοιχα το σύνολο των τμηματικών μεταβλητών του  $n$  διαστήματος αποτελεί το διάνυσμα:

$$\underline{X}_n = [X_{1n1}, \dots, X_{1nk} ; X_{2n1}, \dots, X_{2nk} ; \dots ; X_{qn1}, \dots, X_{qnk}]^T \quad (1.2.2)$$

Το μοντέλο έχει διατυπωθεί με την υπόθεση ότι  $E[\underline{X}] = E[\underline{Y}] = \underline{0}$  και συνεπώς σε όλες τις συνιστώσες των παραπάνω διανυσμάτων έχουν αφαιρεθεί προηγούμενα οι μέσες τιμές των αρχικών μεταβλητών.

Η βασική σχέση επιμερισμού στο μοντέλο VS εκφράζεται με μια εξίσωση πιο γενική από την (1.1.5), ήτοι:

$$\underline{Z}_n = \underline{C} \underline{X}_n \quad (1.2.3)$$

όπου  $\underline{C}$  = μητρώο διαστάσεων  $kq \times q$ . Στην πράξη βέβαια όροι του μητρώου  $\underline{C}$  είναι ίσοι με 0 ή 1 και η μορφή του είναι τέτοια ώστε να προκύπτουν  $q$  εξισώσεις

αθροισμάτων τύπου (1.1.5)

Η παραγωγή των τιμών των τμηματικών μεταβλητών γίνεται με βάση τις παρακάτω γραμμικές σχέσεις, που συνιστούν το μοντέλο VS:

$$\underline{X}_n = \underline{A} \underline{Z}_n + \underline{W}_n \quad (1.2.4)$$

$$\underline{W}_n = \underline{B} \underline{V}_n \quad (1.2.5)$$

όπου

$\underline{A}$  = μητρώο παραμέτρων διαστάσεων  $k_q \times k$ ,

$\underline{B}$  = μητρώο παραμέτρων διαστάσεων  $k_q \times k_q$ ,

$\underline{W}_n$  = διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών στοχαστικά ανεξάρτητων από τις  $Z$  αλλά στοχαστικά εξαρτημένων μεταξύ τους, με διάσταση  $k_q$ ,

$\underline{V}_n$  = διάνυσμα τυποποιημένων τυχαίων μεταβλητών στοχαστικά ανεξάρτητων και από τις  $Z$ , και μεταξύ τους, με διάσταση  $k_q$ .

Στην περίπτωση του μονοδιάστατου μοντέλου ( $q=1$ ) οι παραπάνω σχέσεις απλοποιούνται ως εξής (με παράλειψη και του δείκτη θέσης των μεταβλητών):

$$X_{nj} = a_j Z_n + W_{nj} \quad (1.2.6)$$

$$X_{nj} = a_j Z_n + \sum_{r=1}^k b_{jr} V_{nr} \quad (1.2.7)$$

Τα μητρώα παραμέτρων του μοντέλου υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\underline{A} = \underline{S}_{XZ} \underline{S}_{ZZ}^{-1} \quad (1.2.8)$$

$$\underline{B} \underline{B}^T = \underline{S}_{XX} - \underline{S}_{XZ} \underline{S}_{ZZ}^{-1} \underline{S}_{ZX} \quad (1.2.9)$$

όπου

$\underline{S}_{ZZ} = E[Z_n Z_n^T]$  = μητρώο διασπορών / συνδιασπορών των  $Z$ ,

$\underline{S}_{XX} = E[X_n X_n^T]$  = μητρώο διασπορών / συνδιασπορών των  $X$ ,

$\underline{S}_{XZ} = \underline{S}_{ZX}^T = E[X_n Z_n^T]$  = μητρώο συνδιασπορών μεταξύ των μεταβλητών  $Z$  και  $X$ , και

$E[.]$  = σύμβολισμός της αναμενόμενης τιμής.

Η τελευταία εξίσωση επιδέχεται πολλαπλές λύσεις ως προς το μητρώο  $\underline{B}$ . Στο μοντέλο VS έχει αναπτυχθεί μια τεχνική για την εύρεση μιας λύσης της (1.2.9) που συνίσταται σε ένα τριγωνικό μητρώο  $\underline{B}$ .

Οι ιδιότητες διατήρησης του μοντέλου είναι:

- Διατήρηση της μέσης τιμής των  $X$ , ανεξάρτητα από τις

τιμές των παραμέτρων  $\underline{A}$  και  $\underline{B}$ , υπό τον όρο ότι  $E[\underline{W}] = E[\underline{V}] = \underline{0}$ .

- Διατήρηση των συνδιασπορών μεταξύ των  $X$  και  $Z$ , εφόσον οι παράμετροι  $\underline{A}$  υπολογίζονται από την (1.2.8).
- Διατήρηση των διασπορών και συνδιασπορών μεταξύ των  $X$ , εφόσον οι παράμετροι  $\underline{B}$  υπολογίζονται από την (1.2.9).
- Διατήρηση της βασικής εξίσωσης επιμερισμού (1.2.3).
- Σε περίπτωση που οι μεταβλητές  $X$  και  $Z$  ακολουθούν πολυδιάστατη κανονική κατανομή, το μοντέλο διατηρεί πλήρως την κατανομή, οπότε πρέπει και αρκεί οι μεταβλητές  $V$  να είναι κανονικές.

### 1.2.2. Γενική συμπεριφορά και χρήσεις του γραμμικού μοντέλου

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σύντομη παρουσίαση, και σύμφωνα με την κωδικοποίηση χαρακτηριστικών της υποπαραγράφου 1.1.3, το μοντέλο VS μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ένα πολυδιάστατο μοντέλο, σταθερής αθροιστικής και τμηματικής χρονικής κλίμακας, άρα και σταθερού πλήθους τμηματικών μεταβλητών. Δεν διαθέτει αθροιστική μνήμη, πράγμα που είναι και το μεγαλύτερο μειονέκτημα του, ενώ διατηρεί τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης των μεταβλητών.

Προκειμένου να μελετήσουμε την ασυμπτωτική του συμπεριφορά, ας θεωρήσουμε την  $j$  συνιστώσα του διανύσματος τυχαίων αποκλίσεων  $\underline{W}_n$ , όπως προκύπτει από τη σχέση (1.2.5) :

$$W_{nj} = \sum_{r=1}^k b_{jr} V_{nr} \quad (1.2.10)$$

Δεδομένου ότι οι μεταβλητές  $V_{nr}$  (άρα και οι  $(b_{jr} \cdot V_{nr})$ ) είναι στοχαστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, από το κεντρικό οριακό θεώρημα προκύπτει ότι για μεγάλο αριθμό μεταβλητών  $k$ , η κατανομή της  $W_{nj}$  τείνει στην κανονική κατανομή, και αυτό ανεξάρτητα από την κατανομή των  $V_{nr}$ . Κατά μείζονα λόγο και η κατανομή των τμηματικών μεταβλητών  $X_{nj}$  τείνει στην κανονική κατανομή. Συνεπώς η ασυμπτωτική ή οριακή συμπεριφορά του μοντέλου VS είναι Gauss. Ένα άλλο συμπέρασμα που προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη ανάλυση είναι ότι το μοντέλο δεν είναι κατάλληλο για μεταβλητές που παρουσιάζουν ασυνεχείς κατανομές, αφού οι βασικές σχέσεις (1.2.4) και (1.2.5) δεν είναι δυνατό να παράγουν συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών, με πεπερασμένη συχνότητα.

Σε ότι αφορά την υπολογιστική διαδικασία εφαρμογής του μοντέλου θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι παράμετροι του, δηλαδή τα στοιχεία των μητρώων  $\underline{A}$  και  $\underline{B}$ , δεν υπολογίζονται αναλυτικά, αλλά μόνο αριθμητικά. Τα σχετικά υπολογιστικά προβλήματα που ανακύπτουν αναφέρονται κυρίως στην αποθήκευση και

αντιστροφή των μεγάλου μεγέθους μητρώων συνδιασπορών των μεταβλητών. Για μείωση του μεγέθους των μητρώων, γίνεται συνήθως πολλαπλή σταδιακή εφαρμογή του μοντέλου για όλο και πυκνότερες τμηματικές χρονικές κλίμακες. Έτσι προκειμένου να παραχθούν μηνιαίες τιμές ενός μεγέθους, ξεκινώντας από ετήσιες τιμές, είναι προτιμότερο να παραχθούν πρώτα εποχιακές τιμές, και στη συνέχεια να επιμεριστούν σε μηνιαίες.

Σε μεταγενέστερες εκδόσεις του μοντέλου, που εξετάζονται στη συνέχεια, έγιναν σημαντικές τροποποιήσεις του με στόχο την εισαγωγή αθροιστικής μνήμης. Επίσης άλλες τροποποιήσεις του αναφέρονται στη δυνατότητα να επεξεργάζεται μεταβλητές με κατανομές διαφορετικές από την κανονική.

Το γραμμικό μοντέλο, στην αρχική ή τις τροποποιημένες εκδόσεις του, έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλές υδρολογικές εφαρμογές. Αυτές αφορούν κυρίως τον επιμερισμό των απορροών σε διάφορες θέσεις μιας λεκάνης, από ετήσια βάση, σε εποχιακή, μηνιαία, και ημερήσια. Επίσης έχει χρησιμοποιηθεί και για επιμερισμό υψών βροχής διαφόρων σταθμών μιας λεκάνης, από ετήσια βάση σε εποχιακή ή μηνιαία, αλλά όχι σε μικρότερη χρονική κλίμακα, επειδή βέβαια οι βροχοπτώσεις σε μικρότερες χρονικές κλίμακες παρουσιάζουν τεράστιες αποκλίσεις από την κανονική κατανομή.

### 1.2.3. Παραλλαγές του μοντέλου με αθροιστική μνήμη

Οι *Valencia και Schaake* [1972], είναι και οι πρώτοι που έδωσαν μια βελτιωμένη παραλλαγή του μοντέλου τους, που του δίνει μια μορφή αθροιστικής μνήμης για ένα στάδιο προς τα πίσω. Στην παραλλαγή αυτή η σχέση (1.2.4) αντικαθίσταται από την:

$$\underline{X}_n = \underline{A} \underline{Z}^*_n + \underline{W}_n \quad (1.2.11)$$

όπου

$$\underline{Z}^*_n = [\underline{Z}_n^T ; \underline{Z}_{n-1}^T]^T =$$

$$[Z_{1n}, Z_{2n}, \dots, Z_{qn} ; Z_{1,n-1}, \dots, Z_{q,n-1}]^T \quad (1.2.12)$$

Οι σχέσεις υπολογισμού των μητρώων των παραμέτρων παραμένουν οι ίδιες, μόνο που τώρα το μητρώο  $\underline{A}$  έχει  $kq \times 2k$  στοιχεία. Στην πραγματικότητα το πρόβλημα της αθροιστικής μνήμης δεν λύνεται με αυτό τον τρόπο, γιατί και πάλι αγνοείται η συσχέτιση μεταξύ των τμηματικών μεταβλητών των διαδοχικών σταδίων (n-1) και (n). Αυτό που παίρνεται υπόψη είναι οι συσχέτιση των τμηματικών μεταβλητών του (n) σταδίου με τις αθροιστικές μεταβλητές του (n-1) σταδίου.

Σε πληρέστερη μορφή το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε από τους *Mejia και Rousseille* [1976], οι οποίοι αντικατέστησαν τις σχέσεις (1.2.4) και (1.2.5) με την ακόλουθη:

$$\underline{X}_n = \underline{A} \underline{Z}_n + \underline{D} \underline{X}_{n-1} + \underline{B} \underline{V}_n \quad (1.2.13)$$

όπου το  $\underline{D}$  είναι ένα νέο μητρώο παραμέτρων, με διαστάσεις  $k_q \times k_q$ .

Ο υπολογισμός των μητρώων παραμέτρων γίνεται τώρα με βάση τις σχέσεις:

$$\underline{A} = (\underline{S}_{XZ} - \underline{S}_{XY} \underline{S}_{YY}^{-1} \underline{S}_{YZ}) (\underline{S}_{ZZ} - \underline{S}_{ZY} \underline{S}_{YY}^{-1} \underline{S}_{YZ})^{-1} \quad (1.2.14)$$

$$\underline{D} = (\underline{S}_{XY} - \underline{A} \underline{S}_{ZY}) \underline{S}_{YY}^{-1} \quad (1.2.15)$$

$$\underline{B} \underline{B}^T = \underline{S}_{XX} - \underline{A} \underline{S}_{ZZ} \underline{A}^T - \underline{A} \underline{S}_{ZY} \underline{B}^T - \underline{D} \underline{S}_{YZ} \underline{A}^T - \underline{D} \underline{S}_{YY} \underline{D}^T \quad (1.2.16)$$

όπου το σύμβολο  $\underline{S}_{KL}$  παριστάνει το μητρώο συνδιασπορών μεταξύ των διανυσμάτων  $\underline{K}_n$  και  $\underline{L}_n$ , ήτοι  $\underline{S}_{KL} = E[\underline{K}_n \underline{L}_n]$ , και για απλοποίηση των συμβολισμών έχει εισαχθεί το σύμβολο  $\underline{Y}$  στη θέση του  $\underline{X}_{n-1}$ , ενώ το σύμβολο  $\underline{X}$  χρησιμοποιείται για το  $\underline{X}_n$ .

Είναι σαφές από τις πιο πάνω σχέσεις, ότι σε αυτή την έκδοση του μοντέλου παίρνονται υπόψη οι πλήρεις συσχετίσεις μεταξύ των τμηματικών μεταβλητών δύο διαδοχικών σταδίων.

Μια διαφορετική αντιμετώπιση του προβλήματος - όχι όμως τόσο πλήρης - προτείνεται στην εργασία των *Hoshi και Burges* [1979], όπου η εισαγωγή μνήμης στο αρχικό μοντέλο Valencia - Schaake, δεν γίνεται μέσω της προσθήκης νέων όρων, αλλά μέσω της θεώρησης στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ των διανυσμάτων τυχαίων αποκλίσεων  $\underline{W}_n$  και  $\underline{W}_{n-1}$ .

Το όλο θέμα αντιμετώπισαν διεξοδικά σε μια πρόσφατη δημοσίευση τους οι *Stedinger και Vogel* [1984], όπου έδειξαν ότι το μοντέλο τύπου Valencia - Schaake, σε οποιαδήποτε παραλλαγή του, είναι πολύ δύσκολο ή και αδύνατο να διατηρήσει επακριβώς τις συσχετίσεις από στάδιο σε στάδιο, λόγω θεμελιωδών περιορισμών, που επιβάλλονται από τη δομή του μοντέλου. Επίσης στην εν λόγω εργασία τους παρουσίασαν μια νέα παραλλαγή του μοντέλου, στο οποίο (όπως και στην παραλλαγή Hoshi - Burges) η εισαγωγή μνήμης στο αρχικό μοντέλο Valencia - Schaake, γίνεται μέσω της θεώρησης στοχαστικά εξαρτημένων χρονικά διαδοχικών διανυσμάτων τυχαίων αποκλίσεων  $\underline{W}_n$  και  $\underline{W}_{n-1}$ , σύμφωνα με τη σχέση:

$$\underline{W}_n = \underline{L} \underline{W}_{n-1} + \underline{V}_n \quad (1.2.17)$$

όπου  $\underline{W}_n$  το διάνυσμα τυχαίων υπολοίπων της σχέσης (1.2.4) και  $\underline{L}$  ένα νέο μητρώο παραμέτρων διαστάσεων  $k_q \times k_q$ , που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\underline{L} = \underline{S}_{WW'} \underline{S}_{WW}^{-1} \quad (1.2.18)$$

όπου  $\underline{S}_{WW'} = E[\underline{W}_n \underline{W}_{n-1}^T]$  και  $\underline{S}_{WW} = E[\underline{W}_n \underline{W}_n^T]$ . Το μητρώο  $\underline{A}$  της σχέσης (1.2.4) υπολογίζεται και πάλι από την (1.2.8). Εννοείται ότι στατιστικές ροπές που υπεισέρχονται σε εκτιμήτριες παραμέτρων, όπως τα στοιχεία των μητρώων διασπορών της σχέσης (1.2.18), κλπ., εκτιμώνται με βάση ιστορικά δεδομένα των υπόψη

χρονοσειρών.

Στην εν λόγω εργασία δίνονται και άλλες εκτιμήτριες του  $\underline{L}$ , κατάλληλες για διάφορες ειδικές απαιτήσεις διατήρησης. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται, το μοντέλο αυτό, όπως και τα προηγούμενα, δεν διατηρεί, αλλά μόνο προσεγγίζει συνδιασπορές μεταξύ μεταβλητών που αναφέρονται σε διαφορετικά (διαδοχικά) στάδια.

#### 1.2.4. Παραλλαγές του μοντέλου για μη κανονικές κατανομές

Επειδή οι φυσικές χρονοσειρές, σε μικρές χρονικές κλίμακες, σπάνια ακολουθούν κανονικές κατανομές, προκύπτει ένα πρόβλημα αξιοπιστίας του γραμμικού μοντέλου, που όπως προαναφέρθηκε έχει ασυμπτωτικά κανονική συμπεριφορά. Προκειμένου να αποκτήσει τη δυνατότητα για αναπαράσταση μεταβλητών με άλλες, εκτός της κανονικής, κατανομές, έχουν προταθεί δύο κατηγορίες μεθόδων, που αναλύονται παρακάτω.

Σύμφωνα με την **πρώτη κατηγορία** μεθόδων, το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τη χρησιμοποίηση ασύμμετρων κατανομών για την παραγωγή των μεταβλητών  $V$ , σε τρόπο ώστε να διατηρούνται οι περιθώριες ροπές τρίτης τάξης των τμηματικών μεταβλητών.

Οι πρώτοι που έθεσαν το πρόβλημα σε αυτή τη βάση είναι οι *Valencia και Schaake* [1972]. Πρότειναν μάλιστα δύο μεθόδους για την εκτίμηση της ασυμμετρίας που πρέπει να έχουν οι μεταβλητές  $V$ . Η πρώτη μέθοδος είναι αρκετά απλή στην εφαρμογή, αλλά, όπως παρατηρούν οι ίδιοι, δεν διατηρεί την ασυμμετρία των τμηματικών μεταβλητών, παρά μόνο ορισμένες τριτοβάθμιες εκφράσεις ροπών μεταξύ των τμηματικών και αθροιστικών μεταβλητών. Η δεύτερη μέθοδος είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και οι συγγραφείς περιορίστηκαν στην θεωρητική διατύπωση της, χωρίς να προχωρήσουν σε εφαρμογή. Η παρουσίαση των μεθόδων αυτών ξεφεύγει από τα όρια αυτής της σύντομης επισκόπησης του γραμμικού μοντέλου.

Οι *Tao και Delleur* [1976] εντόπισαν το πρόβλημα στη διατήρηση της ασυμμετρίας των τυχαίων αποκλίσεων  $W$ , και εισήγαγαν ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό της μορφής:

$$W' = (W - \eta) \xi$$

όπου οι παράμετροι  $\eta$  και  $\xi$  υπολογίστηκαν από εκφράσεις τρίτων ροπών των  $W$ , όπως προκύπτουν από τις ιστορικές χρονοσειρές  $X$  και  $Z$ . Στη θέση της σχέσης (1.2.5) χρησιμοποίησαν την

$$\underline{W}' = \underline{B} \underline{V} + E\{\underline{W}'\}$$

σε συνδυασμό με τον αντίστροφο του παραπάνω μετασχηματισμού, προκειμένου να

υπολογιστούν τα  $W$  από τα  $W'$ . Από τις εφαρμογές που έγιναν από τους ίδιους, με την παραπάνω διαδικασία, προέκυψε ότι οι ασυμμετρίες των συνθετικών χρονοσειρών υπολείπονταν κατά 40% περίπου από τις αντίστοιχες ιστορικές τιμές. Αλλά σύμφωνα με τα παραπάνω αυτή η ασυμφωνία θα πρέπει να θεωρηθεί λογική, αφού η διατήρηση της ασυμμετρίας των  $W$  δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι θα διατηρηθεί και η ασυμμετρία των  $X$ .

Μια συστηματική και εφαρμόσιμη μέθοδος, αυτής της κατηγορίας, έδωσε ο *Todini* [1980]. Αρχικά παρατηρεί ότι η δυσκολία στην εκτίμηση της ασυμμετρίας των τμηματικών μεταβλητών  $V$ , οφείλεται στο γεγονός ότι το μητρώο  $\underline{B}$ , με τον τρόπο υπολογισμού που προτάθηκε από τους *Valencia* και *Scaake*, δεν είναι αντιστρέψιμο. Δεδομένου ότι το εν λόγω μητρώο δεν είναι μονοσήμαντο, προτείνει άλλους αλγόριθμους υπολογισμού που δίνουν αντιστρέψιμα μητρώα. Οι τελικές εξισώσεις υπολογισμού του διανύσματος ασυμμετρίας των μεταβλητών  $V$ , είναι:

$$\underline{a}_V = \underline{G}^{-1} (\underline{m}_{3X} - \underline{m}_{3D}) \quad (1.2.19)$$

όπου

$$\underline{a}_V = E\{\underline{V}_n^{(3)}\} = \text{διάνυσμα ασυμμετρίας των αποκλίσεων } V,$$

$$\underline{G} = \underline{B}^{(3)},$$

$$\underline{m}_{3X} = E\{\underline{X}_n^{(3)}\} = \text{διάνυσμα περιθωρίων ροπών τρίτης τάξης των τμηματικών μεταβλητών } X, \text{ και}$$

$$\underline{m}_{3D} = E\{(\underline{A} \underline{Z}_n)^{(3)}\} \text{ στην περίπτωση που χρησιμοποιείται το μοντέλο Valencia - Schaaake (σχέσεις (1.2.4), (1.2.5), ή}$$

$$\underline{m}_{3D} = E\{(\underline{A} \underline{Z}_n + \underline{D} \underline{X}_{n-1})^{(3)}\} \text{ στην περίπτωση που χρησιμοποιείται το τροποποιημένο μοντέλο Mejia - Rousselle (σχέση (1.2.16))}$$

Στα παραπάνω το σύμβολο  $[.]^{(3)}$ , σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία του μητρώου  $[.]$  έχουν υψωθεί στον κύβο, στοιχείο προς στοιχείο.

Από την εφαρμογή που παρουσιάζεται στη δημοσίευση του *Todini*, που αφορά τον επιμερισμό των ετησίων παροχών του Νείλου σε μηνιαίες, για το σταθμό του *Aswan* (μονοδιάστατο μοντέλο), προκύπτουν τα ακόλουθα ενδεικτικά στοιχεία: Οι συντελεστές ασυμμετρίας των ιστορικών μηνιαίων παροχών κυμαίνονται από 0 μέχρι 2.1, ενώ οι συντελεστές ασυμμετρίας των μεταβλητών  $V$ , που απαιτούνται για τη διατήρηση της ασυμμετρίας των παροχών, όπως υπολογίστηκαν από τη σχέση (1.2.19), φθάνουν σε πολύ μεγάλες τιμές, μέχρι και την τιμή 31. Τέλος οι τιμές των συντελεστών ασυμμετρίας των συνθετικών χρονοσειρών, που έδωσε το μοντέλο, συμφωνούν με τις αντίστοιχες ιστορικές, όταν οι τελευταίες είναι μικρές (κάτω από 1), αλλά διαφέρουν σημαντικά (περίπου 50%), όταν οι τελευταίες ξεπερνούν την τιμή 1. Όπως παρατηρεί ο *Todini*, οι αποκλίσεις αυτές οφείλονται στο



γεγονός ότι είναι αδύνατο να παραχθεί δείγμα με ασυμμετρία μεγαλύτερη από  $(n - 2) / (n-1)^{1/2}$ , όπου  $n$  το μέγεθος του δείγματος, ενώ οι ασυμμετρίες που θα πρέπει να έχουν οι μεταβλητές  $V$ , συχνά ξεπερνούν το όριο αυτό.

Πέρα από την παραπάνω αδυναμία, θα πρέπει ακόμα να σημειώσουμε ότι με τη διατήρηση και της τρίτης ροπής δεν είναι σίγουρο ότι επιτυγχάνεται και η διατήρηση των βασικών ιδιοτήτων της πραγματικής κατανομής, και ακόμα, για μικρά ιστορικά δείγματα, είναι αναξιόπιστη η εκτίμηση της τρίτης ροπής.

Τα παραπάνω προβλήματα αποφεύγονται με τη **δεύτερη κατηγορία μεθόδων**, που βασίζεται σε ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό των τμηματικών και αθροιστικών μεταβλητών, σε τρόπο ώστε οι προκύπτουσες μετασχηματισμένες μεταβλητές  $X$  και  $Z$ , να ακολουθούν την κανονική κατανομή. Στην περίπτωση αυτή, πριν εφαρμοσθεί το γραμμικό μοντέλο επιμερισμού, μελετώνται οι περιθώριες κατανομές των αθροιστικών και τμηματικών μεταβλητών, και επιλέγεται ο κατάλληλος μετασχηματισμός τους, με στόχο την κανονικοποίηση των κατανομών. Οι παράμετροι του μοντέλου εκτιμούνται τότε από τις μετασχηματισμένες χρονοσειρές, και τα διάγνυσματα αποκλίσεων  $\underline{W}$  ή  $\underline{Y}$  παράγονται με βάση την κανονική κατανομή.

Οι πρώτοι που εισήγαγαν αυτή την αντιμετώπιση είναι και πάλι οι *Valencia και Schaake* [1972], χρησιμοποιώντας ένα μετασχηματισμό τετραγωνικής ρίζας στις εποχιακές και μηνιαίες βροχοπτώσεις. Οι *Hoshi και Burges* [1979] εφάρμοσαν εκθετικούς μετασχηματισμούς στις ετήσιες και μηνιαίες παροχές, της μορφής:

$$Q' = a + \exp(Q)$$

και βρήκαν ότι οι μετασχηματισμένες παροχές ακολουθούν κανονικές κατανομές, πράγμα που ισοδυναμεί με θεώρηση λογαριθμοκανονικής κατανομής 3 παραμέτρων για τις μεταβλητές. Στη συνέχεια εφάρμοσαν το γραμμικό μοντέλο επιμερισμού για τις μετασχηματισμένες τιμές, κάνοντας και την εκτίμηση των παραμέτρων, και την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών στη βάση των μετασχηματισμένων τιμών.

Θα πρέπει να σημειώσουμε για την τελευταία κατηγορία μεθόδων, ότι παρόλο που μπορεί να δίνει λύση στο πρόβλημα της προσέγγισης των πραγματικών περιθώριων κατανομών των φυσικών χρονοσειρών, εντούτοις στην ουσία αναιρούν το μοντέλο επιμερισμού, αφού οι σχέσεις διατήρησης, καθώς και η βασική σχέση επιμερισμού (1.1.5), δεν αναφέρονται πλέον στις πραγματικές τιμές των μεταβλητών, αλλά σε μη γραμμικούς μετασχηματισμούς τους. Ανακύπτουν συνεπώς δύο προβλήματα. Πρώτο ότι οι μέσες τιμές, οι διασπορές και συνδιασπορές των συνθετικών σειρών των τμηματικών μεταβλητών δεν είναι ίσες με τις αντίστοιχες ροπές των ιστορικών χρονοσειρών. Δεύτερο και κυριότερο, ότι το άθροισμα των τιμών των τμηματικών μεταβλητών, που παράγονται από το μοντέλο σε ένα διάστημα της αθροιστικής χρονικής κλίμακας, δεν είναι πλέον ίσο με την τιμή της αντίστοιχης αθροιστικής μεταβλητής. Για την εξάλειψη αυτού του τελευταίου σοβαρού

μειονεκτήματος οι τιμές των τμηματικών μεταβλητών, που παράγονται από το μοντέλο, θα πρέπει στη συνέχεια να διορθωθούν κατάλληλα. Μια τέτοια διορθωτική διαδικασία έχει προταθεί από τους *Stedinger και Vogel* [1984].

Συμπερασματικά σημειώνουμε ότι οι λύσεις που δόθηκαν και για τις δύο αδυναμίες του γραμμικού μοντέλου, δηλαδή την έλλειψη αθροιστικής μνήμης και την αδυναμία αντιπροσώπευσης μη κανονικών μεταβλητών, δεν έχουν την θεωρητική πληρότητα και συνέπεια της αρχικής διατύπωσης του μοντέλου, αλλά θα πρέπει να χαρακτηριστούν προσεγγιστικές μέθοδοι που δίνουν πρακτικά ικανοποιητικές λύσεις στα σχετικά προβλήματα.

### 1.3. ΑΛΛΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ

#### 1.3.1. Το μοντέλο εβδομαδιαίων απορροών του Singh

Πρόκειται για μια εμπειρική τεχνική που αναπτύχθηκε από τον *Singh* [1979] και χρησιμοποιήθηκε από τον ίδιο για τον επιμερισμό μηνιαίων απορροών σε εβδομαδιαίες, σε μονοδιάστατη βάση. Αντί των κρονοσειρών των εβδομαδιαίων παροχών χρησιμοποιήθηκαν οι λόγοι  $R$  των εβδομαδιαίων παροχών προς τις μηνιαίες, που το μηνιαίο άθροισμα τους είναι ίσο με 1. Για τις μεταβλητές  $R$  έγινε η παραδοχή ότι περιγράφονται από ένα γραμμικό μοντέλο αυτοσυσχέτισης  $AR(1)$ . Η τεχνική παραγωγής των συνθετικών τιμών των  $R$  περιλαμβάνει δύο στάδια: Στο πρώτο στάδιο παράγονται αρχικές τιμές από το μοντέλο  $AR(1)$ , και στο δεύτερο παράγονται οι τελικές τιμές με αναλογική αναγωγή των αρχικών, ώστε το μηνιαίο άθροισμα τους να είναι ίσο με 1. Μέχρι εδώ η διαδικασία παραγωγής είναι ανεξάρτητη από την τιμή της μηνιαίας απορροής. Στη συνέχεια οι λόγοι  $R$  πολλαπλασιάζονται με τη μηνιαία απορροή, για να δώσουν τις εβδομαδιαίες απορροές.

#### 1.3.2. Το μοντέλο καταιγίδων Grace - Eagleson

Το μοντέλο αυτό δεν είναι πολύ διαδεδομένο σαν μοντέλο επιμερισμού, η αναφορά όμως σε αυτό γίνεται γιατί εισάγει μια διαφορετική λογική επιμερισμού, αλλά και γιατί αναφέρεται σε επιμερισμό βροχοπτώσεων, που είναι και το θέμα αυτής της εργασίας. Προτάθηκε από τους *Grace και Eagleson* [1966], και αναφέρεται στον χρονικό επιμερισμό ενός επεισοδίου βροχής σε μικρή χρονική κλίμακα. Η επιμεριστική τεχνική που εισάγει είναι η ακόλουθη: Το πρὸς επιμερισμό μέγεθος, που γενικά είναι μια μεταβλητή με πραγματικές τιμές, προσεγγίζεται με μια μεταβλητή με ακέραιες τιμές, έστω την  $\mu$ . Αν  $n$  είναι το πλήθος των τμηματικών μεταβλητών, τότε το πρόβλημα του επιμερισμού ισοδυναμεί με το πρόβλημα της τυχαίας τοποθέτησης  $\mu$  σφαιριδίων σε  $n$  κουτιά. Η συσχέτιση μεταξύ των τμηματικών μεταβλητών μπορεί να αναπαρασταθεί και πάλι με κάποια διαδικασία τοποθέτησης σφαιριδίων, άλλου τύπου. Πιο συγκεκριμένα η προτεινόμενη τεχνική επιμερισμού είναι η ακόλουθη:

1. Καθορίζεται η διάρκεια βροχής,  $D$  και το ύψος επεισοδίου βροχής,  $H$ . Στη συνέχεια τα δύο μεγέθη μετατρέπονται σε ακέραιες μονάδες, αφού καθοριστεί η θεμελιώδης μονάδα για το κάθε μέγεθος, ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια (π.χ. για το ύψος βροχής μπορεί να θεωρηθεί ως θεμελιώδης μονάδα το 0.1 mm).
2. Έστω  $n$  και  $\mu$  τα ακέραια μεγέθη που αντιπροσωπεύουν τα  $D$

και Η αντίστοιχα. Για αναπαράσταση του προβλήματος επιμερισμού θεωρούνται η κουτιά και μ μαύρα μπαλάκια, και παράλληλα χρησιμοποιούνται και πράσινα μπαλάκια για την περιγραφή της σειριακής συσχέτισης.

3. Επιλέγεται ένα κουτί, έστω το j, με διαδικασία πειράματος τύχης και με βάση κάποια αρχική κατανομή πιθανοτήτων επιλογής κουτιών, και τοποθετείται σε αυτό ένα μαύρο μπαλάκι.
4. Στο j κουτί τοποθετούνται ακόμα  $N_0$  πράσινα μπαλάκια, ενώ στα (j-1) και (j+1) κουτιά τοποθετούνται  $N_1$  πράσινα μπαλάκια, στα (j-2) και (j+2) κουτιά  $N_2$  πράσινα μπαλάκια, κ.ο.κ.
5. Τροποποιούνται οι πιθανότητες επιλογής κάθε κουτιού, για το επόμενο μπαλάκι. Έτσι η σχετική πιθανότητα να τοποθετηθεί το επόμενο μαύρο μπαλάκι στο k κουτί που περιέχει  $v_k$  πράσινα μπαλάκια, συγκρινόμενη με την πιθανότητα να τοποθετηθεί στο l κουτί, που περιέχει  $v_l$  πράσινα μπαλάκια, είναι:

$$P_{kl} = \frac{(v_k/N_0 + 1)}{(v_l/N_0 + 1)}$$

Το άθροισμα των απόλυτων πιθανοτήτων είναι ίσο με ένα.

6. Συνεχίζεται η ίδια διαδικασία μέχρι να τοποθετηθούν όλα τα μ μαύρα μπαλάκια στα η κουτιά. Το πρώτο και τελευταίο κουτί θα πρέπει να πάρουν τουλάχιστον από 1 μπαλάκι, δεδομένου ότι αυτά καθορίζουν τη διάρκεια της βροχής.

Εννοείται ότι η πιο πάνω διαδικασία πειραμάτων τύχης εκτελείται σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Σύμφωνα με τους συγγραφείς το μοντέλο τους δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Θα μπορούσαμε όμως να παρατηρήσουμε ότι δεν βασίζεται σε τεκμηριωμένη θεωρία διατήρησης ροπών ή άλλων παραμέτρων, και ότι απαιτεί αρκετά μεγάλη υπολογιστική διαδικασία.

### 1.3.3. Το μοντέλο ημερήσιων βροχοπτώσεων Schaake κλπ.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένα, το γραμμικό μοντέλο Valencia - Schaake, δεν μπορεί να προχωρήσει στον επιμερισμό της βροχής σε χρονικές κλίμακες μικρότερες από τη μηνιαία. Έτσι οι Schaake, Ganslaw, Fothergill και Harbaugh [1972], ανέπτυξαν μια διαφορετική τεχνική, κατάλληλη για τον επιμερισμό των μηνιαίων βροχοπτώσεων σε ημερήσιες, σε πολυδιάστατη βάση. Η τεχνική αυτή διατηρεί τις πιθανότητα μηδενικής βροχόπτωσης, και βασίζεται στην υπόθεση λογαριθμοκανονικών κατανομών για τις επιμέρους μεταβλητές.

Η τεχνική υποθέτει ένα σταθμό βάσης στον οποίο γίνεται σε πρώτη φάση ο επιμερισμός, και στη συνέχεια το υπολογιστικό σχήμα προχωρεί διαδοχικά στους

υπόλοιπους σταθμούς, παίρνοντας υπόψη σε κάθε νέο σταθμό τη συσχέτιση των υψών βροχής του με τα αντίστοιχα ήδη γνωστά ύψη βροχής του πλησιέστερου σταθμού. Το σχήμα αυτό χαρακτηρίζεται με τον όρο "δένδρο ελαχίστων αποστάσεων" (minimum spanning tree).

Για το σταθμό βάσης γίνονται οι εξής βασικές υποθέσεις:

- α. Οι πραγματοποιήσεις βροχής διέπονται από μια αλυσίδα Μάρκοφ (Markov chain) δύο καταστάσεων (βροχερή ή στεγνή ημέρα) και τάξης 1 (δηλαδή η πραγματοποίηση βροχής σήμερα εξαρτάται από τη χθεσινή κατάσταση).
- β. Τα ύψη βροχής διέπονται από τη λογαριθμοκανονική κατανομή. Ειδικά στην περίπτωση δύο διαδοχικών βροχερών ημερών υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των λογαρίθμων των δύο υψών βροχής.

Για τούς άλλους σταθμούς οι υποθέσεις είναι παρόμοιες, με τη διαφορά ότι στην αλυσίδα Μάρκοφ των πραγματοποιήσεων βροχής, παίρνεται υπόψη και η κατάσταση του σταθμού αναφοράς (του πλησιέστερου προηγούμενου σταθμού) την ίδια ημέρα, και ακόμα παίρνεται υπόψη και η συσχέτιση του ύψους βροχής του υπό μελέτη σταθμού με το αντίστοιχο ύψος του σταθμού αναφοράς για την ίδια ημέρα.

Η διαδικασία παραγωγής της τιμής του ύψους βροχής  $X_i$  ενός σταθμού για την  $i$  ημέρα, όταν είναι γνωστό το ύψος βροχής της προηγούμενης ημέρας  $X_{i-1}$ , καθώς και το ύψος βροχής  $Y_i$  του σταθμού αναφοράς την ίδια ημέρα  $i$ , είναι η ακόλουθη:

1. Ανάλογα με την κατάσταση, στην οποία ανήκουν τα  $Y_i$  και  $X_{i-1}$ , και με βάση τις πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας Μάρκοφ, καθορίζεται η πιθανότητα να είναι στεγνή η ημέρα  $i$  στον υπό μελέτη σταθμό, δηλ. η  $p = P(X_i = 0)$ .
2. Παράγεται ένας τυχαίος αριθμός  $U$  από την ομοιόμορφη κατανομή  $(0, 1)$ .
3. Αν  $U \leq p$  τότε η ημέρα  $i$  είναι στεγνή και  $X_i = 0$ . Αλλιώς παράγεται ένας τυχαίος αριθμός από την τυπική κανονική κατανομή, και από αυτόν υπολογίζεται η τιμή του  $\ln(X_i)$ , με βάση τη γραμμική εξίσωση που περιγράφει τη συσχέτιση μεταξύ των λογαρίθμων των μεταβλητών  $X_i$ ,  $X_{i-1}$ , και  $Y_i$ . Τέλος με απολογαρίθμηση υπολογίζεται η τιμή του  $X_i$ .

Ειδικά για τα ύψη βροχής του σταθμού βάσης δεν έχει έννοια η μεταβλητή  $Y_i$ , οπότε τα παραπάνω τροποποιούνται ανάλογα. Μέχρι εδώ η τεχνική είναι καθαρά σειριακή, χωρίς να έχει καμιά σχέση με επιμερισμό. Συνεπώς το άθροισμα  $\Sigma D$  των ημερήσιων υψών βροχής κάθε σταθμού, που παράγονται, δεν είναι ίσο με το δεδομένο μηνιαίο ύψος βροχής  $H$ . Έτσι τα ύψη αυτά διωρθώνονται, στη συνέχεια, αφού πολλαπλασιαστούν με το συντελεστή αναγωγής:  $\delta = H / \Sigma D$ .

Επομένως, και σε αυτή την περίπτωση έχουμε μια καθαρά εμπειρική τεχνική, χωρίς θεωρητική κάλυψη των ζητημάτων διατήρησης.

#### 1.3.4. Το μοντέλο επιμερισμού καταιγίδων των Woolhiser και Osborn

Το μοντέλο αυτό των *Woolhiser και Osborn* [1985], περιγράφεται αναλυτικά στη βιβλιογραφική ανασκόπηση του κεφαλαίου 2, μαζί με άλλα σύγχρονα μοντέλα βροχής (υποπαράγραφος 2.4.2.). Το μοντέλο επιμερίζει το ύψος βροχής μιας καταιγίδας σε 10 επιμέρους τμήματα ίσης διάρκειας (δηλαδή η τμηματική χρονική κλίμακα είναι σταθερή για κάθε καταιγίδα, αλλά μεταβάλλεται από καταιγίδα σε καταιγίδα ανάλογα με τη διάρκεια της, ενώ το πλήθος των τμηματικών μεταβλητών είναι πάντα σταθερό (=10)). Σημειώνεται ότι ως προς την τεχνική επιμερισμού μοιάζει με το δυναμικό μοντέλο επιμερισμού, αλλά ως προς τη θεμελίωση του είναι παρόμοιο με το μοντέλο Singh (υποπαράγραφος 1.3.1.), με την έννοια ότι οι βασικές του υποθέσεις και εξισώσεις δεν αφορούν την αθροιστική ή τις τμηματικές μεταβλητές, αλλά κάποιους μετασχηματισμούς τους που παίρνουν τιμές μεταξύ 0 και 1.

#### 1.3.5. Το μοντέλο βροχής των Marien και Vandewiele

Και αυτό το μοντέλο (*Marien και Vandewiele* [1986]) περιγράφεται αναλυτικά στη βιβλιογραφική ανασκόπηση του κεφαλαίου 2, (υποπαράγραφος 2.4.2.). Δεν είναι στο σύνολο του ένα μοντέλο επιμερισμού, αλλά κυρίως ένα μοντέλο σειριακής προσομοίωσης που συνδυάζεται με ένα μοντέλο επιμερισμού, προκειμένου να παράγει την εσωτερική κατανομή του ύψους βροχής σε κάθε επεισόδιο. Η τεχνική επιμερισμού που χρησιμοποιεί είναι μαθηματικά θεμελιωμένη, και μπορεί να θεωρηθεί σαν μια ειδική οριακή περίπτωση του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού, όπου οι τμηματικές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κατανομή γάμα. Η περίπτωση αυτή έχει μελετηθεί ιδιαίτερα και στην παρούσα εργασία.

#### 1.4. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ

##### 1.4.1. Η ανάγκη για την ανάπτυξη ενός νέου μοντέλου επιμερισμού

Το γραμμικό μοντέλο Valencia-Schaake και οι τροποποιημένες εκδόσεις του, δεν είναι κατάλληλο για εφαρμογή σε βροχοπτώσεις, ιδιαίτερα σε μικρή χρονική κλίμακα. Το βασικό εμπόδιο προκύπτει από την ασυμφωνία των έντονα ασύμμετρων κατανομών του ύψους βροχής και της κανονικής (Gauss) οριακής συμπεριφοράς του μοντέλου, που εξηγήθηκε ήδη στην υποπαράγραφο 1.2.2. Πέρα από αυτό όμως, στη μικρή χρονική κλίμακα υπάρχει μια εξίσου βασική δυσκολία, που οφείλεται στον διαλείποντα χαρακτήρα της βροχόπτωσης. Έτσι αν η αθροιστική χρονική κλίμακα είναι η κλίμακα του επεισοδίου βροχής, και η τμηματική είναι η ωριαία, τότε είναι σαφές ότι το πλήθος των τμηματικών μεταβλητών σε κάθε στάδιο επιμερισμού είναι μεταβλητό. Το ίδιο συμβαίνει και με τον επιμερισμό από τη μηνιαία κλίμακα στην κλίμακα του επεισοδίου βροχής. Εξ άλλου, η παρουσία μηδενικών τιμών του ύψους βροχής σε ορισμένα διαστήματα της τμηματικής χρονικής κλίμακας, όταν αυτή είναι η ημερήσια ή η ωριαία, καθιστά αδύνατη την εφαρμογή του γραμμικού μοντέλου, που όπως εξηγήθηκε στην υποπαράγραφο 1.2.2., δεν είναι δυνατό να παράγει μηδενικές τιμές των τμηματικών μεταβλητών με πεπερασμένη πιθανότητα.

Από τα άλλα μοντέλα επιμερισμού, που περιγράφηκαν στην παράγραφο 1.3., κανένα δεν έχει τη γενική και συστηματική μορφή του γραμμικού μοντέλου. Για την κάλυψη αυτού του κενού, αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή το **δυναμικό μοντέλο επιμερισμού**, που να μπορεί να καλύπτει τις πιο πάνω ιδιομορφίες που παρουσιάζει ο επιμερισμός της βροχόπτωσης, δηλαδή:

1. Να λειτουργεί με μεταβλητό αριθμό τμηματικών μεταβλητών σε κάθε στάδιο (ή ισοδύναμα με μεταβλητή αθροιστική και τμηματική χρονική κλίμακα). Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι παράμετροι του θα μπορούν να υπολογίζονται από απλές αναλυτικές σχέσεις, χωρίς να απαιτείται σε κάθε στάδιο να γίνονται πολύπλοκες αριθμητικές επιλύσεις (πχ. επίλυση συστημάτων εξισώσεων, γραμμικών και μη, όπως στην περίπτωση του γραμμικού μοντέλου επιμερισμού).
2. Να επεξεργάζεται μεταβλητές με ασυνεχείς συναρτήσεις κατανομής, όπως το ημερήσιο ή το ωριαίο ύψος βροχής.
3. Να επεξεργάζεται μεταβλητές με έντονα ασύμμετρες συναρ-

τήσεις κατανομής. Λόγω της γενικευμένης χρήσης της κατανομής γάμα για τα ύψη βροχής, είναι επιθυμητό το μοντέλο να παρουσιάζει οριακή συμπεριφορά τύπου γάμα.

#### 1.4.2. Γενική συλλογιστική του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού

Το δυναμικό μοντέλο επιμερισμού αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε στην εργασία αυτή σε σημειακή βάση. Το μοντέλο είναι γενικά πολύ ευέλικτο, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για το πολυδιάστατο πρόβλημα επιμερισμού, μετά από μια κατάλληλη γενίκευση του. Στην παράγραφο αυτή, αλλά και στις αμέσως επόμενες, γίνεται αποκλειστική αναφορά στο σημειακό μοντέλο. Μερικές παρατηρήσεις για τις δυνατότητες και τις τεχνικές γενίκευσης του μοντέλου σε πολυδιάστατη βάση, αναφέρονται στην παράγραφο 1.8.

Έστω το μονοδιάστατο πρόβλημα επιμερισμού με  $K$  τμηματικές μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots, X_K$  και αθροιστική μεταβλητή  $Z$ . Για απλοποίηση προς το παρόν ας αγνοήσουμε την αθροιστική μνήμη μεταξύ των μεταβλητών, δηλαδή ας δεχτούμε ότι οι τμηματικές και η αθροιστική μεταβλητή του παρόντος σταδίου δεν έχουν καμιά εξάρτηση με μεταβλητές προηγούμενων σταδίων. Η βασική σχέση επιμερισμού είναι:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_{K-1} + X_K = Z \quad (1.1.7)$$

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τμηματικών και της αθροιστικής μεταβλητής είναι η:

$$F_0 = F_{X,Z}(x_1, x_2, \dots, x_K ; Z) \quad (1.1.11)$$

Ας δούμε τώρα αναλυτικά τις αρχές που συνιστούν το λογικό σχήμα του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού:

##### 1. Επιμερισμός βήμα προς βήμα

Στο δυναμικό μοντέλο ο επιμερισμός γίνεται με μια τεχνική "βήμα προς βήμα". Στο πρώτο βήμα παράγεται η τιμή της  $X_1$ , στο δεύτερο η τιμή της  $X_2$ , κ.ο.κ. Ως προς αυτό το σημείο το δυναμικό μοντέλο είναι τελείως διαφορετικό από το γραμμικό μοντέλο, όπου ο επιμερισμός είναι "καθολικός", αφού οι τιμές των μεταβλητών παράγονται ταυτόχρονα από τις σχέσεις (1.2.6) και 1.2.7).

##### 2. Μοντέλο διχασμού

Η τεχνική του επιμερισμού στηρίζεται στην βασική τεχνική του διχασμού. Σε κάθε βήμα επιμερισμού πραγματοποιείται ένας θεμελιώδης επιμερισμός σε δύο τμηματικές μεταβλη-



τές (δικασμός). Έτσι στην αρχή του  $i$  βήματος είναι γνωστές οι τιμές των μεταβλητών  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}$ , και η βασική εξίσωση επιμερισμού μπορεί να γραφεί:

$$X_i + Y_i = S_i \quad (1.4.1)$$

όπου

$$Y_i = X_{i+1} + \dots + X_k \quad (1.4.2)$$

$$S_i = Z - X_1 - X_2 - \dots - X_{i-1} \quad (1.4.3)$$

Η μεταβλητή  $S_i$ , στην αρχή του βήματος  $i$ , έχει γνωστή τιμή,  $s_i$ , και, μετά την παραπάνω διατύπωση, το πρόβλημα του βήματος  $i$  συνίσταται στο δικασμό αυτής της τιμής σε δύο τιμές  $x_i$  και  $y_i$ .

### 3. Ισοδυναμία των βημάτων επιμερισμού

Όλα τα βήματα επιμερισμού είναι μαθηματικά ισοδύναμα, αφού κάθε βήμα συνίσταται σε μια επανάληψη της ίδιας θεμελιώδους διαδικασίας δικασμού.

### 4. Συνεχής αναπροσαρμογή των παραμέτρων του μοντέλου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην υποπαράγραφο 1.1.2., το μοντέλο επιμερισμού στηρίζεται στη διατήρηση περιορισμένου αριθμού στατιστικών ροπών (περιθώριων και αμοιβαίων) των αθροιστικών και τμηματικών μεταβλητών, παρά στη διατήρηση της πλήρους συνάρτησης κατανομής (1.1.11). Οι ροπές αυτές αποτελούν και τις παραμέτρους του μοντέλου. Στη γενική περίπτωση στοχαστικά εξαρτημένων τμηματικών μεταβλητών, η "πληροφορία"  $X_i = x_i$  που παράγεται στο βήμα επιμερισμού  $i$ , επηρεάζει την συνάρτηση κατανομής των υπόλοιπων τμηματικών μεταβλητών, και συνεπώς και τις παραμέτρους του μοντέλου. Κατά συνέπεια μετά το τέλος κάθε βήματος επιμερισμού αναθεωρούνται οι ροπές των υπόλοιπων, επόμενων στη σειρά, τμηματικών μεταβλητών. Έτσι για το βήμα  $i$  χρησιμοποιούνται από το μοντέλο σαν παράμετροι δεσμευμένες ροπές της μορφής:

$$E[X_j^m | X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}]$$

ενώ για το βήμα  $i+1$  ροπές της μορφής:

$$E[X_j^m | X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i]$$

Παρόμοια συμβαίνουν και με τις αμοιβαίες στατιστικές ροπές.

### 5. Εισαγωγή της αναλογικής μεταβλητής

Η επεξεργασία μη αρνητικών στοχαστικών μεταβλητών με κατανομή γάμα διευκολύνεται με την εισαγωγή της αναλογικής μεταβλητής. Για το βήμα επιμερισμού  $i$  η αναλογική μεταβλητή  $P_i$  ορίζεται από τη σχέση:

$$X_i = P_i S_i \quad (1.4.4)$$

Με την εισαγωγή της αναλογικής μεταβλητής, η παραγωγή της  $X_i$ , στο βήμα  $i$ , μπορεί να γίνει από τη σχέση  $x_i = p_i s_i$  όπου η  $p_i$  παράγεται με βάση τη συνάρτηση κατανομής:

$$F(P_i | S_i = s_i, X_i = x_i, \dots, X_{i-1} = x_{i-1})$$

που κατά βάση περιγράφεται από ροπές της μορφής:

$$E[P_i^m | S_i = s_i, X_i = x_i, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}]$$

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι για μη αρνητικές τμηματικές και αθροιστικές μεταβλητές ισχύει:

$$0 \leq X_i \leq S_i \quad (1.4.5)$$

και κατά συνέπεια

$$0 \leq P_i \leq 1 \quad (1.4.6)$$

Ο περιορισμός του πεδίου ορισμού της αναλογικής μεταβλητής στο (ενιαίο για όλα τα βήματα) διάστημα  $[0,1]$ , διευκολύνει την ενιαία αντιμετώπιση όλων των βημάτων επιμερισμού.

Η εισαγωγή αθροιστικής μνήμης στο δυναμικό μοντέλο επιμερισμού δεν επηρεάζει ουσιαστικά το παραπάνω λογικό σχήμα. Θα πρέπει απλώς να προστεθούν στις πιο πάνω εκφράσεις δεσμευμένων ροπών, ως δεσμεύσεις, οι μεταβλητές των προηγούμενων σταδίων επιμερισμού.

### 1.4.3. Απαιτήσεις Διατήρησης

Παίρνοντας υπόψη τις ιδιαίτερες απαιτήσεις του προβλήματος επιμερισμού της βροχόπτωσης, και το γεγονός ότι η πλήρης διατήρηση της συνάρτησης κατανομής (1.1.11) είναι στη γενική περίπτωση ανέφικτη, διατυπώνουμε τους ακόλουθους όρους διατήρησης στους οποίους στηρίχτηκε το δυναμικό μοντέλο επιμερισμού:

1. Διατήρηση της βασικής σχέσης επιμερισμού δηλαδή της (1.1.7) ή της (1.1.5).

2. Διατήρηση των μέσων τιμών των τμηματικών μεταβλητών.  
Αυτό σημαίνει ότι οι μεταβλητές  $X_i$  του μοντέλου απαιτείται να έχουν μέσες τιμές ίσες με τις εκ των προτέρων γνωστές τιμές  $\mu_i$ , δηλαδή:

$$E[X_i] = \mu_i \quad (1.4.7)$$

Άμεση συνέπεια της διατήρησης των μέσων τιμών είναι η σχέση:

$$E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_k] = E[Z] \quad (1.4.8)$$

3. Διατήρηση των διασπορών των τμηματικών μεταβλητών,  
δηλαδή οι μεταβλητές  $X_i$  του μοντέλου απαιτείται να έχουν διασπορές ίσες με τις εκ των προτέρων καθορισμένες τιμές  $\sigma_i^2$ , ήτοι:

$$\text{Var}[X_i] = \sigma_i^2 \quad (1.4.9)$$

4. Διατήρηση των συνδιασπορών μεταξύ των τμηματικών μεταβλητών, δηλαδή οι μεταβλητές  $X_i$  του μοντέλου απαιτείται να έχουν συνδιασπορές ίσες με τις εκ των προτέρων καθορισμένες τιμές  $\sigma_{ij}$ , ήτοι:

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = \sigma_{ij}, \quad i \neq j \quad (1.4.10)$$

Άμεση συνέπεια του όρου αυτού και του προηγούμενου είναι και η διατήρηση των συνδιασπορών μεταξύ τμηματικών και αθροιστικών μεταβλητών, δηλαδή:

$$\text{Cov}[X_i, Z] = \sigma_{iZ}, \quad (1.4.11)$$

όπου

$$\sigma_{iZ} = \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{ij} + \sum_{j=i+1}^k \sigma_{ij} \quad (1.4.12)$$

Επίσης συνέπεια των ίδιων όρων είναι και η σχέση:

$$\sum_{i=1}^k \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \text{Cov}[X_i, X_j] = \text{Var}[Z] \quad (1.4.13)$$

Για ένα μοντέλο με μεταβλητό αριθμό τμηματικών μεταβλητών, και με μεταβαλλόμενα χαρακτηριστικά από στάδιο σε στάδιο, είναι πρακτικά αδύνατο να θεωρούνται εξ αρχής ότι οι  $(k^2+k)/2$  παράμετροι που περιγράφουν διασπορές και συνδιασπορές είναι ανεξάρτητες. Μια εύλογη παραδοχή για

τη δομή της συσχέτισης μεταξύ των τμηματικών μεταβλητών μπορεί να μειώσει δραστικά τον αριθμό των παραμέτρων. Στην εργασία αυτή έγινε η παραδοχή (που άλλωστε ελέγχθηκε με βάση στοιχεία βροχοπτώσεων), ότι η ακολουθία στοχαστικών μεταβλητών  $\{X_1, X_2, \dots\}$  έχει Μαρκοβιανή δομή, και συνεπώς για κάθε

$$i < j < l$$

ισχύει

$$\text{Cov}[X_i, X_j] \text{Cov}[X_j, X_l] = \text{Cov}[X_i, X_l] \text{Var}[X_j] \quad (1.4.14)$$

Το θέμα αυτό όμως θα αναλυθεί σε επόμενες παραγράφους.

5. Διατήρηση των πιθανοτήτων μηδενικής τιμής των τμηματικών μεταβλητών, εφόσον οι συναρτήσεις κατανομής τους παρουσιάζουν ασυνέχεια στο σημείο  $x_i = 0$ . Αυτό σημαίνει ότι οι μεταβλητές  $X_i$  του μοντέλου απαιτείται να έχουν πιθανότητες μηδενικής τιμής ίσες με προκαθορισμένες τιμές, ήτοι:

$$P(X_i=0) = p_i \quad (1.4.15)$$

Εννοείται ότι ο όρος αυτός δεν έχει πάντα νόημα, αφού η παρουσία ασυνεχειών στις συναρτήσεις κατανομής δεν αποτελεί κανόνα.

Σε ορισμένες περιπτώσεις που οι τμηματικές μεταβλητές είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, ο όρος 4 μεταπίπτει ουσιαστικά στη διατήρηση μηδενικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών αυτών. Η διατήρηση ροπών μεγαλύτερης τάξης, χωρίς να τίθεται εδώ σαν προϋπόθεση, διερευνάται σε επόμενες παραγράφους. Πιο συγκεκριμένα το θέμα που εξετάζεται είναι η διατήρηση των περιθωρίων ροπών τρίτης τάξης. Τέλος διερευνούνται ξεχωριστά οι προϋποθέσεις για την πλήρη διατήρηση της από κοινού συνάρτησης κατανομής (1.1.11).

#### 1.4.4. Γενική μεθοδολογία παραγωγής εξαρτημένων στοχαστικών μεταβλητών

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένα, το μοντέλο ακολουθεί την τεχνική της "βήμα προς βήμα" παραγωγής (generation) των τιμών των στοχαστικών μεταβλητών, κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης. Η παραγωγή αυτή γίνεται με βάση τυχαίους αριθμούς από κατάλληλες κατανομές.

Στις κλασικές μεθόδους προσομοίωσης η παραγωγή τυχαίων αριθμών γίνεται

καθολικά, και όχι βήμα προς βήμα. Η ύπαρξη στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών του προβλήματος προσομοίωσης αντιμετωπίζεται συνήθως με την εισαγωγή ενός συνόλου κατάλληλων βοηθητικών τυχαίων μεταβλητών, στοχαστικά ανεξάρτητων μεταξύ τους, που συνδέονται με τις "πραγματικές" μεταβλητές με σχέσεις αναδρομικής συνήθως μορφής. Έτσι η παραγωγή των τιμών των "πραγματικών" στοχαστικών μεταβλητών δεν γίνεται άμεσα, αλλά πρώτα παράγεται το σύνολο των ανεξάρτητων βοηθητικών μεταβλητών, και στη συνέχεια υπολογίζονται οι τιμές των "πραγματικών" μεταβλητών, από τις αντίστοιχες σχέσεις.

Για να γίνει πιο σαφής η παραπάνω διαδικασία ας χρησιμοποιήσουμε σαν παράδειγμα την μόνιμη ανέλιξη αυτοσυσχέτισης α' τάξης σε διακριτό χρόνο. Έστω ότι  $(X_i, i=1,2,\dots)$  είναι μια τέτοια ανέλιξη, με μέση τιμή  $\mu$ , τυπική απόκλιση  $\sigma$  και συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $\rho$ , και ζητείται η παραγωγή μιας συνθετικής δειγματοσυνάρτησης μεγέθους  $N=1000$ . Σύμφωνα με την παραπάνω κλασική μέθοδο, η παραγωγή των  $N$  τιμών  $X_i$  θα στηριχτεί στη σχέση:

$$X_i = \rho X_{i-1} + V_i$$

όπου οι βοηθητικές μεταβλητές  $V_i$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από τα  $X_1, \dots, X_{i-1}$ . Θα παραχθούν λοιπόν πρώτα οι  $N$  τιμές των  $V_i$  και στη συνέχεια θα υπολογιστούν οι τιμές των  $X_i$  από την παραπάνω σχέση.

Στα μοντέλα αυτής της εργασίας υπάρχει μια διαφοροποίηση στον τρόπο με τον οποίο παράγονται οι τιμές των "πραγματικών" μεταβλητών. Η διαφοροποίηση αυτή συνίσταται (α) στην βήμα προς βήμα παραγωγή των τιμών των τυχαίων μεταβλητών και (β) στην άμεση παραγωγή τιμών των "πραγματικών" μεταβλητών (στοχαστικά εξαρτημένων μεταξύ τους ή όχι), χωρίς τη μεσολάβηση βοηθητικών μεταβλητών. Για να ληφθεί υπόψη η εξάρτηση με τις μεταβλητές προηγούμενων βημάτων, δεν χρησιμοποιούνται οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των εν λόγω μεταβλητών, αλλά οι αντίστοιχες δεσμευμένες συναρτήσεις, παίρνοντας ως δεσμεύσεις τις τιμές των μεταβλητών προηγούμενων βημάτων. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η διατήρηση και των περιθωρίων κατανομών των μεταβλητών, αλλά και της στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ τους.

Έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω παράδειγμα, με την προτεινόμενη μέθοδο η παραγωγή των  $X_i$  θα γίνει άμεσα, χωρίς τη μεσολάβηση των  $V_i$ , και στο  $i$  βήμα, στο οποίο θα είναι ήδη γνωστή η τιμή  $x_{i-1}$ , θα χρησιμοποιηθεί η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής  $F[x_i | X_{i-1}=x_{i-1}]$ , με μέση τιμή  $\{\mu + \rho(x_{i-1} - \mu)\}$  και διασπορά  $\{\sigma^2(1-\rho^2)\}$ .

Με τη προτεινόμενη μέθοδο δεν είναι πάντα δυνατό να αποφύγουμε τελείως τη χρήση βοηθητικών τυχαίων μεταβλητών, αλλά περιορίζουμε τη χρήση τους μόνο στο θεωρητικό επίπεδο, δηλαδή στην κατάρτιση των εκφράσεων των δεσμευμένων ροπών.

Οι δύο μέθοδοι είναι θεωρητικά ισοδύναμες. Το σαφές πλεονέκτημα της προτεινόμενης μεθόδου ανακύπτει όταν το πεδίο ορισμού των στοχαστικών μεταβλητών που προσομοιώνονται δεν είναι το  $(-\infty, +\infty)$ , όπως συμβαίνει στις κατανομές εκθετική, γάμα, βήτα, κλπ. Σε τέτοιες περιπτώσεις η χρήση βοηθητικών μεταβλητών μειονεκτεί, γιατί το πεδίο ορισμού τους μεταβάλλεται συναρτήσει των τιμών των μεταβλητών προηγούμενων βημάτων. Έτσι στο πιο πάνω παράδειγμα, για  $X_i \geq 0$ , το πεδίο ορισμού της  $V_i$  είναι το  $[-\rho x_{i-1}, +\infty)$ . Το γεγονός αυτό αναιρεί τη δυνατότητα ταυτόχρονης παραγωγής όλων των  $V_i$ , και συγχρόνως επιβάλλει τη χρήση μετασχηματισμών τους, με τους οποίους θα μπορέσει να γίνει απλοποίηση του πεδίου ορισμού. Με την προτεινόμενη μέθοδο τα προβλήματα αυτά απόφεύγονται.

Ένα άλλο πλεονέκτημα της προτεινόμενης μεθόδου, ειδικά για το πρόβλημα επιμερισμού, στο οποίο οι μεταβλητές ακολουθούν τη βασική δέσμευση (1.1.5), ή για οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα όπου οι μεταβλητές ακολουθούν μια βασική δέσμευση, είναι το γεγονός ότι επιτρέπει να χρησιμοποιείται σε κάθε βήμα η βασική δέσμευση ως έχει, χωρίς να παίρνει κάθε φορά διαφορετικές εκφράσεις με τη χρήση βοηθητικών μεταβλητών.

## 1.5. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΧΑΣΜΟΥ

### 1.5.1. Ορισμοί και συμβολισμοί

Θεωρούμε τις στοχαστικές μεταβλητές  $X$ ,  $Y$  και  $Z$ , στοχαστικά εξαρτημένες, για τις οποίες ισχύει η βασική σχέση:

$$X + Y = Z \quad (1.5.1)$$

Σε αντιστοιχία με την ορολογία της παραγράφου 1.1, οι  $X$  και  $Y$  θα ονομάζονται τμηματικές μεταβλητές και η  $Z$  αθροιστική μεταβλητή. Για τις πρώτης και δεύτερης τάξης ροπές τους ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mu_X + \mu_Y = \mu_Z \quad (1.5.2)$$

$$\sigma_X^2 + \sigma_{XY} = \sigma_{XZ} \quad (1.5.3)$$

$$\sigma_{XY} + \sigma_Y^2 = \sigma_{YZ} \quad (1.5.4)$$

$$\sigma_{XZ} + \sigma_{YZ} = \sigma_Z^2 \quad (1.5.5)$$

Άμεση συνέπεια των (1.5.3) και (1.5.4) είναι η

$$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY} = \sigma_Z^2 \quad (1.5.6)$$

Στις παραπάνω σχέσεις τα  $\mu$  συμβολίζουν μέσες τιμές και τα  $\sigma$  διασπορές και συνδιασπορές.

Στην ειδική περίπτωση που οι  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες, θα είναι  $\sigma_{XY}=0$ , οπότε οι (1.5.3) έως (1.5.5) παίρνουν τη μορφή

$$\sigma_X^2 = \sigma_{XZ} \quad (1.5.7)$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{YZ} \quad (1.5.8)$$

$$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = \sigma_Z^2 \quad (1.5.9)$$

Για να υπάρχει σύνδεση με τα προηγούμενα, θα θεωρήσουμε ότι οι μεταβλητές  $X$ ,  $Y$  και  $Z$  αποτελούν εν γένει μερικά αθροίσματα τμηματικών μεταβλητών ενός προβλήματος επιμερισμού με περισσότερα από δύο βήματα (βλ. και σχέσεις (1.4.1) έως (1.4.3)), και οι πιο πάνω ροπές είναι οι δεσμευμένες ροπές του παρόντος βήματος επιμερισμού, στις οποίες περιέχεται ως δέσμευση όλη η πληροφορία των προηγούμενων βημάτων ή και σταδίων.

Το πρόβλημα του επιμερισμού στην περίπτωση αυτή των δύο τμηματικών μεταβλητών ή, πιο σύντομα, το πρόβλημα δικασμού τίθεται με τον ακόλουθο τρόπο: Αν είναι γνωστή η τιμή της μεταβλητής  $Z$ , να βρεθεί τρόπος παραγωγής των τιμών των άλλων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ , που να διατηρεί την συνάρτηση κατανομής  $F_{XYZ}(x,y,z)$ . Στην ουσία αρκεί να βρεθεί η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής  $F_{X|Z}(x|z=z)$ , και

να παραχθεί από αυτή η τιμή της  $X$ , οπότε η τιμή της  $Y$  προκύπτει ως η διαφορά  $y = z - x$ . Στη γενικότητα του το πρόβλημα αυτό δεν επιλύεται αναλυτικά και γι' αυτό θα καταφύγουμε στην προσέγγιση του καθορισμού της συνάρτησης αυτής, μέσω των ροπών των μεταβλητών, που πάντως και αυτή η προσέγγιση είναι ένα αρκετά πολύπλοκο μαθηματικό πρόβλημα.

Όπως αναφέρθηκε ήδη στην υποπαράγραφο 1.4.2, η έκφραση δεσμευμένων ροπών για δεδομένη τιμή της αθροιστικής μεταβλητής διευκολύνεται με την εισαγωγή της **αναλογικής μεταβλητής**,  $P$ , που ορίζεται από τη σχέση:

$$X = P \cdot Z \quad (1.5.10)$$

Με την εισαγωγή της αναλογικής μεταβλητής, η παραγωγή της τιμής της  $X$ , μπορεί να γίνει από τη σχέση  $x = p \cdot z$  όπου η  $p$  παράγεται με βάση τη συνάρτηση κατανομής  $F_{p|z}(p|z=z)$ . Κατά συνέπεια το πρόβλημα του καθορισμού της δεσμευμένης συνάρτησης κατανομής  $F_{x|z}$  μετατίθεται στο ισοδύναμο πρόβλημα του καθορισμού της δεσμευμένης συνάρτησης κατανομής  $F_{p|z}$ , το οποίο μπορεί να μελετηθεί απλούστερα.

Για μη αρνητικές τμηματικές και αθροιστικές μεταβλητές θα ισχύει:

$$0 \leq X \leq Z \quad (1.5.11)$$

και κατά συνέπεια

$$0 \leq P \leq 1 \quad (1.5.12)$$

Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή  $P$  πρακτικά εκφράζει την αναλογία της τμηματικής μεταβλητής  $X$  στην αθροιστική μεταβλητή  $Z$ .

### 1.5.2. Υπολογισμός των ροπών της αναλογικής μεταβλητής

Το πρώτο βήμα για τη μελέτη του προβλήματος δικασμού είναι να υπολογίσουμε τις περιθώριες ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης της αναλογικής μεταβλητής, συναρτήσει των ροπών των τμηματικών και της αθροιστικής μεταβλητής, καθώς και τη συνδιασπορά της με την αθροιστική μεταβλητή.

Έστω  $\mu_p$  και  $\sigma_p$  η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της  $P$  και  $\sigma_{pz}$  η συνδιασπορά μεταξύ  $P$  και  $Z$ . Από τη σχέση (1.5.10) προκύπτει άμεσα η ακόλουθη:

$$X - \mu_x = (P - \mu_p)(Z - \mu_z) + \mu_p(Z - \mu_z) + \mu_z(P - \mu_p) + \mu_z\mu_p - \mu_x \quad (1.5.13)$$

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές στα δύο μέλη της παραπάνω, και δεδομένου ότι  $E[X - \mu_x] = E[Z - \mu_z] = E[P - \mu_p] = 0$ , θα έχουμε:

$$0 = \sigma_{pz} + \mu_z\mu_p - \mu_x \quad (1.5.14)$$

Εξ άλλου πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (1.5.13) με  $(Z - \mu_z)$  και παίρνοντας



πάλι αναμενόμενες τιμές έχουμε:

$$E[(X-\mu_X)(Z-\mu_Z)] = E[(P-\mu_P)(Z-\mu_Z)^2] + \mu_P E[(Z-\mu_Z)^2] \\ + \mu_Z E[(P-\mu_P)(Z-\mu_Z)] + (\mu_Z \mu_P - \mu_X)(Z-\mu_Z) \quad (1.5.15)$$

Τέλος υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της (1.5.13), και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές έχουμε:

$$E[(X-\mu_X)^2] = E[(P-\mu_P)^2(Z-\mu_Z)^2] + \mu_P^2 E[(Z-\mu_Z)^2] + \mu_Z^2 E[(P-\mu_P)^2] \\ + (\mu_P \mu_Z - \mu_X)^2 + 2\mu_P E[(P-\mu_P)(Z-\mu_Z)^2] \\ + 2\mu_Z E[(P-\mu_P)^2(Z-\mu_Z)] + 2(\mu_P \mu_Z - \mu_X) E[(P-\mu_P)(Z-\mu_Z)] + \\ + 2\mu_P \mu_Z E[(P-\mu_P)(Z-\mu_Z)] + 2\mu_P(\mu_P \mu_Z - \mu_X) E[Z-\mu_Z] \\ + 2\mu_Z(\mu_P \mu_Z - \mu_X) E[P-\mu_P] \quad (1.5.16)$$

Στις σχέσεις (1.5.15) και (1.5.16) εμφανίζονται εκφράσεις αμοιβαίων ροπών των μεταβλητών P και Z τάξης μεγαλύτερης από 2. Οι εκφράσεις αυτές μπορούν να υπολογιστούν εύκολα συναρτήσει περιθώριων ροπών μικρότερης τάξης στην περίπτωση που οι P και Z είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, αλλά στη γενική περίπτωση δεν μπορεί να γίνει τέτοιος υπολογισμός. Στην πράξη η εξάρτηση αυτή είναι μικρή ή μηδενική, σε αντίθεση με την στοχαστική εξάρτηση μεταξύ X και Z που είναι έντονη. Για να προχωρήσουμε θα θεωρήσουμε μια γραμμική εξάρτηση μεταξύ των P και Z, δηλαδή της μορφής:

$$P = \alpha Z + \Phi \quad (1.5.17)$$

όπου  $\Phi$  είναι τυχαία μεταβλητή στοχαστικά ανεξάρτητη της Z. Η θεωρία πιθανοτήτων δίνει τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\alpha = \sigma_{PZ} / \sigma_Z^2 \quad (1.5.18)$$

$$\mu_\Phi = \mu_P - (\sigma_{PZ} / \sigma_Z^2) \mu_Z \quad (1.5.19)$$

$$\sigma_\Phi^2 = \sigma_P^2 - \sigma_{PZ}^2 / \sigma_Z^2 \quad (1.5.20)$$

ενώ είναι προφανής η σχέση:

$$P - \mu_P = \alpha(Z - \mu_Z) + (\Phi - \mu_\Phi) \quad (1.5.21)$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπό μελέτη εκφράσεις ροπών των μεταβλητών P και Z. Θα έχουμε<sup>1</sup>:

$$E[(P-\mu_P)(Z-\mu_Z)^2] = (\mu_{3Z}/\sigma_Z^2) \sigma_{PZ} = \varepsilon_Z \sigma_Z \sigma_{PZ}$$

$$E[(P-\mu_P)^2(Z-\mu_Z)] = (\mu_{3Z}/\sigma_Z^4) \sigma_{PZ}^2 = \varepsilon_Z \sigma_{PZ}^2 / \sigma_Z$$

1. Η απόδειξη των σχέσεων αυτών υπάρχει στο τέλος της υποπαραγράφου

$$\begin{aligned} E[(P-\mu_P)^2(Z-\mu_Z)^2] &= (\mu_{4Z}/\sigma_Z^4 - 1)\sigma_{PZ}^2 + \sigma_P^2\sigma_Z^2 \\ &= (c_Z + 2)\sigma_{PZ}^2 + \sigma_P^2\sigma_Z^2 \end{aligned}$$

Στα παραπάνω με  $\mu_{3Z}$  και  $\mu_{4Z}$  συμβολίζονται η τρίτη και η τέταρτη κεντρική ροπή της  $Z$ , αντίστοιχα, και με  $s_Z$  και  $c_Z$  οι συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσης της μεταβλητής  $Z$ . Οι τελευταίοι ορίζονται από τις σχέσεις  $s_Z = \mu_{3Z}/\sigma_Z^3$  και  $c_Z = \mu_{4Z}/\sigma_Z^4 - 3$ .

Μετά τα παραπάνω η σχέση (1.5.15) γίνεται:

$$\sigma_{XZ} = s_Z\sigma_Z\sigma_{PZ} + \mu_P\sigma_Z^2 + \mu_Z\sigma_{PZ} \quad (1.5.22)$$

και επιλύοντας τις εξισώσεις (1.5.14) και (1.5.22) ως προς  $\mu_P$  και  $\sigma_{PZ}$  παίρνουμε, μετά από πράξεις:

$$\sigma_{PZ} = \frac{\mu_Z\sigma_{XZ} - \mu_X\sigma_Z^2}{\mu_Z^2 + \mu_Z\sigma_Z s_Z - \sigma_Z^2} \quad (1.5.23)$$

$$\mu_P = \frac{\mu_X\mu_Z + \mu_X\sigma_Z s_Z - \sigma_{XZ}}{\mu_Z^2 + \mu_Z\sigma_Z s_Z - \sigma_Z^2} \quad (1.5.24)$$

Η τελευταία παίρνει και την ισοδύναμη έκφραση:

$$\mu_P = \theta - \eta \quad (1.5.25)$$

όπου

$$\theta = \mu_X/\mu_Z \quad (1.5.26)$$

και

$$\eta = \frac{\sigma_{PZ}}{\mu_Z} = \frac{\sigma_{XZ} - \theta\sigma_Z^2}{\mu_Z^2 + \mu_Z\sigma_Z s_Z - \sigma_Z^2} \quad (1.5.27)$$

Εξ άλλου η σχέση (1.5.16) μετά από αντικατάσταση των τριτοβάθμιων και τεταρτοβάθμιων ροπών παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \sigma_P^2\sigma_Z^2 + \sigma_{PZ}^2c_Z + 2\sigma_{PZ}^2 + \mu_P^2\sigma_Z^2 + \mu_Z^2\sigma_P^2 + (\mu_P\mu_Z - \mu_X)^2 \\ &\quad + 2\mu_P s_Z\sigma_Z\sigma_{PZ} + 2\mu_Z s_Z\sigma_{PZ}^2/\sigma_Z + (4\mu_P\mu_Z - 2\mu_X)\sigma_{PZ} \end{aligned} \quad (1.5.28)$$

Η παραπάνω επιλύεται ως προς  $\sigma_P^2$  και μετά από πράξεις δίνει:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \frac{\sigma_X^2 + \theta^2\sigma_Z^2 - 2\theta\sigma_{XZ}}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} \\ &\quad - \eta^2 \frac{\mu_Z^2c_Z + 2\mu_Z\sigma_Z(\mu_Z^2/\sigma_Z^2 - 1)s_Z - \mu_Z^2 + \sigma_Z^2}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} \end{aligned} \quad (1.5.29)$$

Οι σχέσεις (1.5.24) και (1.5.29) δίνουν τις δύο πρώτες περιθώριες ροπές της αναλογικής μεταβλητής  $P$ , ενώ η (1.5.23) δίνει την συνδιασπορά της με την αθροιστική μεταβλητή  $Z$ . Οι ροπές αυτές δίνονται ως συναρτήσεις των δύο πρώτων

ροπών της τμηματικής μεταβλητής  $X$ , των τριών ή τεσσάρων πρώτων ροπών της αθροιστικής μεταβλητής  $Z$ , και της συνδιασποράς των  $X$  και  $Z$ . Οι δύο πρώτες σχέσεις είναι απαραίτητες για τον (προσεγγιστικό) καθορισμό της περιθώριας συνάρτησης κατανομής της αναλογικής μεταβλητής, ενώ η τρίτη θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη υποπαράγραφο για την εκτίμηση της δεσμευμένης συνάρτησης κατανομής της αναλογικής μεταβλητής, για δεδομένη τιμή της αθροιστικής μεταβλητής.

=====

Αναλυτικός υπολογισμός των αμοιβαίων ροπών 3ης και 4ης τάξης μεταξύ  $P$  και  $Z$

Με αντικατάσταση του  $(P-\mu_P)$  από την (1.5.21) και χρησιμοποιώντας και τις σχέσεις (1.5.18) και (1.5.20) θα έχουμε:

$$E\{(P-\mu_P)(Z-\mu_Z)^2\} = E\{a(Z-\mu_Z)^3\} + E\{(\phi-\mu_\phi)(Z-\mu_Z)^2\} = a\mu_{3Z} + 0 = (\mu_{3Z}/\sigma_Z^2)\sigma_{PZ}$$

$$= s_Z s_Z \sigma_{PZ}$$

$$E\{(P-\mu_P)^2(Z-\mu_Z)\} = E\{a^2(Z-\mu_Z)^3\} + E\{2a(\phi-\mu_\phi)(Z-\mu_Z)^2\} + E\{(\phi-\mu_\phi)^2(Z-\mu_Z)\} = a^2\mu_{3Z} + 0 + 0$$

$$= (\mu_{3Z}/\sigma_Z^4)\sigma_{PZ}^2 = s_Z \sigma_{PZ}^2 / \sigma_Z$$

$$E\{(P-\mu_P)^2(Z-\mu_Z)^2\} = E\{a^2(Z-\mu_Z)^4\} + E\{2a(\phi-\mu_\phi)(Z-\mu_Z)^3\} + E\{(\phi-\mu_\phi)^2(Z-\mu_Z)^2\} = a^2\mu_{4Z} + 0 + \sigma_\phi^2 \sigma_Z^2$$

$$= (\mu_{4Z}/\sigma_Z^4)\sigma_{PZ}^2 + \sigma_P^2 \sigma_Z^2 - \sigma_{PZ}^2 = (\mu_{4Z}/\sigma_Z^4 - 1)\sigma_{PZ}^2 + \sigma_P^2 \sigma_Z^2 = (c_Z + 2)\sigma_{PZ}^2 + \sigma_P^2 \sigma_Z^2$$

Απόδειξη της σχέσης (1.5.29)

Αντικαθιστώντας την  $\mu_P$  από τη σχέση (1.5.14) στην (1.5.28), η τελευταία γράφεται ισοδύναμα:

$$\sigma_X^2 = \sigma_P^2 \sigma_Z^2 + \sigma_{PZ}^2 c_Z + 2\sigma_{PZ}^2 + \mu_P^2 \sigma_Z^2 + \mu_Z^2 \sigma_P^2 + \sigma_{PZ}^2$$

$$+ 2\mu_P s_Z \sigma_Z \sigma_{PZ} + 2\mu_Z s_Z \sigma_{PZ}^2 / \sigma_Z + (2\mu_P \mu_Z - 2\sigma_{PZ}) \sigma_{PZ}$$

και κάνοντας πράξεις:

$$\sigma_X^2 = \sigma_P^2 (\sigma_Z^2 + \mu_Z^2) + \sigma_{PZ}^2 (c_Z + 2 + 1 - 2 + 2\mu_Z s_Z / \sigma_Z) + \sigma_{PZ} (2\mu_P s_Z \sigma_Z + 2\mu_P \mu_Z) + \mu_P^2 \sigma_Z^2$$

Αντικαθιστώντας το  $\mu_P$  από τη σχέση (1.5.25) και το  $\sigma_{PZ}$  από τη σχέση (1.5.27) παίρνουμε διαδοχικά:

$$\sigma_X^2 = \sigma_P^2 (\sigma_Z^2 + \mu_Z^2) + \eta^2 \mu_Z^2 (c_Z + 1 + 2\mu_Z s_Z / \sigma_Z) + 2\eta \mu_Z (\theta - \eta) (s_Z \sigma_Z + \mu_Z) + (\theta^2 + \eta^2 - 2\eta\theta) \sigma_Z^2$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_P^2 (\sigma_Z^2 + \mu_Z^2) + \eta^2 (\mu_Z^2 c_Z + \mu_Z^2 + 2\mu_Z^3 s_Z / \sigma_Z - 2\mu_Z s_Z \sigma_Z - 2\mu_Z^2 + \sigma_Z^2) + 2\eta\theta (\mu_Z s_Z \sigma_Z + \mu_Z^2 - \sigma_Z^2) + \theta^2 \sigma_Z^2$$

Η έκφραση μέσα στην παρένθεση του προτελευταίου όρου β' μέλους είναι ίση με  $(\sigma_{XZ} - \theta \sigma_Z^2) / \eta$  (από τη σχέση (1.5.27)), οπότε:

$$\sigma_X^2 = \sigma_P^2 (\sigma_Z^2 + \mu_Z^2) + 2\theta (\sigma_{XZ} - \theta \sigma_Z^2) + \theta^2 \sigma_Z^2 + \eta^2 [\mu_Z^2 c_Z + 2\mu_Z \sigma_Z (\mu_Z^2 / \sigma_Z^2 - 1) s_Z - \mu_Z^2 + \sigma_Z^2]$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_P^2 (\sigma_Z^2 + \mu_Z^2) + 2\theta \sigma_{XZ} - \theta^2 \sigma_Z^2 + \eta^2 [\mu_Z^2 c_Z + 2\mu_Z \sigma_Z (\mu_Z^2 / \sigma_Z^2 - 1) s_Z - \mu_Z^2 + \sigma_Z^2]$$

Η τελευταία αν επιλυθεί ως προς  $\sigma_P^2$  δίνει την (1.5.29).

### 1.5.3. Υπολογισμός των δεσμευμένων ροπών της αναλογικής μεταβλητής

Όπως εξηγήθηκε στην παράγραφο 1.5.1. ο τελικός μας στόχος είναι ο προσδιορισμός της δεσμευμένης συνάρτησης κατανομής  $F_{P|Z}(P|Z=z)$ , που κατά προσέγγιση μπορεί να γίνει μέσω των ροπών πρώτης και δεύτερης τάξης, δηλαδή της  $\mu_{P|Z} = E[P|Z=z]$  και της  $\sigma_{P|Z}^2 = \text{Var}[P|Z=z] = E[(P-\mu_{P|Z})^2|Z=z]$ .

Θα δεχτούμε και εδώ μια γραμμική στοχαστική εξάρτηση μεταξύ της αναλογικής μεταβλητής  $P$  και της αθροιστικής μεταβλητής  $Z$ , όπως περιγράφεται από τη σχέση (1.5.17). Η θεωρία πιθανοτήτων δίνει τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\mu_{P|Z} = \mu_P + \frac{\sigma_{PZ}}{\sigma_Z^2} (z - \mu_Z) \quad (1.5.30)$$

$$\sigma_{P|Z}^2 = \sigma_P^2 - \frac{\sigma_{PZ}^2}{\sigma_Z^2} \quad (1.5.31)$$

Συνδυάζοντας στις παραπάνω τις (1.5.23), (1.5.24), (1.5.27) και (1.5.29) προκύπτουν οι ακόλουθες τελικές σχέσεις:

$$\mu_{P|Z} = \theta - \eta \left(1 + \frac{\mu_Z^2}{\sigma_Z^2}\right) + \eta \frac{\mu_Z^2}{\sigma_Z^2} \frac{z}{\mu_Z} \quad (1.5.32)$$

$$\sigma_{P|Z}^2 = \frac{\sigma_X^2 + \theta^2 \sigma_Z^2 - 2\theta\sigma_{XZ}}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} - \eta^2 \left[ \frac{\mu_Z^2 \sigma_Z^2 + 2\mu_Z \sigma_Z (\mu_Z^2 / \sigma_Z^2 - 1) \sigma_{XZ} - \mu_Z^2 + \sigma_Z^2}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} + \frac{\mu_Z^2}{\sigma_Z^2} \right] \quad (1.5.33)$$

#### Απόδειξη της (1.5.32)

Συνδυάζοντας τις (1.5.30), (1.5.25) και (1.5.27) προκύπτει:

$$\mu_{P|Z} = \theta - \eta + \eta \mu_Z (z - \mu_Z) / \sigma_Z^2 = \theta - \eta + \eta \mu_Z^2 (z / \mu_Z - 1) / \sigma_Z^2$$

και τελικά παίρνει τη μορφή της (1.5.32)

#### Απόδειξη της (1.5.33)

Ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέλους της (1.5.31) με τη βοήθεια της (1.5.27) γίνεται:

$$\frac{\sigma_{PZ}^2}{\sigma_Z^2} = \eta^2 \frac{\mu_Z^2}{\sigma_Z^2}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (1.5.31) και συνδυάζοντας και την (1.5.29) προκύπτει η (1.5.33)

#### 1.5.4. Ειδικές εκφράσεις των ροπών της αναλογικής μεταβλητής

Θα εξεταστούν ιδιαίτερα οι ειδικές απλοποιημένες εκφράσεις που παίρνουν οι ροπές της αναλογικής μεταβλητής P, όπως υπολογίστηκαν στις υποπαραγράφους 1.5.2 και 1.5.3 για μερικές τυπικές συναρτήσεις κατανομής της αθροιστικής μεταβλητής Z, και πιο συγκεκριμένα για την κανονική κατανομή και την κατανομή γάμα.

Οι εκφράσεις που μπορούν να απλοποιηθούν όταν καθοριστεί η συνάρτηση κατανομής της Z (άρα και οι συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσης) αφορούν τις διασπορές  $\sigma_P^2$  (σχέση (1.5.29)) και  $\sigma_{PIZ}^2$  (σχέση (1.5.33)), καθώς και τον όρο  $\eta$  (σχέση (1.5.27)). Οι εκφράσεις των μέσων τιμών  $\mu_P$  (σχέση (1.5.25)) και  $\mu_{PIZ}$  (σχέση (1.5.32)) δεν χρειάζονται περαιτέρω απλοποίηση.

Στην περίπτωση της κανονικής κατανομής θα είναι  $s_Z = c_Z = 0$ , οπότε οι σχέσεις (1.5.27), (1.5.29) και (1.5.33) παίρνουν αντίστοιχα τις ακόλουθες απλοποιημένες εκφράσεις (η απόδειξη τους είναι προφανής):

$$\eta = \frac{\sigma_{XZ} - \theta\sigma_Z^2}{\mu_Z^2 - \sigma_Z^2} \quad (1.5.34)$$

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma_X^2 + \theta^2\sigma_Z^2 - 2\theta\sigma_{XZ}}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} - \eta^2 \frac{\sigma_Z^2 - \mu_Z^2}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} \quad (1.5.35)$$

$$\sigma_{PIZ}^2 = \frac{\sigma_X^2 + \theta^2\sigma_Z^2 - 2\theta\sigma_{XZ}}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} - \eta^2 \left[ \frac{\sigma_Z^2 - \mu_Z^2}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} + \frac{\mu_Z^2}{\sigma_Z^2} \right] \quad (1.5.36)$$

Στην περίπτωση της κατανομής γάμα θα είναι  $s_Z = 2\sigma_Z/\mu_Z$ ,  $c_Z = 6\sigma_Z^2/\mu_Z^2$ , (βλέπε παράρτημα Δ), οπότε παίρνουμε τις εξής, αντίστοιχες με τις παραπάνω, απλοποιημένες εκφράσεις (η απόδειξη τους υπάρχει στο τέλος της υποπαραγράφου):

$$\eta = \frac{\sigma_{XZ} - \theta\sigma_Z^2}{\mu_Z^2 + \sigma_Z^2} \quad (1.5.37)$$

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma_X^2 + \theta^2\sigma_Z^2 - 2\theta\sigma_{XZ}}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} - 3\eta^2 \quad (1.5.38)$$

$$\sigma_{PIZ}^2 = \frac{\sigma_X^2 + \theta^2\sigma_Z^2 - 2\theta\sigma_{XZ}}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} - \eta^2 \left( 3 + \frac{\mu_Z^2}{\sigma_Z^2} \right) \quad (1.5.39)$$

Εδώ θα πρέπει όμως να παρατηρήσουμε ότι η γραμμική σχέση (1.5.17), στην οποία στηρίχτηκε η παραγωγή των πιο πάνω σχέσεων, δημιουργεί ορισμένα προβλήματα. Στην περίπτωση που η μεταβλητή Z ακολουθεί κατανομή γάμα είναι προφα-

νές ότι παίρνει τιμές μη αρνητικές, και, αν δεχτούμε το ίδιο και για τις τμηματικές μεταβλητές, η αναλογική μεταβλητή παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0,1]$ . Συνεπώς, από τη σχέση (1.5.17) προκύπτει ότι, για δεδομένη τιμή της  $Z=z$ , η τιμή της  $\Phi$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[-az, 1-az]$ , το οποίο εξαρτάται από την τιμή  $z$ . Βέβαια η μεταβλητή  $\Phi$  δεν χρησιμοποιείται καθόλου στο μοντέλο, αφού παράγεται άμεσα η τιμή της αναλογικής μεταβλητής  $P$ , με χρησιμοποίηση των δεσμευμένων ροπών της, που υπολογίστηκαν πιο πάνω. Το πεδίο ορισμού της τελευταίας είναι ανεξάρτητο της τιμής  $z$ . Θα πρέπει όμως να ελεγχθούν οι δεσμευμένες ροπές αυτές, οι οποίες υπολογίστηκαν με τη βοήθεια της  $\Phi$ , ώστε να βρίσκονται μέσα σε ορισμένα όρια που τίθενται από τον περιορισμό της  $P$  στο διάστημα  $[0,1]$ .

Κατ'αρχήν θα πρέπει να εξετάσουμε τις περιθώριες ροπές της αναλογικής μεταβλητής. Είναι προφανές ότι για τη μέση τιμή θα πρέπει να ισχύει:

$$0 \leq \mu_P \leq 1 \quad (1.5.40)$$

και αντίστοιχα για τη διασπορά:

$$0 \leq \sigma_P^2 \leq 0.25 \quad (1.5.41)$$

Επιπλέον μεταξύ μέσης τιμής και διασποράς ισχύει η ανισότητα:

$$\sigma_P^2 \leq \mu_P(1-\mu_P) \quad (1.5.42)$$

Η τελευταία προκύπτει εύκολα, αν σκεφτεί κανείς ότι η διασπορά παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν η  $P$  παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1 (με πιθανότητες ίσες με  $(1-\mu_P)$  και  $\mu_P$  αντίστοιχα).

Θεωρητικά είναι δυνατό για κάποια πεντάδα τιμών ( $\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Z, \sigma_Z^2, \sigma_{XZ}$ ), να προκύψουν τιμές των  $\mu_P$  και  $\sigma_P^2$  που να μη ικανοποιούν κάποια από τις (1.5.40), (1.5.41) ή (1.5.42). Στην πράξη αυτό δεν συνέβη ποτέ στις εφαρμογές. Πάντως οι σχέσεις αυτές μπορούν να αποτελέσουν το κριτήριο εφαρμοσιμότητας του μοντέλου δικασμού, στην περίπτωση της κατανομής γάμα, με την έννοια ότι αν συμβεί να μη ισχύει κάποια απ' αυτές σε μια συγκεκριμένη εφαρμογή, τότε το μοντέλο δεν είναι κατάλληλο γι' αυτή την εφαρμογή.

Αντίστοιχες ανισώσεις θα πρέπει να ισχύουν και τις δεσμευμένες ροπές της  $P$ , δηλαδή:

$$0 \leq \mu_{P|Z} \leq 1 \quad (1.5.43)$$

$$0 \leq \sigma_{P|Z}^2 \leq 0.25 \quad (1.5.44)$$

$$\sigma_{P|Z}^2 \leq \mu_{P|Z}(1-\mu_{P|Z}) \quad (1.5.45)$$

Στην περίπτωση που κάποια από τις τρεις τελευταίες δεν ισχύει, ενώ όμως ισχύουν και οι τρεις προηγούμενες, έχει επιβεβαιωθεί στην πράξη ότι το μοντέ-

λο μπορεί και πάλι να εφαρμοστεί, μετά από κατάλληλη τροποποίηση των  $\mu_{P|Z}$  ή/και  $\sigma_{P|Z}^2$ . Οι τροποποιήσεις που προτείνονται παρακάτω έχουν δοκιμαστεί και έδωσαν καλά αποτελέσματα.

Ας εξετάσουμε πρώτα την  $\mu_{P|Z}$ , η οποία εξαρτάται από την τιμή του  $z$ , σε αντίθεση με την  $\sigma_{P|Z}^2$ , που όπως φαίνεται από τη σχέση (1.5.39) είναι ανεξάρτητη του  $z$ . Η επίλυση της (1.5.45) ως προς  $\mu_{P|Z}$  δίνει την ακόλουθη:

$$1_1 \leq \mu_{P|Z} \leq 1_2 \quad (1.5.46)$$

όπου

$$1_1 = 0.5 - [0.25 - \sigma_{P|Z}^2]^{0.5}$$

$$1_2 = 0.5 + [0.25 - \sigma_{P|Z}^2]^{0.5} = 1 - 1_1$$

Είναι σαφές ότι  $0 \leq 1_1 \leq 1_2 \leq 1$  και συνεπώς η (1.5.46) είναι ισχυρότερη από την (1.5.43). Για λόγους μεγαλύτερης ασφάλειας, στις εφαρμογές περιορίστηκε το διάστημα  $[1_1, 1_2]$  θεωρώντας ότι:

$$1_1 = a(0.5 - [0.25 - \sigma_{P|Z}^2]^{0.5}), \quad a \geq 1 \quad (1.5.47)$$

$$1_2 = 1 - 1_1 \quad (1.5.48)$$

Στις εφαρμογές χρησιμοποιήθηκε η τιμή  $a = 1.5$ .

Εφόσον έχει εξασφαλιστεί η ισχύς της (1.5.41) είναι προφανές ότι ισχύει και το β' σκέλος της (1.5.44). Η συνέπεια όμως με την πρόσθετη ασφάλεια των ορίων της δεσμευμένης μέσης τιμής επιβάλλει την ισχυρότερη ανισότητα (βλ. απόδειξη στο τέλος της υποπαραγράφου):

$$\sigma_{P|Z}^2 \leq m_2 \quad (1.5.49)$$

$$\text{όπου} \quad m_2 = 0.25b \quad (1.5.50)$$

$$\text{και} \quad b = (2a-1)/a^2, \quad 0 \leq b \leq 1 \quad (1.5.51)$$

Εξ άλλου πρέπει να ισχύει και το πρώτο σκέλος της (1.5.41), ήτοι:  $\sigma_{P|Z}^2 \geq 0$ . Για λόγους πρόσθετης ασφάλειας θέτουμε τον ισχυρότερο περιορισμό:

$$\sigma_{P|Z}^2 \geq m_1 \quad (1.5.52)$$

$$\text{όπου} \quad m_1 = \sigma_P^2(1-b) \quad (1.5.53)$$

Οι τελικές ανισοτικές σχέσεις (1.5.46), (1.5.49) και (1.5.52) χρησιμοποιούνται για τροποποίηση των τιμών των δεσμευμένων ροών της  $P$ , σε τρόπο ώστε αν κατά την εφαρμογή προκύψει κάποια τιμή που υπερβαίνει το αντίστοιχο όριο, τότε τίθεται ίση με το όριο αυτό. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην πραγματικότητα οι τροποποιήσεις αυτές σπάνια απαιτείται να εφαρμοστούν, αλλά λόγοι καθολικότητας του μοντέλου και πλήρους αποφυγής λαθών κατά την εφαρμογή επιβάλλουν την πιο πάνω διερεύνηση.

Η παραπάνω διατύπωση των περιορισμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο

στην περίπτωση της κατανομής γάμα, αλλά και σε κάθε άλλη κατανομή μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών.

Απόδειξη των σχέσεων (1.5.37) έως (1.5.39)

Στην περίπτωση της κατανομής γάμα ( $\sigma_Z = 2\sigma_2/\mu_Z$ ,  $c_Z = 6\sigma_Z^2/\mu_Z^2$ ), θα είναι

$$\mu_Z^2 + \mu_Z \sigma_Z \sigma_Z - \sigma_Z^2 = \mu_Z^2 + 2\mu_Z \sigma_Z^2 / \mu_Z - \sigma_Z^2 = \mu_Z^2 + 2\sigma_Z^2 - \sigma_Z^2 = \mu_Z^2 + \sigma_Z^2$$

οπότε από την (1.5.27) προκύπτει η (1.5.37)

Εξ άλλου ο συντελεστής του  $\eta^2$  στη σχέση (1.5.29) θα είναι:

$$\frac{6\sigma_Z^2 + 4\sigma_Z^2(\mu_Z^2/\sigma_Z^2 - 1) - \mu_Z^2 + \sigma_Z^2}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} = \frac{6\sigma_Z^2 + 4\mu_Z^2 - 4\sigma_Z^2 - \mu_Z^2 + \sigma_Z^2}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} = \frac{3\sigma_Z^2 + 3\mu_Z^2}{\sigma_Z^2 + \mu_Z^2} = 3$$

οπότε προκύπτει άμεσα η (1.5.38). Η απόδειξη της (1.5.39) είναι προφανής.

Απόδειξη της (1.5.46)

Αν για ευκολία παραλείψουμε τους δείκτες, η (1.5.45) γράφεται

$$\mu^2 - \mu + \sigma^2 \leq 0$$

Η διακρίνουσα του πιο πάνω τριωνόμου ως προς  $\mu$  είναι  $\Delta = 1 - 4\sigma^2 \geq 0$  και συνεπώς έχει πραγματικές ρίζες, που είναι οι

$$0.5 \pm [0.25 - \sigma^2]$$

Για να είναι το τριώνυμο αρνητικό πρέπει η  $\mu$  να βρίσκεται μεταξύ των ριζών του.

Απόδειξη των (1.5.49) έως (1.5.51)

Η ανισότητα  $I_1 \leq I_2$  δεν ισχύει αυτόματα αν τα  $I_1$  και  $I_2$  υπολογίζονται από τις σχέσεις (1.5.47) και (1.5.48) Συνεπώς θα πρέπει να επιβάλουμε:

$$a(0.5 - [0.25 - \sigma_{P|Z}^2]^{0.5}) \leq 1 - a(0.5 - [0.25 - \sigma_{P|Z}^2]^{0.5}) \Leftrightarrow$$

$$a(0.5 - [0.25 - \sigma_{P|Z}^2]^{0.5}) \leq 0.5 \Leftrightarrow [0.25 - \sigma_{P|Z}^2]^{0.5} \geq 0.5 - 0.5/a \Leftrightarrow$$

$$0.25 - \sigma_{P|Z}^2 \geq [0.5(1 - 1/a)]^2 \Leftrightarrow \sigma_{P|Z}^2 \leq 0.25[1 - (1 - 1/a)^2] \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{P|Z}^2 \leq 0.25b,$$

$$\text{όπου } b = 1 - (1 - 1/a)^2 \Leftrightarrow b = (2a - 1)/a^2$$

Παραγωγή των (1.5.52) και (1.5.53)

Η  $\sigma_{P|Z}^2 \geq 0$  μπορεί να γραφεί

$$\sigma_P^2 - \sigma_{P|Z}^2 \leq \sigma_P^2$$

Για ενίσχυση της ανισότητας, προκειμένου να αποφευχθούν μεγάλες μειώσεις της περιθώριας διασποράς πολλαπλασιάζουμε το β' μέλος με ένα αριθμό μικρότερο του 1, έστω τον  $b$ , οπότε προκύπτει:

$$\sigma_{P|Z}^2 \leq (1-b)\sigma_P^2$$



### 1.5.5. Διερεύνηση για αναλογική μεταβλητή στοχαστικά ανεξάρτητη της αθροιστικής

Στην περίπτωση που οι μεταβλητές  $P$  και  $Z$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής  $F_{P|Z}(p|Z=z)$  ταυτίζεται με την περιθώρια συνάρτηση κατανομής  $F_P(p)$ . Το ίδιο βέβαια ισχύει και με τις δεσμευμένες ροπές της  $P$ , ενώ η συνδιασπορά  $\sigma_{PZ}$  θα είναι μηδενική, και κατά συνέπεια ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\eta = 0 \quad (1.5.54)$$

$$\frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_Z^2} = \frac{\mu_X}{\mu_Z} = \theta \quad (1.5.55)$$

$$\mu_P = \frac{\mu_X}{\mu_Z} = \theta \quad (1.5.56)$$

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma_X^2 - \theta^2 \sigma_Z^2}{\mu_Z^2 + \sigma_Z^2} \quad (1.5.57)$$

Η (1.5.55) είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ασυσχέτιστες οι μεταβλητές  $P$  και  $Z$ , δηλ.  $\text{Cov}[P,Z] = 0$ , οπότε ισχύουν και οι τρεις υπόλοιπες από τις παραπάνω σχέσεις. Εννοείται ότι η (1.5.54) δεν καλύπτει την πλήρη στοχαστική ανεξαρτησία, η οποία μπορεί να τεθεί μόνο με όρους συναρτήσεων κατανομής δηλαδή  $F_{XZ}(x,z) = F_X(x) \cdot F_Z(z)$ .

Μια περίπτωση στην οποία ισχύει η (1.5.55) είναι όταν οι  $X$  και  $Y$  είναι αθροίσματα διαφορετικών ισόνομων στοχαστικά ανεξάρτητων μεταβλητών (απόδειξη στο τέλος της υποπαραγράφου).

Μέχρι τώρα δεν έχουμε εξετάσει τη διατήρηση ροπών τάξης μεγαλύτερης από 2. Το θέμα είναι αρκετά πολύπλοκο στη γενικότητα του, αλλά μπορεί να γίνει μια διερεύνηση ειδικά για την περίπτωση που εξετάζουμε, δηλαδή για μεταβλητές  $P$  και  $Z$  ανεξάρτητες. Όπως αποδεικνύεται στο τέλος της υποπαραγράφου, η τρίτη ροπή που πρέπει να έχει η  $P$  για να διατηρείται η τρίτη ροπή της  $X$  δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{3P} = \frac{\mu_{3X} - \mu_{3Z}(\mu_P^3 + 3\mu_P\sigma_P^2) - 6\mu_P\mu_Z\sigma_P^2\sigma_Z^2}{\mu_{3Z} + \mu_Z^3 + 3\mu_Z\sigma_Z^2} \quad (1.5.58)$$

Η διατήρηση της τρίτης ροπής της  $X$  όμως δεν συνεπάγεται την ταυτόχρονη διατήρηση ούτε της τρίτης ροπής της  $Y$ , ούτε των τριτοβάθμιων εκφράσεων αμοιβαίων ροπών μεταξύ των  $X$  και  $Y$ . Δυστυχώς η πλήρης διατήρηση των τρίτων ροπών είναι αδύνατη στη γενική περίπτωση του προβλήματος, και μπορεί να γίνει μόνο

κάτω από συγκεκριμένους όρους. Για ενδεικτικούς λόγους εξετάστηκε η απλή περίπτωση που και οι τμηματικές μεταβλητές  $X$  και  $Y$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, για την οποία βρέθηκε ότι η πλήρης διατήρηση των τρίτων ροπών μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο όταν ο συντελεστής ασυμμετρίας της  $Z$  είναι διπλάσιος του αντίστοιχου συντελεστή διασποράς, ήτοι:

$$s_Z = 2\sigma_Z/\mu_Z \quad (1.5.59)$$

Η παραπάνω συνθήκη εκπληρώνεται στην περίπτωση της κατανομής γάμα, που είναι και η κατανομή που μας ενδιαφέρει στην εργασία αυτή. Όπως θα διαπιστώσουμε στην επόμενη υποπαράγραφο, στην περίπτωση της κατανομής γάμα είναι δυνατό κάτω από οριακές συνθήκες να εξασφαλιστεί η διατήρηση όχι μόνο των τρίτων ροπών, αλλά και της πλήρους συνάρτησης κατανομής.

-----  
Ισχύς της (1.5.55) όταν οι  $X$  και  $Y$  είναι αθροίσματα ισόνομων ανεξάρτητων μεταβλητών

Αν οι  $X$  και  $Y$  είναι αθροίσματα  $k$  και  $\lambda$ , αντίστοιχα, διαφορετικών ισόνομων και ανεξάρτητων μεταβλητών  $V_i$  με μέση τιμή  $\mu_V$  και διασπορά  $\sigma_V^2$ , τότε:

$$\mu_X = k\mu_V$$

$$\mu_Z = (k+\lambda)\mu_V$$

$$\sigma_X^2 = k\sigma_V^2$$

$$\sigma_Z^2 = (k+\lambda)\sigma_V^2$$

Οι  $X$  και  $Y$  είναι και αυτές ανεξάρτητες, ως αθροίσματα διαφορετικών ανεξάρτητων μεταβλητών, άρα σύμφωνα με την (1.5.8)

$$\sigma_{XZ} = \sigma_X^2$$

και συνεπώς η (1.5.55) παίρνει τη μορφή

$$\frac{k\sigma_X^2}{(k+\lambda)\sigma_X^2} = \frac{k\mu_X}{(k+\lambda)\mu_X}$$

που προφανώς ισχύει.

Παραγωγή της σχέσης (1.5.58)

Η (1.5.13) λόγω της (1.5.56) παίρνει τη μορφή:

$$X - \mu_X = (P - \mu_P)(Z - \mu_Z) + \mu_P(Z - \mu_Z) + \mu_Z(P - \mu_P)$$

Υψώνοντας στον κύβο και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_{X^3} = & \mu_{3P\mu_Z^3} + \mu_P^3\mu_{3Z} + \mu_Z^3\mu_{3P} + 3\mu_P E\{(P - \mu_P)^2(Z - \mu_Z)^3\} + 3\mu_P^2 E\{(P - \mu_P)(Z - \mu_Z)^3\} + 3\mu_Z E\{(P - \mu_P)^3(Z - \mu_Z)^2\} \\ & + 3\mu_Z^2 E\{(P - \mu_P)^3(Z - \mu_Z)\} + 3\mu_P^2\mu_Z E\{(Z - \mu_Z)^2(P - \mu_P)\} + 3\mu_P\mu_Z^2 E\{(Z - \mu_Z)(P - \mu_P)^2\} \\ & + 6\mu_P\mu_Z E\{(P - \mu_P)^2(Z - \mu_Z)^2\} \end{aligned} \quad (a)$$

Η ανεξαρτησία των Z και P συνεπάγεται ότι για κάθε (i, j) θα ισχύει:

$$E[(P-\mu_P)^i (Z-\mu_Z)^j] = E[(P-\mu_P)^i] E[(Z-\mu_Z)^j] = \mu_{iP} \mu_{jZ}$$

όπου  $\mu_{iP}$  και  $\mu_{jZ}$  οι περιθώριες κεντρικές ροπές των P και Z, τάξεων i και j αντίστοιχα. Άρα η (α) γίνεται διαδοχικά:

$$\mu_{3X} = \mu_{3P}\mu_{3Z} + \mu_P^3\mu_{3Z} + \mu_Z^3\mu_{3P} + 3\mu_P\sigma_P^2\mu_{3Z} + 0 + 3\mu_Z\mu_{3P}\sigma_Z^2 + 0 + 0 + 0 + 6\mu_P\mu_Z\sigma_P^2\sigma_Z^2$$

$$\mu_{3X} = \mu_{3P}(\mu_{3Z} + \mu_Z^3 + 3\mu_Z\sigma_Z^2) + \mu_{3Z}(\mu_P^3 + 3\mu_P\sigma_P^2) + 6\mu_P\mu_Z\sigma_P^2\sigma_Z^2 \quad (\beta)$$

Η (β), αν επιλυθεί ως προς  $\mu_{3P}$  δίνει την (1.5.58)

Απόδειξη της (1.5.59)

Η τρίτη ροπή της Y δίνεται από την ακόλουθη, αντίστοιχη της (β) σχέση:

$$\mu_{3Y} = \mu_{3Q}(\mu_{3Z} + \mu_Z^3 + 3\mu_Z\sigma_Z^2) + \mu_{3Z}(\mu_Q^3 + 3\mu_Q\sigma_Q^2) + 6\mu_Q\mu_Z\sigma_Q^2\sigma_Z^2 \quad (\gamma)$$

όπου  $Q = 1-P$ , με μέση τιμή  $\mu_Q = 1-\mu_P$ , διασπορά  $\sigma_Q^2 = \sigma_P^2$ , και τρίτη ροπή  $\mu_{3Q} = -\mu_{3P}$ . Η (β) μπορεί επομένως να γραφεί:

$$\mu_{3Y} = -\mu_{3P}(\mu_{3Z} + \mu_Z^3 + 3\mu_Z\sigma_Z^2) + \mu_{3Z}(1-3\mu_P+3P^2-\mu_P^3+3\sigma_P^2-3\mu_P\sigma_P^2) + 6\mu_Z\sigma_P^2\sigma_Z^2 - 6\mu_P\mu_Z\sigma_P^2\sigma_Z^2 \quad (\delta)$$

Η (1.5.1) μπορεί να γραφεί

$$(X-\mu_X) + (Y-\mu_Y) = (Z-\mu_Z)$$

Υψώνοντας την παραπάνω στον κύβο και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές θα έχουμε

$$\mu_{3Z} = \mu_{3X} + \mu_{3Y} + 3E[(X-\mu_X)^2(Y-\mu_Y)] + 3E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)^2]$$

Στην περίπτωση που οι X και Y είναι ανεξάρτητες, οι τριτοβαθμίες εκφράσεις αμοιβαίων ρομών στην παραπάνω σχέση είναι μηδενικές, οπότε:

$$\mu_{3Z} = \mu_{3X} + \mu_{3Y} \quad (\epsilon)$$

Συνδυάζοντας τις (β), (δ) και (ε) και κάνοντας πράξεις θα έχουμε

$$\mu_{3Z} = \mu_{3Z}(1-3\mu_P+3\mu_P^2+3\sigma_P^2) + 6\mu_Z\sigma_P^2\sigma_Z^2$$

$$\mu_{3Z}(\mu_P-\mu_P^2-\sigma_P^2) = 2\mu_Z\sigma_P^2\sigma_Z^2 \quad (\zeta)$$

Αλλά στην περίπτωση που οι X και Y είναι ανεξάρτητες θα ισχύει η (1.5.7), οπότε συνδυάζοντας τις (1.5.7), (1.5.55) και (1.5.56), παίρνουμε την ακόλουθη μορφή της (1.5.57)

$$\sigma_P^2 = \frac{\mu_P\sigma_Z^2 - \mu_P^2\sigma_Z^2}{\mu_Z^2 + \sigma_Z^2}$$

που ισοδύναμα γράφεται

$$\sigma_Z^2(\mu_P-\mu_P^2-\sigma_P^2) = \mu_Z^2\sigma_P^2 \quad (\eta)$$

Τέλος διαιρώντας κατά μέλη τις (ζ) και (η) παίρνουμε:

$$\frac{\mu_{3Z}}{\sigma_Z^2} = \frac{2\sigma_Z^2}{\mu_Z}$$

Από την τελευταία προκύπτει άμεσα η (1.5.59).

### 1.5.6. Οριακή συμπεριφορά του μοντέλου για μεταβλητές με κατανομή γάμα

Έστω ότι οι τμηματικές μεταβλητές  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κατανομή γάμα με κοινή παράμετρο κλίμακας, οπότε οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας θα είναι:

$$f_X(x) = U(x) \lambda^\mu x^{\mu-1} e^{-\lambda x} / \Gamma(\mu) \quad (1.5.60)$$

$$f_Y(y) = U(y) \lambda^\nu y^{\nu-1} e^{-\lambda y} / \Gamma(\nu) \quad (1.5.61)$$

Στις παραπάνω,  $\lambda$  είναι η κοινή παράμετρος κλίμακας,  $\mu$  και  $\nu$  οι παράμετροι σχήματος,  $\Gamma()$  η συνάρτηση γάμα και  $U()$  η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος ( $U(x)=1$  για  $x \geq 0$  και  $U(x)=0$  για  $x < 0$ ).

Από τη θεωρία των πιθανοτήτων είναι γνωστό ότι η αθροιστική μεταβλητή  $Z$  θα ακολουθεί επίσης κατανομή γάμα (λόγω της σχέσης (1.5.1)):

$$f_Z(z) = U(z) \lambda^k z^{k-1} e^{-\lambda z} / \Gamma(k) \quad (1.5.62)$$

όπου

$$k = \mu + \nu \quad (1.5.63)$$

Με τις πιο πάνω προϋποθέσεις η αναλογική μεταβλητή  $P = X/Z$  θα ακολουθεί κατανομή βήτα με παραμέτρους  $\mu$  και  $\nu$ , ήτοι:

$$f_P(p) = U(p)U(1-p) \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} p^{\mu-1} (1-p)^{\nu-1} \quad (1.5.64)$$

Η παραπάνω πρόταση είναι γενικά γνωστή στη βιβλιογραφία (βλ. πχ. *Marjen και Vandewiele* [1986]). Σε αυτή την πρόταση στηρίζεται, μάλιστα, η παραγωγή τυχαίων αριθμών από την κατανομή βήτα (βλ. *Haan*, [1977]).

Προκειμένου να διερευνήσουμε τη συμπεριφορά του μοντέλου δικασμού, ως προς τη διατήρηση των κατανομών, εξετάζουμε και αποδεικνύουμε στο τέλος της υποπαραγράφου την ακόλουθη **βασική πρόταση**, αντίστροφη της παραπάνω:

*Αν η μεταβλητή  $Z$  ακολουθεί κατανομή γάμα, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την (1.5.62), και η μεταβλητή  $P$  είναι ανεξάρτητη της  $Z$  και ακολουθεί κατανομή βήτα, με συνάρτηση πυκνότητας την (1.5.64), τότε οι μεταβλητές  $X$  και  $Y$ , που ορίζονται από τις σχέσεις (1.5.10) και (1.5.1), είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν κατανομές γάμα με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας τις (1.5.60) και (1.5.61) αντίστοιχα.*

Από την πρόταση αυτή προκύπτει σαφώς ότι το μοντέλο δικασμού διατηρεί

τις πλήρεις συναρτήσεις κατανομής των  $X$  και  $Y$ , στην περίπτωση που αυτές είναι ανεξάρτητες και με κοινή παράμετρο σχήματος, υπό την προϋπόθεση ότι η  $P$  παράγεται με βάση την (1.5.64). Σε επόμενη παράγραφο επεκτείνεται το συμπέρασμα αυτό και για το μοντέλο επιμερισμού με  $K$  τμηματικές μεταβλητές.

Στη γενικότερη περίπτωση που οι  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες με κατανομή γάμα, αλλά με διαφορετικές παραμέτρους κλίμακας, ή ακόμα και στην περίπτωση που είναι εξαρτημένες, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κατανομή της  $Z$  είναι κατα προσέγγιση γάμα (Murota και Eto [1973]). Συνακόλουθα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και η κατανομή της  $P$  είναι κατά προσέγγιση βήτα. Έτσι σε όλες τις περιπτώσεις που επεξεργαζόμαστε μεταβλητές με κατανομή γάμα, είναι λογικό να παράγουμε την  $P$  από την κατανομή βήτα. Οι παράμετροι της μπορούν να υπολογίζονται πάντα με τη μέθοδο των ροπών, με βάση τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της, που δίνονται από τις σχέσεις της υποπαραγράφου (1.5.4).

=====

Απόδειξη της βασικής πρότασης

Οι κατανομές των  $P$  και  $Z$  ορίζονται από τις (1.5.63) και (1.5.64), ενώ λόγω της στοχαστικής ανεξαρτησίας θα ισχύει:

$$f_{PZ}(p,z) = f_P(p) \cdot f_Z(z) \quad (a)$$

Οι μεταβλητές  $X$  και  $Y$  ορίζονται από το μετασχηματισμό:

$$X = PZ, \quad Y = (1-P)Z \quad (b)$$

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι:

$$P = X/(X+Y), \quad Z = X+Y \quad (γ)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των  $(X, Y)$  δίνεται από τη σχέση της θεωρίας πιθανοτήτων:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{f_{PZ}(p(x,y), z(x,y))}{|J(p(x,y), z(x,y))|} \quad (δ)$$

όπου  $J(p(x,y), z(x,y))$  είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού (β), ίση με

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(p,z)}{\partial p} & \frac{\partial x(p,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial y(p,z)}{\partial p} & \frac{\partial y(p,z)}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & p \\ -z & (1-p) \end{vmatrix} = z - zp + zp = z = x+y$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{f_P(x/(x+y)) f_Z(x+y)}{|x+y|} \quad (ε)$$

Αντικαθιστώντας στην (ε) τις  $f_Z(z)$  και  $f_P(p)$  από τις (1.5.62) και (1.5.64), και παίρνοντας υπόψη και την (1.5.63), θα έχουμε:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{|x+y|} U(x/(x+y))U(y/(x+y))U(x+y) \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \left[\frac{x}{x+y}\right]^{\mu-1} \left[\frac{y}{x+y}\right]^{\nu-1} \frac{\lambda^{\mu+\nu}(x+y)^{\mu+\nu-1}e^{-\lambda(x+y)}}{\Gamma(\mu+\nu)}$$

Αλλά επειδή το σύστημα:

$$\left[ \begin{array}{l} x/(x+y) \geq 0, \quad y/(x+y) \geq 0, \quad x+y \geq 0 \end{array} \right]$$

είναι ισοδύναμο με το σύστημα:

$$\left[ \begin{array}{l} x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right]$$

θα ισχύει:

$$U(x/(x+y))U(y/(x+y))U(x+y) = U(x)U(y)$$

Άρα κάνοντας πράξεις παίρνουμε:

$$f_{XY}(x,y) = U(x)U(y) \frac{\lambda^{\mu-1}y^{\nu-1}\lambda^{\mu+\nu}e^{-\lambda(x+y)}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} = U(x) \frac{\lambda^{\mu}x^{\mu-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\mu)} U(y) \frac{\lambda^{\nu}y^{\nu-1}e^{-\lambda y}}{\Gamma(\nu)}$$

Κατά συνέπεια ισχύει:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

που σημαίνει ότι οι  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες, ενώ τελικά οι  $f_X(x)$  και  $f_Y(y)$  δίνονται από τις (1.5.60) και (1.5.61) αντίστοιχα.

### 1.5.7. Αριθμητική διερεύνηση και έλεγχος του μοντέλου δικασμού

Προκειμένου να διαπιστωθεί η αξιοπιστία του μοντέλου για μεταβλητές με κατανομή γάμα, αλλά για περιπτώσεις που δεν ισχύει η πλήρης διατήρηση των συναρτήσεων κατανομής, όπως αναλύθηκαν στην προηγούμενη υποπαράγραφο, έγινε μια σειρά αριθμητικών εφαρμογών, των οποίων τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 1.1. Για το σκοπό αυτό συντάχθηκε σχετικό πρόγραμμα υπολογιστή, στο οποίο: (1) εισάγεται η αρχική πεντάδα ανεξάρτητων ροπών ( $\mu_X, \mu_Z, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_Z^2$ ), (2) υπολογίζονται οι διάφορες παράμετροι, οι περιθώριες ροπές της αναλογικής μεταβλητής  $P$  και η δεσμευμένη διασπορά της (από τις αντίστοιχες σχέσεις των παραγράφων 1.5.2 και 1.5.3), (3) παράγονται  $N$  τιμές της μεταβλητής  $Z$ , ως τυχαίοι αριθμοί από την κατανομή γάμα, (4) για κάθε τιμή της  $Z$  υπολογίζεται η δεσμευμένη μέση τιμή της  $P$  και στη συνέχεια παράγεται η αντίστοιχη τυχαία τιμή της από την κατανομή βήτα, (5) για την εν λόγω τιμή της  $Z$  υπολογίζονται οι τιμές των  $X$  και  $Y$  ( $x=pz, y=z-x$ ), και (6) από τα συνθετικά δείγματα των  $(X, Y, Z, P)$ , μεγέθους  $N$ , υπολογίζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά των μεταβλητών και οι σχετικές παράμετροι.

Συνολικά έγιναν 41 εφαρμογές με μέγεθος συνθετικού δείγματος  $N = 1000$ . Οι αρχικές πεντάδες ροπών, που αποτελούν την είσοδο στο πρόγραμμα, επιλέχθηκαν σε τρόπο ώστε να καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα τιμών, και να αντιστοιχούν σε εύλογους συνδυασμούς παραμέτρων. Οι τιμές της παραμέτρου  $\theta = \mu_X / \mu_Z$  καλύπτουν το διάστημα  $[0.02, 0.50]$ , οι τιμές της παραμέτρου  $\zeta = \sigma_X^2 / \sigma_Z^2$  το διάστημα  $[0.01, 0.40]$  και οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης  $\rho_{XY}$  το διάστημα  $[-0.4, 0.7]$ . Αντίστοιχα, οι τιμές που προέκυψαν για την  $\sigma_{PZ}$  βρίσκονται στο διάστημα  $[-0.78, 0.55]$ , για την  $\eta = \sigma_{PZ} / \mu_Z$  στο  $[-0.04, 0.09]$ , για την  $\mu_P$  στο  $[0.007, 0.64]$ , και για τη  $\sigma_P^2$  στο  $[0.001, 0.17]$ . Τα αποτελέσματα της κάθε εφαρμογής καταλαμβάνουν τρεις σειρές στον πίνακα 1.1, όπου η πρώτη σειρά αντιστοιχεί στις θεωρητικές τιμές των παραμέτρων, όπως προκύπτουν από τις σχέσεις των υποπαραγράφων 1.5.1. έως 1.5.3., και οι δύο επόμενες σειρές στα αποτελέσματα που έδωσαν δύο διαφορετικά τρεξίματα του προγράμματος, με ίδιες πεντάδες εισόδου.

Η εξέταση των στοιχείων του πίνακα 1.1 μπορεί να δώσει τα μερικά χρήσιμα συμπεράσματα, σχετικά με την αξιοπιστία του μοντέλου, όπως:

1. Εν γένει υπάρχει συμφωνία των θεωρητικών τιμών των παραμέτρων με τις αντίστοιχες εμπειρικές, που εξαγονται από τα συνθετικά δείγματα. Όπου δεν υπάρχει τέτοια, η κρίσιμη παράμετρος, στην οποία εμφανίζεται η μεγαλύτερη απόκλιση, είναι ο συντελεστής συσχέτισης  $\rho_{XY}$ , και ακολουθούν οι ροπές  $\sigma_X^2$ ,  $\sigma_{XZ}$  και  $\sigma_{PZ}$ .
2. Για τιμές του συντελεστή συσχέτισης  $\rho_{XY} = -0.40$  τα αποτελέσματα του μοντέλου εμφανίζουν σαφείς αποκλίσεις, ως προς τις κρίσιμες παραμέτρους. Μικρές αποκλίσεις εμφανίζονται σε μερικές περιπτώσεις και για  $\rho_{XY} = -0.2$ .
3. Για θετικές τιμές του συντελεστή συσχέτισης  $\rho_{XY}$ , τα αποτελέσματα του μοντέλου συμφωνούν με τις θεωρητικές τιμές σε ικανοποιητικό βαθμό, και αυτό ανεξάρτητα από τις τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων. Οι αποκλίσεις που εμφανίζονται στα χαρακτηριστικά των παραγόμενων μεταβλητών έχουν την ίδια τάξη μεγέθους με τις αποκλίσεις στα χαρακτηριστικά της μεταβλητής αφετηρίας  $Z$ , δηλαδή τα  $\mu_Z$  και  $\sigma_Z^2$ .

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι το μοντέλο είναι εν γένει αξιόπιστο, υπό την προϋπόθεση ότι ο συντελεστής συσχέτισης  $\rho_{XY}$  βρίσκεται στο διάστημα  $[-0.20, 0.70]$ .

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1 (σελ. 1 από 4)  
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΧΑΣΜΟΥ

ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ			ΔΙΑΣΠΟΡΕΣ			ΣΥΝΔΙΑΣΠΟΡΕΣ				ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ				ΡΟΠΕΣ P		
A/A	$\mu_X$	$\mu_Y$	$\mu_Z$	$\sigma_X^2$	$\sigma_Y^2$	$\sigma_Z^2$	$\sigma_{XY}$	$\sigma_{XZ}$	$\sigma_{YZ}$	$\rho_{XY}$	$\theta = \frac{\mu_X}{\mu_Z}$	$\zeta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Z^2}$	$\sigma_{PZ}$	$\eta = \frac{\sigma_{PZ}}{\mu_Z}$	$\mu_P$	$\sigma_P^2$
1	0.40	19.60	20.00	1.50	160.93	150.00	-6.21	-4.71	154.71	-0.40	0.020	0.010	-0.281	-0.014	0.034	0.003
	0.49	20.04	20.53	0.71	148.10	145.01	-1.90	-1.19	146.20	-0.19	0.024	0.005	-0.222	-0.011	0.035	0.002
	0.49	18.71	19.20	0.77	138.05	135.35	-1.73	-0.96	136.32	-0.17	0.025	0.006	-0.220	-0.011	0.037	0.002
2	0.40	19.60	20.00	1.50	154.59	150.00	-3.05	-1.55	151.55	-0.20	0.020	0.010	-0.165	-0.008	0.028	0.003
	0.37	19.35	19.72	0.60	155.92	154.00	-1.26	-0.66	154.66	-0.13	0.019	0.004	-0.145	-0.007	0.026	0.002
	0.40	19.12	19.52	0.71	140.09	137.82	-1.49	-0.78	138.60	-0.15	0.020	0.005	-0.157	-0.008	0.029	0.002
3	0.40	19.60	20.00	1.50	148.50	150.00	0.00	1.50	148.50	0.00	0.020	0.010	-0.055	-0.003	0.023	0.003
	0.40	19.79	20.19	1.08	138.88	139.92	-0.02	1.06	138.87	0.00	0.020	0.008	-0.049	-0.002	0.022	0.002
	0.42	19.94	20.36	1.88	143.03	144.14	-0.38	1.50	142.64	-0.02	0.020	0.013	-0.047	-0.002	0.023	0.003
4	0.40	19.60	20.00	1.50	142.65	150.00	2.93	4.43	145.57	0.20	0.020	0.010	0.052	0.003	0.017	0.002
	0.38	19.22	19.60	1.18	135.68	143.46	3.30	4.48	138.98	0.26	0.019	0.008	0.056	0.003	0.016	0.002
	0.43	19.83	20.27	1.86	136.98	145.48	3.32	5.18	140.30	0.21	0.021	0.013	0.060	0.003	0.018	0.003
5	0.40	19.60	20.00	1.50	137.03	150.00	5.74	7.24	142.77	0.40	0.020	0.010	0.154	0.008	0.012	0.002
	0.39	19.59	19.98	1.27	151.09	163.83	5.74	7.01	156.83	0.41	0.019	0.008	0.125	0.006	0.013	0.002
	0.44	19.70	20.14	1.50	151.81	165.45	6.07	7.57	157.88	0.40	0.022	0.009	0.119	0.006	0.016	0.003
6	0.40	19.60	20.00	1.50	131.64	150.00	8.43	9.93	140.07	0.60	0.020	0.010	0.252	0.013	0.007	0.002
	0.50	19.92	20.42	1.81	150.47	172.95	10.33	12.15	160.80	0.63	0.025	0.010	0.237	0.012	0.013	0.002
	0.56	19.72	20.28	1.64	145.66	166.93	9.82	11.46	155.48	0.64	0.027	0.010	0.244	0.012	0.015	0.002
7	1.00	19.00	20.00	4.50	167.46	150.00	-10.98	-6.48	156.48	-0.40	0.050	0.030	-0.508	-0.025	0.075	0.008
	1.17	18.91	20.09	4.72	150.16	146.66	-4.10	0.61	146.05	-0.15	0.058	0.032	-0.387	-0.019	0.078	0.008
	1.14	18.17	19.31	2.40	139.28	134.05	-3.81	-1.42	135.47	-0.21	0.059	0.018	-0.383	-0.020	0.079	0.007
8	1.00	19.00	20.00	4.50	156.10	150.00	-5.30	-0.80	150.80	-0.20	0.050	0.030	-0.302	-0.015	0.065	0.008
	1.13	19.08	20.21	5.96	162.65	160.07	-4.27	1.69	158.37	-0.14	0.056	0.037	-0.278	-0.014	0.070	0.010
	1.02	19.22	20.24	2.84	150.11	146.11	-3.42	-0.58	146.69	-0.17	0.050	0.019	-0.350	-0.017	0.068	0.007
9	1.00	19.00	20.00	4.50	145.50	150.00	0.00	4.50	145.50	0.00	0.050	0.030	-0.109	-0.005	0.055	0.008
	0.94	18.96	19.91	3.24	139.09	141.76	-0.29	2.95	138.81	-0.01	0.047	0.023	-0.120	-0.006	0.053	0.007
	1.03	18.75	19.78	4.12	141.41	144.85	-0.34	3.78	141.07	-0.01	0.052	0.028	-0.109	-0.006	0.058	0.008
10	1.00	19.00	20.00	4.50	135.62	150.00	4.94	9.44	140.56	0.20	0.050	0.030	0.071	0.004	0.046	0.007
	1.14	19.48	20.61	6.08	141.07	162.54	7.69	13.78	148.76	0.26	0.055	0.037	0.145	0.007	0.048	0.007
	1.08	19.66	20.75	6.47	158.73	180.39	7.59	14.06	166.32	0.24	0.052	0.036	0.166	0.008	0.044	0.007
11	1.00	19.00	20.00	4.50	126.42	150.00	9.54	14.04	135.96	0.40	0.050	0.030	0.238	0.012	0.038	0.006
	1.06	18.99	20.05	4.63	134.34	159.40	10.21	14.84	144.56	0.41	0.053	0.029	0.232	0.012	0.041	0.007
	0.97	18.75	19.72	3.56	122.25	141.58	7.89	11.45	130.14	0.38	0.049	0.025	0.210	0.011	0.039	0.005
12	1.00	19.00	20.00	4.50	117.86	150.00	13.82	18.32	131.68	0.60	0.050	0.030	0.393	0.020	0.030	0.004
	1.12	19.42	20.54	4.81	107.79	141.04	14.22	19.03	122.01	0.62	0.054	0.034	0.411	0.020	0.034	0.004
	1.07	19.50	20.58	4.28	124.56	157.97	14.57	18.85	139.13	0.63	0.052	0.027	0.402	0.020	0.033	0.004



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1 (σελ. 2 από 4)  
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΧΑΣΜΟΥ

Α/Α	ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ			ΔΙΑΣΠΟΡΕΣ			ΣΥΝΔΙΑΣΠΟΡΕΣ			ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ				ΡΟΦΕΣ Ρ		
	$\mu_X$	$\mu_Y$	$\mu_Z$	$\sigma_X^2$	$\sigma_Y^2$	$\sigma_Z^2$	$\sigma_{XY}$	$\sigma_{XZ}$	$\sigma_{YZ}$	$\rho_{XY}$	$\theta = \frac{\mu_X}{\mu_Z}$	$\zeta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Z^2}$	$\sigma_{PZ}$	$\eta = \frac{\sigma_{PZ}}{\mu_Z}$	$\mu_P$	$\sigma_P^2$
13	2.00	18.00	20.00	10.50	173.66	150.00	-17.08	-6.58	156.58	-0.40	0.100	0.070	-0.785	-0.039	0.139	0.020
	1.98	18.92	20.89	5.20	180.99	168.09	-9.05	-3.85	171.94	-0.29	0.095	0.031	-0.839	-0.040	0.135	0.017
	2.07	17.23	19.30	6.48	164.09	157.06	-6.75	-0.28	157.33	-0.21	0.107	0.041	-0.733	-0.038	0.145	0.017
14	2.00	18.00	20.00	10.50	155.67	150.00	-8.09	2.41	147.59	-0.20	0.100	0.070	-0.458	-0.023	0.123	0.019
	2.02	18.22	20.24	9.51	147.39	147.93	-4.48	5.02	142.91	-0.12	0.100	0.064	-0.436	-0.022	0.121	0.017
	1.99	18.46	20.45	8.03	155.02	152.23	-5.41	2.62	149.61	-0.15	0.097	0.053	-0.472	-0.023	0.120	0.017
15	2.00	18.00	20.00	10.50	139.50	150.00	0.00	10.50	139.50	0.00	0.100	0.070	-0.164	-0.008	0.108	0.018
	1.92	18.29	20.21	9.78	133.64	143.01	-0.21	9.57	133.43	-0.01	0.095	0.068	-0.148	-0.007	0.102	0.017
	2.09	17.70	19.79	10.93	139.56	151.73	0.62	11.55	140.18	0.02	0.106	0.072	-0.143	-0.007	0.113	0.018
16	2.00	18.00	20.00	10.50	125.01	150.00	7.25	17.75	132.25	0.20	0.100	0.070	0.100	0.005	0.095	0.015
	1.92	18.26	20.19	11.30	134.68	158.54	6.28	17.58	140.96	0.16	0.095	0.071	0.098	0.005	0.090	0.015
	2.07	18.00	20.07	10.85	120.56	149.09	8.84	19.69	129.40	0.24	0.103	0.073	0.164	0.008	0.095	0.015
17	2.00	18.00	20.00	10.50	112.06	150.00	13.72	24.22	125.78	0.40	0.100	0.070	0.335	0.017	0.083	0.012
	1.90	18.32	20.22	10.04	124.28	163.94	14.81	24.84	139.09	0.42	0.094	0.061	0.292	0.014	0.079	0.011
	1.97	18.17	20.13	9.87	126.82	166.66	14.99	24.85	141.80	0.42	0.098	0.059	0.324	0.016	0.082	0.011
18	2.00	18.00	20.00	10.50	100.52	150.00	19.49	29.99	120.01	0.60	0.100	0.070	0.545	0.027	0.073	0.009
	2.09	18.41	20.50	11.24	102.92	155.63	20.74	31.97	123.65	0.61	0.102	0.072	0.574	0.028	0.074	0.009
	1.99	18.43	20.42	9.30	109.89	160.63	20.72	30.02	130.61	0.65	0.098	0.058	0.498	0.024	0.073	0.008
19	0.50	4.50	5.00	1.50	17.61	15.00	-2.06	-0.56	15.56	-0.40	0.100	0.100	-0.257	-0.051	0.151	0.036
	0.60	4.23	4.84	1.32	13.61	13.31	-0.82	0.51	12.80	-0.19	0.124	0.099	-0.200	-0.041	0.166	0.036
	0.56	4.32	4.88	0.92	15.02	14.52	-0.71	0.21	14.31	-0.19	0.116	0.063	-0.213	-0.044	0.159	0.032
20	0.50	4.50	5.00	1.50	15.42	15.00	-0.96	0.54	14.46	-0.20	0.100	0.100	-0.120	-0.024	0.124	0.037
	0.58	4.56	5.14	2.11	14.95	15.07	-1.00	1.12	13.95	-0.18	0.112	0.140	-0.093	-0.018	0.130	0.039
	0.44	4.41	4.85	0.88	14.10	13.73	-0.63	0.26	13.48	-0.18	0.091	0.064	-0.139	-0.029	0.119	0.033
21	0.50	4.50	5.00	1.50	13.50	15.00	0.00	1.50	13.50	0.00	0.100	0.100	0.000	0.000	0.100	0.034
	0.49	4.44	4.93	1.29	13.10	14.56	0.09	1.38	13.18	0.02	0.100	0.089	0.022	0.004	0.096	0.029
	0.58	4.54	5.12	1.45	13.99	15.35	-0.05	1.40	13.94	-0.01	0.113	0.094	0.024	0.005	0.108	0.035
22	0.50	4.50	5.00	1.50	11.82	15.00	0.84	2.34	12.66	0.20	0.100	0.100	0.105	0.021	0.079	0.028
	0.50	4.29	4.89	1.29	11.42	14.42	0.85	2.14	12.27	0.22	0.102	0.090	0.090	0.018	0.084	0.030
	0.57	4.38	4.95	1.84	11.86	15.51	0.91	2.75	12.76	0.19	0.115	0.118	0.131	0.026	0.089	0.033
23	0.50	4.50	5.00	1.50	10.35	15.00	1.58	3.08	11.92	0.40	0.100	0.100	0.197	0.039	0.061	0.021
	0.45	4.48	4.93	1.19	9.56	13.24	1.24	2.43	10.80	0.37	0.091	0.090	0.145	0.029	0.062	0.020
	0.49	4.62	5.11	1.23	10.60	15.27	1.72	2.95	12.32	0.48	0.096	0.081	0.173	0.034	0.063	0.017
24	0.50	4.50	5.00	1.50	9.07	15.00	2.21	3.71	11.29	0.60	0.100	0.100	0.277	0.055	0.045	0.013
	0.49	4.42	4.91	1.50	8.80	14.78	2.24	3.74	11.05	0.62	0.100	0.101	0.226	0.046	0.054	0.010
	0.50	4.36	4.86	1.12	8.46	13.27	1.84	2.96	10.30	0.60	0.102	0.084	0.197	0.041	0.061	0.015

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1 (σελ. 3 από 4)  
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΧΑΣΜΟΥ

Α/Α	ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ			ΔΙΑΣΠΟΡΕΣ			ΣΥΝΔΙΑΣΠΟΡΕΣ			ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ			ΡΟΠΕΣ Ρ			
	$\mu_X$	$\mu_Y$	$\mu_Z$	$\sigma_X^2$	$\sigma_Y^2$	$\sigma_Z^2$	$\sigma_{XY}$	$\sigma_{XZ}$	$\sigma_{YZ}$	$\rho_{XY}$	$\theta = \frac{\mu_X}{\mu_Z}$	$\zeta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Z^2}$	$\sigma_{PZ}$	$\eta = \frac{\sigma_{PZ}}{\mu_Z}$	$\mu_P$	$\sigma_P^2$
25	1.50	3.50	5.00	6.00	17.10	15.00	-4.05	1.95	13.05	-0.40	0.300	0.400	-0.319	-0.064	0.364	0.142
	1.53	3.34	4.87	5.17	13.53	13.37	-2.66	2.51	10.86	-0.32	0.314	0.387	-0.258	-0.053	0.367	0.138
	1.60	3.29	4.90	5.96	12.98	13.24	-2.85	3.11	10.13	-0.32	0.327	0.450	-0.230	-0.047	0.374	0.141
26	1.50	3.50	5.00	6.00	12.46	15.00	-1.73	4.27	10.73	-0.20	0.300	0.400	-0.029	-0.006	0.306	0.120
	1.43	3.53	4.96	5.06	11.13	13.02	-1.58	3.48	9.55	-0.21	0.288	0.389	-0.123	-0.025	0.313	0.120
	1.58	3.57	5.15	6.38	13.81	16.40	-1.89	4.49	11.92	-0.20	0.307	0.389	-0.063	-0.012	0.319	0.121
27	1.50	3.50	5.00	6.00	9.00	15.00	0.00	6.00	9.00	0.00	0.300	0.400	0.188	0.038	0.263	0.090
	1.44	3.50	4.94	5.53	8.52	14.22	0.08	5.61	8.61	0.01	0.291	0.389	0.208	0.042	0.249	0.086
	1.46	3.38	4.85	5.31	8.63	14.00	0.03	5.34	8.66	0.00	0.302	0.379	0.205	0.042	0.260	0.088
28	1.50	3.50	5.00	6.00	6.50	15.00	1.25	7.25	7.75	0.20	0.300	0.400	0.344	0.069	0.231	0.061
	1.62	3.50	5.12	6.94	6.17	16.02	1.46	8.40	7.62	0.22	0.317	0.433	0.368	0.072	0.245	0.063
	1.49	3.46	4.96	5.52	5.93	14.21	1.38	6.90	7.31	0.24	0.302	0.389	0.317	0.064	0.238	0.058
29	1.50	3.50	5.00	6.00	4.74	15.00	2.13	8.13	6.87	0.40	0.300	0.400	0.454	0.091	0.209	0.037
	1.56	3.52	5.08	6.90	4.61	16.51	2.50	9.40	7.11	0.44	0.307	0.418	0.490	0.096	0.211	0.033
	1.54	3.67	5.21	6.33	4.92	16.87	2.81	9.14	7.73	0.50	0.295	0.375	0.481	0.092	0.203	0.032
30	2.50	2.50	5.00	6.00	17.10	15.00	-4.05	1.95	13.05	-0.40	0.500	0.400	-0.694	-0.139	0.639	0.137
	2.56	2.27	4.83	5.08	11.93	13.45	-1.78	3.30	10.15	-0.23	0.531	0.377	-0.541	-0.112	0.643	0.121
	2.67	2.53	5.20	5.38	15.94	17.51	-1.91	3.47	14.03	-0.21	0.514	0.307	-0.706	-0.136	0.649	0.118
31	2.50	2.50	5.00	6.00	12.46	15.00	-1.73	4.27	10.73	-0.20	0.500	0.400	-0.404	-0.081	0.581	0.117
	2.54	2.34	4.89	5.67	9.53	13.04	-1.08	4.59	8.45	-0.15	0.520	0.435	-0.311	-0.064	0.584	0.110
	2.42	2.40	4.83	5.41	11.80	14.35	-1.43	3.98	10.37	-0.18	0.502	0.377	-0.396	-0.082	0.584	0.111
32	2.50	2.50	5.00	6.00	9.00	15.00	0.00	6.00	9.00	0.00	0.500	0.400	-0.188	-0.038	0.538	0.090
	2.46	2.50	4.96	5.62	8.44	14.06	0.00	5.62	8.44	0.00	0.496	0.399	-0.190	-0.038	0.535	0.086
	2.63	2.46	5.09	6.76	8.73	15.47	-0.01	6.75	8.73	0.00	0.516	0.437	-0.138	-0.027	0.543	0.086
33	2.50	2.50	5.00	6.00	6.50	15.00	1.25	7.25	7.75	0.20	0.500	0.400	-0.031	-0.006	0.506	0.062
	2.30	2.60	4.91	4.85	7.56	14.39	0.99	5.84	8.55	0.16	0.469	0.337	-0.081	-0.017	0.486	0.062
	2.44	2.62	5.06	5.44	6.59	13.84	0.91	6.35	7.49	0.15	0.483	0.393	-0.064	-0.013	0.495	0.063
34	2.50	2.50	5.00	6.00	4.74	15.00	2.13	8.13	6.87	0.40	0.500	0.400	0.079	0.016	0.484	0.040
	2.53	2.48	5.00	6.46	4.35	14.18	1.69	8.15	6.04	0.32	0.505	0.455	0.125	0.025	0.480	0.040
	2.49	2.56	5.05	5.97	5.08	15.82	2.39	8.36	7.46	0.43	0.493	0.377	0.073	0.014	0.479	0.038
35	2.50	2.50	5.00	6.00	3.50	15.00	2.75	8.75	6.25	0.60	0.500	0.400	0.156	0.031	0.469	0.022
	2.36	2.41	4.77	5.00	3.17	13.15	2.49	7.49	5.66	0.62	0.494	0.381	0.133	0.028	0.467	0.021
	2.50	2.55	5.05	5.78	3.73	15.26	2.87	8.65	6.60	0.62	0.495	0.379	0.134	0.027	0.468	0.021
36	2.50	2.50	5.00	6.00	3.03	15.00	2.99	8.99	6.02	0.70	0.500	0.400	0.186	0.037	0.463	0.015
	2.52	2.46	4.97	6.49	2.99	15.64	3.08	9.57	6.07	0.70	0.506	0.415	0.194	0.039	0.467	0.013
	2.54	2.63	5.17	5.61	3.20	15.00	3.10	8.70	6.30	0.73	0.492	0.374	0.180	0.035	0.457	0.013

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1 (σελ. 4 από 4)  
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΙΧΑΣΜΟΥ

ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ			ΔΙΑΣΠΟΡΕΣ			ΣΥΝΔΙΑΣΠΟΡΕΣ				ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ				ΡΟΠΕΣ P		
A/A	$\mu_X$	$\mu_Y$	$\mu_Z$	$\sigma_X^2$	$\sigma_Y^2$	$\sigma_Z^2$	$\sigma_{XY}$	$\sigma_{XZ}$	$\sigma_{YZ}$	$\rho_{XY}$	$\theta = \frac{\mu_X}{\mu_Z}$	$\zeta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Z^2}$	$\sigma_{PZ}$	$\eta = \frac{\sigma_{PZ}}{\mu_Z}$	$\mu_P$	$\sigma_P^2$
37	1.00	1.00	2.00	2.40	4.98	6.00	-0.69	1.71	4.29	-0.20	0.500	0.400	-0.258	-0.129	0.629	0.169
	1.06	0.98	2.03	3.06	4.31	6.91	-0.23	2.83	4.08	-0.06	0.519	0.442	-0.223	-0.110	0.629	0.162
	0.99	0.88	1.87	2.09	3.08	4.83	-0.17	1.92	2.92	-0.07	0.531	0.431	-0.185	-0.099	0.630	0.153
38	1.00	1.00	2.00	2.40	3.60	6.00	0.00	2.40	3.60	0.00	0.500	0.400	-0.120	-0.060	0.560	0.139
	1.00	1.07	2.07	2.35	3.89	6.46	0.11	2.46	4.00	0.04	0.482	0.363	-0.147	-0.071	0.553	0.138
	1.00	0.91	1.91	2.21	3.05	5.43	0.09	2.29	3.13	0.03	0.522	0.407	-0.098	-0.051	0.573	0.131
39	1.00	1.00	2.00	2.40	2.60	6.00	0.50	2.90	3.10	0.20	0.500	0.400	-0.020	-0.010	0.510	0.100
	0.97	1.08	2.05	2.04	2.90	5.92	0.49	2.53	3.39	0.20	0.473	0.345	-0.052	-0.025	0.498	0.098
	0.98	0.95	1.93	2.53	2.23	5.32	0.28	2.81	2.51	0.12	0.507	0.476	0.002	0.001	0.506	0.101
40	1.00	1.00	2.00	2.40	1.89	6.00	0.85	3.25	2.75	0.40	0.500	0.400	0.051	0.025	0.475	0.063
	0.95	0.99	1.95	2.03	1.64	5.20	0.77	2.80	2.41	0.42	0.489	0.390	0.054	0.028	0.461	0.062
	1.07	1.05	2.12	2.66	1.97	6.45	0.91	3.57	2.88	0.40	0.504	0.412	0.071	0.033	0.471	0.062
41	1.00	1.00	2.00	2.40	1.40	6.00	1.10	3.50	2.50	0.60	0.500	0.400	0.100	0.050	0.450	0.032
	1.04	0.99	2.02	2.79	1.27	6.14	1.04	3.83	2.31	0.55	0.513	0.454	0.113	0.056	0.457	0.032
	1.02	1.03	2.04	2.06	1.52	5.80	1.11	3.17	2.63	0.63	0.499	0.355	0.080	0.039	0.459	0.030

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε κάθε τρεις σειρές του πίνακα, η πρώτη σειρά αντιστοιχεί στις θεωρητικές τιμές των παραμέτρων, και οι δύο επόμενες σειρές στα εμπειρικά χαρακτηριστικά δύο διαφορετικών συνθετικών δειγμάτων, που έχουν παραχθεί με βάση τις παραμέτρους της πρώτης σειράς.

Τα παραπάνω αποτελούν ένα πρώτο, αλλά όχι και το μοναδικό έλεγχο του μοντέλου δικασμού, αφού το συνολικό μοντέλο, που περιλαμβάνει και τη διαδικασία δικασμού, δοκιμάζεται και ελέγχεται στον επιμερισμό των βροχοπτώσεων (κεφάλαιο 3), και όχι μόνο ως προς τις ροπές των μεταβλητών, αλλά και ως προς τις συναρτήσεις κατανομής τους.

#### 1.5.8. Η περίπτωση τμηματικών μεταβλητών με ασυνεχή κατανομή

Το μοντέλο δικασμού μπορεί εύκολα να επεκταθεί στην περίπτωση που η τμηματική μεταβλητή X παρουσιάζει ασυνέχεια στην κατανομή. Ουσιαστικά το μόνο που πρέπει να γίνει είναι να εισαχθεί μια αντίστοιχη ασυνέχεια στην κατανομή της αναλογικής μεταβλητής P. Εδώ θα μελετήσουμε την περίπτωση που η ασυνέχεια αναφέρεται στο σημείο  $x=0$ , που εμφανίζεται συχνά σε πραγματικά προβλήματα.

Έστω ότι η μεταβλητή X μπορεί να πάρει μηδενική τιμή με πεπερασμένη πιθανότητα  $q_0$ , δηλαδή:

$$\Pr(X=0) = q_0 \quad (1.5.65)$$

$$\Pr(X \neq 0) = q_1$$

όπου

$$q_1 = 1 - q_0$$

Είναι σαφές ότι εν γένει η  $P$  θα πρέπει να παρουσιάζει αντίστοιχη ασυνέχεια στην κατανομή της. Λόγω της (1.5.10) θα είναι:

$$\Pr(P=0|Z \neq 0) = \Pr(X=0) = q_0 \quad (1.5.66)$$

Αν θεωρήσουμε ότι και η μεταβλητή  $Z$  παρουσιάζει αντίστοιχη ασυνέχεια με πιθανότητα  $\Pr(Z=0) = q_{Z0} \leq q_0$ , και δεχτούμε ότι τα ενδεχόμενα  $(Z \neq 0)$  και  $(P \neq 0)$  είναι ανεξάρτητα, τότε θα ισχύει:

$$\Pr(X \neq 0) = \Pr(P \neq 0) \Pr(Z \neq 0)$$

οπότε

$$q_{P1} = 1 - q_{P0} = q_1 / q_{Z1} \quad (1.5.67)$$

όπου  $q_{P0} = \Pr(P=0)$ ,  $q_{P1} = \Pr(P \neq 0)$  και  $q_{Z1} = \Pr(Z \neq 0)$ .

Η τιμή της μεταβλητής  $P$  θα πρέπει λοιπόν να παραχθεί από μια ασυνεχή κατανομή. Αυτό στην πράξη αντιμετωπίζεται με την παραγωγή της τιμής σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα παράγεται ένας τυχαίος αριθμός  $r$  από την ομοιόμορφη κατανομή  $(0,1)$ , και αν  $r \leq q_{P0}$ , τότε τίθεται  $p=0$ , αλλιώς πρόχωράμε στο δεύτερο βήμα, όπου παράγεται η τιμή της  $P$  από την κατανομή  $F(p|P \neq 0)$ . Για τον καθορισμό της τελευταίας απαιτείται να είναι γνωστές οι ροπές  $m_P = E[P|P \neq 0]$  και  $s_P^2 = \text{Var}[P|P \neq 0]$ . Αυτές μπορούν να υπολογιστούν συναρτήσει των περιθώριων ροπών της  $P$  και των πιθανοτήτων  $q_{P0}$  και  $q_{P1}$ , από τις σχέσεις:

$$m_P = \mu_P / q_{P1} \quad (1.5.68)$$

$$s_P^2 = \sigma_P^2 / q_{P1} - (q_{P0} / q_{P1}^2) \mu_P^2 \quad (1.5.69)$$

Στην πραγματικότητα η  $P$  παράγεται με βάση τις δεσμευμένες ροπές για δεδομένη τιμή της  $Z=z$ . Έτσι αντί των (1.5.68) και (1.5.69) είναι σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθες:

$$m_{P|Z} = \mu_{P|Z} / q_1 \quad (1.5.70)$$

$$s_{P|Z}^2 = \sigma_{P|Z}^2 / q_1 - (q_0 / q_1^2) \mu_{P|Z}^2 \quad (1.5.71)$$

Στις τελευταίες έχουν αντικατασταθεί τα  $\mu_P$  και  $\sigma_P^2$  από τα αντίστοιχα  $\mu_{P|Z}$  και  $\sigma_{P|Z}^2$ . Επίσης αντικαταστάθηκαν τα  $q_{P0}$  και  $q_{P1}$  από τα  $q_0$  και  $q_1$ , αντίστοιχα, επειδή ισχύει η δέσμευση  $Z=z$ , ενώ προφανώς για να έχει νόημα ο επιμερισμός θα ισχύει  $z \neq 0$ , και κατά συνέπεια η πιθανότητα μηδενικής τιμής της  $P$  θα πρέπει να υπολογίζεται από την (1.5.66).

---

Απόδειξη των (2.5.68) και (2.5.69)

Ισχύουν:

$$f_p(p|P \neq 0) = f_p(p)/q_{p1}, \quad 0 < p \leq 1$$

$$\mu_p = \int_0^1 p \cdot f_p(p) + 0 \cdot q_{p0}$$

$$\mu_p = \int_0^1 p \cdot f_p(p|P \neq 0) dp = (1/q_{p1}) \int_0^1 p \cdot f_p(p) dp$$

Συνεπώς προκύπτει άμεσα η (1.5.68). Εξ άλλου

$$E\{P^2\} = \int_0^1 p^2 f_p(p) + 0 \cdot q_{p0}$$

$$E\{P^2|P \neq 0\} = \int_0^1 p^2 f_p(p|P \neq 0) dp = (1/q_{p1}) \int_0^1 p^2 f_p(p) dp$$

Άρα

$$E\{P^2|P \neq 0\} = (1/q_{p1}) E\{P^2\} \Leftrightarrow (s_p^2 + \mu_p^2) = (\sigma_p^2 + \mu_p^2) / q_{p1}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω το  $\mu_p$  από την (1.5.68) και λύνοντας ως προς  $s_p^2$ , προκύπτει η (1.5.69).

### 1.5.9. Σύγκριση με το γραμμικό μοντέλο

Σε ένα γραμμικό μοντέλο δικασμού η σχέση με την οποία θα γίνεται η παραγωγή της τμηματικής μεταβλητής  $X$  θα είναι ανάλογη της βασικής σχέσης (1.2.4) του μοντέλου Valencia-Schaake, ήτοι:

$$X = AZ + W \quad (1.5.72)$$

όπου η  $A$  είναι αριθμητική σταθερά και η  $W$  τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη της  $Z$ . Η θεωρία πιθανοτήτων δίνει τις ακόλουθες σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούν η αριθμητική σταθερά  $A$  και οι ροπές της  $W$ , ώστε να διατηρούνται οι ροπές (μέχρι β' τάξης) της  $X$ :

$$A = \sigma_{XZ} / \sigma_Z^2 \quad (1.5.73)$$

$$\mu_W = \mu_X - (\sigma_{XZ} / \sigma_Z^2) \mu_Z \quad (1.5.74)$$

$$\sigma_W^2 = \sigma_X^2 - \sigma_{XZ}^2 / \sigma_Z^2 \quad (1.5.75)$$

Παρατηρούμε ότι οι (1.5.73) και (1.5.75) είναι ανάλογες των σχέσεων υπολογισμού των παραμέτρων του μοντέλου Valencia-Schaake (1.2.6) και (1.2.7)<sup>2</sup>, αντίστοιχα.

Για να φανεί η αντιστοιχία του μοντέλου αναλογικής μεταβλητής, που προ-

-----  
2. Το μητρώο  $\underline{B} \underline{B}^T$  στη σχέση (1.2.9) είναι ίσο με το μητρώο διασπορών των μεταβλητών  $\underline{Y}$ .

τείνεται σ' αυτή την εργασία, με το γραμμικό μοντέλο, συνδυάζουμε τις σχέσεις (1.5.10) και (1.5.17), και απαλείφουμε τη μεταβλητή P, οπότε προκύπτει η ακόλουθη σχέση, αντίστοιχη με την (1.5.72):

$$X = \alpha Z^2 + \Phi Z \quad (1.5.76)$$

Στην παραπάνω το  $\alpha$  είναι αριθμητική σταθερά που δίνεται από την (1.5.18) και η  $\Phi$  είναι τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη της  $Z$ , με ροπές που δίνονται από τις (1.5.19) και (1.5.20). Οι σχέσεις (1.5.72) και (1.5.76) είναι σαφώς διαφορετικού τύπου. Στην πρώτη η εξάρτηση της τμηματικής μεταβλητής από την αθροιστική είναι γραμμική, ενώ στη δεύτερη είναι δεύτερου βαθμού. Κυρίως όμως η διαφορά τους βρίσκεται στο γεγονός ότι στην πρώτη σχέση η ανεξάρτητη μεταβλητή  $W$  είναι ένα τυχαίο υπόλοιπο ( $W = X - \alpha Z^2$ ), ενώ στη δεύτερη η αντίστοιχη ανεξάρτητη μεταβλητή  $\Phi$  μπορεί να χαρακτηριστεί σαν "τυχαίο πηλίκο" ( $\Phi = (X - \alpha Z^2)/Z$ ).

Για να εξετάσουμε ποιοτικά την επίπτωση των παραπάνω διαφορών θα υπολογίσουμε τις δύο πρώτες ροπές της μεταβλητής  $X$ , κάτω από τη δέσμευση  $Z=z$ , με τα δύο μοντέλα. Ειδικότερα, για να αποφύγουμε τους πολύπλοκους υπολογισμούς που απαιτεί το δεύτερο μοντέλο, θα εξετάσουμε την περίπτωση που ισχύει η:

$$\frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_Z^2} = \frac{\mu_X}{\mu_Z} = \theta \quad (1.5.55)$$

οπότε η σταθερά  $\alpha$  της σχέσης (1.5.76) θα είναι μηδέν, και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας την

$$X = PZ \quad (1.5.10)$$

με  $P$  και  $Z$  ανεξάρτητα.

Το γραμμικό μοντέλο δίνει άμεσα τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E[X|Z=z] = \mu_X + \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_Z^2} (z - \mu_Z) \quad (1.5.77)$$

$$\text{Var}[X|Z=z] = \sigma_X^2 - \frac{\sigma_{XZ}^2}{\sigma_Z^2} \quad (1.5.78)$$

που λόγω της (1.5.55) γίνονται

$$E[X|Z=z] = \theta z \quad (1.5.79)$$

$$\text{Var}[X|Z=z] = \sigma_X^2 - \theta^2 \sigma_Z^2 \quad (1.5.80)$$

Αντίστοιχα από το μοντέλο αναλογικής μεταβλητής παίρνουμε:

$$E[X|Z=z] = E[P] \cdot z$$

$$\text{Var}[X|Z=z] = \text{Var}[P] \cdot z^2$$

που λόγω των (1.5.56) και (1.5.57) γίνονται

$$E[X|Z=z] = \theta z \quad (1.5.81)$$

$$\text{Var}[X|Z=z] = (\sigma_X^2 - \theta^2 \sigma_Z^2) \frac{z^2}{\mu_Z^2 + \sigma_Z^2} \quad (1.5.82)$$

Παρατηρούμε ότι οι δεσμευμένες μέσες τιμές έχουν ταυτόσημες εκφράσεις και στα δύο μοντέλα. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τις δεσμευμένες διασπορές. Στην έκφραση του μοντέλου αναλογικής μεταβλητής η δεσμευμένη διασπορά εξαρτάται από την τιμή του  $z$ , ενώ στην αντίστοιχη έκφραση του γραμμικού μοντέλου είναι σταθερή. Τα δύο μοντέλα δίνουν ίσες τιμές μόνο όταν  $z^2 = E[Z^2]$ .

## 1.6. ΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΜΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΜΕ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΔΟΜΗ

### 1.6.1. Βασικές υποθέσεις

Επανερχόμαστε στο μονοδιάστατο πρόβλημα επιμερισμού  $k$  μεταβλητών, προκειμένου να προσδιορίσουμε τις βασικές εξισώσεις υπολογισμού των ροπών των τμηματικών μεταβλητών, και να καθορίσουμε τον αλγόριθμο του μοντέλου.

Το μοντέλο θα βασιστεί πάνω στην υπόθεση ότι η ακολουθία<sup>3</sup> των τμηματικών μεταβλητών, δηλαδή η ακολουθία:

$$X_{1,1}, \dots, X_{1,k(1)}, X_{2,1}, \dots, X_{2,k(2)}, \dots, X_{m,1}, \dots, X_{m,k(m)}, \dots$$

είναι μη μόνιμη ακολουθία Μάρκοφ, και πιο συγκεκριμένα μη μόνιμη ακολουθία αυτοσυσχέτισης  $\alpha'$  τάξης. Η υπόθεση αυτή εξυπηρετεί τον επιμερισμό των βροχοπτώσεων, αφού, όπως θα διαπιστωθεί στο κεφάλαιο 2, τα ωριαία ύψη βροχής μπορούν να περιγραφούν από μια ανέλιξη αυτοσυσχέτισης  $\alpha'$  τάξης. Εξ άλλου είναι γενικότερη από την υπόθεση στοχαστικά ανεξάρτητων τμηματικών μεταβλητών, δεδομένου ότι μια ακολουθία αυτοσυσχέτισης μεταπίπτει σε ακολουθία ανεξάρτητων μεταβλητών, αν θεωρηθούν όλοι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης μηδενικοί. Η γενική πορεία που αναπτύσσεται εδώ μπορεί να ακολουθηθεί και σε περιπτώσεις ακολουθιών μεταβλητών με δομή αυτοσυσχέτισης μεγαλύτερης τάξης.

Η υπόθεση ότι μια ακολουθία  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ , είναι ακολουθία Μάρκοφ σημαίνει ότι για κάθε  $i$  ισχύει:

$$\Pr(X_i \leq x_i | X_{i-1} = x_{i-1}, \dots, X_1 = x_1) = \Pr(X_i \leq x_i | X_{i-1}) \quad (1.6.1)$$

Η ακολουθία αυτοσυσχέτισης  $\alpha'$  τάξης είναι ειδικότερη περίπτωση της ακολουθίας Μάρκοφ, κατά την οποία η εξάρτηση μεταξύ διαδοχικών μεταβλητών είναι γραμμική, δηλαδή για κάθε  $i$  ισχύει:

$$X_i = a_i X_{i-1} + V_i \quad (1.6.2)$$

όπου η  $V_i$  είναι τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη των  $X_{i-1}, \dots, X_1$ , και ανεξάρτητη των  $(V_j, j \neq i)$ , και η  $a_i$  αριθμητική σταθερά.

Η υπόθεση μη μονιμότητας της ακολουθίας συνεπάγεται ότι οι σταθερές  $(a_i, i=1,2,\dots)$  είναι εν γένει διαφορετικές μεταξύ τους και το ίδιο θα συμβαίνει και με τις ροπές των  $V_i$ . Επίσης συνεπάγεται ότι οι μέσες τιμές των  $X_i$

$$\mu_i = E[X_i], \quad i=1,2,\dots$$

-----

3. Ο όρος "ακολουθία (sequence) στοχαστικών μεταβλητών" χρησιμοποιείται ισοδύναμα αντί του όρου "στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο", όταν ο χρόνος  $t$  παίρνει μόνο ακέραιες τιμές (βλ. *Paroulis* [1965], σελ. 528).



και οι διασπορές

$$\sigma_i^2 = \text{Var}[X_i] \quad , \quad i=1,2,\dots$$

έχουν διαφορετικές τιμές για διαφορετικά  $i$ .

Σύμφωνα με την ορολογία της υποπαραγράφου 1.1.2., το μοντέλο επιμερισμού, στηριγμένο στις παραπάνω υποθέσεις, θα έχει αθροιστική μνήμη ίση με ένα. Στην πραγματικότητα η μόνη από τις τμηματικές μεταβλητές του σταδίου ( $n-1$ ) που επηρεάζει τις τμηματικές μεταβλητές του σταδίου ( $n$ ), είναι η τελευταία, δηλαδή η  $X_{n-1,k(n-1)}$ . Στα παρακάτω, για λόγους απλοποίησης του συμβολισμού, θα παραλείπεται ο δείκτης του σταδίου ( $n$ ), και θα συμβολίζουμε με  $X_0$  την μεταβλητή του προηγούμενου σταδίου  $X_{n-1,k(n-1)}$ . Με αυτές τις προϋποθέσεις η βασική σχέση επιμερισμού είναι η

$$X_1 + X_2 + \dots + X_{k-1} + X_k = Z \quad (1.1.7)$$

Σε κάθε βήμα επιμερισμού ( $i$ ), η βασική εξίσωση παίρνει την ακόλουθη μορφή, που έχει εισαχθεί στην υποπαραγράφο 1.4.2.:

$$\begin{aligned} X_1 + Y_1 &= S_1 & (1.4.1) \\ \text{όπου} \end{aligned}$$

$$Y_1 = X_{1+1} + \dots + X_k \quad (1.4.2)$$

$$S_i = Z - X_1 - \dots - X_{i-1} \quad (1.4.3)$$

#### 1.6.2. Αρχικές παράμετροι του μοντέλου: Περιθώριες και αμοιβαίες ροπές

Στην γενική περίπτωση, ένα μοντέλο επιμερισμού βασισμένο στη σχέση (1.1.7), που διατηρεί τις ροπές μέχρι δεύτερης τάξης των τμηματικών μεταβλητών, έχει τις ακόλουθες ομάδες παραμέτρων:

1. Μέσες τιμές των  $X_i$ ,  $\mu_i$ .
2. Διασπορές των  $X_i$ ,  $\sigma_i^2$ .
3. Συνδιασπορές μεταξύ των  $X_i$ ,  $\sigma_{ij}$ .
4. Συνδιασπορές των  $X_i$  με τμηματικές μεταβλητές προηγούμενων σταδίων.

Η μέση τιμή και η διασπορά της  $Z$  καθώς και οι συνδιασπορές μεταξύ τμηματικών μεταβλητών και αθροιστικής δεν λαμβάνονται υπόψη, δεδομένου ότι είναι (γραμμικές) εκφράσεις των παραπάνω ομάδων. Το πλήθος των ανεξάρτητων παραμέτρων των ομάδων 1, 2, και 3 είναι  $k$ ,  $k$ , και  $k(k-1)/2$ , αντίστοιχα, και συνολικά  $(k^2+3k)/2$ . Το πλήθος των παραμέτρων της ομάδας 4 εξαρτάται από την αθροιστική μνήμη του μοντέλου, και για αθροιστική μνήμη ίση με 1 και ίσο αριθμό τμημα-

τικών μεταβλητών των δύο διαδοχικών σταδίων θα είναι  $k^2$ , οπότε φτάνουμε σε συνολικό αριθμό παραμέτρων  $3(k^2+k)/2$ .

Στο μοντέλο Μάρκοφ, που εξετάζουμε εδώ, γίνεται δραστική μείωση του αριθμού των παραμέτρων. Έτσι οι παράμετροι της ομάδας 3 περιορίζονται σε  $(k-1)$ , αφού οι συνδιασπορές μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των  $(k-1)$  συντελεστών αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης, ήτοι των

$$\rho_i = \text{Corr}[X_i, X_{i-1}] = \sigma_{i, i-1} / (\sigma_i \sigma_{i-1}) \quad (1.6.3)$$

όπου  $i=2, \dots, k$ . Εξ άλλου οι παράμετροι της ομάδας 4 περιορίζονται σε 1, αφού επηρεάζει μόνο η μεταβλητή  $X_0$ , όπως ορίστηκε στην προηγούμενη υποπαράγραφο, και οι συνδιασπορές των  $(X_i, i=1, \dots, k)$  με αυτή μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του συντελεστή συσχέτισης:

$$\rho_1 = \text{Corr}[X_1, X_0] = \sigma_{1, 0} / (\sigma_1 \sigma_0) .$$

Η τελευταία μπορεί να θεωρηθεί σαν επέκταση της (1.6.4) για  $i=1$ . Συνεπώς ο συνολικός αριθμός των παραμέτρων για το μοντέλο μη μόνιμης ακολουθίας Μάρκοφ θα είναι  $3k$ . Στην ειδική περίπτωση μόνιμης ακολουθίας, οι παράμετροι θα είναι μόνο 3.

Θα παράγουμε τώρα τις εκφράσεις των συνδιασπορών μεταξύ των τμηματικών μεταβλητών, αφού προηγουμένα εκφράσουμε τις ροπές των μεταβλητών  $V_i$  της σχέσης (1.6.2). Η θεωρία πιθανοτήτων δίνει:

$$a_i = \sigma_{i, i-1} / \sigma_i^2 = \rho_i \sigma_i / \sigma_{i-1} \quad (1.6.4)$$

$$E[V_i] = \mu_i - (\rho_i \sigma_i / \sigma_{i-1}) \mu_{i-1} \quad (1.6.5)$$

$$\text{Var}[V_i] = \sigma_i^2 (1 - \rho_i^2) \quad (1.6.6)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την  $\sigma_{ij}$ , όπου  $j > i$ , εφαρμόζουμε διαδοχικά την (1.6.2) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} X_j &= (\rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j / \sigma_i) X_i + (\rho_j \dots \rho_{i+2} \sigma_j / \sigma_{i+1}) V_{i+1} \\ &+ \dots + (\rho_j \sigma_j / \sigma_{j-1}) V_{j-1} + V_j \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές στην παραπάνω, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mu_j &= (\rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j / \sigma_i) \mu_i + (\rho_j \dots \rho_{i+2} \sigma_j / \sigma_{i+1}) \eta_{i+1} \\ &+ \dots + (\rho_j \sigma_j / \sigma_{j-1}) \eta_{j-1} + \eta_j \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

όπου  $\eta_i = E[V_i]$ . Αφαιρώντας κατά μέλη την (1.6.8) από την (1.6.7) έχουμε:

$$\begin{aligned} X_j - \mu_j &= (\rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j / \sigma_i) (X_i - \mu_i) \\ &+ (\rho_j \dots \rho_{i+2} \sigma_j / \sigma_{i+1}) (V_{i+1} - \eta_{i+1}) + \dots \\ &+ (\rho_j \sigma_j / \sigma_{j-1}) (V_{j-1} - \eta_{j-1}) + (V_j - \eta_j) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της τελευταίας με τον όρο  $(X_i - \mu_i)$  και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές, και δεδομένου ότι  $\text{Cov}[V_k, X_i] = 0$  για κάθε  $k > i$ , θα έχουμε:

$$E[(X_j - \mu_j)(X_i - \mu_i)] = (\rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j / \sigma_i) E[(X_i - \mu_i)^2]$$

και τελικά

$$\sigma_{ij} = \rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j \sigma_i, \quad 0 \leq i < j \leq k \quad (1.6.9)$$

Με βάση την παραπάνω προκύπτει εύκολα η βασική εξίσωση συνδιασπορών για ακολουθίες Μάρκοφ, που για  $i > j > i$  γράφεται:

$$\text{Cov}[X_i, X_j] \text{Cov}[X_j, X_i] = \text{Cov}[X_i, X_i] \text{Var}[X_j] \quad (1.4.14)$$

Όπως προαναφέρθηκε οι ροπές της αθροιστικής μεταβλητής μπορούν να προκύψουν ως εκφράσεις των ροπών των τμηματικών μεταβλητών. Πράγματι, από τις σχέσεις (1.4.8), (1.4.13) και (1.4.12), με αντικατάσταση της (1.6.9) προκύπτουν οι ακόλουθες:

$$E[Z] = \sum_{i=1}^k \mu_i \quad (1.6.10)$$

$$\text{Var}[Z] = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j \sigma_i \quad (1.6.11)$$

$$\text{Cov}[Z, X_i] = \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j \sigma_i + \sum_{j=i+1}^k \rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j \sigma_i \quad (1.6.12)$$

#### Απόδειξη της (1.6.7)

Θα κάνουμε την απόδειξη με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής (για  $j > i$ ). Για  $j = i+1$  η (1.6.7) παίρνει τη μορφή

$$X_{i+1} = (\rho_{i+1} \sigma_{i+1} / \sigma_i) X_i + V_{i+1}$$

που προφανώς ισχύει. Θεωρούμε ότι ισχύει για  $j = i+1$ , δηλαδή:

$$X_i = (\rho_1 \dots \rho_{i+1} \sigma_i / \sigma_i) X_i + (\rho_1 \dots \rho_{i+2} \sigma_i / \sigma_{i+1}) V_{i+1} + \dots + (\rho_i \sigma_i / \sigma_{i-1}) V_{i-1} + V_i \quad (a)$$

και εξ άλλου ισχύει:

$$X_{i+1} = (\rho_{i+1} \sigma_{i+1} / \sigma_i) X_i + V_{i+1} \quad (b)$$

Αντικαθιστώντας την (a) στη (b) προκύπτει η έκφραση της (1.6.7) για  $j = i+1$ . Συνεπώς η (1.6.7) ισχύει για κάθε τιμή του  $j > i$ .

### 1.6.3. Τελικές παράμετροι του μοντέλου: Δεσμευμένες ροπές

Για λόγους που εξηγούνται στην υποπαράγραφο 1.4.4., οι τελικές παρά-

μετροι που χρησιμοποιεί το μοντέλο είναι οι δεσμευμένες ροπές των τμηματικών και αθροιστικών μεταβλητών. Λόγω της Μαρκοβιανής δομής της ακολουθίας τμηματικών μεταβλητών, σε κάθε βήμα χρησιμοποιείται ως δέσμευση μόνο μια τμηματική μεταβλητή, και συγκεκριμένα η πιο πρόσφατη, του αμέσως προηγούμενου βήματος.

Οι παρακάτω σχέσεις, που αποδεικνύονται στο τέλος στο τέλος της υποπαραγράφου, δίνουν τη γενική εικόνα των δεσμευμένων ροπών μέχρι δεύτερης τάξης, όταν είναι γνωστή η τιμή της μεταβλητής  $X_i = x_i$ :

$$E[X_j | X_i = x_i] = \mu_j + \rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j x_i^* \quad (1.6.13)$$

$$\text{Var}[X_j | X_i = x_i] = \sigma_j^2 (1 - \rho_j^2 \dots \rho_{i+1}^2) \quad (1.6.14)$$

$$\text{Cov}[X_1, X_j | X_i = x_i] = \rho_1 \dots \rho_{j+1} (1 - \rho_j^2 \dots \rho_{i+1}^2) \sigma_1 \sigma_j \quad (1.6.15)$$

όπου  $0 \leq i < j < 1 \leq k$ , και

$$x_i^* = (x_i - \mu_i) / \sigma_i$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις μπορούν να υπολογιστούν επίσης οι δεσμευμένες ροπές οποιουδήποτε γραμμικού συνδυασμού των τμηματικών μεταβλητών και επομένως και των  $Y_i$ ,  $S_i$  και  $Z$ .

Στην εφαρμογή του μοντέλου, και ειδικότερα στο βήμα  $i$ , είναι γνωστή η τιμή της  $X_{i-1} = x_{i-1}$ . Είναι επίσης γνωστές οι τιμές όλων των προηγούμενων μεταβλητών, αλλά αυτές, λόγω της Μαρκοβιανής δομής της ακολουθίας, δεν προσθέτουν καμιά πληροφορία. Αφού η βασική σχέση που χρησιμοποιείται στο βήμα  $i$  είναι η (1.4.1), οι ροπές που ενδιαφέρουν ιδιαίτερα, και που θα χρησιμοποιηθούν περαιτέρω από το μοντέλο δικασμού είναι (1) οι ροπές της  $X_i$ ,  $E[X_i | X_{i-1} = x_{i-1}]$  και  $\text{Var}[X_i | X_{i-1} = x_{i-1}]$ , (2) οι ροπές της  $S_i$ ,  $E[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}]$ ,  $\text{Var}[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}]$ , και (3) η συνδιασπορά μεταξύ των  $X_i$  και  $S_i$ ,  $\text{Cov}[S_i, X_i | X_{i-1} = x_{i-1}]$ . Οι πρώτες μπορούν να υπολογιστούν με άμεση εφαρμογή των (1.6.13) και (1.6.14):

$$E[X_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \mu_i + \rho_i \sigma_i x_{i-1}^* \quad (1.6.16)$$

$$\text{Var}[X_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \sigma_i^2 (1 - \rho_i^2) \quad (1.6.17)$$

Οι υπόλοιπες μπορούν να εξαχθούν με βάση τις (1.6.13), (1.6.14), (1.6.15), και τις ακόλουθες:

$$E[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \sum_{j=1}^k E[X_j | X_{i-1} = x_{i-1}]$$

$$\text{Var}[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \sum_{j=1}^k \text{Var}[X_j | X_{i-1} = x_{i-1}] +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=j+1}^k \text{Cov}[X_l, X_j | X_{i-1} = x_{i-1}]$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[S_i, X_i | X_{i-1} = x_{i-1}] &= \text{Var}[X_i | X_{i-1} = x_{i-1}] \\ &+ \sum_{j=i+1}^K \text{Cov}[X_i, X_j | X_{i-1} = x_{i-1}] \end{aligned}$$

και τελικά παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$E[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \sum_{j=i}^K \mu_j + x_{i-1}^* \sum_{j=i}^K \rho_j \dots \rho_i \sigma_j \quad (1.6.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}] &= \sum_{j=i}^K \sigma_j^2 (1 - \rho_j^2 \dots \rho_i^2) \\ &+ 2 \sum_{j=i}^{k-1} \sum_{l=j+1}^K \rho_1 \dots \rho_{j+1} (1 - \rho_j^2 \dots \rho_i^2) \sigma_1 \sigma_j \end{aligned} \quad (1.6.19)$$

$$\text{Cov}[S_i, X_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \sigma_i (1 - \rho_i^2) \left[ \sigma_i + \sum_{j=i+1}^K \rho_1 \dots \rho_{i+1} \sigma_j \right] \quad (1.6.20)$$

όπου  $0 \leq i \leq K$ .

#### Απόδειξη της (1.6.13)

Η (1.6.7) μπορεί να γραφεί:

$$X_j = b_{ji} X_i + U_{ji} \quad (a)$$

όπου

$$b_{ji} = \rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j / \sigma_i \quad (b)$$

και  $U_j$  τυχαία μεταβλητή που ορίζεται από τη σχέση:

$$U_{ji} = (\rho_j \dots \rho_{i+2} \sigma_j / \sigma_{i+1}) V_{i+1} + \dots + (\rho_j \sigma_j / \sigma_{j-1}) V_{j-1} + V_j \quad (v)$$

με μέση τιμή

$$\xi_{ji} = (\rho_j \dots \rho_{i+2} \sigma_j / \sigma_{i+1}) \eta_{i+1} + \dots + (\rho_j \sigma_j / \sigma_{j-1}) \eta_{j-1} + \eta_j = \mu_j - b_{ji} \mu_i \quad (v)$$

Δεδομένου ότι οι  $V_{i+1}, \dots, V_j$  είναι ανεξάρτητες της  $X_i$ , και η  $U_{ji}$  θα είναι ανεξάρτητη της  $X_i$ . Αν πάρουμε αναμενόμενες τιμές στην (a), κάτω από τη συνθήκη  $(X_i = x_i)$  θα έχουμε:

$$E[X_j | X_i = x_i] = b_{ji} x_i + \xi_{ji} \quad (b)$$

και κατά συνέπεια

$$E[X_j | X_i = x_i] = b_{ji} x_i + \mu_j - b_{ji} \mu_i = \mu_j + b_{ji} (x_i - \mu_i)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία το  $b_{ji}$  από τη (b) προκύπτει άμεσα η (1.6.13)

#### Απόδειξη της (1.6.14)

Από τις (a) και (b) προκύπτει:

$$X_j - E[X_j|X_i=x_i] = b_{ji}(X_i-x_i) + (U_{ji}-\xi_{ji}) \quad (\epsilon)$$

Υψώνοντας την τελευταία στο τετράγωνο και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές κάτω από τη συνθήκη  $X_i=x_i$  θα έχουμε:

$$\text{Var}[X_j|X_i=x_i] = \text{Var}[U_{ji}]$$

Αλλά από την (α) παίρνουμε:

$$\text{Var}[X_j] = b_{ji}^2 \text{Var}[X_i] + \text{Var}[U_{ji}]$$

Με συνδυασμό των δύο τελευταίων προκύπτει

$$\text{Var}[X_j|X_i=x_i] = \sigma_j^2 - b_{ji}^2 \sigma_i^2 = \sigma_j^2 - \rho_j^2 \dots \rho_{i+1}^2 \sigma_j^2$$

Απόδειξη της (1.6.15)

Σε αντιστοιχία με την (ε) γράφουμε (για  $l > j > i$ ):

$$X_l - E[X_l|X_i=x_i] = b_{li}(X_i-x_i) + (U_{li}-\xi_{li}) \quad (\zeta)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (ε) και (ζ) κατά μέλη και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές κάτω από τη συνθήκη  $X_i=x_i$  θα έχουμε:

$$\text{Cov}[X_l, X_j|X_i=x_i] = \text{Cov}[U_{li}, U_{ji}] \quad (\eta)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να πάρουμε

$$X_j - \mu_j = b_{ji}(X_i - \mu_i) + (U_{ji} - \xi_{ji})$$

$$X_l - \mu_l = b_{li}(X_i - \mu_i) + (U_{li} - \xi_{li})$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές, λόγω της ανεξαρτησίας της  $X_i$  με τις  $U_{ji}$  και  $U_{li}$ , θα έχουμε:

$$\text{Cov}[X_l, X_j] = b_{li} b_{ji} \text{Var}[X_i] + \text{Cov}[U_{li}, U_{ji}]$$

Συνδυάζοντας την τελευταία με την (η) και αντικαθιστώντας την  $\text{Cov}[X_l, X_j]$  από την (1.6.9), και το  $b_{ji}$  και  $b_{li}$  από την (β) έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_l, X_j|X_i=x_i] &= \rho_1 \dots \rho_{j+1} \sigma_1 \sigma_j - (\rho_1 \dots \rho_{i+1} \sigma_1 / \sigma_i) (\rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j / \sigma_i) \sigma_i^2 = \\ &= \rho_1 \dots \rho_{j+1} \sigma_1 \sigma_j (1 - \rho_j^2 \dots \rho_{i+1}^2) \end{aligned}$$

#### 1.6.4. Αλγόριθμος υπολογισμού των παραμέτρων του μοντέλου

Οι παράμετροι που χρειάζεται να υπολογίζονται σε κάθε βήμα της εφαρμογής του μοντέλου είναι οι δεσμευμένες ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης των μεταβλητών  $X_i$  και  $S_i$ , που δίνονται από τις σχέσεις (1.6.16) έως (1.6.20). Οι τρεις τελευταίες απ' αυτές είναι αρκετά πολύπλοκες, αλλά στη γενική μορφή του μοντέλου δεν μπορούν να απλοποιηθούν περισσότερο. Από τη μορφή των σχέσεων αυτών φαίνεται ότι στο σύνολο των βημάτων εφαρμογής του μοντέλου, θα επαναληφθούν πολλές φορές ταυτόσημοι υπολογισμοί. Για αποφυγή των επαναλήψεων και για μει-

ωση του συνολικού χρόνου υπολογισμού σε κάθε στάδιο, έχουν παραχθεί, στη θέση των (1.6.18) έως (1.6.20), άλλες απλές σχέσεις αναδρομικού τύπου. Έτσι οι τελικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή του μοντέλου είναι συνολικά οι ακόλουθες:

$$E[X_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \mu_i + \rho_i \sigma_i x_{i-1}^* \quad (1.6.16)$$

$$\text{Var}[X_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \sigma_i^2 (1 - \rho_i^2) \quad (1.6.17)$$

$$E[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = E_i + \rho_i (\sigma_i + D_i) x_{i-1}^* \quad (1.6.21)$$

$$\text{Var}[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = A_i - B_i \quad (1.6.22)$$

$$\text{Cov}[S_i, X_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = (1 - \rho_i^2) \sigma_i (\sigma_i + D_i) \quad (1.6.23)$$

όπου  $E_i = \mu_i + E_{i+1} \quad (1.6.24)$

$$D_i = \rho_{i+1} (\sigma_{i+1} + D_{i+1}) \quad (1.6.25)$$

$$A_i = \sigma_i^2 + 2\sigma_i D_i + A_{i+1} \quad (1.6.26)$$

$$B_i = \rho_i^2 (\sigma_i^2 + 2\sigma_i D_i + B_{i+1}) \quad (1.6.27)$$

με

$$1 \leq i \leq k, \quad E_{k+1} = D_{k+1} = A_{k+1} = B_{k+1} = \rho_{k+1} = 0$$

και

$$x_{i-1}^* = (x_{i-1} - \mu_{i-1}) / \sigma_{i-1}$$

Οι (1.6.24) έως (1.6.27) εφαρμόζονται διαδοχικά από  $i=k$  μέχρι  $i=1$ . Ας σημειωθεί ότι οι ροπές δεύτερης τάξης μπορούν να υπολογιστούν όλες μαζί στην αρχή του σταδίου επιμερισμού, αφού δεν εξαρτώνται από τις τιμές των τμηματικών μεταβλητών. Αντίθετα οι δεσμευμένες μέσες τιμές πρέπει να υπολογίζονται χωριστά σε κάθε βήμα, επειδή εξαρτώνται από το  $x_{i-1}$ .

Σε περίπτωση μη αρνητικών τμηματικών μεταβλητών είναι δυνατό να εμφανιστεί κάποια αντίφαση από την εφαρμογή των σχέσεων υπολογισμού των δεσμευμένων μέσων τιμών, δεδομένου ότι αυτές επιτρέπουν και αρνητικές τιμές. Για την αντιμετώπιση αυτής της αντίφασης, καθώς και για την αποφυγή υπέρμετρα υψηλών τιμών των δεσμευμένων μέσων τιμών, τέθηκαν ορισμένα όρια για το  $x_{i-1}^*$ , τέτοια ώστε η δεσμευμένη μέση τιμή της  $X_i$  να ικανοποιεί την ανισοτική σχέση:

$$(1/c)\mu_i \leq E[X_i | X_{i-1} = x_{i-1}] \leq c\mu_i$$

όπου  $c$  αριθμητική σταθερά που θεωρήθηκε  $c=3$ . Τα όρια του  $x_{i-1}^*$ , που προκύπτουν από την τελευταία, είναι:

$$(1/c-1) \frac{\mu_i}{\rho_i \sigma_i} \leq x_{i-1}^* \leq (c-1) \frac{\mu_i}{\rho_i \sigma_i}$$

Όταν το  $x_{i-1}^*$  ικανοποιεί την τελευταία ανισότητα, τότε δεν υπάρχει πρόβλημα ούτε και για τη δεσμευμένη μέση τιμή της  $S_i$ .

Οι αναλυτικές, χωρίς αναδρομή, εκφράσεις των  $E_i$ ,  $D_i$ ,  $A_i$  και  $B_i$ , δεν χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή του μοντέλου, αλλά δίνονται εδώ για λόγους πληρότητας:

$$E_i = \sum_{j=1}^k \mu_j \quad (1.6.28)$$

$$D_i = \sum_{j=i+1}^k \rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j \quad (1.6.29)$$

$$A_i = \sum_{j=i}^k \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=i}^{k-1} D_j \sigma_j \quad (1.6.30)$$

$$B_i = \sum_{j=i}^k \rho_j^2 \dots \rho_{i+1}^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=i}^{k-1} \rho_j^2 \dots \rho_{i+1}^2 D_j \sigma_j \quad (1.6.31)$$

Με τη βοήθεια των παραμέτρων  $E_i$ ,  $D_i$ , και  $A_i$  είναι δυνατό να δοθούν απλές σχέσεις και για τις ροπές των μεταβλητών χωρίς δέσμευση. Αυτές μπορούν να εξαχθούν από τις αντίστοιχες σχέσεις των δεσμευμένων ροπών, αν τεθεί  $\rho_i=0$ , οπότε και  $B_i=0$ . Το σύνολο των εξισώσεων των ροπών χωρίς δέσμευση θα είναι:

$$E[X_i] = \mu_i$$

$$\text{Var}[X_i] = \sigma_i^2$$

$$E[S_i] = E_i \quad (1.6.32)$$

$$\text{Var}[S_i] = A_i \quad (1.6.33)$$

$$\text{Cov}[S_i, X_i] = \sigma_i (\sigma_i + D_i) \quad (1.6.34)$$

Εννοείται ότι στις τελευταίες ο υπολογισμός των  $E_i$ ,  $D_i$  και  $A_i$ , γίνεται κανονικά από τις σχέσεις (1.6.24) έως (1.6.26), στις οποίες δεν υπεισέρχεται το  $\rho_i$ .

---

#### Διαδικασία απόδειξης των σχέσεων της υποπαραγράφου

θα θεωρηθεί ότι τα  $E_i$ ,  $D_i$ ,  $A_i$  και  $B_i$  ορίζονται από τις σχέσεις (1.6.28) έως (1.6.30) και με βάση αυτές θα αποδεικτούν οι δύο ομάδες σχέσεων (1.6.21) έως (1.6.23) και (1.6.24) έως (1.6.27).

#### Απόδειξη της (1.6.21)

Η (1.6.18) γράφεται:

$$E[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \sum_{j=i}^k \mu_j + x_{i-1}^k (\rho_i \sigma_i + \sum_{j=i+1}^k \rho_j \dots \rho_i \sigma_j)$$

Με αντικατάσταση των αθροισμάτων από τις (1.6.28) και (1.6.29) η παραπάνω δίνει άμεσα την (1.6.21).

#### Απόδειξη της (1.6.22)



Η (1.6.19) γράφεται:

$$\begin{aligned} \text{Var}[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}] &= \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=i}^{k-1} \sum_{l=j+1}^k \rho_1 \dots \rho_{j+1} \sigma_l \sigma_j \\ &\quad - \sum_{j=i}^k \sigma_j^2 \rho_j^2 \dots \rho_i^2 - 2 \sum_{j=i}^{k-1} \sum_{l=j+1}^k (\rho_1 \dots \rho_{j+1} \rho_j^2 \dots \rho_i^2 \sigma_l \sigma_j) \end{aligned}$$

και με τη βοήθεια της (1.6.29) παίρνει τη μορφή:

$$\text{Var}[S_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \sum_{j=i}^k \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=i}^{k-1} D_j \sigma_j - \sum_{j=i}^k \sigma_j^2 \rho_j^2 \dots \rho_i^2 - 2 \sum_{j=i}^{k-1} D_j \sigma_j \rho_j^2 \dots \rho_i^2$$

Από τη τελευταία, λόγω των (1.6.30) και (1.6.31) παίρνουμε άμεσα την (1.6.22)

Απόδειξη της (1.6.23)

Η (1.6.20) με τη βοήθεια της (1.6.29) παίρνει τη μορφή:

$$\text{Cov}[S_i, X_i | X_{i-1} = x_{i-1}] = \sigma_i (1 - \rho_i^2) (\sigma_i + D_i)$$

Απόδειξη της (1.6.24)

Από την (1.6.28) παίρνουμε:

$$E_j = \mu_j + \sum_{j=i+1}^k \mu_j = \mu_i + E_{i+1}$$

Απόδειξη της (1.6.25)

Ξεκινώντας από την (1.6.29) θα έχουμε:

$$D_i = \rho_{i+1} \sigma_{i+1} + \rho_{i+1} \sum_{j=i+2}^k \rho_j \dots \rho_{i+2} \sigma_j = \rho_{i+1} \sigma_{i+1} + \rho_{i+1} D_{i+1} = \rho_{i+1} (\sigma_{i+1} + D_{i+1})$$

Απόδειξη της (1.6.26)

Ξεκινώντας από την (1.6.30) θα έχουμε:

$$A_i = \sigma_i^2 + \sum_{j=i+1}^k \sigma_j^2 + 2D_i \sigma_i + 2 \sum_{j=i+1}^{k-1} D_j \sigma_j = \sigma_i^2 + 2D_i \sigma_i + \sum_{j=i+1}^k \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=i+1}^{k-1} D_j \sigma_j = \sigma_i^2 + 2D_i \sigma_i + A_{i+1}$$

Απόδειξη της (1.6.27)

Ξεκινώντας από την (1.6.31) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_i &= \rho_i^2 \sigma_i^2 + \rho_i^2 \sum_{j=i+1}^k \rho_j^2 \dots \rho_{i+1}^2 \sigma_j^2 + 2\rho_i^2 D_i \sigma_i + 2\rho_i^2 \sum_{j=i+1}^{k-1} \rho_j^2 \dots \rho_{i+1}^2 D_j \sigma_j \\ &= \rho_i^2 \sigma_i^2 + 2\rho_i^2 D_i \sigma_i + \rho_i^2 \sum_{j=i+1}^k \rho_j^2 \dots \rho_{i+1}^2 \sigma_j^2 + 2\rho_i^2 \sum_{j=i+1}^{k-1} \rho_j^2 \dots \rho_{i+1}^2 D_j \sigma_j \\ &= \rho_i^2 (\sigma_i^2 + 2D_i \sigma_i + B_{i+1}) \end{aligned}$$

### 1.6.5. Διερεύνηση και εξέταση ειδικών περιπτώσεων

Με βάση τις σχέσεις της προηγούμενης υποπαραγράφου μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

1. Οι αναμενόμενες τιμές των μεταβλητών του μοντέλου, κάτω από τη δέσμευση  $X_{i-1}=x_{i-1}$ , εξαρτώνται από την τιμή του  $x_{i-1}$ , ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο για τις δεσμευμένες διασπορές.
2. Η διαφορά της αδέσμευτης και δεσμευμένης διασποράς της τμηματικής μεταβλητής  $X_i$  είναι  $\rho_i^2 \sigma_i^2 \geq 0$ . Η διαφορά της αδέσμευτης και δεσμευμένης διασποράς της μεταβλητής  $S_i$  είναι  $B_i \geq 0$ . Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις οι δεσμευμένες διασπορές είναι μικρότερες από τις αδέσμευτες, γεγονός που οφείλεται στην αύξηση της πληροφορίας που εισάγει η συνθήκη  $X_{i-1}=x_{i-1}$ .
3. Για  $\rho_i=0$  οι δεσμευμένες και αδέσμευτες ροπές ταυτίζονται, ενώ για  $\rho_i=\pm 1$  η δεσμευμένη διασπορά της  $X_i$  μηδενίζεται, αφού σ' αυτή την οριακή περίπτωση η συνθήκη  $X_{i-1}=x_{i-1}$ , καθορίζει πλήρως την τιμή της  $X_i$ .

Όταν σε κάποιο πρόβλημα επιμερισμού δεν υπάρχει εξάρτηση των μεταβλητών του κάθε σταδίου από προηγούμενα στάδια, οπότε η αθροιστική μνήμη είναι μηδενική, τότε στο πρώτο βήμα του κάθε σταδίου οι παράμετροι του μοντέλου δεν θα πρέπει να είναι οι δεσμευμένες ροπές, αλλά οι αντίστοιχες ροπές χωρίς δέσμευση. Οι ροπές αυτές μπορούν να υπολογίζονται από τις σχέσεις (1.6.32) έως (1.6.34).

Στην περίπτωση που όλες οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, τότε για όλα τα βήματα εφαρμογής του μοντέλου χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις των ροπές χωρίς δέσμευση. Εξ άλλου οι παράμετροι  $\rho_j$ ,  $D_j$  και  $B_j$  θα έχουν μηδενικές τιμές για όλες τις τιμές του  $i$ , ενώ και οι εξισώσεις (1.6.26) και (1.6.30) απλοποιούνται και γίνονται:

$$A_i = \sigma_i^2 + A_{i+1} \quad (1.6.35)$$

$$A_i = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 \quad (1.6.36)$$

Τέλος στην περίπτωση που η ακολουθία των τμηματικών μεταβλητών είναι μόνη, οπότε οι  $X_i$  είναι ισόνομες, οι εξισώσεις του μοντέλου μπορούν να πάρουν

απλούστερες μορφές. Έτσι αν  $\mu_i = \mu$ ,  $\sigma_i = \sigma$  και  $\rho_i = \rho$ , για κάθε  $i$ , τότε τα  $E_i$ ,  $D_i$ ,  $A_i$  και  $B_i$  μπορούν να υπολογίζονται άμεσα (χωρίς αναδρομικούς τύπους) από τις ακόλουθες σχέσεις, που αποδεικνύονται στο τέλος της υποπαραγράφου:

$$E_i = (k-i+1)\mu \quad (1.6.37)$$

$$D_i = \sigma \frac{\rho - \rho^{k-i+1}}{1-\rho} \quad (1.6.38)$$

$$A_i = \sigma^2 \frac{(k-i+1)(1-\rho^2) - 2\rho(1-\rho^{k-i+1})}{(1-\rho)^2} \quad (1.6.39)$$

$$B_i = \sigma^2 \frac{\rho^2(1-\rho^{k-i+1})^2}{(1-\rho)^2} \quad (1.6.40)$$

Φυσικά και σε αυτή την περίπτωση οι αναδρομικοί τύποι (1.6.28) έως (1.6.31) εξακολουθούν να ισχύουν, και ουσιαστικά δεν μειονεκτούν, σε σχέση με τις παραπάνω εξισώσεις, ως προς το χρόνο υπολογισμού. Οι ροπές της μεταβλητής  $S_i$  υπολογίζονται και πάλι από τις (1.6.21) έως (1.6.23) (δεσμευμένες), ή τις (1.6.32) έως (1.6.34) (χωρίς δέσμευση).

=====

Απόδειξη της (1.6.38)

Ξεκινώντας από την (1.6.29) έχουμε:

$$D_i = \sum_{j=i+1}^k \rho_j \dots \rho_{i+1} \sigma_j = \sigma \sum_{j=i+1}^k \rho^{j-i} = \sigma(\rho + \rho^2 + \dots + \rho^{k-i}) = \frac{\sigma\rho - \sigma\rho^{k-i+1}}{1-\rho} = \frac{\sigma\rho(1-\rho^{k-i})}{1-\rho}$$

Απόδειξη της (1.6.39)

Ξεκινώντας από την (1.6.30) και χρησιμοποιώντας και την (1.6.38) έχουμε:

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{j=i}^k \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=i}^{k-1} D_j \sigma_j = (k-i+1)\sigma^2 + 2\sigma^2 \sum_{j=i}^{k-1} \frac{\rho(1-\rho^{k-j})}{1-\rho} = (k-i+1)\sigma^2 + 2\frac{\rho}{1-\rho} \sigma^2 (k-i - \sum_{j=i}^{k-1} \rho^{k-j}) \\ &= (k-i+1)\sigma^2 + 2\frac{\rho}{1-\rho} \sigma^2 [(k-i) - (\rho^{k-i} + \dots + \rho^2 + \rho)] = (k-i+1)\sigma^2 + 2\frac{\rho}{1-\rho} \sigma^2 \left[ (k-i) - \frac{\rho(1-\rho^{k-1})}{1-\rho} \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2} \left[ (k-i)(1-\rho)^2 + (1-\rho)^2 + 2(k-i)\rho(1-\rho) - 2\rho^2 + 2\rho^{k-i+2} \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2} \left[ (k-i)(1+\rho^2-2\rho+2\rho-2\rho^2) + (1+\rho^2-2\rho-2\rho^2) + 2\rho^{k-i+2} \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2} \left[ (k-i+1)(1-\rho^2) - 2\rho + 2\rho^{k-i+2} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2} \left[ (k-i+1)(1-\rho^2) - 2\rho(1-\rho^{k-i+1}) \right]$$

Απόδειξη της (1.6.40)

Ξεκινώντας από την (1.6.31) και χρησιμοποιώντας και την (1.6.38) έχουμε:

$$\begin{aligned} B_i &= \sum_{j=i}^k \rho_j^2 \dots \rho_i^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=i}^{k-1} \rho_j^2 \dots \rho_i^2 D_j \sigma_j = \sigma^2 \sum_{j=i}^k \rho^{2(j-i+1)} + 2\sigma \sum_{j=i}^{k-1} \rho^{2(j-i+1)} D_j \\ &= \sigma^2 \sum_{j=i}^k \rho^{2(j-i+1)} + 2\sigma^2 \sum_{j=i}^{k-1} \rho^{2(j-i+1)} \frac{\rho(1-\rho^{k-j})}{1-\rho} \\ &= \sigma^2 \left[ \rho^2 + \rho^4 + \dots + \rho^{2(k-i+1)} \right] + \frac{2\sigma^2}{1-\rho} \left[ (\rho^3 + \rho^5 + \dots + \rho^{2(k-1)+1}) - (\rho^2 \rho^{k-1+1} + \rho^4 \rho^{k-1+1} + \dots + \rho^{2(k-1)} \rho^2) \right] \\ &= \sigma^2 \left[ \rho^2 + \rho^4 + \dots + \rho^{2(k-1)+1} \right] + \frac{2\sigma^2}{1-\rho} \left[ (\rho^3 + \rho^5 + \dots + \rho^{2(k-1)+1}) - (\rho^{k-i+3} + \rho^{k-i+4} + \dots + \rho^{2(k-1)+1}) \right] \\ &= \sigma^2 \frac{\rho^2 - \rho^{2(k-i+2)}}{1-\rho^2} + \frac{2\sigma^2}{1-\rho} \left[ \frac{\rho^3 - \rho^{2(k-i+1)+1}}{1-\rho^2} - \frac{\rho^{k-1+3} - \rho^{2(k-1)+1}}{1-\rho} \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2(1+\rho)} \left[ [\rho^2 - \rho^{2(k-i+2)} - \rho^3 + \rho^{2(k-i+2)+1}] + 2[\rho^3 - \rho^{2(k-i+1)+1}] \right. \\ &\quad \left. - 2[\rho^{k-1+3} - \rho^{2(k-1)+1} + \rho^{k-1+4} - \rho^{2(k-i+2)}] \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2(1+\rho)} \left[ [\rho^2 + \rho^3] + [\rho^{2(k-i+2)} + \rho^{2(k-i+2)+1}] - 2[\rho^{k-1+3} + \rho^{k-1+4}] \right] \\ &= \frac{\sigma^2(1+\rho)}{(1-\rho)^2(1+\rho)} \left[ \rho^2 + \rho^{2(k-i+2)} - 2\rho^{k-i+3} \right] = \frac{\sigma^2 \rho^2}{(1-\rho)^2} \left[ 1 - 2\rho^{k-i+1} + \rho^{2(k-i+1)} \right] \\ &= \frac{\sigma^2 \rho^2 (1-\rho^{k-i+1})^2}{(1-\rho)^2} \end{aligned}$$

### 1.6.6. Διαδικασία εφαρμογής του μοντέλου

Ανακεφαλαιώνοντας όσα έχουν αναφερθεί στις παραγράφους 1.5. και 1.6., θα συνοψίσουμε τη διαδικασία που ακολουθεί το μοντέλο επιμερισμού σε κάθε στάδιο. Εννοείται η βασική εξίσωση επιμερισμού είναι η (1.1.7) και σε κάθε βήμα παίρνει τη μορφή των σχέσεων (1.4.1) έως (1.4.3).

Στην αρχή του σταδίου επιμερισμού που εξετάζουμε υποτίθεται ότι είναι

γνωστές οι μέσες τιμές των τμηματικών μεταβλητών  $\mu_i$ , οι διασπορές τους  $\sigma_i^2$ , και οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης  $\rho_i$  ( $i=1, \dots, k$ ). Επίσης είναι γνωστή η τιμή της αθροιστικής μεταβλητής,  $z$ . Τέλος είναι γνωστή η τιμή της τελευταίας τμηματικής μεταβλητής του προηγούμενου σταδίου,  $x_0$ . Αν αυτό δεν συμβαίνει, ή αν οι μεταβλητές του τρέχοντος σταδίου δεν εξαρτώνται από μεταβλητές προηγούμενων σταδίων, τότε θα θεωρήσουμε  $\rho_i=0$ , χωρίς να παρεκκλίνουμε περαιτέρω από την πορεία που περιγράφεται παρακάτω.

Η εφαρμογή ξεκινά με μια **πρώτη φάση υπολογισμών**, που αφορούν το σύνολο των παραμέτρων του σταδίου, χωρίς διάκριση βήματος. Αυτή περιλαμβάνει (1) τον υπολογισμό των παραμέτρων  $E_i$ ,  $D_i$ ,  $A_i$  και  $B_i$ , από τις σχέσεις (1.6.24) έως (1.6.27) (για  $i=k$  μέχρι 1) και (2) τον υπολογισμό των διασπορών  $\text{Var}[X_i|X_{i-1}=x_{i-1}]$  και  $\text{Var}[S_i|X_{i-1}=x_{i-1}]$ , και των συνδιασπορών  $\text{Cov}[X_i, S_i|X_{i-1}=x_{i-1}]$ , από τις σχέσεις (1.6.17), (1.6.22) και (1.6.24) αντίστοιχα (για  $i=1$  μέχρι  $k-1$ )

Στη **δεύτερη φάση υπολογισμών** παράγονται, βήμα προς βήμα όλες οι τιμές των τμηματικών μεταβλητών. Σε κάθε βήμα η διαδικασία είναι πανομοιότυπη. Θα περιγράψουμε λοιπόν τη διαδικασία στο τυπικό  $i$  βήμα, θεωρώντας οι τμηματικές και αθροιστικές μεταβλητές ακολουθούν κατά προσέγγιση κατανομή γάμα:<sup>4</sup>

1. Με βάση την γνωστή από το προηγούμενο βήμα τιμή  $x_{i-1}$ , υπολογίζονται οι δεσμευμένες μέσες τιμές  $E[X_i|X_{i-1}=x_{i-1}]$  και  $E[S_i|X_{i-1}=x_{i-1}]$ .
2. Καλείται η διαδικασία δικασμού με αρχικές παραμέτρους  $\mu_X$ ,  $\sigma_X^2$ ,  $\mu_Z$ ,  $\sigma_Z^2$ , και  $\sigma_{XZ}$ , ίσες με τις παραπάνω δεσμευμένες ροπές (αντιστοιχία:  $X_i \rightarrow X$ ,  $S_i \rightarrow Z$ ).
3. Υπολογίζονται οι βοηθητικές παράμετροι  $\theta$  και  $\eta$  του μοντέλου δικασμού από τις σχέσεις (1.5.26) και (1.5.37) αντίστοιχα, και στη συνέχεια οι δεσμευμένες ροπές της αναλογικής μεταβλητής  $\mu_{P|Z}$  και  $\sigma_{P|Z}^2$ , από τις σχέσεις (1.5.32) και (1.5.39) αντίστοιχα.
4. Παράγεται η τιμή της αναλογικής μεταβλητής  $P$ , ως τυχαίος αριθμός από την κατανομή βήτα της οποίας οι παράμετροι προκύπτουν από τις παραπάνω ροπές.
5. Υπολογίζονται οι τιμές  $x_i = p s_i$  και  $y_i = s_{i+1} = s_i - x_i$ .

Αν υπάρχει ασυνέχεια στην κατανομή της  $X_i$ , τότε κατά την κλήση της διαδικασίας δικασμού θα μεταβιβαστεί ως πρόσθετη παράμετρος και το μέτρο της

4. Σε περίπτωση άλλης κατανομής η διαδικασία παραμένει η ίδια, αλλά θα χρησιμοποιηθούν άλλες σχέσεις προσδιορισμού των παραμέτρων του μοντέλου δικασμού.

ασυνέχειας,  $q_0$ , και στο βήμα (4) θα προηγηθεί ο υπολογισμός  $\pi_{PIZ}$  και  $\varepsilon_{PIZ}^2$ , (σχέσεις (1.5.70) και (1.5.71)). Οι παράμετροι της κατανομής βήτα θα υπολογιστούν από τις τελευταίες, και η διαδικασία παραγωγής της τιμής της  $P$  τροποποιείται, όπως περιγράφεται στην υποπαράγραφο 1.5.8.

Η πορεία της εφαρμογής του μοντέλου εξετάζεται πιο διεξοδικά στο κεφάλαιο 3, όπου μορφοποιείται το λογικό διάγραμμα του και περιγράφεται το σχετικό πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή.

## 1.7. ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΤΜΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

### 1.7.1. Η περίπτωση ισόνομων ανεξάρτητων τμηματικών μεταβλητών

Η πορεία που ακολουθεί η εφαρμογή του μοντέλου, καθώς και οι σχέσεις υπολογισμού των παραμέτρων του, έχουν ήδη καθοριστεί στην προηγούμενη παράγραφο, για τη γενική περίπτωση μη μόνιμης ακολουθίας τμηματικών μεταβλητών με Μαρκοβιανή δομή. Η ίδια πορεία ακολουθείται και σε οποιαδήποτε ειδικότερη περίπτωση, όπως στην περίπτωση μόνιμης ακολουθίας ανεξάρτητων τμηματικών μεταβλητών, που εξετάζεται εδώ. Η ιδιαίτερη εξέταση αυτής της περίπτωσης δεν γίνεται για να διαφοροποιηθεί η πορεία της εφαρμογής του μοντέλου, αλλά για να διερευνηθεί θεωρητικά η συμπεριφορά του μοντέλου, κάτω από ειδικές συνθήκες.

Οι ειδικές μορφές των σχέσεων υπολογισμού των παραμέτρων του μοντέλου για ισόνομες ανεξάρτητες τμηματικές μεταβλητές έχουν ήδη συζητηθεί στην υποπαράγραφο 1.6.5. Εδώ θα δοθεί η συνολική μαθηματική μορφή που παίρνει το μοντέλο σ' αυτή την ειδική περίπτωση. Αν απαλείψουμε τις ενδιάμεσες μεταβλητές των διαφόρων βημάτων ( $Y_i, S_i$ ) και χαρακτηρίσουμε με τον δείκτη  $i$  την αναλογική μεταβλητή του κάθε βήματος επιμερισμού, ξεκινώντας από τη βασική σχέση επιμερισμού (1.1.7), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} X_1 &= P_1 Z \\ X_2 &= P_2 (1-P_1) Z \\ &\vdots \\ X_i &= P_i (1-P_1) (1-P_2) \dots (1-P_{i-1}) Z \quad (i=1, \dots, K) \\ &\vdots \\ X_K &= P_K (1-P_1) (1-P_2) \dots (1-P_{K-1}) Z \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχτεί ότι, για να ισχύει η (1.1.7), πρέπει και αρκεί να ισχύει  $P_K=1$ .

Όπως έχει αποδειχτεί στην υποπαράγραφο 1.5.5, δεδομένου ότι οι  $X_i$  είναι ισόνομες και ανεξάρτητες, όλες οι  $P_i$  θα είναι ασυσχέτιστες με την  $Z$ , και επειδή στο μοντέλο χρησιμοποιούνται ροπές μέχρι δεύτερης τάξης, μπορούν να θεωρηθούν στοχαστικά ανεξάρτητες από την  $Z$ . Εξ άλλου, επειδή οι  $X_i$  είναι ανεξάρτητες, από τον τρόπο καθορισμού των ροπών των  $P_i$ , προκύπτει ότι οι παράμετροι των κατανομών των τελευταίων δεν εξαρτώνται από τιμές των προηγούμενων τμηματικών μεταβλητών ( $x_j, j < i$ ), άρα ούτε και από τιμές των προηγούμενων αναλογικών μεταβλητών. Συνεπώς οι  $P_i$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και ανεξάρτητες

από την Z. Άρα στην περίπτωση που εξετάζουμε, το μοντέλο επιμερισμού μπορεί να εκτελεστεί σε ένα καθολικό βήμα, στο οποίο θα παραχθούν όλες οι τιμές των αναλογικών μεταβλητών από τις αντίστοιχες κατανομές.

Οι ροπές των αναλογικών μεταβλητών μπορούν να προκύψουν με συνδυασμό των σχέσεων του γενικού μοντέλου επιμερισμού και του μοντέλου δικασμού. Έτσι για τη μέση τιμή, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.6.32), (1.6.37) και (1.5.56) θα έχουμε:

$$\mu_{P_i} = \frac{1}{k-i+1} \quad (1.7.2)$$

Αντίστοιχα οι διασπορές προκύπτουν με συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων, καθώς και των (1.6.33), (1.6.39) (για  $\rho=0$ ), και (1.5.57), και είναι:

$$\sigma_{P_i}^2 = \frac{\sigma^2 - [1/(k-i+1)]^2 (k-i+1)\sigma^2}{(k-i+1)^2 \mu^2 + (k-i+1)\sigma^2}$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\sigma_{P_i}^2 = \frac{k-1}{(k-i+1)^2} \frac{v^2}{v^2 + k-i+1} \quad (1.7.3)$$

όπου  $v=\sigma/\mu$  είναι ο συντελεστής διασποράς των τμηματικών μεταβλητών. Παρατηρούμε ότι οι ροπές των αναλογικών μεταβλητών δεν εξαρτώνται άμεσα από τις αριθμητικές τιμές των ροπών των τμηματικών μεταβλητών, παρά μόνο από το συντελεστή διασποράς τους. Ακόμη παρατηρούμε ότι για  $i=k$  οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν  $\mu_{P_k}=1$  και  $\sigma_{P_k}^2=0$ , που συνεπάγεται αυτομάτως ότι  $P_k=1$ .

Οι σχέσεις (1.7.2) και (1.7.3) μπορούν να παραχθούν και άμεσα από τη βασική εξίσωση (1.7.1) χωρίς τη μεσολάβηση των γενικών εξισώσεων ροπών των τμηματικών, αθροιστικών και αναλογικών μεταβλητών.

Θα θεωρήσουμε τώρα ότι οι αναλογικές μεταβλητές ακολουθούν κατανομή βήτα. Αν  $b_i$  και  $c_i$  είναι οι παράμετροι της κατανομής βήτα, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$E[P_i] = \frac{b_i}{b_i+c_i} \quad (1.7.4)$$

$$\text{Var}[P_i] = \frac{b_i c_i}{(b_i+c_i)^2 (b_i+c_i+1)} \quad (1.7.5)$$

Εφόσον μας ενδιαφέρει η διατήρηση των ροπών της  $P_i$ , ο υπολογισμός των παραμέτρων της θα πρέπει να γίνει με τη μέθοδο των ροπών. Συνεπώς, με συνδυασμό των (1.7.2) και (1.7.3) με τις (1.7.4) και (1.7.5) αντίστοιχα θα



έχουμε:

$$\frac{b_i}{b_i + c_i} = \frac{1}{k - i + 1}$$

$$\frac{b_i c_i}{(b_i + c_i)^2 (b_i + c_i + 1)} = \frac{k - i}{(k - i + 1)^2} \frac{v^2}{v^2 + k - i + 1}$$

Η λύση του συστήματος ως προς  $b_i$  και  $c_i$  δίνει τις ακόλουθες πολύ απλές εκφράσεις:

$$b_i = \frac{1}{v^2} = \frac{\mu^2}{\sigma^2}, \quad c_i = \frac{k - i}{v^2} = (k - i) \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (1.7.6)$$

### 1.7.2. Η περίπτωση ανεξάρτητων τμηματικών μεταβλητών με κατανομή γάμα

Στην υποπαράγραφο 1.5.6 αποδείξαμε ότι το μοντέλο δικασμού διατηρεί πλήρως τις συναρτήσεις κατανομής των δύο τμηματικών μεταβλητών όταν αυτές είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κατανομή γάμα με κοινή παράμετρο κλίμακας. Εδώ θα επεκτείνουμε το συμπέρασμα αυτό για το συνολικό μοντέλο επιμερισμού  $k$  μεταβλητών, που περιγράφεται από τη σχέση (1.1.7).

Εξετάζουμε λοιπόν την περίπτωση που οι τμηματικές μεταβλητές  $X_i$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν κατανομές γάμα με παραμέτρους  $(v_i, \lambda)$ . Σύμφωνα με τη θεωρία πιθανοτήτων, και η κατανομή της αθροιστικής μεταβλητής είναι γάμα, με παραμέτρους  $(k = v_1 + v_2 + \dots + v_k, \lambda)$ .

Η ακόλουθη πρόταση που αποδεικνύεται στο τέλος της υποπαραγράφου εξασφαλίζει για την υπό μελέτη περίπτωση την πλήρη διατήρηση των συναρτήσεων κατανομής από το μοντέλο, και δίνει και τις παραμέτρους των κατανομών των αναλογικών μεταβλητών:

*Αν (α) η μεταβλητή  $Z$  ακολουθεί κατανομή γάμα με παραμέτρους  $(k = v_1 + v_2 + \dots + v_k, \lambda)$ , (β) η ακολουθία μεταβλητών  $X_i$  ορίζεται από τις σχέσεις (1.7.1), όπου  $(\gamma)$  οι μεταβλητές  $P_i$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και από τη  $Z$ , και ακολουθούν κατανομές βήτα με παραμέτρους  $(b_i = v_i, c_i = v_{i+1} + \dots + v_k)$ , τότε οι μεταβλητές  $X_i$  είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κατανομές γάμα με παραμέτρους  $(v_i, \lambda)$ .*

Είναι προφανές ότι και σε αυτή την περίπτωση είναι δυνατό ο επιμερισμός να εκτελεστεί σε ένα καθολικό βήμα, στο οποίο θα παραχθούν όλες οι μεταβλητές

$P_i$  από τις αντίστοιχες κατανομές βήτα. Ας σημειωθεί ότι οι παράμετροι  $\nu_i$  και  $\lambda$  προκύπτουν με τη μέθοδο των ροπών από τις μέσες τιμές  $\mu_i$  και τις διασπορές  $\sigma_i^2$  των  $X_i$ , και είναι:

$$\nu_i = \mu_i^2 / \sigma_i^2 \quad (1.7.7)$$

$$\lambda = \mu_i / \sigma_i^2 \quad (1.7.8)$$

Εννοείται ότι για να έχουν όλες οι μεταβλητές  $X_i$  την ίδια παράμετρο κλίμακας  $\lambda$ , θα πρέπει να έχουν διασπορές ανάλογες των μέσων τιμών τους.

#### Απόδειξη της πρότασης

θα αποδείξουμε πρώτα το σκέλος της πρότασης που αφορά τις συναρτήσεις κατανομής των  $X_i$ , και μετά θα ασχοληθούμε με την στοχαστική τους ανεξαρτησία. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της τέλει επαγωγής. Η πρόταση αποδεικνύεται πιο εύκολα, αν εισάγουμε και τη μεταβλητή:

$$Y_i = (1-P_1)(1-P_2)\dots(1-P_{i-1})(1-P_i)Z \quad (i=1,\dots,k)$$

και συμπεριλάβουμε στα ζητούμενα και την επιπλέον απαίτηση ότι η  $Y_i$  είναι ανεξάρτητη της  $X_i$ , και ακολουθεί κατανομή γάμα με παραμέτρους  $(c_i = \nu_{i+1} + \dots + \nu_k, \lambda)$ , η οποία δεν χρειάζεται να υπάρχει στην τελική διατύπωση, γι' αυτό και έχει απαλειφθεί.

Για  $i=1$  έχουμε:

$$X_1 = P_1 Z, \quad Y_1 = (1-P_1)Z$$

Οι παράμετροι της  $P_1$  είναι:  $(b_1 = \nu_1, c_1 = \nu_2 + \dots + \nu_k)$ . Η  $Z$  ακολουθεί κατανομή γάμα με παραμέτρους  $(k = b_1 + c_1, \lambda)$ . Συνεπώς από τη βασική πρόταση της υποπαραγράφου 1.5.6. προκύπτει ότι οι  $X_1$  και  $Y_1$  ακολουθούν κατανομές γάμα με παραμέτρους  $(\nu_1, \lambda)$ ,  $(c_1, \lambda)$ , αντίστοιχα. Άρα η πρόταση ισχύει για  $i=1$ . Θεωρούμε ότι η πρόταση ισχύει για  $i=j-1 < k$ , που σημαίνει ότι οι μεταβλητές:

$$X_{j-1} = P_{j-1}(1-P_1)(1-P_2)\dots(1-P_{j-2})Z$$

και

$$Y_{j-1} = (1-P_1)(1-P_2)\dots(1-P_{j-2})(1-P_{j-1})Z \quad (\alpha)$$

ακολουθούν κατανομές γάμα με παραμέτρους  $(\nu_{j-1}, \lambda)$  και  $(c_{j-1}, \lambda)$ , αντίστοιχα.

Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για  $i=j \leq k$ . Πράγματι, από την (1.7.1) και την (α) προκύπτει ότι

$$X_j = P_j Y_{j-1}$$

Η  $P_j$  ακολουθεί κατανομή βήτα με παραμέτρους  $(b_j = \nu_j, c_j = \nu_{j+1} + \dots + \nu_k)$ . Δεδομένου ότι η  $P_j$  είναι ανεξάρτητη των  $(P_1, \dots, P_{j-1}, Z)$  θα είναι και ανεξάρτητη της  $Y_{j-1}$ . Συνεπώς μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε τη βασική πρόταση της υποπαραγράφου 1.5.6., απ' όπου συμπεραίνουμε ότι οι  $X_j$  και  $Y_j$  ακολουθούν κατανομές γάμα με παραμέτρους  $(\nu_j, \lambda)$ ,  $(c_j, \lambda)$ , αντίστοιχα. Άρα η πρόταση ισχύει και για  $i=j$ , και κατά συνέπεια ισχύει και για κάθε  $i \leq k$ .

Το θέμα της στοχαστικής ανεξαρτησίας μεταξύ των  $X_i$  είναι σχεδόν φανερό. Πράγματι αφού η μεταβλητή  $X_{j-1}$  είναι ανεξάρτητη από τις  $Y_{j-1}$  και  $P_j$ , που είναι και μεταξύ τους ανεξάρτητες, θα είναι ανεξάρτητη και από την  $X_j = P_j Y_{j-1}$ . Ο συλλογισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί και σε μη διαδοχικές μεταβλητές.

## 1.8. ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

### 1.8.1. Η περίπτωση τμηματικών μεταβλητών με αυτοσυσχέτιση ανώτερης τάξης

Το μοντέλο επιμερισμού, με τη μορφή που έχει αναπτυχθεί στις παραγράφους 1.5 και 1.6, καλύπτει πλήρως τις ανάγκες του επιμερισμού της σημειακής βροχόπτωσης, σε οποιαδήποτε χρονική βάση. Είναι προφανές ότι καλύπτει και οποιοδήποτε άλλο μονοδιάστατο πρόβλημα επιμερισμού, όταν η βασική στοχαστική ανάλυση που το περιγράφει έχει Μαρκοβιανή δομή με κατανομή κατά προσέγγιση γάμα. Πάντως το γενικό λογικό σχήμα του μοντέλου επιμερισμού, όπως έχει αναπτυχθεί στην παράγραφο 1.4, παρουσιάζει μεγάλη ευελιξία και επιδέχεται επεκτάσεις ή τροποποιήσεις, ώστε να καλύψει και άλλες περιπτώσεις.

Μια πρώτη επέκταση του μοντέλου μπορεί να γίνει για ακολουθίες τμηματικών μεταβλητών με δομή αυτοσυσχέτισης τάξης μεγαλύτερης από ένα. Σε μια τέτοια περίπτωση η γενική πορεία του μοντέλου παραμένει η ίδια, με τη διαφορά ότι οι δεσμευμένες ροπές των τμηματικών μεταβλητών θα έχουν ως δέσμευση περισσότερες από μία μεταβλητές προηγούμενων βημάτων. Εννοείται ότι οι εξισώσεις που θα δίνουν τις παραμέτρους του μοντέλου σε κάθε βήμα του θα είναι πιο πολύπλοκες από τις αντίστοιχες της υποπαραγράφου 1.6.4.

Ας εξετάσουμε ενδεικτικά την περίπτωση μη μόνιμης ακολουθίας αυτοσυσχέτισης δεύτερης τάξης. Για την ανάλυση αυτή ισχύει:

$$X_i = a_i X_{i-1} + b_i X_{i-2} + V_i \quad (1.8.1)$$

όπου οι  $V_i$  είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από τις  $X_1, \dots, X_{i-1}$ , και οι  $a_i$  και  $b_i$  είναι αριθμητικές σταθερές, που επειδή η ακολουθία των  $X_i$  δεν είναι μόνιμη, έχουν διαφορετικές τιμές για διαφορετικά  $i$ , και το ίδιο συμβαίνει και με τις ροπές των  $X_i$  και  $V_i$ . Το μοντέλο επιμερισμού  $K$  μεταβλητών στην περίπτωση αυτή θα έχει  $4K$  παραμέτρους, ήτοι  $K$  μέσες τιμές  $\mu_i$ ,  $K$  διασπορές  $\sigma_i^2$ , και  $2K$  συντελεστές αυτοσυσχέτισης  $\rho_i^{(1)}$  και  $\rho_i^{(2)}$  πρώτης και δεύτερης τάξης αντίστοιχα. Συναρτήσεσι των παραμέτρων αυτών μπορεί να υπολογιστεί οποιαδήποτε ροπή μέχρι β' τάξης των τμηματικών μεταβλητών ή της αθροιστικής. Οι παράμετροι που απαιτείται να υπολογίζονται σε κάθε βήμα εφαρμογής του μοντέλου είναι οι ακόλουθες:

1. Δεσμευμένη μέση τιμή της  $X_i$ :  $E[X_i | X_{i-1}=x_{i-1}, X_{i-2}=x_{i-2}]$
2. Δεσμευμένη διασπορά της  $X_i$ :  $\text{Var}[X_i | X_{i-1}=x_{i-1}, X_{i-2}=x_{i-2}]$
3. Δεσμευμένη μέση τιμή της  $S_i$ , όπου  $S_i = X_1 + X_{i+1} + \dots + X_K$ :  
 $E[S_i | X_{i-1}=x_{i-1}, X_{i-2}=x_{i-2}]$

4. Δεσμευμένη διασπορά της  $S_j$ :  $\text{Var}[S_j | X_{j-1}=x_{j-1}, X_{j-2}=x_{j-2}]$   
 5. Δεσμευμένη συνδιασπορά των  $X_j$  και  $S_j$ :  
 $\text{Cov}[S_j, X_j | X_{j-1}=x_{j-1}, X_{j-2}=x_{j-2}]$

Με χρησιμοποίηση της σχέσης (1.8.1) και της γενικής μεθοδολογίας των υποπαραγράφων 1.6.3. και 1.6.4, είναι δυνατό να παραχθούν γενικές εξισώσεις υπολογισμού των παραπάνω παραμέτρων, αντίστοιχες των (1.6.18) έως (1.6.27).

Το μοντέλο δικασμού παραμένει και σ' αυτή την περίπτωση το ίδιο, αφού δεν εξαρτάται από τη δομή της αυτοσυσχέτισης των τμηματικών μεταβλητών.

### 1.8.2. Η περίπτωση κατανομών διαφορετικών από τη γάμα Η χρήση διαφορετικών μοντέλων δικασμού

Έχει ήδη πολλαπλά επισημανθεί ότι η προτεινόμενη τελική μορφή του μοντέλου επιμερισμού είναι κατάλληλη για μεταβλητές με κατανομή γάμα, και αυτό ουσιαστικά προκύπτει από τη μορφή του μοντέλου δικασμού. Βέβαια η κατανομή γάμα είναι αρκετά γενική, εμπεριέχοντας, ως ειδικές περιπτώσεις, διάφορες άλλες κατανομές, όπως την εκθετική, και την κατανομή  $\chi^2$ . Εξ άλλου άλλες τυπικές κατανομές προσεγγίζουν συναρτησιακά την κατανομή γάμα, όπως η κατανομή Weibull, για τιμές της παραμέτρου κλίμακας κοντά στη μονάδα. Συνεπώς το μοντέλο είναι κατάλληλο και για τις περιπτώσεις αυτές, χωρίς τροποποίηση.

Θα εξετάσουμε ιδιαίτερα την περίπτωση της κανονικής κατανομής. Είναι γνωστό (βλ. *Benjamin και Cornell* [1970], σελ. 661) ότι η κατανομή γάμα πλησιάζει προς την κανονική κατανομή για  $2k > 30$ , όπου  $k$  η παράμετρος σχήματος της κατανομής. Δεδομένου ότι στην κατανομή γάμα ισχύει:  $k = \mu^2/\sigma^2$ , η παραπάνω συνθήκη μπορεί να διατυπωθεί με τη μορφή<sup>5</sup>:

$$v = \sigma/\mu \leq 1/4 \quad (1.8.2)$$

όπου  $v$  είναι ο συντελεστής διασποράς. Αντιστρέφοντας τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι κάτω από τη συνθήκη (1.8.2) η κανονική κατανομή προσεγγίζει την γάμα, και, συνακόλουθα, ότι το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν οι κατανομές των τμηματικών μεταβλητών είναι κανονικές, αλλά με συντελεστή διασποράς μικρότερο του 0.25. Ας σημειωθεί ότι στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής διασποράς της αθροιστικής μεταβλητής θα είναι αρκετά μικρότερος, της τάξης του  $v/\sqrt{k}$ , όπου  $k$  το πλήθος των τμηματικών μεταβλητών. Υπενθυμίζεται ότι στο μοντέλο δικασμού θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (1.5.34) έως (1.5.36) που έχουν εξαχθεί ειδικά για την κανονική κατανομή, αντί των αντίστοιχων σχέσεων

5. Για στρογγύλευση το όριο του  $2k$  θεωρήθηκε ίσο με 32 αντί 30.

(1.5.37) έως (1.5.39) της κατανομής γάμα. Πάντως, μετά τη διερεύνηση της υπο-παραγράφου 1.5.5, θα πρέπει να περιμένουμε ότι το μοντέλο σε αυτή την περίπτωση θα δώσει αποτελέσματα κάποια θετική ασυμμετρία και όχι μηδενική.

Μια διαφορετική αντιμετώπιση του θέματος προκύπτει αν χρησιμοποιηθεί διαφορετικό μοντέλο δικασμού, και συγκεκριμένα το γραμμικό, το οποίο είναι κατάλληλο για την κανονική κατανομή. Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή  $X$  μπορεί να παραχθεί χωρίς τη μεσολάβηση της αναλογικής μεταβλητής, με βάση τη δεσμευμένη κατανομή  $F_{X|Z}(x|Z=z)$ . Από τη θεωρία πιθανοτήτων (βλ. *Papoulis*, [1965], σελ. 184) είναι γνωστό ότι η δεσμευμένη κατανομή αυτή είναι κανονική, με μέση τιμή και διασπορά που δίνονται από τις σχέσεις (1.5.77) και (1.5.78). Ισοδύναμα, η παραγωγή της  $X$  μπορεί να γίνει και με τη μεσολάβηση της βοηθητικής μεταβλητής  $W$  της σχέσης (1.5.72) η οποία έχει κανονική κατανομή με παραμέτρους που δίνονται από τις σχέσεις (1.5.74) και (1.5.75). Η μεταβλητή  $Y$  προκύπτει πάντα από τη σχέση  $Y=Z-X$ . Το τελικό μοντέλο που διαμορφώνεται με αυτό τον τρόπο, ενώ εξακολουθεί να έχει τη λογική δομή και πορεία που το χαρακτηρίζει σαν "δυναμικό μοντέλο επιμερισμού", είναι θεωρητικά ισοδύναμο με το μοντέλο Valencia-Schaake. Άρα αυτή η παραλλαγή του μοντέλου έχει ασυμπτωτικά κανονική συμπεριφορά, και διατηρεί πλήρως τις κατανομές μεταβλητών με κανονική κατανομή. Στο τέλος της υποπαραγράφου δίνεται μια απόδειξη της πλήρους διατήρησης της κανονικής κατανομής, για ανεξάρτητες τμηματικές μεταβλητές.

Επεκτείνοντας τα παραπάνω, είναι δυνατό να έχουμε μια μεγάλη ποικιλία διαφορετικών εκδόσεων του μοντέλου, δεδομένου ότι μπορούμε να τροποποιήσουμε το μοντέλο δικασμού, καθορίζοντας διαφορετικούς τύπους στοχαστικής εξάρτησης των μεταβλητών  $X$  και  $Z$  (π.κ. πολυωνυμικούς, εκθετικούς, κλπ.) που συνεπάγονται αντίστοιχες μεθόδους παραγωγής της μεταβλητής  $X$ . Η  $Y$  θα υπολογίζεται πάντα από τη βασική σχέση  $X+Y=Z$ . Σε όλες αυτές τις εκδόσεις το λογικό σχήμα του μοντέλου παραμένει αναλλοίωτο, όπως επίσης και οι σχέσεις υπολογισμού των δεσμευμένων ροπών των τμηματικών μεταβλητών σε κάθε βήμα.

---

Η παραλλαγή με γραμμικό μοντέλο δικασμού - Απόδειξη της διατήρησης της κανονικής κατανομής για ανεξάρτητες τμηματικές μεταβλητές

Οι βασικές σχέσεις που περιγράφουν το  $i$  βήμα επιμερισμού στην περίπτωση του γραμμικού μοντέλου δικασμού είναι οι ακόλουθες: (βλέπε και υποπάργραφο 1.5.9.)

$$S_i = X_i + Y_i \quad (\alpha)$$

$$Y_i = X_{i+1} + \dots + X_k \quad (\beta)$$

$$S_i = X_i + \dots + X_k \quad (\gamma)$$

$$S_i = Z \quad (\delta)$$

$$X_i = A_i S_i + W_i \quad (\epsilon)$$

$$S_{i+1} = Y_i = (1-A_i)S_i - W_i \quad (\zeta)$$

Έστω  $\mu_i$  η μέση τιμή και  $\sigma_i^2$  η διασπορά της τμηματικής μεταβλητής  $X_i$ .

Επειδή οι παράμετροι του μοντέλου επιμερισμού υπολογίζονται με υπόθεση στοχαστικής ανεξαρτησίας των τμηματικών μεταβλητών, θα χρησιμοποιούνται οι σχέσεις (1.6.32) έως (1.6.34). Στο  $i$  βήμα του μοντέλου, επιμερισμού θα καλείται το μοντέλο δικασμού με τις ακόλουθες παραμέτρους: (προτάσσονται τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται στις σχέσεις της παραγράφου 1.4)

$$\mu_X : E\{X_i\} = \mu_i \quad (\eta)$$

$$\sigma_X^2 : \text{Var}\{X_i\} = \sigma_i^2 \quad (\theta)$$

$$\mu_Z : E\{S_i\} = \mu_1 + \dots + \mu_k \quad (\iota)$$

$$\sigma_Z^2 : \text{Var}\{S_i\} = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2 \quad (\kappa)$$

$$\sigma_{XZ} : \text{Cov}\{S_i, X_i\} = \sigma_i^2 \quad (\lambda)$$

Ευνεπώς οι σταθερές  $A_i$ , και οι μέσες τιμές  $\eta_i$  και οι διασπορές  $\delta_i^2$  των μεταβλητών  $W_i$ , λόγω των (1.5.73) έως (1.5.75) θα είναι:

$$A_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \dots + \sigma_k^2} \quad (\mu)$$

$$\eta_i = \mu_i - \frac{\sigma_i^2(\mu_1 + \dots + \mu_k)}{\sigma_i^2 + \dots + \sigma_k^2} \quad (\nu)$$

$$\delta_i^2 = \sigma_i^2 - \frac{\sigma_i^4}{\sigma_i^2 + \dots + \sigma_k^2} \quad (\xi)$$

Μετά τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε την προς απόδειξη πρόταση με τον ακόλουθο τρόπο (πρβλ. με την πρόταση της υποπαραγράφου (1.7.2)):

*Αν (1) η μεταβλητή  $Z$  ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους ( $\mu_Z = \mu_1 + \dots + \mu_k$ ,  $\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2$ ), (2) οι ακολουθίες μεταβλητών  $X_i$ ,  $Y_i$  και  $S_i$  ορίζονται με αναδρομική εφαρμογή των σχέσεων (δ), (ε) και (ζ), όπου (3) οι σταθερές  $A_i$  δίνονται από τη σχέση (μ), και οι  $W_i$  είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες μεταξύ τους και από την  $Z$ , και ακολουθούν κανονικές κατανομές με παραμέτρους ( $\eta_i$ ,  $\delta_i^2$ ), που δίνονται από τις σχέσεις (ν) και (ξ), τότε οι μεταβλητές  $X_i$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν κανονικές κατανομές με παραμέτρους ( $\mu_i$ ,  $\sigma_i^2$ ).*

Θα αποδείξουμε πρώτα το σκέλος της πρότασης που αφορά τις συναρτήσεις κατανομής των  $X_i$ , και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη στοχαστική τους ανεξαρτησία. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της τελείας επαγωγής και, όπως και στην απόδειξη της υποπαραγράφου 1.7.2, θα συμπεριλάβουμε στα ζητούμενα της πρότασης και την απαίτηση ότι η μεταβλητή  $Y_i = S_{i+1}$  είναι ανεξάρτητη της  $X_i$  και ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους ( $\mu_{i+1} + \dots + \mu_k$ ,  $\sigma_{i+1}^2 + \dots + \sigma_k^2$ ).

Για  $i = 1$  έχουμε  $S_1 = Z$  και συνεπώς

$$X_1 = A_1 Z + W_1, \quad Y_1 = (1-A_1)Z - W_1$$

Αφού η  $X_1$  είναι γραμμικός συνδυασμός των κανονικών μεταβλητών  $Z$  και  $W_1$ , θα ακολουθεί και αυτή κανονική κατανομή με παραμέτρους  $E\{X_1\}$  και  $\text{Var}\{X_1\}$ , ίσες με:

$$E\{X_i\} = \lambda_i \mu_Z + \eta_i = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2} (\mu_1 + \dots + \mu_k) + \mu_1 - \frac{\sigma_1^2 (\mu_1 + \dots + \mu_k)}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2} = \mu_1$$

$$\text{Var}\{X_i\} = \lambda_i^2 \sigma_Z^2 + \delta_i^2 = \frac{\sigma_1^4}{(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2)^2} (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2) + \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2} = \sigma_1^2$$

Για τον ίδιο λόγο και η  $Y_i$  ( $=S_2$ ) ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους  $E\{Y_i\}$  και  $\text{Var}\{Y_i\}$ , που με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν:

$$E\{Y_i\} = (1-\lambda_i)\mu_Z - \eta_i = \frac{\sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2} (\mu_1 + \dots + \mu_k) - \mu_1 + \frac{\sigma_1^2 (\mu_1 + \dots + \mu_k)}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2} = \mu_1 + \dots + \mu_k - \mu_1 = \mu_2 + \dots + \mu_k$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\{Y_i\} &= (1-\lambda_i)^2 \sigma_Z^2 + \delta_i^2 = \frac{(\sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2)^2}{(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2)^2} (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2) + \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2} \\ &= \frac{(\sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2)^2}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2} + \frac{\sigma_1^2 (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2) - \sigma_1^4}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2} = \frac{(\sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2) (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2)}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2} = \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2 \end{aligned}$$

Συνοψώς η πρόταση ισχύει για  $i = 1$ . Θεωρούμε ότι η πρόταση ισχύει για  $i = j-1 < k$ , που σημαίνει ότι οι μεταβλητές  $X_{j-1}$  και  $Y_{j-1} = S_j$  ακολουθούν κανονικές κατανομές με παραμέτρους  $(\mu_{j-1}, \sigma_{j-1}^2)$  και  $(\mu_j + \dots + \mu_k, \sigma_j^2 + \dots + \sigma_k^2)$ , αντίστοιχα. Λόγω των (ε) και (ζ) θα έχουμε:

$$X_j = \lambda_j S_j + W_j, \quad Y_j = (1-\lambda_j) S_j - W_j$$

Συνοψώς και οι  $X_j$  και  $Y_j$  θα ακολουθούν κανονικές κατανομές, με παραμέτρους που υπολογίζονται όπως παραπάνω και είναι:

$$E\{X_j\} = \mu_j, \quad \text{Var}\{X_j\} = \sigma_j^2$$

$$E\{Y_j\} = \mu_{j+1} + \dots + \mu_k, \quad \text{Var}\{Y_j\} = \sigma_{j+1}^2 + \dots + \sigma_k^2$$

Συνοψώς η πρόταση ισχύει και για  $i = j$ , και άρα για κάθε τιμή του  $i \leq k$

Ας έλθουμε τώρα στο θέμα της στοχαστικής ανεξαρτησίας. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι οι μεταβλητές  $X_i$  και  $Y_i$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Επειδή ακολουθούν κανονικές κατανομές αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\text{Cov}\{X_i, Y_i\} = 0$$

Πράγματι, η παραπάνω σχέση ισχύει, δεδομένου ότι:

$$\text{Cov}\{X_i, Y_i\} = (1/2) (\text{Var}\{S_i\} - \text{Var}\{X_i\} - \text{Var}\{Y_i\}) = (1/2) \left[ (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2) - \sigma_1^2 - (\sigma_{i+1}^2 + \dots + \sigma_k^2) \right] = 0$$

Αφού η  $X_{j-1}$  είναι ανεξάρτητη από την  $S_j = Y_{j-1}$ , και από την  $W_j$ , θα είναι ανεξάρτητη και από την  $X_j = \lambda_j S_j + W_j$ . Ο συλλογισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί και σε μη διαδοχικές μεταβλητές. Συνοψώς οι  $X_i$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

### 1.8.3. Το πολυδιάστατο δυναμικό μοντέλο επιμερισμού

Η επέκταση του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού από σημειακή βάση σε πολυδιάστατη είναι αρκετά πολύπλοκο πρόβλημα, στη γενική του μορφή. Το θέμα αυτό

θα το εξετάσουμε ποιοτικά, για να δούμε κάτω από ποιες συνθήκες και με ποια μεθοδολογία μπορεί να γίνει αυτή η επέκταση.

Το πολυδιάστατο πρόβλημα επιμερισμού έχει τοποθετηθεί γενικά στην υποπαράγραφο 1.1.4., και περιγράφεται από την εξίσωση (1.1.12). Επεκτείνοντας τη γενική συλλογιστική του δυναμικού μοντέλου, οδηγούμαστε σε ένα σχήμα, όπου κάθε φορά παράγεται μια μοναδική συνιστώσα τμηματική μεταβλητή  $X_{j,n,i}$ , που χαρακτηρίζεται από:

1. τη θέση στην οποία αναφέρεται,  $j$  ( $1 \leq j \leq q$ ),
2. το στάδιο επιμερισμού,  $n$ , το οποίο προσδιορίζει το χρονικό διάστημα  $[t_{n-1}, t_n]$  της αθροιστικής χρονικής κλίμακας, και
3. το βήμα επιμερισμού,  $i$ , που προσδιορίζει το χρονικό διάστημα  $[t_{n,i-1}, t_{n,i}]$  της τμηματικής χρονικής κλίμακας ( $0 < i \leq k(n)$ ).

Το μοντέλο μπορεί να ακολουθήσει δύο ειδών πορείες κατά τη διάρκεια ενός σταδίου επιμερισμού: την οριζόντια πορεία, κατά την οποία, μετά το βήμα  $i$ , στη θέση  $j$ , το μοντέλο προχωρά στο βήμα  $i+1$ , στην ίδια θέση, και την κατακόρυφη πορεία, κατά την οποία μετά το βήμα  $i$ , στη θέση  $j$ , προχωρά στο βήμα  $i$ , στην θέση  $j+1$ . Στο σχήμα 1.2. δίνεται διαγραμματικά η εικόνα που εμφανίζεται στο στάδιο  $n$ , κατά την εκτέλεση του βήματος  $i$ , στη θέση  $j$  όταν ακολουθείται η οριζόντια πορεία. Σε όσες μεταβλητές έχουν ήδη γνωστές τιμές, οι τιμές αυτές γράφονται κάτω από τα σύμβολα των μεταβλητών. Οι παράμετροι του μοντέλου στο συγκεκριμένο βήμα θα είναι οι δεσμευμένες ροπές  $\alpha'$  και  $\beta'$  τάξης των μεταβλητών  $X_{j,n,i}$  και  $S_{j,n,i} = X_{j,n,i} + \dots + X_{j,n,k(n)}$ . Αν παραμείνουμε σε αυτό το σχήμα, και δεχτούμε μια αθροιστική μνήμη ίση με 1, στη γενική περίπτωση θα πρέπει να θεωρήσουμε ως δεσμεύσεις όλες τις μεταβλητές που έχουν γνωστή τιμή (βλ. και σχήμα 1.2.). Οι μόνες που μπορεί να εξαιρεθούν είναι οι αθροιστικές μεταβλητές  $Z_{1,n-1}, \dots, Z_{q,n-1}$  και  $Z_{1,n}, \dots, Z_{j-1,n}$  που οι τιμές τους προκύπτουν ως αθροίσματα των τιμών των αντίστοιχων τμηματικών μεταβλητών, καθώς και η  $Z_{j,n}$ , που ο χειρισμός της γίνεται μέσω της  $S_{j,n,i}$ . Μια πρώτη αναγκαία απλοποίηση, που θα πρέπει να γίνει, είναι η εξαίρεση και των μεταβλητών  $Z_{j+1,n}, \dots, Z_{q,n}$ , που μπορεί να δικαιολογηθεί από τον ισχυρισμό ότι η πληροφορία που προσθέτουν δεν είναι σημαντική σε σχέση με την πληροφορία της  $S_{j,n,i}$ . Συνεπώς οι δεσμεύσεις αναφέρονται μόνο σε τμηματικές μεταβλητές.

Εν γένει οι δεσμευμένες μέσες τιμές των μεταβλητών  $X_{j,n,i}$  και  $S_{j,n,i}$  εκφράζονται ως γραμμικές συναρτήσεις όλων των μεταβλητών που αποτελούν δέσμευση,



ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΣΤΑΔΙΟ : n-1

ΘΕΣΗ	ΤΜΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ		ΑΘΡΟΙΣΤ. ΜΕΤΑΒΛ.
Πρώτη θέση 1	$X_{1,n-1,1}$	$X_{1,n-1,k(n-1)}$	$Z_{1,n-1}$
	$x_{1,n-1,1}$	$x_{1,n-1,k(n-1)}$	$z_{1,n-1}$
	.	.	.
Προηγ. θέση j-1	$X_{j-1,n-1,1}$	$X_{j-1,n-1,k(n-1)}$	$Z_{j-1,n-1}$
	$x_{j-1,n-1,1}$	$x_{j-1,n-1,k(n-1)}$	$z_{j-1,n-1}$
Παρούσα θέση j	$X_{j,n-1,1}$	$X_{j,n-1,k(n-1)}$	$Z_{j,n-1}$
	$x_{j,n-1,1}$	$x_{j,n-1,k(n-1)}$	$z_{j,n-1}$
	.	.	.
Τελευτ. θέση q	$X_{q,n-1,1}$	$X_{q,n-1,k(n-1)}$	$Z_{q,n-1}$
	$x_{q,n-1,1}$	$x_{q,n-1,k(n-1)}$	$z_{q,n-1}$

ΠΑΡΟΝ ΣΤΑΔΙΟ : n

ΘΕΣΗ	ΤΜΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ				ΑΘΡΟΙΣΤ. ΜΕΤΑΒΛ.
	Προηγ. Βήμα		Παρόν Βήμα		
Πρώτη θέση 1	$X_{1,n,1}$	$X_{1,n,i-1}$	$X_{1,n,i}$	$X_{j,n,k(n)}$	$Z_{1,n}$
	$x_{1,n,1}$	$x_{1,n,i-1}$	$x_{1,n,i}$	$x_{j,n,k(n)}$	$z_{1,n}$
	.	.	.	.	.
Προηγ. θέση j-1	$X_{j-1,n,1}$	$X_{j-1,n,i-1}$	$X_{j-1,n,i}$	$X_{j-1,n,k(n)}$	$Z_{j-1,n}$
	$x_{j-1,n,1}$	$x_{j-1,n,i-1}$	$x_{j-1,n,i}$	$x_{j-1,n,k(n)}$	$z_{j-1,n}$
Παρούσα θέση j	$X_{j,n,1}$	$X_{j,n,i-1}$	$X_{j,n,i}$	$X_{j,n,k(n)}$	$Z_{j,n}$
	$x_{j,n,1}$	$x_{j,n,i-1}$	?	?	$z_{j,n}$
	.	.	$s_{j,n,i} = s_{j,n,i}$		.
Τελευτ. θέση q	$X_{q,n,1}$	$X_{q,n,i-1}$	$X_{q,n,i}$	$X_{q,n,k(n)}$	$Z_{q,n}$
	?	?	?	?	$z_{q,n}$

Σχήμα 1.2 : Σχηματική εικόνα των μεταβλητών του πολυδιάστατου δυναμικού μοντέλου επιμερισμού, όταν ακολουθεί οριζόντια πορεία. Με έντονα στοιχεία σημειώνονται οι μεταβλητές που οι τιμές τους δεν έχουν ακόμα παραχθεί από το μοντέλο.

ενώ οι διασπορές και η συνδιασπορά τους εκφράζονται συναρτήσει μόνο των ροπών δεύτερης τάξης των μεταβλητών, και όχι των ίδιων των μεταβλητών. Η παραπάνω εικόνα των δεσμεύσεων, όμως, είναι πολύπλοκη και δεν θα πρέπει να περιμένει κανείς ότι μπορούν να παραχθούν αναλυτικές εκφράσεις των δεσμευμένων ροπών, αντίστοιχες με τις εκφράσεις του μονοδιάστατου μοντέλου, ακόμα και στην περίπτωση που οι τμηματικές μεταβλητές έχουν απλή δομή αυτοσυσχέτισης, πχ. πρώτης τάξης. Μπορεί όμως να αντιμετωπιστούν τουλάχιστον οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

#### A. Περίπτωση μόνιμων ανελιξεων

Όταν ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις: (α) η τμηματική χρονική κλίμακα είναι σταθερή με σταθερό πλήθος τμηματικών μεταβλητών ανά στάδιο (β) οι ακολουθίες αθροιστικών μεταβλητών είναι μόνιμες και (γ) οι ακολουθίες τμηματικών μεταβλητών είναι μόνιμες ή περιοδικές, σε τρόπο ώστε για συγκεκριμένη τιμή των  $i$  και  $j$  και μεταβαλλόμενη τιμή του  $n$ , κάθε ακολουθία  $X_{j,n,i}$  να είναι μόνιμη, τότε είναι δυνατό να παραχθούν τουλάχιστον αριθμητικά (αν όχι αναλυτικά), με βάση τη θεωρία της πολυδιάστατης γραμμικής εκτίμησης οι συντελεστές των εξισώσεων των δεσμευμένων μέσων τιμών, και οι τιμές των δεσμευμένων διασπορών και συνδιασπορών. Λόγω της μονιμότητας των ακολουθιών οι συντελεστές αυτοί δεν μεταβάλλονται από στάδιο σε στάδιο, και συνεπώς μπορούν να αποθηκευτούν στη μνήμη του υπολογιστή και να χρησιμοποιηθούν σε όλα τα στάδια. Το μοντέλο σε αυτή την περίπτωση θα είναι παρόμοιο με το μοντέλο SchaaKe-Valencia, και δεν θα διαθέτει την ευελιξία του δυναμικού μοντέλου (λειτουργία σε συνθήκες μη μονιμότητας και με μεταβλητό αριθμό τμηματικών μεταβλητών). Πάντως, σε κάθε περίπτωση, θα είναι κατάλληλο για μεταβλητές με κατανομές γάμα, αρκεί να συνδυάζεται με το μοντέλο δικασμού αναλογικής μεταβλητής.

#### B. Περίπτωση δενδριτικής δομής της εξάρτησης

Η εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών διαφόρων θέσεων είναι δενδριτικού τύπου, όταν οι μεταβλητές μιας θέσης επηρεάζονται μόνο από τις μεταβλητές της προηγούμενης θέσης (πχ. του κοντινότερου σταθμού) ή, πιο γενικά, όταν η πληροφορία που υπάρχει για τις μεταβλητές ενός συνόλου θέσεων μπορεί να αντιπροσωπευτεί από την αντίστοιχη πληροφορία μιας μόνο θέσης. Σε μια τέτοια περίπτωση το πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά, και περιορίζεται αντίστοιχα και ο αριθμός των παραμέτρων. Μεγαλύτερες απλοποιήσεις μπορούν να γίνουν όταν η τμηματική μεταβλητή που αντιστοιχεί στο στάδιο  $n$ , βήμα  $i$  και θέση  $j$  δεν επηρεάζεται από όλες τις  $K(q)$  μεταβλητές της  $j-1$  θέσης. Συνήθως σε παρόμοια προβλήματα δενδριτικού τύπου λαμβάνεται υπόψη η πληροφορία μιας μόνο μεταβλητής της προηγούμενης θέσης, πχ. της ταυτόχρονης (βλ. για παράδειγμα SchaaKe κλπ. [1972]). Σε μια τέτοια περίπτωση αν δεχτούμε ότι και η διαχρονική δομή της ακολουθίας

των τμηματικών μεταβλητών σε κάθε θέση είναι Μαρκοβιανή, τότε στο στάδιο  $n$ , βήμα  $i$ , θέση  $j$  λαμβάνονται ως δεσμεύσεις για τις ροπές των μεταβλητών  $X_{j,n,i}$  και  $S_{j,n,i}$  μόνο οι  $\{X_{j,n,i-1} = x_{j,n,i-1}, X_{j-1,n,i} = x_{j-1,n,i}\}$ , και κατά συνέπεια οι δεσμευμένες μέσες τιμές θα είναι γραμμικές συναρτήσεις δύο μόνο μεταβλητών. Το πρόβλημα της μόρφωσης των εξισώσεων που δίνουν τις παραμέτρους του μοντέλου είναι παρόμοιο με το αντίστοιχο πρόβλημα του μονοδιάστατου επιμερισμού για ακολουθία τμηματικών μεταβλητών με δομή αυτοσυσχέτισης β' τάξης. Στην εξεταζόμενη περίπτωση δεν είναι απαραίτητο να είναι μόνιμες οι ακολουθίες των μεταβλητών, ούτε να είναι σταθερό το πλήθος των τμηματικών μεταβλητών ανά στάδιο επιμερισμού, δεδομένου ότι μπορούν να καταρτιστούν γενικοί αλγόριθμοι υπολογισμού των παραμέτρων του μοντέλου, αναλυτικής μορφής, αντίστοιχοι με τους αλγόριθμους του μονοδιάστατου μοντέλου μεταβλητών με Μαρκοβιανή δομή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΡΟΧΗΣ

### 2.1. ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

#### 2.1.1. Δυνατότητες και δυσκολίες ανάλυσης της βροχόπτωσης.

Η μαθηματική περιγραφή και μοντελοποίηση της βροχόπτωσης είναι ένα ζήτημα που έχει μελετηθεί σε έκταση κυρίως τα τελευταία 20 χρόνια. Η στοχαστική δομή της βροχόπτωσης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη, ιδίως όταν εξετάζεται ως ανέλιξη σε συνεχή χρόνο, και όταν ενδιαφέρει και η επιφανειακή διανομή της. Η επιστημονική έρευνα στο θέμα αυτό βρίσκεται σε εξέλιξη, και δεν έχουν αναπτυχθεί (ακόμη) μοντέλα καθολικής χρήσης.

Ένας από τους κύριους λόγους της δυσκολίας στην έρευνα και μοντελοποίηση της βροχής, πέρα από την πολυπλοκότητα του φαινομένου, είναι η μεταβλητότητα που εμφανίζει η στοχαστική δομή του από τόπο σε τόπο. Χαρακτηριστικά οι *Waymire* και *Gupta* [1981a], στην επισκόπηση των μοντέλων βροχής που κάνουν, αναφέρουν τα ακόλουθα:

"Αν και έχουν προταθεί πολλά μαθηματικά μοντέλα για τη δομή της βροχόπτωσης, δεν υπάρχει ενιαία μαθηματική προσέγγιση για τη μοντελοποίηση της. Η δομή της βροχόπτωσης σε διαφορετικά μέρη της υδρογείου, ή ακόμα και σε διαφορετικές περιοχές μιας χώρας, εμφανίζει αξιοσημείωτη μεταβλητότητα. Έτσι η ανάπτυξη ενός μοναδικού μοντέλου που θα ενσωματώνει όλες τις μεταβλητότητες, θα ήταν στην πραγματικότητα μια δουλειά χωρίς ελπίδα επιτυχίας."

Μια άλλη δυσκολία, που έχει να αντιμετωπίσει κανείς, είναι η επίδραση της χρονικής κλίμακας μελέτης, καθώς έχει αποδειχτεί ότι το ίδιο μοντέλο μπορεί να είναι καλή αντιπροσώπευση της πραγματικότητας σε μια χρονική κλίμακα, αλλά φτωχή αντιπροσώπευση σε μια άλλη χρονική κλίμακα. Είναι βέβαια εύλογο ότι άλλο μοντέλο θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή της βροχόπτωσης σε μεγάλη χρονική κλίμακα, π.χ. ετήσια, και άλλο για μικρή χρονική κλίμακα, π.χ. ημερήσια, καθώς στην πρώτη περίπτωση ενδιαφέρουν θέματα όπως οι υπερετήσιες περιοδικότητες και τάσεις, ενώ στη δεύτερη εξετάζονται θέματα όπως οι ιδιότητες της ακολουθίας βροχερών-στεγνών ημερών ή της συσχέτισης των διαδοχικών υψών βροχής. Το πρόβλημα όμως της ιδιαιτερότητας της χρονικής κλίμακας εμφανίζεται και στην συγκριτική εξέταση δύο κοντινών χρονικών κλιμάκων (π.χ. ωριαία - ημερήσια). Πάνω στο θέμα αυτό έχει γίνει σημαντική έρευνα την τελευταία τριετία, που κυρίως αφορά την επίδραση της χρονικής κλίμακας στα μοντέλα σημειακών ανελιξεων (*Rodriguez-Iturbe κλπ.* [1984], *Valdes κλπ.* [1985], *Foufou-*

*Ia-Georgiou και Lettenmaier [1986] και Foufoula-Georgiou και Guttorp [1986]).*

Τέλος μια σοβαρή πηγή δυσκολιών που εμφανίζεται κατά τη μελέτη της βροχής σε μικρή χρονική κλίμακα (μικρότερη της μηνιαίας), είναι το γεγονός ότι η βροχόπτωση είναι ένα φαινόμενο διαλείπον (intermittent). Αυτό προσθέτει ένα σύνολο από στοχαστικές μεταβλητές που θα πρέπει να μελετηθούν, πέρα από το ύψος βροχής, όπως τη διάρκεια βροχής, το χρόνο διακοπής κλπ., καθώς και ένα σύνολο από πρόσθετες εργασίες που απαιτείται να γίνουν, όπως η μελέτη της στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ των διάφορων μεταβλητών.

Με την έρευνα της βροχόπτωσης σε διάφορες περιοχές της υδρογείου έχει αναπτυχθεί μια ποικιλία γενικευμένων μαθηματικών εργαλείων. Τα εργαλεία αυτά χρησιμοποιούνται κατά περίπτωση στα διάφορα μοντέλα βροχής, ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της στοχαστικής δομής της βροχής στην υπό μελέτη περιοχή, τη χρονική κλίμακα που ενδιαφέρει, και το σκοπό για τον οποίο προορίζεται το κάθε μοντέλο. Για τις μικρές χρονικές κλίμακες, στις οποίες θα επικεντρωθεί τελικά το ενδιαφέρον της εργασίας αυτής, (μικρότερες της μηνιαίας), τα μαθηματικά εργαλεία που έχουν χρησιμοποιηθεί περιλαμβάνουν κυρίως τις *αλυσίδες Μάρκοφ (Markov chains)*, τις *εναλλασσόμενες ανανεωτικές ανελιξείς (alternating renewal processes)*, τις *ανελιξείς Poisson (Poisson processes)* και τη γενικότερη κατηγορία των *σημειακών ανελιξεων (point processes)*. Μετά το 1980 η έρευνα φαίνεται να επικεντρώνεται κυρίως στα μοντέλα σημειακών ανελιξεων.

Μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που αναφέρεται στη βροχόπτωση γίνεται στις επόμενες παραγράφους. Στην παράγραφο 2.2 γίνεται μια γενική ανασκόπηση των γνώσεων πάνω στη δομή της βροχόπτωσης και στους διάφορους τύπους μοντέλων μαθηματικής προσομοίωσης της, από την ετήσια μέχρι την συνεχή χρονική κλίμακα. Η παράγραφος 2.3 αναφέρεται ειδικά στις πιο σύγχρονες τάσεις της έρευνας, πάνω στα μοντέλα σημειακών ανελιξεων. Η παράγραφος 2.4 αφιερώνεται στην εξέταση δύο συγκεκριμένων μοντέλων, που παρουσιάζουν συγγένειες με την παρούσα εργασία. Τέλος στην παράγραφο 2.5 συνοψίζονται ορισμένα στοιχεία, που αφορούν τα επιφανειακά μοντέλα, αυτά δηλαδή που περιγράφουν τη βροχόπτωση σε κωροχρονική βάση. Η ανασκόπηση δεν περιλαμβάνει εργασίες που αναφέρονται στη στατιστική ανάλυση και μοντελοποίηση των μεγίστων βροχοπτώσεων, πράγμα που αποτελεί ένα τελείως ξεχωριστό ερευνητικό αντικείμενο.

#### 2.1.2. Το μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής με εσωτερική δομή

Μετά από όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη υποπαράγραφο, και δεδομένου ότι η εργασία αυτή αναφέρεται στη βροχόπτωση στον ελλαδικό χώρο, προκύπτει ότι θα πρέπει να αποφευχθεί η χρησιμοποίηση ενός έτοιμου μοντέλου βροχής της διεθνούς βιβλιογραφίας. Γίνεται λοιπόν εμφανής η ανάγκη για την ανάπτυξη ενός

κατάλληλου μοντέλου περιγραφής της βροχόπτωσης, στηριγμένου σε ιστορικά δεδομένα κάποιας περιοχής στην Ελλάδα. Το μοντέλο βροχόπτωσης που τελικά καταρτίστηκε στα πλαίσια της εργασίας αυτής, βασίστηκε σε βροχογραφικά δεδομένα της λεκάνης του Αλιάκμονα, και είναι απόλυτα συμβιβαστό με το δυναμικό μοντέλο επιμερισμού, που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 1. Εννοείται ότι στο μοντέλο αυτό χρησιμοποιήθηκαν αρκετά στοιχεία από τη βιβλιογραφία, αλλά όπως θα φανεί παρακάτω, υπάρχουν και ορισμένα νέα στοιχεία. Δεν πρόκειται δηλαδή για απλή επιλεκτική χρησιμοποίηση εργαλείων και δομών που έχουν μελετηθεί στο παρελθόν (βλέπε και εισαγωγή).

Για διάκριση του μοντέλου αυτού από άλλα μοντέλα της βιβλιογραφίας θα το ονομάζουμε "μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής με εσωτερική δομή" ή απλούστερα "μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων". Η αιτία για το όνομα αυτό είναι το γεγονός ότι χρησιμοποιεί σαν βασική κλίμακα περιγραφής της βροχής την κλίμακα του επεισοδίου βροχής, ενώ παράλληλα στο κάθε επεισόδιο αντιστοιχεί μια εσωτερική δομή, που περιέχει την πληροφορία για την μετάβαση σε μικρότερη χρονική κλίμακα (ωριαία). Ο χαρακτηρισμός "ανεξάρτητων" μπαίνει για να υποδηλώσει το γεγονός ότι το επεισόδιο ορίζεται σε τρόπο ώστε να είναι τελείως ανεξάρτητο από όλα τα προηγούμενα και επόμενα του.

Το εν λόγω μοντέλο αναπτύχθηκε, αφού πρώτα διερευνήθηκε η στοχαστική δομή των ιστορικών δειγμάτων (χρονοσειρών) των σταθμών Χάλαρα και Τρίβουνο της λεκάνης Άνω Αλιάκμονα, σε ωριαία βάση, όπως προέκυψαν από αποκωδικοποίηση των βροχογραφημάτων των δύο σταθμών.<sup>1</sup> Για την αποφυγή προβλημάτων που οφείλονται στην εποχιακή διακύμανση της συμπεριφοράς της βροχής, μελετήθηκαν χωριστά τα δεδομένα του κάθε μήνα, και οι παράμετροι του μοντέλου, όπως τελικά διαμορφώθηκε, υπολογίζονται σε μηνιαία βάση. Με τη λογική αυτή το ολικό δείγμα των ωριαίων βροχοπτώσεων χωρίζεται σε 12 μηνιαία δείγματα. Για την ανάπτυξη του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν μόνο τα δύο δείγματα των μηνών Απριλίου και Μαΐου. Τα δείγματα καλύπτουν την περίοδο από το 1971 μέχρι και το 1983 και τα μεγέθη τους, αφού αφαιρεθούν οι περίοδοι με συστηματικές ελλείψεις ταινιών, είναι 13 χρόνια για τα Χάλαρα και 9 χρόνια για το Τρίβουνο. Ειδικότερα για το Τρίβουνο εμφανίζονται και σποραδικές ελλείψεις ταινιών και έτσι οι περίοδοι χωρίς καμία έλλειψη είναι 8 και 6 χρόνια για τους μήνες Απρίλιο και Μάιο αντίστοιχα.

Η εργασία για την ανάπτυξη, διατύπωση και επαλήθευση του μοντέλου περιγράφονται αναλυτικά σε επόμενες παραγράφους του κεφαλαίου αυτού, αμέσως μετά

-----  
 1. Κατά την αποκωδικοποίηση εξαιρέθηκαν ορισμένα σποραδικά επεισόδια βροχής που ανήκαν σε βροχερές ημέρες με συνολικό 24ωρο ύψος βροχής μικρότερο από 1.0 mm. Η εξαίρεση έγινε για λόγους περιορισμού της εργασίας αποκωδικοποίησης. Πάντως το μοντέλο θα μπορούσε να περιγράψει και αυτές τις ασήμαντες βροχοπτώσεις.

την βιβλιογραφική ανασκόπηση. Παρακάτω συνοψίζονται ορισμένα από τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες του μοντέλου.

Το μοντέλο περιλαμβάνει τρεις χρονικές κλίμακες περιγραφής της βροχής. Η μεγαλύτερη κλίμακα είναι η μηνιαία, και η μικρότερη η ωριαία, ενώ σαν σκελετός του μοντέλου χρησιμοποιείται η ενδιάμεση κλίμακα του επεισοδίου βροχής, που έχει μεταβλητή διάρκεια. Αφού η μικρότερη κλίμακα είναι η ωριαία, θεωρείται ότι και η διάρκεια του επεισοδίου βροχής εκφράζεται με ακέραιο αριθμό ωρών. Αυτή είναι μια απαραίτητη υπόθεση για την ανάπτυξη του μοντέλου ως συνόλου, εισάγει όμως κάποια ανακρίβεια στη χρονική περιγραφή της βροχής, που οφείλεται στο σφάλμα στρογγύλευσης των πραγματικών διαρκειών.

Τα βασικά στοιχεία που διαρθρώνουν το μοντέλο είναι τα ακόλουθα:

- Ορισμός και κριτήριο εντοπισμού των επεισοδίων βροχής.
- Βασική ανέλιξη χρονικής περιγραφής των επεισοδίων βροχής. Κατανομές και στοχαστική εξάρτηση των χρονικών μεταβλητών (διάρκεια βροχής, χρόνος διακοπής).
- Κατανομή του ύψους επεισοδίου βροχής και στοχαστική εξάρτηση ύψους και διάρκειας βροχής.
- Εσωτερική δομή του επεισοδίου βροχής. Συνάρτηση κατανομής και αυτοσυσχέτιση του ωριαίου ύψους βροχής.
- Κατανομή και συσχέτιση μηνιαίου ύψους και μηνιαίας διάρκειας βροχής.
- Παράμετροι του μοντέλου και αλγόριθμος υπολογισμού τους.

## 2.2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Α - ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΡΟΧΗΣ

### 2.2.1. Η δομή της βροχόπτωσης σε ετήσια και μηνιαία κλίμακα

Έχει ήδη αναφερθεί ότι οι χρονικές κλίμακες που εξετάζονται στην εργασία αυτή φτάνουν από τη μηνιαία μέχρι και την ωριαία. Εξ άλλου η εξέταση της δομής της βροχής σε ετήσια κλίμακα αποτελεί ιδιαίτερο ερευνητικό αντικείμενο. Παρ' όλα αυτά, θα δοθούν παρακάτω μερικά συνοπτικά στοιχεία και για αυτή την κλίμακα.

Στην εργασία των *Grace και Eagleson* [1966] βρίσκουμε ορισμένες αναφορές σχετικά με το ιστορικό της έρευνας της ετήσιας βροχόπτωσης. Έτσι πληροφορούμαστε ότι ο πρώτος που χρησιμοποίησε μια συνεχή συνάρτηση κατανομής για ετήσια ύψη βροχής, ήταν ο *Slade* το 1936. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποίησε ένα λογαριθμικό μετασχηματισμό της κανονικής κατανομής. Από τότε έχουν χρησιμοποιηθεί και καθιερωθεί διάφορες συναρτήσεις κατανομής, όπως η κανονική, η λογαριθμοκανονική, η κατανομή γάμα, 2 ή 3 παραμέτρων,<sup>2</sup> καθώς και μετασχηματισμοί της κανονικής κατανομής με ύψωση σε δύναμη, π.χ. στην 1/3. Για το θέμα αυτό στο βιβλίο του καθηγητή *Θ. Ξανθόπουλου* [1984] αναφέρεται ότι στις περισσότερες ευρωπαϊκές λεκάνες απορροής προσαρμόζεται η κανονική κατανομή, με εξαίρεση τις άνυδρες περιοχές με ετήσιο ύψος μικρότερο των 400 - 450 mm, όπου προσαρμόζεται καλύτερα η ασύμμετρη κατανομή *Galton* ή η λογαριθμοκανονική.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εργασία του *Eagleson* [1978], στην οποία υπολογίζεται θεωρητικά η συνάρτηση κατανομής του ετήσιου ύψους βροχής, με βάση ορισμένες παραδοχές σχετικές με τις στοχαστικές ιδιότητες των επεισοδίων βροχής (βλ. υποπαράγραφο 2.2.4). Πιο συγκεκριμένα θεωρείται ότι: (α) η άφιξη των επεισοδίων βροχής περιγράφεται από μια ανέλιξη *Poisson* με μέσο χρόνο διαδοχής σταθερό κατά τη διάρκεια του έτους (ή της βροχερής εποχής του έτους), και (β) τα ύψη βροχής των διάφορων επεισοδίων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν τη συνάρτηση κατανομής γάμα, με σταθερές παραμέτρους σε όλη τη διάρκεια του έτους. Η σχέση που τελικά προέκυψε, δίνει τη συνάρτηση κατανομής της ετήσιας βροχόπτωσης, σαν μια απειροσειρά μη πλήρων συναρτήσεων γάμα, που οι τιμές της μπορούν να υπολογιστούν με αριθμητική ανάλυση ή με τους πίνακες του *Pearson* (βλ. και υποπαρ. 2.10.3). Παρόλο που οι παραπάνω υποθέσεις, στις οποίες στηρίχτηκε η παραγωγή της σχέσης, είναι αμφισβητήσιμης ορθότητας, εν τούτοις η εφαρμογή της σε βροχοπτώσεις της Βοστώνης και της Καλιφόρνιας, έδωσε πολύ καλή προσαρμογή με τα ιστορικά δεδομένα, αν και ο υπολο-

2. Σημειώνεται ιδιαίτερα η επιτυχής χρήση της κατανομής γάμα, όχι μόνο για ετήσιες βροχοπτώσεις, αλλά και για μηνιαίες, εβδομαδιαίες και ημερήσιες (*Haan* [1977], σελ. 156).



γισμός των παραμέτρων της στηρίχτηκε σε δεδομένα μόνο 5 ετών.

Σχετικά με το θέμα έρευνας της στοχαστικής εξάρτησης των διαδοχικών ετήσιων υψών βροχής, αντλούμε και πάλι ορισμένα στοιχεία από την εργασία των *Grace και Eagleson* [1966]. Σ' αυτή γίνεται αναφορά στις εργασίες του *Yule* (1945) για τη Βρετανία, των *Kotz και Neumann* (1959) για το Ισραήλ, και των *Brittain* (1961), *Hoel* (1960) και *Pattison* (1965) για περιοχές των δυτικών ΗΠΑ, που όλοι βρήκαν ότι δεν υπάρχει στατιστικώς σημαντική συσχέτιση των υψών βροχής από έτος σε έτος.

Η ύπαρξη υπερετήσιων περιοδικοτήτων και τάσεων έχει διαπιστωθεί μετά από διερεύνηση δειγμάτων με μεγάλο εύρος παρατηρήσεων. Σε πολλές περιοχές της Αγγλίας, για παράδειγμα, έχουν ανιχνευτεί ανοδικές τάσεις της ετήσιας βροχόπτωσης τα τελευταία 100 χρόνια (*Rodda κλπ.* [1976]). Σαν πιο ολοκληρωμένο παράδειγμα αναφέρουμε την διερεύνηση των ετήσιων βροχοπτώσεων του σταθμού Μαϊντουγκούρι της βορειοανατολικής Νιγηρίας, στην περιοχή της λίμνης Τσαντ, βασισμένη σε ένα δείγμα 63 ετών, όπως περιγράφεται από την *Shaw* [1983]. Το συσχετόγραμμα των ετήσιων βροχοπτώσεων έδειξε την ύπαρξη μιας βασικής περιοδικότητας 30 ετών, μιας άλλης 7.5 ετών και μιας ασήμαντης 3 ετών. Επιπλέον ανιχνεύτηκε μια πτωτική τάση, που μπορεί να περιγραφεί από ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Το συνολικό ντετερμινιστικό τμήμα του μοντέλου (τάση + περιοδικότητα) εξηγεί μόνο το 20% της διασποράς. Το υπόλοιπο 80% αντιστοιχεί στη στοχαστική συνιστώσα, που όπως αποδείχτηκε είναι τελειώς τυχαία, χωρίς χαρακτηριστικά αυτοσυσχέτισης.

Σχετικά με τη συνάρτηση κατανομής των μηνιαίων υψών βροχής ο *Haan* [1977] αναφέρει τη γενικευμένη χρήση της κατανομής γάμα. Από τους *Grace και Eagleson* [1966] πληροφορούμαστε ότι η κατανομή γάμα χρησιμοποιήθηκε για μηνιαίες βροχοπτώσεις ήδη το 1940 από τον *Whitcomb*. Άλλες κατανομές που έχουν χρησιμοποιηθεί με επιτυχία βασίζονται σε μετασχηματισμούς της κανονικής, όπως τον λογαριθμικό (βλ. *Shaw* [1983]) ή της τετραγωνικής ρίζας (*Schaake κλπ.* [1972]).

Τέλος σχετικά με την ύπαρξη στοχαστικής εξάρτησης των υψών βροχής από μήνα σε μήνα, τα αποτελέσματα των σχετικών ερευνών δείχνουν ότι στα περισσότερα από τα δείγματα που ελέγχθηκαν δεν διαπιστώθηκε τέτοια συσχέτιση, αλλά υπάρχουν και εξαιρέσεις. Οι *Grace και Eagleson* [1966] αναφέρονται στα αποτελέσματα των ερευνών των *Beer* (1946) για τη Βρετανία, και του *Pattison* (1965) για τη δυτική ακτή των ΗΠΑ, τα οποία δείχνουν ότι τα διαδοχικά μηνιαία ύψη δεν παρουσιάζουν συσχέτιση. Επίσης αναφέρονται στην έρευνα του *Ochoa* (1965), ο οποίος, αντίθετα, διαπίστωσε την ύπαρξη εμμονής από μήνα σε μήνα στην ανατολική ακτή των ΗΠΑ.

Αν κανείς δεχόταν την ύπαρξη μιας τέτοιας συσχέτισης από μήνα σε μήνα,

θα ήταν δύσκολο να της αποδώσει κάποιο φυσικό νόημα. Για το λόγο αυτό υπάρχει γενική τάση στα μοντέλα βροχής, τα διαδοχικά μηνιαία ύψη βροχής να θεωρούνται στοχαστικά ανεξάρτητα. Ας σημειωθεί ότι και στα μοντέλα ημερήσιας βροχής ή ακόμα και κλάσματος της ημέρας (πχ. βροχής τετραώρων) γίνεται συνήθως η υπόθεση της στοχαστικής ανεξαρτησίας των διαδοχικών υψών, και αυτό σε ορισμένες περιπτώσεις έχει επιβεβαιωθεί (βλ. και επόμενη υποπαράγραφο). Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την παρατήρηση ότι η συσχέτιση γίνεται όλο και λιγότερο σημαντική, όσο αραιώνει η χρονική κλίμακα περιγραφής, συνηγορεί στην γενική θεώρηση ότι τα μηνιαία ύψη βροχής θα πρέπει να θεωρούνται τελείως τυχαία.

### 2.2.2. Δομή και μοντέλα βροχής σε ημερήσια κλίμακα

Η κλασική ανάλυση των χρονοσειρών με γραμμικά στοχαστικά μοντέλα δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην κλίμακα των ημερήσιων βροχοπτώσεων. Στην κλίμακα αυτή, καθώς και στις πιο πυκνές χρονικές κλίμακες, το φαινόμενο της βροχής εμφανίζεται με την πραγματική του υπόσταση, ως διαλείπον φαινόμενο. Έτσι σε ένα μεγάλο (συνήθως) ποσοστό ημερών δεν πραγματοποιείται βροχόπτωση, και αυτό μας αναγκάζει να χωρίσουμε τις μέρες σε βροχερές και στεγνές, και να μελετήσουμε τις ιδιότητες τις αλληλοδιαδοχής της μιας ή της άλλης κατάστασης. Συνεπώς η μελέτη της δομής της βροχής σε ημερήσια βάση περιλαμβάνει: (1) την εξέταση των χρονικών περιόδων βροχερών και στεγνών ημερών (συναρτήσεις κατανομής και συσχέτιση διαδοχικών χρονικών μηκών ή/και πιθανότητες μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη), και (2) την εξέταση του μεγέθους του ύψους βροχής (συνάρτηση κατανομής, αυτοσυσχέτιση).

Το πρώτο θέμα έχει αντιμετωπιστεί με δύο ειδών τεχνικές και έχουν αντίστοιχα καταρτιστεί δύο τύπων μοντέλα χρονικής ακολουθίας βροχερών-στεγνών ημερών.

Στον πρώτο τύπο ανήκουν τα μοντέλα *αλυσίδων Μάρκοφ* δύο καταστάσεων. Η κατάσταση μιας ημέρας (βροχερή = 1 / στεγνή = 0) συσχετίζεται με την κατάσταση μιας ή περισσότερων προηγούμενων ημερών. Αν παίρνεται υπόψη μόνο η κατάσταση της προηγούμενης ημέρας, οπότε προκύπτει αλυσίδα 1ης τάξης, οι πιθανότητες μετάβασης σε στεγνή ή βροχερή ημέρα παίρνουν τη μορφή :

$$p_{ij} = p(X_t = j | X_{t-1} = i), \text{ όπου } i, j = 0 \text{ ή } 1.$$

Ο υπολογισμός τους γίνεται από ιστορικά δείγματα, και σχηματίζεται έτσι το μητρώο παραμέτρων του μοντέλου με διαστάσεις 2X2. Αντίστοιχα ορίζονται οι πιθανότητες μετάβασης και για την περίπτωση που επηρεάζει η κατάσταση περισσότερων προηγούμενων ημερών, οπότε προκύπτει αλυσίδα μεγαλύτερης τάξης. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στο Ισραήλ το 1962 από τους

Gabriel και Neumann (βλ. *Shaw* [1983]). Την ίδια τεχνική έχουν χρησιμοποιήσει και οι *Schaake κλπ.* [1972], που επιπλέον έχουν επεκτείνει το μοντέλο για την περίπτωση πολλών σταθμών ταυτόχρονα. Μια παρόμοια τεχνική έχουν χρησιμοποιήσει και οι *Haan κλπ.* [1976], με τη διαφορά ότι, προκειμένου να περιγράψουν με την αλυσίδα Μάρκοφ και το ύψος βροχής, θεωρούν μια αλυσίδα 7 καταστάσεων, από τις οποίες η πρώτη αναφέρεται σε μηδενική βροχόπτωση, και οι υπόλοιπες 6 σε ισάριθμες κλάσεις θετικής βροχόπτωσης, οριοθετημένες με βάση το ύψος βροχής.

Στα μοντέλα του δεύτερου τύπου εξετάζονται τα *χρονικά μήκη των βροχερών και στεγνών περιόδων*, που γενικά θεωρούνται ότι είναι στοχαστικά ανεξάρτητα. Συνήθως πρόκειται για μοντέλα εναλασσόμενων ανανεωτικών ανελιξεων, στα οποία γίνεται συνδυασμός δύο διαφορετικών και ανεξάρτητων ανανεωτικών ανελιξεων, που η πρώτη περιγράφει τα μήκη των βροχερών περιόδων και η δεύτερη των στεγνών. Τα μήκη αυτά περιγράφονται από μια συνάρτηση κατανομής, που συνήθως είναι η ίδια και για τις δύο μεταβλητές. Ο *Hershfield* [1970] θεωρεί ως κατάλληλη για το σκοπό αυτό την γεωμετρική κατανομή, και οι *Ison κλπ.* [1971] την κατανομή γάμα. Σύμφωνα με τη *Shaw* [1983], η πιο κατάλληλη κατανομή έχει βρεθεί ότι είναι η παρακάτω τροποποιημένη έκφραση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής:

$$P(X = k) = \frac{(k + r - 1)!}{k! (r - 1)!} \frac{p^r q^k}{1 - p^r}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{ ημέρες,}$$

όπου  $p$  η πιθανότητα μιας βροχερής ή στεγνής ημέρας (ανάλογα αν το  $X$  συμβολίζει βροχερές ή στεγνές ημέρες, αντίστοιχα),  $q = (1 - p)$ , και  $r \geq -1$ . Η κατανομή αυτή έχει χρησιμοποιηθεί και από τους *Kottegoda και Horder* [1980], και έχει μελετηθεί σε σύγκριση και με το μοντέλο αλυσίδας Μάρκοφ, από τους *Roldan και Woolhiser* [1982a].

Σε αυτό τον τύπο μπορούν να ενταχθούν και ορισμένα από τα μοντέλα σημειακών ανελιξεων σε διακριτό χρόνο, με χρονικό βήμα ίσο με μια ημέρα, με τη διαφορά ότι σ' αυτά η μελέτη ξεκινά από την χρονική απόσταση δύο διαδοχικών βροχερών περιόδων, που είναι το άθροισμα μιας βροχερής και της αμέσως επόμενης στεγνής περιόδου. Η συνάρτηση κατανομής αυτής της χρονικής απόστασης προκύπτει αναλυτικά, ανάλογα με τον τύπο της σημειακής ανέλιξης (π.χ. για την ανέλιξη Poisson είναι εκθετική). Αναλυτικότερα τα μοντέλα αυτά περιγράφονται στην παράγραφο 2.3.

Συνδέοντας τους δύο παραπάνω τύπους μοντέλων, οι *Waymire και Gupta* [1981a] αναφέρουν ότι η υπόθεση ενός μοντέλου τύπου αλυσίδας Μάρκοφ συνεπάγεται ότι τα χρονικά μήκη των στεγνών και των βροχερών ημερών, είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες και με γεωμετρικές κατανομές, δηλαδή της μορφής:

$$P(X = k) = p^{k-1} q$$

όπου τα σύμβολα έχουν την ίδια σημασία, όπως στην προηγούμενη σχέση.

Για το δεύτερο θέμα που σχετίζεται με το ύψος βροχής η *Shaw* [1983] παρατηρεί ότι η πιο κατάλληλη συνάρτηση κατανομής για το ημερήσιο ύψος βροχής βρέθηκε να είναι και πάλι η γάμα (βλ. και *Kottegoda και Horder* [1980]) ενώ έχουν χρησιμοποιηθεί η λογαριθμοκανονική (βλ. *Grace και Eagleson* [1966], *Schaake κλπ.* [1972]), καθώς και συνδυασμοί συναρτήσεων κατανομής, όπως για παράδειγμα ο γραμμικός συνδυασμός δύο εκθετικών, που συνήθως χαρακτηρίζεται με τον όρο "μικτή εκθετική κατανομή" (*Smith και Schreiber* [1974] και *Woolhiser και Roldan* [1982]).

Το θέμα της στοχαστικής εξάρτησης των βροχών σε διαδοχικές ημέρες άρχισε να μελετάται ήδη από το 1920 στην Ευρώπη. Οι *Grace και Eagleson* [1966]), αναφέρουν πολλά παραδείγματα σχετικών μελετών, στις περισσότερες από τις οποίες διαπιστώθηκε η ύπαρξη τέτοιας εξάρτησης. Επίσης η *Shaw* [1983] αναφέρει ότι στην βορειοδυτική Ευρώπη γενικά υπάρχει στοχαστική εξάρτηση μεταξύ διαδοχικών ημερήσιων υψών βροχής, για τους χειμερινούς μήνες, και οι συντελεστές συσχέτισης υπολογίζονται μεταξύ 0.10 και 0.15, ενώ για τους θερινούς μήνες τα διαδοχικά ημερήσια ύψη έχει διαπιστωθεί ότι είναι ασυσχέτιστα. Σχετικά με τη δομή της αυτοσυσχέτισης οι *Rodda κλπ.* [1976] αναφέρουν μια εφαρμογή στην οποία χρησιμοποιήθηκε η γραμμική ανέλιξη Μάρκοφ (αυτοσυσχέτισης 1ης τάξης), ενώ οι *Schaake κλπ.* [1972] χρησιμοποίησαν την ίδια ανέλιξη για τους λογαρίθμους των ημερήσιων υψών βροχής. Αντίθετα με τους παραπάνω οι *Waymire και Gupta* [1981a], αναφέρουν περιπτώσεις όπου τα διαδοχικά ημερήσια ύψη βροχής έχουν θεωρηθεί ανεξάρτητες μεταβλητές, με εκθετική κατανομή, σημειώνοντας ότι η ανεξαρτησία αυτή μπορεί να επεκταθεί και για ύψη βροχής κλάσματος της ημέρας (τετραώρου).

### 2.2.3. Δομή και μοντέλα βροχής σε ωριαία κλίμακα και σε συνεχή χρόνο

Όπως συμβαίνει με την ημερήσια κλίμακα, και στην ωριαία κλίμακα η βροχόπτωση εμφανίζεται ως διαλείπον φαινόμενο, και μάλιστα στην κλίμακα αυτή προστίθενται μερικές ακόμα δυσκολίες στη μελέτη του φαινομένου, που οφείλονται στην πολύ πιο έντονη στοχαστική εξάρτηση διαδοχικών μεταβλητών και στη μεγάλη διακύμανση των τιμών τους.

Ο πρώτος που μελέτησε και μοντελοποίησε τη βροχόπτωση σε κλίμακα μικρότερη από την ωριαία ήταν ο *Pattison* το 1964. Αυτός κατάρτισε δύο μοντέλα παραγωγής ωριαίων βροχοπτώσεων. Το πρώτο απ' αυτά χρησιμοποιεί μια αλυσίδα Μάρκοφ 6ης τάξης για την μετάβαση από στεγνή ώρα, και μια άλλη αλυσίδα Μάρκοφ 1ης

τάξης, αλλά πολλών (>2) καταστάσεων για την μετάβαση από βροχερή ώρα. Στην τελευταία παίρνεται υπόψη όχι μόνο η κατάσταση βροχερή-στεγνή, αλλά και το ύψος βροχής, βάσει μιας κλίμακας μεγέθους. Το μοντέλο αυτό έχει ως βασικό μειονέκτημα τον πολύ μεγάλο αριθμό παραμέτρων που χρειάζεται. Το δεύτερο μοντέλο του είναι ένα μοντέλο γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των ωριαίων υψών σε συνεχόμενες ώρες, αλλά είχε μικρότερη επιτυχία από το πρώτο.

Μερικά αρχικά στοιχεία σχετικά με την δομή της βροχής σε ωριαία κλίμακα οφείλονται στον Ramaseshan (1964, 1971), που μελέτησε τις ισχυρές καταιγίδες των περιοχών της Βόρειας Καρολίνας και του Ιλλινόις (βλ. *Grace και Eagleson* [1966] και *Shaw* [1983]). Ο Ramaseshan έλεγξε τη στοχαστική εξάρτηση μεταξύ διαδοχικών ωριαίων υψών βροχής και διαπίστωσε ότι αυτή είναι σημαντική, ενώ αντίθετα η συσχέτιση μεταξύ ωριαίων υψών βροχής με χρονική απόσταση 2 ωρών βρέθηκε να μην είναι σημαντική. Με βάση τις διαπιστώσεις αυτές κατέστρωσε ένα μοντέλο γραμμικής ανέλιξης Μάρκοφ (αυτοσυσχέτισης 1ης τάξης), για ωριαίες βροχοπτώσεις, στο οποίο τα τυχαία υπόλοιπα ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή.

Σε νεότερα μοντέλα η δομή αυτοσυσχέτισης του ύψους βροχής σε ωριαία ή μικρότερη κλίμακα, χαρακτηρίζεται συνήθως ως Μάρκοφ ή ARMA(1,1) (βλέπε παράγραφο 2.3).

#### 2.2.4. Το επεισόδιο βροχής και οι μεταβλητές χρονικού εντοπισμού του

Η παρατήρηση ότι το φαινόμενο της βροχής έχει μια σποραδική ή διαλείπουσα φύση, μας οδηγεί στο να εισάγουμε την έννοια του **επεισοδίου** ή **γεγονότος** βροχής, έτσι ώστε να θεωρούμε ότι μια συγκεκριμένη βροχερή περίοδος αντιστοιχεί σε ένα επεισόδιο βροχής. Η εισαγωγή της έννοιας του επεισοδίου, στη μελέτη της βροχοπτώσης, μπορεί να οδηγήσει σε απλοποίηση της μαθηματικής περιγραφής του φαινομένου. Ο ορισμός του επεισοδίου βροχής, όμως, δεν είναι διόλου προφανής, ούτε είναι εύκολη υπόθεση, και γι' αυτό στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει μονοσήμαντος ορισμός, ούτε καν ενιαίος τύπος ορισμού. Εδώ θα μας απασχολήσει ο ορισμός του σε μικρή χρονική κλίμακα, τουλάχιστον ωριαία, ή συνεχή, αν και πολλές φορές συναντάμε στη βιβλιογραφία περιπτώσεις ορισμού στην ημερήσια κλίμακα. Στην τελευταία περίπτωση, μια αλληλουχία διαδοχικών βροχερών ημερών, που περιορίζεται, πριν και μετά, από μία τουλάχιστον στεγνή ημέρα, αντίστοιχα, θεωρείται ότι αποτελεί ένα επεισόδιο βροχής.

Ένας **πρώτος τύπος ορισμού** του επεισοδίου βροχής (σε μικρή χρονική κλίμακα) χαρακτηρίζεται από τις εξής προϋποθέσεις: (α) κάθε επεισόδιο έχει σαφή χρονικά όρια, που μπορούν να διαπιστωθούν σε ένα ιστορικό δείγμα και (β) δύο

διαδοχικά επεισόδια βροχής διαχωρίζονται από μια στεγνή περίοδο. Είναι προφανές ότι αυτός ο τύπος ορισμού απαγορεύει την αλληλοεπικάλυψη δύο επεισοδίων βροχής. Οι προϋποθέσεις αυτές δεν είναι όμως ικανές για τον πλήρη ορισμό του επεισοδίου, αλλά απαιτούνται και ορισμένες πρόσθετες θεωρήσεις. Ένας πλήρης ορισμός προϋπύπτει αν αποκλείσει κανείς την ύπαρξη στεγνών περιόδων (δηλαδή περιόδων με μηδενική ένταση βροχής) μέσα σε ένα επεισόδιο, οπότε σε κάθε μεμονωμένη περίοδο μη μηδενικής βροχόπτωσης αντιστοιχεί ένα επεισόδιο βροχής. Τέτοια θεώρηση υπονοεί η *Shaw* [1983]. Επίσης τέτοια θεώρηση γίνεται και στην εργασία των *Marijen και Vandewiele* [1986] (βλ. και υποπαράγραφο 2.4.1.). Αυτός ο ορισμός είναι και ο απλούστερος δυνατός, αλλά έχει πολλά βασικής σημασίας μειονεκτήματα, όπως θα φανεί σε επόμενες παραγράφους.

Σύμφωνα με μια άλλη θεώρηση, που πάλι εντάσσεται στον ίδιο τύπο ορισμού, δεν θα πρέπει να αποκλειστεί η ύπαρξη περιόδων μηδενικής βροχόπτωσης μέσα σε ένα επεισόδιο. Η θεώρηση αυτή βρίσκεται σε μεγαλύτερη συμφωνία με το φυσικό φαινόμενο της βροχής (αυτό θα αναλυθεί σε επόμενες παραγράφους), και υπερέχει και από μαθηματική άποψη, σε σχέση με την προηγούμενη, αλλά εισάγει μια βασική δυσκολία στον καθορισμό των επεισοδίων, σε ένα συγκεκριμένο δείγμα, δεδομένου ότι δεν είναι πλέον προφανές, αν μια περίοδος, όπου εμφανίζεται μηδενική ένταση βροχής, θα θεωρηθεί ως στεγνή περίοδος ή θα ενταχθεί μέσα σε κάποιο επεισόδιο. Απαιτούνται λοιπόν μερικές συμπληρωματικές υποθέσεις, για τη μόρφωση ενός πλήρους ορισμού, που συνήθως είναι οι εξής:

- (α) Δύο διαδοχικές χρονικές ακολουθίες μη μηδενικής βροχόπτωσης θα θεωρείται ότι ανήκουν σε διαφορετικά επεισόδια, αν διαχωρίζονται από μια επαρκή χρονική περίοδο μηδενικής βροχόπτωσης, μεγαλύτερη ή ίση από μια καθορισμένη τιμή, που θα αναφέρεται ως "χρόνος διαχωρισμού".
- (β) Κάθε επεισόδιο βροχής είναι στοχαστικά ανεξάρτητο με όλα τα υπόλοιπα, προηγούμενα και επόμενα. Κανονικά δύο επεισόδια βροχής θεωρούνται στοχαστικά ανεξάρτητα όταν η στοχαστική ανεξαρτησία ισχύει σε κάθε ζεύγος μεταβλητών που αναφέρονται στα δύο επεισόδια, αντίστοιχα.

Οι παραπάνω υποθέσεις είναι συμβιβαστές, με την έννοια ότι όσο μεγαλύτερη είναι η χρονική απόσταση μεταξύ δύο βροχοπτώσεων, τόσο πιο πιθανή είναι η στοχαστική ανεξαρτησία τους. Η δεύτερη υπόθεση σε συνδυασμό με κάποιο στατιστικό έλεγχο, χρησιμοποιείται συνήθως για τον υπολογισμό του χρόνου διαχωρισμού. Το βασικό πλεονέκτημα αυτού του ορισμού είναι το γεγονός ότι τα διάφορα

επεισόδια είναι εξ ορισμού στοχαστικά ανεξάρτητα, πράγμα που διευκολύνει την ανάλυση και μοντελοποίηση της βροχής. Έχει όμως και μειονεκτήματα, που είναι: (α) η αυθαίρετη εισαγωγή ενός σταθερού χρόνου διαχωρισμού, (β) η εξάρτηση του της διαδικασίας καθορισμού των επεισοδίων από ένα στατιστικό έλεγχο, πράγμα που μπορεί να είναι εις βάρος της αντικειμενικότητας του ορισμού και (γ) η κάπως χρονοβόρα διαδικασία καθορισμού του χρόνου διαχωρισμού.

Οι πρώτοι που εισήγαγαν ένα τέτοιο ορισμό είναι οι *Grace και Eagleson* [1966], οι οποίοι μελέτησαν σε χρονική βάση 10λέπτου τις θερινές βροχές σε περιοχές της βόρειας Αμερικής. Στην εργασία τους θεώρησαν ότι η στοχαστική ανεξαρτησία των επεισοδίων βροχής μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας τα διαδοχικά ύψη βροχής 10λέπτου. Εφαρμόζοντας ένα τεστ σημαντικότητας του συντελεστή συσχέτισης σειράς (rank correlation coefficient), καθόρισαν την τιμή του χρόνου διαχωρισμού, με κριτήριο να μη είναι σημαντικός ο πιο πάνω συντελεστής (σε καθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης). Οι τιμές που υπολόγισαν για το χρόνο διαχωρισμού κυμαίνονται γύρω στις 2 ώρες. Η τιμή αυτή των 2 ωρών υιοθετήθηκε αργότερα και αλλού, χωρίς να γίνεται αναλυτικός προσδιορισμός της (πχ. *Eagleson* [1978]). Την ίδια τιμή των 2 ωρών έχουν συνάγει οι *Bergmann και Zeyringer* [1986], βασιζόμενοι σε μια εμπειρική-γραφική διαδικασία απεικόνισης δειγμάτων χρόνων μηδενικής βροχόπτωσης σε καρτί κατανομής Weibull. Ο *Eagleson* [1970] στο βιβλίο του χρησιμοποιεί το ίδιο ορισμό και αναφέρεται και σε μια παρόμοια με την παραπάνω ανάλυση για την περιοχή της Αριζόνας, όπου η τιμή του χρόνου διαχωρισμού προέκυψε ίση με 3 ώρες. Οι *Restepo-Posada και Eagleson* [1982] δέχονται τον ίδιο ορισμό του επεισοδίου βροχής, αλλά αναπτύσσουν ένα άλλο κριτήριο καθορισμού του χρόνου διαχωρισμού, βασισμένο στην υπόθεση ότι η άφιξη των βροχών μπορεί να αντιπροσωπευτεί από μια ανέλιξη Poisson. Σύμφωνα με το κριτήριο τους, ο χρόνος διαχωρισμού καθορίζεται με ένα επαναληπτικό αλγόριθμο, όπου δοκιμάζεται ένα σύνολο τιμών, και επιλέγεται εκείνη η τιμή που δίνει ένα συντελεστή διασποράς της μεταβλητής "χρόνος διακοπής της βροχής" ίσο με ένα. Αυτό θεωρείται σαν συνθήκη ότι η κατανομή του χρόνου διακοπής είναι εκθετική (η εκθετική κατανομή έχει συντελεστή διασποράς 1), και συνακόλουθα ότι εξασφαλίζεται η προσαρμογή της ανέλιξης Poisson. Η εφαρμογή του κριτηρίου τους σε πολλές περιοχές με μεγάλο εύρος κλιματικών τύπων έδωσε τιμές του χρόνου διαχωρισμού: (α)  $3 \div 5,5$  ημέρες σε 5 θέσεις της Σαουδικής Αραβίας, (β)  $1,5 \div 3$  ημέρες σε 8 θέσεις της Αριζόνας, (γ)  $8 \div 19$  ώρες σε 3 θέσεις στο Κολοράντο και στο Οχάιο και (δ) 1 ώρα σε μια θέση στην Κολομβία. Τέλος οι ίδιοι ερευνητές έδωσαν και μια εμπειρική σχέση εκτίμησης του χρόνου διαχωρισμού με βάση τη μέση ετήσια βροχόπτωση και το μέσο χρονικό μήκος της βροχερής εποχής, την οποία παρήγαγαν από τα παραπάνω αποτελέσματα με στατιστικές μεθόδους.

Στον δεύτερο τύπο ορισμού που συναντούμε στη βιβλιογραφία, τα διαδοχικά επεισόδια βροχής μπορούν να επικαλύπτονται, και έτσι δεν είναι δυνατό να οριοθετηθούν τα επεισόδια σε ένα ιστορικό δείγμα βροχόπτωσης. Η έννοια αυτή του επεισοδίου βροχής χρησιμοποιείται σε πολλά από τα μοντέλα σημειακής ανέλιξης (βλέπε παράγραφο 2.3). Πολλές φορές θεωρείται ότι το επεισόδιο βροχής είναι ένα στιγμιαίο γεγονός (*Kanvas και Delleur [1981], Rodriguez-Iturbe κλπ. [1984]*, βλ. και *Waymire και Gupta [1981a]*), ή αποδίδεται σε αυτό μια υποθετική διάρκεια, χωρίς απαραίτητα να υπάρχει αντιστοιχία με κάποια πραγματική (*Rodriguez-Iturbe κλπ. [1984]*). Στις περιπτώσεις αυτές το επεισόδιο εξακολουθεί να χρησιμοποιείται σαν έννοια, ώστε να μπορέσει να αποδοθεί σ' αυτό ένα ύψος βροχής και ένας χρόνος εμφάνισης, πράγμα που είναι απαραίτητο στην μοντελοποίηση της βροχής, αλλά δεν εξετάζεται, ούτε χρησιμοποιείται στη μοντελοποίηση η διάρκεια βροχής σαν αντικειμενική μεταβλητή.

Αν γίνει δεκτός ο πρώτος τύπος ορισμού (που χρησιμοποιείται και στην εργασία αυτή), τότε για κάθε επεισόδιο βροχής ( $j$ ), μπορούν να οριστούν οι ακόλουθες μεταβλητές, που περιγράφουν χρονικές διάρκειες.

- α. Η διάρκεια του επεισοδίου βροχής:  $D_j = E_j - S_j$ ,
- β. Ο χρόνος διακοπής βροχής:  $B_j = S_{j+1} - E_j$ , και
- γ. Ο χρόνος διαδοχής επεισοδίων:  $V_j = S_{j+1} - S_j$  (θα μπορούσε ισοδύναμα να οριστεί ως  $V_j = E_{j+1} - E_j$ ),

όπου  $S_j$  και  $E_j$  οι χρόνοι έναρξης και λήξης του επεισοδίου  $j$ , αντίστοιχα. Με το δεύτερο τύπο ορισμού, οι παραπάνω μεταβλητές δεν έχουν πάντα νόημα.

Όπως είναι προφανές, οι χρονοσειρές των πιο πάνω μεταβλητών, σε ένα ιστορικό δείγμα, εξαρτώνται από τον συγκεκριμένο ορισμό που θα χρησιμοποιηθεί. Έτσι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για τη στοχαστική συμπεριφορά των μεταβλητών αυτών, χωρίς να διευκρινήσουμε από ποιο ορισμό έχουν προκύψει. Οι *Grace και Eagleson [1966]*, στην εργασία τους που αναφέρθηκε και παραπάνω, και χρησιμοποιώντας τον ορισμό που ήδη περιγράφηκε, θεώρησαν σαν κατάλληλη για τις δυο πρώτες χρονικές μεταβλητές την κατανομή Weibull 3 παραμέτρων. Ο *Eagleson [1978]*, βασισμένος στον ίδιο ορισμό, και μετά από ανάλυση βροχομετρικών δεδομένων της Βοστώνης, θεωρεί ότι η εκθετική κατανομή είναι καταλληλή και για τις τρεις παραπάνω μεταβλητές, υπό την προϋπόθεση ότι  $E[B] \gg E[D]$ . Οι *Waymire και Gupta [1981a]* αναφέρουν ότι αν η διάρκεια βροχής,  $D$ , και ο χρόνος διακοπής,  $B$ , είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με εκθετικές κατανομές, τότε δεν είναι δυνατόν η κατανομή του χρόνου διαδοχής να είναι και αυτή εκθετική. Κάτι τέτοιο μπορεί να θεωρηθεί μόνο σαν προσεγγιστική απλοποίηση,



και μόνο αν ισχύει η πιο πάνω προϋπόθεση ( $E[B] \gg E[D]$ ). Η *Shaw* [1983] θεωρώντας τον ορισμό του επεισοδίου που στηρίζεται στην μη αποδοχή διαστημάτων μηδενικής βροχής μέσα στο επεισόδιο, αναφέρει σαν κατάλληλη για την περιγραφή των δύο πρώτων μεταβλητών την κατανομή Weibull 2 παραμέτρων. Ο *Singh* [1987] χρησιμοποιεί επίσης την ίδια κατανομή για τις διάρκειες βροχής, χωρίς να αναφέρει βάσει ποίου ορισμού προέκυψαν τα δεδομένα του. Ο *Raudkivi* [1979], χωρίς πάλι να αναφερθεί σε συγκεκριμένο ορισμό επεισοδίου, παρατηρεί ότι για τους χρόνους διακοπής έχουν προταθεί και δοκιμαστεί πολλές κατανομές, αλλά σχεδόν όλες απέτυχαν στην προσαρμογή στο κάτω όριο των τιμών της μεταβλητής.

Σχετικά με το θέμα της στοχαστικής εξάρτησης των παραπάνω μεταβλητών, γενικά στις πιο πάνω εργασίες καθώς και σε πολλές άλλες (πχ. *Franz* [1970]), θεωρείται ότι υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ της διάρκειας βροχής και του προηγούμενου ή επόμενου χρόνου διακοπής, καθώς και των διαδοχικών διαρκειών μεταξύ τους ή των διαδοχικών χρόνων διακοπής μεταξύ τους. Κατά παρόμοιο τρόπο θεωρείται ότι υπάρχει στοχαστική ανεξαρτησία μεταξύ των διαδοχικών χρόνων διαδοχής. Πάντως το θέμα αυτό θα συζητηθεί εκτενέστερα σε επόμενη παράγραφο.

### 2.2.5. Το ύψος βροχής και η εσωτερική δομή του επεισοδίου

Όπως συμβαίνει με τις χρονικές μεταβλητές του επεισοδίου, όμοια και το ύψος βροχής εξαρτάται από τον χρησιμοποιούμενο ορισμό του επεισοδίου. Παρόμοιες είναι και οι κατανομές που χρησιμοποιούνται για το ύψος του επεισοδίου βροχής. Η ομοιότητα στις κατανομές διάρκειας βροχής και ύψους βροχής δεν είναι τυχαία, αλλά, όπως απέδειξαν οι *Todorovic και Yevjevich* [1969], μπορεί να δικαιολογηθεί θεωρητικά. Από την εργασία τους μετά από θεωρητικές αναλύσεις προκύπτει το συμπέρασμα ότι και οι δύο μεταβλητές ακολουθούν την εκθετική κατανομή, υπό την προϋπόθεση ότι αναφερόμαστε σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα του έτους (εποχή) με σταθερά κλιματικά χαρακτηριστικά. Επίσης έχει χρησιμοποιηθεί συχνά η κατανομή Weibull 2 παραμέτρων (πχ. *Show* [1983], *Singh* [1987]), και η κατανομή γάμα (πχ. *Eagleson* [1978]).

Στα περισσότερα μοντέλα βροχής της βιβλιογραφίας η παραγωγή του ύψους βροχής σε κάθε επεισόδιο, γίνεται σε δεύτερη φάση, αφού πρώτα καθοριστεί η διάρκεια βροχής του. Για το λόγο αυτό έχει μελετηθεί περισσότερο η δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής, για δεδομένη διάρκεια, παρά η περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ύψους.<sup>3</sup> Οι *Grace και Eagleson* [1966], αφού διέκριναν τις βροχές σε τρεις τύπους (μικρής, μέσης και μεγάλης έντασης), μελέτησαν τη στοχαστική εξάρτηση διάρκειας και ύψους επεισοδίου βροχής, και κατέληξαν σε μια ομάδα

3. Αυτό γίνεται και στην παρούσα εργασία.

σχέσεων γραμμικής συσχέτισης (μια για κάθε τύπο). Στη συνέχεια χρησιμοποίησαν για τη δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής (ή ακριβέστερα ενός γραμμικού μετασχηματισμού του) την κατανομή βήτα με ακέραιες παραμέτρους. Ο *Eagleson* [1970] προτείνει τη χρήση της κατανομής Γάμα 2 παραμέτρων για τη δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής, και θεωρεί ότι οι τιμές των παραμέτρων εξαρτώνται από τη διάρκεια του επεισοδίου, καθώς και από το κλίμα της περιοχής και τον τύπο της καταιγίδας. Ο *Eagleson* [1978], και πάλι, θεώρησε ότι η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του ύψους βροχής, για δεδομένη διάρκεια, μπορεί να εκφραστεί άμεσα με βάση τη συνάρτηση κατανομής της μέσης έντασης βροχής. Υπέθεσε ότι η ένταση βροχής και η διάρκεια της είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, με εκθετικές κατανομές, και έτσι παρήγαγε και την περιθώρια συνάρτηση του ύψους επεισοδίου βροχής, που την έκφρασε με όρους της συνάρτησης Bessel πρώτου βαθμού. Παρόμοιες παραδοχές (ένταση ανεξάρτητη της διάρκειας με εκθετική κατανομή) έκαναν και οι *Bras και Rodriguez-Iturbe* [1976].

Γενικά έχει βρεθεί ότι κατά τη διάρκεια ενός επεισοδίου η βροχόπτωση είναι μη μόνιμο φαινόμενο, (*Bras και Rodriguez-Iturbe* [1976a]), πράγμα που σημαίνει ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά του μεταβάλλονται με το χρόνο.

Στην πιο απλή περίπτωση η έκφραση της χρονικής κατανομής της βροχής στο χρόνο, γίνεται με τη χρησιμοποίηση των **αδιάστατων ή ποσοστιαίων καμπυλών κατανομής**, με άξονα τετμημένων το ποσοστό του χρόνου (σε αθροιστική βάση, ως προς τη διάρκεια του επεισοδίου βροχής) και τεταγμένων το αντίστοιχο ποσοστό του ύψους βροχής ως προς το συνολικό ύψος του επεισοδίου. Η εισαγωγή αυτών των καμπυλών βασίστηκε στην διαπίστωση ότι για δεδομένες κλιματικές συνθήκες, επεισόδια βροχής ενός ορισμένου τύπου εμφανίζουν ομοιότητα στη χρονική κατανομή τους, όταν αδιαστατοποιηθούν οι κλίμακες του χρόνου και του ύψους βροχής (*Eagleson* [1970]). Μια τέτοια καμπύλη, καθορίζει πλήρως και ντετερμινιστικά τη δομή της βροχόπτωσης, χωρίς να απαιτείται να γίνουν υποθέσεις για τις στοχαστικές ιδιότητες του φαινομένου. Βέβαια όλες οι βροχοπτώσεις δεν περιγράφονται από την ίδια καμπύλη, γι' αυτό συνήθως καράζεται μια οικογένεια καμπυλών, που κάθε μια αντιστοιχεί σε ένα τύπο καταιγίδας (*Eagleson* [1970], *Hjelmfelt* [1981]) ή σε ένα επίπεδο πιθανότητας (*Huff* [1967]). Με τέτοιες θεωρήσεις η αντιμετώπιση του θέματος της εσωτερικής δομής της βροχής μοιάζει να γίνεται με ντετερμινιστικό τρόπο, ενώ το φαινόμενο είναι έντονα στοχαστικό.<sup>4</sup>

Η ιδέα των αδιάστατων καμπυλών κατανομής φαίνεται να είναι ενδιαφέρουσα και για μια στοχαστική θεώρηση του θέματος, με την τροποποίηση ότι μια τέτοια

-----  
4. Αν και ο *Eagleson* [1970] αναφέρει ότι η εσωτερική δομή ενός επεισοδίου μπορεί να είναι σε μεγάλο βαθμό ντετερμινιστική, σε αντίθεση με την πραγματοποίηση των επεισοδίων βροχής που είναι τελείως τυχαίο φαινόμενο.

καμπύλη αντιπροσωπεύει τη μεταβολή των μέσων στατιστικών χαρακτηριστικών του ύψους βροχής στη διάρκεια του χρόνου, και όχι αυτό καθαυτό το ύψος βροχής. Με τον τρόπο αυτό δηλαδή μπορεί να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα της μη μονιμότητας της βροχής. Υποτίθεται, βέβαια, ότι χρησιμοποιείται παράλληλα και ένα στοχαστικό μοντέλο, που περιγράφει το στοχαστικό μέρος του φαινομένου. Τέτοιας μορφής θεώρηση γίνεται στο μοντέλο των *Grace και Eagleson* [1966], όπου χρησιμοποιείται η μέση ποσοστιαία καμπύλη κατανομής για το ντετερμινιστικό μέρος του φαινομένου, ενώ η αναπαράσταση του στοχαστικού μέρους γίνεται με ένα μοντέλο τοποθέτησης σφαιριδίων σε δοχεία (βλέπε περιγραφή του μοντέλου αυτού στην παράγραφο 1.3.2).

## 2.3. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Β - ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

### 2.3.1. Γενικές έννοιες για τις σημειακές ανελίξεις

Ο ορισμός της σημειακής ανελίξης που δίνεται παρακάτω έχει βασιστεί στις δημοσιεύσεις των *Waymire και Gupta* [1981b], και *Smith και Karr* [1983], στις οποίες μπορεί κανείς να βρει περισσότερα στοιχεία πάνω στον ορισμό.

Παρακάτω θεωρείται ότι το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών  $R_+ = [0, \infty)$  περιγράφει το χρόνο. Μια **σημειακή ανελίξη** (point process) επί του  $R_+$  είναι μια τυχαία ανελίξη που αντιπροσωπεύει χρόνους πραγματοποίησης γεγονότων. Συμβολίζουμε με  $T(n)$  το χρόνο πραγματοποίησης του  $n$  στη σειρά γεγονότος, με  $T(0) = 0$ . Θεωρούμε επιπλέον ότι δεν επιτρέπεται η χρονική σύμπτωση δύο επεισοδίων, οπότε για κάθε  $n$  ισχύει:  $T(n) < T(n+1)$ , και ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του  $R_+$  περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος γεγονότων, ενώ  $\lim_{(n \rightarrow \infty)} T(n) = \infty$ . Ο χρόνος διαδοχής  $V(n) = T(n) - T(n-1)$  αντιπροσωπεύει το χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών επεισοδίων. Κάθε μια από τις ακολουθίες  $(T(n))$  και  $(V(n))$  περιγράφει πλήρως την σημειακή ανελίξη. Οι πιο πάνω έννοιες μπορούν να γενικευτούν για την την περίπτωση του  $v$ -διάστατου χωροχρονικού Ευκλειδίου χώρου  $R^v$  με  $v \leq 4$  (βλ. *Waymire και Gupta* [1981b]).

Ισοδύναμα η σημειακή ανελίξη μπορεί να περιγραφεί με βάση την αντίστοιχη της **απαριθμητική ανελίξη** (counting process)  $(N(t), t \geq 0)$ , που ορίζεται από την πρόταση:

$$N(t) = n \iff t \in [T(n), T(n+1)) \quad (2.3.1)$$

οπότε το  $N(t)$  περιγράφει το πλήθος των γεγονότων που πραγματοποιούνται στο χρονικό διάστημα  $(0, t]$ . Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι η σχέση:

$$N(t) \geq n \iff T(n) \leq t \quad (2.3.2)$$

Αν συμβολίσουμε με  $\emptyset$  το κενό σύνολο, με  $A = (t_1, t_2]$  ένα τυχόν υποσύνολο του  $R_+$  και με  $(A_i, i=1, 2, \dots)$  μια συλλογή από υποσύνολα του  $R_+$ , τέτοια ώστε  $A_i \cup A_j = \emptyset$ , για κάθε  $i \neq j$ , και αν γενικεύσουμε το συμβολισμό του  $N(t)$ , έτσι ώστε το  $N(A) = N(t_2) - N(t_1)$  να είναι το πλήθος των γεγονότων που πραγματοποιήθηκαν στο χρονικό διάστημα  $(t_1, t_2]$ , τότε έχουμε τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες της απαριθμητικής ανελίξης:

$$N(\emptyset) = 0 \quad (2.3.3)$$

$$N(A) < \infty \quad (2.3.4)$$

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} N(A_i) \quad (2.3.5)$$

Με τον όρο **ένταση** (intensity) σημειακής ανέλιξης εννοούμε το ρυθμό εμφάνισης των γεγονότων, που είναι ίσος με το πλήθος των γεγονότων που εμφανίζονται στη μονάδα του χρόνου, πράγμα που μαθηματικά εκφράζεται με τη σχέση:

$$m(t) = \frac{d}{dt} M(t) \quad (2.3.6)$$

όπου  $M(t) = E[N(t)]$  είναι ο μέσος αριθμός γεγονότων στο διάστημα  $(0, t]$  (το σύμβολο  $E[.]$  παριστάνει την αναμενόμενη τιμή).

Με τον όρο **δείκτης διασποράς** (index of dispersion) σημειακής ανέλιξης εννοούμε τη συνάρτηση

$$I(t) = S(t) / M(t)$$

όπου  $S(t) = \text{Var}[N(t)]$  είναι η διασπορά του πλήθους των γεγονότων στο διάστημα  $(0, t]$ . Η συνάρτηση  $S(t)$  χαρακτηρίζεται με τον όρο **καμπύλη διασποράς-χρόνου** (variance-time curve)

Μια σημειακή ανέλιξη λέγεται **μόνιμη ανανεωτική ανέλιξη** (stationary renewal process), όταν οι χρόνοι διαδοχής  $(V(n), n = 2, 3, ..)$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους και έχουν ενιαία συνάρτηση κατανομής  $F$ , και ο χρόνος πραγματοποίησης του πρώτου επεισοδίου  $T(1)$  είναι ανεξάρτητος από τους χρόνους διαδοχής  $V(n)$ , και έχει συνάρτηση κατανομής:

$$G(t) = \int_0^t (1 - F(s)) ds / \int_0^{\infty} (1 - F(s)) ds \quad (2.3.7)$$

Οι σημειακές ανελιξεις, όπως ορίζονται εδώ στη γενική μορφή τους, και όπως εξειδικεύονται παρακάτω, είναι κατάλληλες για την μαθηματική περιγραφή των εμφανίσεων της βροχής στο χρόνο. Προκειμένου να περιγραφεί το φαινόμενο στο σύνολο του, είναι απαραίτητη η χρήση και μιας δεύτερης, συνοδευτικής ανέλιξης, κατάλληλης για την περιγραφή του ύψους βροχής. Εννοείται ότι κριάζονται ακόμα και κάποιες υποθέσεις για τη στοχαστική σχέση των δύο ανελιξεων. Στις παρακάτω υποπαραγράφους δίνονται παραδείγματα τέτοιων συνοδευτικών ανελιξεων από τη βιβλιογραφία, ταξινομημένα σε αντιστοιχία με τη κύρια ανέλιξη τους, τη σημειακή.

Η απλούστερη κλάση σημειακών ανελιξεων είναι οι ανελιξεις Poisson, που εξετάζονται στην αμέσως επόμενη υποπαραγράφο 2.3.2. Το μειονέκτημα τους για την περιγραφή των βροχοπτώσεων είναι το γεγονός ότι έχουν σταθερό δείκτη διασποράς ίσο με 1, ενώ οι ιστορικές χρονοσειρές επεισοδίων βροχής εμφανίζουν συνήθως δείκτες διασποράς μεγαλύτερους από 1. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό με τον όρο **υπερδιασπορά** (overdispersion) των επεισοδίων βροχής, σε σχέση με

την ανέλιξη Poisson, καθώς και με τον όρο **συσσώρευση** (clustering) των επεισοδίων βροχής. Θα πρέπει πάντως να σημειωθεί ότι η συμπεριφορά αυτή των επεισοδίων βροχής δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν απόλυτη και αντικειμενική αλήθεια, γιατί όπως αναπτύχθηκε προηγουμένα δεν υπάρχει ενιαίος ορισμός του επεισοδίου βροχής. Έτσι είναι δυνατό, αν χρησιμοποιηθεί ένας τύπος ορισμού, τα επεισόδια βροχής να εμφανίζουν συσσώρευση, ενώ αν χρησιμοποιηθεί άλλος τύπος να μην εμφανίζουν.

Πάντως η διαπίστωση της πιο πάνω ανακολουθίας της ανέλιξης Poisson, οδήγησε στην εισαγωγή και άλλων τύπων σημειακών ανελιξεων, ήτοι των ανελιξεων Neyman-Scott και Cox, για τη μελέτη των βροχοπτώσεων (βλ. παραγράφους 2.3.3 και 2.3.4). Μια συγκριτική εξέταση όλων των παραπάνω τύπων περιέχεται στην εργασία του *Guttorp* [1986]. Επίσης μια παράλληλη επισκόπηση όλων των τύπων περιέχεται στην εργασία των *Foufoula-Georgiou και Lettenmaier* [1986], όπου κυρίως δίνεται έμφαση στην επίδραση της διακριτής χρονικής κλίμακας πάνω στις ανελιξεις, που ο ορισμός τους γίνεται σε συνεχή χρόνο.

Στις πιο σύγχρονες διατυπώσεις τους, τα μοντέλα σημειακών ανελιξεων, έχουν θεμελιωμένη μαθηματική δομή, και αντικειμενικό τρόπο εκτιμησης παραμέτρων. Γενικά αποφεύγουν τη χρήση κάποιου τύπου ορισμού του επεισοδίου βροχής, θεωρώντας το επεισόδιο σαν στιγμιαία οντότητα, ή μόνο σαν ενδεικτικό όρο, αλλά αυτό δεν είναι εις βάρος της ακρίβειας τους, δεδομένου ότι δεν προϋποθέτουν αντιστοιχία των ενδεικτικών επεισοδίων με τα επεισόδια μιας ιστορικής χρονοσειράς. Αυτό όμως δεν παύει να είναι ένα ελάττωμα τους, τουλάχιστον σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως όταν απαιτείται να είναι γνωστή η διάρκεια του επεισοδίου βροχής (πχ. σε ένα μοντέλο επιμερισμού). Συνακόλουθα, δεν παίρνουν υπόψη καμιά πιθανή επίδραση της διάρκειας του επεισοδίου στην εσωτερική δομή του επεισοδίου, όπως πχ. στα μέσα ωριαία ύψη βροχής και στους συντελεστές αυτοσυσχέτισης.<sup>5</sup> Ένα άλλο μειονέκτημα όλων αυτών των μοντέλων είναι ότι στηρίζονται σε μόνιμες ανελιξεις, ενώ είναι γνωστό η βροχόπτωση, σε επίπεδο καταιγίδας, δεν παρουσιάζει μονιμότητα (βλ. *Bras και Rodriguez-Iturbe* [1976]).

### 2.3.2. Μοντέλα ανέλιξης Poisson

Η πιο απλή περίπτωση σημειακής ανέλιξης και παράλληλα η περισσότερο χρησιμοποιούμενη στις εφαρμογές, είναι η ανέλιξη Poisson. Μια σημειακή ανέλιξη  $N$  είναι ανέλιξη Poisson όταν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

α. Για κάθε πεπερασμένη συλλογή συνόλων  $A_1, A_2, \dots, A_n,$

5. Στην παρούσα εργασία διαπιστώθηκε ότι υπάρχει τέτοια επίδραση.

χωρίς κοινά στοιχεία, οι τυχαίες μεταβλητές  $N(A_1)$ ,  $N(A_2)$ , ...,  $N(A_n)$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

- β. Υπάρχει μια θετική σταθερά  $\lambda$ , έτσι ώστε για κάθε σύνολο  $A$ , το  $N(A)$  να ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda|A|$ , όπου  $|A|$  είναι το μήκος του  $A$  (μέτρο Lebesgue).

Έτσι αν  $A = (s, s+t]$ , θα είναι  $|A| = t$ , οπότε:

$$P(N(A) = k) = \exp(-\lambda t) (\lambda t)^k / k! \quad (2.3.8)$$

Ο παραπάνω ορισμός αναφέρεται από τους *Smith και Karr* [1983], ενώ στη βιβλιογραφία υπάρχουν και άλλοι (βλ. *Papoulis* [1965], *Waymire και Gupta* [1981]). Στην περίπτωση της ανέλιξης Poisson, οι χρόνοι πραγματοποίησης  $T\{i\}$  των γεγονότων αναφέρονται στη βιβλιογραφία με τον όρο **τυχαία σημεία στο χρόνο** (random points in time). Ορισμένες βασικές ιδιότητες της ανέλιξης Poisson δίνονται παρακάτω:

1. Οι χρόνοι διαδοχής  $V(n)$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή εκθετική συνάρτηση κατανομής:

$$F_{V(n)}(v) = F(v) = 1 - \exp(-\lambda v) \quad (2.3.9)$$

2. Η χρονική απόσταση από ένα αυθαίρετο σημείο  $t_0$ , μέχρι το επόμενο τυχαίο σημείο  $T(i)$ , είναι τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από το τι συμβαίνει έξω από το διάστημα  $(t_0, T(i))$ .
3. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός τυχαίου σημείου στο διάστημα  $(t, t+dt)$ , είναι της τάξης του διαφορικού  $dt$ . Η πιθανότητα για παραπάνω από μια εμφανίσεις στο ίδιο διάστημα είναι της τάξης μεγαλύτερου βαθμού του  $dt$ . Οι πιθανότητες αυτές είναι ανεξάρτητες από το τι συμβαίνει έξω από το διάστημα  $(t, t+dt)$ .
4. Η ένταση της ανέλιξης είναι σταθερή, ίση με  $\lambda$ .
5. Ο συντελεστής διασποράς των χρόνων διαδοχής είναι ίσος με 1. Η συνδιασπορά μεταξύ δύο διαφορετικών χρόνων διαδοχής είναι μηδενική (άμεση συνέπεια της ιδιότητας 1).

Η ιδιότητα 1 αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μια σημειακή ανέλιξη να είναι ανέλιξη Poisson. Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι ότι η

εν λόγω ανέλιξη είναι μόνιμη ανανεωτική, δεδομένου ότι άμεσα προκύπτει ότι και η  $G(t)$  (σχέση 2.3.7) έχει πάλι εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$ . Σαν συνέπεια της ιδιότητας 2 προκύπτει η ακόλουθη σχέση, που δίνει τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου διαδοχής, όταν είναι γνωστό ότι το επόμενο τυχαίο σημείο  $T(i)$  έπεται χρονικά ενός δεδομένου σημείου  $t_0^* = t_0 + T(i-1)$ :

$$f(v|T(i) \geq t_0^*) = f(v|v \geq t_0) = f(v - t_0)$$

Ας σημειωθεί ότι η μόνη συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί την τελευταία σχέση είναι η εκθετική.

Μια γενικότερη περίπτωση της ανέλιξης Poisson προκύπτει αν θεωρηθεί ότι η ένταση  $\lambda$  μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου (με ντετερμινιστικό τρόπο). Τότε η (2.3.8) παίρνει τη μορφή:

$$P(N(A) = k) = \exp(-\Lambda(t)) (\Lambda(t))^k / k!$$

$$\text{όπου } \Lambda(t) = \int_A \lambda(s) ds$$

Η τελευταία λέγεται **ανομογενής ανέλιξη Poisson** (βλ. *Waymire και Gupta* [1981]).

Η ανέλιξη Poisson έχει χρησιμοποιηθεί πολύ συχνά για την περιγραφή των εμφανίσεων της βροχής, και για την μοντελοποίηση των χρόνων διαδοχής. Οι *Todo-ronic και Venjevich* [1969] παρατηρούν ότι οι εμφανίσεις των επεισοδίων βροχής μπορούν να περιγραφούν απ' αυτή την ανέλιξη, αν οριστούν κατάλληλα τα επεισόδια βροχής. Ο *Eagleson* [1978] χρησιμοποιεί αυτή την ανέλιξη για το μοντέλο του που περιγράφηκε στην παράγραφο 2.2.

Δύο διαφορετικά μοντέλα ανέλιξης Poisson, με διαφορετικές συνοδευτικές ανελιξεις ύψους βροχής, αναπτύσσουν οι *Rodriguez-Iturbe κλπ.* [1984]. Και στα δύο η κύρια ανέλιξη που περιγράφει τις αφίξεις βροχής είναι η ομογενής ανέλιξη Poisson, με ένταση  $\lambda$ , και υποτίθεται ότι η ανέλιξη αυτή είναι ανεξάρτητη από την συνοδευτική ανέλιξη του ύψους βροχής. Το πρώτο, που χαρακτηρίζεται σαν μοντέλο Poisson λευκού θορύβου (Poisson white noise model), στηρίζεται στις πρόσθετες υποθέσεις ότι: (α1) τα επεισόδια βροχής είναι στιγμιαία, και σε κάθε επεισόδιο  $n$  αντιστοιχεί ένα ύψος βροχής  $X(n)$ , και (α2) όλα τα  $X(n)$  είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες και με κοινή κατανομή, την εκθετική, με παράμετρο  $\nu$ . Το δεύτερο μοντέλο που χαρακτηρίζεται σαν μοντέλο ομοιόμορφων (ή ορθογωνικών) παλμών (rectangular pulses model) ή Μαρκοβιανό, βασίζεται στις εξής υποθέσεις, που καθορίζουν τη συνοδευτική ανέλιξη: (β1) σε κάθε επεισόδιο βροχής  $n$  αντιστοιχεί μια διάρκεια βροχής  $D(n)$  και μια **ομοιόμορφη** ένταση βροχής  $I(n)$ , (β2) οι διάρκειες  $D(n)$  είναι τυχαίες μεταβλητές στοχαστικά ανεξάρτητες, με κοινή εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\eta$ , (β3) οι εντάσεις  $I(n)$  είναι τυχαί-



ες μεταβλητές στοχαστικά ανεξάρτητες, με κοινή εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\mu$ , και (β4) οι διάρκειες είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις εντάσεις. Σημειώνεται ότι στο δεύτερο μοντέλο επιτρέπεται η αλληλοεπικάλυψη των επεισοδίων. Αποδεικνύεται ότι στο μοντέλο αυτό η ανέλιξη έντασης βροχής, θεωρούμενη σε συνεχή χρόνο, έχει Μαρκοβιανή δομή, δηλαδή

$$\text{Corr}[I(t_1), I(t_2)] = R(\tau) = e^{-\eta\tau}, \text{ όπου } \tau = t_2 - t_1 \geq 0$$

και σ' αυτό οφείλεται και ο χαρακτηρισμός του μοντέλου ως Μαρκοβιανό.

Και τα δύο μοντέλα εφαρμόστηκαν με βάση βροχομετρικά στοιχεία του Κολοράντο και της Βενεζουέλας σε **υδρολογικά ομογενείς περιόδους**, δηλαδή σε μηνιαία ή εποχιακή βάση. Οι παράμετροι των μοντέλων υπολογίστηκαν με βάση τα στατιστικά χαρακτηριστικά των ημερήσιων και των ωριαίων υψών βροχής. Ο υπολογισμός των παραμέτρων στηρίχτηκε στις ακόλουθες σχέσεις, οι οποίες προέκυψαν θεωρητικά, με βάση τις πιο πάνω υποθέσεις, και δίνουν τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης του ημερήσιου ή του ωριαίου ύψους βροχής.

α. Για το πρώτο μοντέλο:

$$E[Y] = \lambda\Delta / \nu$$

$$\text{Var}[Y] = 2\lambda\Delta / \nu^2$$

$$\text{Cov}[Y_i, Y_j] = 0 \quad \text{για } i \neq j$$

β. Για το δεύτερο μοντέλο:

$$E[Y] = \lambda\Delta / \mu\eta$$

$$\text{Var}[Y] = \frac{4\lambda}{\eta^3\mu^2} (\eta\Delta - 1 + e^{-\eta\Delta})$$

$$\text{Cov}[Y_i, Y_k] = \frac{2\lambda}{\eta^3\mu^2} (1 - e^{-\eta\Delta})^2 e^{-\eta(k-2)\Delta}, \quad k \geq 2$$

Από τις δύο τελευταίες προκύπτει ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης τάξης 1, αν τεθεί  $k = 2$ :

$$\rho_Y(1) = \frac{(1 - e^{-\eta\Delta})^2}{2(\eta\Delta - 1 + e^{-\eta\Delta})}$$

Στα παραπάνω το  $Y$  συμβολίζει το ημερήσιο ή το ωριαίο ύψος βροχής, και το  $\Delta$  την αντίστοιχη χρονική ισοδιάσταση, δηλ.  $\Delta = 1$  ημέρα ή 1 ώρα αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι παρά τον αντικειμενικό τρόπο υπολογισμού των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκε, η παράμετρος  $\lambda$  της βασικής ανέλιξης παίρνει διαφορετικές τιμές, ανάλογα με τη χρονική κλίμακα των δεδομένων που χρησιμοποιούνται για τον

υπολογισμό, πράγμα που δείχνει ότι τα μοντέλα δεν μπορούν να θεωρηθούν σαν καθολικά αντιπροσωπευτικά της πραγματικότητας, παρά σαν προσεγγίσεις, κατάλληλες για δεδομένη χρονική κλίμακα. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής τους συγκρίθηκαν με τα πραγματικά δεδομένα σε ότι αφορά την δομή της αυτοσυσχέτισης. Το πρώτο μοντέλο υστερεί σαφώς, αφού δεν προβλέπει καμιά αυτοσυσχέτιση, ενώ τα πραγματικά δεδομένα έχουν. Το δεύτερο προσαρμόζεται πολύ καλά με τα πραγματικά δεδομένα σε ημερήσια βάση, αλλά αποκλίνει σοβαρά στην ωριαία βάση.

Στην εργασία των *Valdes κλπ.* [1985], εξετάζονται και πάλι τα δύο μοντέλα Poisson, χωρίς όμως να συγκρίνονται με ιστορικά, αλλά με συνθετικά δεδομένα που προέκυψαν από τη χρήση του πολυδιάστατου μοντέλου των *Waymire κλπ.* [1984]. Τα συμπεράσματα είναι και εδώ ανάλογα, και επιπλέον προέκυψε ότι τα μοντέλα δεν μπορούν να αναπαράγουν με ικανοποιητικό τρόπο την κατανομή των ακροτάτων εντάσεων βροχής, δεδομένου ότι η κατανομή που δίνουν εξαρτάται σαφέστατα από τη χρονική κλίμακα που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των παραμέτρων τους.

### 2.3.3. Μοντέλα Neyman-Scott

Η ανέλιξη Neyman-Scott είχε εισαχθεί αρχικά το 1939 από το Neyman για τη μοντελοποίηση του πληθυσμού εντόμων και βακτηριδίων, Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε από τους Neyman και Scott το 1958, για τη μελέτη της κατανομής των γαλαξιών στο χώρο. Ο πρώτος που χρησιμοποίησε την ανέλιξη αυτή στο χώρο της υδρολογίας είναι ο LeCam (1961), για την μελέτη της επιφανειακής διανομής των βροχοπτώσεων. Η ανέλιξη αυτή έχει χρησιμοποιηθεί ακόμα και για την μοντελοποίηση της εμφάνισης των σεισμών (το 1970 από τον Vere-Jones). Για το πρόβλημα της περιγραφής των εμφανίσεων της βροχής στο χρόνο, η συγκεκριμένη ανέλιξη χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους Kanvas και Delleur το 1975.

Η ανέλιξη Neyman-Scott περιγράφει την πραγματοποίηση γεγονότων στο χρόνο (ή το χώρο), τα οποία έχουν την τάση να συμβαίνουν σε ομάδες ή σωρούς (clusters). Αν σε κάθε ομάδα γεγονότων αντιστοιχίσουμε μια χρονική στιγμή πραγματοποίησης, που θα ονομάζουμε κέντρο της ομάδας (cluster center), η ανέλιξη μπορεί να οριστεί με τον παρακάτω τρόπο:

- α. Η εμφάνιση των ομάδων γεγονότων ακολουθεί την ανέλιξη Poisson  $(N(t), t \geq 0)$ , με σταθερή ένταση  $\lambda$ .
- β. Το πλήθος των γεγονότων  $M(j)$  της κάθε ομάδας  $(j)$  είναι τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη από όλες τις αντίστοιχες μεταβλητές των άλλων ομάδων.
- γ. Οι χρονικές θέσεις  $T(i, j)$  των γεγονότων κάθε ομάδας  $(j)$

είναι ανεξάρτητες από όλες τις άλλες μεταβλητές της ανέλιξης. Οι σχετικές χρονικές αποστάσεις των γεγονότων από το κέντρο της ομάδας,  $S(i, j) = T(i, j) - T(j)$ , είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι η εν λόγω ανέλιξη είναι μόνιμη. Για να οριστεί πλήρως η ανέλιξη, χρειάζεται να καθοριστούν οι συναρτήσεις κατανομής των μεταβλητών  $M$  και  $S$ . Μια χαρακτηριστική ιδιότητα της είναι ότι επιτρέπεται η χρονική υπέρθεση των διαδοχικών ομάδων γεγονότων.

Οι *Kanvas και Delleur* [1981], αποδίδουν την καταλληλότητα της ανέλιξης Neyman-Scott για την περιγραφή της βροχοπτώσης, στο γεγονός ότι τα μέτωπα βροχής εμφανίζονται σε ομάδες. Στην εργασία τους θεωρούν ότι η κάθε ομάδα επεισοδίων βροχής αντιστοιχεί σε ένα μηχανισμό παραγωγής βροχής (rainfall generating mechanism - RGM), και ότι η βασική ανέλιξη Poisson  $N(t)$ , περιγράφει την εμφάνιση ακριβώς αυτών των μηχανισμών. Θεωρούν ακόμα ότι η χρονική υπέρθεση των ομάδων βροχής είναι μια πραγματικότητα, που οφείλεται στην ιδιότητα της μνήμης των μηχανισμών παραγωγής της βροχής. Για την συμπλήρωση του μοντέλου τους υπέθεσαν μια γεωμετρική κατανομή για το πλήθος  $M$  των επεισοδίων κάθε ομάδας, και μια εκθετική κατανομή για τις σχετικές χρονικές αποστάσεις  $S$ . Το μοντέλο τους το εφάρμοσαν στις ημερήσιες βροχοπτώσεις της Ινδιάνας, αφού προηγουμένως εφάρμοσαν ένα μετασχηματισμό στο χρόνο, αντιμετωπίζοντας έτσι το πρόβλημα των ανομογενών δεδομένων (λόγω των εποχιακών διακυμάνσεων των κλιματικών χαρακτηριστικών στη διάρκεια του έτους). Όπως τελικά παρατηρούν, το μοντέλο τους διατηρεί τη στοχαστική δομή του φυσικού φαινομένου της βροχής και τις περιθώριες κατανομές των χρονικών μεταβλητών της, και έχει πρακτική σημασία για τη μοντελοποίηση των εμφανίσεων βροχής, αλλά μόνο για περιόδους που εμφανίζουν μονιμότητα (ομογένεια χαρακτηριστικών).

Ένα ολοκληρωμένο μοντέλο ανέλιξης Neyman-Scott, με συνοδευτική ανελιξη ύψους βροχής, αναπτύσσουν οι *Rodriguez-Iturbe κλπ.* [1984], παράλληλα με τα δύο μοντέλα Poisson, που περιγράφηκαν στην προηγούμενη υποπαράγραφο. Το μοντέλο τους, που χαρακτηρίζεται σαν μοντέλο λευκού θορύβου Neyman-Scott (Neyman-Scott white noise model) διαρθρώνεται πάνω στις ίδιες υποθέσεις, όπως και το προηγούμενο των *Kanvas-Delleur*, με τη διαφορά ότι το πλήθος των επεισοδίων  $M(j)$  κάθε ομάδας ( $j$ ) ακολουθεί κατανομή Poisson, και την πρόσθετη θεώρηση ότι σε κάθε στιγμιαίο επεισόδιο  $(i, j)$  μιας ομάδας αντιστοιχεί και ένα ύψος βροχής  $X(i, j)$ , όπου όλα τα ύψη επεισοδίων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ανεξάρτητα από οποιαδήποτε χρονική μεταβλητή, και ακολουθούν κοινή εκθετική συνάρτηση

κατανομής. Αποδεικνύεται ότι στο μοντέλο αυτό η ανέλιξη έντασης βροχής, θεωρούμενη σε συνεχή χρόνο, δεν έχει Μαρκοβιανή δομή.

Η εφαρμογή του μοντέλου, όπως και των δύο μοντέλων Poisson που προαναφέρθηκαν, βασίστηκε σε βροχομετρικά στοιχεία του Κολοράντο και της Βενεζουέλας σε υδρολογικά ομογενείς περιόδους, δηλαδή σε μηνιαία ή εποχιακή βάση. Οι παράμετροι και αυτού του μοντέλου υπολογίστηκαν με βάση τα στατιστικά χαρακτηριστικά των ημερήσιων και των ωριαίων υψών βροχής. Ο υπολογισμός των παραμέτρων στηρίχτηκε στις ακόλουθες σχέσεις, οι οποίες προέκυψαν θεωρητικά, με βάση τις πιο πάνω υποθέσεις, και δίνουν τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης του ημερήσιου ή του ωριαίου ύψους βροχής:<sup>6</sup>

$$E[Y] = \lambda \mu \Delta / \nu$$

$$\text{Var}[Y] = \theta_1 \Delta + \frac{2\theta_2}{\beta^2} (\beta \Delta - 1 + e^{-\beta \Delta})$$

$$\text{Cov}[Y_1, Y_k] = \frac{\theta_2}{\beta^2} (1 - e^{-\beta \Delta})^2 e^{-\beta(k-2)\Delta}, \text{ για } k \geq 2$$

Από τις δύο τελευταίες προκύπτει ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης τάξης 1, αν τεθεί  $k = 2$ :

$$\rho_Y(1) = \frac{(1 - e^{-\beta \Delta})^2}{(4\beta \Delta / \mu) + 2(\beta \Delta - 1 + e^{-\beta \Delta})}$$

όπου

$$\theta_1 = 2\lambda \mu / \nu^2$$

$$\theta_2 = \beta \lambda \mu^2 / 2\nu^2$$

και

$\lambda$  = παράμετρος (ένταση) της βασικής ανέλιξης πραγματοποίησης των ομάδων επεισοδίων (Poisson),

$\beta$  = παράμετρος της εκθετικής κατανομής της μεταβλητής  $S$  (σχετική χρονική απόσταση επεισοδίου από το κέντρο της ομάδας),

$\mu$  = παράμετρος της κατανομής Poisson της μεταβλητής  $M$  (πλήθος επεισοδίων βροχής της κάθε ομάδας),

$\nu$  = παράμετρος της εκθετικής κατανομής της μεταβλητής  $X$  (ύψος επεισοδίου βροχής)

$Y$  = ημερήσιο ή ωριαίο ύψος βροχής, και

$\Delta$  = αντίστοιχη χρονική ισοδιάσταση, δηλ.  $\Delta = 1$  ημέρα ή 1 ώρα αντίστοιχα.

6. Οι σχέσεις δίνονται εδώ κάπως διαφοροποιημένες από την αυθεντική τους μορφή, και έχουν διορθωθεί ορισμένα λάθη που υπήρχαν (βλ. και *Foutoula-Georgiou και Guttorp [1986]*).

Στην περίπτωση του εν λόγω μοντέλου, και σε αντίθεση με τα δύο μοντέλα Poisson, η παράμετρος  $\lambda$  της βασικής ανέλιξης βρέθηκε να έχει περίπου την ίδια τιμή, και για τις δύο κλίμακες δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν (ημερήσια και ωριαία). Εξ άλλου η σύγκριση της στοχαστικής δομής αυτοσυσχέτισης του μοντέλου με την αντίστοιχη των πραγματικών δεδομένων έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα και στην ημερήσια, και στην ωριαία κλίμακα. Έτσι το μοντέλο υπερτερεί σαφώς των αντίστοιχων μοντέλων Poisson.

Σχετικά με τη δομή αυτοσυσχέτισης του μοντέλου σε καθορισμένη διακριτή χρονική κλίμακα (όχι συνεχή), χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω σχέσεις μπορεί κανείς να παράγει την ακόλουθη γενική σχέση για το συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $k-1$  τάξης (για  $\Delta = 1$ ):

$$\text{Corr} [Y_1, Y_k] = \rho_Y(1) e^{-\beta(k-2)},$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι η δομή του μοντέλου είναι τύπου ARMA (1, 1).<sup>7</sup>

Το ίδιο μοντέλο εξετάζεται και στη εργασία των *Valdes κλπ.* [1985], σε σύγκριση και πάλι με τα δύο μοντέλα Poisson, αλλά και με το πολυδιάστατο μοντέλο των *Waymire κλπ.* [1984], το οποίο χρησιμοποιείται και σαν βάση της σύγκρισης. Σ' αυτή την εργασία εισάγεται επιπλέον και η **διάρκεια της καταιγίδας**, σαν όρος ανάλογος της διάρκειας επεισοδίου βροχής, που θεωρείται ως η μέγιστη από της χρονικές αποστάσεις των στιγμιαίων επεισοδίων μιας ομάδας, από το αντίστοιχο κέντρο της ομάδας. Τα συμπεράσματα είναι και εδώ παρόμοια, με το επιπλέον συμπέρασμα ότι το μοντέλο δεν μπορεί να αναπαράγει με ικανοποιητικό τρόπο την κατανομή των ακροτάτων εντάσεων βροχής, δεδομένου ότι η κατανομή που δίνει εξαρτάται σαφέστατα από τη χρονική κλίμακα που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των παραμέτρων του.

Οι *Foufoula-Georgiou και Guttorp* [1986] κάνουν μια λεπτομερή εξέταση του ίδιου μοντέλου, χρησιμοποιώντας δεδομένα του Κολοράντο και της Ουάσιγκτον, σε κλίμακες 1, 2, 4, 6, 12 και 24 ωρών. Οι κύριες παρατηρήσεις τους είναι:

- (1) Η δομή εξάρτησης (αυτοσυσχέτισης) του μοντέλου, εξαρτάται μόνο από στατιστικά χαρακτηριστικά του πλήθους των επεισοδίων μέσα σε μια ομάδα, και της σχετικής χρονικής διασποράς τους σ' αυτή δηλ. μόνο από τις παραμέτρους  $\beta$  και  $\mu$ . και όχι από χαρακτηριστικά της συνοδευτικής ανέλιξης των υψών βροχής. Βασισμένοι σ' αυτή την παρατήρηση έδωσαν μια διαφορετική μέθοδο εκτίμησης των παραμέτρων.

7. Και όχι Μαρκοβιανού τύπου, που αναφέρουν οι *Foufoula-Georgiou και Guttorp* [1986].

- (2) Η υπόθεση για τη συνάρτηση κατανομής του πλήθους επεισοδίων μιας ομάδας (πχ. Poisson ή γεωμετρική), παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στο συνολικό μοντέλο, επηρεάζοντας δραστικά τις παραμέτρους του.
- (3) Οι παράμετροι του μοντέλου δεν έχουν φυσικό νόημα, και συνεπώς το μοντέλο δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει τη φυσική πραγματικότητα, παρά σαν μια προσεγγιστική περιγραφή της, εξαρτώμενη από τη χρονική κλίμακα εξέτασης του φαινομένου.

Ας σημειωθεί ότι τα παραπάνω συμπεράσματα βρίσκονται σε αντίθεση με τα αρχικά των Rodriguez-Iturbe κλπ, που θεώρησαν ότι οι παράμετροι του μοντέλου είναι ανεξάρτητες της χρονικής κλίμακας εξέτασης του φαινομένου.

#### 2.3.4. Μοντέλα Cox

Ο όρος **ανερίξεις Cox** (Cox processes) χαρακτηρίζει σημειακές ανερίξεις με τυχαία μεταβαλλόμενες εντάσεις. Το όνομα τους οφείλεται στον Cox που τις εισήγαγε το 1955. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται και με τους όρους **διπλά στοχαστικές ανερίξεις Poisson** (doubly stochastic Poisson processes) και **υπό συνθήκη ανερίξεις Poisson** (conditional Poisson processes). Στη γενική περίπτωση, η ανέλιξη Cox χαρακτηρίζεται από την ανέλιξη έντασης, που είναι μια μη αρνητική στοχαστική ανέλιξη ( $\lambda(u)$ ,  $u \geq 0$ ). Για κάθε σύνολο  $A$  ορίζεται η τυχαία μεταβλητή

$$\Lambda(A) = \int_A \lambda(u) du$$

Σύμφωνα με τον ορισμό των *Smith και Karr* [1983], μια σημειακή ανέλιξη είναι ανέλιξη Cox όταν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

- α. Για κάθε πεπερασμένη συλλογή συνόλων  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , χωρίς κοινά στοιχεία, οι τυχαίες μεταβλητές  $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$  είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες, για δεδομένα  $\lambda$ .
- β. Για κάθε μη αρνητικό αριθμό  $k$ , και για κάθε σύνολο  $A$ , ισχύει:

$$P(N(A) = k | \lambda) = \exp(-\Lambda(A)) (\Lambda(A))^k / k! \quad (2.3.10)$$

δηλαδή, η δεσμευμένη κατανομή του  $N(A)$ , για δεδομένο  $\lambda$ ,

είναι κατανομή Poisson, με παράμετρο  $\Lambda(A)$ .

Όπως έχει αποδειχτεί, μια ανέλιξη Cox είναι μόνιμη, όταν και μόνο όταν η ανέλιξη έντασης  $\lambda(u)$  είναι μόνιμη στοχαστική ανέλιξη. Μια σημαντική ιδιότητα της ανέλιξης αυτής είναι ότι ο συντελεστής διασποράς είναι γενικά διάφορος του 1, και γι' αυτό μπορεί να εφαρμοστεί σε φυσικά φαινόμενα που τα διάφορα γεγονότα έχουν την τάση της συσσώρευσης. Από τον ορισμό προκύπτει ότι στην οριακή περίπτωση που το  $\lambda(u)$  είναι σταθερό (όχι τυχαία μεταβλητή), η ανέλιξη Cox μεταπίπτει σε ανέλιξη Poisson.

Οι *Smith και Karr* χρησιμοποίησαν για την μοντελοποίηση των χρόνων εμφάνισης των βροχοπτώσεων ένα τύπο ανέλιξης Cox, και που χαρακτηρίζεται με τον όρο **ανανεωτική ανέλιξη Cox με Μαρκοβιανή ένταση** (renewal Cox processes with Markovian intensity - RCM). Πρόκειται για μια **μόνιμη σημειακή ανέλιξη**, που ταυτόχρονα είναι **ανανεωτική ανέλιξη**. Τα βασικά στοιχεία της βασικής ανέλιξης περιγραφής των πραγματοποιήσεων βροχής είναι τα ακόλουθα: (α1) Η ένταση της ανέλιξης είναι η ίδια μια εναλασσόμενη ανανεωτική ανέλιξη Μάρκοφ 2 καταστάσεων. Έτσι ο χρόνος διαιρείται σε δύο ειδών χρονικά διαστήματα, που εναλλάσσονται. Στα πρώτου είδους χρονικά διαστήματα η ένταση παίρνει μηδενική τιμή (κατάσταση 0), ενώ στα δεύτερου είδους παίρνει μια θετική τιμή  $\lambda$  (κατάσταση 1). (α2) Τα μήκη των διαστημάτων πρώτου και δεύτερου είδους είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με (διαφορετικές για κάθε είδος) εκθετικές κατανομές. (α3) Κατά τη διάρκεια των μηδενικών τιμών της έντασης δεν πραγματοποιείται κανένα επεισόδιο βροχής, ενώ κατά τη διάρκεια των θετικών τιμών πραγματοποιούνται επεισόδια βροχής με ρυθμό  $\lambda$ . Συνοπτικά, η βασική ανέλιξη χρησιμοποιεί 3 παράμετρους, για τις τρεις αντίστοιχες εκθετικές κατανομές που περιλαμβάνει. Παράλληλα στο μοντέλο χρησιμοποιείται μια συνοδευτική ανέλιξη για την περιγραφή των ύψων βροχής, που βασίζεται στις εξής κυριότερες υποθέσεις: (β1) τα ύψη των επεισοδίων βροχής δεν εξαρτώνται από τους χρόνους πραγματοποίησης τους, και (β2) τα ύψη των επεισοδίων βροχής είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή.

Η ίδια ανέλιξη έχει εξεταστεί θεωρητικά και από τους *Foufoula-Georgiou και Lettenmaier* [1986], και *Guttorp* [1986]. Ο τελευταίος μάλιστα εξετάζει και δύο ακόμα τύπους ανελιξεων της κατηγορίας αυτής, έναν με ένταση μεταβαλλόμενη από μέρα σε μέρα, βάσει μιας ενιαίας συνάρτησης κατανομής, και έναν με ένταση που ακολουθεί ανέλιξη Gauss σε συνεχή χρόνο.

## 2.4. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Γ- ΔΥΟ ΙΔΙΑΙΤΕΡΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΡΟΧΗΣ

### 2.4.1. Το μοντέλο εσωτερικής δομής των Marien και Vandewiele

Το πολύ πρόσφατο μοντέλο των *Marien και Vandewiele* [1986], που μπορεί να χαρακτηριστεί ως μοντέλο προσομοίωσης σε μικρή χρονική βάση, αφού έχει την δυνατότητα να παράγει συνθετικές χρονοσειρές βροχής σε κλίμακα 10 λεπτών, διαφέρει από τα μοντέλα σημειακών ανελιξεων που εξετάστηκαν στην παράγραφο 2.3, σε δύο κυρίως σημεία: (1) στο ότι θεωρεί το επεισόδιο βροχής σαν φυσική οντότητα που μπορεί να διαπιστωθεί σε ένα ιστορικό δείγμα, και (2) στο ότι το επεισόδιο βροχής έχει μια εσωτερική στοχαστική δομή, η οποία δεν ορίζεται έξω από τα όρια του. Ακριβώς στα σημεία αυτά, το εν λόγω μοντέλο μοιάζει με το μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία. Ομοιότητες υπάρχουν επίσης και με το μοντέλο επιμερισμού της παρούσας εργασίας ως προς τη θεωρητική βάση και τη μεθοδολογία επιμερισμού που ακολουθείται. Για τους λόγους αυτούς εξετάζεται χωριστά και σε λεπτομέρεια.<sup>8</sup>

Οι εν λόγω ερευνητές ξεκινούν με την παρατήρηση ότι η εισαγωγή της έννοιας του επεισοδίου ή της καταιγίδας<sup>9</sup>, έχει το πλεονέκτημα ότι τα χαρακτηριστικά διαδοχικών καταιγίδων είναι τελείως ανεξάρτητα και μπορούν να αναλυθούν με ακρίβεια, ακόμα και σε μια πολύ μικρή χρονική κλίμακα, όπως στην κλίμακα των 10 λεπτών, που χρησιμοποιούν στο μοντέλο τους. Σαν καταιγίδα ορίζουν μια ακολουθία βροχερών 10λέπτων περιόδων, που περιορίζεται από μία τουλάχιστον 10λεπτη στεγνή περίοδο στην αρχή της και μία στο τέλος της, με την προϋπόθεση ότι το συνολικό ύψος βροχής της είναι μεγαλύτερο από 0.4 mm. Οι ακολουθίες βροχερών περιόδων με μικρότερο ύψος βροχής δεν μοντελοποιούνται. Επιπλέον θεωρούν ότι κάθε καταιγίδα αποτελείται από επιμέρους καταιγίδες, που διαχωρίζονται μεταξύ τους στα σημεία όπου η ένταση βροχής εμφανίζει τοπικό ελάχιστο (στον κανόνα αυτό δέχονται και ορισμένες εξαιρέσεις). Έτσι η συνολική διάρκεια  $D$  ενός επεισοδίου διαιρείται σε επιμέρους διάρκειες ( $D_1, D_2, \dots, D_N$ ), που έχουν άθροισμα ίσο με  $D$ , ενώ αντίστοιχη θεώρηση γίνεται και για το συνολικό ύψος βροχής  $H$  του επεισοδίου.

Στον πιο πάνω ορισμό μπορεί κανείς να παρατηρήσει τα ακόλουθα:

1. Ο ορισμός δεν επιτρέπει την ύπαρξη στεγνών περιόδων μέσα

8. Παρόλο που η εκπόνηση αυτής της εργασίας είχε ουσιαστικά ολοκληρωθεί πριν από τη δημοσίευση της εργασίας των Marien-Vandewiele.

9. Οι Marien και Vandewiele προτιμούν τον όρο "καταιγίδα" αντί "επεισόδιο βροχής".



σε ένα επεισόδιο. Αυτό έχει μερικά μειονεκτήματα, που θα συζητηθούν σε επόμενη παράγραφο (2.6.1).

2. Εφόσον δύο διαδοχικά επεισόδια βροχής μπορούν να διαχωρίζονται από μια χρονική απόσταση 10 λεπτών μόνο, είναι αμφισβητήσιμης ορθότητας η υπόθεση της ανεξαρτησίας των χαρακτηριστικών τους.
3. Στη μικρή χρονική κλίμακα των 10 λεπτών είναι πιθανό ότι οι αγνοούμενες από το μοντέλο περίοδοι με ύψος μικρότερο από 0.4 mm, μπορεί να αποτελούν σοβαρό ποσοστό της συνολικής διάρκειας βροχής, και να δίνουν αθροιστικά ένα σοβαρό συνολικό ύψος βροχής.

Σαν συνέπεια του παραπάνω ορισμού, ο χρόνος διακοπής της βροχής,  $B$ , (που περιλαμβάνει και τις περιόδους της βροχόπτωσης που δεν μοντελοποιείται και χαρακτηρίζεται σαν "σχεδόν-στεγνή διάρκεια" (quasi-dry time) ), έχει μια πολύπλοκη συνάρτηση κατανομής, που είναι συνδυασμός τριών επιμέρους συναρτήσεων, μιας βήτα και δύο Weibull, με 5 συνολικά παραμέτρους. Οι ερευνητές θεωρούν ότι η χρήση του συνδυασμού τριών συναρτήσεων κατανομής βρίσκεται σε συμφωνία με το φυσικό φαινόμενο, δεδομένου ότι οι χρόνοι διακοπής της βροχής κατατάσσονται σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες (βλ. και υποπαράγραφο 2.6.1.). Για το ύψος επεισοδίου βροχής υπέθεσαν κατανομή Weibull 2 παραμέτρων. Για τη διάρκεια βροχής υπέθεσαν ότι η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της για δεδομένο ύψος βροχής είναι γραμμική συνάρτηση του ύψους βροχής, ενώ η δεσμευμένη κατανομή της μπορεί να περιγραφεί από τη συνάρτηση κατανομής γάμα 2 παραμέτρων, με συντελεστή διασποράς ανεξάρτητο της τιμής του ύψους βροχής. Συνολικά η έκφραση της δεσμευμένης κατανομής της διάρκειας απαιτεί 3 παραμέτρους. Στο επίπεδο της εσωτερικής δομής του επεισοδίου γίνονται οι εξής θεωρήσεις: (i) η βροχή φτάνει με στιγμιαίες εμφανίσεις που ακολουθούν την ανέλιξη Poisson, με ένταση  $\lambda$ . (ii) η ένταση  $\lambda$  είναι μια τυχαία μεταβλητή με τριγωνική κατανομή, που παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή μέσα σε κάθε επεισόδιο, αλλά αλλάζει τιμή από επεισόδιο σε επεισόδιο, και (iii) ένα επιμέρους επεισόδιο θεωρείται ότι περιλαμβάνει ένα σταθερό αριθμό στιγμιαίων εμφανίσεων, και συνεπώς όταν συμπληρωθεί ο αριθμός αυτός τελειώνει το επιμέρους επεισόδιο, και ξεκινά ένα καινούργιο. Οι θεωρήσεις αυτές δεν χρησιμοποιούνται άμεσα στην τελική μορφή του μοντέλου, αλλά χρησιμεύουν ως θεωρητική βάση για τη δόμηση του.

Σαν συνέπεια των υποθέσεων για την εσωτερική δομή, οι επιμέρους διάρκειες, δηλαδή οι μεταβλητές  $D_j$  ( $j=1,..N$ ), ακολουθούν μια ενιαία κατανομή γάμα, και συνεπώς το διάνυσμα των μεταβλητών:

$$\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_n}{D}$$

ακολουθεί την κατανομή Dirichlet  $n$  διαστάσεων. Η κατανομή αυτή έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n p_i)} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i-1}}{\Gamma(p_i)}$$

όπου  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  και  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ .

Στη συγκεκριμένη περίπτωση όλα τα  $p_i$  είναι ίσα. Για  $n = 2$  η παραπάνω κατανομή μεταπίπτει σε βήτα, και το γεγονός αυτό αξιοποιείται για την σταδιακή παραγωγή των επιμέρους διαρκειών από τη συνολική, με τρόπο παρόμοιο όπως στο μοντέλο επιμερισμού της παρούσας εργασίας.

Με τη θεώρηση ότι τα ύψη βροχής των επιμέρους επεισοδίων προς το συνολικό ύψος ( $H_j / H$ ) ακολουθούν κατά προσέγγιση κατανομή Dirichlet με παράμετρος  $p_j$  ανάλογες των τιμών των αντίστοιχων επιμέρους διαρκειών  $d_j$ , καθορίζεται και η διαδικασία επιμερισμού του ολικού ύψους βροχής, σε τρόπο παρόμοιο με τον αντίστοιχο των διαρκειών. Αφού οριστεί σε κάθε επιμέρους επεισόδιο η διάρκεια και το ύψος βροχής του, στη συνέχεια κατασκευάζεται το υετογράφημά του με τη μορφή ενός ισοσκελούς τριγώνου.

Το τελικό μοντέλο έχει 19 συνολικά παραμέτρους, από τις οποίες οι δύο αναφέρονται στην ποσοτική περιγραφή του μη μοντελοποιημένου τμήματος, δηλαδή του συνολικού ύψους των επεισοδίων βροχής με μερικό ύψος μικρότερο από 0.4 mm, που υπολογίζεται ως γραμμική συνάρτηση του χρόνου διακοπής της βροχής. Οι παράμετροι του υπολογίζονται με βάση δεδομένα μιας ομογενούς περιόδου (εποχής) και από αυτή την άποψη είναι εποχιακό. Η εφαρμογή του έγινε για δύο εποχές, την χειμερινή (Οκτώβριος-Μάρτιος) και την θερινή, και βασίστηκε σε δεδομένα 13.5 ετών του Βελγίου. Ο έλεγχος της ακρίβειας του μοντέλου βασίστηκε σε στατιστικούς ελέγχους των υποθέσεων του και σε σύγκριση των συνθετικών χρονοσειρών με τις ιστορικές, κύρια σε ότι αφορά τις προκύπτουσες μέγιστες εντάσεις δεδομένης διάρκειας και περιόδου επαναφοράς, οι οποίες έχουν αποκλίσεις από -8% μέχρι 36%. Οι συγγραφείς του το χαρακτηρίζουν ως το πρώτο ολοκληρωμένο μοντέλο-γεννήτρια βροχής με έμφαση στις συνθήκες ισχυρών καταιγίδων, που μπορεί να λειτουργήσει σε οποιαδήποτε χρονική κλίμακα, και θεωρούν ως ισχυρό σημείο του το γεγονός ότι περιγράφει πλήρως τα επεισόδια βροχής, και παράγει συνθετικά υετογραφήματα με πολλές αιχμές.

Μερικά αδύνατα σημεία του μοντέλου που μπορεί κανείς να διακρίνει, πέρα

από όσα αναφέρθηκαν σε σχέση με τον ορισμό του επεισοδίου, είναι το μεγάλο πλήθος παραμέτρων, οι (αυθαίρετες) τριγωνικές μορφές των υετογραφημάτων, και η παραδοχή του σταθερού αριθμού στιγμιαίων εμφανίσεων ανά επιμέρους επεισόδιο, που μάλλον δεν συνδυάζεται με τις τριγωνικές μορφές των υετογραφημάτων. Σε σχέση με τα μοντέλα που αναπτύσσονται στην παρούσα εργασία, παρόλες τις ομοιότητες στη λογική με το μοντέλο Marien-Vandewiele, εμφανίζονται σαφείς διαφορές στον ορισμό του επεισοδίου βροχής, στις χρησιμοποιούμενες κατανομές και στην εσωτερική δομή, ενώ η μεθοδολογία επιμερισμού που χρησιμοποιείται στο τελευταίο μπορεί να θεωρηθεί σαν ειδική οριακή περίπτωση του μοντέλου επιμερισμού που αναπτύχτηκε στην παρούσα εργασία.

#### 2.4.2. Το μοντέλο επιμερισμού των Woolhiser και Osborn

Οι *Woolhiser και Osborn* [1985] ανέπτυξαν ένα μοντέλο επιμερισμού των καταιγίδων σε σημειακή βάση, το οποίο λειτουργεί πάνω σε αδιάστατοποιημένες κλίμακες χρόνου και ύψους βροχής. Όπως και το μοντέλο της προηγούμενης υποπαραγράφου, το εν λόγω μοντέλο παρουσιάζει ομοιότητες με την παρούσα εργασία και γι' αυτό εξετάζεται εδώ ξεχωριστά.

Οι συγγραφείς ξεκινούν οριοθετώντας τους στόχους της σύγχρονης έρευνας πάνω στις βροχοπτώσεις, βασιζόμενοι στην ανάγκη ανάπτυξης αποτελεσματικών μοντέλων βροχής, κατάλληλων για μικροϋπολογιστές. Οι στόχοι που θέτουν είναι: (1) Να αναπτυχθούν τεχνικές για επιμερισμό των ημερήσιων βροχοπτώσεων σε ξεχωριστά επεισόδια, με καθορισμό των υψών βροχής, διαρκειών και χρόνων πραγματοποίησης τους, (2) να αναπτυχθούν τεχνικές για τον επιμερισμό των υψών βροχής των σημαντικών επεισοδίων σε ύψη μικροτέρων χρονικών περιόδων, και (3) να εξεταστούν η επιφανειακή και η χωρική μεταβλητότητα της δομής και των παραμέτρων των μοντέλων σε κλίμακα ημέρας και επεισοδίου. Το μοντέλο τους το εντάσσουν στον δεύτερο από τους στόχους αυτούς.<sup>10</sup>

Οι βασικές ιδέες που συγκροτούν το μοντέλο είναι οι ακόλουθες:

1. Η διάρκεια κάθε επεισοδίου βροχής χωρίζεται σε  $m$  ίσα διαστήματα, διάρκειας  $D/m$ . Η διαδικασία επιμερισμού αφορά τον προσδιορισμό των υψών βροχής αυτών των διαστημάτων. Στο μοντέλο θεωρείται  $m = 10$ .
2. Ο χρόνος μέσα στο επεισόδιο αδιαστατοποιείται με το μετασχηματισμό  $t_* = (t - t_0) / D$ , όπου  $t_0$  ο χρόνος έναρ-

10. Τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία μπορεί να θεωρηθεί ότι εξυπηρετούν τους δύο πρώτους από τους στόχους αυτούς.

ξης του επεισοδίου. Ισχύει  $0 \leq t_* \leq 1$ .

3. Το ύψος βροχής μέσα στο επεισόδιο αδιαστατοποιείται με το μετασχηματισμό  $U(t_*) = S(t) / H$ , όπου  $H$  το συνολικό ύψος του επεισοδίου, και  $S(t)$  το ύψος βροχής μέχρι το χρόνο  $t = t_* D + t_0$  (θεωρείται ότι  $S(t_0) = 0$ ).
4. Οι μεταβλητές που τελικά χρησιμοποιούνται προκύπτουν από μετασχηματισμό των αδιαστατοποιημένων υψών ως εξής:

$$Z(k) = \frac{U(k/m) - U((k-1)/m)}{1 - U((k-1)/m)}, \quad \text{όπου } k = 1, 2, \dots, m$$

Στην παραπάνω σχέση ο αριθμητής δείχνει το αδιαστατοποιημένο ύψος βροχής στο  $k$  διάστημα και ο παρονομαστής το άθροισμα των υψών βροχής των διαστημάτων από  $k$  μέχρι  $m$ . Συνεπώς  $0 \leq Z(k) \leq 1$  για  $k < m$ , και  $Z(m) = 1$ . Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι αν οριστούν τα  $Z(k)$  για  $k = 1, \dots, m-1$ , τότε προκύπτουν όλα τα αδιαστατοποιημένα και στη συνέχεια τα πραγματικά ύψη βροχής όλων των υποδιαστημάτων, με βάση τη σχέση:

$$U(k/m) = 1 - \prod_{i=1}^k [1 - Z(i)]$$

5. Για τη σταδιακή παραγωγή των  $Z(k)$  απαιτείται να είναι γνωστή η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του  $Z(k)$  για δεδομένη τιμή του  $Z(k-1)$ . Στο μοντέλο γίνεται η υπόθεση ότι η κατανομή αυτή είναι βήτα με παραμέτρους που εξαρτώνται από το  $k$  ( $a_k, b_k$ ). Προϋποτίθεται ότι η ακολουθία των  $Z(k)$  είναι Μαρκοβιανή, οπότε και δεν απαιτείται ο καθορισμός άλλων, εκτός από την παραπάνω, δεσμευμένων ή από κοινού συναρτήσεων κατανομής.
6. Θεωρείται επίσης ότι η αναμενόμενη τιμή του  $Z(k)$  για δεδομένη τιμή του  $Z(k-1)$  είναι γραμμική συνάρτηση της τελευταίας. Αυτή η θεώρηση προσθέτει 2 ακόμα παραμέτρους για κάθε τιμή του  $k$  ( $c_k, d_k$ ), αποδεικνύεται όμως ότι μόνο η μια από αυτές είναι ανεξάρτητη.
7. Το μοντέλο δεν χρησιμοποιεί σαν μεταβλητές τα αρχικά ύψη βροχής, αλλά τις μετασχηματισμένες μεταβλητές  $Z(k)$ . Έτσι για να υπολογιστούν οι παράμετροι του από ένα ιστορικό δείγμα, πρέπει πρώτα να σχηματιστούν οι αντί-

στοιχες κρονοσειρές από το δείγμα.

Το μοντέλο, όπως τελικά χρησιμοποιήθηκε δηλαδή για  $m = 10$ , έχει 26 παραμέτρους  $(=(10-1)*3 - 1)$ . Μια προσπάθεια μείωσης του αριθμού αυτού, με χρησιμοποίηση κάποιων πολυωνυμικών εκφράσεων του αδιάστατου χρόνου, έδωσε 10 παραμέτρους, τελικά όμως συνιστάται ένα σχήμα με 13 παραμέτρους. Όλες αυτές οι παράμετροι αφορούν την εσωτερική δομή του επεισοδίου και μόνο. Αν ληφθούν υπόψη και οι παράμετροι που αφορούν εξωτερικά χαρακτηριστικά των επεισοδίων<sup>11</sup>, τότε ο αριθμός αυτός αυξάνει. Σχετικά με τα εξωτερικά χαρακτηριστικά, γίνονται ορισμένες πρόσθετες παραδοχές, όπως ότι η κατανομή του ύψους επεισοδίου βροχής είναι εκθετική, ότι η δεσμευμένη κατανομή της διάρκειας για δεδομένο ύψος είναι λογαριθμοκανονική, και ότι η αναμενόμενη τιμή του λογαρίθμου της διάρκειας για δεδομένο ύψος, είναι γραμμική συνάρτηση του ύψους.

Η εφαρμογή του μοντέλου σε μια περιοχή της Αριζόνας, και οι σύγκριση του με τα στοιχεία 275 καλοκαιρινών καταιγίδων, έδειξε μια αποδεκτή προσέγγιση του με τα δεδομένα. Οι συγκρίσεις που έγιναν με τα πραγματικά δεδομένα αφορούσαν τις περιθώριες κατανομές και την αλληλεξάρτηση των μεταβλητών  $Z(k)$ , καθώς και τις κατανομές των μεγίστων εντάσεων βροχής για διάρκειες 5 μέχρι 120 λεπτών.

Μερικά αδύνατα σημεία του μοντέλου, που μπορεί κανείς να διακρίνει, είναι: (α) το μεγάλο πλήθος παραμέτρων του, (β) η θεμελίωση των θεωρητικών υποθέσεων και της διαδικασίας υπολογισμού των παραμέτρων του μοντέλου πάνω στις μεταβλητές  $Z(k)$ , που δεν έχουν φυσικό νόημα, και (γ) η χρησιμοποίηση σταθερού αριθμού χρονικών υποδιαιρέσεων σε συνδυασμό με τη χρησιμοποίηση της αδιάστατης χρονικής κλίμακας, που καθιστά αδύνατη την συναγωγή ασφαλών συμπερασμάτων πάνω σε μια ενιαία κλίμακα πχ. ωριαία.

Το κοινό σημείο του μοντέλου αυτού με τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία, αναφέρεται στη χρήση των μεταβλητών  $Z(k)$ , που είναι ταυτόσημες με τις αναλογικές μεταβλητές, του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού, όπως έχουν εισαχθεί στο κεφάλαιο 1. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί μια ουσιαστική διαφορά στη χρήση αυτών των μεταβλητών: Στο δυναμικό μοντέλο επιμερισμού είναι ενδιάμεσες μεταβλητές, με στατιστικά χαρακτηριστικά και κατανομές που προκύπτουν σε κάθε βήμα επιμερισμού, συναρτήσει των χαρακτηριστικών του προς επιμερισμό μεγέθους, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το ύψος βροχής, ενώ αντίθετα στο μοντέλο Woolhiser-Osborn είναι οι βασικές μεταβλητές, των οποίων τα χαρακτηριστικά υπολογίζονται από το ιστορικό δείγμα, μετά από ειδική επεξεργασία.

11. Στην εργασία δεν είναι σαφές πώς ορίζεται το επεισόδιο βροχής

## 2.5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Δ - ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΡΟΧΗΣ

### 2.5.1. Γενικά χαρακτηριστικά

Τα επιφανειακά μοντέλα δεν εξαντλούνται στην περιγραφή και προσομοίωση (στο χρόνο) της βροχόπτωσης σε ένα μόνο σημείο μιας λεκάνης απορροής, αλλά περιλαμβάνουν και τη διανομή της στο χώρο, δηλαδή είναι μοντέλα χωροχρονικά. Αν πρόκειται να περιγραφεί επιφανειακά η βροχόπτωση σε μεγάλη χρονική κλίμακα, δηλαδή από μηνιαία και πάνω, χρησιμοποιείται κάποιο από τα γνωστά μη εξειδικευμένα πολυδιάστατα στατιστικά μοντέλα. Έτσι ο όρος "επιφανειακά μοντέλα βροχής" χρησιμοποιείται για τα μοντέλα μικρής χρονικής κλίμακας, δηλαδή από την κλίμακα του επεισοδίου βροχής και κάτω. Επειδή στην εργασία αυτή ενδιαφερόμαστε μόνο για τη σημειακή βροχόπτωση, η αναλυτική επισκόπηση των επιφανειακών μοντέλων ξεφεύγει από το ερευνητικό αντικείμενο, και γι' αυτό θα δώσουμε μερικά συνοπτικά μόνο στοιχεία.

Σύμφωνα με την επικρατούσα ορολογία (βλ. *Bras και Rodriguez-Iturbe* [1976a]), τα μοντέλα αυτά μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο τύπους, ανάλογα με τη μαθηματική δομή τους : (α1) τα πολυμεταβλητά (multivariate), που περιγράφουν το φαινόμενο της βροχής σε ένα σύνολο από συγκεκριμένους βροχομετρικούς σταθμούς μιας λεκάνης απορροής ή γενικότερα μιας περιοχής μελέτης, και (α2) τα καθαρώς επιφανειακά ή πολυδιάστατα (areal ή multidimensional), που περιγράφουν το φαινόμενο της βροχής σε κάθε σημείο της περιοχής μελέτης. Εξ άλλου τα μοντέλα αυτά, ανάλογα με τη θεωρητική τους βάση μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες (βλ. *Waymire και Gupta* [1981a]): (β1) τα φυσικά ή προσδιοριστικά, δηλαδή αυτά που θεμελιώνονται στη μηχανική των ρευστών και τη θερμοδυναμική, (β2) τα εμπειρικά, που βασίζονται σε ορισμένες ιδιότητες της βροχής, ως χωροχρονικού φαινομένου, που έχουν εμπειρικά διαπιστωθεί, και (β3) τα στοχαστικά, που στηρίζονται στη θεωρία των τυχαίων πεδίων (random fields).

Σύμφωνα με την ανάλυση των *Bras και Rodriguez-Iturbe* [1976a]), η βασική συμπεριφορά των βροχοπτώσεων σε επιφανειακή κλίμακα συνοψίζεται στα ακόλουθα:

1. Κάθε καταιγίδα μετακινείται στο χώρο με μια μέση ταχύτητα  $U$ , ακολουθώντας μια ορισμένη τροχιά. Μεμονωμένες διαταραχές, μέσα στην περιοχή του συστήματος που προκαλεί την καταιγίδα, κινούνται με την ίδια περίπου ταχύτητα.
2. Η βροχή που πέφτει σε κάποια χρονική στιγμή βρίσκεται σε εξάρτηση με το τί έχει προηγηθεί χρονικά. (Αυτό επεκτεί-

- νεται, και στη συμπεριφορά της σημειακής βροχόπτωσης.)
3. Έχει διαπιστωθεί ότι υπάρχει σαφής εξάρτηση της βροχής στο χώρο.
  4. Η εξάρτηση στο χώρο και το χρόνο δεν μπορούν να διαχωριστούν, ούτε είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
  5. Η βροχόπτωση είναι μη μόνιμο φαινόμενο. Τα στατιστικά χαρακτηριστικά της (μέση τιμή, τυπική απόκλιση) μεταβάλλονται με το χρόνο σε όλα τα σημεία του χώρου. (Αυτό αφορά και τη σημειακή βροχόπτωση.)

#### 2.5.2. Μερικά βασικά μοντέλα της βιβλιογραφίας

Ένα κλασικό ολοκληρωμένο μοντέλο, που σύμφωνα με την ορολογία της προηγούμενης υποπαραγράφου χαρακτηρίζεται ως πολυδιάστατο και στοχαστικό, είναι το μοντέλο των *Bras και Rodriguez-Iturbe* [1976a]). Η θεμελίωση του γίνεται πάνω στην ποσοτική περιγραφή της έντασης της βροχής, κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας, ως μη μόνιμου τυχαίου πεδίου Gauss. Οι βασικές του υποθέσεις είναι οι εξής:

1. Η μη μονιμότητα αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή δύο ντετερμινιστικά προσδιοριζόμενων συναρτήσεων του χρόνου και του χώρου,  $I_{\mu}(x,t)$  και  $\sigma(x,t)$ , σύμφωνα με την εξίσωση:

$$I(x,t) = I_{\mu}(x,t) + R(x,t)\sigma(x,t)$$

όπου  $I(x,t)$  η ένταση στο σημείο με χωρικές συντεταγμένες  $x$ , στο χρόνο  $t$ ,  $I_{\mu}(x,t)$  η αντίστοιχη μέση ένταση,  $\sigma(x,t)$  η αντίστοιχη διασπορά της έντασης, και  $R(x,t)$  το κανονικοποιημένο στοχαστικό υπόλοιπο, με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1.

2. Η μέση ένταση  $I_{\mu}$  και η αντίστοιχη διασπορά  $\sigma$  σε οποιοδήποτε σημείο αναφοράς, που χαρακτηρίζεται από τη συντεταγμένη  $x_1$ , όπου ο άξονας  $x_1$  θεωρείται παράλληλος με την ταχύτητα  $U$ , δίνονται από τις σχέσεις:

$$I_{\mu}(x,t) = i_{\alpha}(t - x_1/U)$$

$$\sigma(x,t) = \sigma_{\alpha}(t - x_1/U)$$

όπου οι συναρτήσεις  $i_{\alpha}(t)$  και  $\sigma_{\alpha}(t)$  προσδιορίζονται από

αδιάστατες καμπύλες, ανάλογες με τις καμπύλες ποσοστιαίας κατανομής της βροχής (βλ. παράγραφο 2.2.5).

3. Προκειμένου να καθοριστεί η στατιστική δομή των υπολοίπων  $R(x, t)$ , θεωρείται ότι η συνάρτηση συνδιασποράς τους ακολουθεί την υπόθεση Taylor για την τύρβη, και ότι το τυχαίο πεδίο των εντάσεων είναι ιστροπικό, οπότε:

$$r(x, t; z, t+s) = E[R(x, t)R(z, t+s)] = r_0(w)$$

$$\text{όπου } w = [(x_2 - z_2)^2 + (x_1 - z_1 + U_s)^2]^{1/2}$$

Στην εφαρμογή του μοντέλου θεωρήθηκε ότι η  $r_0 = \exp(-aw)$ , με  $a = 0.15$ , ενώ υιοθετήθηκε η εκθετική κατανομή ως συνάρτηση κατανομής της διάρκειας βροχής, του χρόνου διακοπής, και της μέσης έντασης επεισοδίου βροχής, όπου και οι τρεις αυτές μεταβλητές θεωρήθηκαν στοχαστικά ανεξάρτητες.

Στην ειδική περίπτωση της σημειακής βροχόπτωσης, εφαρμόζοντας τις παραπάνω εξισώσεις της συνάρτησης συνδιασποράς, προκύπτει ότι  $r(t; t+s) = \exp(-aUs)$ , πράγμα που δείχνει ότι η ένταση έχει Μαρκοβιανή δομή. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, οι τιμή του συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $r$ , για σταθερό χρονικό βήμα  $s$ , δεν είναι σταθερή, αλλά είναι φθίνουσα συνάρτηση της ταχύτητας μετακίνησης της καταιγίδας, γεγονός που φαίνεται να είναι λογικό.

Οι *Bras και Rodriguez-Iturbe* [1986b], έδωσαν μια παράγωγη πολυμεταβλητή έκδοση του παραπάνω μοντέλου, κατάλληλη να συνεργάζεται με ένα μοντέλο απορροής, βασισμένο στην επίλυση των εξισώσεων του κινηματικού κύματος. Με παρόμοιες παραδοχές σχετικά με την δομή της χωροχρονικής αυτοσυσχέτισης οι *Johnson και Bras* [1980], ανέπτυξαν ένα μοντέλο πρόγνωσης της βροχής σε μικρή χρονική βάση.

Μια διαφορετική λογική εισήγαγαν οι *Waymire κλπ.* [1984], με το μοντέλο τους που βασίζεται και στη θεωρία των σημειακών ανελίξεων, και που και αυτό είναι ένα πολυδιάστατο στοχαστικό μοντέλο, που ταυτόχρονα έχει ορισμένες υποθέσεις σχετικές με το μηχανισμό παραγωγής της βροχής. Έτσι θεωρείται ότι ένα σύστημα παραγωγής βροχόπτωσης αποτελείται από ζώνες βροχής (rainbands), όπου κάθε ζώνη περιέχει διακεκριμένες περιοχές που λέγονται δυναμικές περιοχές συσσώρευσης (cluster potential regions) και κάθε τέτοια περιοχή περιέχει κύτταρα βροχής (rain cells). Για την περιγραφή του φαινομένου θεωρείται ένα χωροχρονικό σύστημα συντεταγμένων, όπου το χωρικό σύστημα είναι προσαρτημένο στο έδαφος. Θεωρείται ότι κάθε ζώνη βροχής μετακινείται με ταχύτητα  $U_p$  σε σχέση με το έδαφος, ενώ τα κύτταρα μετακινούνται μέσα στη ζώνη με σχετική ταχύτητα  $U_c$ , και συνεπώς η ταχύτητα τους σε σχέση με το έδαφος είναι  $U = U_p + U_c$ . Σχετικά με τη στοχαστική δομή της χωροχρονικής διανομής του φαινομένου γίνονται οι υποθέ-



σεις ότι η άφιξη των ζωνών βροχής ακολουθεί την ανέλιξη Poisson, με παράμετρο  $\lambda$ , και η επιφανειακή διανομή των κέντρων των δυναμικών περιοχών συσσώρευσης περιγράφεται με μια επιφανειακή ανέλιξη Poisson, με παράμετρο  $\rho$ . Ο αριθμός των κυττάρων βροχής μέσα σε μια περιοχή συσσώρευσης είναι μια τυχαία μεταβλητή  $M$ , που στις εφαρμογές θεωρήθηκε ότι ακολουθεί κατανομή Poisson. Η γέννηση των κυττάρων βροχής μέσα στην κινούμενη ζώνη βροχής είναι ένα στοχαστικό φαινόμενο, και η πιθανότητα εμφάνισης (γέννησης) ενός κυττάρου, στην περιοχή  $(dt, dy)$  γύρω από το (χωροχρονικό) σημείο  $(t, y)$ , που βρίσκεται μέσα στην περιοχή συσσώρευσης με κέντρο  $x$ , δίνεται από το μέγεθος  $f_x(t, y)dt dy$ , όπου η συνάρτηση  $f_x$  δίνεται από τις σχέσεις:

$$f_x(t, y) = f_1(t) f_2\{y - [x + U_b(t - s)]\} \quad \text{για } t > s - T$$

$$f_x(t, y) = 0 \quad \text{για } t \leq s - T$$

όπου

$$f_1(t) = \beta \exp[-\beta(t - s + T)]$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

και  $s$  είναι ο χρόνος άφιξης της ζώνης βροχής, ενώ  $T$  είναι η κοινή διάρκεια ζωής των κυττάρων.

Η ένταση βροχής που παράγεται από ένα κύτταρο με "ηλικία"  $a$ , σε ένα σημείο του χώρου που βρίσκεται σε απόσταση  $r$  του από το κέντρο του κυττάρου, δίνεται από τις σχέσεις:

$$g(a, r) = \iota_0 g_1(a) g_2(r)$$

με

$$g_1(a) = \exp(-ca), \quad a \geq 0$$

$$g_1(a) = 0, \quad a < 0$$

$$g_2(r) = \exp(-r^2/2D^2)$$

όπου  $\iota_0$  είναι η ένταση βροχής στο κέντρο του κυττάρου κατά τη στιγμή της γέννησης του, που θεωρείται σαν τυχαία μεταβλητή και τα  $c$  και  $2D^2$  είναι ποσοτικά μέτρα της διάρκειας και της έκτασης του κυττάρου. Η μορφή της συνάρτησης  $g$  δείχνει ότι οι επιδράσεις της ηλικίας και της απόστασης στην ένταση βροχής θεωρούνται ανεξάρτητες, ενώ η μορφή της  $g_2$  δείχνει ότι η ένταση θεωρείται ότι κατανέμεται με συμμετρικό τρόπο γύρω από το κέντρο του κυττάρου.

Το εν λόγω μοντέλο μπορεί να περιγράψει, σαν οριακή περίπτωση και τη σημειακή βροχόπτωση. Μια εφαρμογή του, σε επιφανειακή και σημειακή βάση, έχουν κάνει οι *Valdes κλπ.* [1985], συγκρίνοντας το μάλιστα με τα σημειακά μοντέλα που βασίζονται στις σημειακές ανελιξεις. Μια άλλη έκδοση του ίδιου μοντελου δίνεται στην εργασία των *Rodriguez-Iturbe και Eagleson* [1987].

## 2.6. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΕΠΕΙΣΟΔΙΩΝ ΒΡΟΧΗΣ

### 2.6.1. Γενικές θεωρήσεις

Οι βασικοί τύποι ορισμού του επεισοδίου βροχής, που συναντώνται στη βιβλιογραφία, έχουν αναλυθεί στην υποπαράγραφο 2.2.4. Στην εργασία αυτή είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε ένα ορισμό που να αποδίδει σε κάθε επεισόδιο βροχής σαφή χρονικά όρια. Σε αντίθετη περίπτωση δεν θα ήταν δυνατό να χρησιμοποιηθεί η χρονική κλίμακα του επεισοδίου στον επιμερισμό του ύψους βροχής, οπότε και η εισαγωγή της έννοιας του επεισοδίου θα ήταν τελείως περιττή.

Ο απλούστερος τύπος ορισμού του επεισοδίου βροχής προκύπτει αν αποκλείσουμε την ύπαρξη στεγνών περιόδων (δηλαδή με μηδενική ένταση βροχής) μέσα σε ένα επεισόδιο, και όπως αναφέρθηκε στην υποπαράγραφο 2.2.4., αυτός ο τύπος ορισμού έχει γίνει δεκτός σε αρκετές εργασίες. Ο ορισμός αυτός όμως έχει τρία βασικά μειονεκτήματα που θα αναλύσουμε στη συνέχεια.

Το πρώτο μειονέκτημα είναι η ανακολουθία του ορισμού με το φυσικό φαινόμενο της βροχής. Οι *Marien και Vandewielle* [1986], που ουσιαστικά δέχονται αυτό τον τύπο ορισμού, διακρίνουν τρεις κατηγορίες στεγνών περιόδων, που χαρακτηρίζονται από τη διάρκεια τους, δηλαδή το *χρόνο διακοπής της βροχής*. Κατά τασουν, λοιπόν, τους χρόνους διακοπής σε: (α) πολύ μικρούς, από 1 μέχρι 20 περίπου λεπτά, οι οποίοι παρεμβάλλονται μεταξύ καταιγίδων που προέρχονται από τα ίδια σύννεφα, (β) ενδιάμεσους, από 20 λεπτά μέχρι λίγες ώρες, οι οποίοι παρεμβάλλονται μεταξύ καταιγίδων που προέρχονται από διαφορετικά σύννεφα του ίδιου όμως μετεωρολογικού συστήματος μεσοκλίμακας (mesoscale) ή συνοπτικού (synoptic)<sup>12</sup>, και (γ) μεγάλους χρόνους οι οποίοι διαχωρίζουν καταιγίδες που ανήκουν σε σαφώς διαφορετικές βροχερές περιόδους. Αλλά, η παραδοχή ότι η εμφάνιση ακόμα και μιας μικρής στεγνής χρονικής περιόδου διάρκειας μερικών λεπτών σημαίνει ότι λήγει ένα επεισόδιο βροχής και ξεκινά ένα άλλο, αφαιρεί από το επεισόδιο βροχής το φυσικό του νόημα, δεδομένου ότι: (1) η βροχή είναι επιφανειακό φαινόμενο, που όμως μετρείται σημειακά, και έτσι αν το αποτέλεσμα της μέτρησης σε ένα σημείο δώσει μηδενική ένταση, αυτό δεν σημαίνει ότι θα υπήρχε μηδενική ένταση και σε ένα άλλο κοντινό σημείο, ιδίως αν η διάρκεια της

12. Ένας μετεωρολογικός σχηματισμός που προκαλεί βρόχόπτωση χαρακτηρίζεται ανάλογα με την έκταση που καταλαμβάνει. Οι πιο μεγάλες εκτάσεις, της τάξης των  $10^4 \text{ km}^2$  χαρακτηρίζονται με τον όρο "συνοπτικές περιοχές" (synoptic areas) και έχουν διάρκεια ζωής από μία μέχρι μερικές ημέρες. Οι πιο μεγάλες σχηματισμένες υποπεριοχές με έκταση  $10^3 - 10^4 \text{ km}^2$  και διάρκεια ζωής μερικών ωρών χαρακτηρίζονται σαν "μεγάλες περιοχές μεσοκλίμακας" (large mesoscale areas - LHSA), ενώ οι μικρότερες, με έκταση  $10^2 - 10^3 \text{ km}^2$  και διάρκεια ζωής λίγων ωρών χαρακτηρίζονται σαν "μικρές περιοχές μεσοκλίμακας" (small mesoscale areas - SHSA). (βλ. *Waymire και Gupta* [1981a])

μηδενικής έντασης είναι μικρή, και (2) η εμπειρία δείχνει ότι η σποραδική εμφάνιση μικρών περιόδων με μηδενική ή περίπου μηδενική ένταση είναι συνηθισμένη με το ίδιο το φαινόμενο της βροχόπτωσης, και δεν αποτελεί κάτι το ξεχωριστό, και κατά συνέπεια δεν πρέπει να θεωρείται ότι οριοθετεί αναγκαστικά διαφορετικά επεισόδια. Είναι λοιπόν πολύ πιο λογικό και συνεπές να θεωρηθεί ότι ένα επεισόδιο βροχής αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο μετεωρολογικό σχηματισμό, και κατά συνέπεια μόνο οι στεγνές περίοδοι της παραπάνω κατηγορίας (γ) ξεχωρίζουν διαφορετικά επεισόδια βροχής, ενώ οι υπόλοιπες εμπεριέχονται μέσα στα επεισόδια βροχής.

Το δεύτερο μειονέκτημα είναι το γεγονός ότι αν εφαρμοστεί αυτός ο ορισμός, τότε η ακολουθία των επεισοδίων βροχής, που σχηματίζεται εμφανίζει μια σαφή στοχαστική εξάρτηση. Έχει αποδειχτεί, και επιβεβαιώθηκε και σε αυτή την εργασία, ότι τα διαδοχικά ωριαία ύψη εμφανίζουν μια σαφή συσχέτιση μεταξύ τους. Συνεπώς αν θεωρηθεί ότι ο χρόνος διαχωρισμού δύο διαδοχικών επεισοδίων βροχής μπορεί να είναι και μικρότερος από μια ώρα, τότε είναι προφανές ότι τα ωριαία ύψη που ανήκουν σε διαδοχικά επεισόδια θα είναι εξαρτημένα. Για να μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα τα ωριαία ύψη διαδοχικών επεισοδίων θα πρέπει να μεσολαβεί ανάμεσα τους ένας χρόνος διακοπής αρκετών ωρών. Για να διαπιστώσουμε την τάξη μεγέθους αυτού του χρόνου, ας θεωρήσουμε σαν παράδειγμα ένα συντελεστή αυτοσυσχέτισης του ωριαίου ύψους της τάξης του 0.40 (η τιμή αυτή έχει προκύψει από τα βροχομετρικά δεδομένα αυτής της εργασίας, για μεγάλες διάρκειες βροχής) και ας δεχτούμε ότι η δομή της αυτοσυσχέτισης είναι Μαρκοβιανή. Τότε δύο ωριαία ύψη που διαχωρίζονται από ένα διάστημα μιας ώρας θα έχουν συντελεστή συσχέτισης  $0.40^2 = 0.16$ , που είναι πολύ μεγάλος για να μπορεί να αγνοηθεί. Αν δεχτούμε ότι η συσχέτιση μπορεί να αγνοηθεί όταν ο αντίστοιχος συντελεστής είναι  $\leq 0.01$ , τα εν λόγω ωριαία ύψη θα πρέπει να διαχωρίζονται από ένα χρονικό διάστημα τουλάχιστον 4 ωρών, δεδομένου ότι για 4 ώρες ο αντίστοιχος συντελεστής συσχέτισης είναι  $0.40^5 = 0.01$ . Συνεπώς για το παραπάνω παράδειγμα, αν θέλουμε να έχουμε στοχαστικά ανεξάρτητη ακολουθία επεισοδίων βροχής, θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι οι στεγνές περίοδοι με-διάρκεια μικρότερη από 4 ώρες εμπεριέχονται μέσα στα επεισόδια βροχής, και δεν διαχωρίζουν διαφορετικά επεισόδια.

Το τρίτο μειονέκτημα του παραπάνω ορισμού είναι ότι έχει ως συνέπεια μια ανακολουθία στη συνάρτηση κατανομής της έντασης βροχής (σε στιγμιαία ή ωριαία βάση) μέσα στο επεισόδιο. Η ένταση βροχής δεν μετριέται άμεσα αλλά υπολογίζεται από τα βροχογραφήματα (ταινίες βροχογράφων). Η ελάχιστη θετική τιμή που μπορεί να διαπιστωθεί με τα συνήθη μέσα μέτρησης είναι 0.1 mm/h, ενώ τιμές κάτω από αυτό το όριο μεταφράζονται ως μηδενικές. Επειδή η ένταση είναι συνε-

κής μεταβλητή θα θεωρήσουμε ότι η ένδειξη ( $i^* = 0.1$ ) αντιστοιχεί σε κάποιο διάστημα μεταβολής της συνεχούς μεταβλητής  $I$ , έστω το  $[0.05, 0.15)$ , και αντίστοιχα η ένδειξη ( $i^* = 0$ ) αντιστοιχεί στο διάστημα  $[0, 0.05)$ . Εξετάζοντας την εμπειρική κατανομή της  $I$  (πχ. σε μέση ωριαία βάση), με βάση κάποιο ιστορικό δείγμα όπως αυτά που χρησιμοποιούνται στην εργασία αυτή (βλ. σχήμα 2.4) διαπιστώνουμε ότι (α) η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f_I(i)$  είναι παντού φθίνουσα, με πιο έντονο ρυθμό μείωσης στις μικρότερες τιμές του  $i$ , και (β) η πιθανότητα  $p_1 = Pr(I^*=0.1) = Pr(0.05 \leq I < 0.15)$  έχει μια τιμή της τάξης του 10% - 20%. Συνεπώς περιμένουμε ότι η και πιθανότητα  $p_0 = Pr(I^*=0) = Pr(0 \leq I < 0.05)$  θα πρέπει να έχει την ίδια περίπου τάξη μεγέθους, και πάντως θα ισχύει  $p_0 > p_1/2$  (επειδή η  $f_I(i)$  είναι φθίνουσα). Ας σημειωθεί ότι στο παραπάνω συμπέρασμα καταλήξαμε χωρίς να υποθέσουμε ότι υπάρχει ασυνέχεια στην κατανομή της  $I$ , και βέβαια μια τέτοια υπόθεση θα μεγάλωνε ακόμα περισσότερο την τιμή της  $p_0$ . Μετά τον παραπάνω συλλογισμό οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η παρουσία περιόδων με μηδενική ένταση μέσα στο επεισόδιο βροχής είναι επιβεβλημένη, αφού η πιθανότητα  $p_0$  πρέπει να είναι σημαντικά διάφορη του μηδενός.

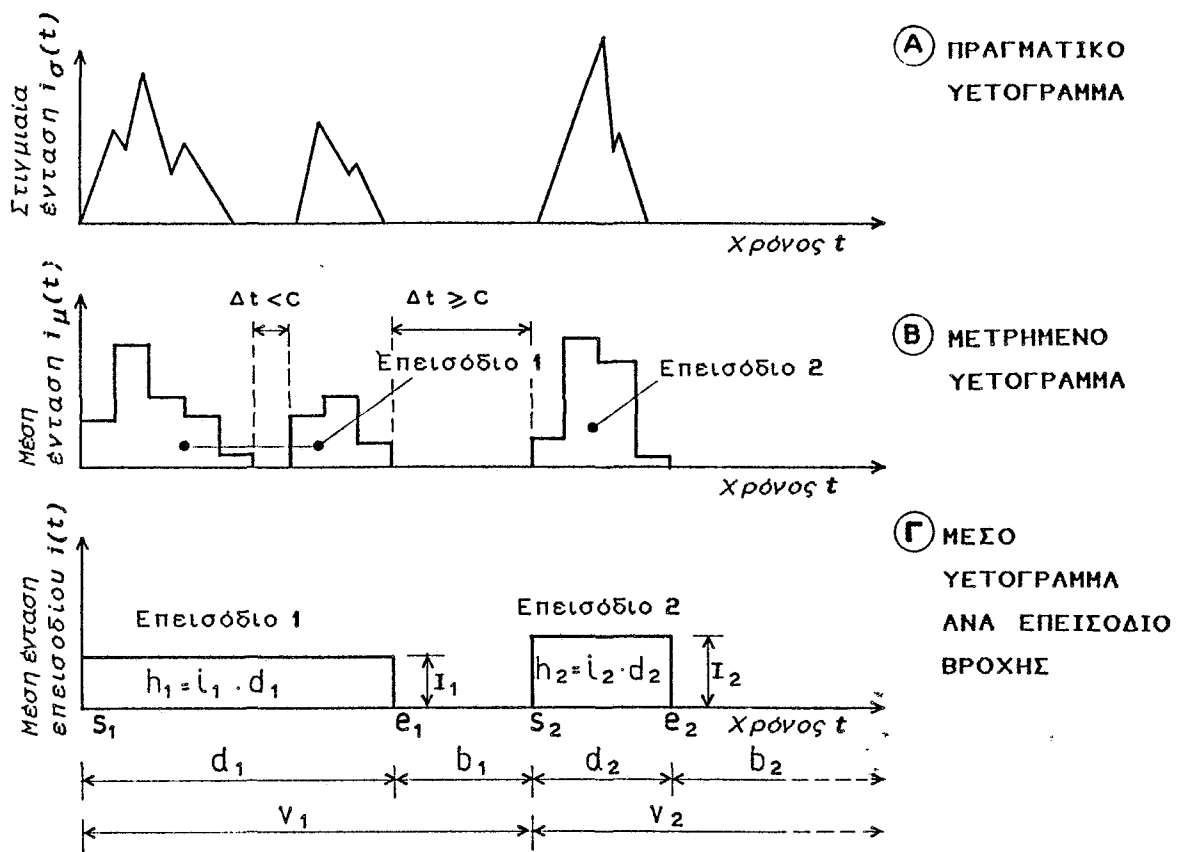
Για να αποφευχτούν τα παραπάνω προβλήματα, στην εργασία αυτή έγινε δεκτός ένας ορισμός που δεν αποκλείει την παρουσία περιόδων μηδενικής έντασης μέσα στο επεισόδιο βροχής. Όπως αναφέρθηκε στην υποπαράγραφο 2.2.4., ένας τέτοιος ορισμός δημιουργεί μια βασική δυσκολία στον προσδιορισμό των επεισοδίων βροχής, σε ένα ιστορικό δείγμα, δεδομένου ότι δεν είναι πλέον σαφές αν μια στεγνή περίοδος εντάσσεται μέσα σε ένα επεισόδιο ή διαχωρίζει δύο διαδοχικά επεισόδια. Η απλούστερη σχετική υπόθεση για τον καθορισμό των επεισοδίων είναι η υπόθεση του σταθερού χρόνου διαχωρισμού. Σύμφωνα με αυτή δύο διαδοχικές χρονικές περίοδοι μη μηδενικής βροχόπτωσης ανήκουν σε διαφορετικά επεισόδια όταν διαχωρίζονται από μια στεγνή περίοδο μεγαλύτερη ή ίση από μια κρίσιμη χρονική διάρκεια,  $c$ , που την ονομάζουμε χρόνο διαχωρισμού. Η υπόθεση αυτή έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στη βιβλιογραφία, (βλ. υποπαράγρ. 2.2.4) και έγινε αποδεκτή και στην εργασία αυτή, αν και είναι σε ένα βαθμό αυθαίρετη. Η συμβολή αυτής της εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός νέου κριτηρίου για τον καθορισμό του  $c$ , που θα περιγραφεί πιο κάτω.

Σχηματικά ο προσδιορισμός των επεισοδίων βροχής, με βάση την παραπάνω υπόθεση του σταθερού χρόνου διαχωρισμού,  $c$ , απεικονίζεται στο σχήμα 2.1. Για διευκρίνιση του σχήματος, ας σημειωθεί ότι το πραγματικό υετόγραμμα (Α) δεν μετρίεται ποτέ, δεδομένου ότι η μέτρηση που πραγματοποιείται αναφέρεται στο ύψος βροχής, και όχι στη στιγμιαία ένταση. Έτσι η ένταση μπορεί να καθοριστεί μόνο με τη μορφή μέσων τιμών, ανά καθορισμένη χρονική ισοδιάσταση (υετόγραμμα (Β)). Η ισοδιάσταση αυτή εξαρτάται από τη διαθέσιμη ευκρίνεια του αρχικού

βροχογραφήματος και από την επιθυμητή ακρίβεια, και στην εργασία αυτή έχει ληφθεί ίση με 1 ώρα.

Με τη βοήθεια του σχήματος 2.1 ορίζονται οι ακόλουθες μεταβλητές που χαρακτηρίζουν το επεισόδιο βροχής (βλ. και υποπαράγρ. 2.2.4).

1. Οι χρόνοι έναρξης,  $S_j$ , και λήξης,  $E_j$ , του επεισοδίου.
2. Οι χρονικές μεταβλητές του, ήτοι η διάρκεια του,  $D_j$ , ο χρόνος διακοπής της βροχής,  $B_j$ , που το χωρίζει από το επόμενο επεισόδιο, και ο χρόνος διαδοχής,  $V_j$ , που μεσολαβεί από την έναρξη του επεισοδίου μέχρι την έναρξη του επόμενου επεισοδίου.
3. Το ύψος βροχής,  $H_j$ , και η μέση ένταση βροχής,  $I_j$ , του επεισοδίου.



Σχήμα 2.1: Τρόπος σχηματισμού και χαρακτηριστικά των επεισοδίων βροχής.

Οι μεταβλητές αυτές ακολουθούν τις εξής προφανείς σχέσεις:

$$D_j + B_j = V_j \quad (2.6.1)$$

$$0 < D_j \leq V_j - c \quad (2.6.2)$$

$$c \leq B_j < V_j \quad (2.6.3)$$

$$V_j > c \quad (2.6.4)$$

$$H_j = I_j \cdot D_j \quad (2.6.5)$$

$$H_j > 0 \quad (2.6.6)$$

$$I_j > 0 \quad (2.6.7)$$

Εκτός από τις μεταβλητές αυτές που αναφέρονται στο συνολικό επεισόδιο, μας ενδιαφέρουν και οι επί μέρους εντάσεις των  $N_j$  χρονικών ισοδιαστάσεων του κάθε επεισοδίου  $j$ . Επειδή στην εργασία αυτή η χρονική ισοδιάσταση είναι 1 h, θα είναι  $N_j = D_j$ , (αν το  $D_j$  μετριέται σε ώρες), και οι εν λόγω εντάσεις ταυτίζονται αριθμητικά με τα ωριαία ύψη βροχής,  $X_{j,1}$  ( $1=1, \dots, N_j$ ).

#### 2.6.2. Θεωρητική βάση του κριτηρίου διαχωρισμού

Θεωρητικά μπορούν να υπάρξουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα του εντοπισμού των επεισοδίων βροχής. Η πρώτη θα μπορούσε να στηριχτεί στη μελέτη της εξέλιξης των φυσικών μηχανισμών γέννησης της βροχής, δηλαδή των μετεωρολογικών σχηματισμών. Μια τέτοια προσέγγιση όμως, όπως παρατηρούν οι *Restrepo-Posada και Eagleson* [1982], δεν θα ήταν πρακτική, και γι' αυτό δεν έχει ποτέ μελετηθεί και χρησιμοποιηθεί. Έτσι όλες οι σχετικές εργασίες εντάσσονται στη δεύτερη προσέγγιση, που είναι στατιστικού τύπου, σύμφωνα με την οποία η αναγνώριση των επεισοδίων βροχής βασίζεται μόνο στο διαθέσιμο ιστορικό δείγμα της βροχής (πχ. βροχογράφημα) χωρίς τη θεώρηση άλλων μετεωρολογικών μεταβλητών, και για το λόγο αυτό χαρακτηρίζεται ως μεθοδολογία "μαύρου κουτιού" (black box).

Όπως έχει αναφερθεί και προηγούμενα, ο πιο αποτελεσματικός ορισμός των επεισοδίων βροχής, είναι αυτός που καθιστά τα επεισόδια βροχής ανεξάρτητα μεταξύ τους, με την έννοια ότι οποιαδήποτε στοχαστική μεταβλητή, συνυφασμένη με ένα επεισόδιο βροχής, είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από κάθε στοχαστική μεταβλητή συνυφασμένη με οποιοδήποτε προηγούμενο ή επόμενο επεισόδιο. Έτσι το κριτήριο για το διαχωρισμό των επεισοδίων βροχής μπορεί κατ' αρχήν να βασιστεί στη μελέτη της στοχαστικής ανεξαρτησίας μιας μεταβλητής αναφοράς. Δυστυχώς οι μεταβλητές που χαρακτηρίζουν συνολικά ένα επεισόδιο βροχής, όπως η διάρκεια ή το συνολικό ύψος βροχής του επεισοδίου δεν είναι κατάλληλες για να χρησι-

μεύσουν ως μεταβλητές αναφοράς. Από μερικούς προκαταρκτικούς ελέγχους φάνηκε ότι οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των συνολικών υψών βροχής διαδοχικών επεισοδίων δεν είναι σημαντικοί, ακόμα και όταν δύο διαδοχικά επεισόδια παρουσιάζουν εμφανή στοχαστική εξάρτηση (πχ. αν θεωρηθεί χρόνος διαχωρισμού ίσος με 1 ώρα). Αντίθετα, με τη χρησιμοποίηση του ωριαίου ύψους βροχής ως μεταβλητής αναφοράς για τον έλεγχο της στοχαστικής εξάρτησης, θα είχαμε καλύτερα αποτελέσματα, αφού η εξάρτηση μεταξύ διαδοχικών επεισοδίων βροχής είναι σαφέστερη, και συνεπώς μπορεί να ελεγχθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια. Όμως στην τελευταία περίπτωση το κριτήριο μας θα ήταν αρκετά πολύπλοκο, αφού θα είμασταν υποχρεωμένοι να μελετήσουμε την εσωτερική δομή του επεισοδίου βροχής (ενώ αυτό που θέλουμε είναι να καθορίσουμε τά όρια του).

Μετά τα παραπάνω διαφαίνεται ότι η απλούστερη και πιο αξιόπιστη λύση για την αναγνώριση των επεισοδίων βροχής και την διατύπωση του σχετικού κριτηρίου, μπορεί να δοθεί από την θεωρία των τυχαίων σημείων στο χρόνο (βλ. υποπαράγρ. 2.3.2). Η ιδέα στην οποία στηρίζεται η λύση αυτή θεμελιώνεται στην ακόλουθη εύλογη πρόταση: *Αν ο χρόνος εμφάνισης ενός επεισοδίου βροχής, μετρούμενος από κάποια αυθαίρετη χρονική στιγμή  $t_0$ , είναι ανεξάρτητος από το τι συνέβη πριν από τη χρονική στιγμή  $t_0$ , τότε και κάθε μεταβλητή συνυφασμένη με το επεισόδιο είναι ανεξάρτητη από ότι έχει συμβεί πριν από τη χρονική στιγμή  $t_0$ , άρα και από οποιαδήποτε μεταβλητή ενός προηγούμενου επεισοδίου* (υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι το προηγούμενο επεισόδιο έχει εμφανιστεί πριν από τη στιγμή  $t_0$ ). Αλλά το πρώτο σκέλος της πρότασης σημαίνει ότι οι χρόνοι εμφάνισης των επεισοδίων σχηματίζουν μια ανέλιξη Poisson (σύμφωνα με την ιδιότητα 2 της υποπαραγράφου 2.3.2).

Στη γενική περίπτωση το να ελεγχθεί αν μια ακολουθία σημείων στο χρόνο αποτελεί ανέλιξη Poisson είναι αρκετά απλό: Αρκεί οι χρόνοι διαδοχής να είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή εκθετική συνάρτηση κατανομής. Στην περίπτωση των επεισοδίων βροχής όμως υπάρχει μια δυσκολία που οφείλεται στο γεγονός ότι τα επεισόδια έχουν πεπερασμένα (και όχι στιγμιαία) διάρκεια, ή, ισοδύναμα, στην παρουσία δύο ομάδων τυχαίων σημείων στο χρόνο, των χρόνων έναρξης ( $S_j$ ) και των χρόνων λήξης ( $E_j$ ) των επεισοδίων. Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί με δύο μεθόδους:

Πρώτη μέθοδος, βασισμένη στους χρόνους διαδοχής.

Υποθέτουμε ότι η ακολουθία των σημείων έναρξης των επεισοδίων,  $S_j$  (ή ισοδύναμα των χρόνων λήξης,  $E_j$ ) αποτελεί ανέλιξη Poisson. Ελέγχουμε την υπόθεση αυτή μέσω της ισοδύναμης υπόθεσης ότι η κατανομή του χρόνου διαδοχής,  $V$ , είναι εκθετική.

Μια βασική ιδιότητα που έχει η κατανομή του χρόνου διαδοχής σ' αυτή την περίπτωση είναι η ιδιότητα της απουσίας μνήμης του χρόνου διαδοχής, που μαθηματικά εκφράζεται με την ακόλουθη σχέση:

$$f(v_j | S_j \geq t_0) = f(v_j | V_j \geq t_0) = f(v_j - t_0) \quad (2.6.8)$$

όπου  $t_0 = \tau_0 + s_{j-1}$  είναι μια αυθαίρετη χρονική στιγμή μετά την έναρξη του επεισοδίου  $j-1$  (με  $\tau_0 \geq 0$ ), και η  $f()$  συμβολίζει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Δεύτερη μέθοδος, Βασισμένη στους χρόνους διακοπής.

Η απαίτηση της απουσίας μνήμης μπορεί να διατυπωθεί με βάση το χρόνο διακοπής της βροχής. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (2.6.8) παίρνει τη μορφή:

$$f(b_j | S_j \geq t_0^*) = f(b_j | B_j \geq t_0^*) = f(b_j - t_0^*) \quad (2.6.9)$$

όπου  $t_0^* = \tau_0^* + e_{j-1}$  μια αυθαίρετη χρονική στιγμή μετά τη λήξη του επεισοδίου  $j-1$  (με  $\tau_0^* \geq 0$ ).

Η σχέση (2.6.9) συνεπάγεται ότι η κατανομή του χρόνου διακοπής είναι εκθετική, και συνεπώς αυτό είναι που θα πρέπει να ελεγθεί, προκειμένου να θεωρηθούν τα επεισόδια βροχής ανεξάρτητα.

Η θεωρητική διαφορά των δύο μεθόδων είναι ότι στην πρώτη δεν λαμβάνεται υπ' όψη η σχετική θέση των χρόνων λήξης των επεισοδίων βροχής όταν εξετάζονται οι χρόνοι έναρξης, ενώ στη δεύτερη γίνεται ταυτόχρονη θεώρηση και των δύο ακολουθιών τυχαίων σημείων. Παρ' όλα αυτά η δεύτερη μέθοδος είναι απλούστερη στην εφαρμογή από την πρώτη. Και οι δύο μέθοδοι απαιτούν επαναληπτικούς στατιστικούς ελέγχους, για δοκιμαστικές τιμές του χρόνου διαχωρισμού,  $c$ , αλλά σε κάθε δοκιμή η χρονοσειρά των χρόνων διακοπής σχηματίζεται με απλούστερο τρόπο από την αντίστοιχη χρονοσειρά των χρόνων διαδοχής.

Η βασική εργασία των *Restepo-Posada και Eagleson* [1981] στηρίχτηκε αποκλειστικά στη δεύτερη μέθοδο. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν κατ' αρχήν και οι δύο μέθοδοι, αλλά προκρίθηκε η πρώτη μέθοδος, που δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι δύο μέθοδοι δεν είναι θεωρητικά ισοδύναμες.<sup>13</sup> Στο τέλος της υποπαραγράφου εξετάζεται αναλυτικά το θέμα αυτό, και από την ανάλυση προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

-----  
13. Οι *Restepo-Posada και Eagleson* [1981] αφήνουν να εννοηθεί ότι η δεύτερη μέθοδος, που τελικά χρησιμοποιούν, είναι συνέπεια της πρώτης, αλλά αυτό δεν είναι ακριβές.



1. Αν οι χρόνοι διαδοχής  $V_j$  κατανέμονται εκθετικά, με παράμετρο  $\omega$ , και οι μεταβλητές "διάρκεια βροχής,  $D_j$ " και "χρόνος διακοπής,  $B_j$ " έχουν συνεχείς περιθώριες συναρτήσεις κατανομής τότε οι μεταβλητές  $D_j$  και  $B_j$  είναι στοχαστικά εξαρτημένες. Επί πλέον, αν και η κατανομή των  $B_j$  είναι εκθετική με παράμετρο  $\beta > \omega$ , τότε η υπό συνθήκη συνάρτηση κατανομής  $F_{D|B}(d_j, b_j)$  παρουσιάζει ασυνέχεια, η οποία για  $b_j=0$  εμφανίζεται στη θέση  $d_j=0$  και έχει μέγεθος  $p = \omega/\beta$ .
2. Αν οι μεταβλητές  $D_j$  και  $B_j$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες και οι μεταβλητές  $V_j$  και  $B_j$  κατανέμονται εκθετικά, με παράμετρους  $\omega$  και  $\beta$ , αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής  $D_j$  παρουσιάζει ασυνέχεια στο σημείο ( $d_j=0$ ) με μέγεθος  $p = \omega/\beta$ .

Δεδομένου ότι στην πράξη ισχύει  $E[V_j] \approx E[B_j]$ , θα είναι  $\beta \approx \omega$  και συνεπώς η ασυνέχεια θα έχει μέγεθος  $p \approx 1$ . Αυτό σημαίνει είτε ότι οι μεταβλητές  $D_j$  και  $B_j$  είναι πολύ έντονα στοχαστικά εξαρτημένες (στην παραπάνω περίπτωση 1), είτε ότι η μεταβλητή  $D_j$  πρακτικά παίρνει μόνο μηδενικές τιμές, αφού  $Pr(D_j=0) \approx 1$  (στην περίπτωση 2).<sup>14</sup> Αφού καμιά από τις δύο εκδοχές δεν είναι σωστή, συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν οι μεταβλητές  $V$  και  $B$  να ακολουθούν ταυτόχρονα εκθετικές κατανομές, άρα οι δύο παραπάνω μέθοδοι δεν είναι ισοδύναμες (βλ. και *Waymire και Gupta [1981a]*).

Ένα άλλο θεωρητικό πρόβλημα που ανακύπτει είναι το γεγονός ότι οι μεταβλητές  $B_j$  και  $V_j$  είναι κάτω φραγμένες από το χρόνο διαχωρισμού  $c$ , (σχέσεις (2.6.3) και (2.6.4)), ενώ η ανέλιξη Poisson δεν προβλέπει τέτοια περίπτωση. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί με τις θεωρήσεις που γίνονται παρακάτω.

Όταν χρησιμοποιείται η πρώτη μέθοδος, η βασισμένη στους χρόνους διαδοχής, τότε μπορούμε να αντιστοικίσουμε την εμφάνιση των επεισοδίων βροχής με μια ιδεατή ανέλιξη Poisson, με τον ακόλουθο τρόπο:

- α. Η ακολουθία των χρόνων έναρξης των επεισοδίων βροχής,  $(S_j, j=1, 2, \dots)$ , αντιπροσωπεύεται από μια ιδεατή ανέλιξη Poisson,  $(\Sigma_k, k=1, 2, \dots)$ .
- β. Ένα σημείο  $\Sigma_k$  θεωρείται ότι αντιστοιχεί στη γέννηση ενός επεισοδίου βροχής, μόνο όταν η απόσταση του από το

14. Βέβαια ισχύει  $E[D_j] \ll E[B_j]$ , αλλά οι τιμές της  $D$  δεν μπορούν να θεωρηθούν μηδενικές (κατά προσέγγιση), δεδομένου ότι ορισμένες από τις τιμές  $d_j$  είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές  $b_j$ .

προηγούμενο σημείο,  $\Sigma_{k-1}$ , είναι μεγαλύτερη από  $c$ .

Με αυτές τις προϋποθέσεις έχει αποδειχτεί στο τέλος της υποπαραγράφου, ότι η κατανομή των χρόνων διαδοχής είναι φραγμένη εκθετική, ήτοι:

$$f_V(v) = \omega e^{-\omega(v-c)} \quad , \quad F_V(v) = 1 - e^{-\omega(v-c)} \quad (2.6.10)$$

Όταν χρησιμοποιείται η δεύτερη μέθοδος, η αντιμετώπιση του προβλήματος είναι απλούστερη. Θεωρούμε (προσφωρινά) ότι το  $j$  επεισόδιο βροχής τερματίζεται τη χρονική στιγμή  $E'_j = E_j + c$  (ας σημειωθεί ότι δεν μπορεί να ξεκινήσει το επόμενο επεισόδιο βροχής,  $j+1$ , πριν από τη στιγμή  $E'_j$ ), και έστω  $B'_j = S_{j+1} - E'_j$ . Αν τώρα αναδιατυπώσουμε τη συλλογιστική της σχέσης (2.6.9), με σημεία τερματισμού των επεισοδίων τα  $E'_j$ , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η κατανομή του  $B'$  είναι εκθετική, δηλαδή:

$$f_{B'}(b') = \beta e^{-\beta b'}$$

Αν επανέλθουμε στην κανονική μεταβλητή  $B$ , και χρησιμοποιήσουμε την προφανή σχέση  $B = B' + c$ , από την παραπάνω παίρνουμε:

$$f_B(b) = \beta e^{-\beta(b-c)} \quad , \quad F_B(b) = 1 - e^{-\beta(b-c)} \quad (2.6.11)$$

Συνεπώς και στη δεύτερη μέθοδο η προς έλεγχο συνάρτηση κατανομής είναι φραγμένη εκθετική.

Πάντως θα πρέπει να σημειωθεί ότι, ανεξάρτητα από το ποια από τις δύο μεθόδους θα ακολουθήσουμε, δεν θα πρέπει να περιμένουμε ότι η ανέλιξη Poisson συμφωνεί πλήρως με τα πραγματικά δεδομένα, αλλά ότι αποτελεί μια ικανοποιητική προσεγγιστική περιγραφή τους. Σύμφωνα με τους Cox και Lewis (βλ. *Restepo-Posada και Eagleson [1982]*) "*κανένα πραγματικό φαινόμενο δεν μπορεί να αναμένεται ότι βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με την ανέλιξη Poisson*".

Μελέτη των ιδιοτήτων μιας μεταβλητής με εκθετική κατανομή που αποτελείται από δύο συνιστώσες  
 Έστω οι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές  $X$ ,  $Y$ , και  $Z$  που ικανοποιούν τη σχέση

$$X + Y = Z \quad (a)$$

Υποθέτουμε ότι η  $Z$  ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\omega$ , δηλαδή:

$$f_Z(z) = \omega e^{-\omega z} \quad , \quad z \geq 0 \quad (b)$$

Θα μελετήσουμε ορισμένες ιδιότητες της κατανομής των συνιστωσών  $X$  και  $Y$ .

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Z$  μπορεί να εκφραστεί με βάση την αμοιβαία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των  $X$  και  $Y$ , δηλαδή την  $f_{X,Y}(x,y)$ , σύμφωνα με τη σχέση:

$$f_Z(z) = \int_0^z f_{X,Y}(x, z-x) dx$$

και αν  $f_{Y|X}(x,y)$  είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Y$  για  $X=x$ , τότε

$$f_Z(z) = \int_0^z f_X(x) f_{Y|X}(x, z-x) dx \quad (\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι αν οι συναρτήσεις κατανομής  $F_X(x)$  και  $F_{Y|X}(x,y)$  είναι συνεχείς τότε το ολοκλήρωμα του β' μέλους της (γ) θα είναι μηδέν όταν  $z=0$ . Αλλά ισχύει  $f_Z(0) > 0$  και συνεπώς τουλάχιστον μια από τις παραπάνω συναρτήσεις κατανομής είναι ασυνεχής.

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που (μόνο) η  $F_X(x)$  είναι ασυνεχής στο σημείο  $x=0$ . Τότε θα ισχύει:

$$f_X(x) = p\delta(x) + f^*_X(x) \quad (\delta)$$

όπου  $\delta(x)$  η συνάρτηση δέλτα,  $p$  το μέτρο της ασυνέχειας (με  $0 < p \leq 1$ ), και η  $f^*_X(x)$  είναι συνεχής στο σημείο  $x=0$ .

Αντικαθιστώντας τη (δ) στη (γ) έχουμε

$$f_Z(z) = \int_0^z p \delta(x) f_{Y|X}(x, z-x) dx + \int_0^z f^*_X(x) f_{Y|X}(x, z-x) dx$$

και κατά συνέπεια (εφαρμόζοντας τη βασική ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα)

$$f_Z(z) = p f_{Y|X}(0,z) + \int_0^z f^*_X(x) f_{Y|X}(x, z-x) dx \quad (\epsilon)$$

Για  $z=0$  το ολοκλήρωμα του β' μέλους της (ε) είναι ίσο με μηδέν. Στην περίπτωση αυτή λύνοντας ως προς  $p$  παίρνουμε:

$$p = \frac{f_Z(0)}{f_{Y|X}(0,0)} \quad (\zeta)$$

Αν οι μεταβλητές  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες τότε  $f_{Y|X}(0,0) = f_Y(0)$ . Επί πλέον αν η κατανομή της  $Y$  είναι εκθετική με παράμετρο  $\beta$ , τότε από τη (ζ) παίρνουμε:

$$p = \theta/\beta \quad (\eta)$$

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που (μόνο) η  $F_{Y|X}(x,y)$  είναι ασυνεχής. Η ασυνέχεια στη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της  $Y$  μπορεί να προέλθει είτε από ασυνέχεια στην περιθώρια συνάρτηση κατανομής της  $Y$ , είτε από στοχαστική εξάρτηση των  $X$  και  $Y$ . Στην πρώτη περίπτωση η ασυνέχεια εμφανίζεται στα σημεία της ευθείας  $\{y=0\}$ . Η περίπτωση αυτή μπορεί να εξεταστεί με ανάλογο τρόπο, όπως η περίπτωση της ασυνέχειας της κατανομής της  $X$ . Εδώ θα μας απασχολήσει μόνο η δεύτερη περίπτωση, κατά την οποία η κατανομή της  $Y$  είναι συνεχής, και συνεπώς η ασυνέχεια αποκλείεται να εμφανίζεται στην ευθεία  $\{y=0\}$  (δεδομένου ότι η ασυνέχεια της  $F_{Y|X}$  για  $y=0$  συνεπάγεται ασυνέχεια και της περιθώριας  $F_Y$  στο σημείο  $\{y=0\}$ ). Έστω ότι η ασυνέχεια εμφανίζεται πάνω στα σημεία της τυκούσας καμπύλης  $y=g(x)$ . Στην απλούστερη περίπτωση θεωρούμε ότι υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης  $y=g(x)$  ως προς  $x$  (για μη αρνητικά  $x$  και  $y$ ), που είναι η  $x=g^{-1}(y)$  (η περίπτωση περισσοτέρων λύσεων μπορεί να αντιμετωπιστεί με προσθήκη αντίστοιχων όρων δέλτα στην παρακάτω σχέση). Τότε θα ισχύει:

$$f_{Y|X}(x,y) = q(x) \delta(x-g^{-1}(y)) + f^*_{Y|X}(x,y) \quad (\theta)$$

όπου  $q(x)$  το μέτρο της ασυνέχειας που για λόγους γενικότητας θα θεωρηθεί ότι μεταβάλλεται συνάρτησε του  $x$ , (με  $0 < q(x) \leq 1$ ), και η  $f^*_{Y|X}(x,y)$  είναι παντού συνεχής.

Αντικαθιστώντας τη (θ) στη (γ) έχουμε

$$f_Z(z) = \int_0^z q(x) \delta(x-g^{-1}(z-x)) f_X(x) dx + \int_0^z f_X(x) f_{Y|X}^x(x, z-x) dx$$

Έστω  $x=g_1(z)$  είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης  $x-g^{-1}(z-x) = 0$ . Τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$f_Z(z) = \int_0^z q(x) \delta(x-g_1(z)) f_X(x) dx + \int_0^z f_X(x) f_{Y|X}^x(x, z-x) dx$$

Επειδή η ασυνέχεια πρέπει υποχρεωτικά να βρίσκεται μέσα στο διάστημα  $[0, z]$ , θα είναι

$$0 \leq g_1(z) \leq z \tag{ι}$$

και κατά συνέπεια

$$f_Z(z) = q(g_1(z)) f_X(g_1(z)) + \int_0^z f_X(x) f_{Y|X}^x(x, z-x) dx \tag{κ}$$

Για  $z=0$  το ολοκλήρωμα του β' μέλους της (κ) είναι ίσο με μηδέν. Στην περίπτωση αυτή λύνοντας ως προς  $q$  παίρνουμε:

$$q(g_1(0)) = \frac{f_Z(0)}{f_X(g_1(0))}$$

Αλλά από την (ι) προκύπτει ότι  $g_1(0) = 0$ , και επομένως η παραπάνω γράφεται:

$$q(0) = \frac{f_Z(0)}{f_X(0)} \tag{λ}$$

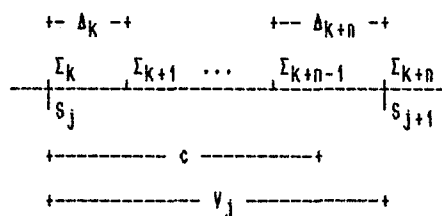
όπου το  $q(0)$  είναι το μέγεθος της ασυνέχειας της δεσμευμένης συνάρτησης κατανομής  $F_{Y|X}(x,y)$  για  $x=0$ . Τώρα, αν η κατανομή της  $X$  είναι εκθετική με παράμετρο  $\beta$ , από την (λ) προκύπτει ότι:

$$q(0) = \omega/\beta \tag{μ}$$

Απόδειξη της σχέσης (2.6.10)

Έστω ότι τα τυχαία σημεία στο χρόνο  $\{\Sigma_k, k=1,2,\dots\}$  αποτελούν ανέλιξη Poisson με ένταση  $\omega$ . Σχηματίζουμε την ακολουθία σημείων  $S_j$ , με τον ακόλουθο τρόπο:

- α)  $S_1 = \Sigma_1$
- β) Αν  $S_j = \Sigma_k$  τότε  $S_j = \Sigma_{k+n}$ , όπου  $n = \min \{i, i=1,2,\dots, (S_{k+i}-S_k > c)\}$



Σκαρίφημα για την επεξήγηση του ορισμού της ανέλιξης  $S_j$ .

Έστω  $V_j$  και  $\Delta_k$  οι χρόνοι διαδοχής των ανέλιξεων  $(S_j)$  και  $(\Sigma_k)$ , αντίστοιχα, δηλαδή

$$V_j = S_{j+1} - S_j$$

$$\Delta_k = \Sigma_{k+1} - \Sigma_k$$

Από τον ορισμό της ανέλιξης  $S_j$  προκύπτει ότι  $V_j > c$ .

Η συνάρτηση κατανομής της  $\Delta_k$  είναι εκθετική με παράμετρο  $\theta$ . Θα προσδιορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής της  $V_j$ . Παραλείποντας το δείκτη  $j$ , θα έχουμε:

$$F_V(v) = \Pr(V \leq v) = \Pr(\Delta_k \leq v, \Delta_k > c) + \Pr(\Delta_k + \Delta_{k+1} \leq v, \Delta_k \leq c, \Delta_k + \Delta_{k+1} > c) \\ + \Pr(\Delta_k + \Delta_{k+1} + \Delta_{k+2} \leq v, \Delta_k + \Delta_{k+1} \leq c, \Delta_k + \Delta_{k+1} + \Delta_{k+2} > c) + \dots$$

Με την εισαγωγή των συμβολισμών:

$$Z_i = \Delta_k + \Delta_{k+1} + \dots + \Delta_{k+i} \quad (\nu)$$

$$p_i = \Pr(c < Z_i \leq v, Z_{i-1} \leq c) = \Pr(c < \Delta_k + \Delta_{k+1} + \dots + \Delta_{k+i} \leq v, \Delta_k + \Delta_{k+1} + \dots + \Delta_{k+i-1} \leq c) \quad (\xi)$$

η παραπάνω γράφεται:

$$F_V(v) = \Pr(c < \Delta_k \leq v) + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \quad (\theta)$$

Ο πρώτος όρος του β' μέλους της (θ) υπολογίζεται άμεσα:

$$\Pr(c < \Delta_k \leq v) = F_{\Delta}(v) - F_{\Delta}(c) = e^{-\theta c} - e^{-\theta v} \quad (\pi)$$

Για τον υπολογισμό του  $p_i$  απαιτείται να προσδιοριστεί η αμοιβαία συνάρτηση κατανομής των  $Z_i$  και  $Z_{i-1}$ . Ο προσδιορισμός της μπορεί να βασιστεί στο γεγονός ότι η  $Z_i$  είναι άθροισμα δύο στοχαστικά ανεξάρτητων μεταβλητών, των  $Z_{i-1}$  και  $\Delta_{k+i}$ . Συνεπώς

$$f_{Z_{i-1}, Z_i}(z_{i-1}, z_i) = f_{Z_{i-1}, \Delta_{k+i}}(z_{i-1}, z_i - z_{i-1}) = f_{Z_{i-1}}(z_{i-1}) \cdot f_{\Delta_{k+i}}(z_i - z_{i-1}) \quad (\rho)$$

Λόγω της (ν) και της κοινής εκθετικής κατανομής των  $\Delta_k$ , η κατανομή της  $Z_{i-1}$  θα είναι γάμα, με παραμέτρους  $\theta$  και  $i$ , δηλαδή:

$$f_{Z_{i-1}}(z_{i-1}) = \theta^i z_{i-1}^{i-1} e^{-\theta z_{i-1}} / (i-1)!$$

Εξ άλλου

$$f_{\Delta_{k+i}}(z_i - z_{i-1}) = \theta e^{-\theta(z_i - z_{i-1})}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες στην (ρ) παίρνουμε

$$f_{Z_{i-1}, Z_i}(z_{i-1}, z_i) = \theta^{i+1} z_{i-1}^{i-1} e^{-\theta z_i} / (i-1)! \quad (\sigma)$$

Από τον ορισμό του  $p_i$  προκύπτει

$$p_i = \int_{z_i=c}^v \int_{z_{i-1}=0}^c f_{Z_{i-1}, Z_i}(z_{i-1}, z_i) dz_i dz_{i-1}$$

Αντικαθιστώντας την (σ) στην παραπάνω παίρνουμε

$$p_i = \frac{\theta^{i+1}}{(i-1)!} \int_c^v e^{-\theta z_i} dz_i \int_0^c z_{i-1}^{i-1} dz_{i-1}$$

Μετά από πράξεις η παραπάνω δίνει

$$p_i = \frac{\theta^i c^i}{i!} (e^{-\theta c} - e^{-\theta v}) \quad (\tau)$$

Αντικαθιστώντας την (τ) και (π) στην (ο) παίρνουμε

$$F_Y(v) = (e^{-\theta c} - e^{-\theta v}) + (e^{-\theta c} - e^{-\theta v}) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\theta c)^i}{i!} = (e^{-\theta c} - e^{-\theta v}) (1 + e^{-\theta c} - 1)$$

και τελικά

$$F_Y(v) = 1 - e^{-\theta(v-c)} \quad (\upsilon)$$

και

$$f_Y(v) = \theta e^{-\theta(v-c)} \quad (\phi)$$

### 2.6.3. Έλεγχος της προσαρμογής της ανέλιξης Poisson

Ο έλεγχος της προσαρμογής της ανέλιξης Poisson στα εμπειρικά δεδομένα προϋποθέτει ότι τα δεδομένα προέρχονται από ενιαίο πληθυσμό. Στην εργασία αυτή θεωρήθηκε ότι η χρησιμοποίηση δεδομένων από ένα συγκεκριμένο ημερολογιακό μήνα εξασφαλίζει την ομογένεια του δείγματος που σχηματίζεται. Αυτό σημαίνει, βέβαια, ότι για κάθε μήνα θα πρέπει να υπολογίζεται άλλη τιμή του χρόνου διαχωρισμού,  $c$ . Σε άλλες εργασίες (πχ. *Restepo-Posada και Eagleson [1982]*) ο χρόνος διαχωρισμού θεωρείται ενιαίος για όλο το έτος, και για τους σχετικούς ελέγχους λαμβάνονται ταυτόχρονα τα δεδομένα όλων των μηνών. Στην παρούσα όμως εργασία, από ορισμένους προκαταρκτικούς ελέγχους διαπιστώθηκε ότι, αν ο χρόνος διαχωρισμού υπολογιστεί χωριστά για κάθε μήνα, τότε οι τιμές του εμφανίζουν σημαντικές διαφορές κατά τη διάρκεια του έτους, και είναι μεγαλύτερες αυτές των θερινών μηνών, και μικρότερες των χειμερινών. Πιθανόν να είναι δυνατή μια ομαδοποίηση των τιμών, σε εποχιακή βάση.

Οι κρονοσειρές των μεταβλητών  $V$  και  $B$  μπορεί να προκύψουν από ένα ιστορικό δείγμα μόνο όταν είναι γνωστή η τιμή του χρόνου διαχωρισμού. Για το λόγο αυτό η διαδικασία καθορισμού του  $c$  είναι αναγκαστικά επαναληπτική. Ο σχετικός αλγόριθμος περιλαμβάνει: (1) υπόθεση μιας δοκιμαστικής τιμής του  $c$ , (2) σχηματισμό του δείγματος της μεταβλητής  $V$  ή  $B$  (ανάλογα με το ποιά μέθοδος ακολουθείται), και (3) έλεγχο της προσαρμογής της εκθετικής κατανομής στο δείγμα. Ο έλεγχος της στοχαστικής ανεξαρτησίας μεταξύ των διαδοχικών τιμών του δείγματος

μπορεί να παραλειφθεί, μια που αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως δεδομένη για οποιαδήποτε τιμή του  $c$  (όπως έδειξαν ορισμένοι προκαταρκτικοί έλεγχοι).

Στο σχήμα 2.2 απεικονίζεται η μεταβολή της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής της μεταβλητής  $V$ , συναρτήσει της μεταβολής του χρόνου διαχωρισμού, σε σύγκριση και με τη φραγμένη εκθετική κατανομή. Εκεί μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για μικρές τιμές του  $c$  υπάρχει μεγάλη απόκλιση της εμπειρικής από την εκθετική κατανομή, ενώ για μεγαλύτερες τιμές αυτές συγκλίνουν. Τέλος, για πολύ υψηλές τιμές του  $c$ , παρατηρείται και πάλι αύξουσα απόκλιση της εμπειρικής από την εκθετική κατανομή. Το γεγονός αυτό εξασφαλίζει την επιτυχία της επιχειρούμενης μεθόδου καθορισμού του  $c$ , με βάση το θεωρητικό σχήμα που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη υποπαράγραφο. Παρόμοια συμβαίνουν και με την εμπειρική κατανομή της μεταβλητής  $B$ , αλλά εδώ η σύγκλιση προς την εκθετική κατανομή παρατηρείται για υψηλότερες τιμές του χρόνου διαχωρισμού.

Η προσφορότερη μέθοδος ελέγχου της προσαρμογής της εμπειρικής κατανομής της  $V$  ή της  $B$  προς την εκθετική κατανομή, διαπιστώθηκε ότι είναι η μέθοδος Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ. Η σχετική παράμετρος  $\Delta$  είναι πολύ καλό μέτρο της προσαρμογής, και τα αποτελέσματα των σχετικών υπολογισμών έδειξαν να υπάρχει καλή αντιστοιχία της μεταβολής της με την εμφανιζόμενη μεταβολή της προσαρμογής της εμπειρικής κατανομής προς την εκθετική. Αυτό δεν συμβαίνει με την παράμετρο  $\chi^2$ , του αντίστοιχου ελέγχου, που επίσης δοκιμάστηκε σε προκαταρκτικό επίπεδο.

Η παράμετρος  $\Delta$  των Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ ορίζεται από τη σχέση

$$\Delta = \max \{ |F_N(x_i) - F(x_i)|, i=1, \dots, N \} \quad (2.6.12)$$

όπου  $F(x)$  είναι η θεωρητική συνάρτηση κατανομής (στην προκειμένη περίπτωση η (2.6.10) ή η (2.6.11)),  $N$  το μέγεθος του δείγματος, και  $F_N(x)$  η εμπειρική συνάρτηση κατανομής που ορίζεται από τη σχέση

$$F_N(x) = k(x)/N$$

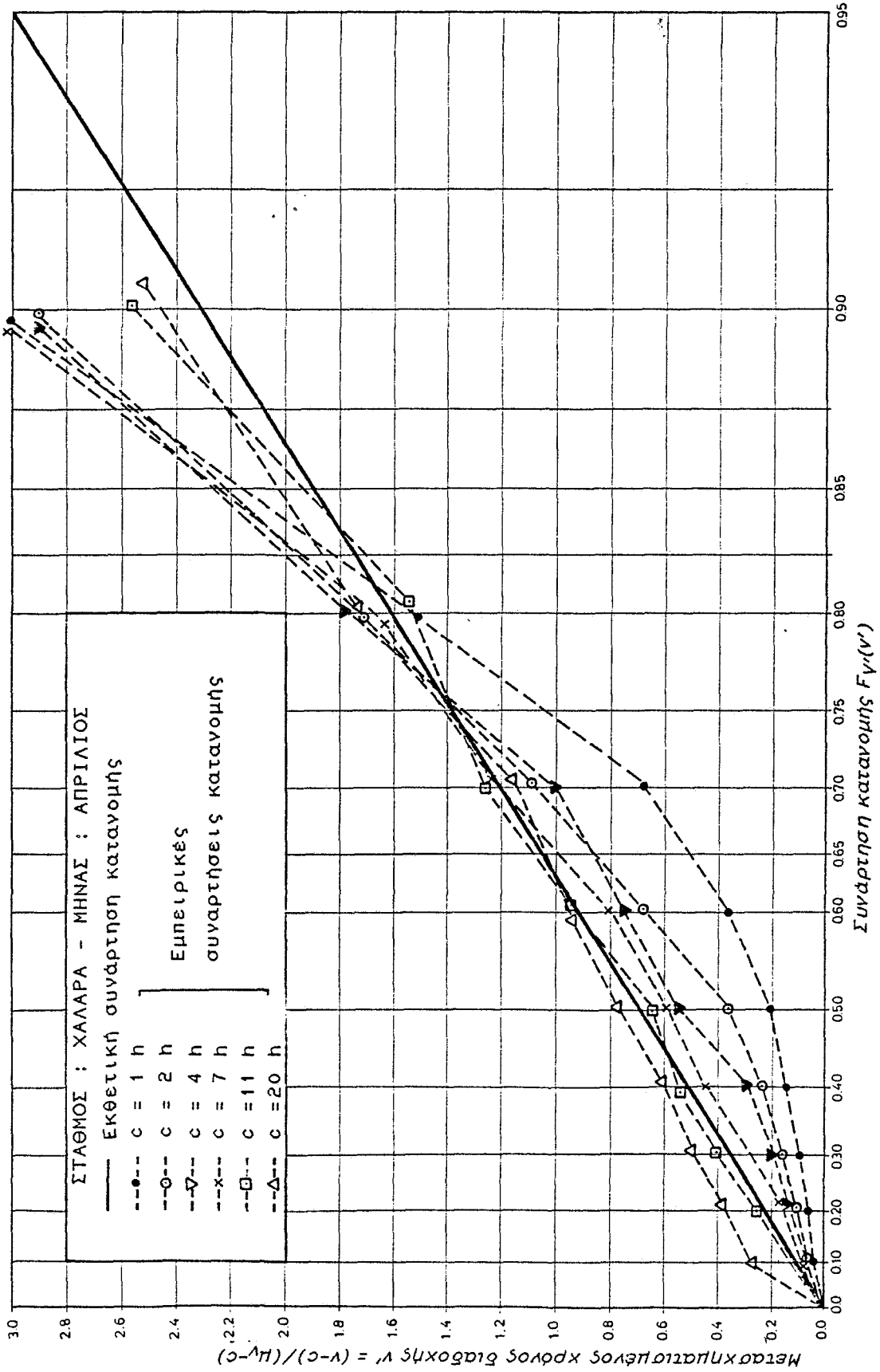
όπου  $k(x)$  είναι ο αριθμός των στοιχείων στο δείγμα που είναι μικρότερα ή ίσα με την τιμή  $x$ .

Με δεδομένη την τιμή της παραμέτρου  $\Delta$ , μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του επιπέδου σημαντικότητας  $\alpha$ , για την αποδοχή της κατανομής  $F(x)$  (μηδενική υπόθεση). Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει από την ακόλουθη σχέση που ισχύει για μεγάλες τιμές του  $N$  ( $> 35$ ) (βλ. *Kottegoda* [1980]):

$$\alpha = 1 - L(z) = 1 - \frac{(2\pi)^{1/2}}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{8z^2} \right] \quad (2.6.13)$$

όπου

$$z = N^{1/2} \Delta$$



Σχήμα 2.2 : Μεταβολή της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής του χρόνου διαδοχής,  $v$ , συναρτ. του χρόνου διαχωρισμού,  $c$ .



Αν  $N \leq 35$  τότε το  $\alpha$  δίνεται από στατιστικούς πίνακες. Στο παράρτημα Α.6 (σελ. Α.6.10) δίνεται το υποπρόγραμμα για τον υπολογισμό του  $\alpha$ , ανεξάρτητα από την τιμή του  $N$ , που έχει συνταχθεί σε γλώσσα Pascal.

Το γεγονός ότι η αυστηρή διατύπωση του ελέγχου Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ προϋποθέτει την πλήρη ανεξαρτησία της θεωρητικής συνάρτησης κατανομής από το ελεγχόμενο δείγμα, και κατά συνέπεια προϋποθέτει ότι οι παράμετροι της κατανομής δεν υπολογίζονται από το δείγμα, δεν είναι σοβαρό μειονέκτημα για την περίπτωση που εξετάζουμε,<sup>15</sup> γιατί (1) τα δείγματα έχουν πολύ μεγάλο πλήθος στοιχείων, (2) η εκθετική κατανομή έχει μόνο μία παράμετρο, και (3) το επίπεδο εμπιστοσύνης που τελικά χρησιμοποιείται είναι αρκετά μεγαλύτερο από τη συνήθη τιμή του 5%. Επιπλέον, στην περίπτωση της μεθόδου που στηρίζεται στους χρόνους διαδοχής, η παράμετρος  $\omega$  δεν είναι απαραίτητο να υπολογίζεται άμεσα από τη μέση τιμή του δείγματος, με τη σχέση

$$\omega = (\hat{\mu}_Y - c)^{-1} \quad (2.6.14)$$

αλλά μπορεί να υπολογιστεί με έμμεσο τρόπο, από τη σχέση

$$\omega = \left( \frac{\tau_{\mu} \nu}{N} - c \right)^{-1} \quad (2.6.15)$$

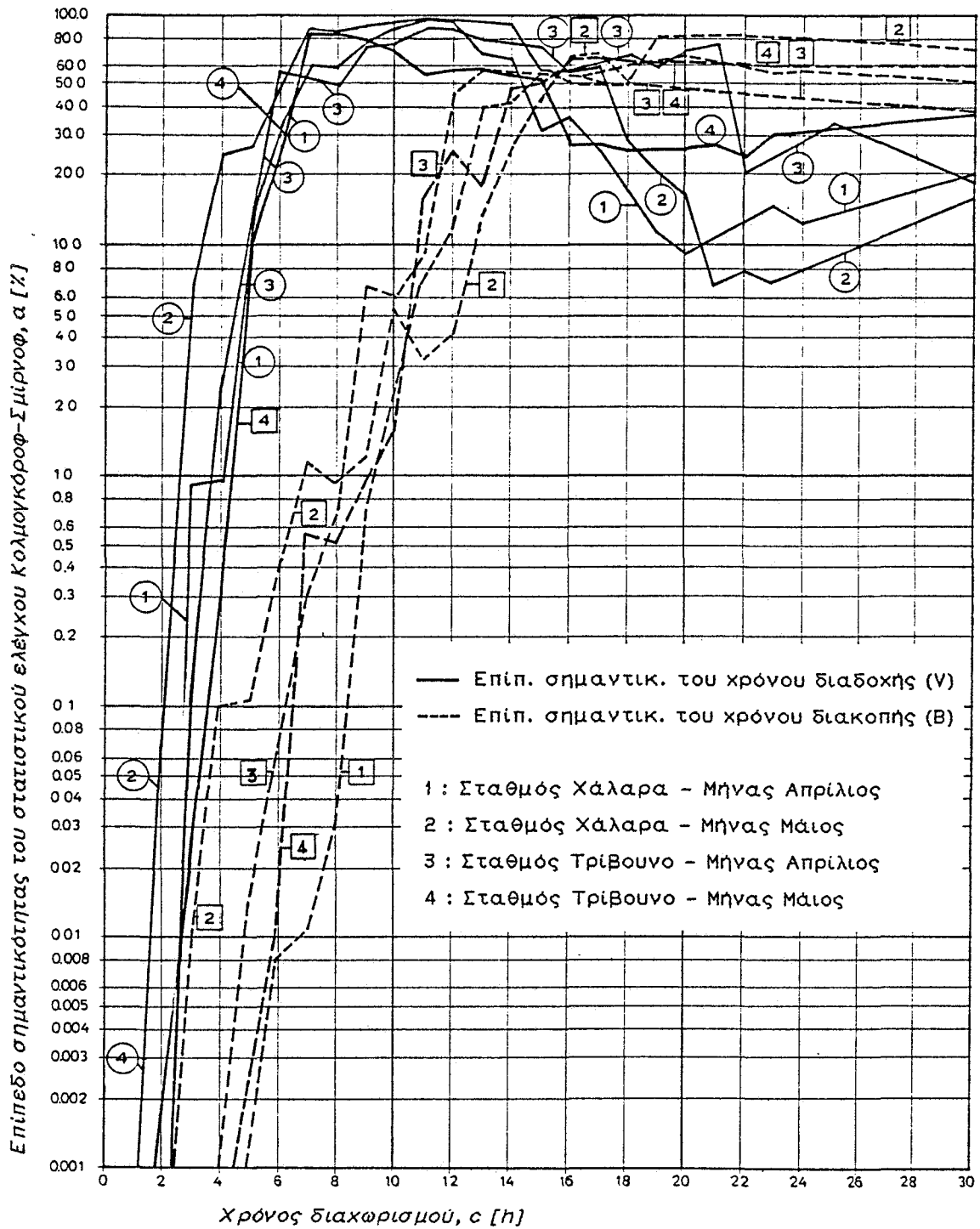
όπου  $N$  είναι το μέγεθος του δείγματος,  $\nu$  είναι το πλήθος των ετών τα οποία καλύπτει το δείγμα, και  $\tau_{\mu}$  είναι η ετήσια διάρκεια της περιόδου στην οποία αναφέρονται τα δεδομένα που εξετάζονται (στην προκειμένη περίπτωση 1 μήνας, εκφρασμένος σε ώρες).<sup>16</sup>

#### 2.6.4. Διερεύνηση των αποτελεσμάτων του ελέγχου Κολμογκόροφ Σμίρνοφ

Τα αποτελέσματα δοκιμαστικών εφαρμογών του ελέγχου Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ με βάση τα βροχομετρικά δεδομένα της εργασίας αυτής φαίνονται παραστατικά στο σχήμα 2.3, όπου έχουν παρασταθεί οι τιμές του επιπέδου σημαντικότητας  $\alpha$ , συναρτήσει του χρόνου διαχωρισμού,  $c$ , και για τις δύο μεθόδους που συζητήθηκαν. Στις δοκιμές αυτές χρησιμοποιήθηκαν δοκιμαστικές τιμές του χρόνου διαχωρισμού από 1 μέχρι 30 ώρες. Από το εν λόγω σχήμα μπορούμε να κάνουμε μερικές βασικές διαπιστώσεις:

15. Άλλωστε στην πράξη ο έλεγχος χρησιμοποιείται χωρίς τέτοιες επιφυλάξεις.

16. Παρ' όλα αυτά είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται η σχέση (2.6.14), όταν υπάρχουν αρκετές σποραδικές ελλείψεις δεδομένων στο υπό εξέταση δείγμα. Έτσι η σχέση αυτή χρησιμοποιήθηκε σε μια περίπτωση (σταθμός Τρίβουνο - μήνας Μάιος).



**Σχήμα 2.3 :** Μεταβολή της προσαρμογής της κατανομής του χρόνου διαδοχής και του χρόνου διακοπής προς την εκθετική κατανομή, συναρτήσει της δοκιμαστικής τιμής του χρόνου διαχωρισμού.

Χρησιμοποιείται ως κριτήριο η τιμή του επιπέδου σημαντικότητας του στατιστικού ελέγχου Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ.

1. Παρατηρώντας τις καμπύλες που αντιστοιχούν στα αποτελέσματα της μεθόδου που βασίζεται στους χρόνους διαδοχής, διακρίνουμε σ' αυτές τρία τμήματα: Στο πρώτο τμήμα που αντιστοιχεί σε χρόνο διαχωρισμού από 1 μέχρι 5-7 ώρες παρατηρείται μια απότομη αύξηση του επιπέδου εμπιστοσύνης  $\alpha$ , που ξεκινά από τιμή μικρότερη του 0.001%, και φτάνει περίπου στο 50%. Στο δεύτερο τμήμα, που αντιστοιχεί σε τιμές του  $c$  από 5-7 μέχρι 7-12 ώρες, παρατηρείται μια βαθμιαία αύξηση του  $\alpha$  σε τιμές μέχρι 98%. Στο τρίτο τμήμα που ακολουθεί, παρατηρείται μια βαθμιαία μείωση του  $\alpha$ , το οποίο όμως διατηρείται σε επίπεδα άνω του 10%.
2. Οι καμπύλες που αντιστοιχούν στα αποτελέσματα της μεθόδου των χρόνων διακοπής παρουσιάζουν μια εικόνα παρόμοια με την προηγούμενη. Η διαφορά εδώ είναι ότι το τρίτο τμήμα διατηρείται σε μια περίπου σταθερή τιμή του  $\alpha$ . Η μέγιστη τιμή του  $\alpha$  φθάνει το 80%.
3. Συγκρίνοντας τις δύο ομάδες καμπυλών διαπιστώνουμε ότι οι χρόνοι διαδοχής δείχνουν μια καλύτερη προσαρμογή προς την εκθετική κατανομή, από ότι οι χρόνοι διακοπής, και ότι η εικόνα της μεταβολής της προσαρμογής συναρτήσει του  $c$ , είναι σαφέστερη στην πρώτη περίπτωση. Επί πλέον για να φτάσουμε μια συγκεκριμένη τιμή του επιπέδου σημαντικότητας στην περίπτωση των χρόνων διακοπής χρειάζεται περίπου διπλάσια τιμή του  $c$ , από ότι χρειάζεται για την μέθοδο των χρόνων διαδοχής. Αυτό πρέπει να θεωρηθεί ως πλεονέκτημα της μεθόδου των χρόνων διαδοχής, δεδομένου ότι, η παρουσία πολύ μεγάλων διαστημάτων με μηδενική ένταση βροχής μέσα στο επεισόδιο, δυσχεραίνει τη μελέτη της εσωτερικής δομής του επεισοδίου βροχής.

Μετά τα παραπάνω προκρίνεται η μέθοδος που στηρίζεται στους χρόνους διαδοχής. Το πρόβλημα τώρα είναι να καταλήξουμε σε μια συγκεκριμένη διαδικασία καθορισμού μιας μοναδικής τιμής του  $c$  (αφού υπάρχει ένα μεγάλο φάσμα τιμών του  $c$ , για τις οποίες μπορεί να γίνει δεκτή η κατανομή (2.6.10) του χρόνου διαδοχής, σε ένα συνηθισμένο επίπεδο σημαντικότητας, πχ. 5% ή 10%). Μια δυνατότητα θα ήταν να δεχτούμε την τιμή  $c_m$ , που μεγιστοποιεί το επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ . Υπάρχουν όμως δύο σοβαρά μειονεκτήματα: ο αβέβαιος προσδιορισμός της

(δεδομένου ότι οι κλίσεις των καμπυλών στην περιοχή του μέγιστου είναι πολύ μικρές), και η σχετικά μεγάλη τιμή της. Έτσι είναι προτιμότερο να θέσουμε μια αυθαίρετη αλλά σαφώς καθορισμένη τιμή του επιπέδου σημαντικότητας. Η τιμή  $\alpha = 50\%$  είναι λογική δεδομένου ότι αντιστοιχεί περίπου στο σημείο τερματισμού του πρώτου απότομου τμήματος της καμπύλης ( $c-\alpha$ ), που περιγράφηκε παραπάνω. Παράλληλα είναι αρκετά μεγάλη σε σχέση με τις συνήθως χρησιμοποιούμενες τιμές, ώστε μας εξασφαλίζει πάντα μια ικανοποιητική προσαρμογή, και δίνει τιμές του  $c$  αρκετά μικρότερες του  $c_m$ . Με την επιλογή της παραπάνω τιμής οριστικοποιείται πλέον το κριτήριο διαχωρισμού των επεισοδίων βροχής: ο χρόνος διαχωρισμού υπολογίζεται από τη σχέση

$$c = \min \{c_j, j=1, 2, \dots, \alpha_j \geq 0.5\} \quad (2.6.16)$$

όπου  $c_j = j \cdot \Delta$ ,  $\Delta = 1$  ώρα και  $\alpha_j$  το επίπεδο εμπιστοσύνης του ελέγχου Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ, που αντιστοιχεί στη δοκιμαστική τιμή του χρόνου διαχωρισμού  $c_j$ . Ο προσδιορισμός του  $c$  με ακρίβεια μικρότερη του  $\Delta$  είναι περιττός, λόγω και των αρκετών αβεβαιοτήτων που ήδη ενυπάρχουν. Η εφαρμογή αυτού του κριτηρίου δίνει τις εξής τιμές του  $c$  για τα δείγματα που εξετάστηκαν: 7 και 6 ώρες για το σταθμό Χάλαρα, μήνες Απρίλιο και Μάιο αντίστοιχα και 6 και 7 ώρες για το σταθμό Τρίβουνο, μήνες Απρίλιο και Μάιο αντίστοιχα.

#### 2.6.5. Τελική διατύπωση του κριτηρίου και σύγκριση με άλλα κριτήρια

Ανακεφαλαιώνοντας τα προηγούμενα, μπορούμε να διατυπώσουμε συνοπτικά το προτεινόμενο κριτήριο με τον ακόλουθο τρόπο:

1. Δύο διαδοχικές αλληλουχίες μη μηδενικής βροχόπτωσης θεωρούνται ότι σχηματίζουν δύο διαφορετικά ανεξάρτητα επεισόδια βροχής, όταν ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα τους είναι μεγαλύτερος ή ίσος του σταθερού χρόνου διαχωρισμού,  $c$ . Σε αντίθετη περίπτωση θεωρείται ότι ανήκουν στο ίδιο επεισόδιο βροχής.
2. Η τιμή του χρόνου διαχωρισμού καθορίζεται σε τρόπο ώστε η προκύπτουσα κρονοσειρά των χρόνων διαδοχής, του εξεταζόμενου ιστορικού δείγματος, να ακολουθεί φραγμένη εκθετική κατανομή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την (2.6.10).
3. Για τον έλεγχο της προσαρμογής της εκθετικής κατανομής χρησιμοποιείται η μέθοδος Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ, για

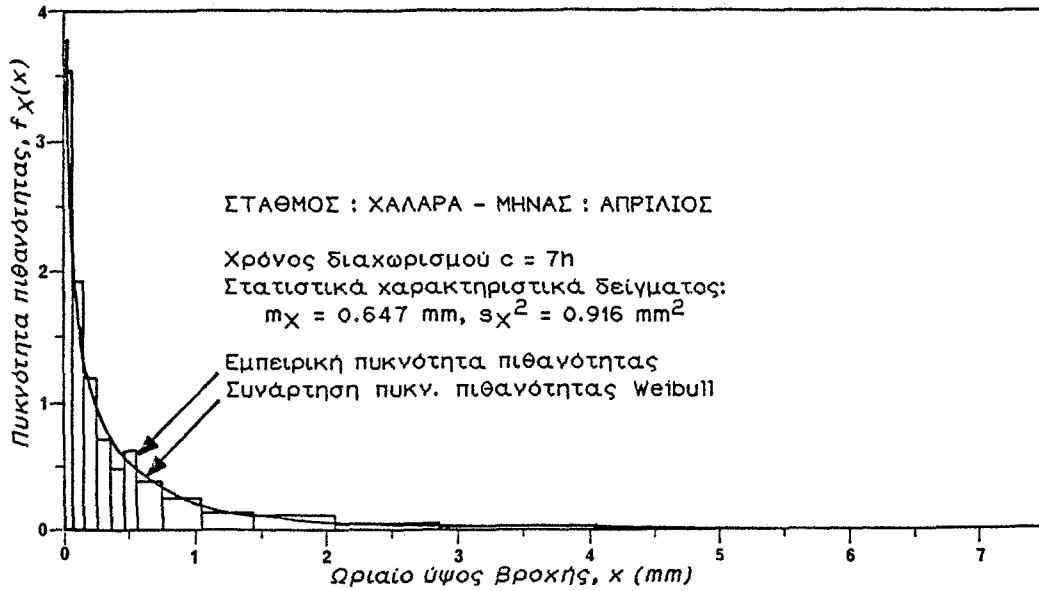
επίπεδο σημαντικότητας 50%.

4. Η διαδικασία υπολογισμού του χρόνου διαχωρισμού  $c$ , περιλαμβάνει δοκιμαστικές επαναλήψεις, και η τελική τιμή προκύπτει από τη σχέση (2.6.16).

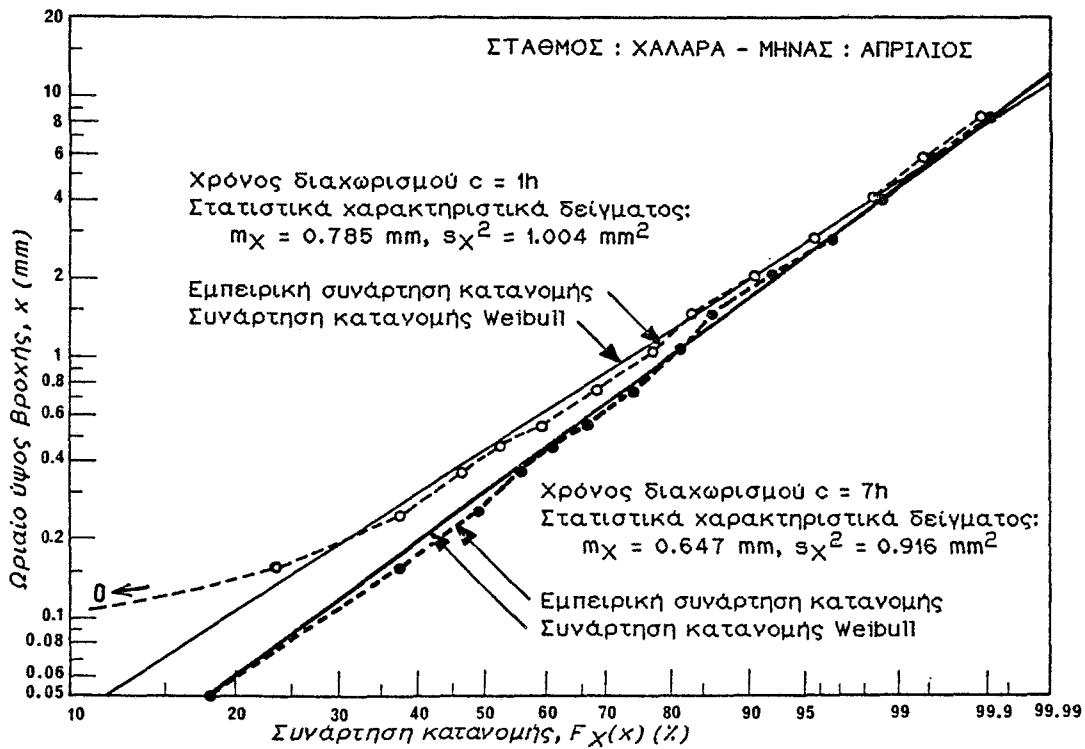
Το προτεινόμενο κριτήριο είναι μεν αντικειμενικό στην εφαρμογή του, αλλά έχει κάποιο βαθμό υποκειμενικότητας στη διατύπωση του, που οφείλεται κυρίως στην επιλεγείσα τιμή του επιπέδου σημαντικότητας (50%). Πάντως τα αποτελέσματα του είναι πολύ λογικά και αναμενόμενα, πράγμα που επιβεβαιώνεται από τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

- α. Η χρονική απόσταση των 6-7 ωρών είναι ικανοποιητική ώστε να μην υπάρχει εξάρτηση στα ωριαία ύψη βροχής δύο διαδοχικών επεισοδίων, σύμφωνα και με όσα έχουν αναπτυχθεί στην υποπαράγραφο 2.6.1. (σελ. 132).
- β. Το πλήθος των τιμών μηδενικού ωριαίου ύψους βροχής μέσα στα επεισόδια, το οποίο προκύπτει ως συνέπεια της τιμής του  $c$ , είναι εύλογο. Για λόγους που εξηγήθηκαν στην υποπαράγραφο 2.6.1. οι μετρημένες τιμές  $x^* = 0.0$  θεωρείται ότι αντιστοιχούν στο διάστημα  $[0, 0.05)$  της συνεχούς μεταβλητής  $X$ , και κατά συνέπεια θεωρείται ότι  $\Pr(X^*=0.0) = \Pr(0 \leq X < 0.05) = F_X(0.05)$ . Με βάση αυτή τη θεώρηση έχουν σχεδιαστεί στα σχήματα 2.4 και 2.5 η εμπειρική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η εμπειρική συνάρτηση κατανομής της  $X$ , αντίστοιχα, για το σταθμό Χάλαρα και για το μήνα Απρίλιο. Στο σχήμα 2.5 χρησιμοποιήθηκε το χαρτί κατανομής Weibull, στο οποίο αποδίδεται καλύτερα η κατανομή μιας τόσο ασύμμετρης κατανομής, όσο η κατανομή του ωριαίου ύψους. Και στα δύο σχήματα φαίνεται ότι το ποσοστό μηδενικών τιμών είναι λογικό. Για λόγους σύγκρισης έχουν χαραχθεί στα ίδια σχήματα και οι αντίστοιχες καμπύλες της κατανομής Weibull<sup>17</sup>, που φαίνεται ότι συμφωνούν πολύ καλά με τις εμπειρικές. Τέλος στο σχήμα 2.5 έχει παρασταθεί και η εμπειρική συνάρτηση κατανομής της  $X$  (σε σύγκριση και με την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής Weibull), όπως προκύπτει όταν θεωρηθεί ότι ο χρόνος δια-

17. Οι παράμετροι της υπολογίστηκαν με τη μέθοδο των ροπών.



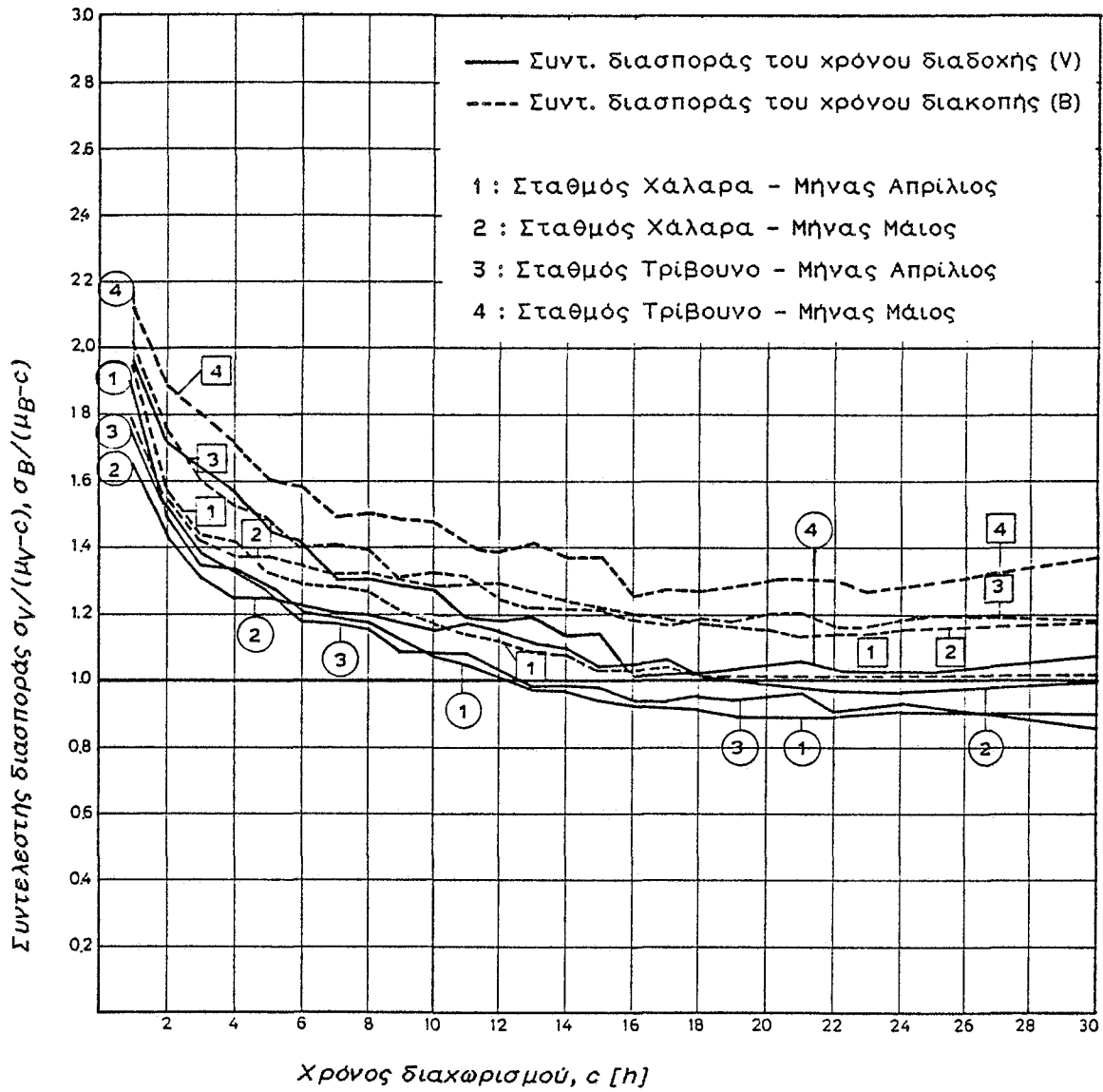
Σχήμα 2.4 : Τυπική μορφή συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ωριαίου ύψους βροχής.



Σχήμα 2.5 : Επίδραση του χρόνου διαχωρισμού, c, στη συνάρτηση κατανομής του ωριαίου ύψους βροχής.

χωρισμού είναι 1 ώρα, οπότε δεν επιτρέπεται η παρουσία μηδενικών τιμών  $X^*$  μέσα στα επεισόδια. Από τη σύγκριση των δύο τελευταίων φαίνεται παραστατικά η αντίφαση που προκύπτει όταν δεν περιλαμβάνονται μηδενικές τιμές στα επεισόδια (βλ. και υποπαρ. 2.6.1, σελ. 133).

Οι τιμές του χρόνου διαχωρισμού των 6-7 ωρών είναι σαφώς μεγαλύτερες από τις τιμές των 2-3 ωρών του κριτηρίου *Grace και Eagleson* [1966], αλλά η σύγκριση αυτή δεν μας δίνει καμιά ουσιαστική πληροφορία, δεδομένου ότι αναφερόμαστε σε διαφορετικές περιοχές με άλλες κλιματικές συνθήκες. Αντίθετα, μια ουσιαστική σύγκριση μπορεί να γίνει με το κριτήριο *Restepo-Posada και Eagleson* (RPE) [1982], που ακολουθεί μια λογική παρόμοια όπως του προτεινόμενου κριτηρίου, και αναφέρεται σε μεγάλο φάσμα κλιματικών τύπων. Κατ' αρχήν έγινε προσπάθεια να εξεταστεί η προσαρμογή της εκθετικής κατανομής προς τα δεδομένα της παρούσας εργασίας (μεταβλητές  $V$  ή  $B$ ) μέσω του ελέγχου των συντελεστών διασποράς  $\sigma_V/(\mu_V - c)$  και  $\sigma_B/(\mu_B - c)$ , σε αντιστοιχία με το κριτήριο των παραπάνω ερευνητών (βλ. και υποπαρ. 2.2.4.). Οι συντελεστές αυτοί θεωρητικά έχουν τιμή ίση με 1, αν η αντίστοιχη μεταβλητή ακολουθεί φραγμένη εκθετική κατανομή. Τα αποτελέσματα αυτής της προσπάθειας απεικονίζονται στο σχήμα 2.6, όπου φαίνεται ότι σε μερικές περιπτώσεις οι συντελεστές αυτοί δεν φτάνουν την τιμή 1, ακόμα και για πολύ μεγάλους χρόνους διαχωρισμού, και δεν αποδίδεται η σύγκλιση των εμπειρικών κατανομών προς την εκθετική από την εικόνα της μεταβολής αυτών των συντελεστών. Εξ άλλου η εφαρμογή του κριτηρίου RPE ως έχει (δηλαδή με τον έλεγχο αν  $\sigma_B/\mu_B = 1$ ) θα έδινε τις εξής τιμές του χρόνου διαχωρισμού:  $c=12$  ώρες και  $c \approx 40$  ώρες για το σταθμό Χάλαρα, μήνες Απρίλιο και Μάιο, και  $c=15$  ώρες και  $c > 30$  ώρες για το σταθμό Τρίβουνο, μήνες Απρίλιο και Μάιο, αντίστοιχα. Η σύγκριση αυτών των τιμών μεταξύ τους αλλά και οι προηγούμενες παρατηρήσεις δείχνουν ότι το εν λόγω κριτήριο δεν είναι κατάλληλο για τα δεδομένα των σταθμών που εξετάζονται στην παρούσα εργασία. Δοκιμάστηκε ακόμα και η εφαρμογή της εμπειρικής σχέσης που περιέχεται στην εργασία των RPE, η οποία έδωσε τιμή του χρόνου διαχωρισμού (σε μέση ετήσια βάση) περίπου ίση με 1 ημέρα, πού κρίνεται ως υπερβολικά υψηλή.



Σχήμα 2.6 : Μεταβολή των συντελεστών διασποράς του χρόνου διαδοχής, V, και του χρόνου διακοπής, B, συναρτήσει του χρόνου διαχωρισμού, c.



## 2.7. Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΤΟΥ ΕΠΕΙΣΟΔΙΟΥ ΒΡΟΧΗΣ

### 2.7.1. Γενικά

Για να είναι πλήρως γνωστή η ανάλυση της εμφάνισης των επεισοδίων βροχής στο χρόνο πρέπει να καθοριστούν οι κατανομές των χρονικών μεταβλητών, δηλαδή της διάρκειας βροχής,  $D$ , του χρόνου διακοπής,  $B$ , και του χρόνου διαδοχής,  $V$ . Αλλά η κατανομή της τελευταίας είναι εξ ορισμού φραγμένη εκθετική. Αυτό είναι ένα σημαντικό πλεονέκτημα του ορισμού των επεισοδίων βροχής που δόθηκε στην παράγραφο 2.6, δεδομένου ότι αξιοποιεί την απλούστερη δυνατή σημειακή ανάλυση, δηλαδή την ανάλυση Poisson, και μάλιστα χωρίς υπάρχουν εγγενή σφάλματα στην περιγραφή του φαινομένου (όπως πχ. μη περιγραφόμενη υπερδιασπορά των επεισοδίων βροχής - βλ. και υποπαράγραφο 2.3.1) και μας απαλλάσει από τη χρησιμοποίηση πιο πολύπλοκων μοντέλων σημειακών ανελίξεων, όπως οι ανελίξεις Neyman-Scott και Cox.

Συνεπώς απομένει να καθορίσουμε την κατανομή των άλλων δύο μεταβλητών. Από προκαταρκτικές παρατηρήσεις πάνω στα ιστορικά δείγματα διαπιστώθηκε ότι η κατανομή της διάρκειας βροχής είναι περίπου εκθετική, ενώ η αντίστοιχη του χρόνου διακοπής παρουσιάζει μια μεγαλύτερη συγκέντρωση στις μικρές τιμές της μεταβλητής, σε σχέση με την εκθετική. Όπως όμως αποδείχτηκε στην υποπαράγραφο 2.6.2, θεωρητικά δεν μπορεί καμιά από τις δύο μεταβλητές να έχει εκθετική κατανομή. Προκειμένου να διατυπώσουμε ένα μοντέλο χωρίς θεωρητικές ασυνέπειες, θα πρέπει να απορρίψουμε την εκθετική κατανομή, και να προσφύγουμε σε πιο σύνθετες συναρτήσεις κατανομής. Επί πλέον, όπως έχει αποδειχτεί επίσης στην υποπαράγραφο 2.6.2, είμαστε υποχρεωμένοι είτε να δεχτούμε ότι μία τουλάχιστον από τις μεταβλητές  $D$  και  $B$  έχει ασυνεχή περιθώρια συνάρτηση κατανομής (με ασυνέχεια στο σημείο  $d=0$  ή  $b=0$ ), είτε να δεχτούμε ότι οι δύο μεταβλητές είναι στοχαστικά εξαρτημένες. Η επιλογή της πρώτης δυνατότητας μας οδηγεί σε σοβαρό λάθος, δεδομένου ότι η ασυνέχεια δεν δικαιολογείται θεωρητικά, αλλά ούτε συμβαδίζει με τα ιστορικά δείγματα. Συνεπώς θα πρέπει να δεχτούμε τη στοχαστική εξάρτηση μεταξύ των  $D$  και  $B$ , σαν τη μόνη λύση με θεωρητική συνέπεια. Βέβαια στα δείγματα της εργασίας αυτής δεν διαπιστώθηκε τέτοια στοχαστική εξάρτηση, αλλά αυτό δεν αποτελεί αναγκαστικά αντίφαση, αφού τελικά και η θεωρητικά προβλεπόμενη εξάρτηση είναι πολύ μικρή (θα δοθούν αριθμητικές τιμές παρακάτω). Έτσι μπορεί να θεωρηθεί είτε ότι η προβλεπόμενη από το μοντέλο στοχαστική εξάρτηση πράγματι υπάρχει, αλλά είναι πολύ μικρή και δεν μπορεί να ανιχνευθεί με τις συνήθεις στατιστικές μεθόδους σε πραγματικά δείγματα, είτε ακόμα ότι δεν υπάρχει στην πραγματικότητα, αλλά είναι ένα αναγκαίο σφάλμα που προκύπτει

από την υπόθεση ότι οι χρόνοι έναρξης των επεισοδίων βροχής περιγράφονται από μια ανέλιξη Poisson, το οποίο σφάλμα είναι αρκετά μικρό, ώστε δεν επηρεάζει ουσιαστικά την εφαρμοσιμότητα του μοντέλου.

Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση του μοντέλου, για λόγους απλοποίησης εισάγουμε τις μεταβλητές  $X$ ,  $Y$  και  $Z$ , στη θέση των  $D$ ,  $B$  και  $V$ , αντίστοιχα, που ορίζονται ως εξής:

$$X = D \quad (2.7.1)$$

$$Y = B - c \quad (2.7.2)$$

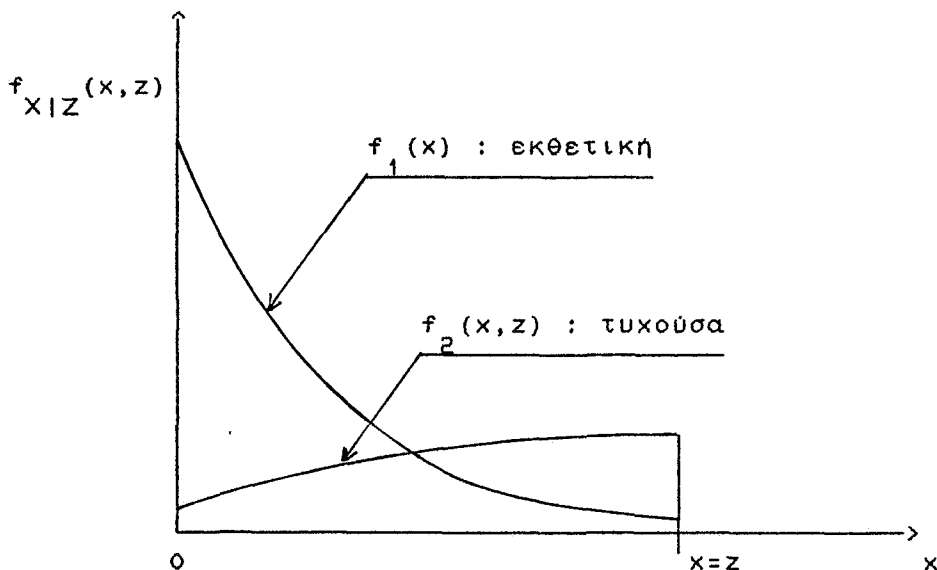
$$Z = V - c \quad (2.7.3)$$

όπου  $X > 0$ ,  $Y \geq 0$ ,  $Z > 0$ , ενώ προφανώς ισχύει

$$X + Y = Z \quad (2.7.4)$$

και η κατανομή της  $Z$  περιγράφεται από τις σχέσεις

$$f_Z(z) = \omega e^{-\omega z}, \quad F_Z(z) = 1 - e^{-\omega z} \quad (2.7.5)$$



**Σχήμα 2.7.:** Γενική εικόνα της δεσμευμένης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας βροχής,  $f_{X|Z}(x,z)$ .

Ας ξεκινήσουμε την εξέταση των κατανομών με τη μεταβλητή  $X=D$ , που η περιθώρια κατανομή της είναι πιο κοντά στην εκθετική. Είναι σκόπιμο να διατυπώσουμε κατ' αρχήν τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $X$  για δεδομένη τιμή της  $V$ . Θεωρώντας ότι για μεγάλες τιμές του χρόνου διαδοχής η διάρκεια βροχής πρακτικά δεν επηρεάζεται από την τιμή του χρόνου διαδοχής, και έχει εκθετική κατανομή, θα δεχτούμε ότι η  $f_{X|Y}(x,y)$  είναι άθροισμα των δύο

συναρτήσεων του σχήματος 2.7, ήτοι:

$$f_{X|Z}(x, z) = f_1(x) + f_2(x, z) \quad , \quad 0 < x \leq z \quad (2.7.6)$$

όπου η  $f_1(x)$  έχει εκθετική μορφή, ήτοι

$$f_1(x) = \delta e^{-\delta x} \quad (2.7.7)$$

και η  $f_2(x, y)$  είναι άγνωστη συνάρτηση, που θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_0^z f_2(x, z) dx = e^{-\delta z} \quad (2.7.8)$$

Η τελευταία προκύπτει εύκολα από την προφανή σχέση  $F_{X|Z}(z, z) = 1$ .

Θα κάνουμε τώρα μερικές ποιοτικές παρατηρήσεις αναφορικά με τη συνάρτηση  $f_2(x, z)$ . Αν η  $f_2$  ταυτιστεί με τη συνάρτηση  $\delta(x)$  (συνάρτηση δέλτα), τότε η κατανομή της  $X$  θα έχει ασυνέχεια στο σημείο  $x=0$ , ενώ αν ταυτιστεί με τη συνάρτηση  $\delta(z-x)$ , τότε η κατανομή της  $Y$  θα έχει ασυνέχεια στο σημείο  $y=0$ . Και στις δύο περιπτώσεις οι  $X$  και  $Y$  θα είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Συνεπώς όσο μεγαλώνει η συγκέντρωση τιμών της  $f_2$  στα σημεία  $x=0$  ή/και  $x=z$ , τόσο μικρότερη θα είναι η στοχαστική εξάρτηση μεταξύ των  $X$  και  $Y$ . Εξ άλλου η συγκέντρωση των τιμών της  $f_2$  προς το σημείο  $x=0$ , θα είχε ως αποτέλεσμα, για την περιθώρια κατανομή της διάρκειας βροχής, μια μεγαλύτερη συγκέντρωση στις μικρές τιμές της μεταβλητής, σε σχέση με την εκθετική. Αντίστοιχα, η συγκέντρωση των τιμών της  $f_2$  προς το σημείο  $x=z$ , θα είχε ως αποτέλεσμα, για την περιθώρια κατανομή του χρόνου διακοπής, μια μεγαλύτερη συγκέντρωση στις μικρές τιμές της μεταβλητής. Η τελευταία περίπτωση συμφωνεί με τα πραγματικά δείγματα, και κατα συνέπεια πρέπει να δεχτούμε ότι η  $f_2$  παρουσιάζει μεγαλύτερη συγκέντρωση τιμών στο σημείο  $x=z$ .

Προκειμένου να διατυπωθεί το τελικό μοντέλο εξετάστηκαν δύο περιπτώσεις συναρτήσεων  $f_2$ , με την παραπάνω ιδιότητα: η τριγωνική, με μέγιστη τιμή στο σημείο  $x=z$ , και η αντίστροφη εκθετική, της μορφής  $ke^{+\delta x}$ . Για λόγους σύγκρισης εξετάστηκε και η ομοιόμορφη κατανομή. Επιλέχτηκε τελικά η τριγωνική, που, όπως προέκυψε, δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα. Έτσι στις επόμενες υποπαραγράφους θα αναλυθεί μόνο η τριγωνική μορφή της  $f_2$ .

### 2.7.2. Παραγωγή των συναρτήσεων κατανομής

Με δεδομένη την εκθετική μορφή (2.7.7) της συνάρτησης  $f_1$ , αν καθορίσουμε και τη συνάρτηση  $f_2$ , τότε ορίζονται πλήρως οι κατανομές και οι παράμετροι όλων των μεταβλητών του προβλήματος, χωρίς να χρειάζεται καμιά άλλη παραδοχή. Αν δεχτούμε ότι η μορφή της  $f_2$  είναι τριγωνική ως προς τη μεταβλητή  $x$ , τότε αυτή

γράφεται:

$$f_2(x, z) = x \cdot g(z) \quad , \quad 0 < x \leq z$$

όπου η συνάρτηση  $g(z)$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (2.7.8), και προκύπτει

$$g(z) = 2e^{-\delta z} / z^2$$

Κατά συνέπεια η  $f_2$  είναι

$$f_2(x, z) = 2xe^{-\delta z} / z^2 \quad (2.7.9)$$

με μέγιστη τιμή (για  $x=z$ )

$$f_2(z, z) = 2e^{-\delta z} / z$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι επομένως

$$f_{X|Z}(x, z) = \delta e^{-\delta x} + 2xe^{-\delta z} / z^2 \quad (2.7.10)$$

Η αμοιβαία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των  $X$  και  $Z$  προκύπτει με πολλαπλασιασμό των (2.7.5) και (2.7.10) και είναι

$$f_{X,Z}(x, z) = \omega \delta e^{-\delta x - \omega z} + 2\omega x e^{-(\delta + \omega)z} / z^2 \quad (2.7.11)$$

Από την τελευταία, παίρνοντας υπόψη και την (2.7.4), μπορεί να υπολογιστεί η αμοιβαία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των  $X$  και  $Y$ , η οποία έχει την ακόλουθη μορφή

$$f_{X,Y}(x, y) = \omega \delta e^{-(\delta + \omega)x - \omega y} + \frac{2\omega x}{(x+y)^2} e^{-(\delta + \omega)(x+y)} \quad (2.7.12)$$

Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και συναρτήσεις κατανομής των  $X$  και  $Y$  έχουν τις ακόλουθες αναλυτικές εκφράσεις, που υπολογίζονται αναλυτικά στο τέλος της υποπαραγράφου:

$$f_X(x) = (\delta + 2\omega) e^{-(\delta + \omega)x} - 2\omega(\delta + \omega)x e^{-(\delta + \omega)x} \quad (2.7.13)$$

$$F_X(x) = 1 - (1 - \omega x) e^{-(\delta + \omega)x} - \omega(\delta + \omega)x^2 e^{-(\delta + \omega)x} \quad (2.7.14)$$

$$f_Y(y) = \frac{\omega \delta}{\delta + \omega} e^{-\omega y} - 2\omega e^{-(\delta + \omega)y} + 2\omega [1 + (\delta + \omega)y] e^{-(\delta + \omega)y} \quad (2.7.15)$$

$$F_Y(y) = 1 - \frac{\delta}{\delta + \omega} e^{-\omega y} - \frac{\omega}{\delta + \omega} [1 + (\delta + \omega)y] e^{-(\delta + \omega)y} + \omega y [2 + (\delta + \omega)y] e^{-(\delta + \omega)y} \quad (2.7.16)$$

όπου η συνάρτηση  $e(x)$  παριστάνει το λεγόμενο εκθετικό ολοκλήρωμα, και ορίζεται από τη σχέση

$$e(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x + \xi} d\xi \quad (2.7.17)$$

Η συνάρτηση  $e(x)$  δεν μπορεί να πάρει αναλυτική έκφραση απλούστερη από την (2.7.17). Συνεπώς οι τιμές της μπορούν να υπολογιστούν μόνο με αριθμητικές μεθόδους. Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς είναι πιο εύχρηστη η ακόλουθη μορφή της (βλ. απόδειξη στο τέλος της υποπαραγράφου, σχέση (η)):

$$e(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x/\eta}}{\eta} d\eta \quad (2.7.18)$$

Χρήσιμες για τους αριθμητικούς υπολογισμούς είναι και οι ακόλουθες σχέσεις (βλ. *Spiegel* [1976], σελ. 183):

$$e(x) = -\gamma - \ln x + \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \dots$$

$$e(x) \approx \frac{e^{-x}}{x} \left[ 1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots \right]$$

όπου  $\gamma$  είναι η σταθερά του Euler ( $\gamma=0.577216$ ).

Όπως αποδεικνύεται παρακάτω η  $e(x)$  απειρίζεται για  $x = 0$  και μηδενίζεται για  $x \rightarrow +\infty$ , ενώ οι εκφράσεις της μορφής  $x^v e(x)$ , όπου  $v > 0$ , μηδενίζονται και για  $x = 0$ , και για  $x \rightarrow +\infty$ . Κατά συνέπεια η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $X$  παίρνει την (μέγιστη) τιμή  $(\delta + 2\omega)$  για  $x=0$ , και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Y$  απειρίζεται για  $\gamma = 0$ . Και οι δυο συναρτήσεις είναι φθίνουσες στο  $(0, +\infty)$ . Οι συναρτήσεις της μεταβλητής  $x$  (σχέσεις (2.7.13) και (2.7.14)) μπορούν να προσεγγιστούν πολύ καλά από τις αντίστοιχες συναρτήσεις της κατανομής γάμα ή της κατανομής Weibull. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τις συναρτήσεις της μεταβλητής  $Y$ .

Για να πάρουμε τις εκφράσεις των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας και κατανομής της διάρκειας βροχής,  $D$ , και του χρόνου διακοπής,  $B$ , αρκεί να αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (2.7.13) μέχρι (2.7.16) τα  $x=d$  και  $\gamma = b - c$ . Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι παρόλο που το μοντέλο περιγραφής των  $D$  και  $B$ , έχει συναρτήσεις κατανομής με κάπως πολύπλοκες αναλυτικές εκφράσεις, εν τούτοις χρησιμοποιεί μόνο μια παράμετρο (πέρα από την  $\omega$  που έχει εισαχθεί για την περιγραφή των χρόνων διαδοχής), την παράμετρο  $\delta$ . Αυτό πρέπει να θεωρηθεί σαν ένα σημαντικό πλεονέκτημα του.

---

Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης  $e(x)$

Συμβολίζουμε με  $\tau(x) = e^{-x} / x$ . Οι συναρτήσεις  $e$  και  $\tau$  συνδέονται με τις σχέσεις

$$e(x) = \int_x^{\infty} \tau(\xi) d\xi, \quad \tau(x) = -\frac{d}{dx} e(x)$$

Οι ακόλουθες σχέσεις είναι προφανείς:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tau(x) = 0 \quad (\alpha)$$

Ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις για την  $\tau(x)$ : (1) είναι ορισμένη και θετική σε κάθε υποδιάστημα  $(0, \beta]$ , (2) είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του  $(0, \beta]$ , (3) ισχύει η πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις (α), και (4) το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \tau(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1$$

έχει μη μηδενική τιμή. Κατά συνέπεια (βλ. Παντελίδης [1974]), το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\beta} \tau(x) dx$$

θα αποκλίνει, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e(x) = +\infty \quad (\beta 1)$$

Εξ άλλου επειδή για κάθε  $x \geq 1$  ισχύει  $\tau(x) \leq e^{-x}$ , θα είναι

$$e(x) = \int_x^{\infty} \tau(\xi) d\xi \leq \int_x^{\infty} e^{-\xi} d\xi = e^{-x}$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e(x) = 0 \quad (\beta 2)$$

ενώ, αφού για κάθε ακέραιο  $v > 0$  ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v / e^x = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} v! / e^x = 0$$

παίρνοντας υπόψη και την παραπάνω ανισότητα, θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v e(x) = 0 \quad (\gamma 1)$$

Τέλος για κάθε  $v > 0$  ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^v e(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e(x) / x^{-v} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tau(x)}{-vx^{-(v+1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}/x}{vx^{-(v+1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^v e^{-x} / v$$

και τελικά

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^v e(x) = 0 \quad (v2)$$

Υπολογισμός μερικών βασικών ολοκληρωμάτων

Θα υπολογίσουμε μερικά βασικά ολοκληρώματα που θα χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη των σχέσεων της υποπαραγράφου.

$$1) \text{ Το ολοκλήρωμα } \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x \xi^2} d\xi$$

Ισχύει (βλ. Spiegel [1976], σελ. 85)

$$\int \frac{e^{-\xi}}{\xi^v} d\xi = \frac{-e^{-\xi}}{(v-1)\xi^{v-1}} - \frac{1}{v-1} \int \frac{e^{-\xi}}{\xi^{v-1}} d\xi \quad (5)$$

Κατά συνέπεια

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x \xi^2} d\xi = - \frac{e^{-\xi}}{\xi} \Big|_{\xi=x}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x \xi} d\xi$$

οπότε προκύπτει

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x \xi^2} d\xi = \frac{e^{-x}}{x} - e(x) \quad (6)$$

$$2) \text{ Το ολοκλήρωμα } \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x \xi^3} d\xi$$

Εφαρμόζοντας την (5) έχουμε

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x \xi^3} d\xi = - \frac{e^{-\xi}}{2\xi^2} \Big|_{\xi=x}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x \xi^2} d\xi$$

οπότε, χρησιμοποιώντας και την (6) προκύπτει

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x \xi^3} d\xi = \frac{e^{-x}}{2x^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-x}}{x} - e(x) \right]$$

και τελικά

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x \xi^3} d\xi = \frac{e^{-x}}{2x} \left[ \frac{1}{x} - 1 \right] + \frac{1}{2} e(x) \quad (7)$$

$$3) \text{ Το ολοκλήρωμα } \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{x} d\xi$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό  $\zeta = \xi/\eta \Leftrightarrow \eta = \xi/\zeta$ , που συνεπάγεται ότι  $d\zeta = (-\xi/\eta^2)d\eta$ , θα έχουμε

$$e(\xi) = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi/\eta} \xi}{\xi/\eta \eta^2} d\eta = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi/\eta}}{\eta} d\eta \quad (\eta)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο θα έχουμε

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-z}}{z^2} dz = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi/\eta} \xi}{(\xi/\eta)^2 \eta^2} d\eta = - \frac{1}{\xi} \int_0^{\infty} e^{-\xi/\eta} d\eta \quad (\theta)$$

και

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-z}}{z^3} dz = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi/\eta} \xi}{(\xi/\eta)^3 \eta^2} d\eta = - \frac{1}{\xi^2} \int_0^{\infty} \eta e^{-\xi/\eta} d\eta \quad (\iota)$$

Κατά συνέπεια

$$\int_x^{\infty} e(\xi) d\xi = \int_x^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi/\eta}}{\eta} d\eta \right] d\xi = \int_0^{\infty} \left[ \int_x^{\infty} \frac{e^{-\xi/\eta}}{\eta} d\xi \right] d\eta = \int_0^{\infty} \left[ \frac{\eta e^{-x/\eta}}{\eta} \right] d\eta = \int_0^{\infty} e^{-x/\eta} d\eta$$

Παίρνοντας υπόψη τις (θ) και (ε) θα έχουμε

$$\int_x^{\infty} e(\xi) d\xi = e^{-x} - xe(x) \quad (\kappa)$$

4) Το ολοκλήρωμα  $\int_x^{\infty} \xi e(\xi) d\xi$

Προχωρούμε με τον ίδιο τρόπο όπως στο προηγούμενο:

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} \xi e(\xi) d\xi &= \int_x^{\infty} \xi \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi/\eta}}{\eta} d\eta \right] d\xi = \int_0^{\infty} \left[ \int_x^{\infty} \xi \frac{e^{-\xi/\eta}}{\eta} d\xi \right] d\eta = \int_0^{\infty} \left[ \frac{\eta e^{-x/\eta}}{\eta} (x + \eta) \right] d\eta \\ &= x \int_0^{\infty} e^{-x/\eta} d\eta + \int_0^{\infty} \eta e^{-x/\eta} d\eta \end{aligned}$$

Παίρνοντας υπόψη τις (θ), (ι) και (ε), (ζ) θα έχουμε

$$\int_x^{\infty} \xi e(\xi) d\xi = x^2 \left[ \frac{e^{-x}}{x} - e(x) \right] + x^2 \left[ \frac{e^{-x}}{2x} \left( \frac{1}{x} - 1 \right) + \frac{1}{2} e(x) \right] = e^{-x} \left[ x + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \right] + e(x) \left[ -x^2 + \frac{x^2}{2} \right]$$

Και τελικά

$$\int_x^{\infty} \xi e(\xi) d\xi = e^{-x} \left[ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right] - e(x) \frac{x^2}{2} \quad (\lambda)$$

Απόδειξη των (2.7.13) και (2.7.14)

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.7.11) και έχουμε



$$f_X(x) = \int_x^{\infty} f_{X,Z}(x,z) dz = \int_x^{\infty} \omega \delta e^{-\delta x - \omega z} dz + \int_x^{\infty} [2\omega x e^{-(\delta+\omega)z} / z^2] dz$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα λόγω της (ε) θα είναι

$$2\omega x \int_x^{\infty} \frac{e^{-(\delta+\omega)z}}{z^2} dz = 2\omega(\delta+\omega)x \int_{(\delta+\omega)x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = 2\omega(\delta+\omega)x \frac{e^{-(\delta+\omega)x}}{(\delta+\omega)x} - 2\omega(\delta+\omega)x e^{-(\delta+\omega)x}$$

Κατά συνέπεια

$$f_X(x) = \delta e^{-(\delta+\omega)x} + 2\omega e^{-(\delta+\omega)x} - 2\omega(\delta+\omega)x e^{-(\delta+\omega)x}$$

οπότε προκύπτει άμεσα η (2.7.13)

Ολοκληρώνοντας την (2.7.13) ως προς x έχουμε

$$1 - F_X(x) = \int_x^{\infty} f_X(\xi) d\xi = (\delta+2\omega) \int_x^{\infty} e^{-(\delta+\omega)\xi} d\xi - 2\omega(\delta+\omega) \int_x^{\infty} \xi e^{-(\delta+\omega)\xi} d\xi$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα, αν λάβουμε υπόψη και την (λ) γράφεται:

$$2\omega(\delta+\omega) \int_x^{\infty} \xi e^{-(\delta+\omega)\xi} d\xi = \frac{2\omega}{\delta+\omega} \int_{(\delta+\omega)x}^{\infty} t e^{-t} dt = \frac{\omega}{\delta+\omega} e^{-(\delta+\omega)x} [(\delta+\omega)x + 1] - \omega(\delta+\omega)x^2 e^{-(\delta+\omega)x}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} 1 - F_X(x) &= \frac{\delta+2\omega}{\delta+\omega} e^{-(\delta+\omega)x} - \omega x e^{-(\delta+\omega)x} - \frac{\omega}{\delta+\omega} e^{-(\delta+\omega)x} + \omega(\delta+\omega)x^2 e^{-(\delta+\omega)x} \\ &= e^{-(\delta+\omega)x} - \omega x e^{-(\delta+\omega)x} + \omega(\delta+\omega)x^2 e^{-(\delta+\omega)x} \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει άμεσα η (2.7.14)

Απόδειξη των (2.7.15) και (2.7.16)

Ισχύει

$$f_{Y,Z}(y,z) = f_{X,Z}(z-y,z)$$

και κατά συνέπεια

$$f_Y(y) = \int_y^{\infty} f_{X,Z}(z-y,z) dz$$

Επομένως από την (2.7.11) προκύπτει

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^{\infty} \omega \delta e^{-\delta(z-y) - \omega z} dz + \int_y^{\infty} [2\omega(z-y)e^{-(\delta+\omega)z} / z^2] dz \\ &= \omega \delta e^{\delta y} \int_y^{\infty} e^{-(\delta+\omega)z} dz + 2\omega \int_y^{\infty} [e^{-(\delta+\omega)z} / z] dz - 2\omega y \int_y^{\infty} [e^{-(\delta+\omega)z} / z^2] dz \end{aligned}$$

Το προτελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με  $e^{-(\delta+\theta)y}$  και το τελευταίο έχει υπολογιστεί παραπάνω. Άρα

$$f_Y(y) = \frac{\theta\delta}{\delta+\theta} e^{\delta y} e^{-(\delta+\theta)y} + 2\theta e^{-(\delta+\theta)y} - 2\theta e^{-(\delta+\theta)y} + 2\theta(\delta+\theta)y e^{-(\delta+\theta)y}$$

οπότε προκύπτει άμεσα η (2.7.15)

Ολοκληρώνοντας την (2.7.15) ως προς  $y$  έχουμε

$$1 - F_Y(x) = \int_y^{\infty} f_Y(\xi) d\xi = \frac{\theta\delta}{\delta+\theta} \int_y^{\infty} e^{-\theta\xi} d\xi - 2\theta \int_y^{\infty} e^{-(\delta+\theta)\xi} d\xi + 2\theta \int_y^{\infty} e^{-(\delta+\theta)\xi} d\xi + 2\theta(\delta+\theta) \int_y^{\infty} \xi e^{-(\delta+\theta)\xi} d\xi$$

Τα δύο τελευταία ολοκλήρωματα υπολογίζονται από τις (κ) και (λ) (βλ. και προηγούμενους αντίστοιχους υπολογισμούς), και έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 - F_Y(x) &= \frac{\delta}{\delta+\theta} e^{-\theta y} - \frac{2\theta}{\delta+\theta} e^{-(\delta+\theta)y} + \frac{2\theta}{\delta+\theta} e^{-(\delta+\theta)y} - 2\theta y e^{-(\delta+\theta)y} + \theta e^{-(\delta+\theta)y} \left( y + \frac{1}{\delta+\theta} \right) \\ &\quad - \theta(\delta+\theta)y^2 e^{-(\delta+\theta)y} \\ &= \frac{\delta}{\delta+\theta} e^{-\theta y} + \theta e^{-(\delta+\theta)y} \left( y + \frac{1}{\delta+\theta} \right) - \theta y [2 + (\delta+\theta)y] e^{-(\delta+\theta)y} \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει άμεσα η (2.7.16)

### 2.7.3. Περιθώριες και δεσμευμένες ροπές των μεταβλητών

Στην υποπαράγραφο αυτή δίνεται ένα σύνολο από εκφράσεις ροπών πρώτης και δεύτερης τάξης, δεσμευμένων και περιθωρίων, των μεταβλητών  $X$  και  $Y$ , όπως ορίστηκαν στην προηγούμενη υποπαράγραφο. Οι εκφράσεις αυτές προκύπτουν αναλυτικά από τις αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής και οι αποδείξεις τους υπάρχουν στο τέλος της υποπαράγραφου.

Οι δεσμευμένες ροπές της  $X$  για δεδομένη τιμή της  $Z$  υπολογίζονται εύκολα από την (2.7.10) και είναι:

$$E[X|Z] = \frac{1}{\delta} - e^{-\delta Z} \left[ \frac{Z}{3} + \frac{1}{\delta} \right] \quad (2.7.19)$$

$$\text{Var}[X|Z] = \frac{1}{\delta^2} - e^{-\delta Z} \left[ \frac{Z^2}{2} + \frac{4Z}{3\delta} \right] - e^{-2\delta Z} \left[ \frac{Z}{3} + \frac{1}{\delta} \right]^2 \quad (2.7.20)$$

Οι "αντίστροφες" δεσμευμένες ροπές, δηλαδή οι ροπές της  $Z$  για δεδομένη τιμή της  $X$  έχουν πολύπλοκες αναλυτικές εκφράσεις. Για παράδειγμα:

$$E[Z|X] = \frac{\delta e^{-(\delta+\omega)x} (x + 1/\omega) + 2\omega x e^{-(\delta+\omega)x}}{(\delta+2\omega)e^{-(\delta+\omega)x} - 2\omega(\delta+\omega)x e^{-(\delta+\omega)x}} \quad (2.7.21)$$

Οι περιθώριες ροπές της  $X$  υπολογίζονται με βάση τις αντίστοιχες δεσμευμένες ροπές και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Z$ , δηλ. την (2.7.5), και έχουν τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$E[X] = \frac{1}{\delta+\omega} - \frac{\omega}{3(\delta+\omega)^2} \quad (2.7.22)$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{(\delta+\omega)^2} - \frac{\omega}{3(\delta+\omega)^3} - \frac{\omega^2}{9(\delta+\omega)^4} \quad (2.7.23)$$

ενώ η συνδιασπορά των  $X$  και  $Z$  δίνεται από τη σχέση

$$\text{Cov}[X,Z] = \frac{1}{(\delta+\omega)^2} + \frac{\delta-\omega}{3(\delta+\omega)^3} \quad (2.7.24)$$

Οι περιθώριες ροπές της  $Y$  μπορούν να υπολογιστούν άμεσα από τις αντίστοιχες περιθώριες ροπές των  $X$  και  $Z$  (λόγω της (2.7.4)), και είναι:

$$E[Y] = \frac{\delta}{\omega(\delta+\omega)} + \frac{\omega}{3(\delta+\omega)^2} \quad (2.7.25)$$

$$\text{Var}[Y] = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(\delta+\omega)^2} - \frac{2\delta-\omega}{3(\delta+\omega)^3} - \frac{\omega^2}{9(\delta+\omega)^4} \quad (2.7.26)$$

ενώ η συνδιασπορά των  $X$  και  $Y$  είναι

$$\text{Cov}[X,Y] = \frac{\delta}{3(\delta+\omega)^3} + \frac{\omega^2}{9(\delta+\omega)^4} \quad (2.7.27)$$

Λόγω της στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ  $X$  και  $Y$  οι δεσμευμένες ροπές της  $Y$  για δεδομένη τιμή της  $X$  (ή αντίστροφα) δεν είναι ίσες με τις αντίστοιχες περιθώριες ροπές. Οι εκφράσεις τους είναι γενικά πολύπλοκες. Για παράδειγμα η  $E[Y|X]$  δίνεται από τη σχέση

$$E[Y|X] = \frac{\delta e^{-(\delta+\omega)x} (x + 1/\omega) + 2\omega x e^{-(\delta+\omega)x}}{(\delta+2\omega)e^{-(\delta+\omega)x} - 2\omega(\delta+\omega)x e^{-(\delta+\omega)x}} - x \quad (2.7.28)$$

που είναι άμεση συνέπεια της (2.7.21).

Το μέτρο της στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ των  $X$  και  $Y$  δίνεται από το συντελεστή συσχέτισης

$$\rho_{XY} = \text{Cov}[X,Y] / \{\text{Var}[X] \cdot \text{Var}[Y]\}^{1/2}$$

Επειδή στην πράξη ισχύει  $\delta \gg \omega$ , η (2.7.27) δίνει  $\text{Cov}[X, Y] \approx 1/3\delta^2$ , και οι (2.7.23) και (2.7.26) δίνουν αντίστοιχα  $\text{Var}[X] \approx 1/\delta^2$  και  $\text{Var}[Y] \approx 1/\omega^2$ . Επομένως  $\rho_{XY} \approx \omega/3\delta$ , δηλαδή η τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι πολύ μικρή.

Οι ροπές των αρχικών μεταβλητών, δηλαδή της διάρκειας βροχής,  $D$ , και του χρόνου διακοπής,  $B$ , προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ροπές των  $X$  και  $Y$ . Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\mu_D &= E[D] = E[X], & \sigma_D^2 &= \text{Var}[D] = \text{Var}[X] \\ \mu_B &= E[B] = E[Y] + c, & \sigma_B^2 &= \text{Var}[B] = \text{Var}[Y] \\ \sigma_{D,Y} &= \text{Cov}[D, Y] = \text{Cov}[X, Z], & \sigma_{D,B} &= \text{Cov}[D, B] = \text{Cov}[X, Y]\end{aligned}\quad (2.7.29)$$

Δεδομένου ότι το μοντέλο έχει μια μόνο παράμετρο, τη  $\delta$ , χρειάζεται μόνο μια ροπή για τον καθορισμό αυτής της παραμέτρου. Αν για το σκοπό αυτό επιλέξουμε την  $\mu_D$ , τότε η  $\delta$  δίνεται από τη σχέση

$$\delta = \frac{1 - 2\omega\mu_D + (1 - 4\omega\mu_D/3)^{1/2}}{2\mu_D} \quad (2.7.30)$$

που είναι συνέπεια της (2.7.22).

#### Απόδειξη της (2.7.19)

Χρησιμοποιώντας την (2.7.10) έχουμε

$$\begin{aligned}E[X|Z] &= \int_0^z x f_{X|Z}(x, z) dx = \delta \int_0^z x e^{-\delta x} dx + 2 \frac{e^{-\delta z}}{z^2} \int_0^z x^2 dx = \delta \frac{e^{-\delta x}}{-\delta} (x+1/\delta) \Big|_0^z + 2 \frac{e^{-\delta z}}{z^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^z \\ &= \frac{1}{\delta} - e^{-\delta z} (z + \frac{1}{\delta}) + 2 \frac{e^{-\delta z}}{z^2} \frac{z^3}{3} = \frac{1}{\delta} - e^{-\delta z} (\frac{z}{3} + \frac{1}{\delta})\end{aligned}$$

#### Απόδειξη της (2.7.20)

Χρησιμοποιώντας την (2.7.10) έχουμε

$$\begin{aligned}E[X^2|Z] &= \int_0^z x^2 f_{X|Z}(x, z) dx = \delta \int_0^z x^2 e^{-\delta x} dx + 2 \frac{e^{-\delta z}}{z^2} \int_0^z x^3 dx = \delta \frac{e^{-\delta x}}{-\delta} (x^2 + 2x/\delta + 2/\delta^2) \Big|_0^z + 2 \frac{e^{-\delta z}}{z^2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^z \\ &= \frac{2}{\delta^2} - e^{-\delta z} (z^2 + \frac{2z}{\delta} + \frac{2}{\delta^2}) + 2 \frac{e^{-\delta z}}{z^2} \frac{z^4}{4}\end{aligned}$$

Και τελικά

$$E[X^2|Z] = \frac{2}{\delta^2} - e^{-\delta Z} \left( \frac{z^2}{2} + \frac{2z}{\delta} + \frac{2}{\delta^2} \right) \quad (a)$$

Από τις (a) και (2.7.19) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \text{Var}[X|Z] &= E[X^2|Z] - E[X|Z]^2 = \frac{2}{\delta^2} - e^{-\delta Z} \left( \frac{z^2}{2} + \frac{2z}{\delta} + \frac{2}{\delta^2} \right) - \left[ \frac{1}{\delta} - e^{-\delta Z} \left( \frac{z}{3} + \frac{1}{\delta} \right) \right]^2 \\ &= \frac{2}{\delta^2} - e^{-\delta Z} \left( \frac{z^2}{2} + \frac{2z}{\delta} + \frac{2}{\delta^2} \right) - \frac{1}{\delta^2} + e^{-\delta Z} \left( \frac{2z}{3\delta} + \frac{2}{\delta^2} \right) - e^{-2\delta Z} \left( \frac{z}{3} + \frac{1}{\delta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\delta^2} - e^{-\delta Z} \left( \frac{z^2}{2} + \frac{4z}{3\delta} \right) - e^{-2\delta Z} \left( \frac{z}{3} + \frac{1}{\delta} \right)^2 \end{aligned}$$

#### Απόδειξη της (2.7.21)

Ισχύει:

$$E[Z|X] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_{Z|X}(x,z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_X(x)} dz = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{\infty} z f_{X,Z}(x,z) dz$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω την  $f_{X,Z}(x,z)$  από την (2.7.11) παίρνουμε

$$\begin{aligned} E[Z|X] &= \frac{1}{f_X(x)} \int_0^{\infty} z \theta \delta e^{-\delta x - \theta z} dz + \frac{1}{f_X(x)} \int_0^{\infty} z \frac{2\theta x e^{-(\delta+\theta)z}}{z^2} dz = \frac{\theta \delta e^{-\delta x}}{f_X(x)} \int_0^{\infty} z e^{-\theta z} dz + \frac{2\theta x}{f_X(x)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(\delta+\theta)z}}{z} dz \\ &= \frac{\delta e^{-\delta x}}{f_X(x)} \left( x + \frac{1}{\theta} \right) + \frac{2\theta x}{f_X(x)} e^{-(\delta+\theta)x} = \frac{\delta e^{-(\delta+\theta)x}}{f_X(x)} \left( x + \frac{1}{\theta} \right) + \frac{2\theta x}{f_X(x)} e^{-(\delta+\theta)x} \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση της  $f_X(x)$  από την (2.7.13) προκύπτει η (2.7.21)

#### Απόδειξη της (2.7.22)

Χρησιμοποιώντας τις (2.7.5) και (2.7.19) έχουμε

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} E[X|Z] f_Z(z) dz = \int_0^{\infty} \frac{1}{\delta} \theta e^{-\theta z} dz - \int_0^{\infty} \frac{z}{3} e^{-\delta z} \theta e^{-\theta z} dz - \int_0^{\infty} \frac{1}{\delta} e^{-\delta z} \theta e^{-\theta z} dz = \\ &= \frac{1}{\delta} - \frac{\theta}{3(\delta+\theta)^2} - \frac{\theta}{\delta(\delta+\theta)} = \frac{1}{\delta+\theta} - \frac{\theta}{3(\delta+\theta)^2} \end{aligned}$$

#### Απόδειξη της (2.7.23)

Χρησιμοποιώντας τις (2.7.5) και (a) έχουμε

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} E[X^2|Z] f_Z(z) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \frac{z^2}{\delta^2} \theta e^{-\theta z} dz - \int_0^{\infty} \frac{z^2}{2} e^{-\delta z} \theta e^{-\theta z} dz - \int_0^{\infty} \frac{2z}{\delta} e^{-\delta z} \theta e^{-\theta z} dz - \int_0^{\infty} \frac{z}{\delta^2} e^{-\delta z} \theta e^{-\theta z} dz \\
&= \frac{2}{\delta^2} - \frac{\theta}{(\delta+\theta)^3} - \frac{2\theta}{\delta(\delta+\theta)^2} - \frac{2\theta}{\delta^2(\delta+\theta)} = \frac{2}{\delta^2(\delta+\theta)^2} [(\delta+\theta)^2 - \theta\delta - \theta(\delta+\theta)] - \frac{\theta}{(\delta+\theta)^3}
\end{aligned}$$

Τελικά

$$E[X^2] = \frac{2}{(\delta+\theta)^2} - \frac{\theta}{(\delta+\theta)^3} \quad (\beta)$$

Από τις (β) και (2.7.22) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\text{Var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{(\delta+\theta)^2} - \frac{\theta}{(\delta+\theta)^3} - \left[ \frac{1}{\delta+\theta} - \frac{\theta}{3(\delta+\theta)^2} \right]^2 \\
&= \frac{2}{(\delta+\theta)^2} - \frac{\theta}{(\delta+\theta)^3} - \frac{1}{(\delta+\theta)^2} + \frac{2\theta}{3(\delta+\theta)^3} - \frac{\theta^2}{9(\delta+\theta)^4} = \frac{1}{(\delta+\theta)^2} - \frac{\theta}{3(\delta+\theta)^3} - \frac{\theta^2}{9(\delta+\theta)^4}
\end{aligned}$$

Απόδειξη της (2.7.24)

Ισχύει:

$$E[XZ] = \int_{z=0}^{\infty} \int_{x=0}^z xz f_{X,Z}(x,z) dx dz = \int_{z=0}^{\infty} z f_Z(z) \int_{x=0}^z f_{X|Z}(x,z) dx dz = \int_0^{\infty} z f_Z(z) E[X|Z] dz$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω την  $f_Z(z)$  από την (2.7.5) και την  $E[X|Z]$  από την (2.7.20) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
E[XZ] &= \int_0^{\infty} \frac{\theta z e^{-\theta z}}{\delta} dz - \int_0^{\infty} \theta z e^{-(\delta+\theta)z} \left( \frac{z}{3} + \frac{1}{\delta} \right) dz \\
&= \frac{\theta}{\delta} \int_0^{\infty} z e^{-\theta z} dz - \frac{\theta}{3} \int_0^{\infty} z^2 e^{-(\delta+\theta)z} dz - \frac{\theta}{\delta} \int_0^{\infty} z e^{-(\delta+\theta)z} dz
\end{aligned}$$

και μετά τις πράξεις:

$$E[XZ] = \frac{1}{\delta\theta} - \frac{2\theta}{3(\delta+\theta)^3} - \frac{\theta}{\delta(\delta+\theta)^2} \quad (\gamma)$$

Κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[X,Z] &= E[XZ] - E[X]E[Z] = \frac{1}{\delta\theta} - \frac{2\theta}{3(\delta+\theta)^3} - \frac{\theta}{\delta(\delta+\theta)^2} - \frac{1}{\theta(\delta+\theta)} + \frac{1}{3(\theta+\delta)^2} \\
&= \frac{1}{\delta\theta} - \frac{2\theta}{3(\delta+\theta)^3} - \frac{\theta}{\delta(\delta+\theta)^2} - \frac{1}{\theta(\delta+\theta)} + \frac{1}{3(\theta+\delta)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\delta+\theta)^2 - \theta^2 - \delta(\delta+\theta)}{\delta\theta(\delta+\theta)^2} + \frac{\delta+\theta - 2\theta}{3(\delta+\theta)^3} = \frac{1}{(\delta+\theta)^2} + \frac{\delta-\theta}{3(\delta+\theta)^3}$$

Απόδειξη της (2.7.25)

Λόγω της εκθετικής κατανομής της Z ισχύει  $E[Z] = 1/\theta$ , ενώ η  $E[X]$  δίνεται από την (2.7.23). Συνεπώς

$$E[Y] = E[Z] - E[X] = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{(\delta+\theta)} + \frac{\theta}{3(\delta+\theta)^2} = \frac{\delta}{\theta(\delta+\theta)} + \frac{\theta}{3(\delta+\theta)^2}$$

Απόδειξη της (2.7.26)

Ισχύει:

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[Z] - \text{Var}[X] - 2\text{Cov}[X,Y]$$

οπότε παίρνοντας υπόψη ότι  $\text{Var}[Z] = 1/\theta^2$  και αντικαθιστώντας τους όρους του β' μέλους από τις αντίστοιχες εκφράσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{(\delta+\theta)^2} + \frac{\theta}{3(\delta+\theta)^3} + \frac{\theta^2}{9(\delta+\theta)^4} - \frac{2\delta}{3(\delta+\theta)^3} - \frac{2\theta^2}{9(\delta+\theta)^4} \\ &= \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{(\delta+\theta)^2} - \frac{2\delta-\theta}{3(\delta+\theta)^3} - \frac{\theta^2}{9(\delta+\theta)^4} \end{aligned}$$

Απόδειξη της (2.7.27)

Ισχύει:

$$\text{Cov}[X,Y] = \text{Cov}[X,Z] - \text{Var}[X]$$

οπότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω τα  $\text{Cov}[X,Z]$  και  $\text{Var}[Y]$  από τις αντίστοιχες εκφράσεις παίρνουμε:

$$\text{Cov}[X,Y] = \frac{1}{(\delta+\theta)^2} + \frac{\delta-\theta}{3(\delta+\theta)^3} - \frac{1}{(\delta+\theta)^2} + \frac{\theta}{3(\delta+\theta)^3} + \frac{\theta^2}{9(\delta+\theta)^4} = \frac{\delta}{3(\delta+\theta)^3} + \frac{\theta^2}{9(\delta+\theta)^4}$$

Απόδειξη της (2.7.30)

Η (2.7.22) γράφεται:

$$\mu_D (\delta+\theta)^2 - (\delta+\theta) + \theta/3 = 0$$

Λύνοντας την παραπάνω ως προς  $(\delta+\theta)$  παίρνουμε

$$\delta+\theta = \frac{1 \pm (1-4\theta\mu_D/3)^{1/2}}{2\mu_D}$$

και στη συνέχεια

$$\delta = \frac{1 - 2\theta\mu_D \pm (1-4\theta\mu_D/3)^{1/2}}{2\mu_D}$$

Η μικρότερη από τις δύο ρίζες είναι αρνητική όταν  $\mu_D \ll 1/\omega$ , και συνεπώς απορρίπτεται.

#### 2.7.4. Εφαρμογή = Έλεγχος του μοντέλου

Θα ελέγξουμε τώρα το θεωρητικό σχήμα που περιγράφει τις χρονικές μεταβλητές  $V$ ,  $D$  και  $B$ , ως προς την προσαρμογή του με τα πραγματικά δεδομένα. Στον πίνακα 2.1 δίνονται οι θεωρητικές ροπές α' και β' τάξης των μεταβλητών, που έχουν υπολογιστεί με τις σχέσεις της προηγούμενης υποπαραγράφου, σε σύγκριση με τις αντίστοιχες εμπειρικές ροπές. Οι βασικές παράμετροι  $\omega$  και  $\beta$  υπολογίστηκαν από τις σχέσεις (2.6.15) και (2.7.30), αντίστοιχα.<sup>18</sup> Παρατηρείται ότι γενικά υπάρχει καλή συμφωνία των θεωρητικών και εμπειρικών ροπών. Ειδικότερα για τους συντελεστές συσχέτισης  $\rho_{DB}$ , παρόλο που πολλές φορές εμφανίζουν αντίθετο πρόσημο, και πάλι μπορούμε να δεχτούμε ότι οι εμπειρικές τιμές συμφωνούν με τις θεωρητικές, με την έννοια ότι η υπόθεση ότι οι αντίστοιχες τιμές είναι ίσες δεν μπορεί να απορριφθεί με τις γνωστές στατιστικές μεθόδους. Πιο συγκεκριμένα, ας εξετάσουμε το δείγμα του Απριλίου του σταθμού Χάλαρα. Θεωρώντας ότι η στατιστική συνάρτηση:

$$Q = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1+R}{1-R} \right]$$

όπου  $R$  ο δειγματικός συντελεστής συσχέτισης των  $D$  και  $B$ , ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή και τυπική απόκλιση

$$\mu_Q = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1+\rho_{DB}}{1-\rho_{DB}} \right] = 0.040, \quad \sigma_Q = (N-3)^{-1/2} = 0.103$$

υπολογίζουμε ότι τα 95% όρια εμπιστοσύνης της  $R$  είναι  $-0.16$  και  $+0.24$ . Στην πραγματικότητα το διάστημα εμπιστοσύνης της  $R$  είναι ακόμα μεγαλύτερο λόγω των ασύμμετρων κατανομών των  $D$  και  $B$  (η παραπάνω υπόθεση για την  $Q$  θα ίσχυε επακριβώς αν οι μεταβλητές  $D$  και  $B$  ακολουθούσαν κανονική κατανομή). Κατά συνέπεια ο δειγματικός συντελεστής  $r = -0.05$  δεν διαφέρει σημαντικά από το θεωρητικό συντελεστή συσχέτισης  $\rho_{DB} = 0.04$ , σε επίπεδο 5%.

Ο ουσιαστικότερος όμως έλεγχος αφορά τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των μεταβλητών. Για τις μεταβλητές  $D$  και  $B$  ο έλεγχος Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ, και μάλιστα σε ένα αυξημένο επίπεδο εμπιστοσύνης 10%, έδειξε ότι οι θεωρητικές συναρτήσεις κατανομής που προτάθηκαν είναι κατάλληλες.

Τα σχήματα που ακολουθούν, στα οποία δίνονται οι θεωρητικές και οι

-----  
18. Για τα δεδομένα του Μαΐου του σταθμού Τρίβουνο, ο υπολογισμός του  $\omega$  έγινε με τη σχέση (2.6.14) (βλ. και υποσημείωση 16).



ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1  
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΩΝ ΡΟΠΩΝ  
ΤΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΤΟΥ ΕΠΕΙΣΟΔΙΟΥ ΒΡΟΧΗΣ

Παράμετρος		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΧΑΛΛΑΡΑ		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΤΡΙΒΟΥΝΟ	
		Απρίλιος	Μάιος	Απρίλιος	Μάιος
Μέγ. Δείγματος	N	98	107	86	71
Χρόν. Διαχωρισμού	c	7	6	6	7
Παράμετρος	$\omega$	0.01130	0.01185	0.01495	0.01244
"	$\delta$	0.07702	0.10020	0.08205	0.08828
Μέση τιμή	$\mu_V$	95.51 100.99	90.39 91.23	72.91 74.78	87.41 87.41
" "	$\mu_D$	10.84 10.84	8.61 8.61	9.78 9.78	9.52 9.52
" "	$\mu_B$	83.67 90.15	81.78 82.62	63.13 65.00	77.89 77.89
Τυπική απόκλιση	$\sigma_V$	88.51 106.41	84.39 102.96	66.91 80.26	80.41 105.75
" "	$\sigma_D$	11.07 9.07	8.76 7.62	10.03 9.98	9.71 11.01
" "	$\sigma_B$	87.39 106.49	83.65 102.55	65.70 79.80	79.46 105.93
Συνδιασπορά	$\sigma_{DB}$	37.50 -49.62	23.84 25.44	30.25 -26.37	28.97 -79.61
Συντ. συσχέτισης	$\rho_{DB}$	0.04 -0.05	0.03 0.03	0.05 -0.03	0.04 -0.07

Σημείωση: Η πρώτη σειρά αντιστοιχεί στις θεωρητικές τιμές των παραμέτρων και η δεύτερη στις εμπειρικές

εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των μεταβλητών σε χαρτί Weibull,<sup>19</sup> δείχνουν

19. Όλες οι συναρτήσεις κατανομής αυτής της εργασίας έχουν παρασταθεί σε χαρτί Weibull, που είναι το πιο κατάλληλο για τη μορφή των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται (ανάλογο χαρτί κατανομής γάμα δεν μπορεί να κατασκευαστεί). Επιπλέον σε όλα τα σχετικά σχήματα έχουν χαραχθεί και τα όρια του στατιστικού ελέγχου Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ, για το εξεταζόμενο επίπεδο σημαντικότητας (συνήθως 10%), ώστε να φαίνεται με αντικειμενικό τρόπο η συμφωνία θεωρητικών και εμπειρικών συναρτήσεων κατανομής, και να διαπιστώνεται το μέγεθος των σχετικών αποκλίσεων. Για τη σχεδίαση των εμπειρικών κατανομών είτε χρησιμοποιείται το σύνολο των στοιχείων του κάθε δείγματος, όταν το πλήθος τους είναι μικρό, είτε παραλείπονται μερικά σημεία, όταν το πλήθος είναι σχετικά μεγάλο (πχ. 100), είτε τέλος χαράσσονται μόνο χαρακτηριστικά σημεία, που αντιστοιχούν στα όρια καθορισμένων κλάσεων, όταν το πλήθος είναι πολύ μεγάλο (πχ. 1000). Στις δύο πρώτες περιπτώσεις ο υπολογισμός της εμπειρικής συχνότητας κάθε σημείου γίνεται από τον γνωστό τύπο  $F = i-n/(N+1)$ , και στην τελευταία στηρίζεται στο σχετικό πίνακοποιημένο ιστόγραμμα.

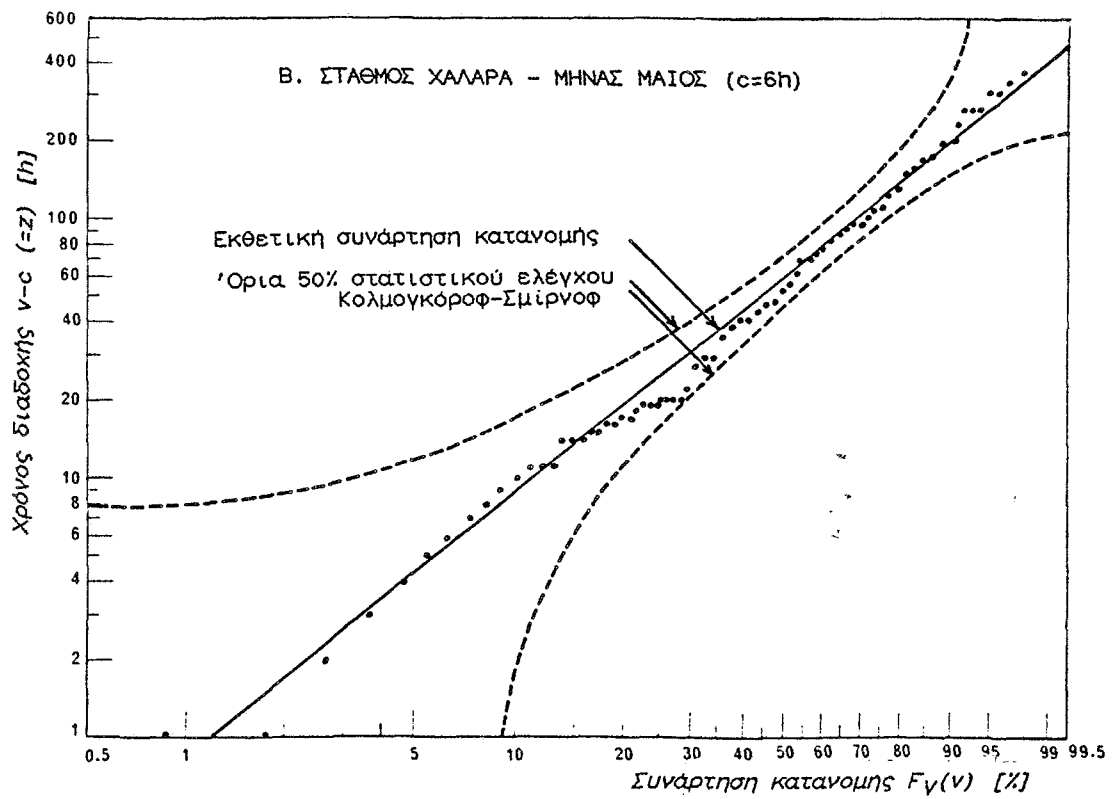
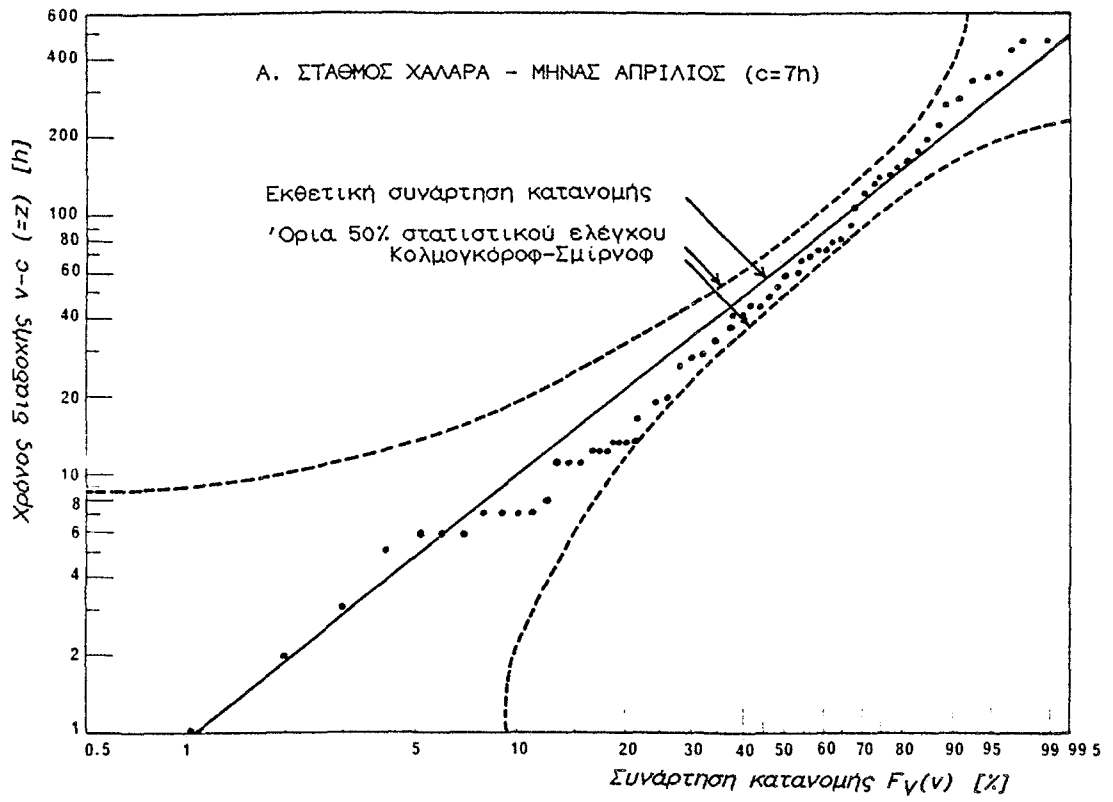
παραστατικά την καταλληλότητα των συναρτήσεων κατανομής που προτείνονται.

Το σχήμα 2.8 αφορά την κατανομή του χρόνου διαδοχής V. Η θεωρητική κατανομή είναι εξ ορισμού εκθετική με πυκνότητα που δίνεται από την (2.6.10). Για κάθε εξεταζόμενο δείγμα έχουν χαραχθεί και οι καμπύλες του ελέγχου Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ, για επίπεδο σημαντικότητας 50% (δηλαδή το επίπεδο που χρησιμοποιήθηκε για τον καθορισμό του χρόνου διαχωρισμού, c).

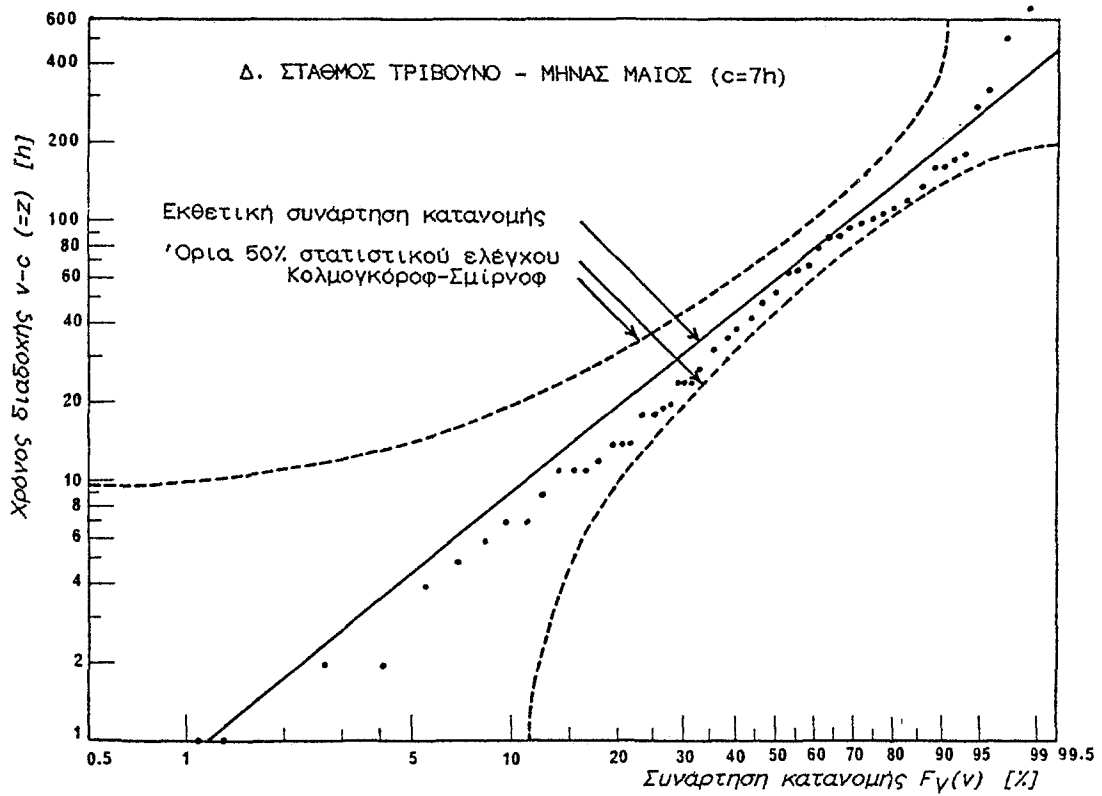
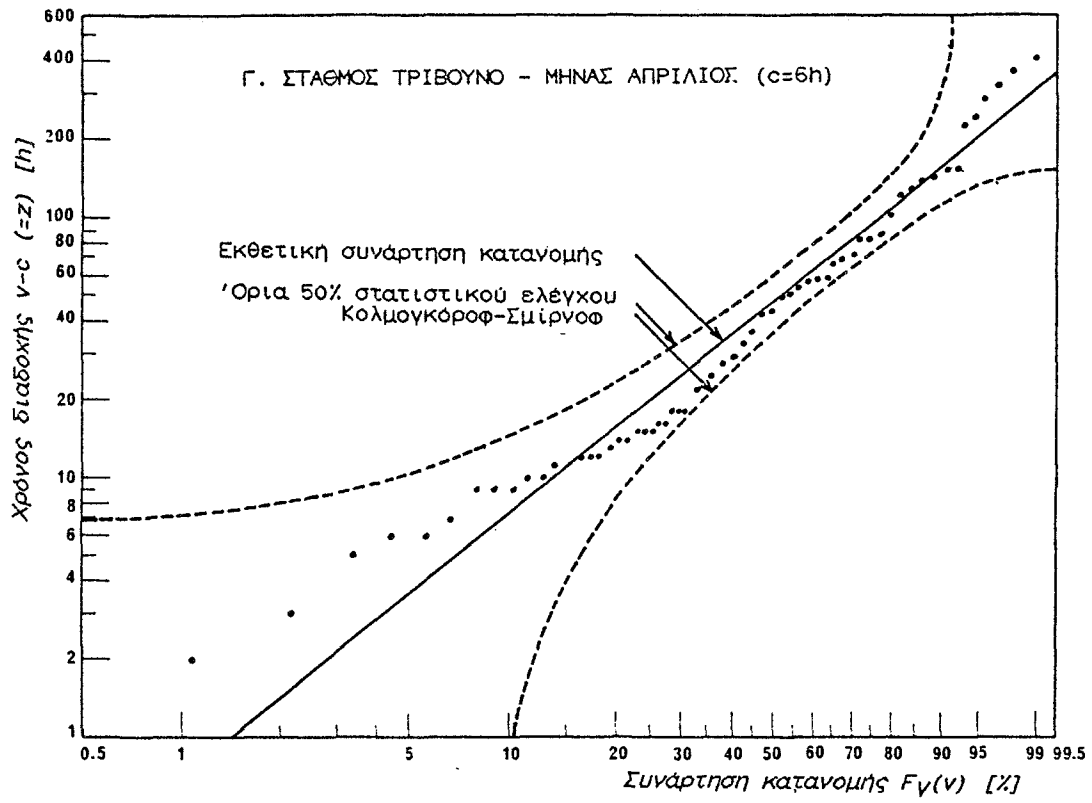
Τό σχήμα 2.9 αναφέρεται στην κατανομή της διάρκειας επεισοδίου βροχής, D. Η προτεινόμενη συνάρτηση κατανομής (2.7.14) φαίνεται να ταυτίζεται με τις συναρτήσεις κατανομής γάμα και Weibull, όπου οι παράμετροι των τελευταίων υπολογίστηκαν με τη μέθοδο των ροπών, με βάση τις θεωρητικές ροπές του πίνακα 2.1. Η εκθετική κατανομή διακρίνεται από την προτεινόμενη, χωρίς όμως να απέχει σημαντικά. Τα όρια του ελέγχου Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ, για επίπεδο 10%, που έχουν χαραχθεί, αφορούν την προτεινόμενη συνάρτηση κατανομής.

Τέλος το σχήμα 2.10 αναφέρεται στην κατανομή του χρόνου διακοπής της βροχής, B. Εκτός από την προτεινόμενη συνάρτηση κατανομής (2.7.16) έχουν χαραχθεί και οι συναρτήσεις κατανομής γάμα, Weibull και εκθετική. Από τη σύγκριση προκύπτει ότι η προτεινόμενη κατανομή προσαρμόζεται καλύτερα στα εμπειρικά δεδομένα, με αμέσως επόμενη την γάμα και τελευταία την εκθετική. Μάλιστα σημειώνεται ότι η προτεινόμενη κατανομή προσαρμόζεται πολύ καλά προς την εμπειρική για μικρές τιμές του χρόνου διακοπής,<sup>20</sup> όπως και στις μεγάλες. Για ενδιάμεσες τιμές του B, μεταξύ 10 και 40 ώρες, φαίνεται να υπάρχει κάποια συστηματική απόκλιση των εμπειρικών δεδομένων, αλλά πάντα μέσα στα όρια της παραμέτρου Δ του ελέγχου Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ, για επίπεδο 10%. Πάντως και στις ενδιάμεσες διάρκειες η προτεινόμενη κατανομή υπερέχει, σε σύγκριση με τις άλλες τρεις.

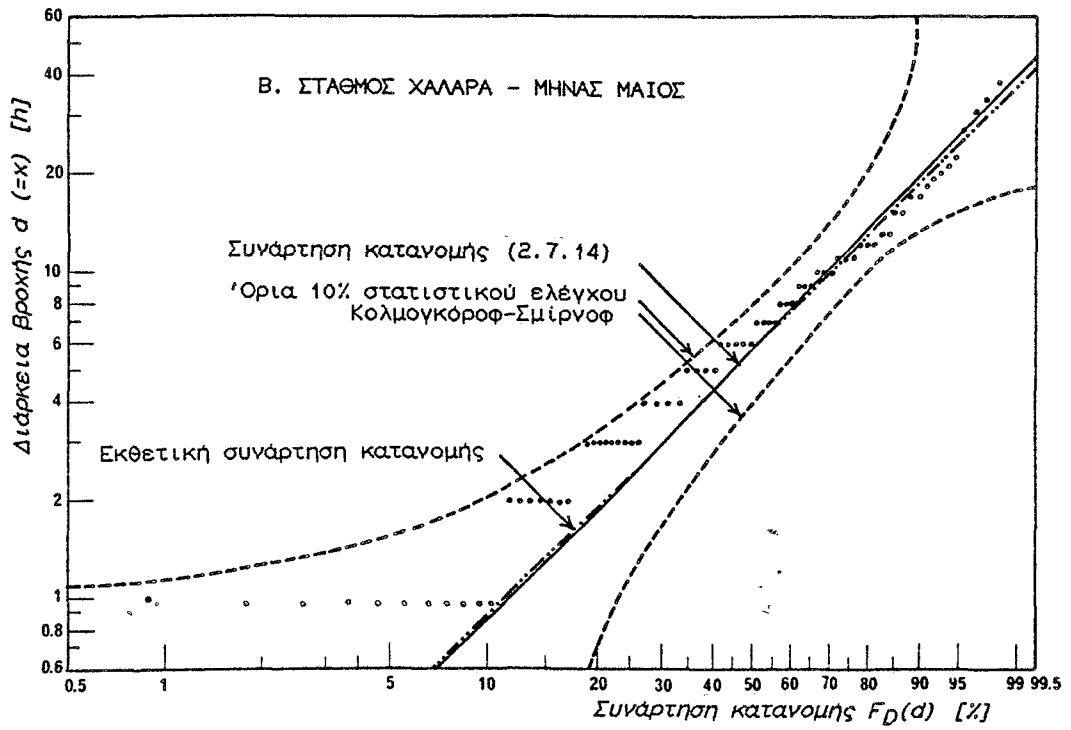
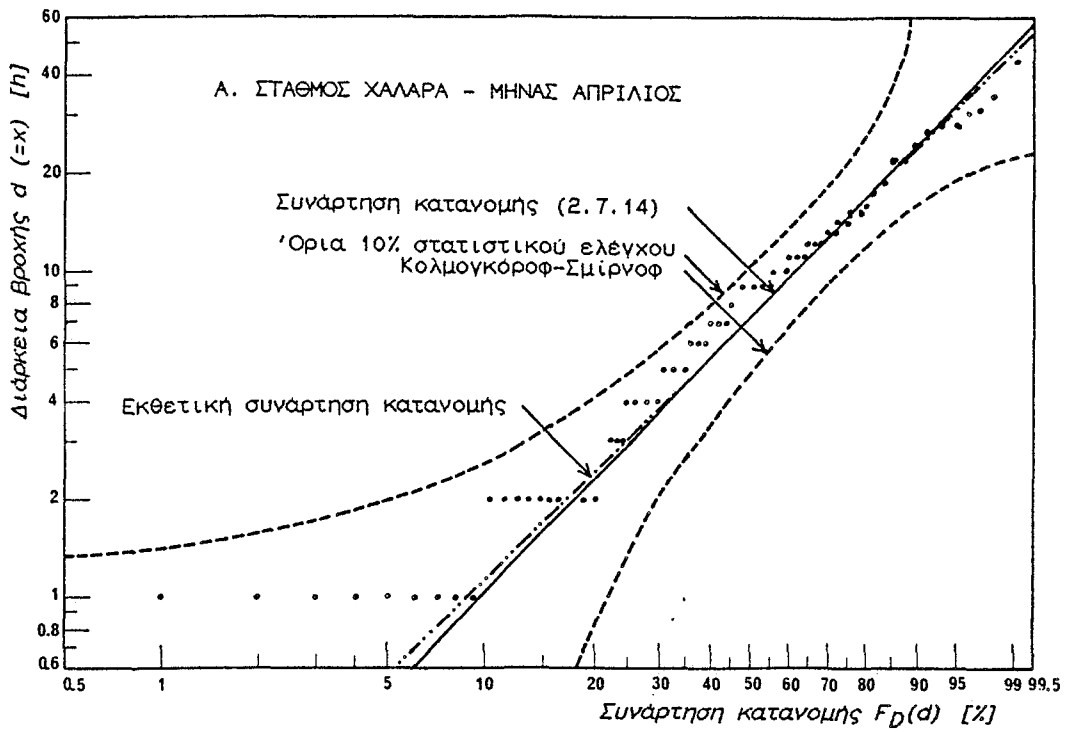
20. Κατά τον Raudkivi [1979] το πρόβλημα όλων των κατανομών που έχουν προταθεί για την B είναι η προσαρμογή στις μικρές διάρκειες (βλ. και σελ. 106).



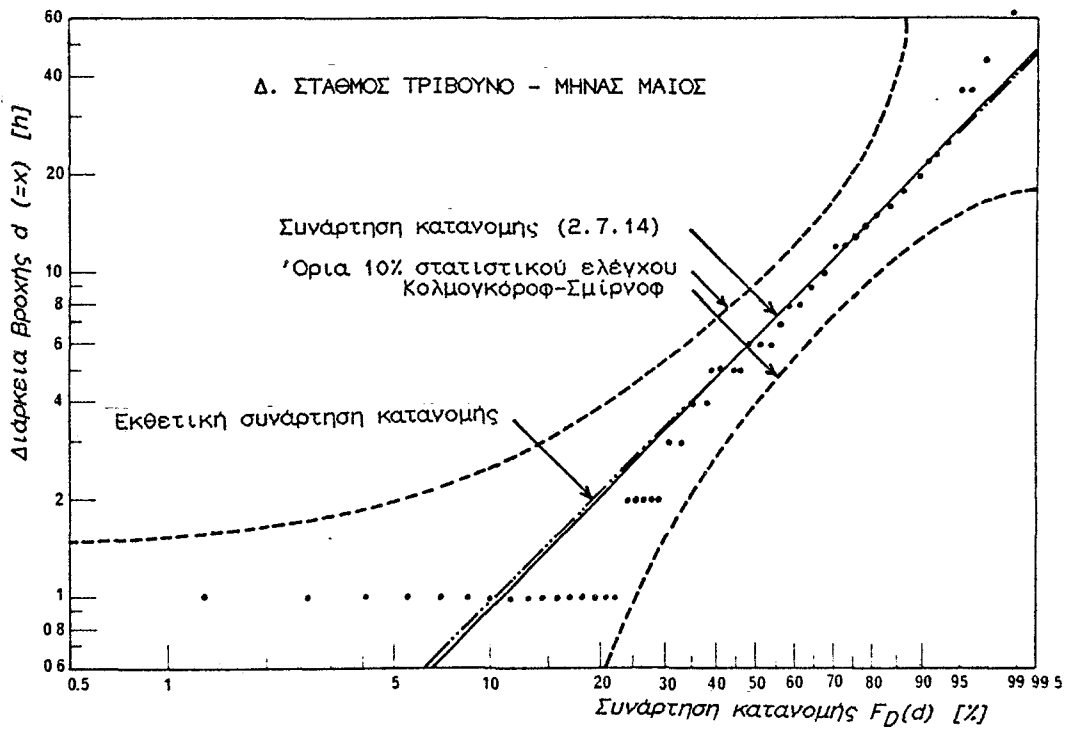
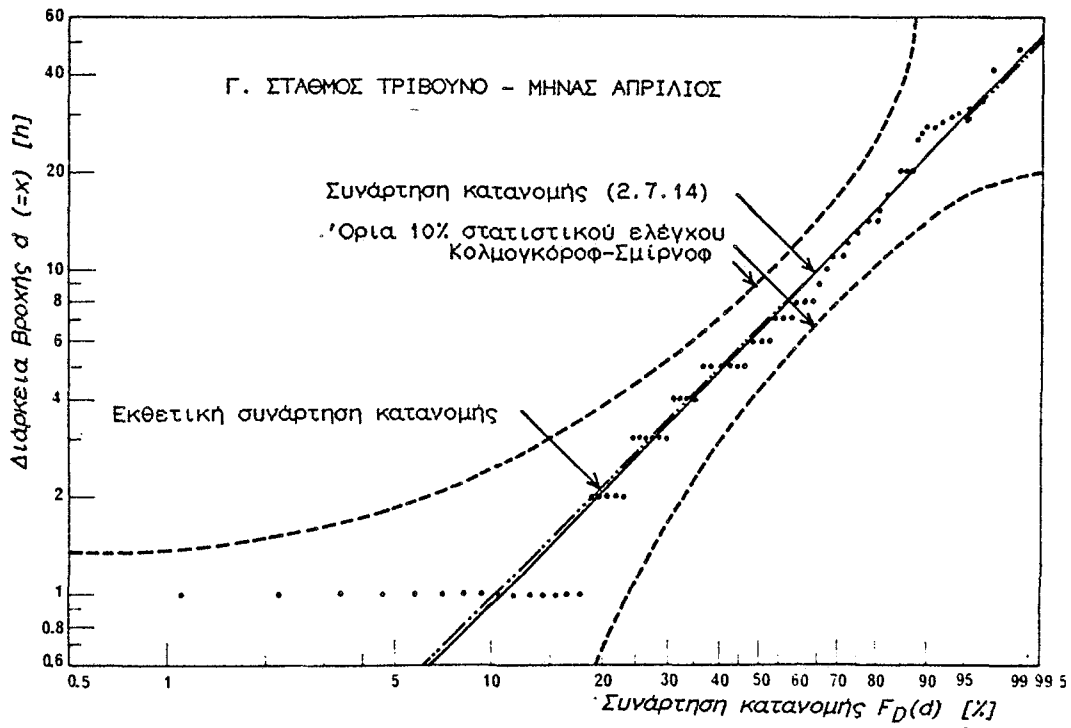
Σχήμα 2.8 : Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διαδοχής, ν.



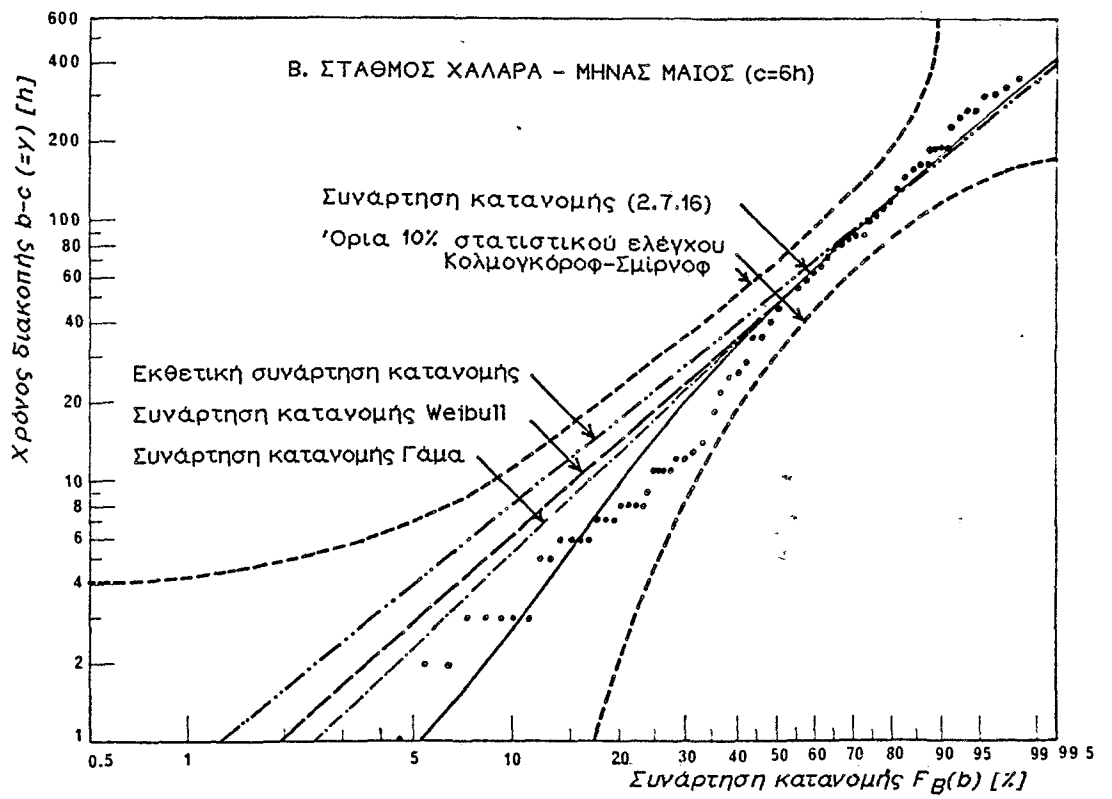
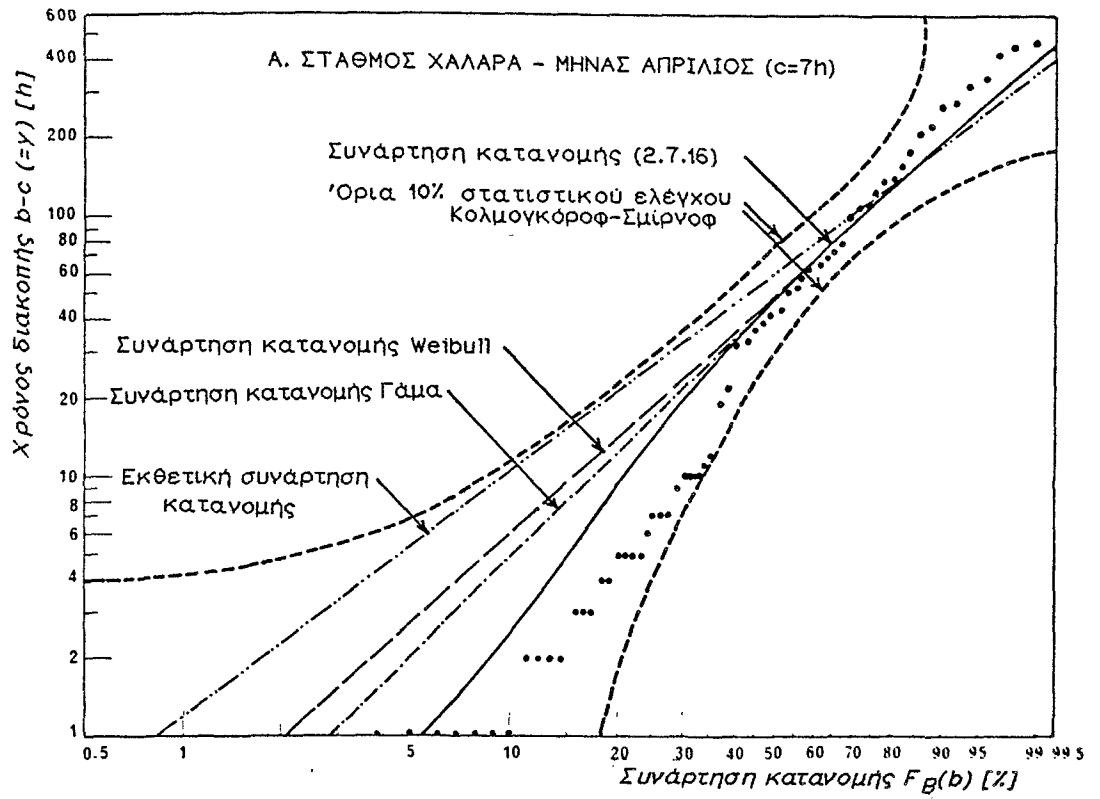
Σχήμα 2.8. (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διαδοχής,  $v$ .



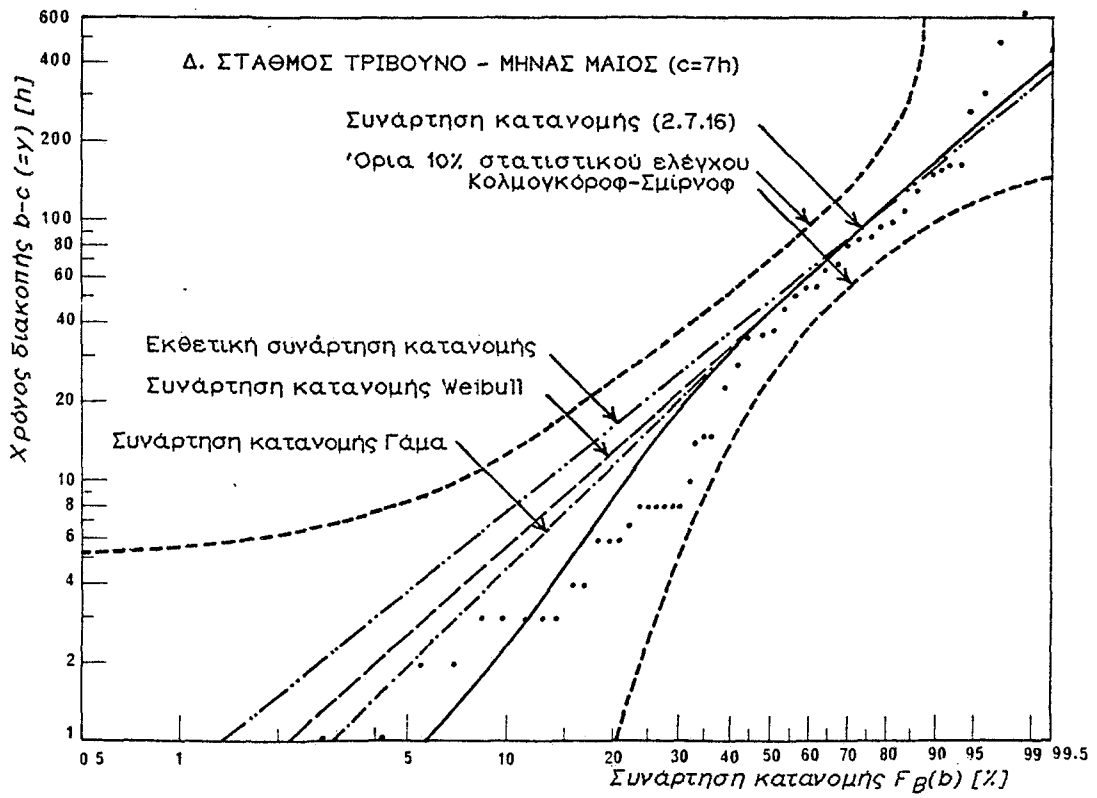
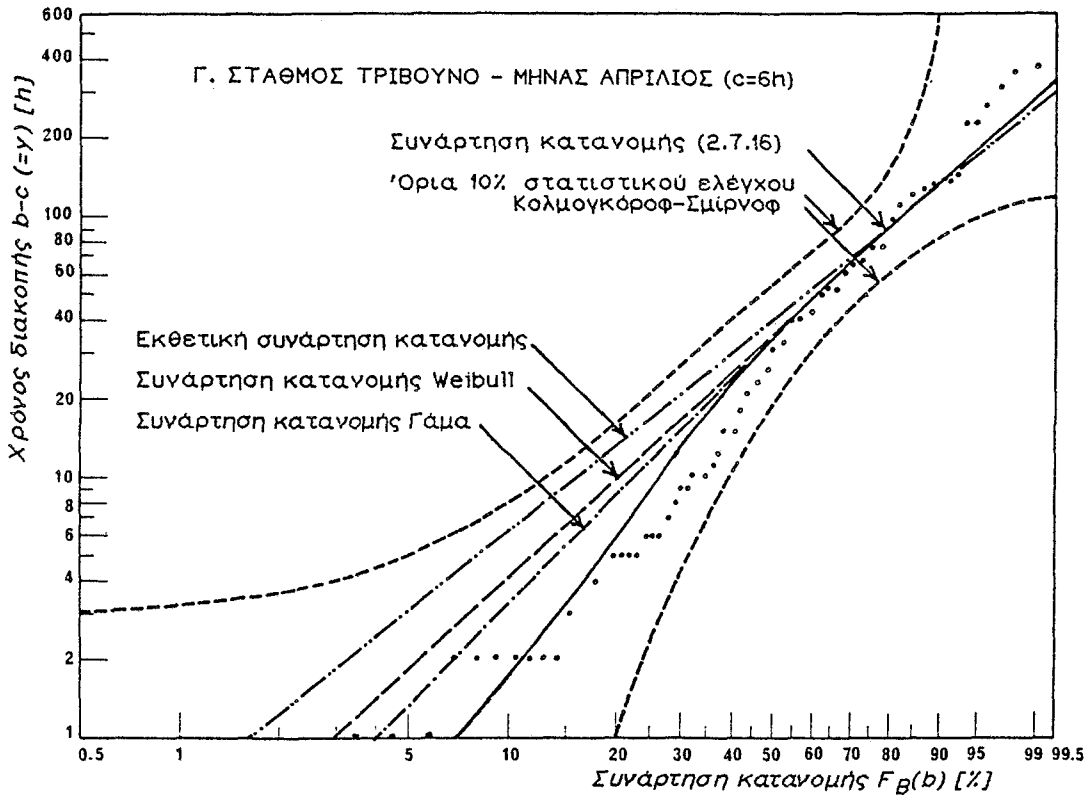
Σχήμα 2.9 : Συνάρτηση κατανομής της διάρκειας βροχής,  $D$ . Οι συναρτήσεις κατανομής Γάμα και Weibull πρακτικά ταυτίζονται με την (2.7.14)



Σχήμα 2.9 (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής της διάρκειας βροχής,  $D$ . Οι συναρτήσεις κατανομής Γάμα και Weibull πρακτικά ταυτίζονται με την (2.7.14)



Σχήμα 2.10 : Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διακοπής, Β.



Σχήμα 2.10 (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διακοπής, Β.



## 2.8. Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΎΨΟΥΣ ΒΡΟΧΗΣ

### 2.8.1. Γενικά

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε τις ιδιότητες της μεταβλητής "ύψος επεισοδίου βροχής, H". Για τη λειτουργία του μοντέλου επιμερισμού απαιτείται να είναι γνωστή η δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια, και γι' αυτό το ενδιαφέρον μας θα επικεντρωθεί σε αυτή τη δεσμευμένη κατανομή. Θεωρητικά και η περιθώρια συνάρτηση κατανομής είναι πλήρως γνωστή, αν είναι γνωστή η εν λόγω δεσμευμένη συνάρτηση.

Για λόγους απλοποίησης των υπολογισμών και συμβατότητας με το μοντέλο επιμερισμού, στην παράγραφο αυτή η διάρκεια βροχής D θα θεωρηθεί ως διακριτή μεταβλητή, με τιμές  $d = 1, 2, 3, \dots$  ώρες. Για το μοντέλο επιμερισμού ενδιαφέρουν οι διάρκειες  $d \geq 2$  ωρών. Μια πρώτη διερεύνηση των ιδιοτήτων της δεσμευμένης κατανομής έδειξε ότι υπάρχει κάποια ενιαία συναρτησιακή μορφή για διάρκειες  $d \geq 2$ , η οποία όμως δεν εφαρμόζεται και σε διάρκειες 1 ώρας. Για το λόγο αυτό εξετάζεται χωριστά η κατανομή του ύψους βροχής διάρκειας 1 ώρας.

Μια παραδοχή που έχει γίνει πολύ συχνά, προκειμένου να καθοριστεί η δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια είναι ότι η μέση ένταση του επεισοδίου βροχής είναι ανεξάρτητη της διάρκειας, με εκθετική (συνήθως) κατανομή (βλ. υποπαράγρ. 2.2.5). Η παραδοχή αυτή δεν χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, γιατί, όπως διαπιστώθηκε, θα οδηγούσε σε σοβαρές ανακρίβειες, ιδιαίτερα στην περιγραφή της εσωτερικής δομής του επεισοδίου βροχής. Πάντως, όπως θα φανεί παρακάτω η εν λόγω παραδοχή μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική οριακή περίπτωση των γενικότερων παραδοχών αυτής της εργασίας.

Οι σχετικές παρατηρήσεις και εργασίες για τη διατύπωση και τον έλεγχο των υποθέσεων που αφορούν τη δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής, στηρίχθηκαν στα παράλληλα ιστορικά δείγματα των μεταβλητών D-H (βλ. παραρτήματα Β.1 έως Β.4). Η επεξεργασία των δειγμάτων έγινε με την εξής μεθοδολογία: Το σύνολο των ιστορικών επεισοδίων βροχής χωρίστηκε σε κλάσεις, έτσι ώστε οι εμφανιζόμενες διάρκειες να βρίσκονται μέσα σε προκαθορισμένα για κάθε κλάση όρια  $d_{\min}$  και  $d_{\max}$ , όπου η πρώτη κλάση περιλαμβάνει τα επεισόδια με διάρκεια 1 ώρας ( $d_{\min} = d_{\max} = 1$ ). Τα όρια επιλέχθηκαν σε τρόπο ώστε οι κλάσεις να είναι περίπου ισόδυναμες και να περιλαμβάνουν 20 περίπου επεισόδια η κάθε μια. Κατά τον τρόπο αυτό από ένα δείγμα π.χ. 100 επεισοδίων βροχής σχηματίσαμε 5 επί μέρους δείγματα-κλάσεις των 20 επεισοδίων, στο καθένα από τα οποία η διάρκεια μπορεί να θεωρηθεί περίπου σταθερή, ίση με το μέσο όρο των διαρκειών που περιλαμβάνονται στην κλάση.

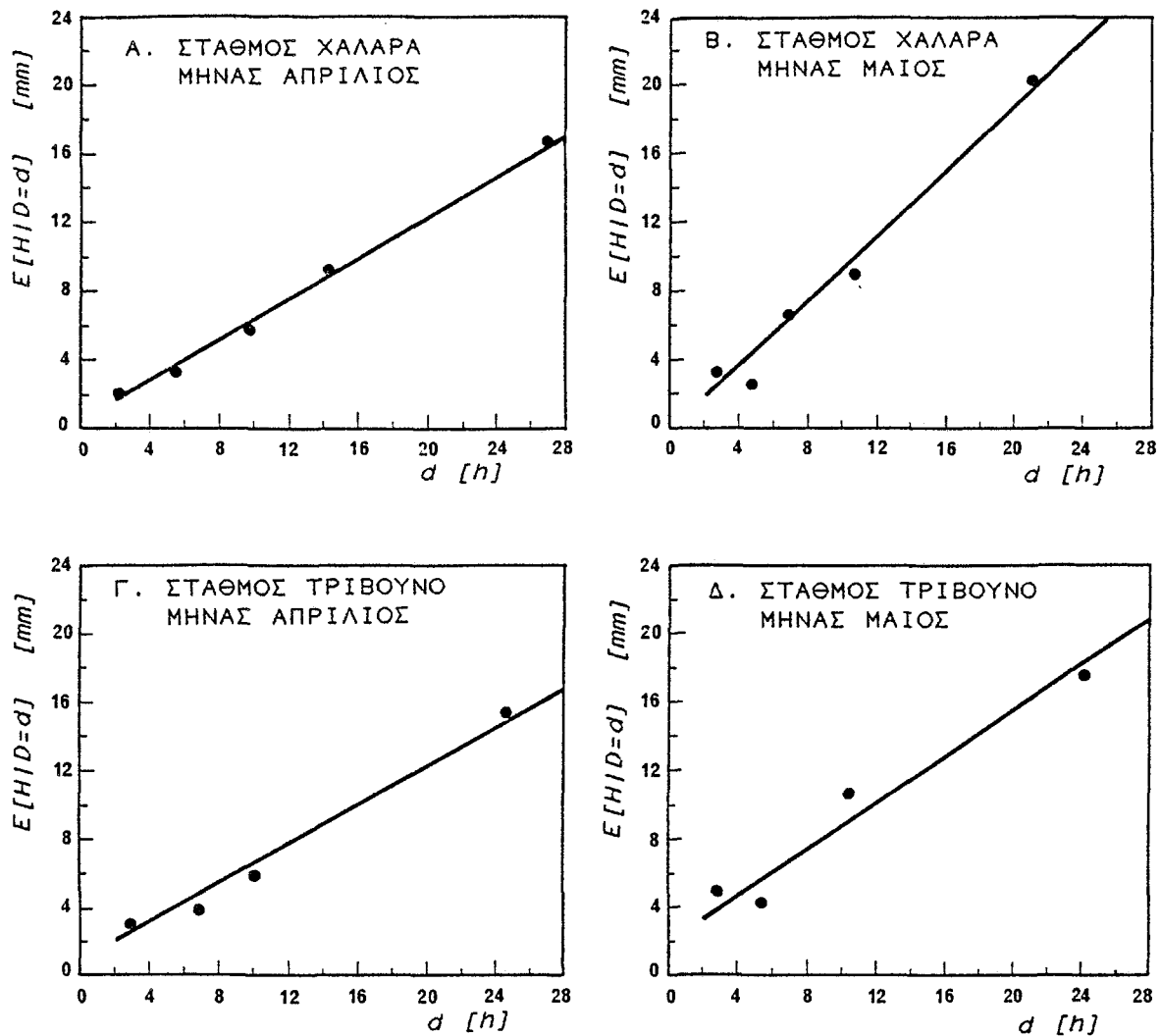
### 2.8.2. Δεσμευμένες ροπές

Στα σχήματα 2.11 και 2.12 έχουν απεικονιστεί οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις του ύψους βροχής ανά κλάση, συναρτήσει της μέσης διάρκειας της κλάσης, για διάρκειες  $d \geq 2$  ωρών. Παρατηρείται ότι και στις δύο περιπτώσεις η παρατηρούμενη μεταβολή μπορεί να αποδοθεί με γραμμικές συναρτήσεις.

Συνεπώς μπορούμε να δεχτούμε τα ακόλουθα:

$$E[H|D] = (d+a)\mu_{\Phi} - b \quad (2.8.1)$$

$$\{\text{Var}[H|D]\}^{1/2} = (d+a)\sigma_{\Phi} \quad (2.8.2)$$



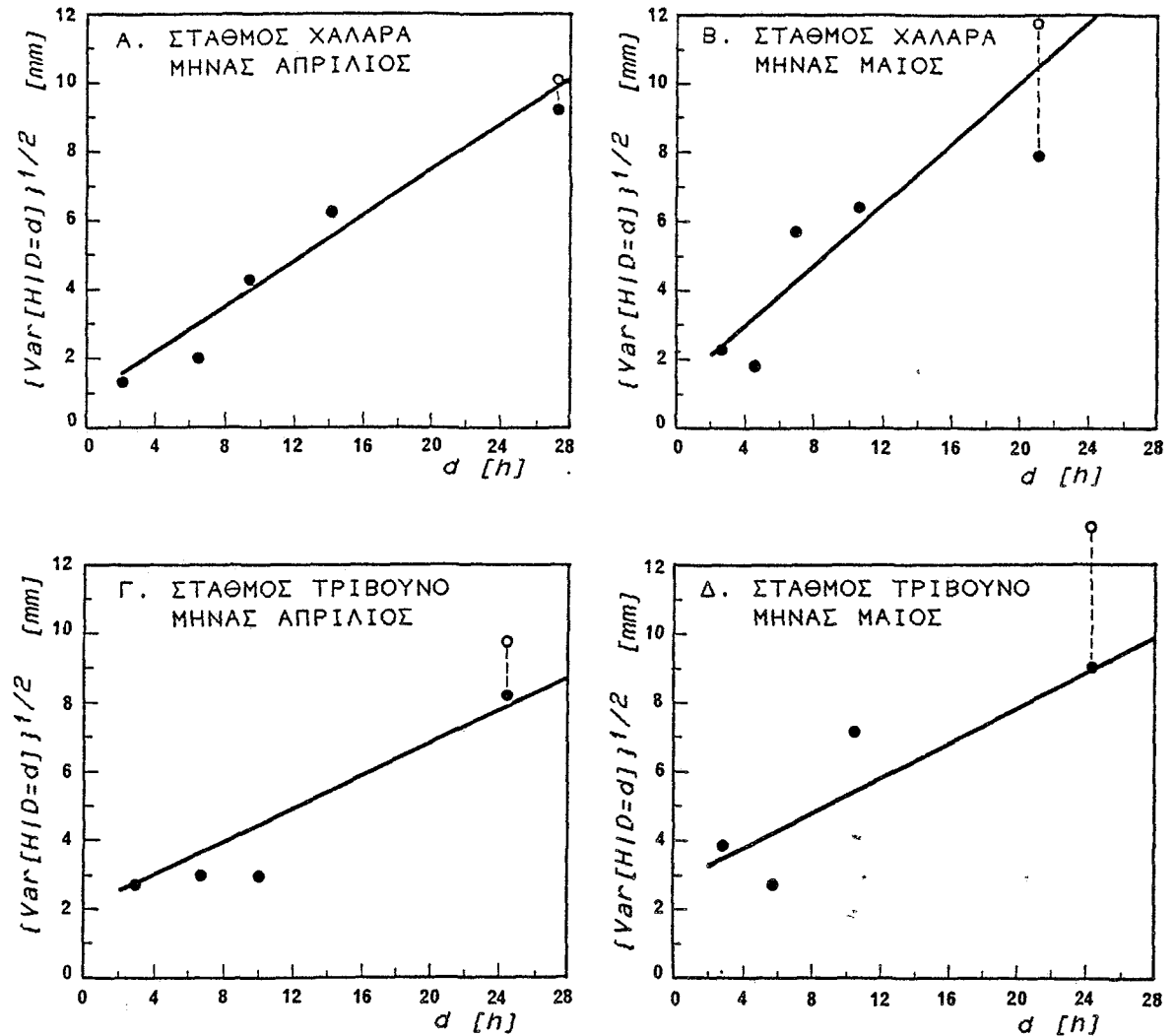
Σχήμα 2.11 : Μεταβολή της μέσης τιμής του ύψους επεισοδίου βροχής συναρτήσει της διάρκειας βροχής.

Τα σημεία αντιστοιχούν στις εμπειρικές τιμές των δειγματικών κλάσεων και οι συνεχείς γραμμές στην εξίσωση (2.8.1).

όπου  $a$ ,  $b$ ,  $\mu_{H1}$  και  $\sigma_{H1}$  παράμετροι και  $d > 1$ . Για  $d = 1$  οι αντίστοιχες ροπές δίνονται από τις ανεξάρτητες παραμέτρους  $\mu_{H1}$  και  $\sigma_{H1}^2$ , δηλαδή:

$$E[H|D=1] = \mu_{H1}, \quad \text{Var}[H|D=1] = \sigma_{H1}^2 \quad (2.8.3)$$

Συνεπώς για την πλήρη περιγραφή των δεσμευμένων ροπών απαιτούνται συνολικά 6 παράμετροι. Κάτω από ορισμένες συνθήκες ο αριθμός αυτός μπορεί να μειωθεί, αλλά σε βάρος της ακρίβειας του μοντέλου. Η μεθοδολογία υπολογισμού των παραμέτρων, καθώς και οι συνθήκες μείωσης του αριθμού τους, περιγράφονται στην παράγραφο 2.11.



Σχήμα 2.12 : Μεταβολή της τυπικής απόκλισης του ύψους επεισοδίου βροχής συναρτήσει της διάρκειας βροχής.

Τα σημεία αντιστοιχούν στις εμπειρικές τιμές των δειγματικών κλάσεων (βλ. και επεξήγηση στο κείμενο, σελ. 181). Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στην εξίσωση (2.8.2).

Οι συνεχείς γραμμές στα σχήματα 2.11 και 2.12 αντιστοιχούν στις τελικές τιμές των παραμέτρων. Ας σημειωθεί ότι στο σχήμα 2.12 υπάρχουν δύο ειδών σημεία που αντιπροσωπεύουν τα εμπειρικά δεδομένα: τα αρχικά (άσπροι κύκλοι), που αντιστοιχούν στις εμπειρικές τυπικές αποκλίσεις όπως υπολογίστηκαν από κάθε δειγματική κλάση, και τα διορθωμένα (μαύροι κύκλοι) στα οποία έχει γίνει αναγωγή της τυπικής απόκλισης, σε τρόπο ώστε να αντιστοιχεί σε επεισόδια εν-αίας διάρκειας ίσης με τη μέση διάρκεια της κλάσης. Η σύγκριση θεωρητικών και εμπειρικών τυπικών αποκλίσεων θα πρέπει να γίνεται με βάση τα διορθωμένα σημεία. Η εν λόγω διόρθωση επιβάλλεται από το γεγονός ότι η υπολογιζόμενη από κάθε δειγματική κλάση διασπορά έχει δύο συνιστώσες: η πρώτη αντιστοιχεί καθαρά στη διασπορά του ύψους βροχής και η δεύτερη στη διασπορά της διάρκειας που αναγκαστικά υπάρχει στις βροχοπτώσεις κάθε κλάσης. Όπως αποδεικνύεται στο τέλος της υποπαραγράφου, η διόρθωση της διασποράς δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\delta}^2 = \sigma_{\alpha}^2 - \sigma_{D\kappa}^2 (\sigma_{\Phi}^2 + \mu_{\Phi}^2) \quad (2.8.4)$$

όπου  $\sigma_{\delta}^2$  η διορθωμένη τιμή της διασποράς μιας συγκεκριμένης δειγματικής κλάσης,  $\sigma_{\alpha}^2$  η αντίστοιχη αρχική τιμή, όπως υπολογίζεται από τη δειγματική κλάση, και  $\sigma_{D\kappa}^2$  η διασπορά της διάρκειας στη δειγματική κλάση. Στην πραγματικότητα η  $\sigma_{D\kappa}^2$  είναι πολύ μικρή, εκτός από την τελευταία κλάση, με τα μεγαλύτερα όρια διάρκειας, όπου έχει σημαντική τιμή. Γι' αυτό μόνο τα τελευταία σημεία των αντίστοιχων σημειοσειρών διαφέρουν, ενώ τα υπόλοιπα ταυτίζονται. Επισημαίνεται ότι δεν χρειάζεται αντίστοιχη διόρθωση των δειγματικών μέσων τιμών (βλ. απόδειξη στο τέλος της υποπαραγράφου).

Από τις παραπάνω σχέσεις (2.8.1) και (2.8.2) μπορούμε να οδηγηθούμε στην παραδοχή ότι η μεταβλητή

$$\Phi = \frac{H + b}{D + a} \quad (2.8.5)$$

πρακτικά είναι ανεξάρτητη της  $D$ ,<sup>21</sup> και έχει μέση τιμή  $\mu_{\Phi}$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_{\Phi}$ . Είναι προφανές ότι οι σχέσεις (2.8.1) και (2.8.2) προκύπτουν άμεσα από την (2.8.5). Ας σημειωθεί ότι η μεταβλητή  $\Phi$  ταυτίζεται με τη μέση ένταση επεισοδίου βροχής όταν  $b = a = 0$ .

#### =====

#### Απόδειξη της σχέσης (2.8.4)

Έστω  $d_{\min}$  και  $d_{\max}$  τα όρια των διαρκειών μιας δειγματικής κλάσης, και  $\mu_{D\kappa}$  και  $\sigma_{D\kappa}^2$  η μέση τιμή και η διασπορά της διάρκειας βροχής στη δειγματική κλάση. Οι παράμετροι αυτές αντιστοιχούν στις εξής θεω-

-----  
21. Βέβαια είναι αναπόφευκτη κάποια είδους στοχαστική εξάρτηση μεταξύ  $\Phi$  και  $D$  (για  $b \neq 0$ ), δεδομένου ότι η ανισότητα  $H > 0$  συνεπάγεται ότι  $\Phi > b/(D+a)$ .

ρητικές ροπές:

$$\mu_{DK} \rightarrow E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}], \quad \sigma_{DK}^2 \rightarrow \text{Var}[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}]$$

Κατά παρόμοιο τρόπο η υπολογιζόμενη από τη δειγματική κλάση διασπορά του ύψους βροχής,  $\sigma_a^2$  αντιστοιχεί στη θεωρητική δεσμευμένη διασπορά

$$\sigma_a^2 \rightarrow \text{Var}[H|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}]$$

ενώ η διορθωμένη τιμή  $\sigma_b^2$  πρέπει να αντιστοιχεί σε σταθερή διάρκεια ίση με  $E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}]$ , ήτοι

$$\sigma_b^2 \rightarrow \text{Var}(H|D = E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}])$$

Αλλά λόγω της σχέσης (2.8.2) θα είναι

$$\text{Var}[H|D = \mu_{DK}] = (\mu_{DK} + a)^2 \sigma_\phi^2 \quad (a)$$

Εξ άλλου, θεωρώντας την  $D$  ως διακριτή μεταβλητή (χωρίς πάντως αυτό να παίζει ρόλο παρά μόνο στο συμβολισμό) θα έχουμε

$$E[H^2|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] = \sum_{d=d_{\min}}^{d_{\max}} \int_0^{\infty} h^2 f_{H|D}(h,d) p_K(d) dh = \sum_{d=d_{\min}}^{d_{\max}} \left[ \int_0^{\infty} h^2 f_{H|D}(h,d) dh \right] p_K(d) \Rightarrow$$

$$E[H^2|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] = \sum_{d=d_{\min}}^{d_{\max}} E[H^2|D=d] p_K(d) \quad (b)$$

όπου  $p_K(d) = \text{Pr}(D=d|d_{\min} \leq D \leq d_{\max})$ . Αλλά

$$E[H^2|D=d] = \text{Var}[H|D=d] + (E[H|D=d])^2 = (d+a)^2 \sigma_\phi^2 + (d+a)^2 \mu_\phi^2 + b^2 - 2(d+a)b \mu_\phi \Rightarrow$$

$$E[H^2|D=d] = (\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) d^2 + [2a(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) - 2b\mu_\phi] d + a^2(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) + b^2 - 2ab \mu_\phi \quad (y)$$

Αντικαθιστώντας την (y) στη (b) παίρνουμε

$$\begin{aligned} E[H^2|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] &= (\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) \sum_{d=d_{\min}}^{d_{\max}} d^2 p_K(d) + [2a(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) - 2b\mu_\phi] \sum_{d=d_{\min}}^{d_{\max}} d p_K(d) \\ &\quad + [a^2(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) + b^2 - 2ab \mu_\phi] \sum_{d=d_{\min}}^{d_{\max}} p_K(d) \\ &= (\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) E[D^2|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] + [2a(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) - 2b\mu_\phi] E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] \\ &\quad + [a^2(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) + b^2 - 2ab \mu_\phi] \end{aligned}$$

Τελικά

$$\begin{aligned} E[H^2|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] &= (\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) [\text{Var}[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] + (E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}])^2] \\ &\quad + [2a(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) - 2b\mu_\phi] E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] + [a^2(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) + b^2 - 2ab \mu_\phi] \end{aligned} \quad (b)$$

Αλλά με εφαρμογή της (y) προκύπτει

$$E(H^2|D=E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}]) = (\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) (E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}])^2 + [2a(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) - 2b\mu_\phi] E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] + a^2(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) + b^2 - 2ab\mu_\phi \quad (\epsilon)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (δ) και (ε) και κάνοντας πράξεις προκύπτει

$$E[H^2|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] = E(H^2|D=E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}]) + (\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) \text{Var}[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] \quad (\zeta)$$

Εξ' άλλου για τη δεσμευμένη μέση τιμή  $E[H|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}]$  προχωρώντας με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω έχουμε:

$$E[H|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] = \sum_{d=d_{\min}}^{d_{\max}} E[H|D=d] p_K(d) = \mu_\phi \sum_{d=d_{\min}}^{d_{\max}} d p_K(d) + (a\mu_\phi - b) \sum_{d=d_{\min}}^{d_{\max}} p_K(d) \\ = \mu_\phi E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] + (a\mu_\phi - b) = (E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] + a)\mu_\phi - b$$

οπότε παίρνοντας υπόψη την (2.8.1) προκύπτει:

$$E[H|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] = E(H|D = E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}]) \quad (\eta)$$

Ας σημειωθεί ότι η σχέση (η) εξηγεί γιατί δεν χρειάζεται αντίστοιχη διόρθωση των εμπειρικών μέσων τιμών στο διάγραμμα δεσμευμένης μέσης τιμής συναρτήσει της διάρκειας. Υψώνοντας στο τετράγωνο την (η) και αφαιρώντας από την (ζ) προκύπτει

$$\text{Var}[H|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] = \text{Var}(H|D=E[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}]) + (\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) \text{Var}[D|d_{\min} \leq D \leq d_{\max}] \quad (\theta)$$

Αντικαθιστώντας στην (θ) τις αντίστοιχες δειγματικές ροπές παίρνουμε

$$\sigma_a^2 = \sigma_\delta^2 + (\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) \sigma_{DK}^2$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα η (2.8.4)

### 2.8.3. Περιθώριες ροπές

Οι περιθώριες ροπές της μεταβλητής H μπορεί να υπολογιστούν με βάση τις εκφράσεις των δεσμευμένων ροπών (2.8.1) και (2.8.2) και τις ροπές της D. Κατ' αρχήν εισάγουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς που βοηθούν στην έκφραση των σχέσεων περιθώριων ροπών:

$$\mu_D = E[D], \quad \sigma_D^2 = \text{Var}[D], \quad \mu_H = E[H], \quad \sigma_H^2 = \text{Var}[H], \quad s_{DH} = \text{Cov}[D, H],$$

$$p_1 = \text{Pr}(D=1), \quad \mu_{D1} = E[D|D=1] = 1, \quad \mu_{H1} = E[H|D=1], \quad \sigma_{H*}^2 = \text{Var}[H|D=1],$$

$$\mu_{D*} = E[D|D>1], \quad \sigma_{D*}^2 = \text{Var}[D|D>1],$$

$$\mu_{H*} = E[H|D>1], \quad \sigma_{H*}^2 = \text{Var}[H|D>1], \quad s_{DH*} = \text{Cov}[D, H|D>1]$$

Μεταξύ των παραπάνω ομάδων παραμέτρων ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mu_D = (1-p_1)\mu_{D*} + p_1\mu_{D1} \quad (2.8.6)$$

$$\mu_H = (1-p_1)\mu_{H*} + p_1\mu_{H1} \quad (2.8.7)$$

$$\sigma_D^2 + \mu_D^2 = (1-p_1)(\sigma_{D*}^2 + \mu_{D*}^2) + p_1 \mu_{D1}^2 \quad (2.8.8)$$

$$\sigma_H^2 + \mu_H^2 = (1-p_1)(\sigma_{H*}^2 + \mu_{H*}^2) + p_1(\sigma_{H1}^2 + \mu_{H1}^2) \quad (2.8.9)$$

$$\sigma_{DH} + \mu_D \mu_H = (1-p_1)(\sigma_{DH*} + \mu_{D*} \mu_{H*}) + p_1 \mu_{D1} \mu_{H1} \quad (2.8.10)$$

Οι περιθώριες ροπές της D, υποτίθεται ότι είναι γνωστές από τις σχέσεις της παραγράφου 2.7. Επίσης είναι γνωστή και η πιθανότητα  $p_1$ , αφού μπορεί να υπολογιστεί από την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής (2.7.15). Επειδή εδώ η διάρκεια θεωρείται ως διακριτή μεταβλητή, ενώ η κατανομή (2.7.15) αναφέρεται σε συνεχή μεταβλητή, θα θεωρηθεί ότι  $p_1 = F_D(1.5)$ . Ακόμη επειδή η  $f_D(d)$  μπορεί να προσεγγιστεί με την εκθετική κατανομή μπορούμε τελικά να δεχτούμε:

$$p_1 = 1 - \exp(-1.5/\mu_D) \quad (2.8.11)$$

Οι ροπές του ύψους βροχής,  $\mu_{H*}$  και  $\sigma_{H*}^2$ , καθώς και η συνδιασπορά  $\sigma_{DH*}$ , μπορούν να προσδιοριστούν συναρτήσει των αντίστοιχων ροπών της D και των παραμέτρων a, b,  $\mu_\Phi$ , και  $\sigma_\Phi$ , με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\mu_{H*} = (\mu_{D*} + a)\mu_\Phi - b \quad (2.8.12)$$

$$\sigma_{H*}^2 = (\sigma_\Phi^2 + \mu_\Phi^2)\sigma_{D*}^2 + (\mu_{D*} + a)^2 \sigma_\Phi^2 \quad (2.8.13)$$

$$\sigma_{DH*} = \mu_\Phi \sigma_{D*}^2 \quad (2.8.14)$$

Κατά συνέπεια με τη χρησιμοποίηση όλων των παραπάνω σχέσεων μπορούν να υπολογιστούν οι περιθώριες ροπές του ύψους βροχής,  $\mu_H$  και  $\sigma_H^2$ , καθώς και η συνδιασπορά  $\sigma_{DH}$ . Η άμεση έκφραση των εν λόγω ροπών συναρτήσει των 6 παραμέτρων είναι κάπως πολύπλοκη και γι' αυτό παραλείπεται.

---

Απόδειξη των (2.8.6) έως (2.8.10)

Έστω  $p(d) = \Pr(D=d)$  και  $p_x(d) = \Pr(D=d|D>1)$ . Προφανώς ισχύει:

$$p_x(d) = p(d) / (1-p_1)$$

Έστω τώρα η τυχούσα αμοιβαία ροπή των (D, H) τάξης (i, j). Θα είναι:

$$\begin{aligned} E[D^i H^j] &= \sum_{d=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d^i h^j f_{H|D}(h, d) p(d) dh = i^j p_1 \int_0^{\infty} h^j f_{H|D}(h, 1) dh + \sum_{d=2}^{\infty} \int_0^{\infty} d^i h^j f_{H|D}(h, d) p(d) dh = \\ &= \mu_{D1}^i p_1 \int_0^{\infty} h^j f_{H|D}(h, 1) dh + \sum_{d=2}^{\infty} \int_0^{\infty} d^i h^j f_{H|D}(h, d) (1-p_1) p_x(d) dh \end{aligned}$$

Η παράμετρος  $\mu_{D1}=1$  μήκε παραπάνω σε αντικατάσταση του 1, για λόγους διαστατικής ομογένειας. Τελικά

$$E[D^i H^j] = p_1 \mu_{D1}^i E[H^j | D=1] + (1-p_1) E[D^i H^j | D>1] \quad (a)$$

Με εφαρμογή της (a) για τις κατάλληλες κάθε φορά τιμές των i και j, προκύπτουν οι (2.8.6) έως (2.8.10)

Απόδειξη των (2.8.12) και (2.8.13)

Η (2.8.12) προκύπτει εύκολα από την σχέση (η) της υποπαράγραφου 2.8.2, αν τεθεί  $d_{\min} = 2$  και  $d_{\max} = \infty$ . Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και η (2.8.13) από τη σχέση (θ) της υποπαράγραφου 2.8.2.

Απόδειξη της (2.8.14)

Ισχύει:

$$\begin{aligned} E\{DH|D>1\} &= \sum_{d=2}^{\infty} \int_0^{\infty} dh f_{H|D}(h,d) p_x(d) dh = \sum_{d=2}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} h f_{H|D}(h,d) dh \right] d p_x(d) = \sum_{d=2}^{\infty} E\{H|D=d\} d p_x(d) \\ &= \mu_{\phi} \sum_{d=2}^{\infty} d^2 p_x(d) + (a\mu_{\phi} - b) \sum_{d=2}^{\infty} d p_x(d) = \mu_{\phi}(\sigma_{D_x}^2 + \mu_{D_x}^2) + (a\mu_{\phi} - b) \mu_{D_x} \end{aligned}$$

Παίρνοντας υπόψη και την (2.8.12) θα έχουμε

$$E\{DH|D>1\} = \mu_{\phi} \sigma_{D_x}^2 + ((\mu_{D_x} + a)\mu_{\phi} - b) \mu_{D_x} = \mu_{\phi} \sigma_{D_x}^2 + \mu_{H_x} \mu_{D_x}$$

οπότε προκύπτει

$$\text{Cov}\{D, H|D>1\} = \mu_{\phi} \sigma_{D_x}^2$$

**2.8.4. Αριθμητικές τιμές των παραμέτρων και ροπών**

Οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων και των ροπών του ύψους βροχής φαίνονται στον πίνακα 2.2. Οι τιμές αυτές υπολογίστηκαν από τα ιστορικά δείγματα με μεθοδολογία που αναλύεται στην παράγραφο 2.11.

**2.8.5. Συναρτήσεις κατανομής**

Προκειμένου να ολοκληρωθεί το μοντέλο περιγραφής του ύψους βροχής, θα δεχτούμε ότι η δεσμευμένη κατανομή του για δεδομένη διάρκεια είναι η κατανομή γάμα. Οι παράμετροι της κατανομής μπορούν να υπολογιστούν από τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά με τη μέθοδο των ροπών. Μια προσεγγιστική εικόνα της προσαρμογής της κατανομής γάμα στα ιστορικά δεδομένα δίνει το σχήμα 2.13. Σ' αυτό έχει σχεδιαστεί για κάθε δειγματική κλάση, με καθορισμένα όρια διάρκειας, η εμπειρική συνάρτηση κατανομής, σε σύγκριση με την συνάρτηση κατανομής γάμα. Η τελευταία υπολογίστηκε με ροπές που προκύπτουν από τις (2.8.1) και (2.8.2), για διάρκεια ίση με τη μέση διάρκεια της δειγματικής κλάσης. Με τα δεδομένα αυτά δεν είναι δυνατό να γίνει ακριβής στατιστικός έλεγχος της καταλληλότητας της κατανομής γάμα, ως δεσμευμένης συνάρτησης κατανομής, γιατί τα δεδομένα κάθε κλάσης δεν έχουν σταθερή διάρκεια βροχής. Όμως η καλή προσαρμογή που παρατηρείται στο σχήμα 2.13 είναι μια σαφής ένδειξη της καταλληλότητας της κατανομής.



Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της παραγράφου, η περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ύψους βροχής είναι θεωρητικώς γνωστή, και έχει πυκνότητα που δίνεται από τη σχέση:

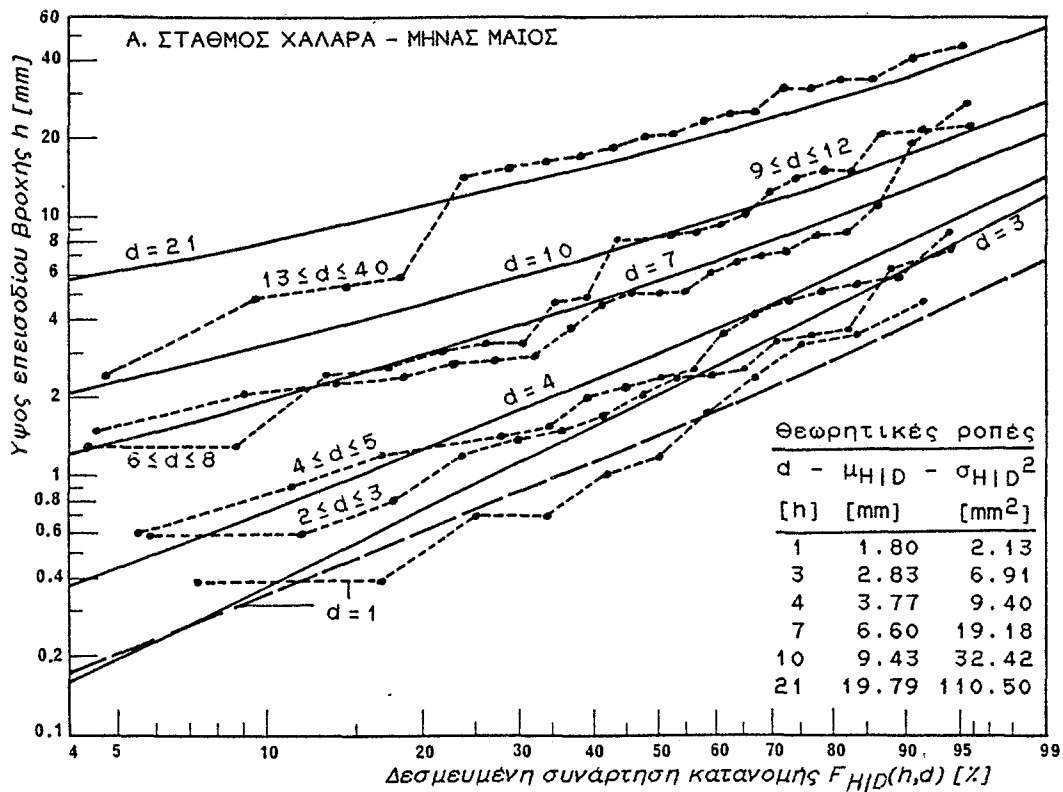
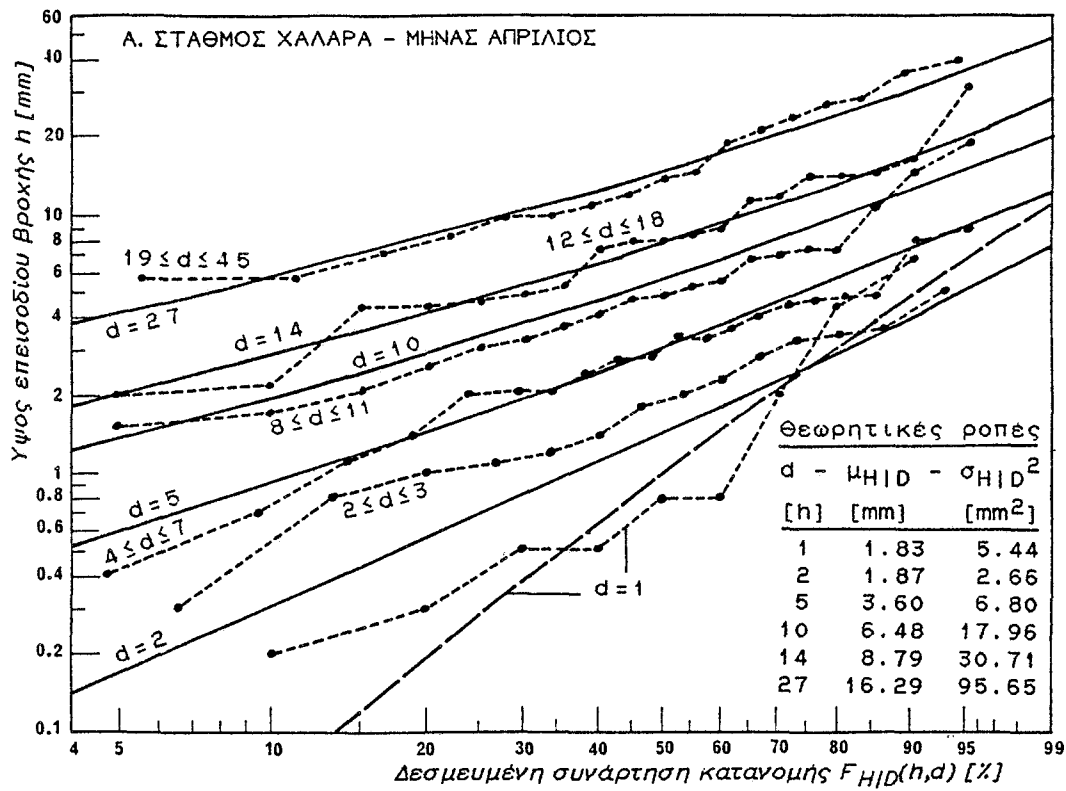
$$f_H(h) = \sum_{d=1}^{\infty} f_{H|D}(h,d) p(d) \quad (2.8.15)$$

όπου η  $f_{H|D}(h,d)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γάμα, με παραμέτρους που είναι συναρτήσεις του  $d$ , και η  $p(d)$  μπορεί να υπολογιστεί από την (2.7.14). Στην πραγματικότητα η  $f_H(h)$  δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά με την (2.8.15), λόγω της πολύπλοκης μορφής της. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι κατανομή της  $H$  είναι κατά προσέγγιση γάμα, με παραμέτρους που υπολογίζονται από τις ροπές  $\mu_H$  και  $\sigma_H^2$ . Μάλιστα, επειδή  $\mu_H \approx \sigma_H$  (όπως προκύπτει από τον πίνακα 2.2), η εν λόγω κατανομή θα είναι πολύ κοντά στην εκθετική. Το θέμα αυτό δεν θα αναλυθεί διεξοδικότερα, γιατί στο μοντέλο επιμερισμού χρειάζεται μόνο η δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής, και όχι η περιθώρια.

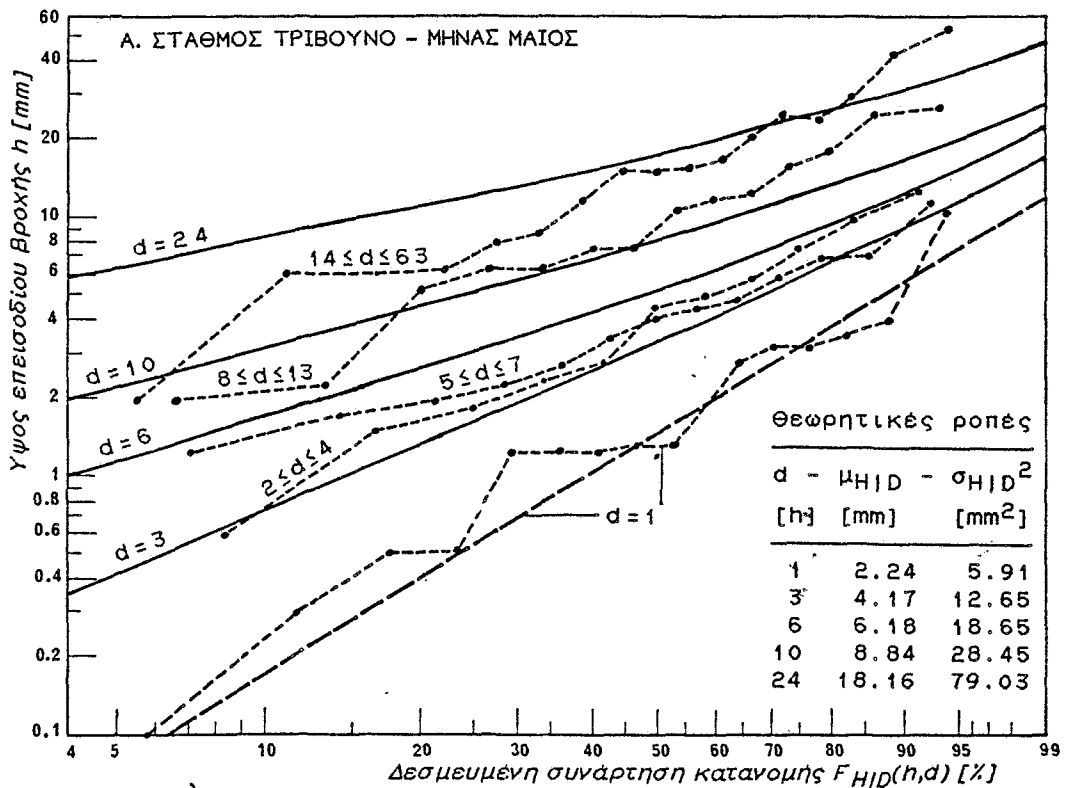
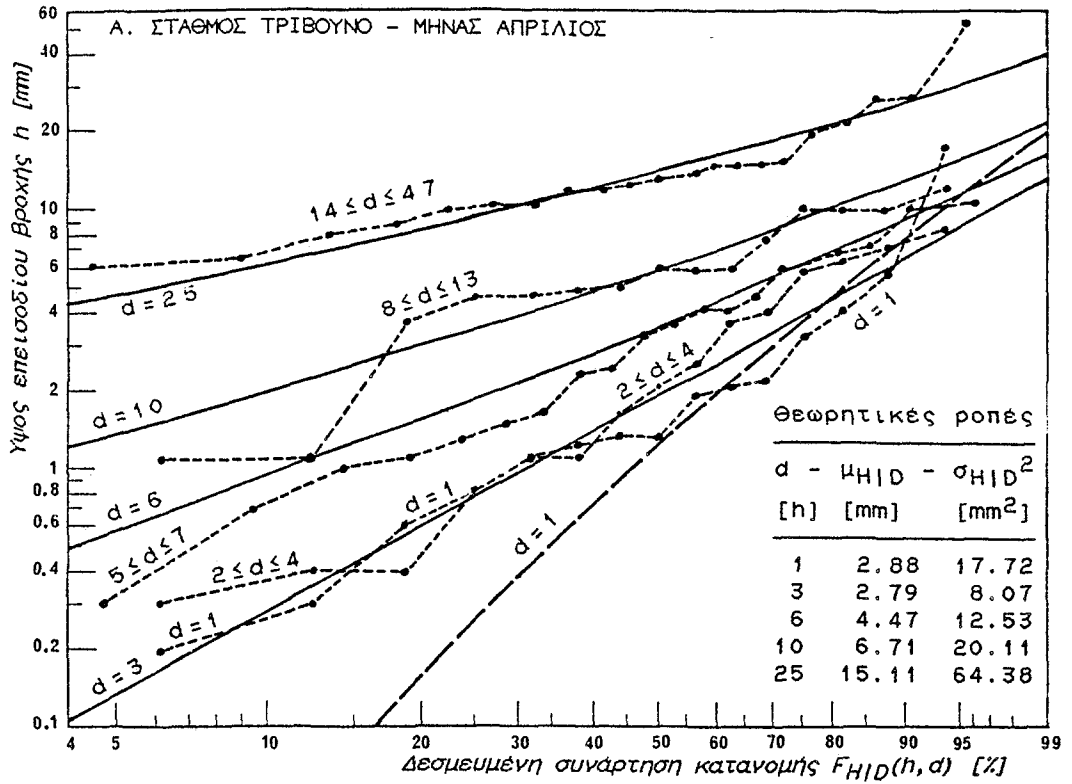
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2  
ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ ΤΟΥ ΥΨΟΥΣ ΕΠΕΙΣΟΔΙΟΥ ΒΡΟΧΗΣ

Παράμετρος	ΣΤΑΘΜΟΣ : ΧΑΛΑΡΑ		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΤΡΙΒΟΥΝΟ		
	Απρίλιος	Μάιος	Απρίλιος	Μάιος	
<u>Διάρκεια βροχής <math>D = 1</math> ώρα</u>					
Μέγ. Δείγματος	N	9	11	15	16
Μέση τιμή	$\mu_{H1}$	1.83	1.80	2.88	2.24
Τυπική απόκλιση	$\sigma_{H1}$	2.33	1.46	4.21	2.43
<u>Διάρκεια βροχής <math>D &gt; 1</math> ώρα</u>					
Μέγ. Δείγματος	N	89	96	71	55
Παράμετρος	a	3.00	3.00	9.00	11.00
"	b	1.02	2.82	3.93	5.15
"	$\mu_{\Phi}$	0.575	0.938	0.562	0.663
"	$\sigma_{\Phi}$	0.326	0.438	0.236	0.254
-----					
Μέση τιμή	$\mu_H$	7.02 (7.02)	8.21 (8.21)	6.80 (6.80)	8.38 (8.38)
Τυπική απόκλιση	$\sigma_H$	8.58 (7.51)	10.29 (9.34)	7.56 (7.52)	8.67 (9.46)
Συνδιασπορά	$\sigma_{DH}$	69.75	66.04	55.08	63.25
Συντ. συσχέτισης	$\rho_{DH}$	0.73	0.73	0.73	0.75
-----					
Σημείωση: Οι τιμές που είναι σε παρενθέσεις αντιπροσωπεύουν εμπειρικές ροπές, υπολογισμένες άμεσα από το δείγμα.					

22. Αν η  $D$  θεωρηθεί συνεχής μεταβλητή τότε το άθροισμα στην (2.8.15) πρέπει να αντικατασταθεί με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα, και η  $p(d)$  με την  $f_D(d)$ .



Σχήμα 2.13 : Δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια. Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στην κατανομή γάμα και οι διακεκομμένες στις εμπειρικές κατανομές των δειγματικών κλάσεων.



Σχήμα 2.13 (συνέχεια): Δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια.

Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στην κατανομή γάμα και οι διακεκομμένες στις εμπειρικές κατανομές των δειγματικών κλάσεων.

## 2.9. Η ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΕΠΕΙΣΟΔΙΟΥ ΒΡΟΧΗΣ

### 2.9.1. Γενικά χαρακτηριστικά της εσωτερικής δομής και δυσκολίες στην περιγραφή της

Με τον όρο "εσωτερική δομή του επεισοδίου βροχής" εννοούμε τις στοχαστικές ιδιότητες των τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες αναφέρονται σε χρονικά διαστήματα που περιλαμβάνονται μέσα σε ένα επεισόδιο βροχής. Τέτοιες μεταβλητές είναι η στιγμιαία ένταση βροχής, και το ωριαίο ύψος βροχής, που κυρίως θα μας απασχολήσει. Οι ιδιότητες που θα εξετάσουμε είναι οι συναρτήσεις κατανομής και η στοχαστική εξάρτηση των μεταβλητών.

Οδηγός μας για τη μελέτη της εσωτερικής δομής θα είναι μερικές αρχικές διαπιστώσεις για τη συμπεριφορά του ωριαίου ύψους βροχής, που βγήκαν από την ανάλυση των ιστορικών δεδομένων. Αυτές είναι οι ακόλουθες:

1. Τα ωριαία ύψη βροχής αποτελούν μια μη μόνιμη στοχαστική ανέλιξη. Διαπιστώνεται ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά τους μεταβάλλονται με το χρόνο, αλλά και με τη διάρκεια βροχής.
2. Η μέση τιμή του ωριαίου ύψους βροχής εν γένει μειώνεται με την αύξηση της διάρκειας. Αυτό συμφωνεί με την γενική εμπειρική εικόνα που έχουμε για το φαινόμενο της βροχής.
3. Οι μέσες τιμές των ωριαίων υψών βροχής εμφανίζουν ομοιότητα στη χρονική κατανομή τους μέσα στο επεισόδιο βροχής, αν αδιαστατοποιηθεί η κλίμακα του χρόνου (βλ. και υποπαράγραφο 2.2.5). Συνεπώς η επίδραση του χρόνου  $t$  στο μέσο ωριαίο ύψος μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του αδιαστατοποιημένου χρόνου  $\theta = t/D$  (όπου το  $t$  μετριέται από την έναρξη του επεισοδίου).
4. Η τυπική απόκλιση του ωριαίου ύψους βροχής είναι περίπου γραμμικά ανάλογη της μέσης τιμής.
5. Η παρατηρούμενη μη μονιμότητα δεν εξαντλείται μόνο στα μέσα στατιστικά χαρακτηριστικά του ωριαίου ύψους, αλλά αφορά και τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης. Συγκεκριμένα διαπιστώνεται ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης  $\alpha'$  τάξης του ωριαίου ύψους σαφώς αυξάνει με την αύξηση της διάρκειας βροχής. Αντίθετα, δεν εμφανίζεται σαφής επίδραση του χρόνου στον εν λόγω συντελεστή.

Οι διαπιστώσεις αυτές θα τεκμηριωθούν πιο κάτω. Προς το παρόν θα εξετάσουμε τις δυνατότητες κατάρτισης ενός απλού σχετικά θεωρητικού μοντέλου, που να ανταποκρίνεται σε αυτές τις διαπιστώσεις, και, ει δυνατόν, να τις εξηγήει. Είναι κατ' αρχήν σκόπιμο ένα τέτοιο μοντέλο να διατυπωθεί με βάση τη στιγμιαία ένταση βροχής, και στη συνέχεια να παραχθούν οι ιδιότητες του ωριαίου ύψους.

Κατ' αρχήν τα πιο σύγχρονα μοντέλα που περιγράφονται στην παράγραφο 2.3, και που στηρίζονται στις σημειακές ανελίξεις, επιτυγχάνουν την κομψή μαθηματική περιγραφή και την εξήγηση του ρυθμού εμφάνισης των επεισοδίων βροχής και της εσωτερικής δομής των επεισοδίων, αλλά δεν περιγράφουν, ούτε βέβαια εξηγούν την μη μονιμότητα του ύψους ή της έντασης βροχής. Επίσης δεν δέχονται καμιά επίδραση της διάρκειας βροχής, σε καμιά μεταβλητή (άλλωστε συνήθως αποφεύγουν να ορίσουν τη διάρκεια βροχής). Άλλα παλιότερα μοντέλα, όπως πκ. των *Bras και Rodriguez-Iturbe* [1976a] ή των *Grace και Eagleson* [1966], δέχονται και περιγράφουν την μη μονιμότητα στο χρόνο, χωρίς όμως να δέχονται επίδραση της διάρκειας βροχής. Στα τελευταία η έκφραση της μεταβολής των στατιστικών χαρακτηριστικών με το χρόνο περιγράφεται από καμπύλες αδιαστατοποιημένου χρόνου.

Για ενδεικτικούς λόγους θα διατυπώσουμε και θα εξετάσουμε συγκριτικά δύο απλά γενικευμένα θεωρητικά μοντέλα που να παίρνουν υπόψη τη μη μονιμότητα. Και στα δύο θα κάνουμε την παραδοχή ότι οι επιδράσεις του χρόνου και της διάρκειας είναι διαχωρίσιμες. Στο πρώτο θα εκφράσουμε το χρόνο σε απόλυτη μορφή ( $t$ ) και στο δεύτερο σε αδιαστατοποιημένη μορφή ( $\theta = t/D$ ). Στα δύο μοντέλα η μη μόνιμη ανέλιξη της στιγμιαίας έντασης βροχής,  $\Xi$ , μπορεί να μονιμοποιηθεί με την εισαγωγή μιας συνάρτησης της διάρκειας και μιας του χρόνου, ως εξής:

$$\text{Μοντέλο 1 : } \Xi(D, t) = K_1(D) \cdot g_1(t) \cdot \Psi_1(t) \quad (2.9.1)$$

$$\text{Μοντέλο 2 : } \Xi(D, \theta) = K_2(D) \cdot g_2(\theta) \cdot \Psi_2(\theta) \quad (2.9.2)$$

όπου οι  $\Psi_1(t)$  και  $\Psi_2(\theta)$  είναι μόνιμες στοχαστικές ανελίξεις. Θα θεωρήσουμε ακόμα ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της μονιμοποιημένης ανέλιξης σε κάθε ένα από τα μοντέλα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\text{Μοντέλο 1 : } \text{Corr}[\Psi_1(t_1), \Psi_1(t_2)] = R_1(|t_1 - t_2|) \quad (2.9.3)$$

$$\text{Μοντέλο 2 : } \text{Corr}[\Psi_2(\theta_1), \Psi_2(\theta_2)] = R_2(|\theta_1 - \theta_2|) \quad (2.9.4)$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχτεί ότι, εφόσον αναφερόμαστε σε ένα επεισόδιο βροχής δεδομένης διάρκειας, οι συναρτήσεις  $R_1$  ή  $R_2$  είναι ταυτόχρονα και συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των ανελίξεων  $\Xi(D=d, t)$  ή  $\Xi(D=d, \theta)$ . Ας εξετάσουμε τώρα τις συνέπειες των δύο μοντέλων πάνω στο ωριαίο ύψος βροχής. Το ωριαίο ύψος  $X_1$  ορίζεται κατά περίπτωση από τις σχέσεις

$$\text{Μοντέλο 1 : } X_i = \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \Xi(D, t) dt = \kappa_1(D) \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} g_1(t) \Psi_1(t) dt$$

$$\text{Μοντέλο 2 : } X_i = \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \Xi(D, t/D) dt = \kappa_2(D) \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} g_2(t/D) \Psi_2(t/D) dt$$

όπου  $\Delta = 1$  ώρα και  $i = 1, 2, \dots, D/\Delta$ . Το μοντέλο 1 δίνει

$$E[X_i | D=d] = \kappa_1(d) \mu_{\Psi_1} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} g_1(t) dt \approx \kappa_1(d) \cdot \mu_{\Psi_1} \cdot g_1(t_i) \cdot \Delta$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_i | D=d] &= \kappa_1^2(d) \sigma_{\Psi_1}^2 \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} g_1(t_1) g_1(t_2) R_1(|t_1 - t_2|) dt_1 dt_2 \\ &\approx \kappa_1^2(d) \cdot \sigma_{\Psi_1}^2 \cdot g_1^2(t_i) \cdot I_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_i, X_j | D=d] &= \kappa_1^2(d) \sigma_{\Psi_1}^2 \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(j-1)\Delta}^{j\Delta} g_1(t_1) g_1(t_2) R_1(|t_1 - t_2|) dt_1 dt_2 \\ &\approx \kappa_1^2(d) \cdot \sigma_{\Psi_1}^2 \cdot g_1(t_i) g_1(t_j) \cdot m_1(|i - j|) \end{aligned}$$

όπου  $\mu_{\Psi_1}$  και  $\sigma_{\Psi_1}$  η μέση τιμή και τυπική απόκλιση της μόνιμης ανέλιξης  $\Psi_1$ ,  $t_i = (i - 0.5)\Delta$  (το μέσο του χρονικού διαστήματος  $[(i-1)\Delta, i\Delta]$ ),  $I_1$  το ολοκλήρωμα της  $R_1(|t_1 - t_2|)$  στη σχέση της διασποράς, που δεν εξαρτάται από το  $i$  (αφού η  $\Psi_1$  είναι μόνιμη ανέλιξη), και  $m_1$  το αντίστοιχο ολοκλήρωμα στη σχέση της συνδιασποράς, συνάρτηση της διαφοράς  $|i - j|$ .

Το μοντέλο 2 δίνει αντίστοιχα:

$$E[X_i | D=d] = \kappa_2(d) \mu_{\Psi_2} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} g_2(t/d) dt \approx \kappa_2(d) \cdot \mu_{\Psi_2} \cdot g_2(\theta_i) \cdot \Delta$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_i | D=d] &= \kappa_2^2(d) \sigma_{\Psi_2}^2 \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} g_2(t_1/d) g_2(t_2/d) R_2(|t_1 - t_2|/d) dt_1 dt_2 \\ &\approx \kappa_2^2(d) \cdot \sigma_{\Psi_2}^2 \cdot g_2^2(\theta_i) \cdot I_2(d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_i, X_j | D=d] &= \kappa_2^2(d) \sigma_{\Psi_2}^2 \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(j-1)\Delta}^{j\Delta} g_2(t_1/d) g_2(t_2/d) R_2(|t_1 - t_2|/d) dt_1 dt_2 \\ &\approx \kappa_2^2(d) \cdot \sigma_{\Psi_2}^2 \cdot g_2(\theta_i) g_2(\theta_j) \cdot m_2(d, |i - j|) \end{aligned}$$

όπου  $\mu_{\Psi_2}$  και  $\sigma_{\Psi_2}$  η μέση τιμή και τυπική απόκλιση της μόνιμης ανέλιξης  $\Psi_2$ ,  $\theta_i = (i - 0.5)\Delta/d$  (το μέσο του χρονικού διαστήματος  $[(i-1)\Delta/d, i\Delta/d]$ ),  $I_2$  το ολοκλήρωμα της  $R_2(|t_1 - t_2|/d)$  στη σχέση της διασποράς, που είναι συνάρτηση του  $d$ , αλλά όχι και του  $i$  (αφού η  $\Psi_2$  είναι μόνιμη ανέλιξη), και  $m_2$  το αντίστοιχο ολο-

κλήρωμα στη σχέση της συνδιασποράς, συνάρτηση του  $d$  και της διαφοράς  $|i-j|$ .

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των δύο μοντέλων διαπιστώνουμε ότι (1) το μέσο ωριαίο ύψος βροχής δίνεται και στα δύο μοντέλα από παρόμοιες σχέσεις, (2) στο πρώτο μοντέλο η τυπική απόκλιση του ωριαίου ύψους βροχής είναι ανάλογη της μέσης τιμής του, πράγμα που δεν συμβαίνει με το δεύτερο μοντέλο (λόγω της  $I_2(d)$ ), και (3) το δεύτερο μοντέλο προβλέπει ότι η αυτοσυσχέτιση του ωριαίου ύψους βροχής εξαρτάται από τη διάρκεια, ενώ το πρώτο προβλέπει μια σταθερή συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, ανεξάρτητη της διάρκειας. Έτσι, κανένα από τα δύο μοντέλα δεν εξηγεί ικανοποιητικά την εμπειρική συμπεριφορά του ωριαίου ύψους βροχής, όπως εκτέθηκε στην αρχή της υποπαραγράφου. Η αποτυχία του πρώτου μοντέλου είναι η σταθερή του συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, και του δεύτερου ο μεταβλητός συντελεστής διασποράς του.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η πραγματικότητα είναι πολύ πιο σύνθετη, και δεν μπορεί να εξηγηθεί από τα παραπάνω απλά μοντέλα. Η αποτυχία των μοντέλων μπορεί να σημαίνει ότι οι επιδράσεις του χρόνου και της συνολικής διάρκειας του επεισοδίου στην ανέλιξη της έντασης βροχής δεν είναι διαχωρίσιμες, ή ότι η χρονική κατανομή της βροχής μέσα στο επεισόδιο δεν μπορεί να αποδοθεί απόλυτα ούτε από τον αδιαστατοποιημένο ούτε από τον πραγματικό χρόνο. Πάντως σε κάθε περίπτωση η μαθηματική "αφαίρεση" της μη μονιμότητας είναι αρκετά πολύπλοκο ζήτημα.

Λόγω των παραπάνω δυσκολιών, εγκαταλείποντας την μαθηματική κομπόζη, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ένα περιγραφικό μοντέλο της συμπεριφοράς του ωριαίου ύψους βροχής, που να συμφωνεί με την πραγματικότητα, χωρίς όμως να την εξηγεί.

### 2.9.2. Το μοντέλο περιγραφής του ωριαίου ύψους βροχής

Χωρίς να ασχοληθούμε πλέον με τη στιγμιαία ένταση βροχής, θα βασίσουμε τις υποθέσεις μας απ' ευθείας στο ωριαίο ύψος βροχής. Θα ασχοληθούμε μόνο με τις βροχοπτώσεις με διάρκεια μεγαλύτερη από μία ώρα (για τις βροχοπτώσεις διάρκειας 1 ώρας το ωριαίο ύψος ταυτίζεται με το ύψος επεισοδίου βροχής). Θα δεχτούμε αρχικά ότι οι επιδράσεις της διάρκειας του επεισοδίου και της χρονικής θέσης μέσα σε αυτό είναι διαχωρίσιμες. Ακόμη θα δεχτούμε ότι η μη μονιμότητα του ωριαίου ύψους στο χρόνο περιγράφεται καλύτερα από τον αδιαστατοποιημένο χρόνο  $t/D$ . Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$X_1 = k(D) \cdot g(\theta_1) \cdot Z_1 \quad (2.9.5)$$

όπου  $\theta_1 = (t-0.5)/D$  και  $Z_1$  τυχαία μεταβλητή με στατιστικά χαρακτηριστικά ανεξάρτητα της διάρκειας  $D$  και της σχετικής χρονικής της θέσης  $\theta_1$ . Κατ'

επέκταση μπορούμε να θεωρούμε ότι και η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της  $Z_i$  είναι ανεξάρτητη του  $D$  και του  $\theta_i$ . Λόγω των παραπάνω ιδιοτήτων της, η μεταβλητή  $Z_i$  θα αποκαλείται "ομογενοποιημένο ωριαίο ύψος βροχής". Είναι ευνόητο ότι οι διαδοχικές μεταβλητές ( $Z_i, i=1,2,\dots,D$ ) είναι στοχαστικά εξαρτημένες μεταξύ τους. Μάλιστα, για να συμφωνεί το μοντέλο με την πραγματικότητα είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης εξαρτώνται από τη διάρκεια του επεισοδίου. Έτσι ο παραπάνω χαρακτηρισμός "ομογενοποιημένο" είναι καταχρηστικός αφού η ανεξαρτησία από τη διάρκεια  $D$  των περιθωρίων κατανομών των  $Z_i$ , δεν επεκτείνεται και στην από κοινού συνάρτηση κατανομής τους. Ως προς τη μορφή της αυτοσυσχέτισης των  $Z$  θα θεωρήσουμε ότι είναι Μαρκοβιανή, με συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $a'$  τάξης  $\rho_i(d)$ , ανεξάρτητο της χρονικής θέσης.

Από την (2.9.5) προκύπτουν οι ακόλουθες δεσμευμένες ροπές της  $X$ :

$$E[X_i | D=d] = k(d) \cdot g(\theta_i) \cdot \mu_Z \quad (2.9.6)$$

$$\text{Var}[X_i | D=d] = k^2(d) \cdot g^2(\theta_i) \cdot \sigma_Z^2 \quad (2.9.7)$$

όπου  $\mu_Z$  η μέση τιμή και  $\sigma_Z^2$  η διασπορά της  $Z_i$  (προφανώς ανεξάρτητες του  $i$ ). Παρατηρούμε ότι ισχύει η ιδιότητα της αναλογίας τυπικής απόκλισης και μέσης τιμής του ωριαίου ύψους, και αυτό ανεξάρτητα από τη μορφή των συναρτήσεων  $k(d)$  και  $g(\theta)$ .

Θα προχωρήσουμε τώρα στον καθορισμό των συναρτήσεων  $k(d)$  και  $g(\theta)$ . Για το σκοπό αυτό θα αξιοποιήσουμε και τις σχέσεις των ροπών του ύψους επεισοδίου βροχής, που δόθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Προφανώς ισχύει

$$E[H | D=d] = \sum_{i=1}^d E[X_i | D=d]$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω τις (2.8.1) και (2.9.6) θα έχουμε

$$(d+a)\mu_\Phi - b = k(d) \cdot \mu_Z \cdot \sum_{i=1}^d g(\theta_i)$$

και τελικά

$$k(d) = \frac{(d+a_1)\mu_\Phi}{G(d) \mu_Z} \quad (2.9.8)$$

όπου

$$a_1 = a - b/\mu_\Phi \quad (2.9.9)$$

$$G(d) = \sum_{i=1}^d g(\theta_i) \quad (2.9.10)$$



Θεωρώντας ότι  $g(\theta_j) \approx d \int_{(j-1)/d}^{j/d} g(\theta) d\theta$ , θα έχουμε

$$G(d) \approx d \int_0^1 g(\theta) d\theta = d G_1 \quad (2.9.11)$$

όπου το  $G_1$  είναι σταθερά. Σημειώνεται ότι η (2.9.11) είναι απόλυτα ακριβής, αν η  $g(\theta)$  είναι γραμμική συνάρτηση. Επειδή έχουμε εισάγει δύο αυθαίρετες συναρτήσεις, τις  $k(d)$  και  $g(\theta)$ , διαθέτουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ως προς τις παραμέτρους που υπεισέρχονται, και έτσι παίρνουμε

$$G_1 = 1 \quad (2.9.12)$$

και

$$\mu_Z = \mu_\Phi \quad (2.9.13)$$

Έτσι η (2.9.8) γίνεται

$$k(d) = \frac{d+a_1}{d} \quad (2.9.14)$$

Η μορφή της  $g(\theta)$  μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι πολυωνυμική. Από δοκιμές που έγιναν, με πολυώνυμο μέχρι 3ου βαθμού, προέκυψε ότι εν γένει μόνο ο πρωτοβάθμιος όρος είναι σημαντικός, και γι' αυτό τελικά θεωρήθηκε

$$g(\theta) = g_0 + g_1\theta \quad (2.9.15)$$

όπου λόγω της (2.9.12) θα είναι

$$g_0 = 1 - g_1/2 \quad (2.9.16)$$

Απομένει πλέον ο καθορισμός της μεταβολής του συντελεστή αυτοσυσχέτισης α' τάξης συναρτήσεως του  $d$ , δηλαδή της συνάρτησης  $\rho_1(d)$ . Συνδέοντας τη διασπορά του ύψους επεισοδίου βροχής, με τις διασπορές και συνδιασπορές των ωριαίων υψών βροχής, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Var}[H|D=d] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \text{Cov}[X_i, X_j | D=d] \\ &= \sum_{i=1}^d \text{Var}[X_i | D=d] + 2 \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \text{Cov}[X_i, X_j | D=d] \end{aligned}$$

όπου, μετά την παραδοχή ότι η ακολουθία των  $Z_i$  είναι Μαρκοβιανή, και λόγω της ισότητας των συντελεστών αυτοσυσχέτισης των  $X_i$  και  $Z_i$ , θα είναι

$$\text{Cov}[X_i, X_j | D=d] = \{\rho_1(d)\}^{j-i} \{\text{Var}[X_i] \text{Var}[X_j]\}^{1/2}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις και τις (2.8.2) και (2.9.7) προκύπτει

$$(d+a)^2 \sigma_\phi^2 = k^2(d) \sigma_Z^2 \sum_{i=1}^d g^2(\theta_i) + 2k^2(d) \sigma_Z^2 \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \{\rho_1(d)\}^{j-i} g(\theta_i) g(\theta_j)$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \{\rho_1(d)\}^{j-i} g(\theta_i) g(\theta_j) = \frac{(d+a)^2 \sigma_\phi^2}{2k^2(d) \sigma_Z^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d g^2(\theta_i)$$

και τελικά, σε πιο σύντομη μορφή

$$\sum_{i=1}^{d-1} A_i(d) \cdot \{\rho_1(d)\}^i = A_0(d) \quad (2.9.17)$$

με

$$A_0(d) = \frac{(d+a)^2 \sigma_\phi^2}{2k^2(d) \sigma_Z^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d g^2(\theta_i) \quad (2.9.18)$$

και

$$A_i(d) = \sum_{j=1}^{d-1} g(\theta_j) g(\theta_{j+i}), \quad i=1, 2, \dots, d-1 \quad (2.9.19)$$

Η εξίσωση (2.9.17) σε συνδυασμό με τις (2.9.18) και (2.9.19), καθορίζει πλήρως τη μορφή της  $\rho_1(d)$ . Η μορφή αυτή δεν μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά. Όμως ο προσδιορισμός του  $\rho_1$  μπορεί να γίνει με αριθμητική μέθοδο, όταν είναι γνωστό το  $d$ . Ουσιαστικά πρόκειται για τον υπολογισμό μιας ρίζας ( $r$ ) της πολυωνυμικής εξίσωσης (2.9.17), βαθμού  $d-1$ , τέτοιας ώστε  $-1 \leq r \leq +1$ . Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει εύκολα με τη μέθοδο Newton-Raphson. Ο σχετικός επαναληπτικός τύπος θα είναι

$$r'' = r' - \left[ \sum_{i=1}^{d-1} A_i(d) \cdot r'^i - A_0(d) \right] / \left[ \sum_{i=1}^{d-1} i A_i(d) \cdot r'^{i-1} \right] \quad (2.9.20)$$

όπου  $r'$  και  $r''$  είναι δύο διαδοχικές προσεγγίσεις της  $r$ . Μια αποτελεσματική αρχική εκτίμηση εκτίμηση  $r_0$  της  $r$  είναι

$$r_0 = \frac{[2A_0(d) + d - 1] - [(d-1)^2 - 4A_0(d)]^{1/2}}{2[A_0(d) + d]} \quad (2.9.21)$$

Η (2.9.21) είναι μια προσεγγιστική λύση της (2.9.17), για την περίπτωση που  $g(\theta) = 1$ . Ας σημειωθεί ότι η τελική λύση που βρίσκεται με την (2.9.20) δεν απέχει πολύ από την παραπάνω αρχική εκτίμηση, και γι' αυτό το β' μέλος της (2.9.21) μπορεί να θεωρηθεί ως προσεγγιστική συναρτησιακή έκφραση της  $\rho_1(d)$ .

Οι υποθέσεις του περιγραφικού μοντέλου της ωριαίας βροχόπτωσης, θα ελεγχθούν στις επόμενες υποπαραγράφους με βάση τα πραγματικά δεδομένα βροχόπτωσης.

=====

Απόδειξη της (2.9.21)

Για  $g(\theta) = 1$  θα είναι  $\lambda_i(d) = d-i$ , οπότε η (2.9.17) παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{d-1} (d-i) r^i = \lambda_0(d) \quad (\alpha)$$

όπου θέσαμε  $r = r_1(d)$ . Το α' μέλος της παραπάνω είναι μικτή πρόοδος και δίνεται από την εξής σχέση

$$\sum_{i=1}^{d-1} (d-i) r^i = -d + \frac{d(1-r^d)}{1-r} - r \frac{1 - dr^{d-1} + (d-1)r^d}{(1-r)^2}$$

και μετά τις πράξεις

$$\sum_{i=1}^{d-1} (d-i) r^i = r \frac{d - 1 - dr + r^{d+1}}{(1-r)^2}$$

Συνεπώς η (α) γράφεται

$$r \frac{d - 1 - dr + r^{d+1}}{(1-r)^2} = \lambda_0(d) \quad (\beta)$$

και ισοδύναμα

$$-r^{d+1} + [\lambda_0(d)+d] r^2 - [2\lambda_0(d)+d-1] r + \lambda_0(d) = 0 \quad (\gamma)$$

Δεδομένου ότι  $|r| < 1$ , για μεγάλα  $d$  ισχύει  $r^{d+1} \approx 0$  και έτσι μπορούμε να παραλείψουμε στην (γ) τον αντίστοιχο όρο. Το τριώνυμο που απομένει έχει διακρίνουσα

$$\Delta = [2\lambda_0(d)+d-1]^2 - [\lambda_0(d)+d] \lambda_0(d) = (d-1)^2 - 4\lambda_0(d) \quad (\delta)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι η  $\Delta$  είναι θετική (σχετικά βλ. στο τέλος της επόμενης υποπαραγράφου την απόδειξη της (2.9.22)), θα έχουμε

$$r_0 = \frac{(2\lambda_0(d)+d-1) \pm [(d-1)^2 - 4\lambda_0(d)]^{1/2}}{2[\lambda_0(d)+d]}$$

Παρατηρούμε ότι για  $r_1(d) = 0$  η (2.9.17) δίνει  $\lambda_0(d) = 0$ . Η οριακή αυτή περίπτωση επαληθεύεται από την μικρότερη από τις δύο παραπάνω ρίζες του  $r$ , και κατά συνέπεια η μεγαλύτερη απορρίπτεται. Προκύπτει έτσι η (2.9.21).

### 2.9.3. Παράμετροι και ροπές του μοντέλου περιγραφής του ωριαίου ύψους βροχής

Το παραπάνω περιγραφικό μοντέλο, που ολοκληρώθηκε με τις σχέσεις υπολογισμού των συντελεστών αυτοσυσχέτισης, έχει μόνο 2 παραμέτρους, πέρα από αυτές

που χρησιμοποιούνται για το ύψος του επεισοδίου βροχής. Αυτές είναι η  $g_1$ , που περιγράφει τη μη μονιμότητα ως προς τον (αδιαστατοποιημένο) χρόνο, και η τυπική απόκλιση του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής,  $\sigma_Z$ . Μια κατά προσέγγιση ανισοτική σχέση που πρέπει να ακολουθεί η  $\sigma_Z$  είναι η εξής:

$$\frac{\sigma_Z}{\sigma_\Phi} \geq \max \left[ \frac{2\sqrt{10}}{5} \frac{2+a}{2+a_1}, \sqrt{2} \right] \quad (2.9.22)$$

Η παράμετρος  $g_1$  θεωρητικά δεν υπόκειται σε κανένα περιορισμό.

Η διαδικασία εκτίμησης των παραπάνω παραμέτρων, μαζί και με τις υπόλοιπες παραμέτρους του συνολικού μοντέλου, περιγράφεται στην παράγραφο 2.11. Οι τιμές που πήραν στα δείγματα που εξετάστηκαν φαίνονται στον πίνακα 2.3.

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό των περιθώριων ροπών του ωριαίου ύψους βροχής, θα ορίσουμε τη βοηθητική μεταβλητή

$$Y_i = g(\theta_i) \cdot Z_i = X_i / k(D) \quad (2.9.23)$$

που θα αποκαλούμε "μετασχηματισμένο ωριαίο ύψος βροχής". Η περιθώρια κατανομή της μεταβλητής αυτής είναι ανεξάρτητη της διάρκειας, αλλά εξαρτάται από το  $i$  ή το  $\theta_i$ . Οι ροπές του  $Y_i$  δίνονται από τις σχέσεις

$$E[Y_i] = g(\theta_i) \cdot \mu_Z = E[X_i | D=d] / k(d) \quad (2.9.24)$$

$$\text{Var}[Y_i] = g^2(\theta_i) \cdot \sigma_Z^2 = \text{Var}[X_i | D=d] / k^2(d) \quad (2.9.25)$$

Οι περιθώριες ροπές  $\mu_Y = E[Y]$  και  $\sigma_Y^2 = \text{Var}[Y]$ , χωρίς τη δέσμευση της σχετικής χρονικής θέσης  $i$ , δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις, που αποδεικνύονται στο τέλος της υποπαραγράφου:

$$\mu_Y = \mu_Z = \mu_\Phi \quad (2.9.26)$$

$$\sigma_Y^2 \approx \sigma_Z^2 + (g_1^2/12) (\sigma_Z^2 + \mu_Z^2) \quad (2.9.27)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω ροπών μπορούν τώρα να υπολογιστούν οι αντίστοιχες περιθώριες ροπές του ωριαίου ύψους βροχής,  $X$ . Οι σχετικές εκφράσεις αποδεικνύονται επίσης στο τέλος της υποπαραγράφου και είναι:

$$\mu_X = \frac{\mu_{D*} + a_1}{\mu_{D*}} \mu_Y \quad (2.9.28)$$

$$\sigma_X^2 = \left[ \frac{\mu_{D*} + a_1}{\mu_{D*}} \right]^2 \sigma_Y^2 + \frac{\lambda a^2}{\mu_{D*}^2} (\sigma_Y^2 + \mu_Y^2) \quad (2.9.29)$$

όπου  $\mu_{D*} = E[D|D>1]$  (βλ. υποπάρ. 2.8.3) και το  $\lambda$  είναι συντελεστής κατά προσέγγιση ίσος με 1 (ακριβέστερα μπορεί να θεωρηθεί  $\lambda = \mu_D/9$ , όπου  $\mu_D$  η μέση διάρκεια βροχής σε ώρες).

Οι αριθμητικές τιμές όλων παραμέτρων και ροπών του ωριαίου ύψους βροχής, για τα ιστορικά δείγματα που εξετάστηκαν, φαίνονται στον πίνακα 2.3. Γενικά παρατηρείται καλή συμφωνία θεωρητικών ροπών, που προβλέπονται από το μοντέλο, και αντίστοιχων εμπειρικών ροπών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3  
ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ ΤΟΥ ΩΡΙΑΙΟΥ ΥΨΟΥΣ ΒΡΟΧΗΣ (X)  
ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΤΟΥ Y ΚΑΙ Z  
(Διάρκεια βροχής  $\geq 2$  ώρες)

Παράμετρος		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΧΑΛΑΡΑ		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΤΡΙΒΟΥΝΟ		
		Απρίλιος	Μάιος	Απρίλιος	Μάιος	
Μέγ. Δείγματος	N	1053	911	826	660	
Ανεξ. παράμετρος	$g_1$	-0.417	-0.851	-0.597	0	
Παράμετρος	$g_0 = 1 - g_1/2$	1.209	1.426	1.299	1	
"	$a_1 = a - b/\mu_\Phi$	1.23	0	1.97	3.26	
-----						
Μέση τιμή	$\mu_Z$	0.575 0.583	0.938 0.934	0.562 0.567	0.663 0.666	
"	"	$\mu_Y$	0.575 0.578	0.938 0.942	0.562 0.560	0.663 0.666
"	"	$\mu_X$	0.635 0.637	0.938 0.942	0.658 0.655	0.864 0.847
Τυπική απόκλιση	$\sigma_Z$	0.872 0.872	1.549 1.549	0.890 0.965	0.990 1.087	
"	"	$\sigma_Y$	0.881 0.845	1.612 1.621	0.908 0.909	0.990 1.087
"	"	$\sigma_X$	0.975 0.932	1.612 1.621	1.083 1.050	1.332 1.391

Σημείωση 1: Η πρώτη σειρά αντιστοιχεί στις θεωρητικές τιμές των ροπών και η δεύτερη στις εμπειρικές.

2: Οι ανεξάρτητες παράμετροι είναι οι  $g_1$  και  $\sigma_Z$ . Όλες οι υπόλοιπες (παράμετροι και θεωρητικές ροπές) υπολογίζονται συναρτήσει αυτών.

#### Απόδειξη της (2.9.22)

Όπως και στην απόδειξη της (2.9.21) θα θεωρήσουμε  $g(\theta) = 1$ . Με τη συνθήκη αυτή από την (2.9.18), με βάση και την (2.9.14) παίρνουμε

$$A_0(d) = \frac{d^2(d+a)^2\sigma_\phi^2}{2(d+a_1)^2\sigma_Z^2} - \frac{d}{2}$$

Για να είναι θετική η διακρίνουσα  $\Delta$  της σχέσης (δ) της υποπαραγράφου 2.9.2., θα πρέπει

$$(d-1)^2 \geq \frac{2d^2(d+a)^2\sigma_\phi^2}{(d+a_1)^2\sigma_Z^2} - 2d$$

Κάνοντας πράξεις στην παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{\sigma_Z}{\sigma_\phi} \geq \frac{2^{1/2} d (d+a)}{(d+a_1) (d^2+1)^{1/2}} \quad (\alpha)$$

Στην περίπτωση που το  $a_1$  είναι αρκετά μικρότερο του  $a$  (όπως συμβαίνει συνήθως), η συνάρτηση του β' μέλους της (α) είναι φθίνουσα ως προς  $d$ , δεδομένου ότι  $(d^2+1)^{1/2} \approx d$ . Τότε αρκεί η ανισότητα (α) να ισχύει για τη μικρότερη τιμή του  $d$  ( $d=2$ ), δηλαδή

$$\frac{\sigma_Z}{\sigma_\phi} \geq \frac{2^{1/2} (2+a)}{5 (2+a_1)}$$

Στην περίπτωση που τα  $a$  και  $a_1$  είναι ίσα, για να ισχύει η (α), αρκεί το πρώτο μέλος να είναι  $\geq \sqrt{2}$ .

#### Απόδειξη της (2.9.26)

Η μέση τιμή του  $Y$  σε μια βροχόπτωση διάρκειας  $d$  θα είναι

$$E[Y] = (1/d) \sum_{i=1}^d E[Y_i]$$

Από την (2.9.23) προκύπτει

$$E[Y] = (1/d) \mu_Z \sum_{i=1}^d g(\theta_i)$$

και λόγω των (2.9.10), (2.9.11) και (2.9.12) παίρνουμε

$$E[Y] = (1/d) \mu_Z d \theta_1 = \mu_Z$$

#### Απόδειξη της (2.9.27)

Κατά παρόμοιο τρόπο, όπως προηγουμένως, έχουμε:

$$E[Y^2] = (1/d) \sum_{i=1}^d E[Y_i^2] = (1/d) \sum_{i=1}^d g^2(\theta_i) E[Z_i^2] = (1/d) (\sigma_Z^2 + \mu_Z^2) \sum_{i=1}^d g^2(\theta_i) \quad (\beta)$$

Το τελευταίο άθροισμα στην παραπάνω σχέση μπορεί να υπολογιστεί κατά προσέγγιση από τη σχέση

$$\sum_{i=1}^d g^2(\theta_i) \approx d G_2, \quad \text{όπου } G_2 = \int_0^1 g^2(\theta) d\theta$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία την  $g(\theta)$  από την (2.9.14) παίρνουμε

$$G_2 = \int_0^1 (g_0 + g_1 \theta)^2 d\theta = g_0^2 + g_0 g_1 + g_1^2/3$$

και χρησιμοποιώντας και την (2.9.16)

$$G_2 = 1 + g_1^2/4 - g_1 + g_1 - g_1^2/2 + g_1^2/3 = 1 + g_1^2/12$$

Κατά συνέπεια

$$E\{Y^2\} \approx (1 + g_1^2/12)(\sigma_Z^2 + \mu_Z^2)$$

και

$$\text{Var}\{Y\} = E\{Y^2\} - E^2\{Y\} \approx \sigma_Z^2 + (g_1^2/12)(\sigma_Z^2 + \mu_Z^2)$$

#### Απόδειξη της (2.9.28)

Παίρνοντας υπόψη τον τρόπο με τον οποίο σχηματίζεται ο πληθυσμός των ωριαίων υψών βροχής, στις βροχοπτώσεις με διάρκεια 2 ωρών και άνω, θα έχουμε

$$E\{X\} = \frac{2E\{X|D=2\}p_{D_X}(2) + 3E\{X|D=3\}p_{D_X}(3) + \dots}{2p_{D_X}(2) + 3p_{D_X}(3) + \dots} = \frac{\left[ \sum_{d=2}^{\infty} dE\{X|D=d\}p_{D_X}(d) \right]}{\left[ \sum_{d=2}^{\infty} dp_{D_X}(d) \right]} \quad (\gamma)$$

όπου  $p_{D_X}(d) = \Pr\{D=d|D>1\}$ . Προφανώς το άθροισμα του παρονομαστή είναι ίσο με  $\mu_{D_X}$ . Για τον υπολογισμό του αριθμητή παίρνουμε υπόψη τις σχέσεις (2.9.23) (που συνεπάγεται  $X = K(D)Y$ ) και (2.9.14) (που δίνει την  $K(d)$ ), οπότε έχουμε:

$$\sum_{d=2}^{\infty} dE\{X|D=d\}p_{D_X}(d) = \sum_{d=2}^{\infty} (d+a_1)p_{D_X}(d) = \mu_{D_X} + a_1$$

Η αντικατάσταση των παραπάνω στην (γ) προκύπτει άμεσα η (2.9.28)

#### Απόδειξη της (2.9.29)

Σε αναλογία με τα παραπάνω έχουμε

$$E\{X^2\} = \frac{\left[ \sum_{d=2}^{\infty} dE\{X^2|D=d\}p_{D_X}(d) \right]}{\left[ \sum_{d=2}^{\infty} dp_{D_X}(d) \right]} \quad (\delta)$$

Αλλά ισχύει

$$E\{X^2|D=d\} = k^2(d) E\{Y^2\} = (1 + 2a_1/d + a_1^2/d^2)(\sigma_Y^2 + \mu_Y^2)$$

και κατά συνέπεια ο αριθμητής του β' μέλους της (δ) θα είναι

$$\begin{aligned} \sum_{d=2}^{\infty} dE\{X^2|D=d\}p_{D_X}(d) &= (\sigma_Y^2 + \mu_Y^2) \sum_{d=2}^{\infty} (d + 2a_1 + a_1^2/d) p_{D_X}(d) = (\sigma_Y^2 + \mu_Y^2) [\mu_{D_X} + 2a_1 + a_1^2(1+\lambda)/\mu_{D_X}] \\ &= (1/\mu_{D_X})(\sigma_Y^2 + \mu_Y^2) [(\mu_{D_X} + 2a_1)^2 + \lambda a_1^2] \end{aligned}$$

όπου τέθηκε

$$\frac{1+\lambda}{\mu_{Dx}} = \sum_{d=2}^{\infty} p_{Dx}(d)/d \quad (\epsilon)$$

Μετά τα παραπάνω η (δ) γίνεται

$$E[X^2] = \frac{(\mu_{Dx} + 2\sigma_1)^2 + \lambda\sigma_1^2}{\mu_{Dx}^2} (\sigma_Y^2 + \mu_Y^2) \quad (\zeta)$$

Αν στη σχέση

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

αντικαταστήσουμε τα  $E[X^2]$  και  $E[X]$  από τις (ζ) και (2.9.28) αντίστοιχα, θα πάρουμε την (2.9.29). Απομένει ο υπολογισμός της τιμής της παραμέτρου  $\lambda$ . Θεωρώντας ότι η κατανομή της διάρκειας, ως συνεχούς μεταβλητής, είναι κατά προσέγγιση η εκθετική, με παράμετρο  $(1/\mu_D)$ , θα έχουμε

$$p_{Dx}(d) = \left[ \int_{d-0.5}^{d+0.5} (1/\mu_D) e^{-u/\mu_D} du \right] / \left[ e^{-1.5/\mu_D} \right]$$

και συνακόλουθα

$$\sum_{d=2}^{\infty} p_{Dx}(d)/d = \left[ \int_{1.5}^{\infty} (1/\mu_D) e^{-u/\mu_D} (1/u) du \right] / \left[ e^{-1.5/\mu_D} \right] = \frac{1}{\mu_D} e\left(\frac{1.5}{\mu_D}\right) e^{1.5/\mu_D} \quad (\eta)$$

όπου η συνάρτηση  $e(x)$  έχει οριστεί με τη σχέση (2.7.17). Επειδή ο παραπάνω όρος επηρεάζει πολύ λίγο την διασπορά  $\sigma_X^2$ , θα αναζητήσουμε προσεγγιστικές εκφράσεις του όρου  $e(x)$ . Μια προσεγγιστική έκφραση κατάλληλη για την υπόψη περίπτωση είναι η ακόλουθη:

$$e(x) e^x \approx \frac{x+1/6}{x(x+1)} \quad (\theta)$$

Η παραπάνω μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι η συνάρτηση  $A(x) = x(x+1)e(x)$  μπορεί να προσεγγιστεί από τη συνάρτηση  $B(x) = (x+1/6)e^{-x}$ , και αυτό επειδή ισχύει

$$\int_0^{\infty} A(x) dx = \int_0^{\infty} B(x) dx (= 7/6) \quad \text{και} \quad \int_0^{\infty} xA(x) dx = \int_0^{\infty} xB(x) dx (= 13/6)$$

Η παραπάνω προσεγγιστική σχέση επιβεβαιώθηκε και αριθμητικά. Από τις (ε), (η) και (θ) παίρνουμε

$$1+\lambda \approx \frac{\mu_{Dx}}{\mu_D} \frac{1.5/\mu_D + 1/6}{(1.5/\mu_D)(1.5/\mu_D+1)} = \mu_{Dx} \frac{1+\mu_D/9}{1.5+\mu_D}$$

Θεωρώντας ότι  $1.5+\mu_D \approx \mu_{Dx}$  παίρνουμε τελικά

$$1+\lambda \approx 1 + \mu_D/9 \quad \text{ή} \quad \lambda \approx \mu_D/9$$

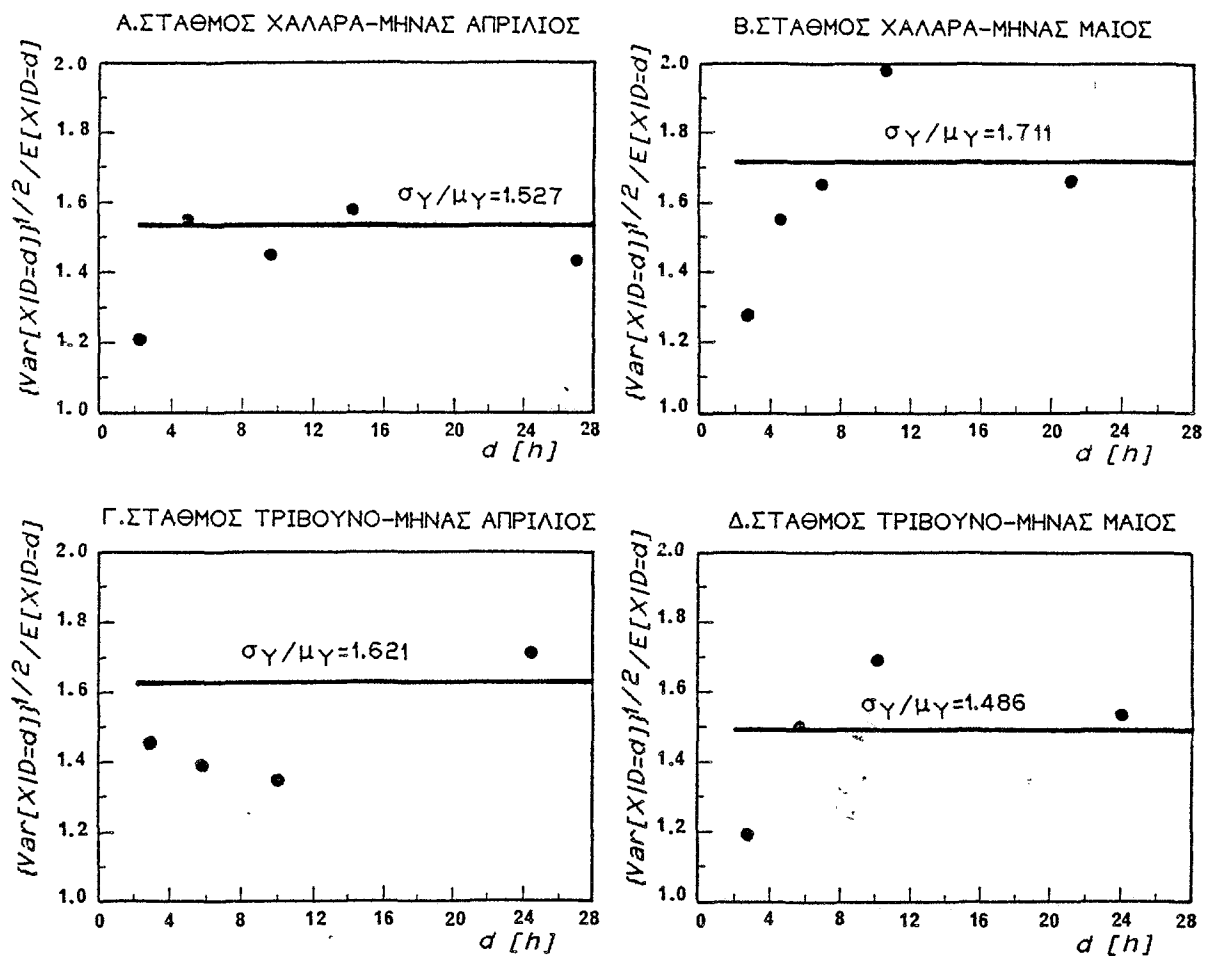
όπου το  $\mu_D$  εκφράζεται σε ώρες. Για τα βροχομετρικά δεδομένα που εξετάστηκαν ισχύει  $\mu_D \approx 9$  ώρες και συνεπώς η τιμή του  $\lambda$  είναι περίπου ίση με 1.



#### 2.9.4. Έλεγχος του μοντέλου: Α. Η επίδραση της διάρκειας

Η βασική σχέση του μοντέλου (2.9.5), που περιγράφει το διαχωρισμό των επιδράσεων της διάρκειας και της χρονικής θέσης στο ωραιο ύψος βροχής, έχει σαν συνέπεια ένα σταθερό συντελεστή διασποράς του ωραιο ύψους βροχής, δηλαδή ανεξάρτητο και της διάρκειας, και της χρονικής θέσης. Πράγματι, οι σχέσεις (2.9.6) και (2.9.7) δίνουν:

$$\frac{\{\text{Var}[X_i | D=d]\}^{1/2}}{E[X_i | D=d]} = \frac{\sigma_Z}{\mu_Z} = ct \quad (2.9.30)$$

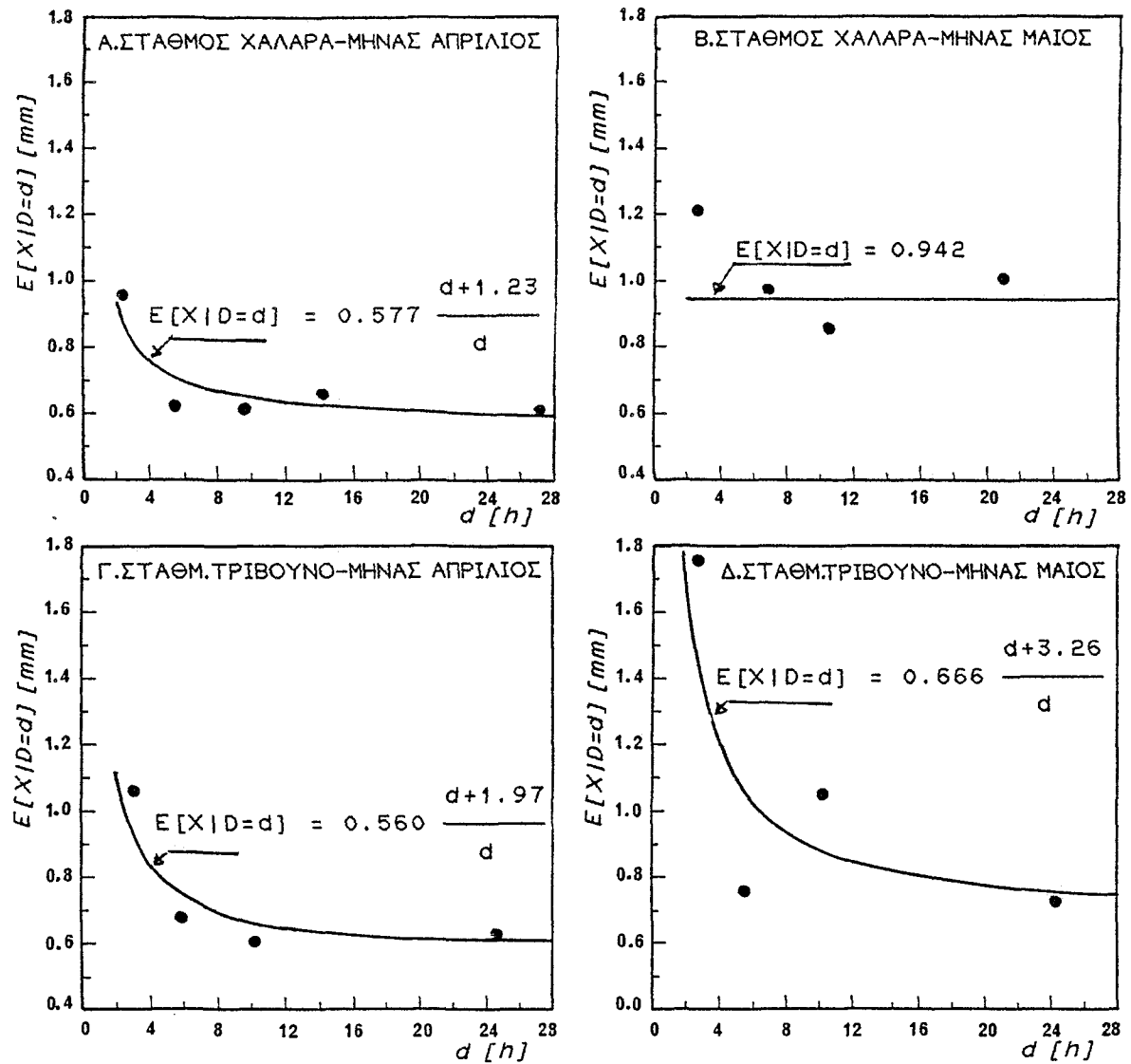


Σχήμα 2.14 : Δεσμευμένος συντελεστής διασποράς ωραιο ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια βροχής.

Ο αντίστοιχος συντελεστής διασποράς του ωριαίου ύψους για την περίπτωση που η χρονική θέση (i) δεν είναι καθορισμένη, μπορεί να εξαχθεί με τη βοήθεια της (2.9.23) και είναι:

$$\frac{\{\text{Var}[X|D=d]\}^{1/2}}{E[X|D=d]} = \frac{\sigma\gamma}{\mu\gamma} = ct \quad (2.9.31)$$

όπου οι  $\sigma\gamma$  και  $\mu\gamma$  δίνονται από τις (2.9.27) και (2.9.26).



Σχήμα 2.15 : Δεσμευμένη μέση τιμή του ωριαίου ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια βροχής.

Η πρώτη από τις δύο παραπάνω σχέσεις είναι αρκετά δύσκολο να ελεγχθεί με βάση πραγματικά δεδομένα, γιατί απαιτεί ασυνήθιστα μεγάλο μέγεθος δείγματος. Η δεύτερη μπορεί να ελεγχθεί πιο εύκολα, με τη μεθοδολογία των δειγματικών κλάσεων, που περιγράφηκε στην παράγραφο 2.6. Τέτοιοι έλεγχοι παρουσιάζονται στο σχήμα 2.14. Τα εμπειρικά στοιχεία, που αντιστοιχούν στα σημεία του σχήματος, υπολογίστηκαν από όλα τα ωριαία ύψη μιας δειγματικής κλάσης ενώ χρησιμοποιήθηκαν ίδιες κλάσεις με αυτές της παραγράφου 2.8. Το μοντέλο (συνεχής γραμμή) δεν έρχεται σε αντίθεση με τα εμπειρικά σημεία, αν και θα μπορούσε να γίνει δεκτή και μια μικρή αύξηση του συντελεστή διασποράς, με την αύξηση της διάρκειας.

Αυτό που θα πρέπει ακόμα να ελεγχθεί είναι η μορφή της συνάρτησης  $K(d)$ , που δίνεται από την εξίσωση (2.9.14). Ο έλεγχος μπορεί να βασιστεί στη σχέση

$$E[X|D=d] = K(d) \cdot \mu_Y \quad (2.9.32)$$

που είναι συνέπεια της (2.9.23). Τέτοιας μορφής έλεγχοι παρουσιάζονται στο σχήμα 2.15. Οι έλεγχοι αυτοί βασίστηκαν στις ίδιες εμπειρικές μέσες τιμές, όπως και οι προηγούμενοι. Γενικά παρατηρείται καλή συμφωνία του μοντέλου με τα εμπειρικά δεδομένα.

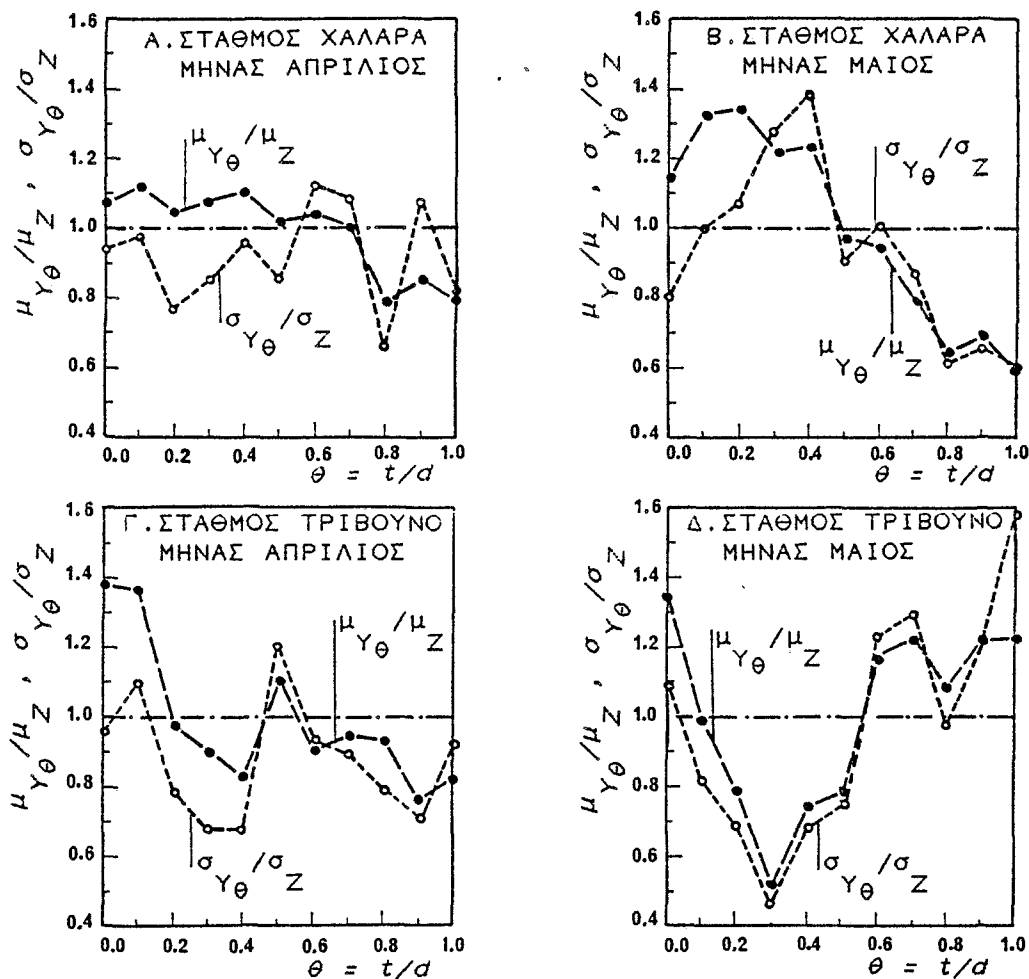
#### 2.9.5. Έλεγχος του μοντέλου: Β. Η επίδραση της χρονικής θέσης

Στην υποπαραγράφο αυτή ο έλεγχος θα βασιστεί στο μετασχηματισμένο ύψος βροχής  $Y$ , το οποίο δεν εξαρτάται από τη διάρκεια βροχής, παρά μόνο από τη χρονική θέση. Η εξίσωση ορισμού της μεταβλητής  $Y$ , (2.9.23), έχει ως συνέπεια τη σχέση:

$$g(\theta_1) = \frac{E[Y_1]}{\mu_Z} = \frac{\{\text{Var}[Y_1]\}^{1/2}}{\sigma_Z} \quad (2.9.33)$$

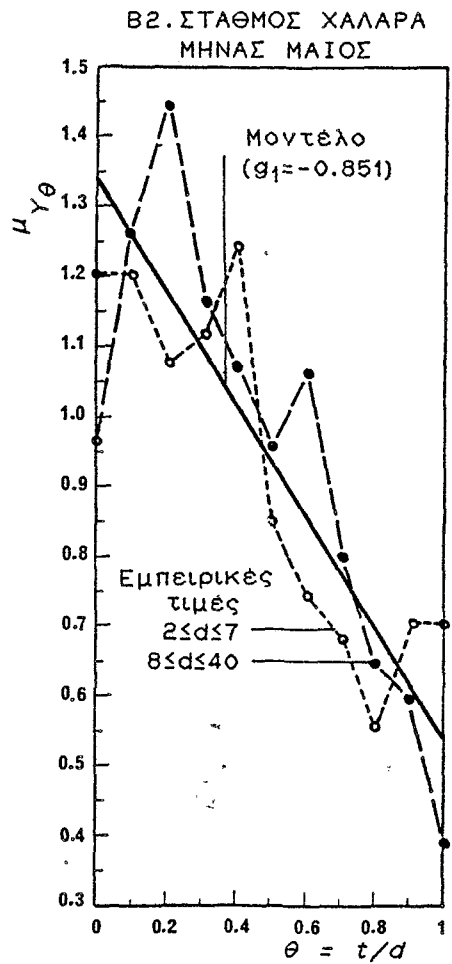
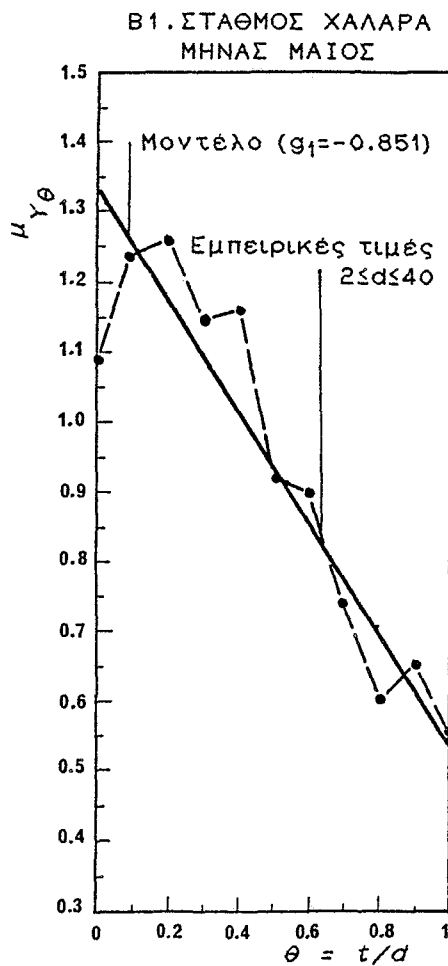
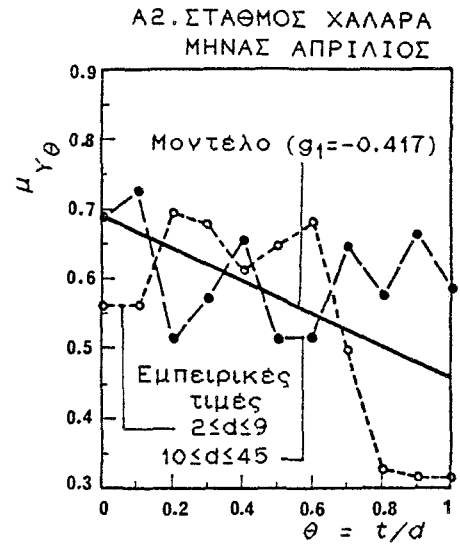
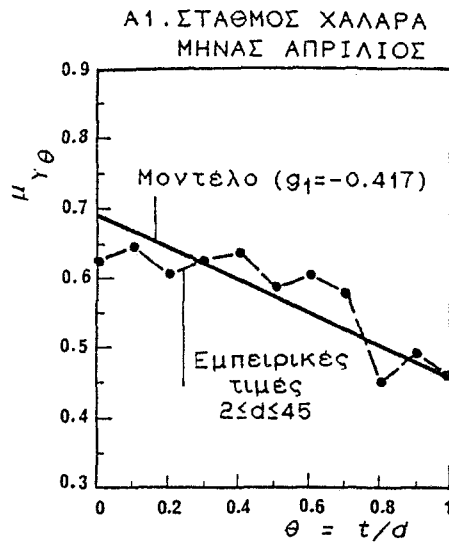
Ας εξετάσουμε κατ' αρχήν το δεύτερο σκέλος της (2.9.33), δηλαδή την ισότητα του δεύτερου και τρίτου μέλους. Τα εμπειρικά στατιστικά χαρακτηριστικά της μεταβλητής  $Y_1$ , δηλαδή η μέση τιμή και η διασπορά της, που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη τιμή του  $\theta_1 = (i-0.5)/d$ , μπορούν να υπολογιστούν με τον εξής τρόπο: (α) σε κάθε επεισόδιο βροχής, διάρκειας  $d \geq 2$  ώρ., καθορίζεται η χρονική θέση  $i$  από τον τύπο  $i = \text{round}(\theta_1 d + 0.5)$ , (β) επιλέγεται από κάθε επεισόδιο βροχής το ωριαίο ύψος βροχής  $X_i$ , και έτσι σχηματίζεται ένα δείγμα μεγέθους ίσου με το πλήθος των επεισοδίων βροχής, (γ) με μετασχηματισμό του δείγματος των  $X_i$  με βάση τη σχέση  $Y_1 = X_i/K(d)$ , σχηματίζεται το αντίστοιχο δείγμα των  $Y_1$ , και (δ) υπολογίζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά του τελευταίου. Στο σχήμα 2.16 έχουν γίνει απεικονίσεις των εμπειρικών μέσων τιμών και τυπικών

αποκλίσεων για τιμές του  $\theta_1$  από 0 μέχρι 1, με ισοδιάσταση 0.10. Παρατηρούμε ότι οι εν λόγω εμπειρικές τιμές συμφωνούν με το β' σκέλος της (2.9.33).

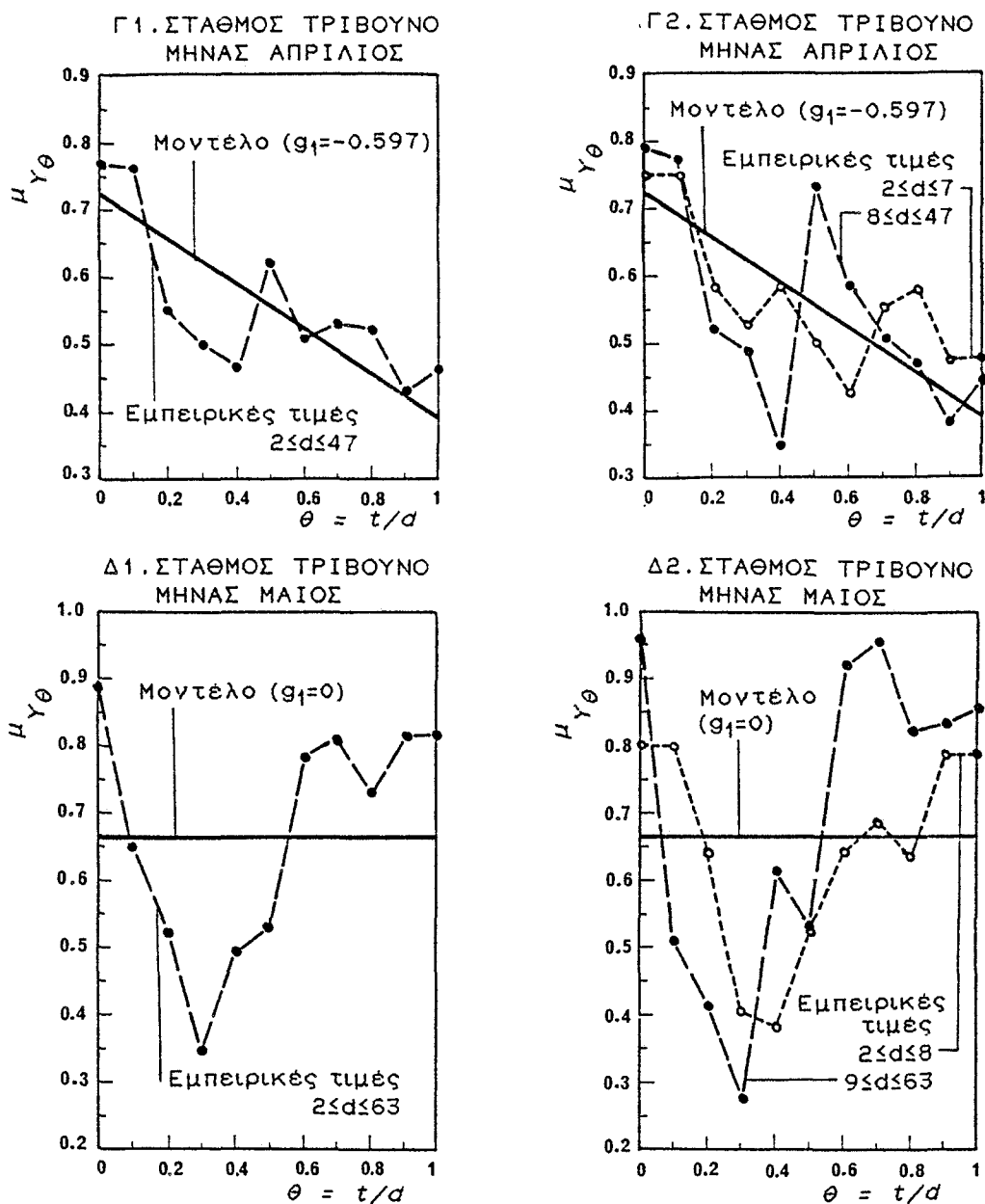


Σχήμα 2.16 : Συγκριτική εικόνα της μεταβολής της μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης του μετασχηματισμένου ωριαίου ύψους βροχής ( $Y$ ) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).

Ας εξετάσουμε τώρα την επιλεγείσα γραμμική μορφή της συνάρτησης  $g(\theta)$ , που δίνεται από την εξίσωση (2.9.15). Ο σχετικός έλεγχος μπορεί να βασιστεί στο πρώτο σκέλος της (2.9.33), δηλαδή στην εξίσωση  $E[Y_1] = g(\theta_1)\mu_Y$ . Στο σχήμα 2.17 γίνεται σύγκριση των εμπειρικών μέσων τιμών των διαφόρων δειγμάτων, υπολογισμένων με τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω, με τις θεωρητικές μέσες τιμές που προβλέπονται από την εν λόγω εξίσωση. Παρατηρείται ότι η γραμμική ως προς  $\theta$  έκφραση της  $g(\theta)$  προσαρμόζεται σε ανεκτό επίπεδο προς τα εμπειρικά στοιχεία, εκτός από μια περίπτωση (Σταθμός Τρίβουνο - Μήνας Μάιος). Για



Σχήμα 2.17 : Σύγκριση θεωρητικής και εμπειρικής μεταβολής της μέσης τιμής του μετασχηματισμένου ωριαίου ύψους βροχής ( $\gamma$ ) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).



Σχήμα 2.17 (συνέχεια): Σύγκριση θεωρητικής και εμπειρικής μεταβολής της μέσης τιμής του μετασχηματισμένου ωριαίου υψους βροχής ( $\gamma$ ) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).

αυτή την τελευταία περίπτωση εξετάστηκε ακόμα η έκφραση της  $g(\theta)$  με δευτεροβάθμιες και τριτοβάθμιες εξισώσεις ως προς  $\theta$ , αλλά και πάλι τα αποτελέσματα δεν ήταν ικανοποιητικά. Η περαιτέρω έρευνα στο εν λόγω θέμα θεωρήθηκε άσκοπη, και εν τέλει υιοθετήθηκε και εδώ η γραμμική συνάρτηση (2.9.15) με  $g_1 = 0$ .

Στους κλάδους Α2 έως Δ2, του σχήματος 2.17., έχουν χαραχθεί οι εμπειρικές μέσες τιμές του  $\gamma_i$ , υπολογισμένες από δύο διαφορετικές αλλά ισοδύναμες

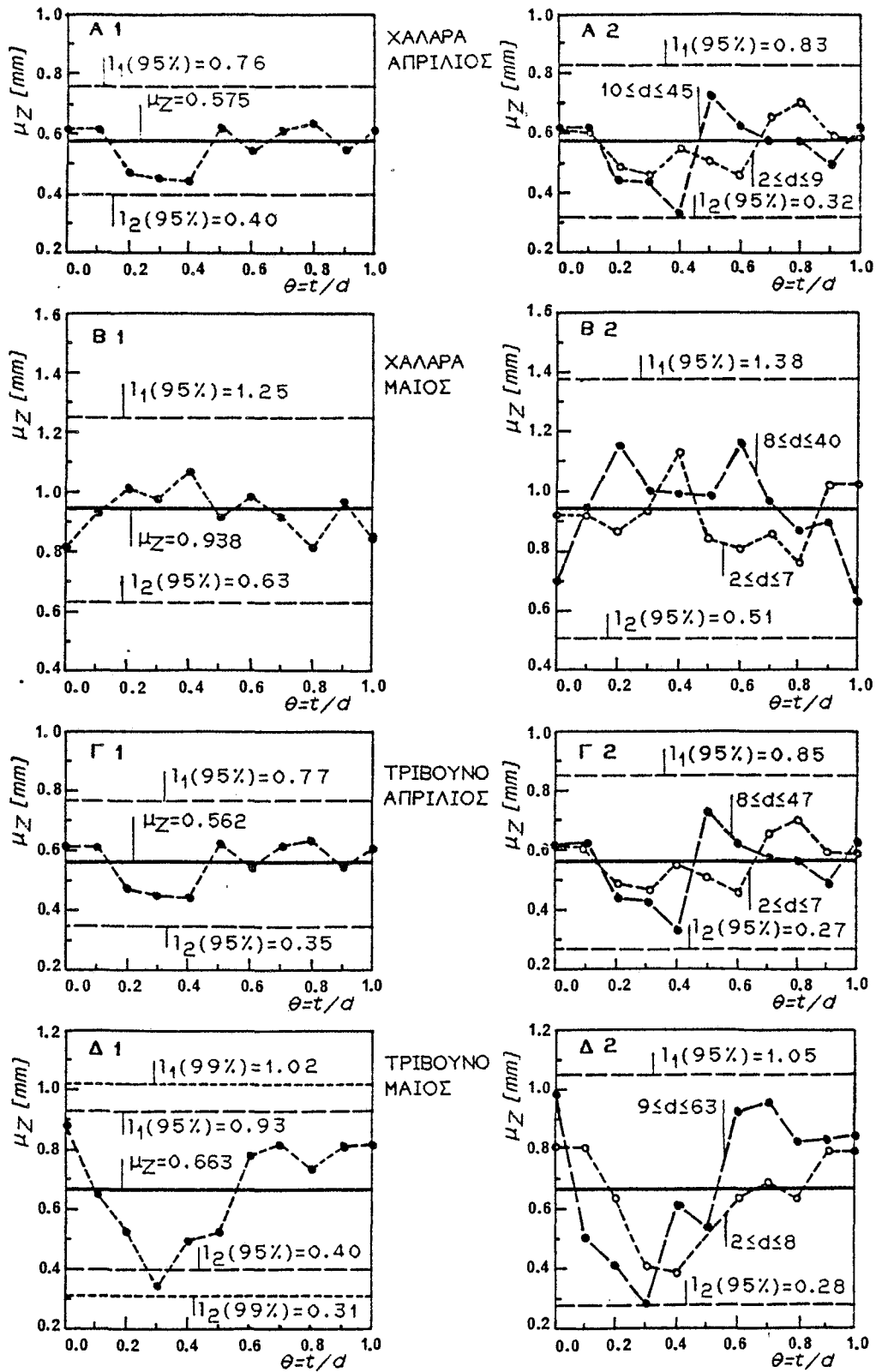
ως προς το μέγεθος δειγματικές κλάσεις, όπου η μια περιλαμβάνει τα επεισόδια βροχής με μικρές διάρκειες, και η άλλη τα επεισόδια με μεγάλες διάρκειες. Η σχετική ομοιότητα των δύο ομάδων καμπυλών μεταξύ τους επιβεβαιώνει την υιοθέτηση του αδιαστατοποιημένου χρόνου  $\theta$ , αντί του πραγματικού χρόνου  $t$ , για την περιγραφή της επίδρασης του χρόνου στα στατιστικά χαρακτηριστικά του ωρικού ύψους βροχής.

#### 2.9.6. Έλεγχος του μοντέλου: Γ. Η ομογένεια της μεταβλητής Z.

Βεβαίως η μη μονιμότητα της βροχόπτωσης σε μικρή χρονική κλίμακα είναι αρκετά πολύπλοκο φαινόμενο, και δεν περιμένουμε ότι με την εισαγωγή των συναρτήσεων  $k(d)$  και  $g(\theta)$  έχει δοθεί η πλήρης περιγραφή της. Σε πολλές εργασίες το θέμα έχει αντιμετωπιστεί διαφορετικά (βλ. και υποπαράγρ. 2.2.5). Η πιο κοινή μέθοδος κατατάσσει τις βροχοπτώσεις σε διαφορετικούς τύπους, αποδίδοντας μια συγκεκριμένη αδιαστατοποιημένη χρονική κατανομή σε κάθε τύπο. Η κατανομή αυτή είτε δίνεται από ένα γράφημα (πχ. *Grace και Eagleson [1966]*), είτε από ένα σύνολο αριθμητικών παραμέτρων (πχ. *Bras και Rodriguez-Iturbe [1976]*). Αντίθετα στο μοντέλο που προτείνεται εδώ, θεωρείται ένας ενιαίος τύπος βροχόπτωσης με μια ουσιαστικά παράμετρο χρονικής κατανομής (την  $g_1$ ), ενώ τα στατιστικά χαρακτηριστικά επηρεάζονται και από τη διάρκεια βροχής. Έτσι το μοντέλο αυτό είναι πολύ απλούστερο, και πιο εύχρηστο. Βέβαια είναι πιο πολύπλοκο από άλλα μοντέλα που περιγράφουν τη βροχόπτωση σαν μόνιμο φαινόμενο, όπως τα μοντέλα σημειακών ανελιξεων.

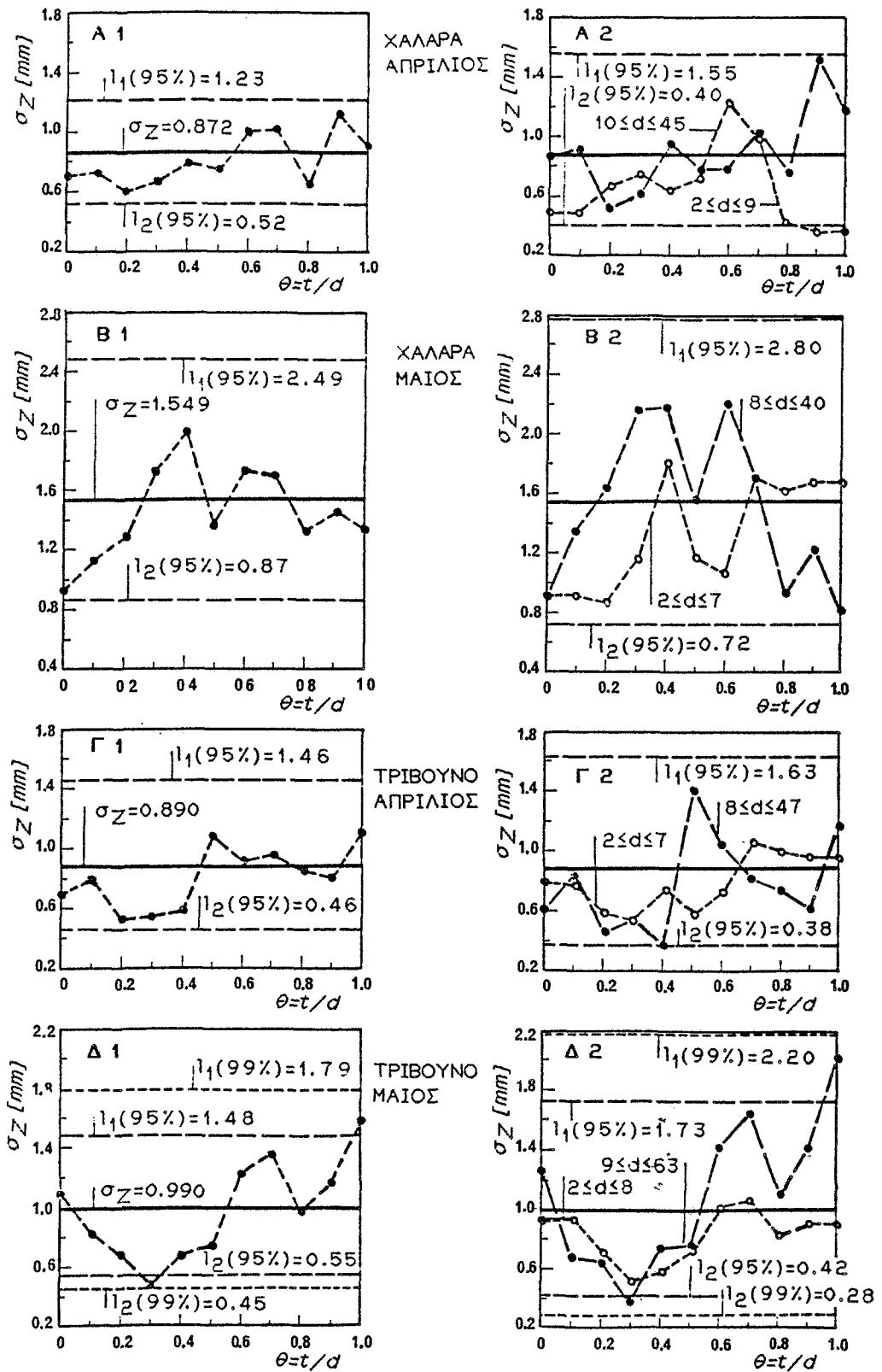
Στην υποπαράγραφο αυτή θα εξετάσουμε αν ο προτεινόμενος τρόπος "αφαίρεσης" της μη μονιμότητας, μέσω της μεταβλητής  $Z$ , οδηγεί σε ανεκτά αποτελέσματα. Το μοντέλο προβλέπει ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ομογενοποιημένου ύψους βροχής,  $Z$ , δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Συνεπώς η εμφανιζόμενη μεταβλητότητα τους θα πρέπει να εξηγείται από τη θεωρία πιθανοτήτων. Αυτό σημαίνει ότι η εμπειρική μέση τιμή και η αντίστοιχη τυπική απόκλιση, που υπολογίζονται από ένα δείγμα για μια τυχούσα χρονική θέση  $\theta_j$ , δεν θα πρέπει να διαφέρουν σημαντικά από την προβλεπόμενη από το μοντέλο τιμή  $\mu_Z$  ή  $\sigma_Z$ .

Οι σχετικοί έλεγχοι γίνονται στα σχήματα 2.18 (μέση τιμή) και 2.19 (τυπική απόκλιση). Στα σχήματα αυτά απεικονίζονται (α) τα εμπειρικά χαρακτηριστικά των δειγμάτων της μεταβλητής  $Z$ , για τιμές του  $\theta_j$  από 0 μέχρι 1, με ισοδιάσταση 0.10, που υπολογίστηκαν με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν της μεταβλητής  $Y$ , όπως περιγράφεται στην προηγούμενη υποπαράγραφο, (β) οι προβλεπόμενες από το μοντέλο αντίστοιχες θεωρητικές τιμές και (γ) τα όρια εμπιστοσύνης των τελευταίων, για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Τα όρια εμπιστοσύνης υπολογίστηκαν με μεθόδους Monte-Carlo, με ηλεκτρονικό υπολογιστή, γιατί στην προκειμένη περί-



Σχήμα 2.18 : Μεταβολή της εμπειρικής μέσης τιμής του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους Βροχής (Z) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).





Σχήμα 2.19 : Μεταβολή της εμπειρικής τυπικής απόκλισης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής (Z) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).

πτωση δεν ισχύουν ούτε κατά προσέγγιση (ειδικά για την τυπική απόκλιση) οι κλασικοί τύποι της κανονικής κατανομής, και αυτό λόγω της μεγάλης ασυμμετρίας της κατανομής της  $Z$ . Για τον υπολογισμό αυτό χρησιμοποιήθηκαν οι κατανομές της  $Z$  που προσδιορίζονται στην υποπαράγραφο 2.9.8, και με βάση αυτές έγινε η παραγωγή των τυχαίων αριθμών που απαιτεί η μέθοδος Monte-Carlo.

Από τα σχήματα αυτά διαπιστώνουμε ότι, με μία εξαίρεση, τα εμπειρικά χαρακτηριστικά βρίσκονται μέσα στα αντίστοιχα τους όρια εμπιστοσύνης 95%. Η εξαίρεση αναφέρεται στο δείγμα του σταθμού Τρίβουνο για το μήνα Μάιο, και εξηγείται από την αποτυχία της γραμμικής μορφής της συνάρτησης  $g(\theta)$  στο εν λόγω δείγμα. Και πάλι όμως η μέγιστη απόκλιση που παρατηρείται βρίσκεται μέσα στα όρια εμπιστοσύνης 99%, και μπορεί να θεωρηθεί ως ανεκτή.

### 2.9.7. Έλεγχος του μοντέλου: Δ. Οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης της μεταβλητής Z.

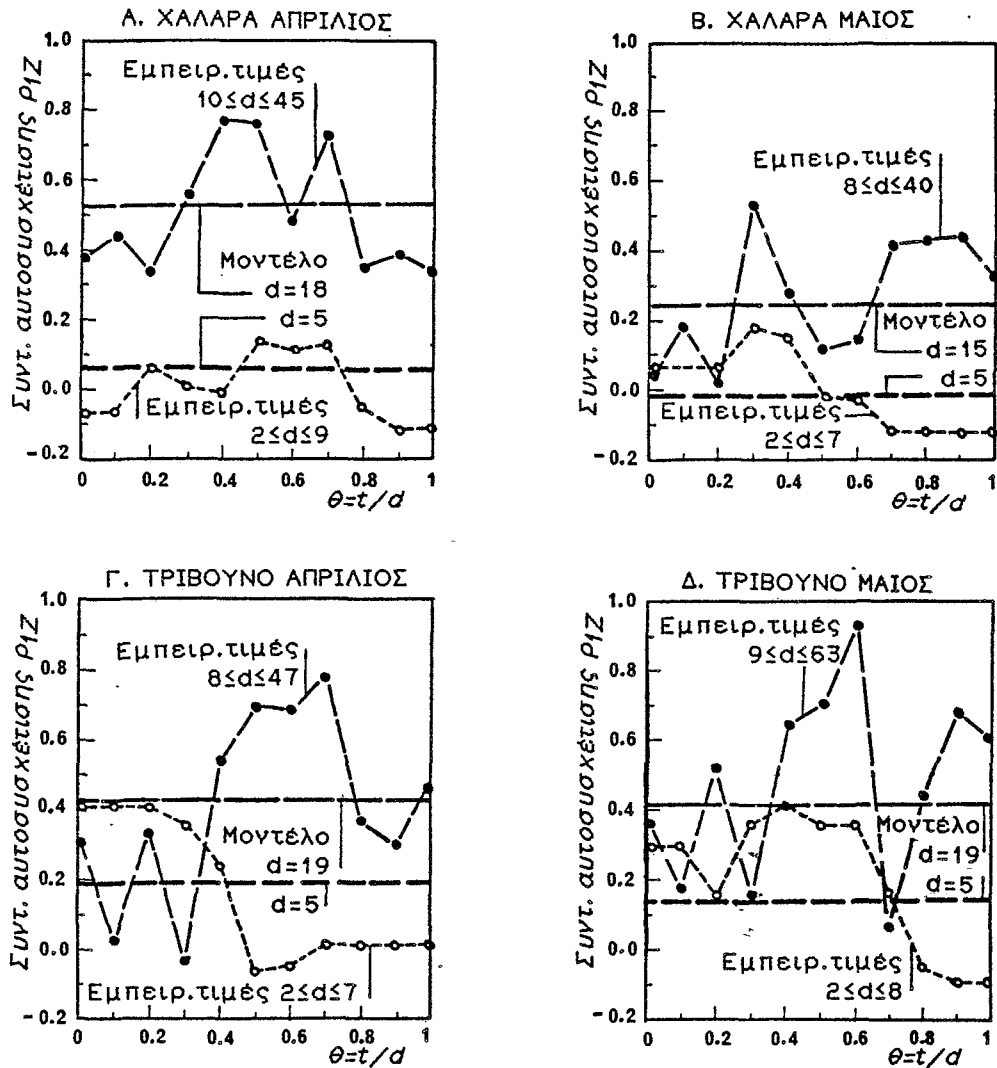
Οι σχετικές με την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των ωριαίων υψών βροχής θεωρήσεις του περιγραφικού μοντέλου είναι συνοπτικά οι εξής:

1. Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης  $a'$  τάξης του ομογενοποιημένου ύψους βροχής,  $\rho_{1Z}$  δεν εξαρτάται από τη χρονική θέση  $\theta_1$ . (υπόθεση)
2. Ο συντελεστής αυτός εξαρτάται από τη χρονική διάρκεια της βροχόπτωσης και μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (2.9.17). (συνέπεια άλλων υποθέσεων)
3. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της μεταβλητής  $Z$  είναι Μαρκοβιανή, δηλαδή ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης  $k$  τάξης είναι  $\rho_{kZ} = \rho_{1Z}^k$ . (υπόθεση).

Ας σημειωθεί ότι στο περιγραφικό μοντέλο ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης της μεταβλητής  $Z$  ορίζεται μόνο μέσα στο επεισόδιο βροχής, και όχι έξω από αυτό. Το ίδιο ισχύει, βέβαια, και για το συντελεστή αυτοσυσχέτισης του ωριαίου ύψους βροχής  $X$ , ο οποίος μάλιστα, όταν αναφερόμαστε σε ένα επεισόδιο βροχής καθορισμένης διάρκειας, είναι ίσος με τον αντίστοιχο συντελεστή της  $Z$ . Συνεπώς σε ένα επεισόδιο βροχής διάρκειας  $d$ , έχει νόημα να μιλάμε για συντελεστές αυτοσυσχέτισης τάξης το πολύ  $d-1$ .

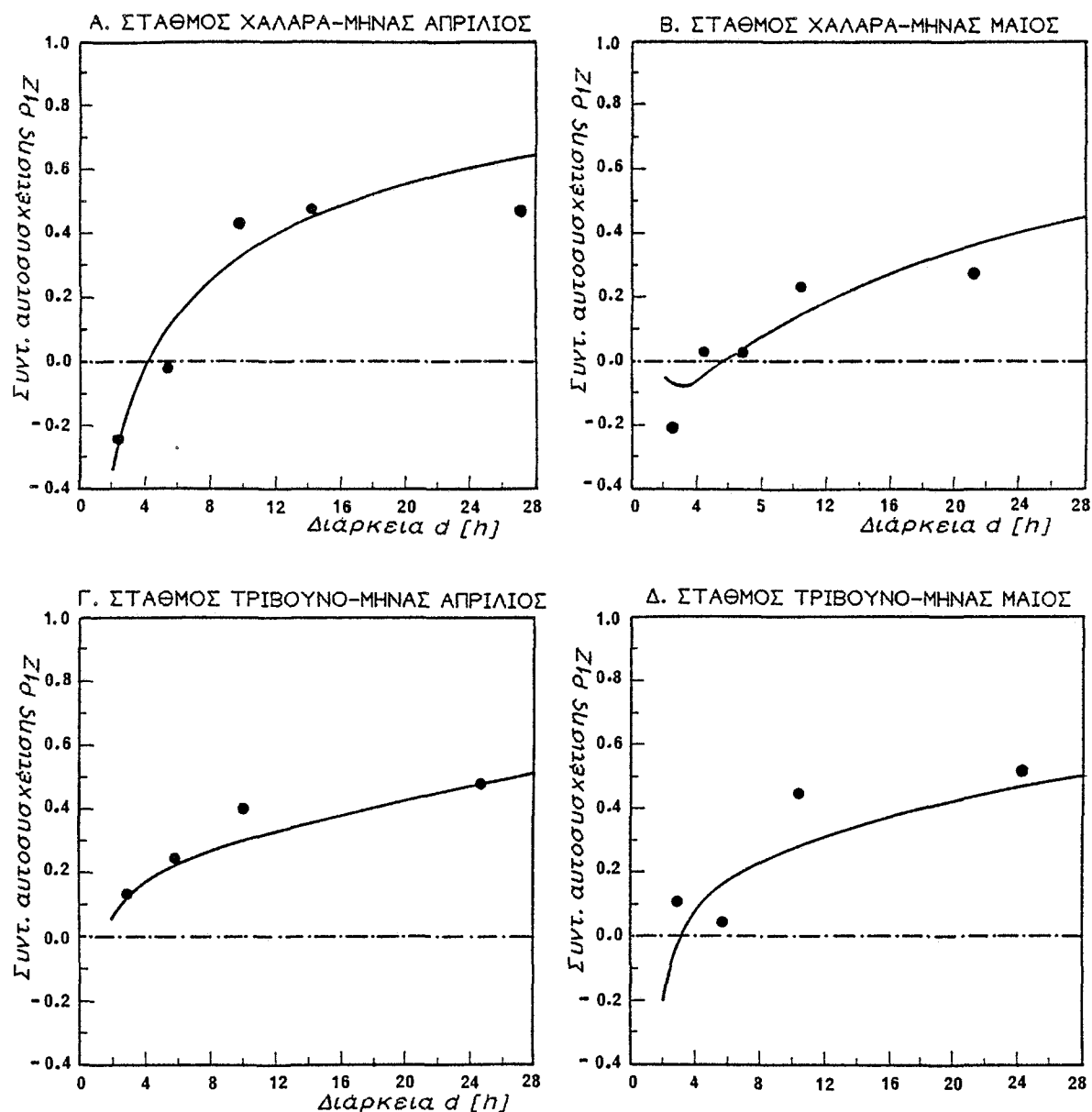
Για τον έλεγχο της πρώτης θεώρησης έχει συνταχθεί το σχήμα 2.20. Σ' αυτό δίνονται οι εμπειρικές τιμές του συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $\rho_{1Z}$ , υπολογισμένες από τα δείγματα για διάφορες τιμές του  $\theta_1$ , με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε προηγούμενα. Μάλιστα κάθε δείγμα χωρίστηκε σε δύο κλάσεις, μια με τα επεισόδια

μικρής διάρκειας και μια για τα μεγάλης διάρκειας. Γενικά δεν παρατηρείται καμιά σαφής τάση μεταβολής του  $\rho_{1Z}$  συναρτήσει του  $\theta$  και κατά συνέπεια η εν λόγω θεώρηση θα πρέπει να θεωρηθεί σωστή. Η παρατηρούμενη σε μερικές περιπτώσεις έντονη μεταβλητότητα του  $\rho_{1Z}$  μπορεί να αποδοθεί σε τυχαίους λόγους. Ας σημειωθεί ότι στην περίπτωση του συντελεστή συσχέτισης δικαιολογείται μεγάλη μεταβλητότητα από τυχαίους λόγους. (πκ. ακόμα και για μεταβλητές με κανονική κατανομή για μέγεθος δείγματος 40, τα όρια εμπιστοσύνης ενός συντελεστή συσχέτισης ίσου με 0.40 είναι 0.11 και 0.62)



Σχήμα 2.20 ; Μεταβολή του εμπειρικού συντελεστή αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους Βροχής (Z) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).

Η δεύτερη θεώρηση ελέγχεται με τα σχήματα 2.20 και 2.21. Από το σχήμα 2.20 προκύπτει ότι στις βροχοπτώσεις μεγαλύτερης διάρκειας οι συντελεστές  $\rho_{1Z}$  είναι μεγαλύτεροι. Ακόμα φαίνεται ότι οι μέσες τιμές των εμπειρικών συντελεστών συμφωνούν με τις αντίστοιχες τιμές του μοντέλου, που προκύπτουν από τη σχέση (2.9.17), για διάρκεια ίση με τη μέση διάρκεια της κάθε δειγματικής κλάσης.



Σχήμα 2.21: Μεταβολή του συντελεστή αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής συναρτήσει της διάρκειας επεισοδίου βροχής ( $d$ ). Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στις θεωρητικές τιμές που προβλέπονται από το μοντέλο και τα σημεία στις εμπειρικές τιμές ανά δειγματική κλάση.

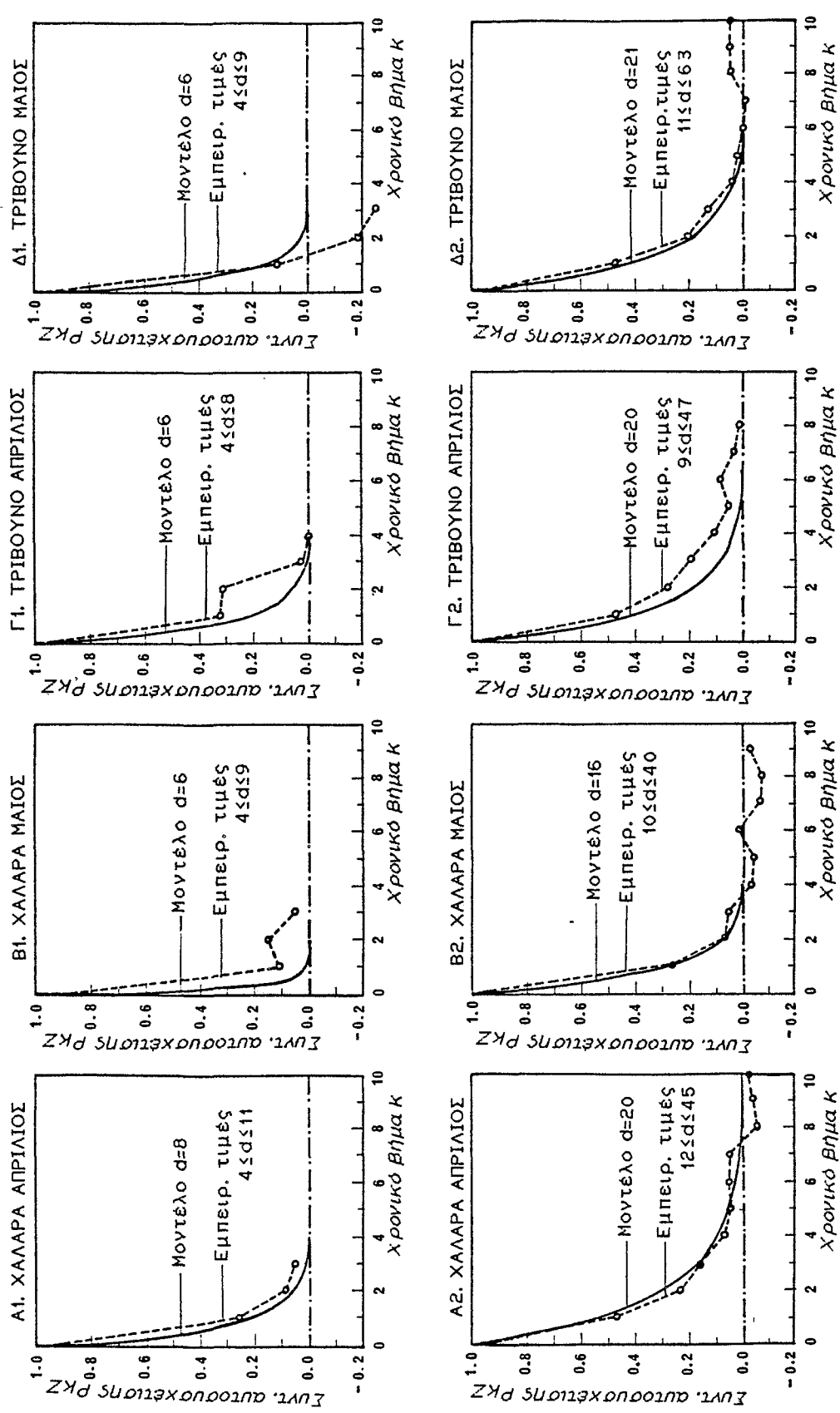
Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται με μεγαλύτερη σαφήνεια από το σχήμα 2.21. Εδώ οι εμπειρικοί συντελεστές συσχέτισης υπολογίστηκαν από όλες τις τιμές του  $Z$ , χωρίς διάκριση χρονικής θέσης, ενώ χρησιμοποιήθηκαν περισσότερες από 2 δειγματικές κλάσεις. Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στις θεωρητικές τιμές του  $\rho_{1Z}$ , που προέκυψαν από αριθμητικές επιλύσεις της εξίσωσης (2.9.17). Η συμφωνία εμπειρικών και θεωρητικών τιμών είναι ικανοποιητική. Θα πρέπει να τονιστεί ότι σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμή του εμπειρικού συντελεστή συσχέτισης είναι αρνητική για μικρές διάρκειες βροχής (2-3 ώρες). Βέβαια οι αυτές οι αρνητικές τιμές δεν είναι σημαντικές (πχ. σε επίπεδο σημαντικότητας 5%), αλλά δεν έχουμε λόγο και να τις απορρίψουμε αφού έχουν κάποια λογική: Σε μια δίωρη βροχόπτωση είναι πολύ πιθανό μια ισχυρή ένταση βροχής την πρώτη ώρα να ακολουθείται από μια ήπια ένταση τη δεύτερη ώρα, και αντίστροφα. Άλλωστε, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.21, το μοντέλο προσαρμόζεται αρκετά καλά και στις αρνητικές τιμές του συντελεστή αυτοσυσχέτισης.

Τέλος η τρίτη θεώρηση ελέγχεται με το σχήμα 2.22. Εδώ έχουν χρησιμοποιηθεί μόνο δύο δειγματικές κλάσεις, με σκοπό να έχουμε σχετικά μεγαλύτερο πλήθος δεδομένων σε κάθε κλάση, ώστε να προσδιορίσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια τους εμπειρικούς συντελεστές αυτοσυσχέτισης μεγαλύτερης τάξης. Μάλιστα στην πρώτη κλάση χρησιμοποιήθηκαν τα επεισόδια με διάρκεια μεγαλύτερη των 3 ωρών, ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε συντελεστές αυτοσυσχέτισης με τάξη μέχρι 3. Όπως φαίνεται στο εν λόγω σχήμα οι εμπειρικές τιμές συμφωνούν με το Μαρκοβιανό μοντέλο σε ικανοποιητικό βαθμό.

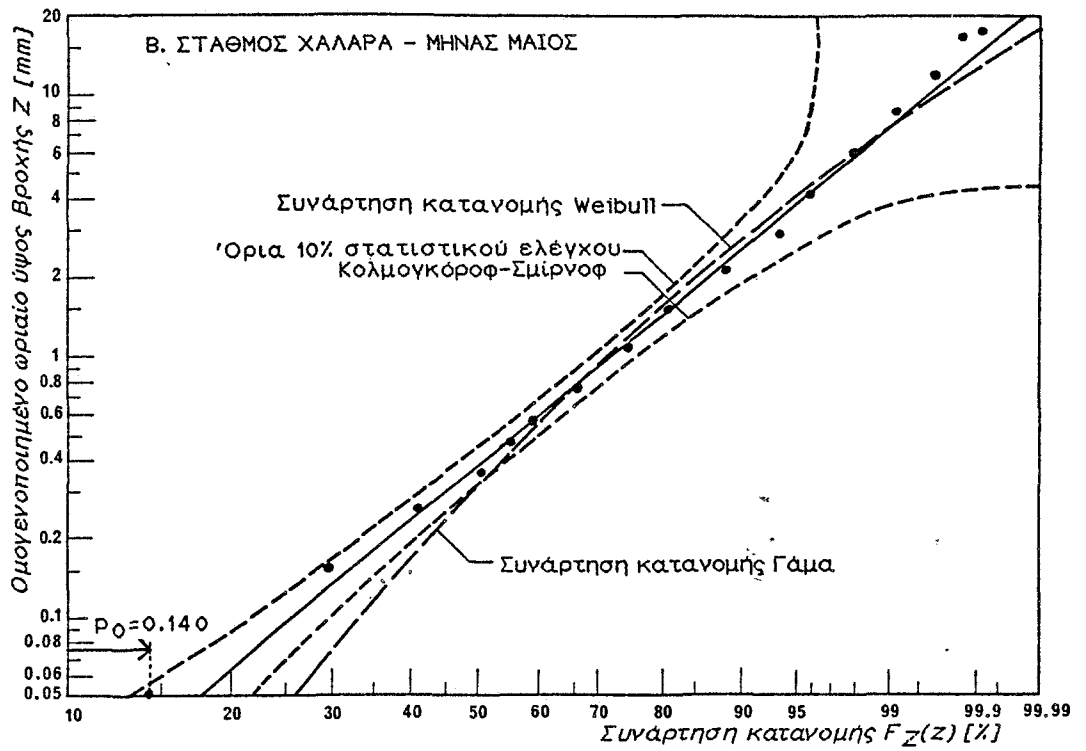
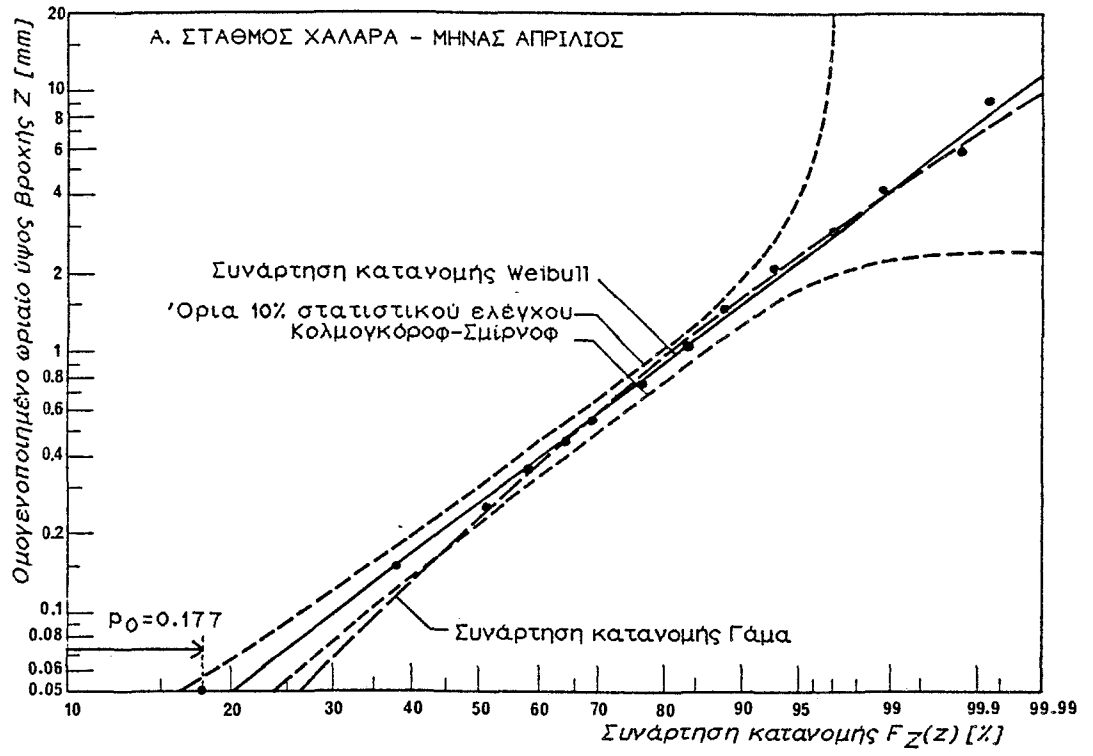
#### 2.9.8. Η κατανομή του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής

Στο περιγραφικό μοντέλο ωριαίου ύψους βροχής δεν έχει επιβληθεί καμιά δέσμευση αναφορικά με την περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ωριαίου ύψους βροχής  $X$  ή του αντίστοιχου ομογενοποιημένου ύψους  $Z$ . Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατά περίπτωση όποια κατανομή ταιριάζει στο κάθε δείγμα. Είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε διπαραμετρική συνάρτηση κατανομής, ώστε να μη χρειαστεί να εισάγουμε και άλλες παραμέτρους στο μοντέλο πέρα από τις δύο πρώτες ροπές, που έχουν ήδη μελετηθεί.

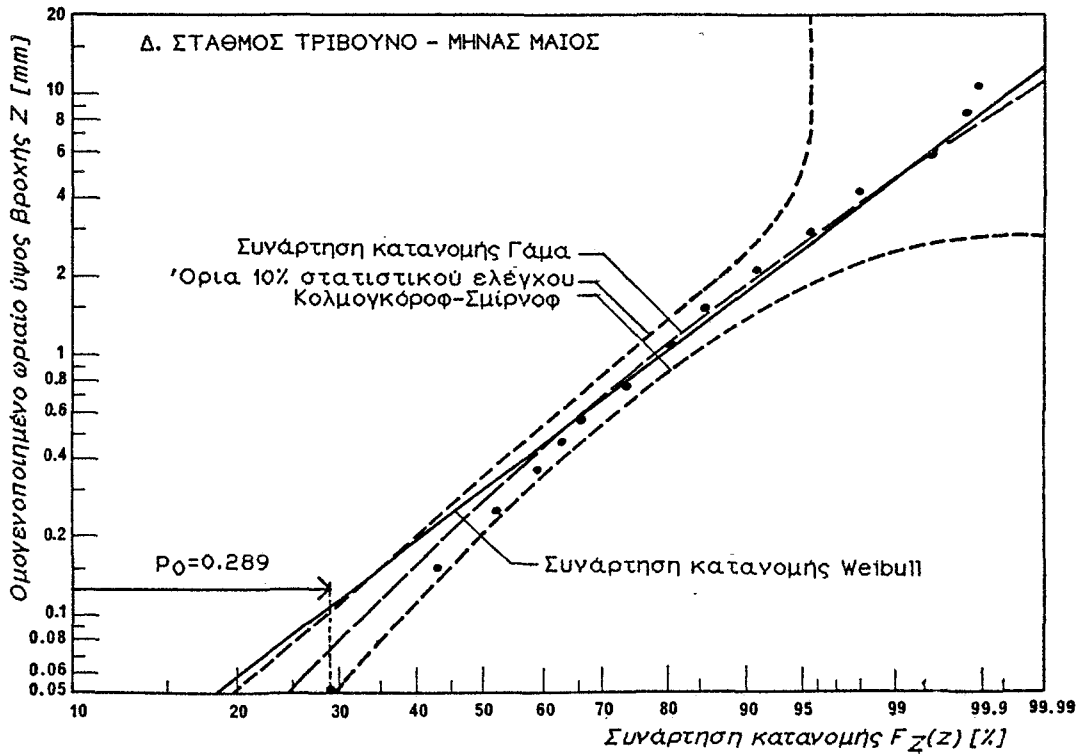
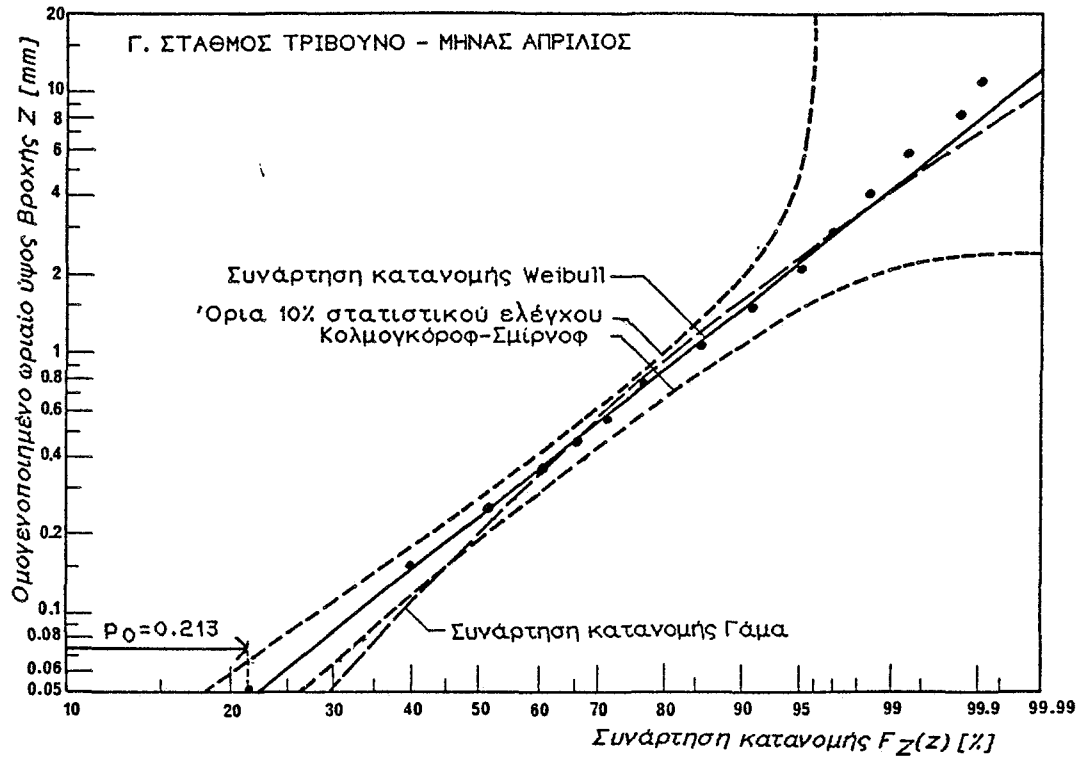
Στο σχήμα 2.23 έχουν απεικονιστεί οι εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των τεσσάρων ιστορικών δειγμάτων της μεταβλητής  $Z$ . Επίσης έχουν χαραχθεί οι συναρτήσεις κατανομής γάμα και Weibull, με παραμέτρους υπολογισμένες με τη μέθοδο των ροπών, συναρτήσεις των  $m_Z$  και  $\sigma_Z^2$ . Όπως φαίνεται από τη σύγκριση και οι δύο συναρτήσεις προσαρμόζονται καλά στα δείγματα. Στις μικρές τιμές της μεταβλητής υπερέρχει η κατανομή Weibull, εκτός από μια περίπτωση (Τρίβουνο-Μάιος) που υπερέρχει η κατανομή γάμα.



Σχήμα 2.22.: Μεταβολή του συντελεστή αυτοσχέτισης κ-τάξης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής συναρτήσει του χρονικού βήματος (κ).



Σχήμα 2.23 : Συνάρτηση κατανομής του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής,  $Z$ .



Σχήμα 2.23 (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής,  $Z$ .



Όσο αφορά την κατανομή του πραγματικού ύψους βροχής μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι όμοια με την αντίστοιχη κατανομή της  $Z$  (Weibull ή γάμα). Οι παράμετροι της μπορούν να υπολογιστούν με τη μέθοδο των ροπών από τα  $\mu_X$  και  $\sigma_X^2$ , που δίνονται από τις σχέσεις (2.9.28) και (2.9.29) αντίστοιχα. Ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης κατανομής δίνεται στο σχήμα 2.5.

### 2.9.9. Η πιθανότητα μηδενισμού του ωριαίου ύψους βροχής

Το θέμα της παρουσίας χρονικών περιόδων με πρακτικά μηδενικό ωριαίο ύψος βροχής μέσα σε ένα επεισόδιο βροχής έχει ήδη συζητηθεί στις υποπαραγράφους 2.6.1 και 2.6.5. Δεδομένου ότι αν ισχύει ( $X=0$ ) τότε και ( $Z=0$ ) (λόγω της (2.9.5)), η συχνότητα  $p_0$  των μηδενικών τιμών του ωριαίου ύψους βροχής ταυτίζεται με την αντίστοιχη συχνότητα μηδενισμού της μεταβλητής  $Z$ . Κατ' επέκταση όσων αναφέρθηκαν στις υποπαραγράφους 2.6.1 και 2.6.5, μπορούμε να θεωρήσουμε:

$$p_0 = F_Z(0.05) \quad (2.9.34)$$

Από το σχήμα 2.23 επιβεβαιώνεται ότι η παραπάνω σχέση ισχύει σε ικανοποιητικό βαθμό (το πιο "χαμηλό" σημείο της εμπειρικής κατανομής αντιστοιχεί στις μηδενικές τιμές του  $Z$ ), χωρίς να απαιτείται τροποποίηση της θεωρητικής συνάρτησης κατανομής της  $Z$  (Weibull ή γάμα). Οι αριθμητικές τιμές των  $p_0$  και  $F_Z(0.05)$  φαίνονται και στον πίνακα 2.4.

Πάντως αν η εμφανιζόμενη διαφορά μεταξύ της θεωρητικής τιμής της  $F_Z(0.05)$  και της εμπειρικής  $p_0$ , ξεπερνά τον επιθυμητό βαθμό ακρίβειας, τότε μπορούμε να εισάγουμε σαν επιπλέον παράμετρο της κατανομής την  $p_0$ , και να τροποποιήσουμε αντίστοιχα την θεωρητική συνάρτηση κατανομής στην περιοχή των χαμηλών τιμών της μεταβλητής (πχ. στο διάστημα  $z < 0.10$ ). Βέβαια σε αυτή την περίπτωση η τροποποίηση επιφέρει και μια μεταβολή στις ροπές της κατανομής. Για να αναιρέσουμε την μεταβολή αυτή θα πρέπει να κάνουμε μια διόρθωση στις παραμέτρους της θεωρητικής κατανομής. Παρακάτω αποδεικνύεται ότι αν η τροποποίηση της συνάρτησης κατανομής της  $Z$  πραγματοποιείται στο διάστημα  $(0, 0.10)$ , τότε οι παράμετροι της θεωρητικής κατανομής θα πρέπει να υπολογίζονται από τις εξής διορθωμένες ροπές:

$$\mu_{Z'} = \mu_Z - 0.05 \Delta p \quad (2.9.35)$$

$$\sigma_{Z'}^2 = \sigma_Z^2 + 0.1 \Delta p (\mu_Z - 0.05) \quad (2.9.36)$$

όπου

$$\Delta p = F_Z(0.05) - p_0 \quad (2.9.37)$$

Στην πράξη οι διορθώσεις αυτές είναι ασήμαντες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4  
 ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΩΡΙΑΙΟΥ ΥΨΟΥΣ ΒΡΟΧΗΣ ( $p_0$ )  
 ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ( $Pr(Z \leq 0.05) = F_Z(0.05)$ )  
 (Διάρκεια βροχής  $\geq 2$  ώρες)

	ΣΤΑΘΜΟΣ : ΧΑΛΑΡΑ		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΤΡΙΒΟΥΝΟ	
	Απρίλιος	Μάιος	Απρίλιος	Μάιος
Συνάρτηση κατανομής	Weibull	Weibull	Weibull	γάμα
Παράμετροι κατανομής	b=0.443 c=0.680	b=0.670 c=0.634	b=0.411 c=0.652	$\kappa=0.452$ $\lambda=0.679$
Θεωρ. συχνότητα $F_Z(0.05)$	0.202	0.175	0.223	0.241
Εμπειρ. " $p_0$	0.177	0.140	0.213	0.289

Απόδειξη των (2.9.35) και (2.9.36)

Θα θεωρήσουμε ότι η τροποποίηση στη συνάρτηση κατανομής γίνεται για τιμές της  $z$  στο διάστημα  $(0, 0.10)$ . Αν το μέγεθος  $\Delta p = F_Z(0.05) - p_0$  είναι θετικό (αρνητικό), τότε η τροποποίηση επιφέρει μια μείωση (αύξηση) της πυκνότητας πιθανότητας στο διάστημα  $(0, 0.05)$  που κατά μέσο όρο είναι  $\Delta p/0.05$ , και μια ίση σε απόλυτο μέγεθος αύξηση (μείωση) της πυκνότητας πιθανότητας στο διάστημα  $(0.05, 0.15)$ . Οι αντίστοιχες μεταβολές στην πρώτη και δεύτερη ροπή θα είναι:

$$\Delta \mu_Z \approx (0.05/2) \times 0.05 \times (-\Delta p/0.05) + (3 \times 0.05/2) \times 0.05 \times (+\Delta p/0.05) = 0.05 \Delta p \quad (\alpha)$$

$$\Delta \mu_{2Z} \approx (0.05/2)^2 \times 0.05 \times (-\Delta p/0.05) + (3 \times 0.05/2)^2 \times 0.05 \times (+\Delta p/0.05) = 0.005 \Delta p \quad (\beta)$$

Αν  $\mu_Z'$  και  $\sigma_Z'^2$  είναι οι διορθωμένες κεντρικές ροπές της θεωρητικής συνάρτησης κατανομής (Weibull ή γάμα), τότε θα πρέπει

$$\mu_Z' + \Delta \mu_Z = \mu_Z \quad (\gamma)$$

$$\sigma_Z'^2 + \mu_Z'^2 + \Delta \mu_{2Z} = \sigma_Z^2 + \mu_Z^2 \quad (\delta)$$

Από τις (α) και (γ) προκύπτει άμεσα η (2.9.35). Εξ άλλου από τις ίδιες σχέσεις παίρνουμε

$$\mu_Z^2 - \mu_Z'^2 = +2(\Delta \mu_Z)\mu_Z - (\Delta \mu_Z)^2 \approx +0.1 \Delta p \mu_Z \quad (\epsilon)$$

Από τις (β), (δ) και (ε) προκύπτει η (9.9.36).

## 2.10. Η ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΗ ΣΕ ΜΗΝΙΑΙΑ ΒΑΣΗ

### 2.10.1. Γενικά

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθούν οι ιδιότητες των μεταβλητών που περιγράφουν τη βροχόπτωση σε μηνιαία βάση. Πιο συγκεκριμένα θα μελετηθούν οι μεταβλητές μηνιαίο ύψος βροχής (S), μηνιαία διάρκεια βροχής (U) και μηνιαίος αριθμός επεισοδίων βροχής (N). Οι ιδιότητες των μεταβλητών αυτών θα εξαχθούν ως συνέπειες των ιδιοτήτων των μεταβλητών του επεισοδίου βροχής, χωρίς την εισαγωγή πρόσθετων παραμέτρων. Η μόνη πρόσθετη υπόθεση που θα γίνει αφορά την στοχαστική εξάρτηση των μεταβλητών S και U, που θα θεωρηθεί γραμμική.

### 2.10.2. Ο μηνιαίος αριθμός επεισοδίων βροχής (N)

Συνήθως δεν αποδίδεται μεγάλη σημασία στη μεταβλητή αυτή, αλλά η μελέτη της προτάσσεται, γιατί διευκολύνει τη μελέτη των άλλων μεταβλητών.

Η κατανομή της μεταβλητής N μπορεί να προκύψει από την κατανομή του χρόνου διαδοχής. Η τελευταία είναι (φραγμένη) εκθετική εξ ορισμού, με πυκνότητα πιθανότητας την (2.6.10). Αν αγνοηθεί η επίδραση του χρόνου διαχωρισμού, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κατανομή του N είναι Poisson, δηλαδή

$$p_v = \Pr(N=v|\tau) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^v}{v!}, \quad v=0,1,2,\dots \quad (2.10.1)$$

με παράμετρο

$$\lambda = \omega\tau = \tau/\mu_v$$

όπου  $\tau$  η διάρκεια του μήνα, εκφρασμένη σε ώρες,  $\omega$  η παράμετρος της εκθετικής κατανομής του χρόνου διαδοχής, και  $\mu_v$  η μέση τιμή του χρόνου διαδοχής.

Ακριβέστερα η κατανομή του N μπορεί να αποδοθεί με την ακόλουθη σχέση, που παίρνει υπόψη και την επίδραση του c (η απόδειξη στο τέλος της υποπαράγραφου):

$$p_v = \Pr(N=v|\tau) = (1+\kappa) \frac{(\lambda-\kappa v)^v}{v!} e^{-\lambda-\kappa v}, \quad v=0,1,\dots,m \quad (2.10.2)$$

όπου

$$\lambda = \omega\tau = \tau/(\mu_v - c),$$

$$\kappa = \omega c = c/(\mu_v - c)$$

$$m = [\tau/c] = [\kappa\lambda]$$

Ο αριθμός m είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το v, που στην προκειμένη

περίπτωση είναι πεπερασμένη. Το σύμβολο  $[x]$  εδώ σημαίνει το ακέραιο μέρος του αριθμού  $x$ .

Οι ροπές της μεταβλητής  $N$  μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις:

$$\mu_N = \sum_{v=1}^m v p_v, \quad \sigma_N^2 = \sum_{v=1}^m v^2 p_v - \mu_N^2$$

Αν η κατανομή του  $N$  δίνεται από τη σχέση (2.10.1), τότε βάσει των γνωστών ιδιοτήτων της κατανομής Poisson θα έχουμε

$$\mu_N = \sigma_N^2 = \lambda = \omega\tau = \tau/\mu\gamma \quad (2.10.3)$$

Αν όμως χρησιμοποιηθεί για την κατανομή του  $N$  η σχέση (2.10.2), τα πράγματα είναι αρκετά περίπλοκα, γιατί οι παραπάνω γενικές σχέσεις ροπών δεν μπορούν να οδηγήσουν σε απλούς τύπους. Ο προσδιορισμός των ροπών σε αυτή την περίπτωση μπορεί να γίνει μόνο αριθμητικά. Με συστηματική αριθμητική διερεύνηση καταστρώθηκαν οι ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις, που δίνουν αναλυτικά τις ροπές, με ικανοποιητική ακρίβεια:

$$\mu_N = \frac{\lambda}{1+\kappa} = \frac{\omega\tau}{1+\omega\kappa} = \frac{\tau}{\mu\gamma} \quad (2.10.4)$$

και

$$\sigma_N^2/\mu_N = 1/(1+\kappa)^2$$

απ' όπου προκύπτει

$$\sigma_N^2 = \frac{\lambda}{(1+\kappa)^3} = \frac{\omega\tau}{(1+\omega\kappa)^3} = \frac{(\mu\gamma - \kappa)^2 \tau}{\mu\gamma^3} \quad (2.10.5)$$

#### Απόδειξη της (2.10.2)

Έστω  $N$  ο αριθμός των επεισοδίων βροχής στο διάστημα  $[0, \tau]$ . Η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν  $N=v$  επεισόδια βροχής στο εν λόγω διάστημα, ήτοι η  $\Pr(N=v|\tau)$ , θα είναι

$$\Pr(N=v|\tau) = \Pr(N \geq v|\tau) - \Pr(N \geq v+1) = \Pr(V_1+V_2+\dots+V_v \leq \tau) - \Pr(V_1+V_2+\dots+V_{v+1} \leq \tau) =$$

$$= \Pr(W_v \leq \tau) - \Pr(W_{v+1} \leq \tau) = F_{W_v}(\tau) - F_{W_{v+1}}(\tau)$$

όπου  $V_i$  ο χρόνος διαδοχής του επεισοδίου  $i$  με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την (2.6.10) (φραγμένη εκθετική), και  $W_j = V_1+V_2+\dots+V_j$ . Υπολογίζεται πρώτα η συνάρτηση κατανομής της  $W_j$ .

$$F_{W_j}(w) = \Pr(V_1+V_2+\dots+V_j \leq w) = \Pr(V_1-c + V_2-c + \dots + V_j-c \leq w-ic) = \Pr(Z_1+Z_2+\dots+Z_j \leq w-ic)$$

όπου η μεταβλητές  $Z_j = V_j - c$  έχουν κοινή εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\omega$ , και κατά συνέπεια

$$F_{V_i}(w) = \Gamma_K(w-ic; i, \theta) \quad (a)$$

Ο παραπάνω συμβολισμός σημαίνει ότι η  $V_i$  ακολουθεί την κατανομή Γάμα με παραμέτρους  $i$  και  $\theta$ . Μετά τα παραπάνω θα έχουμε

$$\Pr(N=v|\tau) = \Gamma_K(\tau-vc; v, \theta) - \Gamma_K(\tau-(v+1)c; v+1, \theta)$$

$$= \int_0^{\tau-vc} \frac{\theta^v}{(v-1)!} w^{v-1} e^{-\theta w} dw - \int_0^{\tau-vc-c} \frac{\theta^{v+1}}{v!} w^v e^{-\theta w} dw$$

Το δεύτερο από τα παραπάνω ολοκληρώματα το διασπούμε σε δύο, με όρια  $(0, \tau-vc)$  και  $(\tau-vc-c, \tau-vc)$ , και παράλληλα εφαρμόζουμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, βάζοντας  $[-(1/\theta)e^{-\theta w}]' = e^{-\theta w}$ , οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Pr(N=v|\tau) &= \int_0^{\tau-vc} \frac{\theta^v}{(v-1)!} w^{v-1} e^{-\theta w} dw + \frac{\theta^v}{v!} (\tau-vc)^v e^{-\theta(\tau-vc)} - \int_0^{\tau-vc} \frac{\theta^v}{(v-1)!} w^{v-1} e^{-\theta w} dw \\ &+ \int_{\tau-vc-c}^{\tau-vc} \frac{\theta^{v+1}}{v!} w^v e^{-\theta w} dw \end{aligned}$$

Ο πρώτος και ο τρίτος όρος του β' μέλους της παραπάνω απαλείφονται. Το ολοκλήρωμα στον τελευταίο όρο αναφέρεται σε ένα πολύ περιορισμένο διάστημα, αφού πάντοτε  $c \ll \tau$ . Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι σταθερή στο διάστημα  $(\tau-vc-c, \tau-vc)$  και ίση με την τιμή της στο σημείο  $\tau-vc$ , οπότε θα έχουμε:

$$\Pr(N=v|\tau) \approx \frac{\theta^v}{v!} (\tau-vc)^v e^{-\theta(\tau-vc)} + c \frac{\theta^{v+1}}{v!} (\tau-vc)^v e^{-\theta(\tau-vc)}$$

και τελικά

$$\Pr(N=v|\tau) \approx \frac{[\theta(\tau-vc)]^v}{v!} e^{-\theta(\tau-vc)} (1+c\theta)$$

Αν θέσουμε  $\lambda = \theta\tau$  και  $\kappa = \theta c$ , τότε προκύπτει η (2.10.2)

### 2.10.3. Το μηνιαίο ύψος βροχής (S)

Θεωρητικά η συνάρτηση κατανομής του μηνιαίου ύψους βροχής (S), αν θεωρηθεί ότι τα ύψη βροχής των διαφόρων επεισοδίων είναι ανεξάρτητες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής  $F_H(h)$ , δίνεται από τη σχέση

$$F_S(s) = p_0 + \sum_{v=1}^m p_v F_{S_v}(s) \quad (2.10.6)$$

όπου η  $p_Y$  έχει οριστεί στην προηγούμενη υποπαράγραφο, και  $F_{S_Y}(s)$  η συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής  $S_Y = H_1 + H_2 + \dots + H_Y$ . Εάν η μεταβλητή  $N$  δεν είναι φραγμένη, τότε στο παραπάνω άθροισμα το  $m$  θα πρέπει να θεωρηθεί  $\infty$ . Στην περίπτωση που η  $F_H(h)$  είναι γάμα με παραμέτρους  $\mu$  (μορφής) και  $\rho$  (κλίμακας), η κατανομή της  $S_Y$  μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά: θα είναι και αυτή γάμα με παραμέτρους  $\nu\mu$  και  $\rho$ . Αν επιπλέον θεωρηθεί ότι η κατανομή του αριθμού επεισοδίων βροχής ανά μήνα είναι Poisson (σχέση 2.10.1), τότε η συνάρτηση κατανομής του  $S$  παίρνει την ακόλουθη μορφή (βλ. και *Eagleson* [1978], καθώς και υποπαράγραφο 2.2.1).

$$F_S(s) = e^{-\lambda} \cdot \left[ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} P(\nu\mu, \rho s) \right] \quad (2.10.7)$$

όπου η συνάρτηση  $P()$  είναι η μη πλήρης συνάρτηση γάμα του Pearson, δηλαδή

$$P(\nu\mu, \rho s) = \gamma(\nu\mu, \rho s) / \Gamma(\nu\mu) = \left[ \int_0^{\rho s} e^{-z} \cdot z^{\nu\mu-1} dz \right] / \Gamma(\nu\mu) \quad (2.10.8)$$

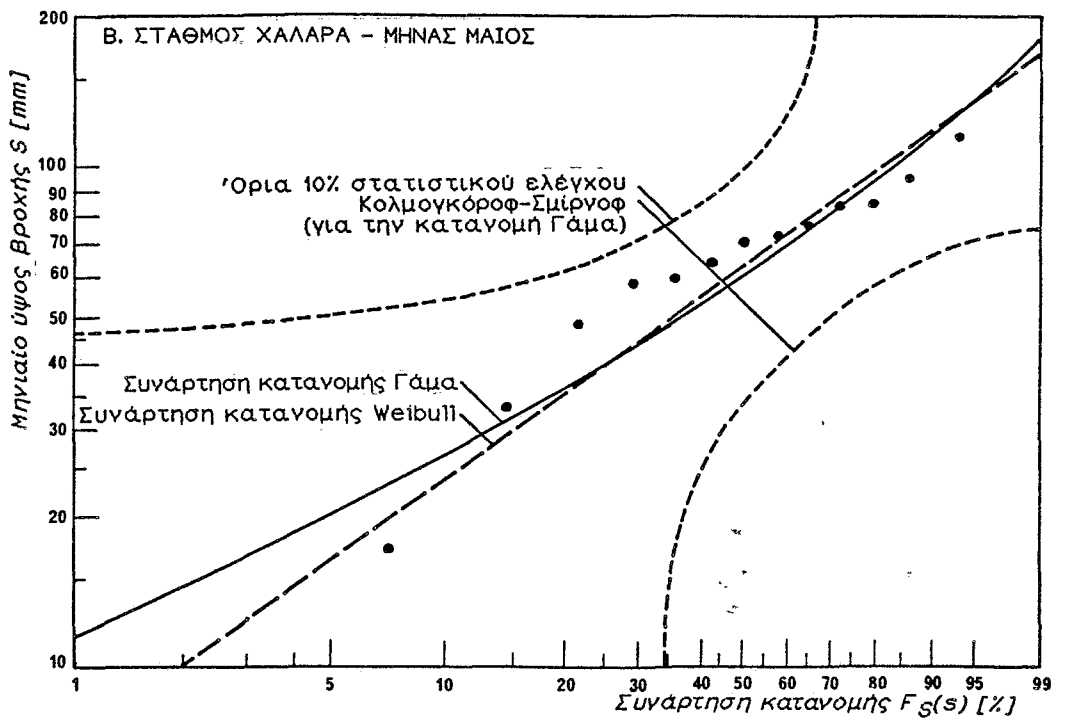
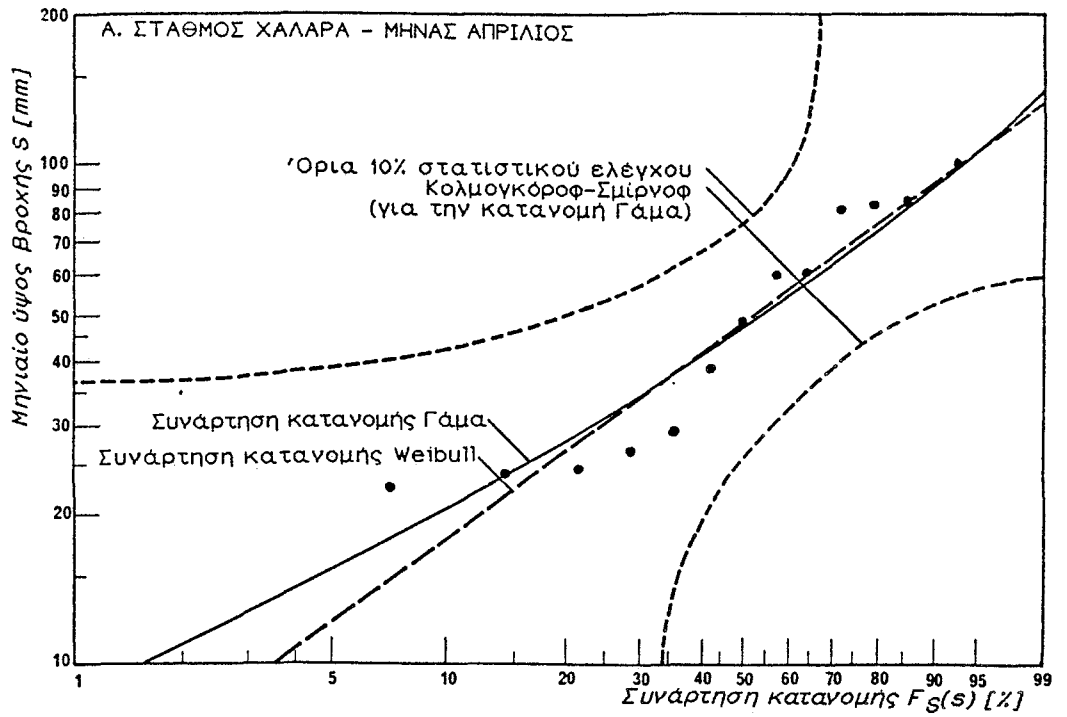
Η συνάρτηση κατανομής (2.10.7), που θα την αποκαλούμε συνάρτηση κατανομής *Eagleson* είναι αρκετά πολύπλοκη στους υπολογισμούς και δεν εξυπηρετεί στα μοντέλα προσομοίωσης. Όπως προέκυψε από αριθμητική διερεύνηση οι τιμές της συνήθως βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές των συναρτήσεων κατανομής γάμα και Weibull (βλ. και επόμενη υποπαράγραφο, καθώς και σχήμα 2.25). Μάλιστα στις μικρές τιμές της μεταβλητής η εν λόγω συνάρτηση προσεγγίζει περισσότερο την συνάρτηση Weibull, ενώ στις μεγάλες εμφανίζεται πλησιέστερα στην γάμα. Οι αποκλίσεις πάντως είναι μικρές, και έτσι μπορούμε να την προσεγγίσουμε με μια από αυτές. Για τις εφαρμογές που σχετίζονται με το μοντέλο επιμερισμού είναι προτιμότερο να την προσεγγίζουμε με τη συνάρτηση κατανομής γάμα.

Οι ροπές της μεταβλητής  $S$  μπορούν να υπολογιστούν από την γενική σχέση (2.10.6), χωρίς να είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί ο τύπος της κατανομής των  $N$  και  $H$ . Οι σχετικές εξισώσεις είναι οι ακόλουθες, και αποδεικνύονται στο τέλος της υποπαράγραφου.

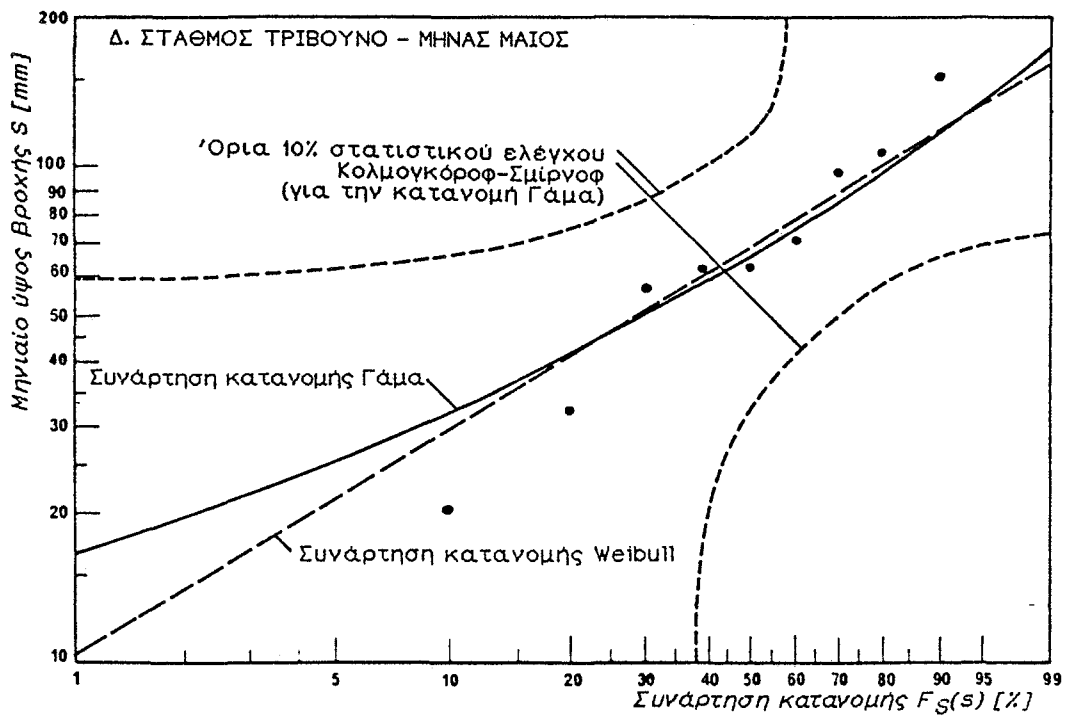
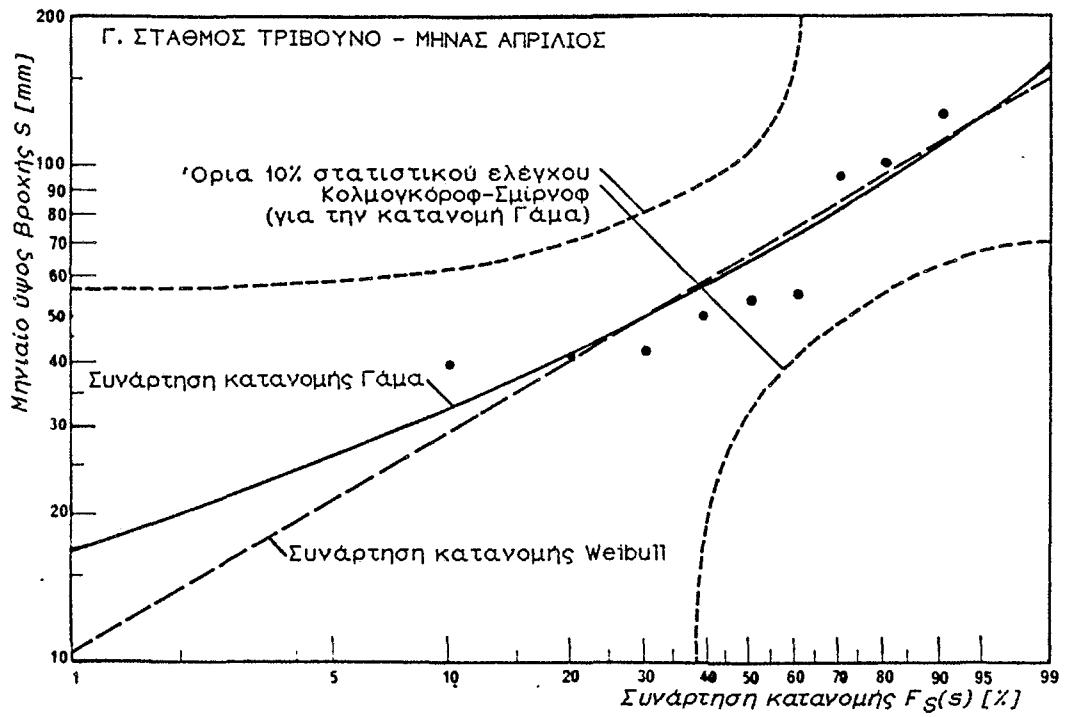
$$\mu_S = \mu_H \mu_N \quad (2.10.9)$$

$$\sigma_S^2 = \sigma_H^2 \mu_N + \mu_H^2 \sigma_N^2 \quad (2.10.10)$$

Μετά τα παραπάνω μπορούμε να θεωρούμε ότι η κατανομή του μηνιαίου ύψους βροχής είναι κατα προσέγγιση γάμα, με παραμέτρους που υπολογίζονται με τη μέθοδο των ροπών και τις σχέσεις (2.10.9) και (2.10.10). Οι ροπές της μεταβλητής  $H$  που υπεισέρχονται στις σχέσεις αυτές υπολογίζονται από τις (2.8.7) και (2.8.9), και οι αντίστοιχες ροπές της μεταβλητής  $N$  από τις σχέσεις (2.10.4) και (2.10.5).



Σχήμα 2.24 : Συνάρτηση κατανομής του μηνιαίου ύψους βροχής,  $S$ .



Σχήμα 2.24 (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής του μηνιαίου ύψους βροχής,  $S$ .



Για τον έλεγχο των παραπάνω συμπερασμάτων παρατίθεται το σχήμα 2.24, όπου έχουν χαραχτεί οι θεωρητικές κατανομές γάμα και Weibull, σε συνδυασμό με τις εμπειρικές κατανομές των μηνιαίων υψών βροχής. Επισημαίνεται ότι οι παράμετροι των θεωρητικών κατανομών δεν υπολογίστηκαν από τις ροπές των δειγμάτων αυτών αλλά από τις θεωρητικές ροπές, βάσει των παραπάνω σχέσεων. Η σύγκριση δείχνει ότι η προσαρμογή και των δύο θεωρητικών κατανομών προς την εμπειρική είναι ικανοποιητική.

=====

Απόδειξη των (2.10.9) και (2.10.10)

Έστω  $p_v = \Pr(N=v|t)$   $v=1,2,\dots,n$  (Στην περίπτωση της κατανομής Poisson  $n=\infty$  ενώ στην περίπτωση της κατανομής (2.10.2) το  $n$  είναι πεπερασμένο).

Ισχύουν τα ακόλουθα

$$\sum_{v=1}^n v p_v = \mu_N$$

$$\sum_{v=1}^n v^2 p_v = \sigma_N^2 + \mu_N^2$$

Ως συνέπεια της (2.10.6), η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $S$  είναι

$$f_S(s) = \sum_{v=1}^n p_v f_{S_v}(s), \quad s > 0 \quad (a)$$

Το άθροισμα  $S_v = H_1 + H_2 + \dots + H_v$  έχει ροπές

$$\mu_{S_v} = v \mu_H, \quad \sigma_{S_v}^2 = v \sigma_H^2 \quad (b)$$

Από τις (a) και (b) μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές της  $S$ .

$$\mu_S = \int_0^{\infty} s f_S(s) ds = \int_0^{\infty} s \sum_{v=1}^n p_v f_{S_v}(s) ds = \sum_{v=1}^n p_v \int_0^{\infty} s f_{S_v}(s) ds = \sum_{v=1}^n p_v \mu_{S_v} = \mu_H \sum_{v=1}^n v p_v = \mu_H \mu_N$$

Αποδείχθηκε έτσι η (2.10.9). Εξ άλλου

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 + \mu_S^2 &= \int_0^{\infty} s^2 f_S(s) ds = \int_0^{\infty} s^2 \sum_{v=1}^n p_v f_{S_v}(s) ds = \sum_{v=1}^n p_v \int_0^{\infty} s^2 f_{S_v}(s) ds = \sum_{v=1}^n p_v (\sigma_{S_v}^2 + \mu_{S_v}^2) \\ &= \sigma_H^2 \sum_{v=1}^n v p_v + \mu_H^2 \sum_{v=1}^n v^2 p_v = \sigma_H^2 \mu_N + \mu_H^2 (\sigma_N^2 + \mu_N^2) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω το  $\mu_S$  και λύνοντας ως προς  $\sigma_S^2$  παίρνουμε την (2.10.10)

#### 2.10.4. Η μηνιαία διάρκεια βροχής (U)

Όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη υποπαράγραφο για το μηνιαίο ύψος βροχής ισχύουν (με μικρές τροποποιήσεις) και για τη μηνιαία διάρκεια βροχής. Αφού η κατανομή της διάρκειας του επεισοδίου βροχής πρακτικά ταυτίζεται με την κατανομή γάμα (προσεγγίζοντας μάλιστα την εκθετική κατανομή που είναι ειδική περίπτωση της γάμα), η κατανομή της μηνιαίας διάρκειας μπορεί να αποδοθεί από μια σχέση παρόμοια με την (2.10.7). Και εδώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κατανομή γάμα (ή η Weibull) ως προσέγγιση της κατανομής της μηνιαίας διάρκειας βροχής.

Οι ροπές της μηνιαίας διάρκειας βροχής θα δίνονται από σχέσεις παρόμοιες με τις (2.10.9) και (2.10.10), ήτοι

$$\mu_U = \mu_D \mu_N \quad (2.10.11)$$

$$\sigma_U^2 = \sigma_D^2 \mu_N + \mu_D^2 \sigma_N^2 \quad (2.10.12)$$

όπου οι ροπές της D δίνονται από τις (2.7.29), (2.7.22) και (2.7.23).

Ο έλεγχος των παραπάνω συμπερασμάτων γίνεται μέσω του σχήματος 2.25, όπου έχουν χαραχτεί οι θεωρητικές κατανομές γάμα, Weibull και Eagleson, σε συνδυασμό με τις εμπειρικές κατανομές των μηνιαίων διαρκειών βροχής. Και εδώ οι παράμετροι των θεωρητικών κατανομών δεν υπολογίστηκαν από τις ροπές των δειγμάτων αυτών αλλά από τις θεωρητικές ροπές, βάσει των παραπάνω σχέσεων. Η σύγκριση δείχνει ότι η προσαρμογή όλων των θεωρητικών κατανομών προς τις εμπειρικές είναι ικανοποιητική.

#### 2.10.5. Στοχαστική εξάρτηση μηνιαίας διάρκειας και μηνιαίου ύψους βροχής

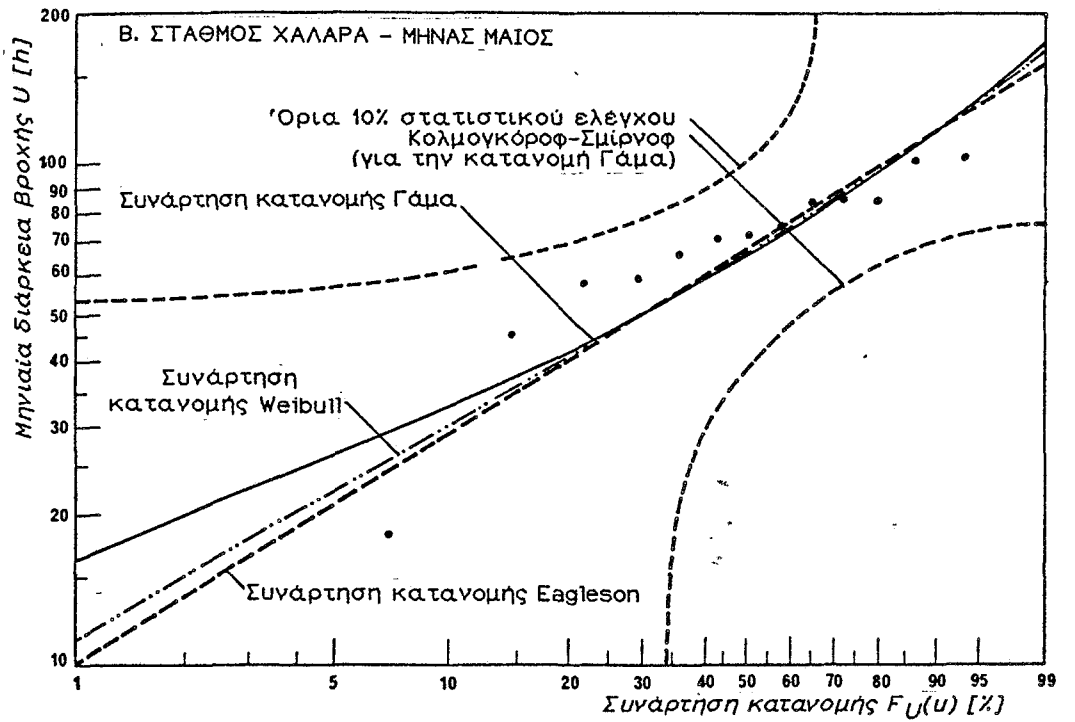
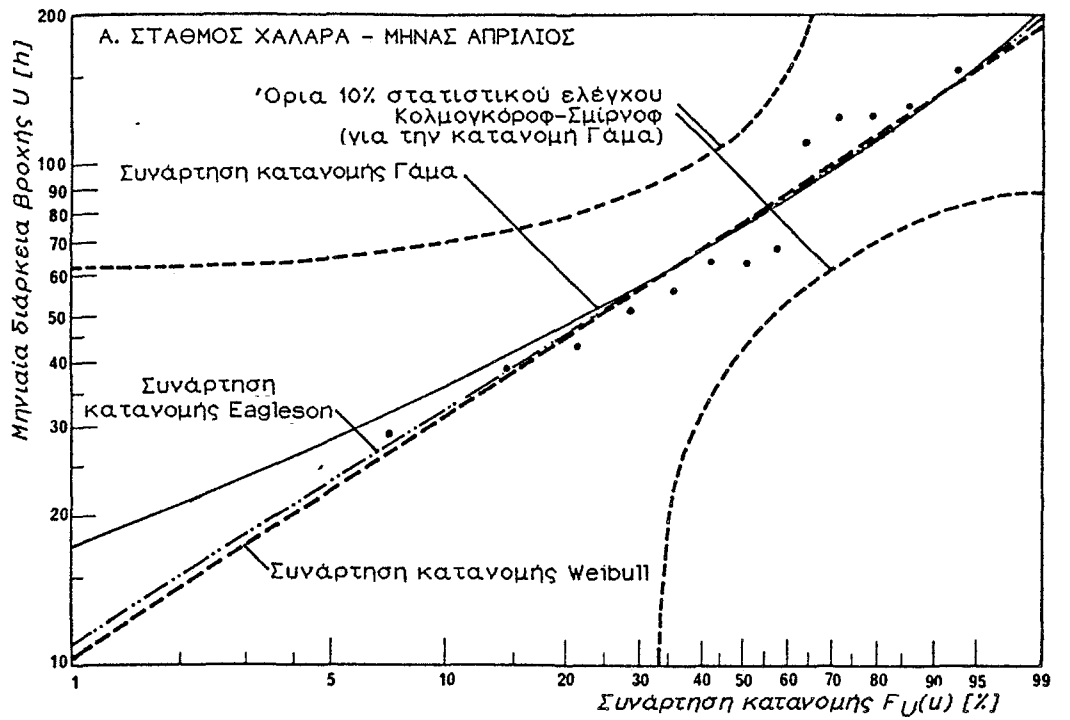
Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της παραγράφου, η στοχαστική εξάρτηση μεταξύ του μηνιαίου ύψους και της μηνιαίας διάρκειας βροχής θα θεωρηθεί γραμμική. Για την ποσοτική έκφραση της εξάρτησης αυτής χρειάζεται μόνο η συνδιασπορά τους  $\sigma_{SU}$ . Αυτή μπορεί να υπολογιστεί με την ακόλουθη σχέση, χωρίς την εισαγωγή άλλων παραμέτρων (η απόδειξη στο τέλος της υποπαραγράφου):

$$\sigma_{SU} = \text{Cov}[S, U] = \sigma_D \mu_N + \mu_D \sigma_N^2 \quad (2.10.13)$$

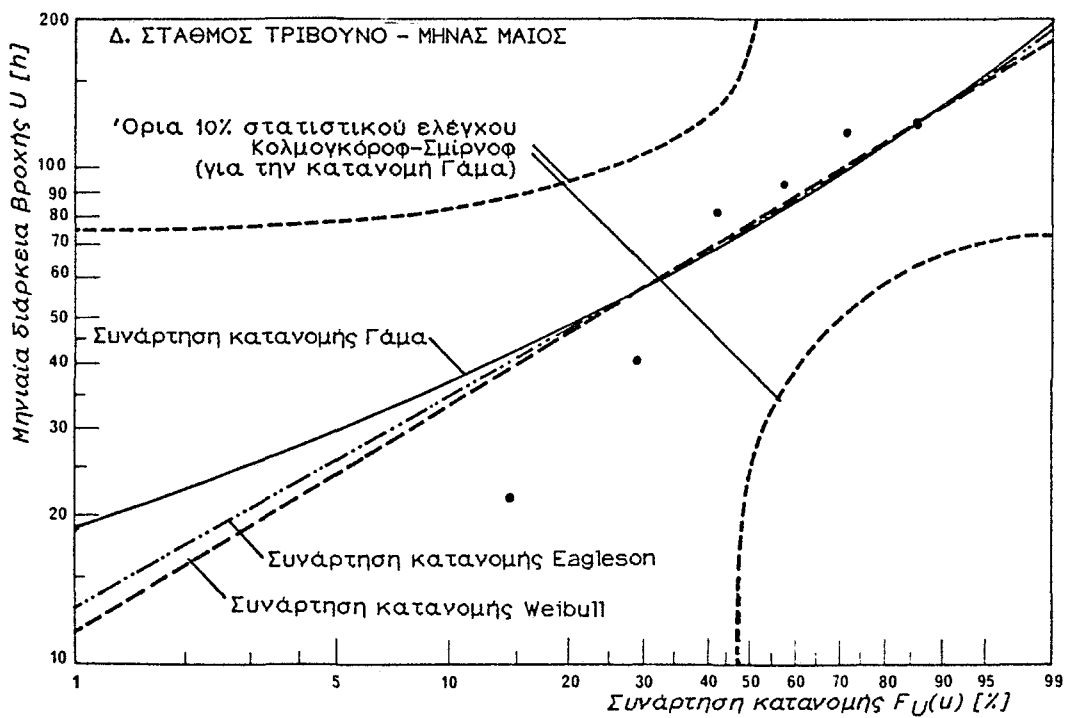
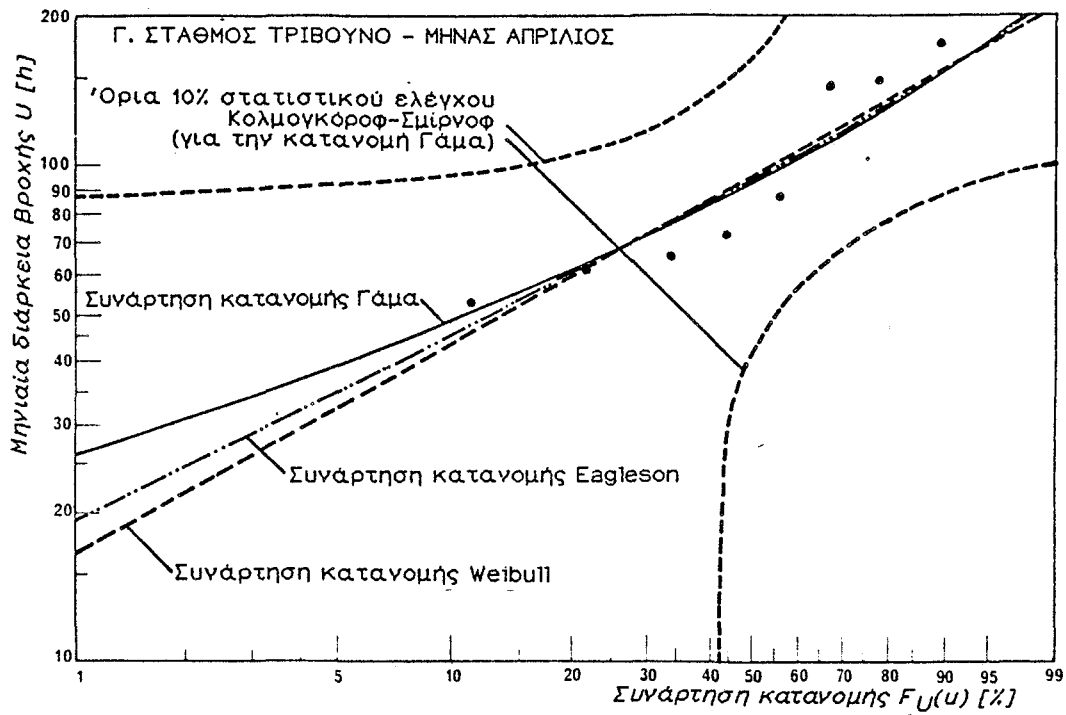
όπου η συνδιασπορά μεταξύ της διάρκειας και του ύψους επεισοδίου βροχής υπολογίζεται από τις σχέσεις (2.8.10) και (2.8.14). Ο συντελεστής συσχέτισης των S και U δίνεται από την προφανή σχέση:

$$\rho_{SU} = \sigma_{SU} / (\sigma_S \sigma_U) \quad (2.10.14)$$

όπου τα  $\sigma_S$  και  $\sigma_U$  δίνονται από τις (2.10.10) και (2.10.12) αντίστοιχα.



Σχήμα 2.25 : Συνάρτηση κατανομής της μηνιαίας διάρκειας βροχής,  $U$ .



Σχήμα 2.25 (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής της μηνιαίας διάρκειας βροχής,  $U$ .

Οι δεσμευμένες ροπές της μεταβλητής  $U$  για δεδομένη τιμή του  $S$  προκύπτουν άμεσα από τις κλασικές σχέσεις της θεωρίας πιθανοτήτων

$$E[U|S=s] = c_1 s + c_0 \quad (2.10.15)$$

$$\text{Var}[U|S=s] = \sigma_U^2 (1 - \rho_{SU}^2) \quad (2.10.16)$$

όπου

$$c_1 = \rho_{SU} \sigma_U / \sigma_S, \quad c_0 = \mu_U - c_1 \mu_S \quad (2.10.17)$$

Ο έλεγχος των παραπάνω συμπερασμάτων γίνεται με το σχήμα 2.26, όπου έχουν απεικονιστεί τα εμπειρικά δεδομένα σε άξονες  $(s,u)$  καθώς και η ευθεία παλινδρόμησης τους, υπολογισμένη από τα εμπειρικά χαρακτηριστικά των δειγμάτων, σε συνδυασμό με την σχέση (2.10.15). Η σύγκριση δείχνει ότι η προσαρμογή του παραπάνω θεωρητικού σχήματος προς τα εμπειρικά δεδομένα είναι ικανοποιητική.<sup>23</sup>

#### Απόδειξη της (2.10.13)

Ισχύει

$$\text{Cov}[H_i, D_j] = \sigma_{DH}, \quad \text{Cov}[H_i, D_j] = 0 \quad (\text{για } i \neq j)$$

Κατα συνέπεια

$$\text{Cov}[S_v, U_v] = \text{Cov}[(H_1 + H_2 + \dots + H_v), (D_1 + D_2 + \dots + D_v)] = v \sigma_{DH}$$

Η αμοιβαία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των  $S_v, U_v$  είναι

$$f_{SU}(s, u) = \sum_{v=1}^n p_v f_{S_v U_v}(s, u) \quad (s, u > 0) \quad (a)$$

Η αμοιβαία ροπή περί την αρχή τάξης  $(1,1)$  των  $S$  και  $U$  είναι

$$\begin{aligned} \text{Cov}[S, U] + \mu_S \mu_U &= \int_0^\infty \int_0^\infty s u f_{SU}(s, u) ds du = \int_0^\infty \int_0^\infty s u \sum_{v=1}^n p_v f_{S_v U_v}(s, u) ds du = \sum_{v=1}^n p_v \int_0^\infty \int_0^\infty s u f_{S_v U_v}(s, u) ds du \\ &= \sum_{v=1}^n p_v (\text{Cov}[S_v, U_v] + \mu_{S_v} \mu_{U_v}) = \sigma_{DH} \sum_{v=1}^n v p_v + \mu_S \mu_U \sum_{v=1}^n v^2 p_v = \sigma_{DH} \mu_H + \mu_S \mu_U (\mu_H^2 + \sigma_H^2) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω τα  $\mu_S$  και  $\mu_U$  και λύνοντας ως προς  $\text{Cov}[S, U]$  παίρνουμε τη σχέση (2.10.13).

#### 2.10.6. Αριθμητικές τιμές των ροπών και παραμέτρων

Οι αριθμητικές τιμές των ροπών και παραμέτρων της μηνιαίας βροχόπτωσης,

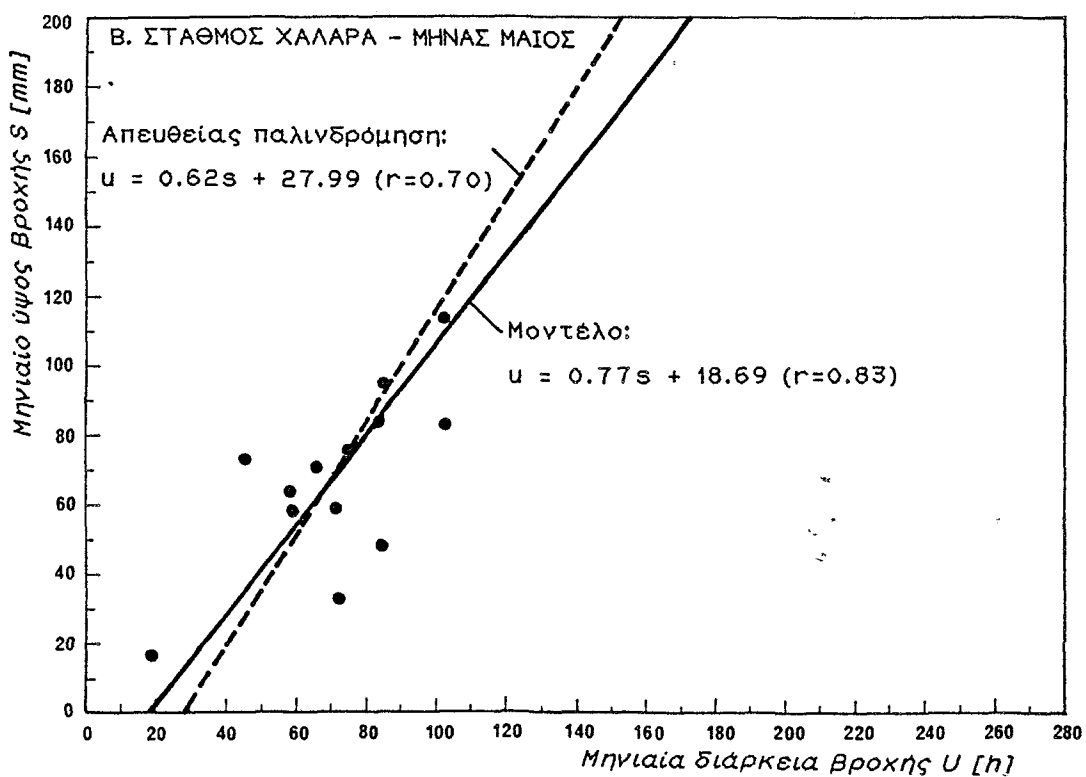
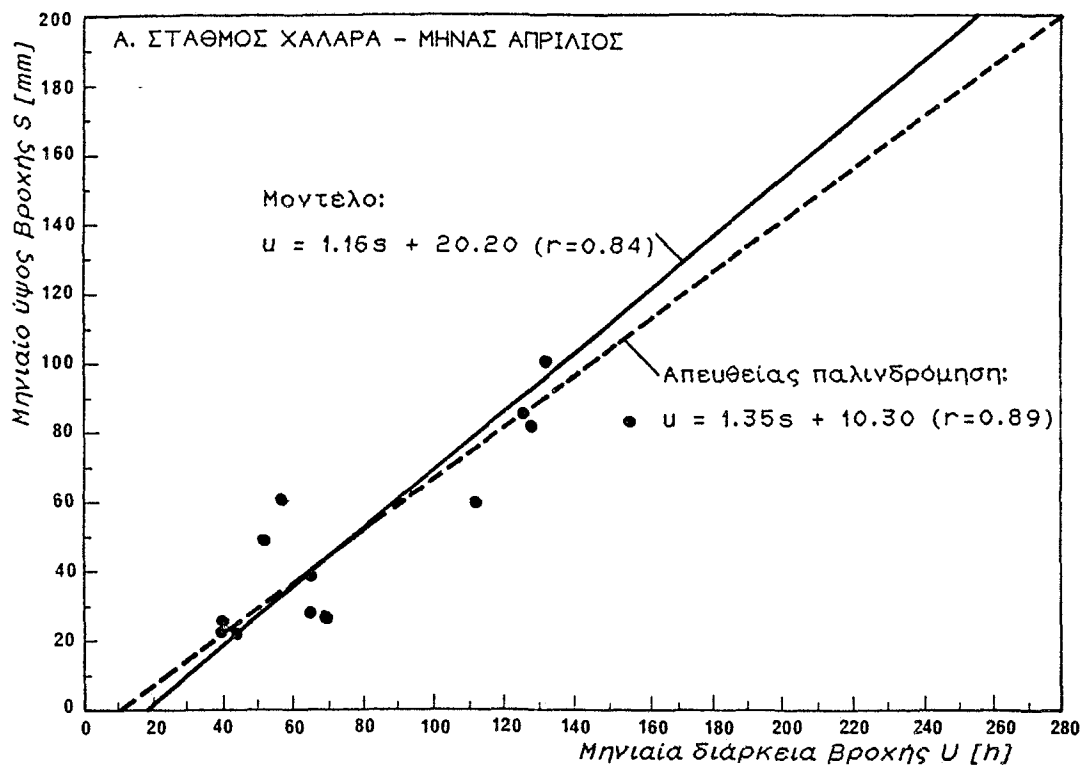
23. Για την εξήγηση της απόκλισης στις μέσες τιμές που εμφανίζεται στο σταθμό Τρίβουνο, το μήνα Μάιο βλέπε επόμενη υποπαραγράφο.

που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω, φαίνονται στον πίνακα 2.5. Εκτός από τις τιμές που προκύπτουν από το θεωρητικό σχήμα που αναπτύχθηκε, φαίνονται για λόγους σύγκρισης και οι εμπειρικές τιμές που υπολογίστηκαν απ' ευθείας από τα ιστορικά δείγματα. Σημειώνεται ότι στο σταθμό Τρίβουνο υπάρχουν σποραδικές ελλείψεις ταινιών ορισμένα χρόνια. Για τα χρόνια αυτά δεν ήταν δυνατό να υπολογιστούν μηνιαίες διάρκειες βροχής ενώ μπόρεσαν να υπολογιστούν τμηματικές διάρκειες ορισμένων επεισοδίων που έχουν καταγραφεί. Αυτός είναι ο λόγος που εμφανίζεται η απόκλιση στις θεωρητικές ροπές (που ο υπολογισμός τους στηρίχτηκε σε όλα τα καταγραμμένα επεισόδια) και στις αντίστοιχες εμπειρικές (που υπολογίστηκαν μόνο από τα χρόνια που δεν υπάρχει καμιά έλλειψη). Οι αποκλίσεις είναι πιο μεγάλες τον Μάιο, όπου, για τον παραπάνω λόγο, ένα έτος με μεγάλο ύψος βροχής δεν πάρθηκε υπόψη στους υπολογισμούς των μηνιαίων εμπειρικών ροπών.

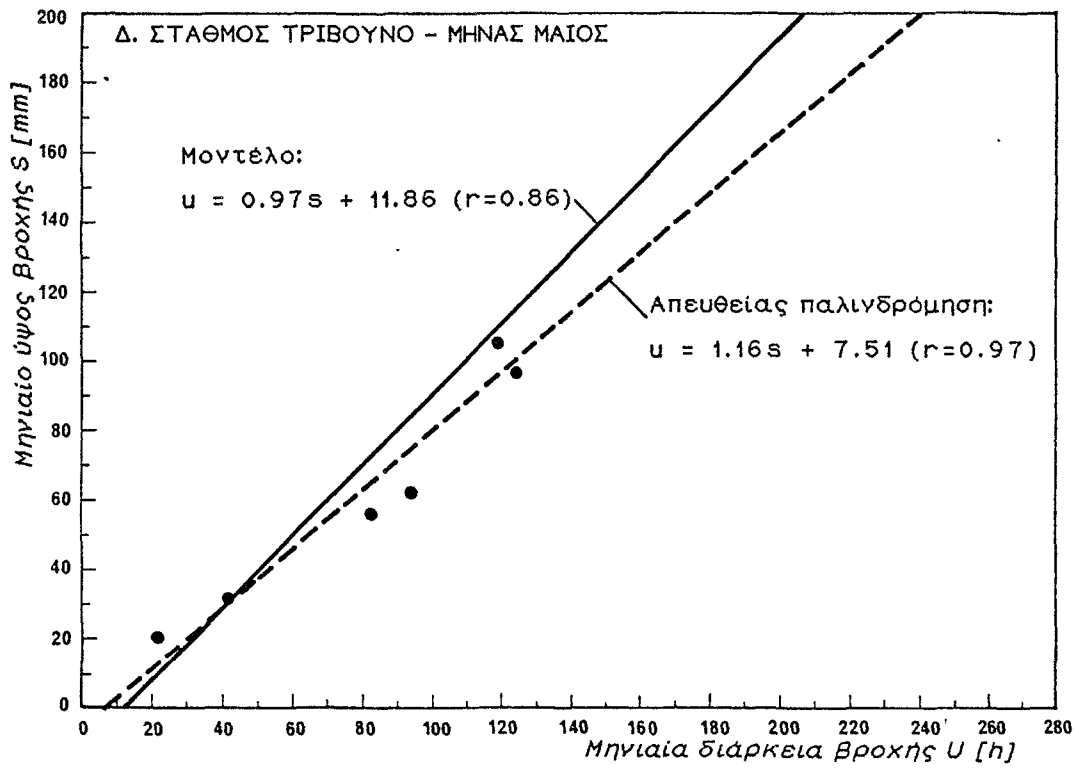
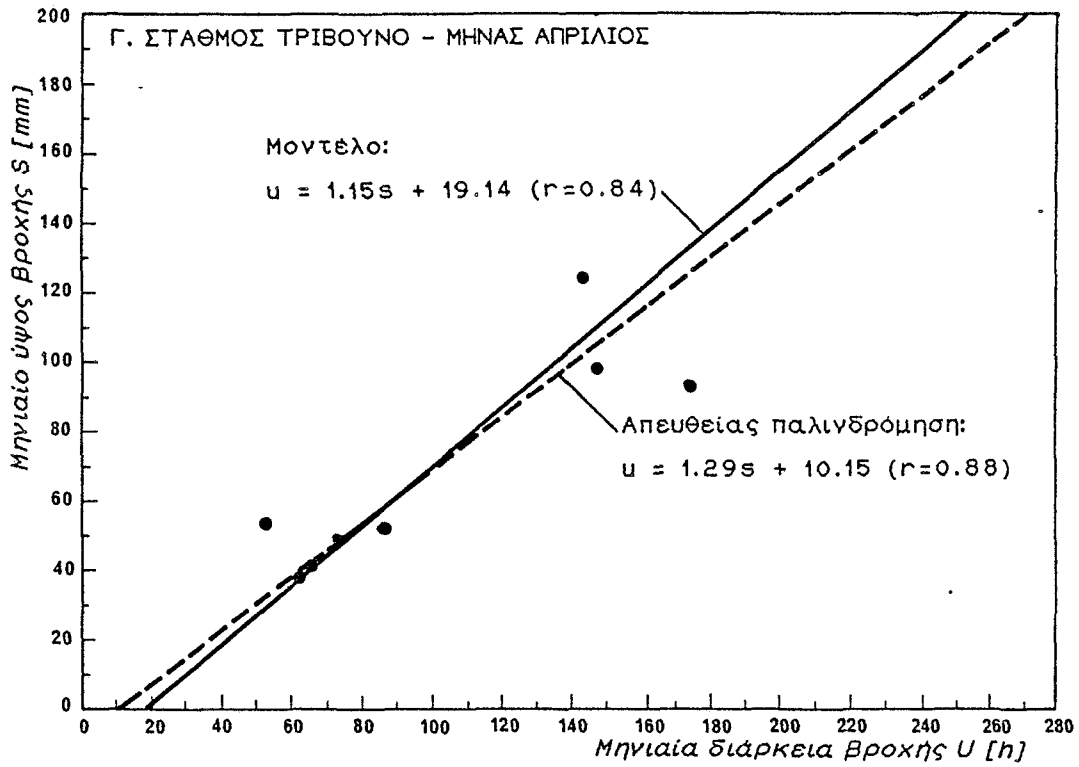
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.5  
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΩΝ ΡΟΠΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ  
ΜΗΝΙΑΙΑΣ ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΗΣ

Παράμετρος	ΣΤΑΘΜΟΣ : ΧΑΛΑΡΑ		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΤΡΙΒΟΥΝΟ		
	Απρίλιος	Μάιος	Απρίλιος	Μάιος	
Μέγ. δείγματος επεισοδίων βροχής	98	107	86	71	
Αριθμός ετών με πλήρη (& ελλιπή) δεδομένα	13 (13)	13 (13)	8 (9)	6 (9)	
Μέση τιμή	$\mu_N$	7.53 7.54	8.23 8.23	9.87 9.88	8.51 8.67
" "	$\mu_S$	52.92 52.92	67.57 67.55	67.15 69.18	71.32 62.33
" "	$\mu_U$	81.71 81.69	70.86 70.15	96.57 99.50	81.03 79.83
Τυπική απόκλιση	$\sigma_N$	2.54 3.23	2.67 3.24	2.88 3.36	2.68 3.67
" "	$\sigma_S$	29.57 27.61	36.83 25.55	30.82 31.82	33.85 34.17
" "	$\sigma_U$	41.03 41.85	34.11 22.78	42.28 46.70	38.15 40.87
Συντ. συσχέτισης	$\rho_{SU}$	0.84 0.89	0.83 0.70	0.84 0.88	0.86 0.97

Σημείωση: Η πρώτη σειρά αντιστοιχεί στις θεωρητικές τιμές των παραμέτρων και η δεύτερη στις εμπειρικές



Σχήμα 2.26 : Συσχέτιση ύψους και διάρκειας βροχής σε μηνιαία βάση.



Σχήμα 2.26 (συνέχεια): Συσχέτιση ύψους και διάρκειας βροχής σε μηνιαία βάση.



## 2.11. ΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΒΡΟΧΗΣ ΚΑΙ Η ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥΣ

### 2.11.1. Ανακεφαλαίωση του μοντέλου βροχής και των παραμέτρων του

Στις παραγράφους 2.6 μέχρι 2.10 καταστρώθηκε ένα συνολικό θεωρητικό σχήμα για την περιγραφή της βροχόπτωσης από την ωριαία μέχρι τη μηνιαία χρονική κλίμακα, το *μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής με εσωτερική δομή*. Το μοντέλο αυτό διαρθρώνεται από πέντε επιμέρους τμήματα, που περιγράφουν διάφορες όψεις της βροχόπτωσης. Παρακάτω συνοψίζονται τα τμήματα αυτά και οι παράμετροι που χρησιμοποιούν:

1. Ορισμός και κριτήριο εντοπισμού επεισοδίου βροχής  
 Βασίζεται στην παραδοχή ότι τα επεισόδια βροχής είναι ανεξάρτητα και οι χρόνοι έναρξης τους αποτελούν ανέλιξη Poisson.  
 - Παράμετροι: χρόνος διαχωρισμού ( $c$ ) και ένταση ανέλιξης Poisson ( $\omega$ ).
2. Κατανομή των χρονικών μεταβλητών του επεισοδίου βροχής  
 Βασίζεται σε μια μόνο υπόθεση, που αφορά τη δεσμευμένη κατανομή της διάρκειας βροχής, όταν είναι γνωστός ο χρόνος διαδοχής του επεισοδίου βροχής.  
 - Παράμετρος: η μοναδική παράμετρος της εν λόγω δεσμευμένης συνάρτησης κατανομής ( $\delta$ ).
3. Κατανομή του ύψους επεισοδίου βροχής  
 Στο τμήμα αυτό εξετάζεται κυρίως η δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια, που θεωρείται ότι αποδίδεται από τη συνάρτηση κατανομής γάμα. Η ανάλυση βασίζεται σε δύο γραμμικές σχέσεις που δίνουν τη δεσμευμένη μέση τιμή και τη δεσμευμένη τυπική απόκλιση του ύψους βροχής συναρτήσει της διάρκειας.  
Παράμετροι: Χρησιμοποιούνται 6 συνολικά παράμετροι, από τις οποίες οι 4 ( $a$ ,  $b$ ,  $\mu\phi$  και  $\sigma\phi$ ) χρειάζονται για την έκφραση των παραπάνω γραμμικών σχέσεων, και οι υπόλοιπες 2 ( $\mu\eta 1$ ,  $\sigma\eta 1$ ) εκφράζουν τη μέση τιμή και τυπική απόκλιση του ύψους βροχής όταν η διάρκεια βροχής είναι 1 ώρα.
4. Εσωτερική δομή του επεισοδίου βροχής  
 Εδώ ουσιαστικά εξετάζονται οι ιδιότητες του ωριαίου ύ-

ψους βροχής. Θεωρείται ότι η μη μονιμότητα του στο χρόνο, μπορεί να περιγραφεί από μια γραμμική συνάρτηση του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $g(\theta)$ ). Η επίδραση της διάρκειας βροχής στα στατιστικά χαρακτηριστικά του ωριαίου ύψους βροχής υποτίθεται ότι αποδίδεται από μια υπερβολική συνάρτηση της διάρκειας ( $k(d)$ ). Το ομογενοποιημένο ωριαίο ύψος βροχής (που προέρχεται από μετασχηματισμό του ωριαίου ύψους βροχής με τις δύο παραπάνω συναρτήσεις), θεωρείται ότι έχει Μαρκοβιανή αυτοσυσχέτιση και περιθώρια συνάρτηση κατανομής Weibull ή γάμα. Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης είναι αύξουσα συνάρτηση της διάρκειας του επεισοδίου βροχής.

- Παράμετροι: Η συνάρτηση  $g(\theta)$  ορίζεται με μια ανεξάρτητη παράμετρο ( $g_1$ ). Για την κατανομή του ομογενοποιημένου ύψους βροχής χρειάζεται μια ακόμα ανεξάρτητη παράμετρος ( $\sigma_Z$ ). Τέλος κάτω από ορισμένους όρους μπορεί να απαιτηθεί μια ακόμη παράμετρος, η πιθανότητα μηδενισμού του ωριαίου ύψους βροχής μέσα στο επεισόδιο ( $p_0$ ).

#### 5. Περιγραφή της βροχόπτωσης σε μηνιαία βάση

Εδώ παράγονται οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής του μηνιαίου ύψους βροχής, της μηνιαίας διάρκειας βροχής και του μηνιαίου αριθμού επεισοδίων βροχής. Θεωρείται ότι η στοχαστική εξάρτηση μηνιαίου ύψους και μηνιαίας διάρκειας βροχής περιγράφεται από μια γραμμική σχέση.

- Παράμετροι: Δεν χρησιμοποιείται καμιά πρόσθετη παράμετρος.

#### 2.11.2. Κατάταξη και γενική μεθοδολογία εκτίμησης των παραμέτρων

Συνολικά οι ανεξάρτητες παράμετροι του μοντέλου φτάνουν κατά μέγιστο τις 12. Είναι σκόπιμο, όπου μπορούμε, να αντικαταστήσουμε ανεξάρτητες παραμέτρους που δεν έχουν άμεσο φυσικό νόημα με άλλες, πιο εύχρηστες. Έτσι στη θέση της  $\omega$  θα χρησιμοποιήσουμε την μέση τιμή του χρόνου διαδοχής  $\mu_\gamma (=1/\omega+c)$ , στη θέση της  $\delta$  τη μέση διάρκεια βροχής  $\mu_D$  (η σχέση της με τη  $\delta$  δίνεται από την (2.7.22)), και στη θέση της  $\mu_\Phi$  το μέσο ύψος επεισοδίου βροχής  $\mu_H$  (συνδέεται με την  $\mu_\Phi$  με τις σχέσεις (2.8.12) και (2.8.7)).

Το σύνολο των παραμέτρων που διαμορφώνεται μετά από αυτές τις μετατάξεις μπορεί να καταταχτεί στις ακόλουθες ομάδες:

1. Παράμετροι σχετικές με τον ορισμό των επεισοδίων βροχής ( $c, \rho_0$ ).
2. Μέσες τιμές των μεταβλητών του επεισοδίου βροχής ( $\mu_\gamma, \mu_\rho, \mu_H$ ).
3. Στατιστικά χαρακτηριστικά του ύψους βροχής διάρκειας 1 ώρας ( $\mu_{H1}, \sigma_{H1}$ ).
4. Παράμετροι συσχέτισης ύψους και διάρκειας βροχής ( $a, b, \sigma_\Phi$ ).
5. Παράμετροι ωριαίου ύψους βροχής ( $g_1, \sigma_Z$ ).

Η διαδικασία καθορισμού του χρόνου διαχωρισμού  $c$  έχει αναλυτικά περιγραφεί στην παράγραφο 2.6. Κατά τη διαδικασία καθορισμού του  $c$  μπορεί να εκτιμηθεί και η  $\rho_0$ , ως ο λόγος της διάρκειας που εμφανίζεται μηδενική ένταση βροχής προς τη συνολική διάρκεια των επεισοδίων βροχής (σε αθροιστική βάση). Ακόμα η ίδια παράμετρος μπορεί να υπολογιστεί άμεσα από ένα δείγμα ωριαίας βροχόπτωσης.

Οι παράμετροι των κατηγοριών 2 και 3 μπορούν να εκτιμηθούν με την κλασική μεθοδολογία από τα αντίστοιχα δείγματα. Ειδικά η παράμετρος  $\mu_\gamma$  είναι σκόπιμο να υπολογίζεται από τη σχέση (2.6.15).

Οι υπόλοιπες παράμετροι απαιτούν ειδικό τρόπο υπολογισμού, που θα αναλυθεί στις επόμενες υποπαραγράφους.

### 2.11.3. Εκτίμηση της ομάδας παραμέτρων ( $a, b, \sigma_\Phi$ )

Στην ομάδα αυτή κανονικά ανήκει και η εξαρτημένη παράμετρος  $\mu_\Phi$ . Αυτή μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των  $(a, b)$  και των μέσων τιμών του ύψους και της διάρκειας βροχής, (με τη δέσμευση ότι η τελευταία είναι μεγαλύτερη από 1 ώρα), από τη σχέση (2.8.12), που μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\mu_\Phi = \frac{\mu_{H*} + b}{\mu_{D*} + a} \quad (2.11.1)$$

Η αντίστοιχη σχέση για τη  $\sigma_\Phi$  είναι η (2.8.13), που μετασχηματίζεται στην επόμενη

$$\sigma_\Phi^2 = \frac{\sigma_{H*}^2 - \mu_\Phi^2 \sigma_{D*}^2}{\sigma_{D*}^2 + (\mu_{D*} + a)^2} \quad (2.11.2)$$

Αν είναι γνωστά τα  $a$  και  $b$ , τότε από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν τα  $\mu_\Phi$  και  $\sigma_\Phi$ . Οι μέσες τιμές  $\mu_{D*}$  και  $\mu_{H*}$  που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις

μπορούν να υπολογιστούν από τα  $\mu_D$  και  $\mu_H$  με βάση τις σχέσεις (2.8.6) και (2.8.7) (Ο τρόπος υπολογισμού των  $\mu_D$  και  $\mu_H$  περιγράφηκε στην προηγούμενη υποπαράγραφο). Η τιμή της διασποράς  $\sigma_{D*}^2$  μπορεί να υπολογιστεί θεωρητικά συναρτήσει του  $\mu_D$ , με διαδοχική εφαρμογή των σχέσεων (2.7.29), (2.7.22), (2.7.23), και (2.8.8). Τέλος η διασπορά  $\sigma_{H*}^2$  μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει της  $\sigma_H^2$  από τη σχέση (2.8.9), όπου η τελευταία θα πρέπει να υπολογιστεί υποχρεωτικά από το δείγμα. Πάντως η διαδικασία απλοποιείται αν όλα τα παραπάνω στατιστικά χαρακτηριστικά εκτιμηθούν άμεσα από τα αντίστοιχα δείγματα που περιλαμβάνουν επεισόδια βροχής με διάρκεια μεγαλύτερη της μιας ώρας. Έτσι δεν είναι απαραίτητο να καταφύγουμε στην εφαρμογή των σχέσεων που αναφέρονται παραπάνω. Οι διαφορές που προκύπτουν από την τελευταία μέθοδο είναι ασήμαντες.

Ας έρθουμε τώρα στον τρόπο εκτίμησης των παραμέτρων  $a$  και  $b$ . Η μια απ' αυτές μπορεί να εκτιμηθεί με τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης. Βέβαια η μέθοδος αυτή μπορεί να εκτιμήσει δύο παραμέτρους, αλλά ήδη η σχέση (2.11.1) που έχουμε χρησιμοποιήσει, είναι μια από τις εξισώσεις υπολογισμού παραμέτρων της γραμμικής παλινδρόμησης. Επομένως μπορούμε να καταστρώσουμε μόνο μια ακόμα εξίσωση. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ότι είναι γνωστή η  $a$ , και θα αναπτύξουμε τον τρόπο προσδιορισμού της  $b$ .

Η μέθοδος της γραμμικής παλινδρόμησης υπαγορεύεται από τη γραμμική σχέση (2.8.1). Πρέπει όμως να λάβουμε υπόψη ότι η μέθοδος στην κλασική της μορφή προϋποθέτει ότι η δεσμευμένη διασπορά των μεταβλητών που συσχετίζονται είναι σταθερή. Συνεπώς η μέθοδος θα μπορούσε να εφαρμοστεί με τη μορφή της παλινδρόμησης μεταξύ των μεταβλητών  $h-d$ , αν η δεσμευμένη διασπορά  $\text{Var}[H|D]$  ήταν σταθερή. Αυτό όμως δεν συμβαίνει, όπως δείχνει η σχέση (2.8.2). Συνεπώς θα πρέπει να κάνουμε ένα κατάλληλο μετασχηματισμό της μεταβλητής  $h$ , που να δίνει σταθερή διασπορά, ανεξάρτητη της  $d$ . Ένας κατάλληλος μετασχηματισμός επιτυγχάνεται με τη μεταβλητή

$$\Phi = \frac{H + b}{D + a}$$

που έχει σταθερή διασπορά, ίση με  $\sigma_\Phi^2$ . Στην περίπτωση αυτή η γραμμική μορφή εκφυλίζεται στη σχέση  $E[\Phi|D] = \mu_\Phi$ . Θα απαιτήσουμε λοιπόν την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος

$$L(a, b) = E \left[ \frac{H + b}{D + a} - \mu_\Phi \right]^2$$

Επειδή όμως και το  $\mu_\Phi$  είναι συνάρτηση των  $a$  και  $b$ , που δίνεται από την (2.11.1), η παραπάνω σχέση γίνεται

$$L(a, b) = E \left[ \frac{H + b}{D + a} - \frac{\mu_{H*} + b}{\mu_{D*} + a} \right]^2 \quad (2.11.3)$$

Κατά συνέπεια η τιμή του  $b$  θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial L(a, b)}{\partial b} = 0$$

που αν λυθεί ως προς  $b$  δίνει την ακόλουθη τελική σχέση

$$b = \frac{\frac{\mu_{H*}}{\mu_{D*}+a} E_1 + \frac{1}{\mu_{D*}+a} E_3 - E_4 - \frac{\mu_{H*}}{(\mu_{D*}+a)^2}}{E_2 - \frac{2}{\mu_{D*}+a} E_1 + \frac{1}{(\mu_{D*}+a)^2}} \quad (2.11.4)$$

όπου

$$E_1 = E[1/(D+a)], \quad E_2 = E[1/(D+a)^2],$$

$$E_3 = E[H/(D+a)], \quad \text{και} \quad E_4 = E[H/(D+a)^2]$$

Οι όροι  $E_1$  έως  $E_4$  στην παραπάνω εξίσωση υπολογίζονται από το δείγμα, ως μέσοι όροι των αντίστοιχων μεταβλητών.

Μια περιοριστική σχέση που θα πρέπει να υφίσταται μεταξύ των  $(a, b, \mu_\Phi)$ , είναι η εξής:

$$b \geq a \mu_\Phi \quad (2.11.5)$$

Η σχέση αυτή προκύπτει από την εύλογη παραδοχή, ότι η μέση ένταση του επεισοδίου βροχής δεν μπορεί να αυξάνει με την αύξηση της διάρκειας βροχής. Συνεπώς σε περίπτωση που η τιμή της  $b$  που προκύπτει από την (2.11.4) δεν ικανοποιεί την (2.11.5), θα πρέπει να τροποποιείται ανάλογα.

Η μορφή της συνάρτησης  $L(a, b)$  επιβεβαιώνει το γεγονός ότι η παράμετρος  $a$  δεν μπορεί να υπολογιστεί από αυτή, με τρόπο όμοιο με αυτόν της  $b$ . Παρατηρούμε ότι όταν το  $a$  τείνει στο άπειρο, η  $L$  τείνει στο 0, και συνεπώς ο μηδενισμός της μερικής παραγώγου της  $L$  ως προς  $a$  θα έδινε  $a = \infty$ . Ακόμα σημειώνουμε ότι η συνάρτηση  $L$  ουσιαστικά αποτελεί μέτρο της  $\sigma_\Phi^2$ . Στην πράξη πάντως η τιμή της διαφέρει λίγο από την τιμή που υπολογίζεται από τη σχέση (2.11.2). Από τις δύο τιμές επιλέγεται τελικά αυτή που δίνει η εξίσωση (2.11.2), γιατί αυτή διατηρεί τη διασπορά του ύψους βροχής.

Για την παράμετρο  $a$  δεν έγινε δυνατό να δοθεί αναλυτικός τρόπος εκτίμησης της, όμοιος με αυτόν των άλλων παραμέτρων. Έτσι χρησιμοποιήθηκε μια επαναληπτική μέθοδος εκτίμησης, που περιλαμβάνει τα εξής βήματα: (α) Επιλέγεται

μια δοκιμαστική τιμή του  $a$ , (β) υπολογίζονται οι παράμετροι  $b$ ,  $\mu_{\phi}$  και  $\sigma_{\phi}$ , με την παραπάνω μεθοδολογία, καθώς και η  $a_1$  ( $=a-b/\mu_{\phi}$ ) (γ) καταρτίζονται οι καμπύλες της δεσμευμένης τυπικής απόκλισης του ύψους βροχής και της δεσμευμένης μέσης τιμής του ωριαίου ύψους βροχής, συναρτήσεως της διάρκειας βροχής (αυτές των σχημάτων 2.12 και 2.15), (δ) συγκρίνονται οι εν λόγω καμπύλες προς τα εμπειρικά σημεία και (ε) τελικά επιλέγεται η τιμή του  $a$  που δίνει την καλύτερη προσαρμογή των θεωρητικών καμπυλών προς τα εμπειρικά σημεία. Σημειώνεται ότι η τιμή του  $a_1$  μεταβάλλεται όταν αλλάζει το  $a$  (όχι πάντως έντονα). Η τιμή του  $a_1$  καθορίζει τις συναρτήσεις δεσμευμένων μέσων τιμών και του ύψους επεισοδίου βροχής, και του ωριαίου ύψους βροχής. Στη δεύτερη περίπτωση η επίδραση είναι εντονότερη, και γι' αυτό χρησιμοποιείται το αντίστοιχο διάγραμμα για τη σύγκριση με τα εμπειρικά σημεία.

#### Απόδειξη της (2.11.4)

Παραγωγίζοντας την (2.11.3) ως προς  $b$  και εξισώνοντας με μηδέν παίρνουμε

$$0 = E \left[ \left[ \frac{H+b}{D+a} - \frac{\mu_{Hx}}{\mu_{Dx}+a} \right] \left[ \frac{1}{D+a} - \frac{1}{\mu_{Dx}+a} \right] \right] \quad (2.11.5)$$

$$0 = E \left[ \left[ \frac{H}{D+a} - \frac{\mu_{Hx}}{\mu_{Dx}+a} \right] \left[ \frac{1}{D+a} - \frac{1}{\mu_{Dx}+a} \right] \right] + E \left[ \left[ \frac{b}{D+a} - \frac{b}{\mu_{Dx}+a} \right] \left[ \frac{1}{D+a} - \frac{1}{\mu_{Dx}+a} \right] \right] \quad (2.11.5)$$

$$0 = E \left[ \frac{H}{(D+a)^2} \right] - \frac{\mu_{Hx}}{\mu_{Dx}+a} E \left[ \frac{1}{D+a} \right] - \frac{1}{\mu_{Dx}+a} E \left[ \frac{H}{D+a} \right] + \frac{\mu_{Hx}}{(\mu_{Dx}+a)^2} + b \left[ E \left[ \frac{1}{(D+a)^2} \right] - \frac{2}{\mu_{Dx}+a} E \left[ \frac{1}{D+a} \right] + \frac{1}{(\mu_{Dx}+a)^2} \right]$$

Από την επίλυση της τελευταίας ως προς  $b$  προκύπτει η (2.11.4)

#### 2.11.4. Εκτίμηση των παραμέτρων $g_1$ και $\sigma_2$

Ο προσδιορισμός της παραμέτρου  $g_1$  μπορεί να στηριχτεί ακόλουθη σχέση που αποδεικνύεται στο τέλος της υποπαραγράφου:

$$E[X_1 | D=d, H=h] = g(\theta_1) \quad h/d \quad (2.11.6)$$

Από τη σχέση αυτή μπορούμε να οδηγηθούμε στον προσδιορισμό των συντελεστών της γραμμικής συνάρτησης  $g(\theta)$  με γραμμική παλινδρόμηση μεταξύ των μεταβλητών  $[x_1 = x_1 \cdot d/h]$  και  $[\theta_1 = (1-0.5)/d]$ . Η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί και για την περίπτωση που η  $g(\theta)$  είναι πολυωνυμική συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι με τη μέθοδο αυτή η  $g_1$  προσδιορίζεται ανεξάρτητα από οποιαδήποτε άλλη παράμετρο του μοντέλου, αφού παίρνονται υπόψη μόνο τα πρωτογενή στοιχεία  $x$ ,  $h$  και  $d$ . Είναι σκό-

πιμο κατά τον υπολογισμό των συντελεστών των εξισώσεων της παλινδρόμησης (δηλαδή των αθροισμάτων της μορφής  $\sum_{j=0}^k$ ) η συνεισφορά όλων των επεισοδίων βροχής να είναι ισοδύναμη. Αυτό δεν συμβαίνει αυτόματα, γιατί τα επεισόδια με μικρότερη διάρκεια έχουν λιγότερα  $x_i$ . Για να ισοσταθμιστούν οι συνεισφορές των επεισοδίων θα πρέπει τα αθροίσματα  $\sum_{j=0}^k$  κάθε επεισοδίου να πολλαπλασιάζονται με ένα όρο αντιστρόφως ανάλογο της διάρκειας.

Στις εφαρμογές που έγιναν στην εργασία αυτή η παράμετρος  $g_i$  βρέθηκε να είναι αρνητική (εκτός από μια περίπτωση που είχε ασήμαντη τιμή), και οι συντελεστές γραμμικής συσχέτισης  $\rho_{z\theta}$  βρέθηκαν να κυμαίνονται από  $-0.103$  μέχρι  $-0.205$ . Ας σημειωθεί ότι οι συντελεστές αυτοί είναι σημαντικοί, λόγω του μεγάλου πλήθους τιμών  $x_i$  (πχ. για πλήθος σημείων  $N=1000$  και για μονόπλευρο έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας  $10\%$ , ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι σημαντικός αν είναι απολύτως μεγαλύτερος από την τιμή  $0.040$ )

Αφού προσδιοριστεί η παράμετρος  $g_i$ , στη συνέχεια είναι δυνατό, με μετασχηματισμό των τιμών  $x_i$  του δείγματος, να σχηματιστούν οι τιμές  $z_i$ , και να υπολογιστεί η εμπειρική τυπική απόκλιση τους από τον γνωστό τύπο της στατιστικής. Έτσι παίρνουμε μια πρώτη προσέγγιση της τιμής της  $\sigma_z$ . Η τιμή αυτή μπορεί να διορθωθεί στη συνέχεια, σε τρόπο ώστε να επιτευχθεί η καλύτερη δυνατή προσαρμογή της συνάρτησης  $\rho_i(d)$  (σχέση (2.9.17) και σχήμα 2.21) προς τους εμπειρικούς συντελεστές αυτοσυσχέτισης  $\alpha'$  τάξης.

---

#### Απόδειξη της (2.11.6)

Από τη σχέση (2.9.5), παίρνοντας υπόψη ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά της  $Z_i$  δεν εξαρτώνται από τη διάρκεια και τη χρονική θέση, έχουμε

$$E[X_i | D=d, H=h] = k(d) g(\theta_i) \mu_{Z|H}(h) \quad (a)$$

όπου τέθηκε  $\mu_{H|Z}(h) = E[Z_i | H=h]$ . Παίρνοντας το άθροισμα των αναμενομένων τιμών των  $X_i$  για όλες τις τιμές του  $i$ , έχουμε

$$\sum_{i=1}^d E[X_i | D=d, H=h] = k(d) \mu_{Z|H}(h) \sum_{i=1}^d g(\theta_i) \quad (B)$$

Αλλά ισχύει

$$\sum_{i=1}^d E[X_i | D=d, H=h] = E\left[\sum_{i=1}^d X_i | D=d, H=h\right] = E[H | D=d, H=h] = h$$

ενώ λόγω των σχέσεων (2.9.10), (2.9.11) και (2.9.12) ισχύει

$$\sum_{i=1}^d g(\theta_i) = d$$

(Η τελευταία σχέση ισχύει ακριβώς στην περίπτωση που η  $g(\theta)$  είναι γραμμική συνάρτηση και κατά προσέγ-

γιση αν είναι πολυωνυμική ανώτερου βαθμού.)  
Έτσι η (β) παίρνει τη μορφή

$$h = K(d) \text{ d } \mu_Z | H(h) \quad (\gamma)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (α) και (γ) προκύπτει η (2.11.6)

#### 2.11.5. Απλοποίηση του μοντέλου και μείωση του αριθμού των παραμέτρων

Το μοντέλο που διατυπώθηκε είναι δυνατό να πάρει απλούστερες μορφές με διάφορους τρόπους. Η απλοποίηση οδηγεί σε μείωση του αριθμού των παραμέτρων, αλλά και σε μείωση της ακρίβειας με την οποία περιγράφεται το φαινόμενο της βροχόπτωσης. Γενικά είναι δυνατό να γίνουν πολλαπλές απλοποιήσεις, ανάλογα με τον επιθυμητό βαθμό ακρίβειας στην προσομοίωση του φαινομένου.

Οι κύριες παράμετροι του μοντέλου είναι οι (c, μ<sub>γ</sub>, μ<sub>D</sub>, μ<sub>H</sub>). Αυτές περιγράφουν ουσιαστικά της βροχής, και σε καμιά περίπτωση δεν μπορεί να παραλειφθούν για λόγους απλοποίησης. Ειδικότερα ο χρόνος διαχωρισμού c, ενώ δεν έχει πολύ σημαντικό ρόλο από φυσική άποψη, όμως αποτελεί την παράμετρο ορισμού των επεισοδίων βροχής, και γι' αυτό επηρεάζει άμεσα τις υπόλοιπες κύριες παραμέτρους. (Για παράδειγμα στο σταθμό Χάλαρα στο δείγμα του Απριλίου αν θεωρηθεί c=1 ώρα προκύπτει μ<sub>γ</sub>=47.3 ώρες, ενώ για την τελική τιμή c=7 ώρες προκύπτει μ<sub>γ</sub>=95.5 ώρες). Η σημασία των άλλων τριών παραμέτρων είναι προφανής από φυσική άποψη.

Η παράμετρος ρ<sub>0</sub> που περιγράφει την πιθανότητα μηδενισμού του ωριαίου ύψους βροχής μέσα στο επεισόδιο είναι μικρής σημασίας, και μπορεί να παραληφθεί χωρίς ουσιαστικές επιπτώσεις. Άλλωστε όπως εξηγήθηκε στην υποπαράγραφο 2.2.9, η εν λόγω πιθανότητα δίνεται με ικανοποιητική προσέγγιση από τη θεωρητική συνάρτηση κατανομής του ομογενοποιημένου ύψους βροχής.

Οι παράμετροι μ<sub>H</sub> και σ<sub>H</sub>, που περιγράφουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ύψους βροχής διάρκειας μιας ώρας, μπορούν να παραλειφθούν, αν δεν είναι απαραίτητη η ακριβής αναπαράσταση των βροχοπτώσεων αυτής της διάρκειας. Σε αυτή την περίπτωση θα δεχτούμε ότι οι σχέσεις υπολογισμού δεσμευμένων ροπών του ύψους βροχής (2.8.1) και (2.8.2) επεκτείνονται και στις διάρκειες 1 ώρας.

Αν αγνοήσουμε το φαινόμενο της μη μονιμότητας της βροχόπτωσης στο χρόνο μπορούμε να παραλείψουμε την παράμετρο g<sub>1</sub> ή, ακριβέστερα, να θεωρήσουμε g<sub>1</sub>=0.

Η παράλειψη των υπόλοιπων παραμέτρων θα πρέπει να περιμένουμε ότι εισάγει αρκετά σοβαρές ανακρίβειες. Πάντως δεν μπορεί να θεωρηθεί "απαγορευμένη", αφού αρκετά μοντέλα της βιβλιογραφίας κάνουν χρήση παραδοχών που ισοδυναμούν με τέτοιες απλοποιήσεις του μοντέλου που προτείνεται εδώ. Για παράδειγμα στις εργασίες των *Eagleson* [1978] και *Bras και Rodriguez-Iturbe* [1976a] γίνεται



χρήση της υπόθεσης ότι η μέση ένταση επεισοδίου βροχής είναι ανεξάρτητη της διάρκειας του και ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Η υπόθεση αυτή ισοδυναμεί με μια απλοποιημένη μορφή του μοντέλου που προτείνουμε, η οποία προκύπτει αν τεθεί  $a=b=0$  και  $\sigma_{\phi}=\mu_{\phi}=\mu_H/\mu_D$ . Στην περίπτωση αυτή μειώνονται οι παράμετροι του μοντέλου κατά 3. Μια λιγότερο δραστική απλοποίηση, με μείωση του αριθμού των παραμέτρων κατά 1, προκύπτει αν θεωρήσουμε  $a_1=0$  ή  $b=a\mu_{\phi}$ . Η θεώρηση αυτή είναι λιγότερο ανακριβής από την  $a=b=0$ , και έχει το πλεονέκτημα να δίνει ωριαία ύψη βροχής με στατιστικά χαρακτηριστικά που δεν εξαρτώνται από τη διάρκεια βροχής.

Μια ακόμα απλοποίηση του μοντέλου προκύπτει αν η  $\sigma_Z$  υπολογίζεται από την ανισοτική σχέση (2.9.22) με τη θεώρηση ότι η ανισότητα ισχύει στο όριο. Όπως φάνηκε από τις εφαρμογές, η απλοποίηση αυτή στην πράξη δεν είναι και τόσο ανακριβής.

Η "έσχατη" απλοποίηση του μοντέλου, προκύπτει αν γίνουν παράλληλα όλες οι παραπάνω απλοποιήσεις, οπότε θα χρησιμοποιούνται μόνο οι 4 βασικές παράμετροι. Πάντως στην εργασία αυτή το μοντέλο χρησιμοποιήθηκε στην πλήρη του μορφή χωρίς καμιά απλοποίηση.

# ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ

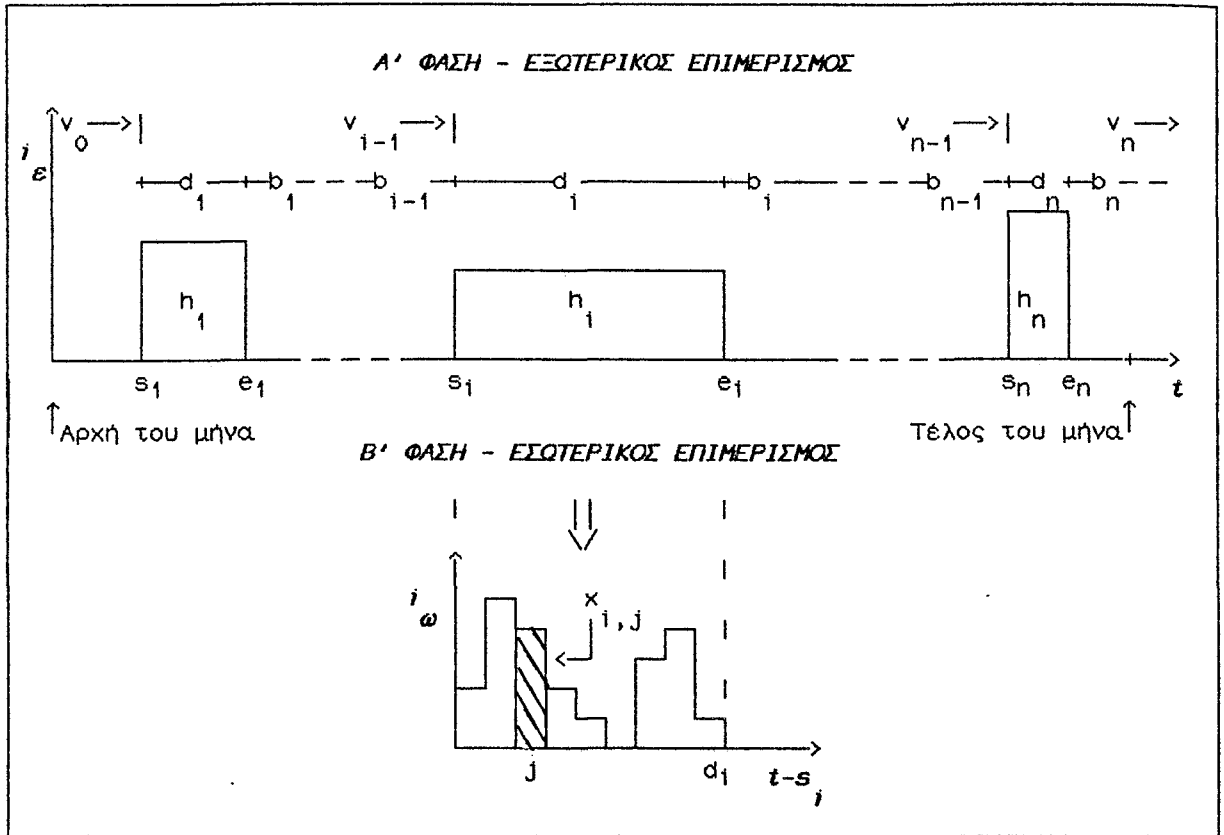
## 3.1. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

### 3.1.1. Εισαγωγή

Αυτό το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στην υλοποίηση, την εφαρμογή και τον έλεγχο του μοντέλου επιμερισμού της σημειακής βροχόπτωσης. Ουσιαστικά η υλοποίηση του μοντέλου αποτελεί τη σύνθεση των δύο προηγούμενων κεφαλαίων, τα οποία καλύπτουν αντίστοιχα το γενικό πρόβλημα του επιμερισμού και τη μοντελοποίηση της σημειακής βροχόπτωσης. Το προτεινόμενο γενικό σχήμα επιμερισμού, που αναλύεται στο πρώτο κεφάλαιο, είναι εν γένει συμβατό με το μοντέλο που περιγράφει τη βροχόπτωση, όπως αυτό σχηματίζεται στο δεύτερο κεφάλαιο. Πράγματι, το προτεινόμενο επιμεριστικό σχήμα έχει την ευελιξία να λειτουργεί με μεταβλητό αριθμό βημάτων επιμερισμού και μεταβλητές χρονικές κλίμακες, και επίσης είναι κατάλληλο για στοχαστικές μεταβλητές με κατανομή γάμα και με Μαρκοβιανή συσχέτιση. Οι όροι αυτοί είναι απαραίτητοι για την εφαρμοσιμότητα του στον επιμερισμό της σημειακής βροχόπτωσης, όπου ο αριθμός των χρονικών βημάτων επιμερισμού δεν είναι σταθερός (πχ. ωριαία ύψη ενός επεισοδίου βροχής), οι εμφανιζόμενες μεταβλητές ακολουθούν κατανομές γάμα ή κοντινές προς αυτή (πχ. Weibull), και εμφανίζουν συσχέτιση Μαρκοβιανού τύπου (ωριαία ύψη βροχής) ή δεν εμφανίζουν καμιά συσχέτιση (ύψη βροχής διαδοχικών επεισοδίων).

Λόγω της ειδικής διαλείπουσας μορφής που παρουσιάζει η βροχόπτωση στο χρόνο, είναι σκόπιμο να γίνεται αντιμετώπιση του σχετικού επιμεριστικού προβλήματος σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση έχει στόχο τον επιμερισμό της βροχόπτωσης σε μεμονωμένα (ανεξάρτητα) επεισόδια βροχής, ενώ η δεύτερη φάση προχωρεί στο εσωτερικό των επεισοδίων, μέχρι και την ωριαία χρονική κλίμακα. Οι δύο φάσεις χαρακτηρίζονται με τους όρους εξωτερικός επιμερισμός και εσωτερικός επιμερισμός. Βέβαια ο πυρήνας του μοντέλου επιμερισμού παραμένει ο ίδιος και στις δύο φάσεις, δεδομένου ότι το επιμεριστικό σχήμα που αναπτύχθηκε έχει την απαιτούμενη γενικότητα ώστε να τις καλύψει και τις δύο. Ας σημειωθεί ότι ο εξωτερικός επιμερισμός δεν περιλαμβάνει μόνο τον προσδιορισμό των υψών βροχής ανά επεισόδιο, αλλά και το χρονικό εντοπισμό των επεισοδίων, ο οποίος πραγματοποιείται πάλι με το ίδιο επιμεριστικό σχήμα.

Η γενική εικόνα των δύο φάσεων επιμερισμού δίνεται με σχηματικό τρόπο στο σχήμα 3.1. Αναλυτικότερα τα επιμέρους χαρακτηριστικά της κάθε φάσης περιγράφονται στις υποπαραγράφους που ακολουθούν.



Σχήμα 3.1: Σχηματική εικόνα των δύο φάσεων επιμερισμού της σημειακής βροχόπτωσης.

### 3.1.2. Η φάση του εξωτερικού επιμερισμού

Θα υποθέσουμε ότι στο ξεκίνημα της φάσης αυτής είναι γνωστά τα ακόλουθα μεγέθη, σε μηνιαία βάση, που αποτελούν την αφετηρία αυτής της φάσης:

- το συνολικό ύψος βροχής του μήνα ( $s$ ),
- ο αριθμός των επεισοδίων βροχής ( $n$ ), και
- η συνολική διάρκεια βροχής στο μήνα ( $u$ ).

Η βασική μεταβλητή αφετηρίας είναι βέβαια η πρώτη, δηλαδή το μηνιαίο ύψος βροχής. Η τιμή της κανονικά δεν αφορά το μοντέλο επιμερισμού. Η τιμή αυτή προέρχεται είτε από άλλο μοντέλο (συνθετική τιμή) είτε από μετρήσεις (ιστορική τιμή). Παρόμοια συμβαίνουν και με τις άλλες δύο μεταβλητές αφετηρίας. Για λόγους πληρότητας του μοντέλου, όμως, έχουν ενσωματωθεί μερικές πρόσθετες διαδικασίες, που επιτρέπουν την παραγωγή μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών αφετηρίας, έτσι ώστε να μπορεί να λειτουργήσει ακόμα και στην περίπτωση που οι μεταβλητές αφετηρίας δίνονται μερικώς (πχ. μόνο το μηνιαίο ύψος βροχής) ή δεν

δίνονται καθόλου. Οι διαδικασίες αυτές περιγράφονται αναλυτικά στην υποπαράγραφο 3.2.4.

Ο στόχος αυτής της φάσης επιμερισμού είναι να παραχθούν τα ακόλουθα μεγέθη, σε βάση επεισοδίου βροχής:

- το ύψος βροχής ανά επεισόδιο,
- η αντίστοιχη διάρκεια βροχής, και
- ο (απόλυτος) χρόνος έναρξης κάθε επεισοδίου.

Για τον καθορισμό των χρόνων έναρξης αρκεί να είναι γνωστοί οι χρόνοι διαδοχής των επεισοδίων ή, ισοδύναμα, οι χρόνοι διακοπής της βροχής. Η παραγωγή των τιμών των μεταβλητών αυτών μπορεί να γίνει με τριπλή εφαρμογή του γενικού επιμεριστικού σχήματος, με τη σειρά και με τον τρόπο που περιγράφεται παρακάτω.

#### 1. Παραγωγή των χρόνων διαδοχής των επεισοδίων βροχής

Η παραγωγή των χρόνων διαδοχής γίνεται με εφαρμογή του μοντέλου επιμερισμού, σύμφωνα με τη βασική σχέση:

$$\sum_{i=1}^n (v_i - c) = \tau^* \quad (3.1.1)$$

όπου

$$\tau^* = \tau - \alpha + \beta - nc$$

- και  $\tau$  είναι η διάρκεια του μήνα,  $c$  ο χρόνος διαχωρισμού,  $\alpha$  η χρονική διάρκεια από την αρχή του μήνα μέχρι τη στιγμή της έναρξης του πρώτου επεισοδίου του μήνα, και  $\beta$  είναι η αντίστοιχη με την  $\alpha$  χρονική διάρκεια αλλά για τον επόμενο μήνα. Οι διάρκειες  $\alpha$  και  $\beta$  μπορούν να παραχθούν ως τυχαίοι αριθμοί. Ειδικά αν το μοντέλο λειτουργεί για όλους τους μήνες του έτους, τότε η διάρκεια  $\alpha$  είναι γνωστή από τον επιμερισμό του προηγούμενου μήνα. Οι συναρτήσεις κατανομής των  $\alpha$  και  $\beta$  είναι εκθετικές (επειδή η ανέλιξη των εμφανίσεων των επεισοδίων βροχής είναι Poisson).

Οι ροπές των τμηματικών μεταβλητών  $(v_i - c)$  είναι

$$\mu_i = \mu_v - c, \quad \sigma_i = \mu_v \quad (3.1.2)$$

και οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι προφανώς μηδενικοί.

2. Παραγωγή των διαρκειών των επεισοδίων βροχής

Η βασική σχέση επιμερισμού για την παραγωγή των διαρκειών βροχής είναι

$$\sum_{i=1}^n d_i = u \quad (3.1.3)$$

Οι ροπές των τμηματικών μεταβλητών είναι

$$\mu_i = 1/\delta, \quad \sigma_i = 1/\delta \quad (3.1.4)$$

όπου  $\delta$  είναι η παράμετρος της κατανομής της διάρκειας επεισοδίου βροχής, που δίνεται από τη σχέση (2.7.30). Η επιλογή των τιμών  $1/\delta$  αντί των  $\mu_D$  και  $\sigma_D$  δικαιολογείται από την ειδικής μορφής συνάρτηση κατανομής της διάρκειας βροχής, που προκύπτει με συνδυασμό μιας εκθετικής και μιας τριγωνικής κατανομής. Σημειώνεται ότι το μοντέλο επιμερισμού χρησιμοποιεί μόνο το εκθετικό τμήμα της συνάρτησης κατανομής, ενώ το τριγωνικό το χειρίζεται μια παράλληλη αλλά ανεξάρτητη διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα το μοντέλο επιμερισμού παράγει τις αρχικές τιμές των διαρκειών βροχής βάσει της εκθετικής κατανομής, που αν αυτές είναι μεγαλύτερες από τους αντίστοιχους χρόνους διαδοχής, τροποποιούνται κατάλληλα, από την παράλληλη διαδικασία, με βάση την τριγωνική κατανομή (βλ. υποπαράγραφο 3.2.2).

Οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης των τμηματικών μεταβλητών είναι μηδενικοί.

3. Παραγωγή των υψών των επεισοδίων βροχής

Η βασική σχέση επιμερισμού για την παραγωγή των υψών βροχής είναι

$$\sum_{i=1}^n h_i = s \quad (3.1.5)$$

Οι ροπές των τμηματικών μεταβλητών εξαρτώνται τώρα από τις γνωστές από το προηγούμενο βήμα διάρκειες των επεισοδίων, και είναι

$$\begin{aligned} \mu_i &= (d_i + a)\mu_\Phi - b, \quad \sigma_i = (d_i + a)\sigma_\Phi \quad \text{για } d > 1 \\ \mu_i &= \mu_{H1}, \quad \sigma_i = \sigma_{H1} \quad \text{για } d = 1 \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι και πάλι μηδενικοί.

Ορισμένοι φυσικοί περιορισμοί που τίθενται για τις τμηματικές μεταβλητές (όπως αυτός που αφορά τη σχέση χρόνου διαδοχής και διάρκειας βροχής) εξετάζονται ιδιαίτερα στην υποπαράγραφο 3.2.2.

### 3.1.3. Η φάση του εσωτερικού επιμερισμού

Στη φάση αυτή του επιμερισμού αντιμετωπίζεται χωριστά το κάθε επεισόδιο βροχής. Στο ξεκίνημα αυτής της φάσης είναι γνωστά για κάθε επεισόδιο τα εξής στοιχεία:

- το ύψος βροχής του επεισοδίου ( $h$ ), και
- η διάρκεια βροχής του επεισοδίου ( $d$ ).

Στόχος αυτής της φάσης είναι να παραχθούν τα  $d$  ωριαία ύψη βροχής του κάθε επεισοδίου βροχής. Η βασική σχέση επιμερισμού είναι

$$\sum_{j=1}^d x_{1,j} = h_1 \quad (3.1.7)$$

Οι ροπές των τμηματικών μεταβλητών εξαρτώνται από τη διάρκεια βροχής και από τη σχετική χρονική θέση  $(j-0.5)/d$ , και είναι

$$\mu_j = \left[ g_1 \frac{j-0.5}{d} + g_0 \right] \cdot \frac{d+a_1}{d} \cdot \mu_Z$$

$$\sigma_j = \mu_j \cdot \frac{\sigma_Z}{\mu_Z} \quad (3.1.8)$$

Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης α' τάξης των τμηματικών μεταβλητών εξαρτάται από τη διάρκεια του επεισοδίου και υπολογίζεται από τη σχέση (2.9.17).

### 3.1.4. Η κωδικοποίηση του μοντέλου σε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή

Το μοντέλο έχει κωδικοποιηθεί σε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή, γραμμένο σε γλώσσα Pascal. Το σχετικό πρόγραμμα με τον τίτλο DisagModel φαίνεται στο παράρτημα Α.4. Το πρόγραμμα περιγράφεται συνοπτικά στο σχήμα 3.2. Στην αριστερή στήλη του σχήματος παρουσιάζεται η δομή του προγράμματος, με τα μεμονωμένα τμήματα που το συγκροτούν. Στη δεξιά στήλη παρουσιάζεται η πορεία που ακολουθείται στην εκτέλεση του προγράμματος. Τα βέλη δείχνουν τη σύνδεση των διάφορων τμημάτων του προγράμματος μεταξύ τους, καθώς και τη σχέση δομής του προγράμματος και πορείας υπολογισμών.

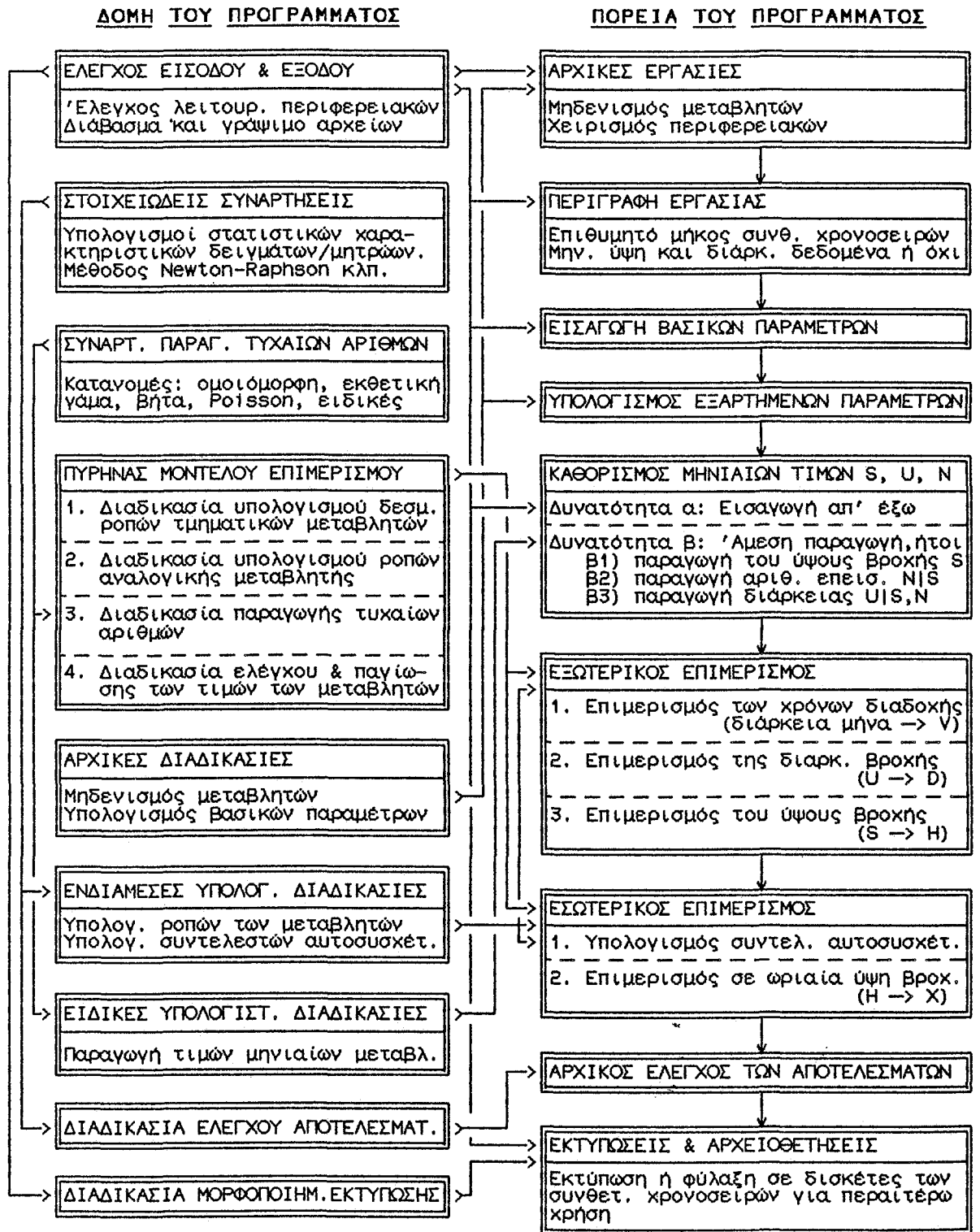
Όπως φαίνεται από το σχήμα, ο πυρήνας του προγράμματος, ο οποίος περιλαμβάνει τον επιμεριστικό αλγόριθμο, αποτελείται από 4 επί μέρους διαδικασίες (υποπρογράμματα), που εκτελούν τις ακόλουθες εργασίες:

1. Διαδικασία υπολογισμού δεσμευμένων ροπών των τμηματικών μεταβλητών  
 Σε μια εισαγωγική φάση υπολογίζει όλες τις παραμέτρους που χρησιμοποιούνται καθολικά σε όλα τα βήματα του μοντέλου. Στις επόμενες φάσεις, μια για κάθε βήμα επιμερισμού, υπολογίζει τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της τρέχουσας τμηματικής μεταβλητής, για τη δεδομένη τιμή της προηγούμενης τμηματικής μεταβλητής. Χρησιμοποιεί τις σχέσεις της υποπαραγράφου 1.6.4.
2. Διαδικασία υπολογισμού ροπών της αναλογικής μεταβλητής  
 Σε κάθε βήμα επιμερισμού υπολογίζει κατ' αρχήν τις περιθώριες ροπές της αναλογικής μεταβλητής, και στη συνέχεια τις δεσμευμένες ροπές της για τη δεδομένη τιμή της αθροιστικής μεταβλητής. Χρησιμοποιεί τις σχέσεις (1.5.37), (1.5.25), (1.5.38), (1.5.32) και (1.5.39).
3. Διαδικασία παραγωγής τυχαίων αριθμών  
 Παράγει την τιμή της αναλογικής μεταβλητής και μετά υπολογίζει τις αντίστοιχες τιμές των τμηματικών μεταβλητών. Η διαδικασία αυτή μαζί με την προηγούμενη συναρθρώνουν το μοντέλο δικασμού.
4. Διαδικασία ελέγχου και παγίωσης των τμηματικών μεταβλητών  
 Ελέγχει την τιμή της τρέχουσας τμηματικής μεταβλητής, η οποία παράγεται με την διαδικασία αριθ. 3, σε ότι αφορά την τήρηση ορισμένων φυσικών περιορισμών που πρέπει να ικανοποιεί. Οι φυσικοί περιορισμοί είναι διαφορετικοί για κάθε μεταβλητή που επιμερίζεται.<sup>1</sup> Αν ο έλεγχος δεν αποβεί θετικός τότε τροποποιείται κατάλληλα η τιμή της μεταβλητής. Με την εκτέλεση και αυτής της διαδικασίας οριστικοποιείται η τιμή της τμηματικής μεταβλητής κάθε βήματος.

-----  
 1. Οι φυσικοί περιορισμοί και η αντιμετώπιση τους εξετάζονται ιδιαίτερα, στην υποπαραγράφο 3.2.2.

Ένα σύνολο από παράλληλες διαδικασίες, που επιγραμματικά φαίνονται στο σχήμα 3.2, εξυπηρετούν διάφορες λειτουργίες συνυφασμένες με το πρόγραμμα, όπως για παράδειγμα την επίλυση εξισώσεων με τη μέθοδο Newton-Raphson (που χρειάζεται στον υπολογισμό των συντελεστών αυτοσυσχέτισης του ωριαίου ύψους βροχής), την εκτύπωση ή τη φύλαξη σε μαγνητικά αρχεία των αποτελεσμάτων του μοντέλου, και τέλος ένα προκαταρκτικό έλεγχο των αποτελεσμάτων. Ο έλεγχος αυτός περιλαμβάνει τη σύγκριση των θεωρητικών μέσων τιμών και διασπορών μιας σειράς στοχαστικών μεταβλητών, με τις αντίστοιχες εμπειρικές τιμές τους, όπως προκύπτουν από τα συνθετικά δείγματα που παράγονται. Επισημαίνεται ότι πληρέστεροι έλεγχοι των συνθετικών δειγμάτων μπορούν να γίνουν με το πρόγραμμα AnalData, που υπάρχει στο παράρτημα Α.5, το οποίο είναι κατάλληλο για την επεξεργασία είτε ιστορικών, είτε συνθετικών δεδομένων.





Σχήμα 3.2 : Η δομή και η πορεία υπολογισμών του προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή για τον επιμερισμό της σημειακής βροχόπτωσης.

### 3.2. ΕΙΔΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

#### 3.2.1. Ο χειρισμός της πιθανότητας μηδενισμού των τμηματικών μεταβλητών. Ο χειρισμός της κατανομής Weibull.

Το γενικό δυναμικό επιμεριστικό σχήμα, όπως έχει αναπτυχθεί στο κεφάλαιο 1, είναι κατάλληλο για στοχαστικές μεταβλητές με συνεχή συνάρτηση κατανομής, τύπου γάμα. Το σχήμα αυτό επεκτάθηκε για να μπορεί να καλύπτει και μεταβλητές με ασυνεχείς συναρτήσεις κατανομής (βλ. υποπαράγραφο 1.5.8). Η επέκταση αυτή προβλέπει την παραγωγή της αναλογικής μεταβλητής  $P$  σε δύο βήματα, όπου στο πρώτο βήμα καθορίζεται αν η τιμή της τμηματικής μεταβλητής θα συμπέσει με το σημείο ασυνέχειας ή όχι.

Στην περίπτωση του επιμερισμού της σημειακής βροχόπτωσης, το πρόβλημα της ασυνέχειας στη συνάρτηση κατανομής, το συναντούμε μόνο κατά τη φάση του εσωτερικού επιμερισμού, επειδή το ωριαίο ύψος βροχής μπορεί να πάρει και μηδενικές τιμές. Το θέμα της παρουσίας μηδενικών τιμών του ωριαίου ύψους βροχής έχει αναλυθεί στο κεφάλαιο 2 (υποπαράγραφοι 2.6.1, 2.6.5 και 2.9.9). Το συμπέρασμα της ανάλυσης αυτής συνοψίζεται στα εξής:

- A. Η έντονα ασύμμετρη συνάρτηση κατανομής του ωριαίου ύψους βροχής δικαιολογεί την εμφάνιση πρακτικά μηδενικών τιμών της μεταβλητής (δηλαδή τιμών που είναι κάτω από το όριο στρογγύλευσης προς το 0, ήτοι το 0.05) με σημαντικά μεγάλη πιθανότητα  $F_0$ .<sup>2</sup>
- B. Η παρατηρούμενη εμπειρική συχνότητα μηδενισμού του ωριαίου ύψους βροχής  $p_0$  είναι πολύ κοντά στην παραπάνω θεωρητική πιθανότητα  $F_0$ .
- Γ. Η διαφορά  $\Delta p = F_0 - p_0$  μπορεί να είναι είτε θετική, είτε αρνητική.

Όταν η κατανομή του ωριαίου ύψους βροχής είναι γάμα, και η διαφορά  $\Delta p$  είναι ασήμαντη, τότε το δυναμικό επιμεριστικό σχήμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς καμιά προσθήκη. Είναι σαφές ότι σε αυτή την περίπτωση τα δείγματα των μεταβλητών  $X$  που θα παραχθούν, θα περιέχουν μηδενικές τιμές με την επιθυμητή συχνότητα  $p_0 (=F_0)$ . Σε κάθε άλλη περίπτωση, για να διατηρηθεί η συχνότητα μηδενισμού  $p_0$ , το μοντέλο χρειάζεται κάποια ειδική τροποποίηση. Μάλιστα ο

2. Εδώ το  $F_0$  συμβολίζει την πιθανότητα  $F_X(0.05) = Pr(X < 0.05)$ . Η τιμή αυτή είναι περίπου ίση και με την  $F_Z(0.05)$  (βλ. υποπαράγραφο 2.9.9).

τύπος της επέκτασης του μοντέλου που προτάθηκε στην υποπαράγραφο 1.5.8 δεν είναι ο κατάλληλος για την περίπτωση που εξετάζουμε. Αυτό φαίνεται καλύτερα στην περίπτωση που η  $\Delta\rho$  είναι θετική, οπότε ο ρόλος της τροποποίησης/επέκτασης του μοντέλου είναι να περιορίσει τις παραγόμενες από το γενικό σχήμα μηδενικές τιμές, και όχι βέβαια να προσθέσει και άλλες.

Μια απλή απάντηση στο πρόβλημα αυτό μπορεί να δοθεί με τον ακόλουθο πρακτικό τρόπο, που είναι εύκολος στην εφαρμογή αλλά χωρίς θεωρητική πληρότητα. Η μέθοδος χρησιμοποιεί την ακόλουθη βασική παράμετρο

$$q_0 = \frac{1/\rho_M - 1}{1/\rho_m - 1} \quad (3.2.1)$$

όπου

$$\rho_m = \min(\rho_0, F_0)$$

$$\rho_M = \max(\rho_0, F_0)$$

και η  $\rho_0$  είναι η επιθυμητή πιθανότητα μηδενισμού του ωριαίου ύψους βροχής, ίση με την εμπειρική τιμή της, ενώ η  $F_0$  αντιστοιχεί πάντα στην κατανομή γάμα (στο σημείο  $x=0.05$ ), και αυτό ανεξάρτητα από το ποια κατανομή έχει τελικά υιοθετηθεί για το ωριαίο ύψος βροχής. Από τον ορισμό της  $q_0$  προκύπτει ότι  $0 \leq q_0 \leq 1$ . Η κωδικοποίηση της μεθόδου είναι η εξής:

1. Παράγεται η τιμή του  $X$  από τη διαδικασία δικασμού του γενικού μοντέλου επιμερισμού και στρογγυλεύεται (με 1 δεκαδικό ψηφίο).
2. Στην περίπτωση που ισχύει  $\rho_0 < F_0$  και εφόσον προέκυψε  $X=0$ , [ή στην περίπτωση που  $\rho_0 > F_0$  και εφόσον προέκυψε  $X > 0$ ], εκτελούνται τα ακόλουθα
  - 2α. Παράγεται ένας τυχαίος αριθμός  $\rho$ , από την ομοιόμορφη κατανομή  $(0, 1)$
  - 2β. Αν  $\rho < q_0$ , τότε η τιμή του  $X$  υιοθετείται και η διαδικασία προχωρεί στα επόμενα βήματα επιμερισμού.
  - 2γ. Αλλιώς επαναλαμβάνεται ο αλγόριθμος από το βήμα 1.
3. Σε αντίθετη περίπτωση υιοθετείται η τιμή του  $X$  και η διαδικασία προχωρεί στο επόμενο βήμα επιμερισμού.

Όπως αποδεικνύεται παρακάτω, ο αλγόριθμος αυτός επιτρέπει τη διατήρηση της πιθανότητας μηδενισμού της τμηματικής μεταβλητής  $X$ , στην επιθυμητή τιμή της ( $\rho_0$ ), αλλά μόνο κάτω από τις προϋποθέσεις ότι (α) δεν υπάρχει συσχέτιση

μεταξύ των διαδοχικών τμηματικών μεταβλητών, και (β) δεν υπάρχει εξάρτηση της πιθανότητας  $p_0$  από την τιμή της αθροιστικής μεταβλητής. Επειδή στην πραγματικότητα δεν ισχύει καμιά από αυτές τις δύο προϋποθέσεις, δεν θα πρέπει να περιμένουμε ότι η παραπάνω μέθοδος διατηρεί την πιθανότητα  $p_0$ , παρά μόνο ότι βελτιώνει την αρχική πιθανότητα μηδενισμού  $F_0$ , πλησιάζοντας την προς την  $p_0$ , και προσαρμόζει κατάλληλα την συνάρτηση κατανομής στην περιοχή των μικρών τιμών της μεταβλητής.

Με την ίδια μέθοδο μπορούμε να χειριστούμε και τις περιπτώσεις που η κατανομή του ωριαίου ύψους βροχής είναι η Weibull, παρά η γάμα. Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.23, οι δύο κατανομές διαφέρουν ουσιαστικά μόνο στις μικρές τιμές της μεταβλητής (κάτω από 0.2 mm). Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο με πανομοιότυπο τρόπο, υπολογίζοντας το  $F_0$  και πάλι από την κατανομή γάμα, τότε η αρχική κατανομή γάμα, που θα έδινε το γενικό επιμεριστικό σχήμα, θα ανορθωθεί στις μικρές τιμές της μεταβλητής, πλησιάζοντας προς την κατανομή Weibull. Το μέτρο αυτής της ανόρθωσης δεν μπορεί πάντως να δοθεί ποσοτικά. Η μέθοδος δεν είναι η καλύτερη δυνατή, αλλά έδωσε ανεκτά αποτελέσματα (βλ. υποπαράγραφο 3.3.5). Μια καλύτερη και γενικότερη αντιμετώπιση του θέματος θα μπορούσε να γίνει με επέμβαση στον πυρήνα του επιμεριστικού σχήματος, δηλαδή στο μοντέλο δικασμού. Η μέθοδος αυτή θα απαιτούσε μια κατάλληλη διαφοροποίηση της συνάρτησης κατανομής της αναλογικής μεταβλητής.

Σημειώνεται ότι η παραπάνω μέθοδος, όταν εφαρμόζεται, επιφέρει μια (όχι σημαντική) τροποποίηση στις ροπές των τμηματικών μεταβλητών. Για την επαναφορά των ροπών στις πραγματικές τους τιμές, πρέπει να γίνονται οι διορθώσεις της υποπαράγραφου 2.9.9 (σχέσεις (2.9.35)-(2.9.37)).

#### =====

#### Απόδειξη της καταλληλότητας του αλγορίθμου

Η απόδειξη γίνεται για την περίπτωση που ισχύουν οι δύο παραπάνω προϋποθέσεις, οπότε η  $p_0$  δεν εξαρτάται ούτε από την τιμή της αθροιστικής μεταβλητής, ούτε από προηγούμενες τμηματικές μεταβλητές. Θα εξετάσουμε την περίπτωση  $p_0 < F_0$ . Η απόδειξη της περίπτωσης  $p_0 > F_0$  είναι πανομοιότυπη. Έστω ότι ο παραπάνω αλγόριθμος εφαρμόστηκε, ως προς το βήμα 1,  $N$  συνολικά φορές, όπου ο αριθμός  $N$  είναι αρκετά μεγάλος. Το πλήθος των τιμών του  $X$  που ήδη από το πρώτο βήμα είναι μεγαλύτερες από μηδέν είναι

$$N_1 = N \cdot (1 - F_0)$$

και το πλήθος των μηδενικών τιμών του  $X$  στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου είναι

$$N_0 = N \cdot F_0$$

Από τις  $N_0$  μηδενικές τιμές του  $X$ , τελικά υιοθετούνται στο δεύτερο βήμα οι  $N_0$ , όπου

$$N_0 = N_0 \cdot q_0 = N \cdot F_0 \cdot q_0$$

Κατά συνέπεια το σύνολο των τιμών του  $X$  που τελικά υιοθετούνται είναι

$$N_1 + N_0 = N \cdot (1 - F_0 \cdot (1 - q_0))$$

και επομένως η συχνότητα των μηδενικών τιμών στο σύνολο των υιοθετούμενων τιμών είναι

$$Pr(X=0) = \frac{N_0}{N_1 + N_0} = \frac{F_0 \cdot q_0}{1 - F_0 + F_0 q_0} \quad (a)$$

Αλλά από την (3.2.1) προκύπτει

$$F_0 \cdot q_0 = \frac{1 - F_0}{1/\rho_0 - 1}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω στην (a) κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε

$$Pr(X=0) = \rho_0$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι ο εξεταζόμενος αλγόριθμος φέρνει την συχνότητα μηδενισμού των τμηματικών μεταβλητών στο επιθυμητό επίπεδο  $\rho_0$ .

### 3.2.2. Περιορισμοί που ακολουθούν οι τμηματικές μεταβλητές και αντιμετώπιση τους

Σε κάθε φάση του επιμερισμού της σημειακής βροχόπτωσης, είτε αυτός αφορά το ύψος βροχής, είτε κάποια χρονική μεταβλητή, μπαίνουν ορισμένοι φυσικοί περιορισμοί για τις τμηματικές μεταβλητές. Οι περιορισμοί αυτοί ενσωματώνονται σε ένα ειδικό τμήμα του μοντέλου επιμερισμού, το τμήμα που στο σχήμα 3.2 αναφέρεται ως "διαδικασία ελέγχου και παγίωσης των τιμών των μεταβλητών". Με το διάγραμμα πορείας που ακολουθείται, πρώτα παράγονται από το μοντέλο οι τιμές των τμηματικών μεταβλητών χωρίς να παίρνονται υπόψη οι περιορισμοί, και στη συνέχεια εξετάζεται αν οι τιμές αυτές ικανοποιούν τους περιορισμούς. Σε αντίθετη περίπτωση τροποποιούνται κατάλληλα οι τιμές των μεταβλητών. Τελικά πάντα οι τιμές που βγαίνουν από το μοντέλο ικανοποιούν τους φυσικούς περιορισμούς.

Παρακάτω δίνονται οι διάφοροι περιορισμοί που ισχύουν κατά περίπτωση.

#### 1. Επιμερισμός σε χρόνους διαδοχής

Η ελάχιστη τιμή του χρόνου διαδοχής  $v_1$  είναι  $(c+1)$  ώρες, όπου  $c$  είναι ο χρόνος διαχωρισμού.

#### 2. Επιμερισμός σε διάρκειες επεισοδίων βροχής

Η ελάχιστη διάρκεια είναι 1 ώρα.<sup>3</sup> Η μέγιστη διάρκεια είναι  $(v-c)$  ώρες, όπου  $v$  είναι ο αντίστοιχος χρόνος δια-

3. Ο φυσικός περιορισμός είναι ότι η διάρκεια είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Η ελάχιστη τιμή της 1 ώρας είναι λογιστικός περιορισμός που προκύπτει από το γεγονός ότι το μοντέλο δεν "αναγνωρίζει" χρονικά διαστήματα μικρότερα της ώρας.

δοχής, και  $c$  ο χρόνος διαχωρισμού. Εάν η συνθήκη αυτή δεν τηρείται, τότε η διάρκεια του επεισοδίου υπολογίζεται εκ νέου, ως τυχαίος αριθμός από την τριγωνική κατανομή  $(0, v-c)$ . Σε αυτό το σημείο παίρνεται υπόψη το τριγωνικό τμήμα της δεσμευμένης κατανομής της διάρκειας βροχής για δεδομένη τιμή του χρόνου διαδοχής, όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 2.7.

### 3. Επιμερισμός σε ύψη επεισοδίων βροχής

Για κάθε διάρκεια βροχής υπάρχει ένα ελάχιστο ύψος βροχής, που καθορίζεται από το συνδυασμό των εξής τριών περιορισμών: α) ότι το ελάχιστο ωριαίο ύψος βροχής είναι ή 0.0 ή 0.1 mm, β) ότι το πρώτο και το τελευταίο ωριαίο ύψος βροχής είναι υποχρεωτικά μη μηδενικά, άρα η ελάχιστη τιμή τους είναι 0.1 mm, και γ) ότι δεν επιτρέπεται να βρίσκονται σε σειρά περισσότερες από  $c$  ώρες με μηδενικό ύψος βροχής. Αποδεικνύεται ότι το ελάχιστο ύψος του επεισοδίου βροχής που επιβάλλουν οι περιορισμοί αυτοί, δίνεται από τη σχέση

$$h_{\min} = 0.1 \cdot [(d+2c-2) \operatorname{div} c] \quad (3.2.2)$$

όπου το σύμβολο  $\operatorname{div}$  συμβολίζει ακέραιο πηλίκο της διαίρεσης,  $d$  είναι η διάρκεια του επεισοδίου σε ώρες και  $c$  ο χρόνος διαχωρισμού. Μια πιο κονδροειδής αλλά ασφαλέστερη προσέγγιση του θέματος (η οποία χρησιμοποιείται τελικά στο μοντέλο) προκύπτει αν θεωρηθεί ότι η μέση ένταση του επεισοδίου βροχής στην πράξη δεν είναι ποτέ μικρότερη από 0.1 mm/h, οπότε το ελάχιστο ύψος του επεισοδίου βροχής προκύπτει

$$h_{\min} = 0.1 \cdot d \quad (3.2.3)$$

### 4. Επιμερισμός σε ωριαία ύψη βροχής

Το ελάχιστο όριο του ωριαίου ύψους βροχής είναι ή 0.0 ή 0.1 mm. Οι παράγοντες που καθορίζουν ποια είναι η ελάχιστη τιμή σε μια συγκεκριμένη ώρα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο εδάφιο.

Οι έλεγχοι αυτοί ας σημειωθεί ότι πραγματοποιούνται στο τέλος κάθε κλήσης της διαδικασίας δικασμού. Μάλιστα οι έλεγχοι αφορούν όχι μόνο την παραγόμενη από το μοντέλο δικασμού τμηματική μεταβλητή ( $X$ ), αλλά και το άθροισμα των

υπόλοιπων προς επιμερισμό μεταβλητών (Y). Οι περιορισμοί για τις μεταβλητές Y προκύπτουν από τους αντίστοιχους περιορισμούς των X.

### 3.2.3. Γεννήτριες τυχαίων αριθμών

Η λειτουργία του μοντέλου επιμερισμού, όπως και κάθε μοντέλου στοχαστικής προσομοίωσης, βασίζεται στην παραγωγή τυχαίων αριθμών. Για την παραγωγή τυχαίων αριθμών (ακριβέστερα ψευδοτυχαίων) από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή έχουν αναπτυχθεί και είναι γνωστοί από τη βιβλιογραφία διάφοροι αλγόριθμοι, ανάλογα με την συνάρτηση κατανομής των τυχαίων αριθμών. Το μοντέλο επιμερισμού χρησιμοποιεί τυχαίους αριθμούς από τις κατανομές ομοιόμορφη, τριγωνική, εκθετική, γάμα, βήτα και Poisson, καθώς και από μερικές μη τυποποιημένες κατανομές. Οι σχετικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν για τις τυποποιημένες κατανομές φαίνονται στο παράρτημα Δ της εργασίας, και στο παράρτημα Α.3 δίνεται η κωδικοποιημένη μορφή τους σε γλώσσα Pascal. Στην υποπαράγραφο που ακολουθεί εξετάζεται μια ειδική περίπτωση γεννήτριας τυχαίων αριθμών, που αναπτύχθηκε για τις ανάγκες του μοντέλου.

### 3.2.4. Παραγωγή των μεταβλητών αφετηρίας για τη φάση εξωτερικού επιμερισμού.

Οι μεταβλητές αφετηρίας στη φάση του εξωτερικού επιμερισμού είναι το μηνιαίο ύψος βροχής, η μηνιαία διάρκεια και ο αριθμός των επεισοδίων βροχής κατά τη διάρκεια του μήνα. Όπως αναφέρθηκε και στην υποπαράγραφο 3.1.2, η παραγωγή των τιμών αυτών των μεταβλητών δεν είναι θέμα του μοντέλου επιμερισμού, αλλά οι σχετικές διαδικασίες ενσωματώθηκαν στο τελικό μοντέλο, για να μπορεί να λειτουργήσει και αυτόνομα από άλλα μοντέλα.

Το θεωρητικό υπόβαθρο για την αντιμετώπιση του εν λόγω ζητήματος έχει αναπτυχθεί στην παράγραφο 2.10. Οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των παραπάνω μεταβλητών αφετηρίας είναι γνωστές, και όχι ιδιαίτερα περίπλοκες, και γι' αυτό η παραγωγή τιμών της κάθε μιας από τις μεταβλητές δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Το πρόβλημα ανακύπτει επειδή οι τιμές των τριών μεταβλητών δεν μπορούν να παραχθούν χωριστά η μια από την άλλη, γιατί προφανώς είναι μεταξύ τους έντονα στοχαστικά εξαρτημένες.

Για κάθε τριάδα τιμών των μεταβλητών η παραγωγή μπορεί να γίνει σε τρία βήματα, όπου σε κάθε βήμα παράγεται η τιμή μιας μεταβλητής. Ας καθορίσουμε κατ' αρχήν ότι η σειρά παραγωγής των τιμών θα είναι:

μηνιαίο ύψος → αριθμός επεισοδίων βροχής → μηνιαία διάρκεια

Με δεδομένη αυτή τη σειρά, η παραγωγή του μηνιαίου ύψους βροχής θα βασιστεί

στην περιθώρια συνάρτηση κατανομής του. Η παραγωγή του αριθμού των επεισοδίων βροχής θα βασιστεί στη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του, για δεδομένο ύψος βροχής. Τέλος η παραγωγή της μηνιαίας διάρκειας βροχής θα γίνει με βάση την δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της, για δεδομένο ύψος βροχής και δεδομένο πλήθος επεισοδίων.

Το πρώτο βήμα στην παραπάνω διαδικασία είναι απλό: Το μηνιαίο ύψος βροχής παράγεται ως τυχαίος αριθμός από την κατανομή γάμα, με ροπές που δίνονται από τις σχέσεις (2.10.9) και (2.10.10).

Για να καθοριστεί ο αλγόριθμος του δεύτερου βήματος, θα πρέπει να οριστεί η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του αριθμού επεισοδίων βροχής. Ουσιαστικά απαιτείται να καθοριστούν οι πιθανότητες

$$Pr(N=n|S=s, \tau)$$

όπου  $s$  η δεδομένη τιμή του μηνιαίου ύψους βροχής, και  $\tau$  η χρονική διάρκεια του μήνα. Στο τέλος της υποπαράγραφου αποδεικνύεται ότι οι εν λόγω πιθανότητες δίνονται από τη σχέση

$$\left. \begin{aligned} Pr(N=n|S=s, \tau) &= \frac{p_N(n) \cdot f_{S|N}(s)}{\sum_{j=1}^m p_N(j) \cdot f_{S|N}(s)} \quad \text{για } s > 0, n > 0 \\ Pr(N=0|S=s, \tau) &= 0 \quad \text{για } s > 0 \\ Pr(N=0|S=0, \tau) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

όπου  $p_N(n) = Pr(N=n|\tau)$ , (δίνεται από τη σχέση (2.10.2), και κατά προσέγγιση από την (2.10.1)),  $m$  είναι ο μέγιστος αριθμός επεισοδίων βροχής ( $m=\infty$  αν χρησιμοποιείται η σχέση (2.10.1)), και η  $f_{S|N}(s) = f_{S|N}(s, n)$  είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μηνιαίου ύψους βροχής για δεδομένο αριθμό επεισοδίων, ή, ισοδύναμα, η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής  $S_N$ , που ορίζεται στην υποπαράγραφο 2.10.3. Η τελευταία θα είναι γάμα, με παραμέτρους  $n\mu$  και  $\rho$ , όπου  $\mu$  και  $\rho$  οι παράμετροι της κατανομής γάμα του ύψους επεισοδίου βροχής (βλ. υποπαράγρ. 2.10.3, σελ. 223). Δηλαδή είναι:

$$f_{S|N}(s) = \frac{\rho^{n\mu} \cdot s^{n\mu-1} \cdot e^{-\rho s}}{\Gamma(n\mu)} \quad (3.2.5)$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (3.2.4), (3.2.5) και (2.10.2) περιγράφει την υπό μελέτη δεσμευμένη κατανομή του  $N$  κατά τρόπο αρκετά πολύπλοκο. Είναι δύσκολο να καθοριστεί η γεννήτρια του  $N$  με αναλυτικό τρόπο, από το συνδυασμό των παραπάνω σχέσεων. Γι' αυτό θα αναπτύξουμε μια προσεγγιστική γεννήτρια (άλλωστε στην πράξη οι περισσότερες γεννήτριες τυχαίων αριθμών είναι προσεγγ-



γιστικές). Παρατηρούμε ότι η παράμετρος  $\mu$  στην πράξη λίγο διαφέρει από το 1 (αφού η κατανομή του ύψους επεισοδίου βροχής είναι κοντά στην εκθετική), και έτσι μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση ίση με 1. Τότε θα έχουμε

$$f_{Sn}(s) = \frac{\rho(\rho s)^{n-1} \cdot e^{-\rho s}}{(n-1)!} \quad (3.2.6)$$

Παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέλος της (3.2.6) μπορεί να θεωρηθεί ως η συνάρτηση πιθανότητας μιας μεταβλητής  $K$ , με τιμή  $(n-1)$ , η οποία έχει κατανομή Poisson με παράμετρο  $(\rho s)$ . Πράγματι για την εν λόγω κατανομή Poisson ισχύει

$$p_K(n-1) = \Pr(K=n-1) = \frac{(\rho s)^{n-1} \cdot e^{-\rho s}}{(n-1)!}$$

και κατά συνέπεια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$f_{Sn}(s) = \rho \cdot p_K(n-1)$$

οπότε η πρώτη από τις σχέσεις (3.2.4) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\Pr(N=n | S=s, \tau) = \frac{p_N(n) \cdot p_K(n-1)}{\sum_{j=1}^m p_N(j) \cdot p_K(j-1)} \quad (3.2.7)$$

Η σχέση (3.2.7) μας επιτρέπει να καταστρώσουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο για την τυχαία παραγωγή του  $n$ :

1. Παράγεται ένας τυχαίος αριθμός  $n_1$  από την κατανομή Poisson με παράμετρο  $(\rho s) = s/\mu_H$ . Ο αριθμός αυτός αντιστοιχεί στην κατανομή της μεταβλητής  $K$ .
2. Παράγεται εντελώς ανεξάρτητα ένας τυχαίος αριθμός  $n_2$  από την τροποποιημένη κατανομή Poisson, δηλαδή την (2.10.1). Ο αριθμός αυτός αντιστοιχεί στην κατανομή της μεταβλητής  $N$ .<sup>4</sup>
3. Ελέγχεται αν ισχύει  $n_1+1=n_2$ .
4. Έπαναλαμβάνονται τα βήματα 1 έως 3, μέχρι να αποβεί θετικός ο έλεγχος του βήματος 3. Σε αυτή την περίπτωση ο ζητούμενος αριθμός  $n$  θεωρείται ίσος με τον αριθμό  $n_2$ .<sup>5</sup>

4. Η κατάσταση της γεννήτριας για αυτή την κατανομή είναι αρκετά απλή και στηρίζεται στην προέλευση αυτής της κατανομής από τη φραγμένη εκθετική. Ο αλγόριθμος (σε γλώσσα Pascal) της γεννήτριας υπάρχει στο παράρτημα Α.4 (σελ. Α.4.8).

5. Επειδή υπάρχει κίνδυνος να μη ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού του αλγορίθμου, ακόμα και μετά από

Η απόδειξη για το γεγονός ότι ο παραπάνω αλγόριθμος δίνει τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κατανομή (3.2.7) δίνεται στο τέλος της υποπαραγράφου.

Απομένει τώρα η μελέτη του τρίτου βήματος, προκειμένου να καθοριστεί η μέθοδος για την παραγωγή της μηνιαίας διάρκειας βροχής. Ουσιαστικά πρέπει να καθοριστεί η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής

$$F_{U|S,N}(u,s,n) = \Pr(U \leq u | S=s, N=n)$$

όπου  $u$  η συνολική διάρκεια βροχής,  $s$  η δεδομένη τιμή του μηνιαίου ύψους βροχής, και  $n$  είναι ο δεδομένος αριθμός των επεισοδίων βροχής του μήνα. Η παραπάνω συνάρτηση κατανομής είναι ταυτόσημη με την

$$F_{U_n | S_n}(u, s, n) = \Pr(U_n \leq u | S_n = s)$$

Η εν λόγω κατανομή δεν είναι ευκολο να υπολογιστεί αναλυτικά. Έτσι θα κάνουμε την υπόθεση ότι η συνάρτηση κατανομής γάμα είναι κατάλληλη για έκφραση της παραπάνω δεσμευμένης κατανομής. Η υπόθεση αυτή είναι εύλογη, δεδομένου ότι και οι περιθώριες κατανομές των  $U_n$  και  $S_n$  είναι γάμα. Για τον πλήρη προσδιορισμό της εν λόγω συνάρτησης κατανομής αρκεί να είναι γνωστές οι αντίστοιχες ροπές  $\alpha'$  και  $\beta'$  τάξης, δηλαδή οι

$$E[U_n | S_n = s] = E[U | S = s, N = n] \text{ και } \text{Var}[U_n | S_n = s] = \text{Var}[U | S = s, N = n]$$

Για τον προσδιορισμό των ροπών αυτών θα δεχτούμε ότι η στοχαστική εξάρτηση μεταξύ των  $U_n$  και  $S_n$  είναι γραμμική. Έτσι θα έχουμε

$$E[U_n | S_n = s] = \frac{\sigma_{U_n S_n}}{\sigma_{S_n}^2} (s - \mu_{S_n}) + \mu_{U_n}$$

$$\text{Var}[U_n | S_n = s] = \sigma_{U_n}^2 - \frac{\sigma_{U_n S_n}^2}{\sigma_{S_n}^2}$$

Παίρνοντας υπόψη τις σχέσεις υπολογισμού των ροπών των  $U_n$  και  $S_n$  συναρτήσει των αντίστοιχων ροπών των  $D$  και  $H$  (βλ. αποδείξεις υποπαραγράφων 2.10.3 και 2.10.5), θα έχουμε τις εξής τελικές σχέσεις

-----  
πολύ μεγάλο αριθμό δοκιμών, γι' αυτό καθορίζεται ένας μέγιστος αριθμός επαναλήψεων, και αν φθάσουμε τον αριθμό αυτό χωρίς επιτυχία, τότε θεωρείται ότι ο αριθμός  $n$  είναι το ημίαθροισμα του ζεύγους αριθμών  $(n_1+1, n_2)$ , οι οποίοι παρουσίασαν την ελάχιστη διαφορά μεταξύ τους. Ο σχετικός αλγόριθμος (σε γλώσσα Pascal) υπάρχει στο παράρτημα Α.4 (σελ.Α.4.18).

$$E[U_n | S_n = s] = \frac{\sigma_{HD}}{\sigma_H^2} (s - n\mu_H) + \nu_{HD} \quad (3.2.8)$$

$$\text{Var}[U_n | S_n = s] = n \left[ \sigma_D^2 - \frac{\sigma_{HD}^2}{\sigma_H^2} \right] \quad (3.2.9)$$

Από τις ροπές αυτές υπολογίζονται οι παράμετροι της κατανομής γάμα, και στη συνέχεια παράγεται η συνολική διάρκεια βροχής από την αντίστοιχη γεννήτρια τυχαίων αριθμών.

#### Απόδειξη της (3.2.4)

Για λόγους απλοποίησης των συμβολισμών θα παραλείψουμε δέσμευση που αναφέρεται στη χρονική διάρκεια του μήνα ( $\tau$ ), αλλά θα εννοούμε πάντα ότι το συμβάν  $N=n$  αναφέρεται στο χρόνο  $\tau$ . Δηλαδή θα συμβολίζουμε:  $\Pr(N=n) = \Pr(N=n|\tau)$  (και απλούστερα  $P_N(n)$ ) και  $\Pr(N=n|S=s) = \Pr(N=n|S=s,\tau)$ . Από τη θεωρία πιθανοτήτων έχουμε

$$\Pr(N=n|S=s) = \Pr(N=n|s \leq S \leq s+ds) = \Pr(N=n, s \leq S \leq s+ds) / \Pr(s \leq S \leq s+ds) \Rightarrow$$

$$\Pr(N=n|S=s) = \Pr(s \leq S \leq s+ds | N=n) \cdot \Pr(N=n) / \Pr(s \leq S \leq s+ds) \quad (\alpha)$$

Αλλά ισχύει

$$\Pr(s \leq S \leq s+ds | N=n) = f_{S|N}(s, n) \cdot ds \quad (\beta)$$

και

$$\Pr(s \leq S \leq s+ds) = f_S(s) \cdot ds \quad (\gamma)$$

όπου η

$$f_{S|N}(s, n) = f_{S_n}(s) \quad (\delta)$$

είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $S_n = H_1 + H_2 + \dots + H_n$ , και η  $f_S(s)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $S$ . Μάλιστα λόγω της (2.10.6) θα είναι

$$f_S(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P_N(n) \cdot f_{S|N}(s, n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_N(n) \cdot f_{S_n}(s) \quad (\epsilon)$$

Αντικαθιστώντας τους διάφορους όρους της (α) από τις (β), (γ) και (δ) παίρνουμε

$$\Pr(N=n|S=s) = \frac{f_{S_n}(s) \cdot ds \cdot P_N(n)}{f_S(s) \cdot ds} = \frac{f_{S_n}(s) \cdot P_N(n)}{f_S(s)}$$

Τέλος με αντικατάσταση στην παραπάνω της  $f_S(s)$  από την (ε), προκύπτει η πρώτη σχέση από τις (3.2.4). Οι άλλες δύο είναι προφανείς.

#### Απόδειξη της καταλληλότητας του αλγορίθμου παραγωγής του αριθμού επεισοδίων βροχής $N$

Θα αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος που περιγράφηκε παραπάνω δίνει τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κατανομή (3.2.7).

θα αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος που περιγράφηκε παραπάνω δίνει τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κατανομή (3.2.7).

Θεωρούμε ότι ο αλγόριθμος εφαρμόζεται επί  $Q$  συνεχείς φορές για την παραγωγή  $Q$  τιμών του  $N$ . Έστω  $R$  ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για την παραγωγή και των  $Q$  τυχαίων αριθμών  $N$ . Ο αριθμός  $R$  είναι το πλήθος των τυχαίων αριθμών  $N_1$  και  $N_2$ . Εφόσον τα  $R$  και  $Q$  είναι αρκετά μεγάλα (θεωρητικά όταν τείνουν στο άπειρο) θα είναι:

$$Q = R \cdot \Pr(N_1+1=N_2)$$

και κατά συνέπεια

$$Q = R \cdot \sum_{j=1}^m \Pr(N_1=j-1, N_2=j)$$

ενώ λόγω της ανεξαρτησίας στη διαδικασία παραγωγής τιμών των  $N_1$  και  $N_2$

$$Q = R \cdot \sum_{j=1}^m \Pr(N_1=j-1) \cdot \Pr(N_2=j) \quad (\zeta)$$

Έστω τώρα ότι  $W(n)$  είναι το πλήθος όσων από τους  $Q$  τυχαίους αριθμούς που παρήχθησαν είναι ίσοι με  $n$ . Προφανώς θα ισχύει  $W(1)+W(2)+W(3)+\dots+W(m) = Q$ . Εξ άλλου λόγω της μεθόδου που ακολουθήθηκε για την παραγωγή των αριθμών, θα είναι

$$W(n) = R \cdot \Pr(N_1=n-1) \cdot \Pr(N_2=n) \quad (\eta)$$

Από τις σχέσεις ( $\zeta$ ) και ( $\eta$ ) προκύπτει ότι η σχετική συχνότητα με την οποία εμφανίζονται οι  $W(n)$  τυχαίοι αριθμοί που είναι ίσοι με  $n$ , στο σύνολο των  $Q$  τυχαίων αριθμών που παρήχθησαν, είναι

$$P(N=n) = \frac{W(n)}{Q} = \frac{R \cdot \Pr(N_1=n-1) \cdot \Pr(N_2=n)}{R \cdot \sum_{j=1}^m \Pr(N_1=j-1) \cdot \Pr(N_2=j)} \quad (\theta)$$

Αλλά στην παραπάνω σχέση το  $R$  απλοποιείται, ενώ λόγω του τρόπου παραγωγής των  $n_1$  και  $n_2$  ισχύει:

$$\Pr(N_1=n-1) = p_{\chi}(n-1) \text{ και } \Pr(N_2=n) = p_{\mu}(n).$$

Επομένως οι τυχαίοι αριθμοί που παράγονται από τον αλγόριθμο έχουν κατανομή την (3.2.7).

### 3.3. ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

#### 3.3.1. Γενικά

Η μέθοδος για τον έλεγχο ενός μοντέλου προσομοίωσης είναι απλή: Παράγεται από το μοντέλο μια σειρά από συνθετικές χρονοσειρές, υπολογίζονται οι διάφορες ουσιώδεις στατιστικές παράμετροι των συνθετικών χρονοσειρών, και ελέγχονται ως προς την συμφωνία τους με τις αντίστοιχες θεωρητικές παραμέτρους. Για τον έλεγχο του μοντέλου επιμερισμού της σημειακής βροχόπτωσης πραγματοποιήθηκαν τέσσερις ξεχωριστές εφαρμογές του μοντέλου, με τις οποίες έγινε παραγωγή ισάριθμων συνθετικών χρονοσειρών. Οι θεωρητικές παράμετροι του μοντέλου σε αυτές τις εφαρμογές θα μπορούσαν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές, αλλά θεωρήθηκε σκόπιμο να τους δοθούν πραγματικές τιμές. Έτσι χρησιμοποιήθηκαν οι 4 ομάδες παραμέτρων των σταθμών Χάλαρα και Τρίβουνο, για τους μήνες Απρίλιο και Μάιο, όπως υπολογίστηκαν στο κεφάλαιο 2. Τα χαρακτηριστικά μεγέθη των συνθετικών χρονοσειρών φαίνονται στον πίνακα 3.1.

Ο υπολογισμός των διάφορων στατιστικών παραμέτρων από τις συνθετικές χρονοσειρές έγινε με το πρόγραμμα AnalData (βλ. παράρτημα Α.5). Τα αποτελέσματα όλων των σχετικών υπολογισμών του προγράμματος αυτού (που είναι αρκετά μακροσκελείς) δίνονται στα παραρτήματα Γ.5 έως Γ.8.

Στις αμέσως επόμενες υποπαραγράφους, καθώς και στους πίνακες και τα σχήματα που τις συνοδεύουν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα όλων των ελέγχων του μοντέλου επιμερισμού σημειακής βροχόπτωσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1  
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΙΚΩΝ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ  
ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Χαρακτηρ. μέγεθος	ΣΤΑΘΜΟΣ : ΧΑΛΑΡΑ		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΤΡΙΒΟΥΝΟ	
	Απρίλιος	Μάιος	Απρίλιος	Μάιος
Αριθμός ετών	50	50	50	50
Αριθμός επεισοδίων βροχής	371	419	509	421
Αριθμός ωριαίων υψών βροχής				
α. συνολικός	4079	3594	4876	4001
β. με διάρκεια > 1 h	4033	3528	4792	3941

### 3.3.2. Σύγκριση μέσων τιμών και τυπικών αποκλίσεων

Στους πίνακες 3.2 και 3.3 παρουσιάζονται συγκριτικά οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις του συνόλου των υδρολογικών μεταβλητών που χρησιμοποιεί το μοντέλο επιμερισμού σημειακής βροχόπτωσης, καθώς και των βασικών μετασχηματισμών τους, οι οποίοι έχουν εισαχθεί στο κεφάλαιο 2. Για κάθε μεταβλητή και για κάθε εφαρμογή του μοντέλου δίνεται ένα ζεύγος τιμών: Η πρώτη είναι η θεωρητική τιμή που προκύπτει από τις παραμέτρους του μοντέλου βροχής, με τις σχέσεις του κεφαλαίου 2, και η δεύτερη είναι η εμπειρική, η οποία υπολογίστηκε από το αντίστοιχο συνθετικό δείγμα. Ακόμα στον πίνακα δίνονται και οι αποκλίσεις των δύο τιμών ως ποσοστό επί τοις εκατό. Οι μεταβλητές που αναφέρονται στη μηνιαία βροχόπτωση, κανονικά δεν αφορούν το μοντέλο επιμερισμού, αλλά για λόγους πληρότητας έχουν περιληφθεί και αυτές στους πίνακες.

Προκειμένου να πραγματοποιήσουμε ένα στατιστικό έλεγχο για την ισότητα των θεωρητικών και εμπειρικών μέσων τιμών θα θεωρήσουμε ότι για οποιαδήποτε μεταβλητή αναφοράς  $X$ , με θεωρητική μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$ , η στατιστιστική συνάρτηση

$$\frac{X_{\mu} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

όπου  $X_{\mu}$  η δειγματική μέση τιμή και  $n$  το μέγεθος του δείγματος, ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Κατά συνέπεια, με ένα έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, δεν θα απορρίψουμε την υπόθεση ότι η εμπειρική μέση τιμή είναι ίση με την αντίστοιχη θεωρητική, αν για τη σχετική απόκλιση των δύο τιμών (ήτοι την  $(x_{\mu}-\mu)/\mu$ ) ισχύει η σχέση

$$- 1.96 \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{x_{\mu} - \mu}{\mu} \leq 1.96 \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Στον πίνακα 3.2 παρατηρούμε ότι για τις μεταβλητές που αναφέρονται στη χρονική βάση του επεισοδίου βροχής, οι οποίες έχουν συντελεστή διασποράς ( $\sigma/\mu$ ) περίπου ίσο με 1, η μέγιστη σχετική απόκλιση μέσων τιμών είναι 7.1% (η τιμή αυτή αναφέρεται στο χρόνο διακοπής για το Σταθμό Χάλαρα και για το μήνα Απρίλιο). Για την περίπτωση αυτή τα όρια της παραπάνω ανισότητας είναι

$$\pm 1.96 \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1.96 * \frac{87.39}{83.67} * \frac{1}{\sqrt{371}} = 10.63\%$$

και κατά συνέπεια η υπόθεση της ισότητας των δύο τιμών γίνεται αποδεκτή. Εννοείται ότι κατά μείζονα λόγο αυτό ισχύει και για όλες τις άλλες μεταβλητές της ίδιας ομάδας, που εμφανίζουν μικρότερες σχετικές αποκλίσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2  
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ  
ΜΕ ΤΙΣ ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΙΚΩΝ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Υδρολογική μεταβλητή		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΧΑΛΑΡΑ		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΤΡΙΒΟΥΝΟ	
		Απρίλιος	Μάιος	Απρίλιος	Μάιος
<u>Μηνιαία Βροχόπτωση</u>					
Αριθ. επεισοδίων					
Βροχής ανα μήνα	μ <sub>η</sub>	7.53	8.23	9.87	8.51
		7.42	8.38	10.18	8.42
		-1.5%	1.8%	1.0%	-1.1%
Μην. ύψος βροχής	μ <sub>ς</sub>	52.92	67.57	67.15	71.32
		53.31	71.73	66.74	70.92
		0.7%	6.2%	-0.6%	-0.6%
Μην. διάρκ. βροχής	μ <sub>υ</sub>	81.71	70.86	96.57	81.03
		81.58	71.88	97.52	80.02
		-0.2%	1.4%	1.0%	-1.2%
-----					
<u>Επεισόδιο βροχής</u>					
Χρόνος διαδοχής	μ <sub>γ</sub>	95.51	90.39	72.91	87.41
		100.64	90.48	70.09	88.33
		5.4%	0.1%	-3.9%	1.1%
Διάρκεια βροχής	μ <sub>δ</sub>	10.84	8.61	9.78	9.52
		10.99	8.57	9.57	9.50
		1.4%	-0.5%	-2.1%	-0.2%
Χρόνος διακοπής	μ <sub>β</sub>	83.67	81.78	63.13	77.89
		89.65	81.90	60.52	78.83
		7.1%	0.1%	-4.1%	1.2%
Ύψος επεισ.βροχής	μ <sub>η</sub>	7.02	8.21	6.80	8.38
		7.18	8.56	6.55	8.42
		2.3%	4.3%	-3.7%	0.5%
Μετασχημ. ύψος					
επεισοδίου βροχής	μ <sub>φ</sub>	0.575	0.938	0.562	0.663
(διάρκεια > 1 h)		0.591	0.980	0.569	0.665
		2.8%	4.5%	1.2%	0.3%
-----					
<u>Ωριαία βροχόπτωση</u> (τιμές για τα επεισόδια βροχής με διάρκεια >1h)					
Ωριαίο ύψος βροχής	μ <sub>χ</sub>	0.635	0.942	0.658	0.864
		0.641	0.982	0.657	0.853
		0.9%	4.2%	-0.2%	-1.3%
Μετασχηματισμένο					
ωριαίο ύψος βροχής	μ <sub>γ</sub>	0.575	0.938	0.562	0.663
		0.582	0.982	0.559	0.656
		1.2%	4.7%	-0.5%	-1.1%
Ομογενοποιημένο					
ωριαίο ύψος βροχής	μ <sub>ζ</sub>	0.575	0.938	0.562	0.663
		0.582	0.957	0.556	0.656
		1.2%	2.0%	-1.1%	-1.1%
-----					
Σημείωση: Η πρώτη σειρά αντιστοιχεί στις θεωρητικές τιμές των παραμέτρων, η δεύτερη στις εμπειρικές τιμές και η τρίτη δίνει την ποσοστιαία απόκλιση των δύο τιμών.					

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3  
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΤΥΠΙΚΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΝ ΤΩΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ  
ΜΕ ΤΙΣ ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΤΥΠΙΚΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΙΚΩΝ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Υδρολογική μεταβλητή		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΧΑΛΑΡΑ		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΤΡΙΒΟΥΝΟ	
		Απρίλιος	Μάιος	Απρίλιος	Μάιος
<u>Μηνιαία Βροχόπτωση</u>					
Αριθ. επεισοδίων					
Βροχής ανα μήνα	$\sigma_N$	2.54	2.67	2.88	2.68
		2.54	2.55	3.08	2.71
		0.0%	-4.5%	6.9%	1.1%
Μην. ύψος βροχής	$\sigma_S$	29.57	36.83	30.83	33.85
		30.70	33.54	30.78	32.24
		3.8%	-8.9%	-0.2%	-4.8%
Μην. διάρκ. βροχής	$\sigma_U$	41.03	34.11	42.28	38.15
		48.21	31.77	38.82	39.02
		17.5%	-6.9%	-8.2%	2.3%
-----					
<u>Επεισόδιο βροχής</u>					
Χρόνος διαδοχής	$\sigma_V$	88.51	84.39	66.91	80.41
		91.57	81.59	69.56	79.58
		3.5%	-3.3%	4.0%	-1.0%
Διάρκεια βροχής	$\sigma_D$	11.07	8.76	10.03	9.71
		11.98	8.72	9.50	8.92
		8.2%	-0.5%	-5.3%	-8.1%
Χρόνος διακοπής	$\sigma_B$	87.39	83.65	65.70	79.46
		90.56	81.30	68.22	78.98
		3.6%	-2.8%	3.9%	-0.6%
Ύψος επεισ.βροχής	$\sigma_H$	8.58	10.29	7.56	8.67
		8.79	9.90	7.01	7.69
		2.4%	-3.8%	-7.3%	-11.3%
Μετασχημ. ύψος					
επεισοδίου βροχής	$\sigma_\Phi$	0.326	0.438	0.236	0.254
(διάρκεια > 1 h)		0.342	0.451	0.238	0.238
		4.9%	3.0%	0.8%	-6.3%
-----					
<u>Ωριαία βροχόπτωση (τιμές για τα επεισόδια βροχής με διάρκεια &gt;1h)</u>					
Ωριαίο ύψος βροχής	$\sigma_X$	0.975	1.612	1.083	1.332
		0.970	1.543	1.050	1.361
		-0.5%	-4.3%	-3.0%	2.2%
Μετασχηματισμένο					
ωριαίο ύψος βροχής	$\sigma_Y$	0.881	1.612	0.908	0.990
		0.877	1.543	0.884	1.023
		-0.5%	-4.3%	-2.6%	3.3%
Ομογενοποιημένο					
ωριαίο ύψος βροχής	$\sigma_Z$	0.872	1.549	0.890	0.990
		0.881	1.485	0.855	1.023
		1.0%	-4.1%	-3.9%	3.3%
Σημείωση: Η πρώτη σειρά αντιστοιχεί στις θεωρητικές τιμές των παραμέτρων, η δεύτερη στις εμπειρικές τιμές και η τρίτη δίνει την ποσοστιαία απόκλιση των δύο τιμών.					



Αντίστοιχα, για τις μεταβλητές που αναφέρονται στην ωριαία χρονική βάση, και που έχουν συντελεστή διασποράς περίπου ίσο με  $\sqrt{2}$ , η μέγιστη απόκλιση μέσων τιμών φτάνει το 4.7% (η τιμή αυτή αναφέρεται στο μετασχηματισμένο ωριαίο ύψος βροχής για το σταθμό Χάλαρα και για το μήνα Μάιο). Για την περίπτωση αυτή τα όρια της παραπάνω ανισότητας είναι

$$\pm 1.96 \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1.96 * \frac{1.612}{0.938} * \frac{1}{\sqrt{3528}} = 5.67\%$$

και κατά συνέπεια η υπόθεση της ισότητας των δύο τιμών γίνεται αποδεκτή. Και πάλι αυτό ισχύει κατά μείζονα λόγο και για όλες τις άλλες μεταβλητές της ίδιας ομάδας, που εμφανίζουν μικρότερες σχετικές αποκλίσεις.

Αντίστοιχοι έλεγχοι για την ισότητα των τυπικών αποκλίσεων, με την κλασική στατιστική μεθοδολογία, δεν θα είχαν πρακτική αξία: Στην περίπτωση μεταβλητών με κατανομή γάμα, όπως οι μεταβλητές που εξετάζονται εδώ, τα όρια εμπιστοσύνης της δειγματικής διασποράς είναι σαφώς διαφορετικά από τα αντίστοιχα που δίνονται για την κανονική κατανομή.<sup>6</sup> Όμως μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι ποσοστιαίες αποκλίσεις που εμφανίζουν οι εμπειρικές τυπικές αποκλίσεις από τις αντίστοιχες θεωρητικές, είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις αντίστοιχες αποκλίσεις των μέσων τιμών. Παίρνοντας υπόψη ότι το διάστημα εμπιστοσύνης της τυπικής απόκλισης είναι ευρύτερο από το αντίστοιχο διάστημα της μέσης τιμής (βλ. υποπαράγραφο 2.9.6 και σχήματα 2.18 και 2.19, όπου τα διαστήματα εμπιστοσύνης υπολογίστηκαν με μεθόδους Monte-Carlo), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και η υποθέση για την ισότητα των τυπικών αποκλίσεων δεν απορρίπτεται.

Ένα άλλο αξιοπρόσεκτο συμπέρασμα, που προκύπτει από την εξέταση των πινάκων 3.2 και 3.3, είναι ότι οι εμφανιζόμενες αποκλίσεις θεωρητικών και εμπειρικών τιμών έχουν εναλλασσόμενα πρόσημα και μεγέθη. Αυτό είναι μια σαφής ένδειξη ότι οι αποκλίσεις αυτές είναι τυχαίες, και ότι το μοντέλο δεν εισάγει συστηματικό σφάλμα ως προς τη διατήρηση των ροών α' και β' τάξης.

Εκτός από την παραπάνω διερεύνηση, που αφορά τη διατήρηση περιθώριων ροών, παρέχουμε και μερικά στοιχεία σχετικά με τη διατήρηση των δεσμευμένων ροών του ύψους βροχής. Στα σχήματα 3.6 και 3.7 δίνονται η δεσμευμένη μέση τιμή και η δεσμευμένη τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, του ύψους επεισοδίου βροχής, συναρτήσεως της διάρκειας βροχής. Στα σχήματα 3.9 και 3.10 δίνονται η δεσμευμένη μέση τιμή και ο δεσμευμένος συντελεστής διασποράς, αντίστοιχα, του ωριαίου ύψους βροχής συναρτήσεως της διάρκειας βροχής. Σε όλα τα παραπάνω σχήματα οι θεωρητικά προβλεπόμενες τιμές υπολογίστηκαν από τις αντίστοιχες σχέ-

6. Αντίθετα, τα αντίστοιχα όρια εμπιστοσύνης της δειγματικής μέσης τιμής, είναι κατά προσέγγιση ίσα με αυτά που δίνονται για την κανονική κατανομή, και επομένως οι παραπάνω έλεγχοι έχουν νόημα.

σεις του κεφαλαίου 2, και φαίνονται με συνεχείς γραμμές στα σχήματα. Οι αντίστοιχες εμπειρικές τιμές υπολογίστηκαν από υποσύνολα των συνθετικών δειγμάτων (δειγματικές κλάσεις)<sup>7</sup> με καθορισμένα όρια μεταβολής της διάρκειας (βλ. και υποπαράγραφο 2.8.1). Τα σχήματα αυτά δείχνουν ότι υπάρχει συμφωνία των εμπειρικών τιμών με τις θεωρητικές. Τέλος το ίδιο συμπέρασμα βγαίνει και από το σχήμα 3.11, που αναφέρεται στην επίδραση της χρονικής θέσης στα στατιστικά χαρακτηριστικά του ωριαίου ύψους βροχής.

### 3.3.3. Σύγκριση συναρτήσεων κατανομής

Η σύγκριση των εμπειρικών συναρτήσεων κατανομής των διάφορων υδρολογικών μεταβλητών που επεξεργάζεται το μοντέλο, με τις αντίστοιχες θεωρητικές, γίνεται με τη βοήθεια μιας σειράς από σχήματα. Σε καθένα από αυτά απεικονίζεται (α) η θεωρητική συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής, όπως προέκυψε από την ανάλυση του κεφαλαίου 2, (β) η εμπειρική συνάρτηση κατανομής, όπως προέκυψε από το αντίστοιχο συνθετικό δείγμα, και (γ) τα όρια του στατιστικού ελέγχου Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ, για την κατανομή που μελετάται. Το τελευταίο στοιχείο προσθέτει αντικειμενικότητα στις συγκρίσεις των κατανομών που γίνονται. Τα όρια αυτά αντιστοιχούν συνήθως σε ένα αυξημένο επίπεδο σημαντικότητας (10%). Αναλυτικά:

1. Το σχήμα 3.3 αναφέρεται στην κατανομή του χρόνου διαδοχής (V). Τη μεταβλητή αυτή την επεξεργάζεται άμεσα το μοντέλο επιμερισμού, και χωρίς καμιά ουσιαστική διαφοροποίηση στη βασική διαδικασία επιμερισμού. Όπως προκύπτει από το σχήμα, υπάρχει συμφωνία της εμπειρικής κατανομής με τη θεωρητική.
2. Το σχήμα 3.4 αναφέρεται στην κατανομή της διάρκειας βροχής (D). Και αυτή τη μεταβλητή την επεξεργάζεται άμεσα το μοντέλο, αλλά με μια διαφοροποίηση, που έχει συζητηθεί στην υποπαράγραφο 3.2.2 (αφορά την περιοριστική σχέση μεταξύ διάρκειας και χρόνου διαδοχής). Από το σχήμα προκύπτει ότι υπάρχει συμφωνία εμπειρικής και θεωρητικής κατανομής.
3. Το σχήμα 3.5 αναφέρεται στην κατανομή του χρόνου διαδοχής (B). Η κατανομή αυτή απέχει αρκετά από την κατανομή γάμα, όπως έχει φανεί στην διερεύνηση της παραγράφου

7. Χρησιμοποιήθηκαν 6 δειγματικές κλάσεις, από τις οποίες η πρώτη περιλαμβάνει τα επεισόδια με διάρκεια 1 ώρα.

2.7. Αυτή τη μεταβλητή δεν τη χειρίζεται άμεσα το μοντέλο. Οι τιμές της προκύπτουν έμμεσα, από τις τιμές των  $V$  και  $D$ . Έτσι η σύγκριση της θεωρητικής και εμπειρικής κατανομής της αποτελεί ένα έμμεσο έλεγχο του μοντέλου. Και ο έλεγχος αυτός αποβαίνει θετικός, όπως φαίνεται από το σχήμα.

4. Το σχήμα 3.8 αναφέρεται στην κατανομή του ύψους επεισοδίου βροχής ( $H$ ). Το μοντέλο χειρίζεται άμεσα αυτή τη μεταβλητή, και καθορίζει την κατανομή της παίρνοντας υπόψη και τη διάρκεια του επεισοδίου βροχής. Γι' αυτό και το σχήμα αναφέρεται στη δεσμευμένη κατανομή της  $H$  για δεδομένη διάρκεια. Οι εμπειρικές κατανομές του σχήματος αναφέρονται στις διάφορες δειγματικές κλάσεις και οι θεωρητικές (γάμα) αντιστοιχούν στην δεσμευμένη τιμή του ύψους βροχής για διάρκεια ίση με τη μέση διάρκεια της κλάσης. Το σχήμα δείχνει ότι υπάρχει συμφωνία θεωρητικών και εμπειρικών κατανομών.<sup>8</sup>
5. Το σχήμα 3.12 αναφέρεται στην κατανομή του ωριαίου ύψους βροχής. Το μοντέλο χειρίζεται άμεσα το ωριαίο ύψος βροχής ( $X$ ), και καθορίζει την κατανομή του με βάση τη διάρκεια βροχής και τη σχετική χρονική θέση μέσα στο επεισόδιο. Αντί της μεταβλητής  $X$  εξετάζεται η μεταβλητή  $Z$  (ομογενοποιημένο ωριαίο ύψος βροχής) που η κατανομή της είναι ανεξάρτητη της διάρκειας και της χρονικής θέσης. Κανονικά το μοντέλο χειρίζεται τις μεταβλητές σαν να ακολουθούν κατανομή γάμα. Όμως κατά το χειρισμό του ωριαίου ύψους εφαρμόζεται κάποια διαφοροποίηση ως προς την τυπική διαδικασία, με σκοπό τη διατήρηση της πιθανότητας μηδενισμού, η οποία μπορεί να προκαλέσει και μια μετάθεση της κατανομής προς την κατανομή Weibull (βλ. υποπαράγραφο 3.2.1). Για το λόγο αυτό στις εν λόγω συγκρίσεις κατανομών, ως θεωρητική κατανομή δεν λογίζεται πάντα η κατανομή γάμα, αλλά όποια από τις δύο κατανομές (γάμα ή Weibull) προσαρμόζεται καλύτερα προς την πιθανότητα μηδενισμού, που εν τέλει είναι αυτή η κατανομή που είχε επιλεγεί ως πλέον κατάλληλη κατά τους σχε-

8. Εδώ δεν είναι δυνατό να γίνει αντικειμενικός έλεγχος της προσαρμογής των κατανομών, γιατί οι εμπειρικές συναρτήσεις δεν αναφέρονται σε σταθερή διάρκεια βροχής.

τικούς ελέγχους του κεφαλαίου 2. Σε αυτή την συνάρτηση κατανομής αναφέρονται και τα όρια του ελέγχου Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ του σχήματος (εδώ για επίπεδο 5%).

Το σχήμα δείχνει ότι γενικά η προσαρμογή των εμπειρικών συναρτήσεων προς τις θεωρητικές είναι ικανοποιητική. Ο έλεγχος Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ είναι πάντως σε μια περίπτωση (Χάλαρα-Μάιος) αρνητικός, παρόλο που οπτικά δεν φαίνεται να υπάρχει σημαντική απόκλιση. Αυτό θα πρέπει να αποδοθεί (και έτσι να δικαιολογηθεί η αστοχία του μοντέλου) στην αβεβαιότητα ως προς το ποια είναι η θεωρητική κατανομή: Αν λογίζονταν η κατανομή γάμα ως θεωρητική κατανομή, τότε στο σημείο που εμφανίζεται η ασυνέπεια ο έλεγχος καταλληλότητας θα ήταν θετικός. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι σε κάθε περίπτωση (ακόμα και στην περίπτωση του αρνητικού ελέγχου) παρατηρείται μια καλή προσέγγιση της εμπειρικής προς τη θεωρητική κατανομή, και ότι οι παρατηρούμενες αποκλίσεις είναι μικρότερες από την αβεβαιότητα που υπάρχει στον καθορισμό της θεωρητικής κατανομής.

#### **3.3.4. Σύγκριση συντελεστών αυτοσυσχέτισης**

Σύγκριση των θεωρητικών και εμπειρικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης του ωριαίου ύψους βροχής γίνεται στα σχήματα 3.13 και 3.14. Ειδικότερα το σχήμα 3.13 αφορά τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης 1ης τάξης, των οποίων οι εμπειρικές τιμές προσδιορίστηκαν από τις δειγματικές κλάσεις που περιγράφηκαν και προηγούμενα, στην υποπαράγραφο 3.3.2. Στο σχήμα 3.14 δίνονται και οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης μεγαλύτερης τάξης (μέχρι 10). Εδώ οι εμπειρικές τιμές των συντελεστών υπολογίστηκαν από δύο δειγματικές κλάσεις, ώστε να υπάρχει μεγαλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό των συντελεστών ανώτερης τάξης. Και τα δύο σχήματα δείχνουν καλή προσαρμογή θεωρητικών και εμπειρικών τιμών, πράγμα που σημαίνει ότι το μοντέλο επιμερισμού αναπαριστάνει ικανοποιητικά τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης. Ας σημειωθεί ότι στην πράξη είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί αντικειμενικός στατιστικός έλεγχος της ισότητας θεωρητικών και εμπειρικών συντελεστών, επειδή υπάρχουν δύο βασικά εμπόδια: η μη κανονική κατανομή του ωριαίου ύψους βροχής, και η μεταβολή των συντελεστών αυτοσυσχέτισης με τη διάρκεια βροχής. Γι' αυτό και αρκούμαστε στα υποκειμενικά συμπεράσματα που βγαίνουν από τα παραπάνω σχήματα.

### 3.3.5. Σύγκριση πιθανοτήτων μηδενισμού των τμηματικών μεταβλητών

Οι πιθανότητες μηδενισμού του ωριαίου ύψους βροχής απεικονίζονται και στο σχήμα 3.12, αλλά καλύτερα περιγράφονται από τον πίνακα 3.4. Οι τιμές στην πρώτη σειρά του πίνακα ( $F_0$ ) αναφέρονται στην πιθανότητα που προκύπτει από την συνάρτηση κατανομής γάμα (είναι η τιμή της συνάρτησης στο σημείο  $x=0.05$  mm).<sup>9</sup> Οι αντίστοιχες τιμές στη δεύτερη σειρά του πίνακα ( $p_0$ ) είναι οι επιθυμητές πιθανότητες μηδενισμού και αποτελούν παραμέτρους-εισόδους του μοντέλου (βλ. παράγραφο 2.11). Οι τελευταίες θεωρήθηκαν ίσες με τις τιμές που υπολογίστηκαν για κάθε περίπτωση από τα ιστορικά δείγματα (βλ. πίνακα 2.4). Κανονικά τα αποτελέσματα του μοντέλου επιμερισμού θα έπρεπε να προσεγγίζουν τις τιμές  $F_0$ , αν δεν υπήρχε η διαδικασία διαφοροποίησης που περιγράφηκε στην υποπαραγράφο 3.2.1. Με την λειτουργία αυτής της διαδικασίας περιμένουμε ότι τα αποτελέσματα θα προσεγγίζουν τις τιμές  $p_0$ . Όπως δείχνει ο πίνακας πράγματι οι εμπειρικές πιθανότητες μηδενισμού προσεγγίζουν περισσότερο τις τιμές  $p_0$ . Ο στατιστικός έλεγχος όμως έδειξε ότι μόνο σε δύο από τις τέσσερις περιπτώσεις (Χάλαρα-Μάιος και Τρίβουνο-Απρίλιος) είναι αποδεκτή η υπόθεση της ισότητας της εμπειρικής και θεωρητικής συχνότητας. Η αποτυχία αυτή πρέπει να οφείλεται στις υποθέσεις βάσει των οποίων αναπτύχθηκε ο σχετικός αλγόριθμος (βλ. υποπαραγράφο 3.2.1). Έτσι η διατήρηση της πιθανότητας μηδενισμού για την εξεταζόμενη περίπτωση είναι μόνο προσεγγιστική. Η σχετική διαδικασία που ενσωματώθηκε στο μοντέλο για να εκτελεί τη λειτουργία αυτής της διατήρησης είναι αποτελεσματική σε ανεκτό βαθμό, αλλά όχι απόλυτα.

### 3.3.6. Έλεγχος των μη επιμεριστικών διαδικασιών του μοντέλου

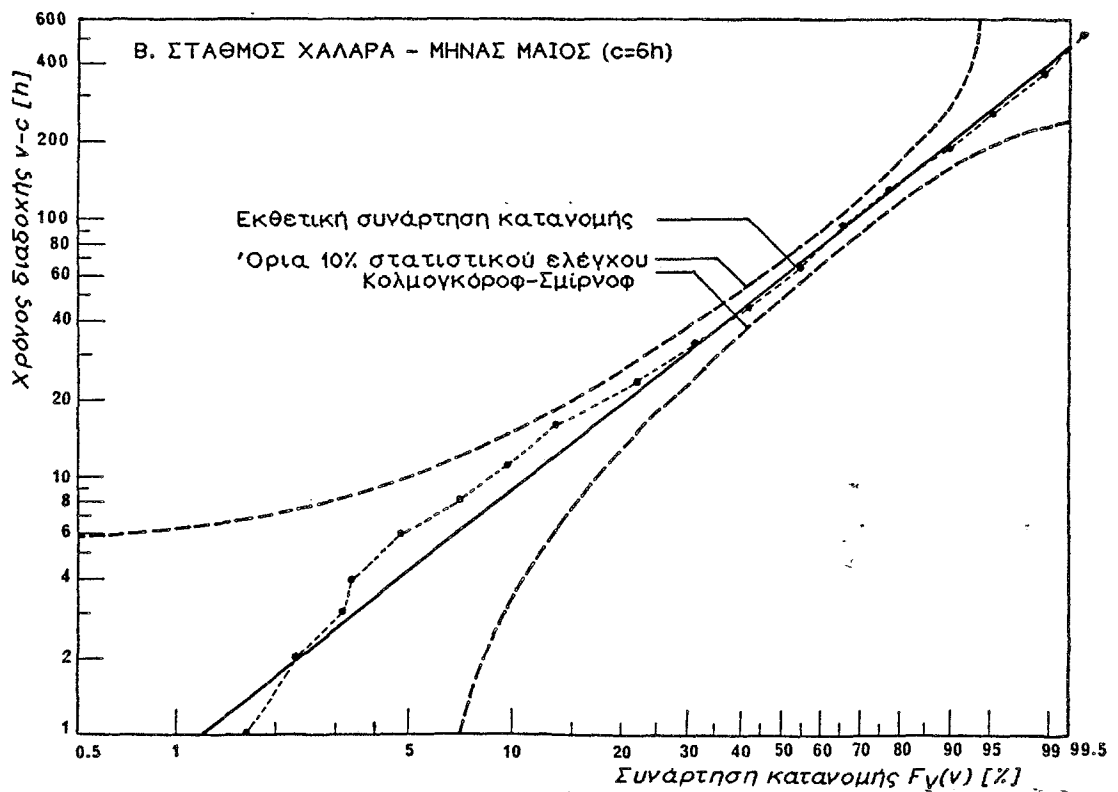
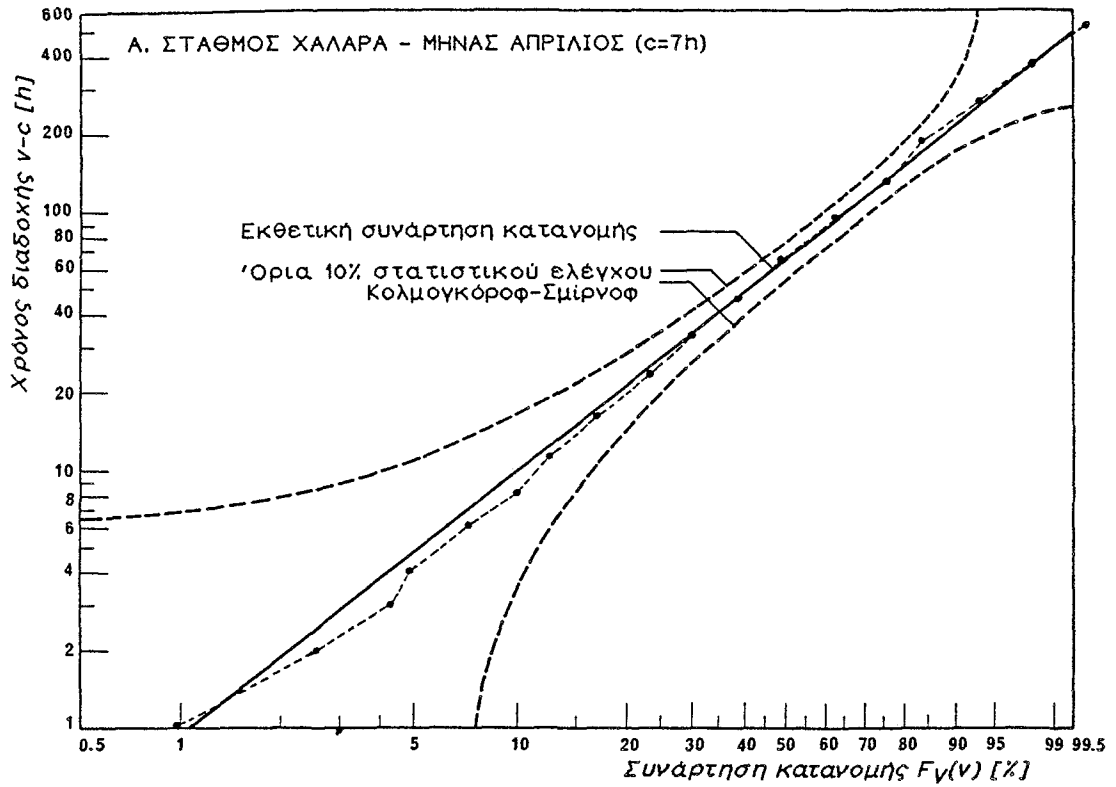
Με τις παρατηρήσεις των προηγούμενων υποπαραγράφων έχει τελειώσει ο έλεγχος του μοντέλου επιμερισμού. Για λόγους πληρότητας ο έλεγχος επεκτάθηκε και στις μη επιμεριστικές διαδικασίες του μοντέλου, βάσει των οποίων παράγονται οι μηνιαίες τιμές των μεταβλητών. Αναλυτικά οι διαδικασίες αυτές έχουν περιγραφεί στην υποπαραγράφο 3.2.4. Ο έλεγχος των διαδικασιών αυτών μπορεί να βασιστεί στη σύγκριση των θεωρητικών και εμπειρικών κατανομών του μηνιαίου ύψους και της μηνιαίας διάρκειας βροχής. Τέτοιες συγκρίσεις γίνονται στα σχήματα 3.15 και 3.16. Σε αυτά φαίνεται σαφώς η συμφωνία θεωρητικών και εμπειρικών κατανομών. Η σύγκριση των ροπών α' και β' τάξης των δύο παραπάνω μετα-

9. Οι τιμές αυτές γενικά διαφέρουν από τις αντίστοιχες θεωρητικές συχνότητες του πίνακα 2.4, σελ. 219, γιατί ορισμένες από τις τελευταίες προκύπτουν από την κατανομή Weibull.

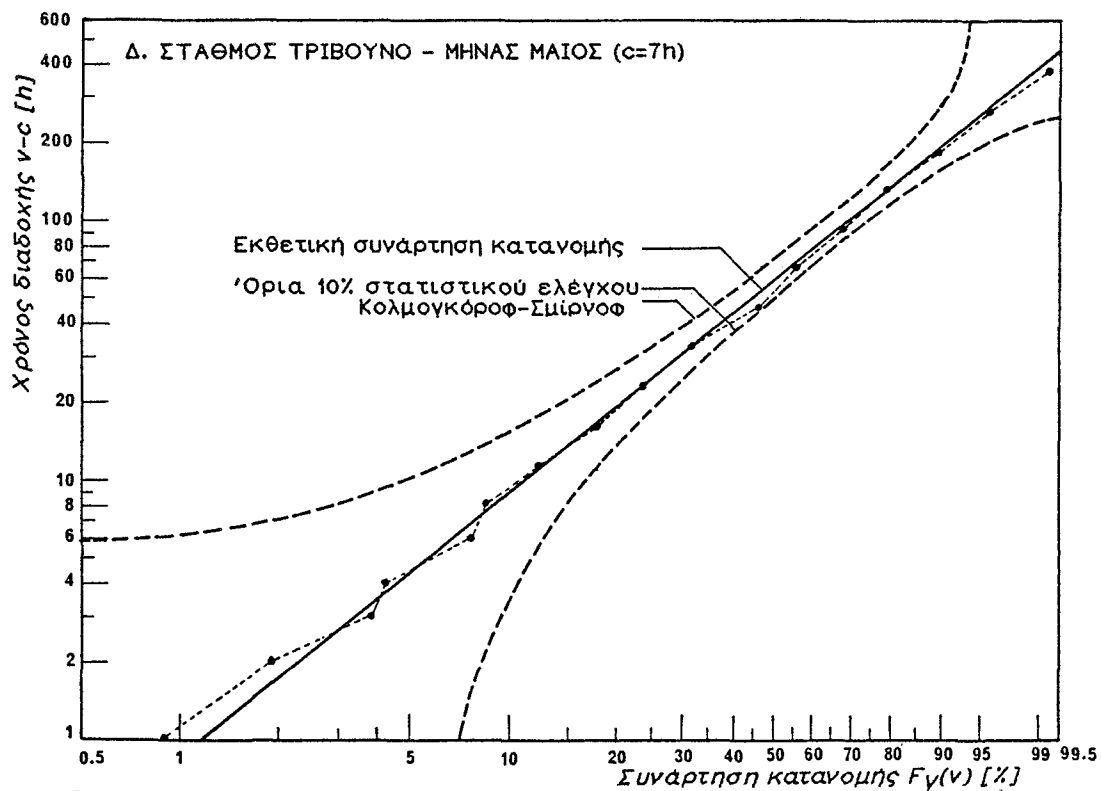
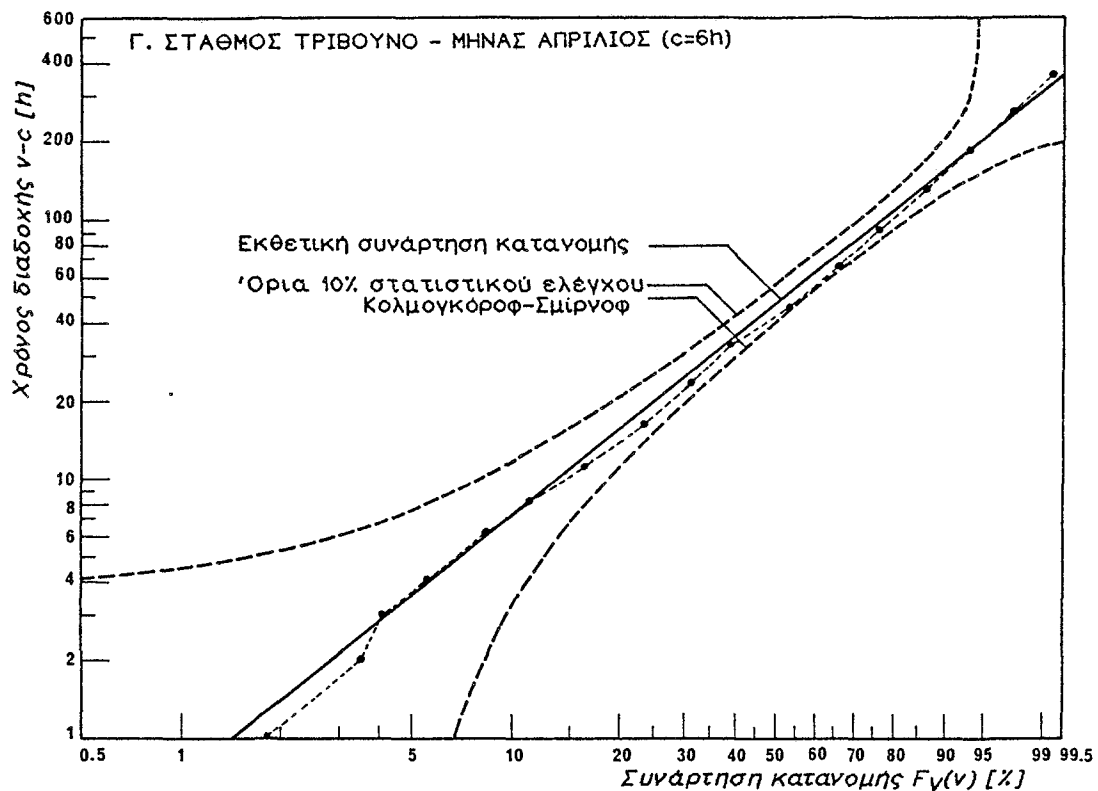
βλητών, καθώς και του αριθμού επεισοδίων ανά μήνα γίνεται στους πίνακες 3.2 και 3.3. Και εδώ ο σχετικός έλεγχος είναι θετικός.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4  
ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΩΡΙΑΙΟΥ ΥΨΟΥΣ ΒΡΟΧΗΣ  
(ΤΙΜΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΙΚΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ)  
ΣΕ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ  
(Διάρκεια βροχής > 1 h)

	ΣΤΑΘΜΟΣ : ΧΑΛΑΡΑ		ΣΤΑΘΜΟΣ : ΤΡΙΒΟΥΝΟ	
	Απρίλιος	Μάιος	Απρίλιος	Μάιος
Πιθανότητα που προβλέ- πεται από τη συνάρτηση κατανομής γάμα $F_0$	0.267	0.264	0.294	0.241
Επιθυμητή συχνότητα όπως καθορίστηκε στο μοντέλο επιμερισμού $P_0$	0.177	0.140	0.213	0.289
Τελική εμπειρική συχνότητα συνθετικού δείγματος	0.201	0.145	0.218	0.255

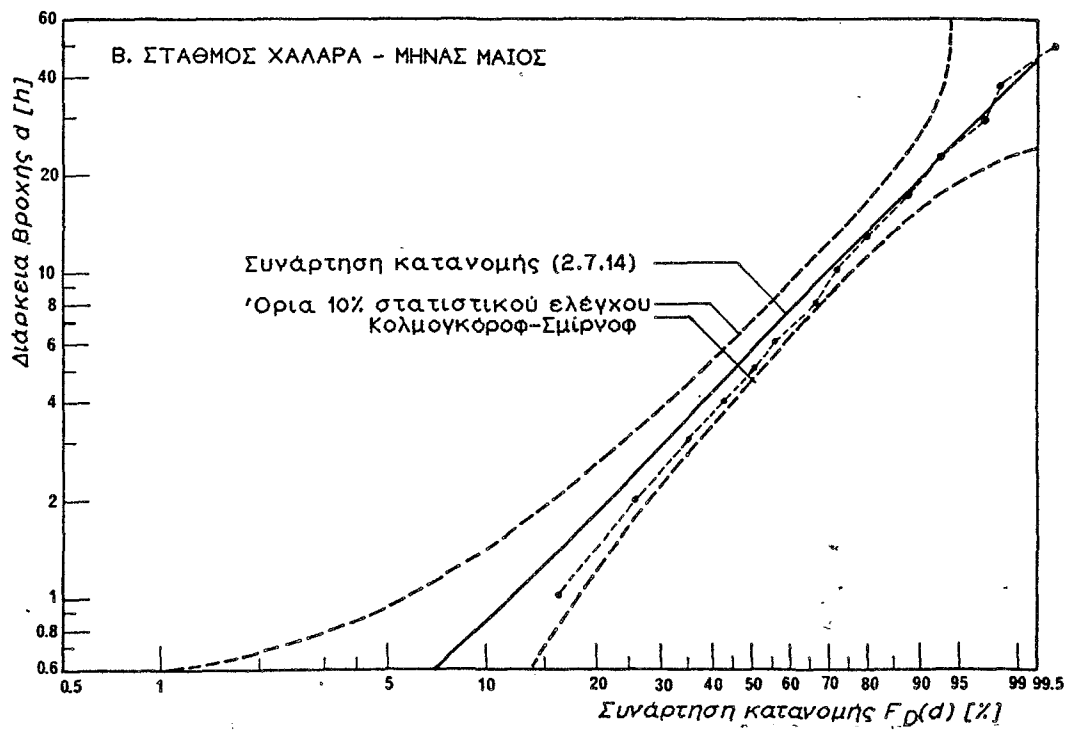
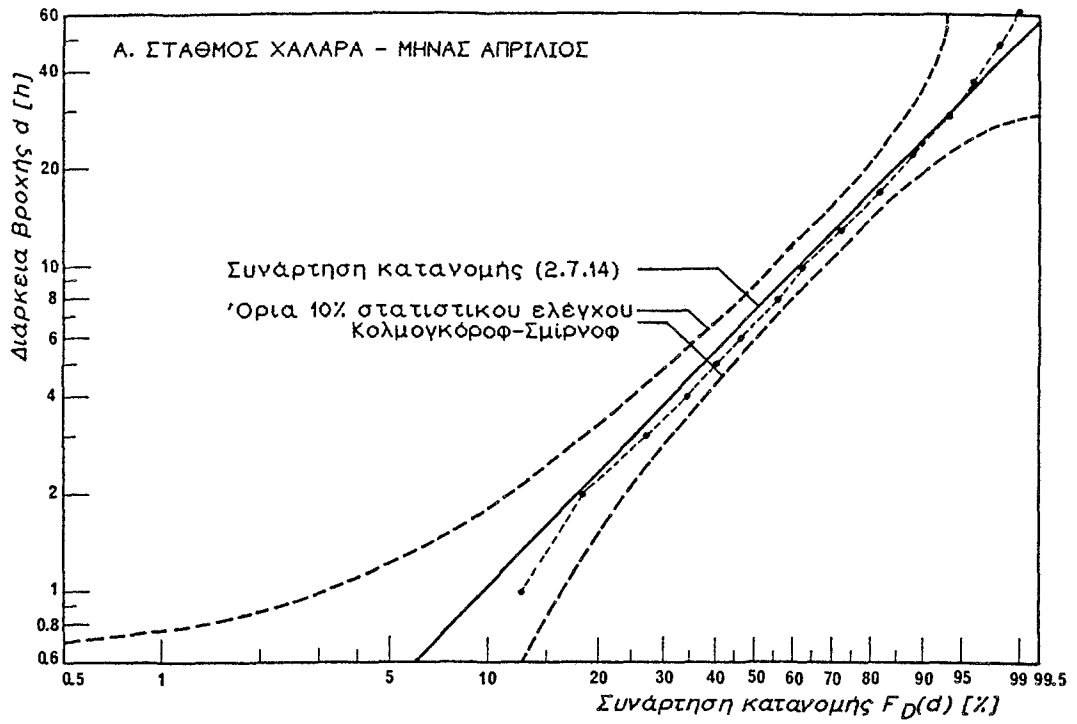


Σχήμα 3.3 : Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διαδοχής,  $\nu$ .  
Τα σημεία (και οι διακεκομμένες γραμμές που τα ενώνουν) αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.

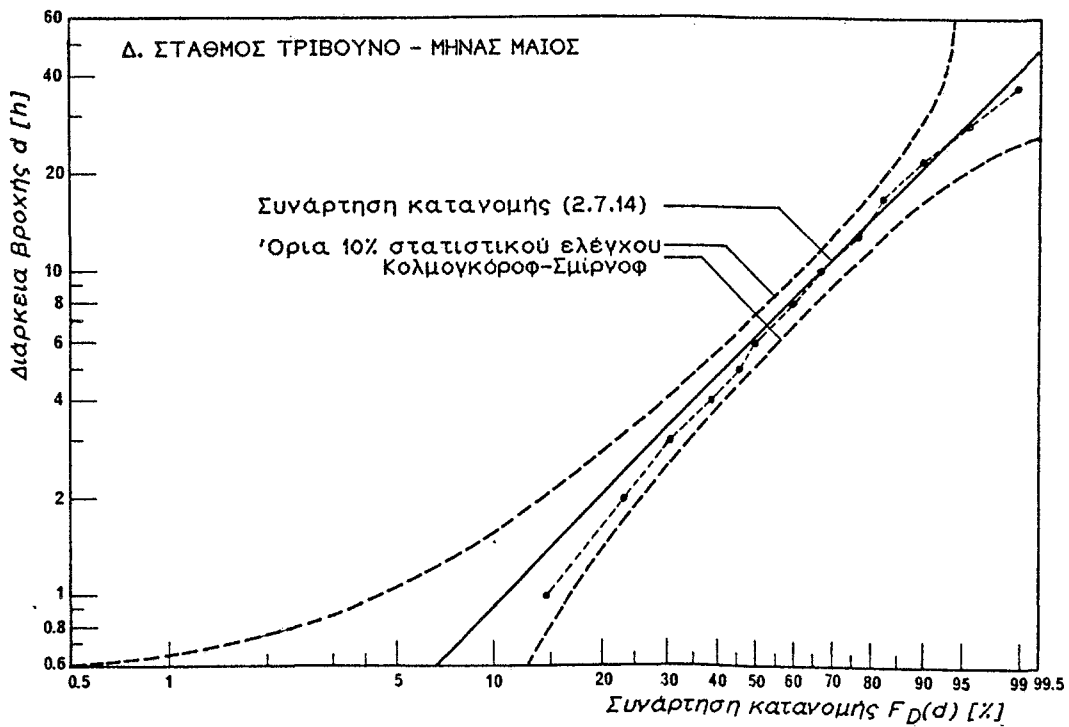
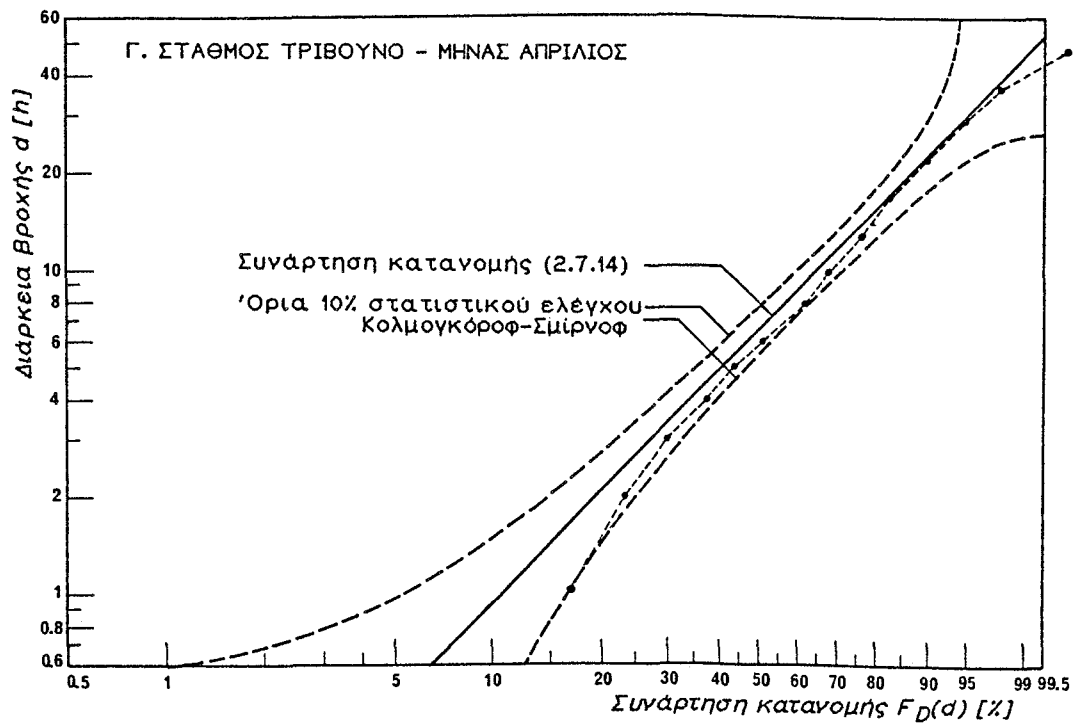


Σχήμα 3.3 (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διαδοχής,  $V$ . Τα σημεία (και οι διακεκομμένες γραμμές που τα ενώνουν) αγτιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.

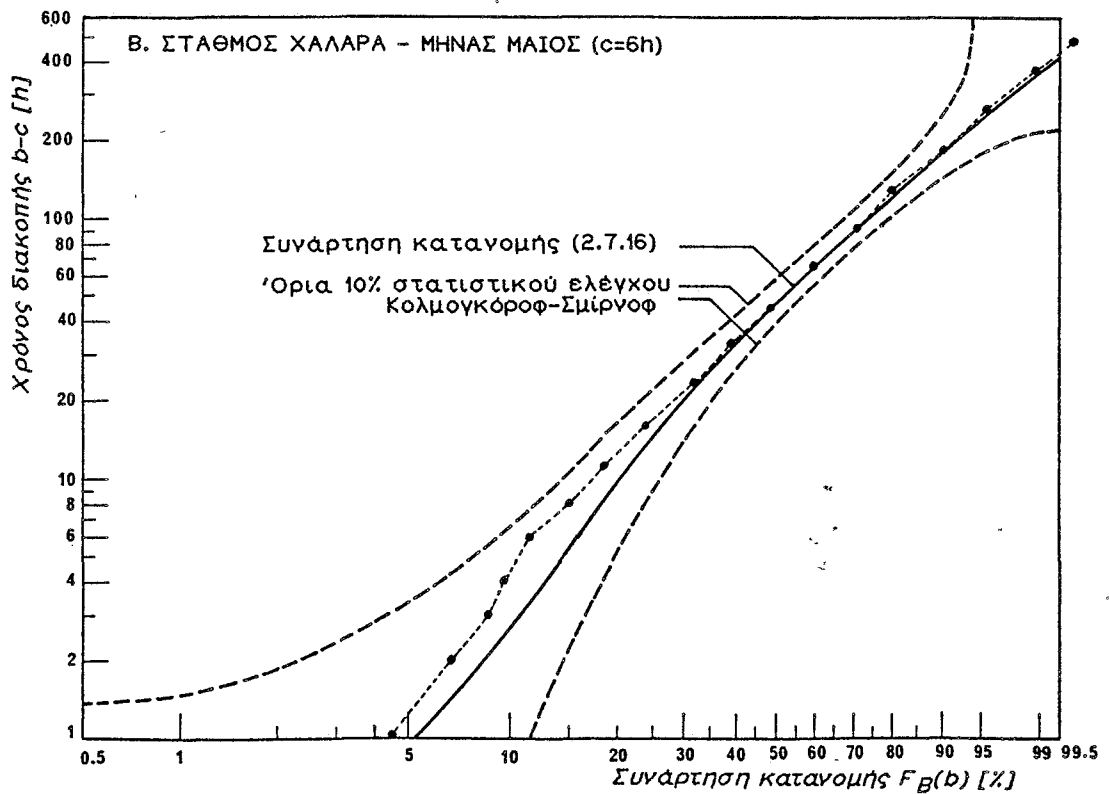
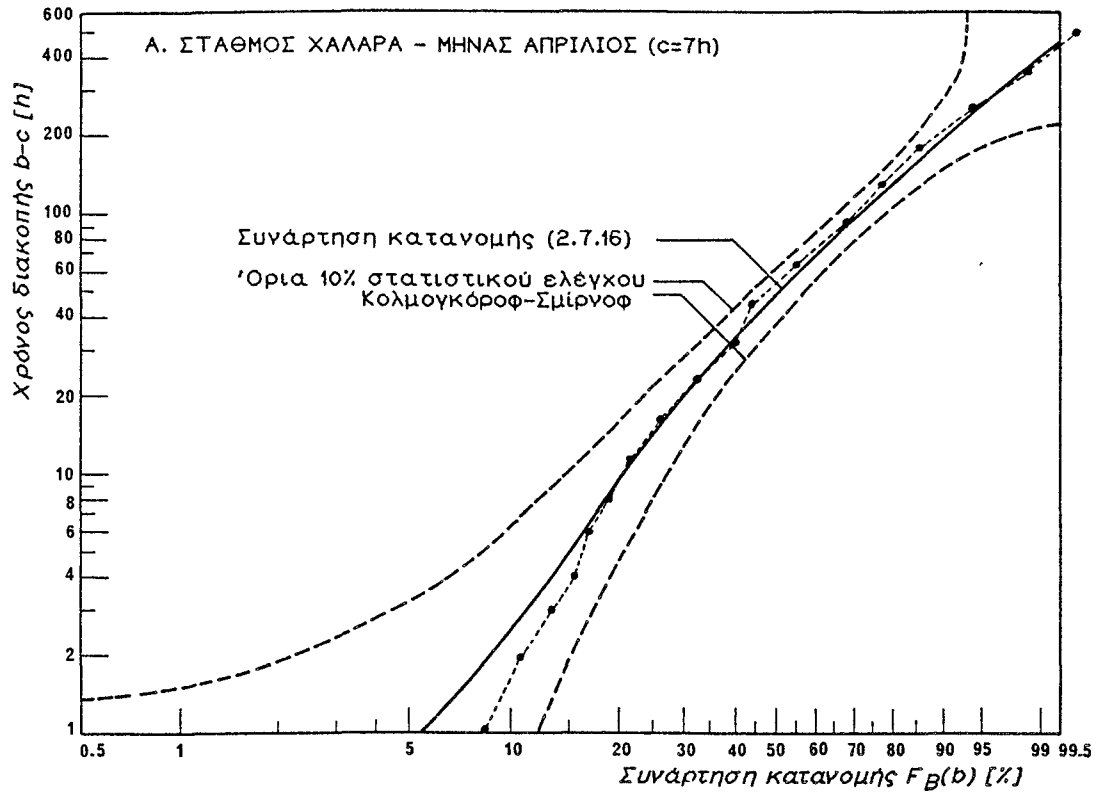




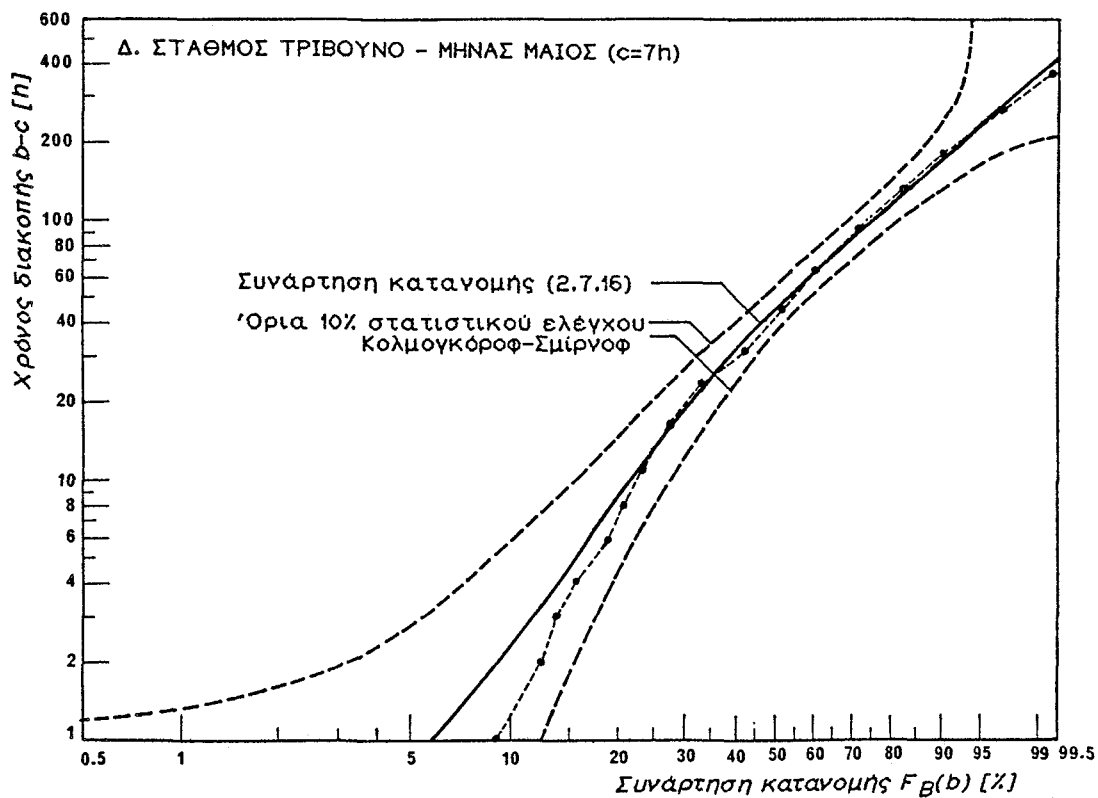
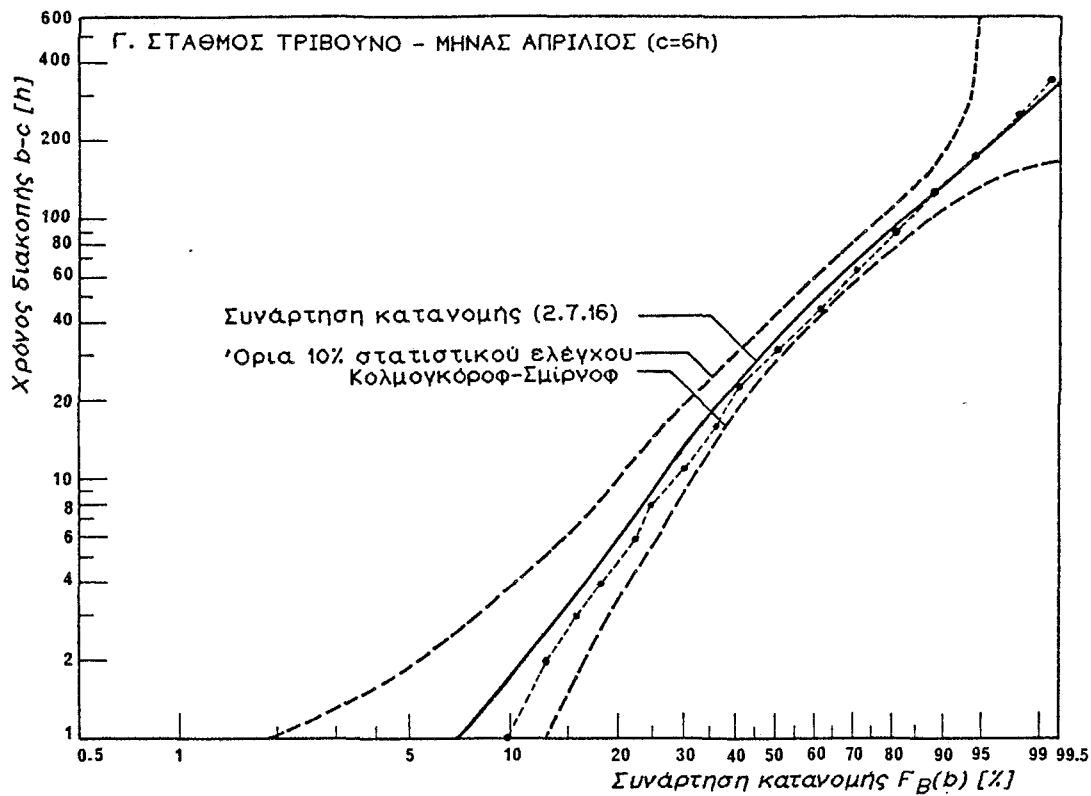
Σχήμα 3.4 : Συνάρτηση κατανομής της διάρκειας βροχής,  $D$ . Τα σημεία (και οι διακεκομμένες γραμμές που τα ενώνουν) αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.



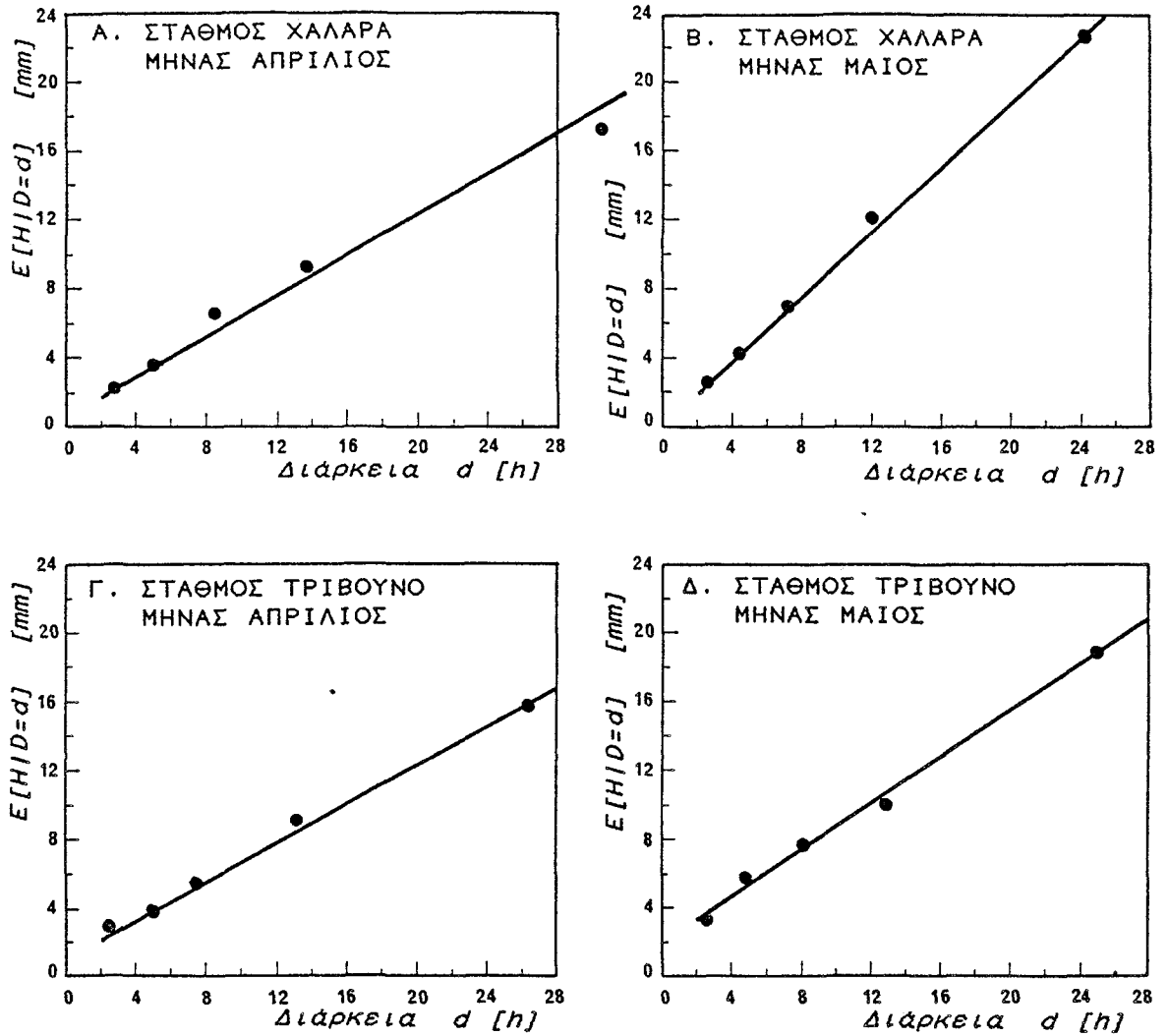
Σχήμα 3.4 (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής της διάρκειας βροχής, D. Τα σημεία (και οι διακεκομμένες γραμμές που τα ενώνουν) αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.



Σχήμα 3.5 : Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διακοπής, Β.  
 Τα σημεία (και οι διακεκομμένες γραμμές που τα ενώνουν) αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.

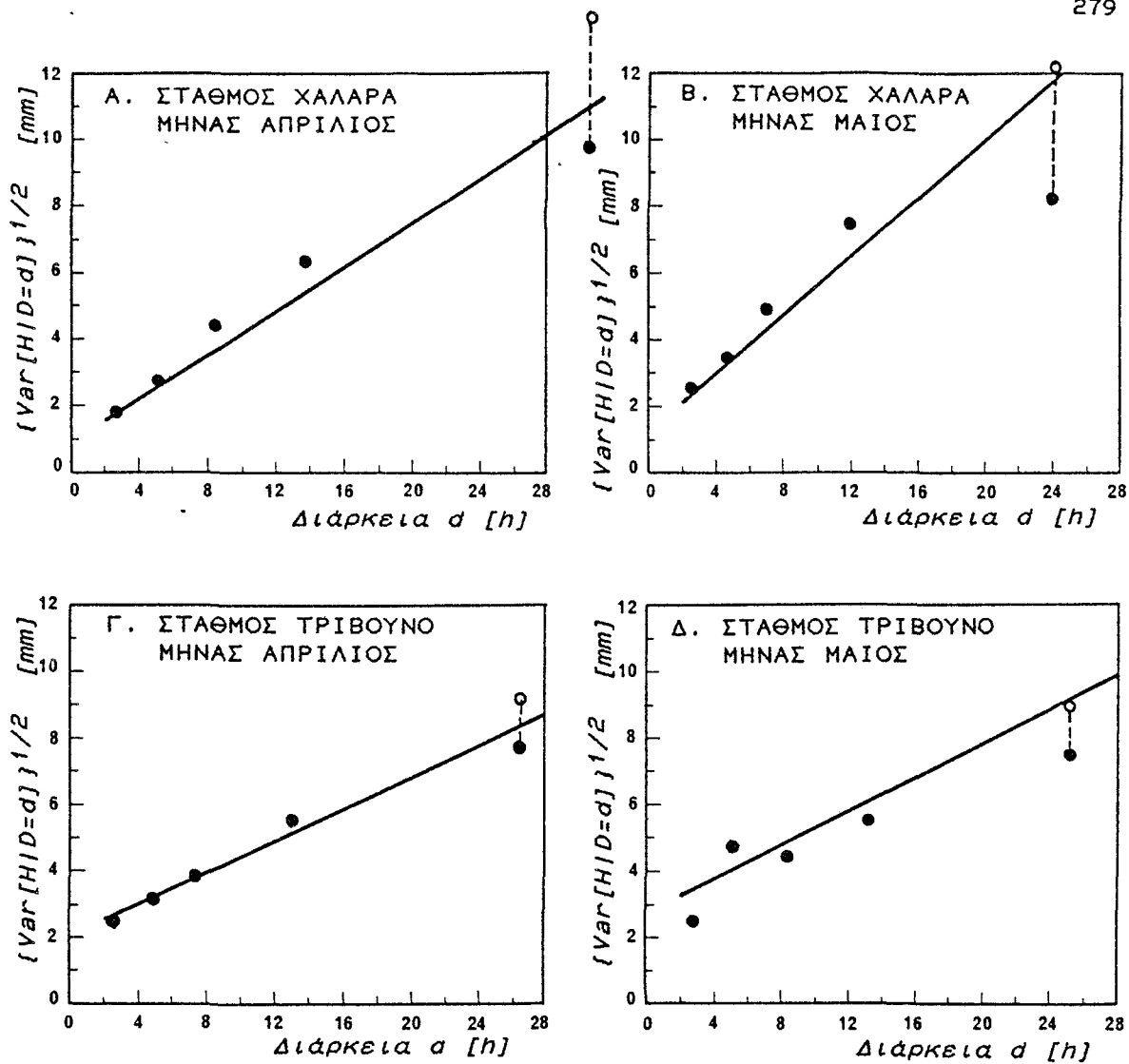


Σχήμα 3.5. (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής του χρόνου διακοπής, Β.  
Τα σημεία (και οι διακεκομμένες γραμμές που τα ενώνουν) αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.



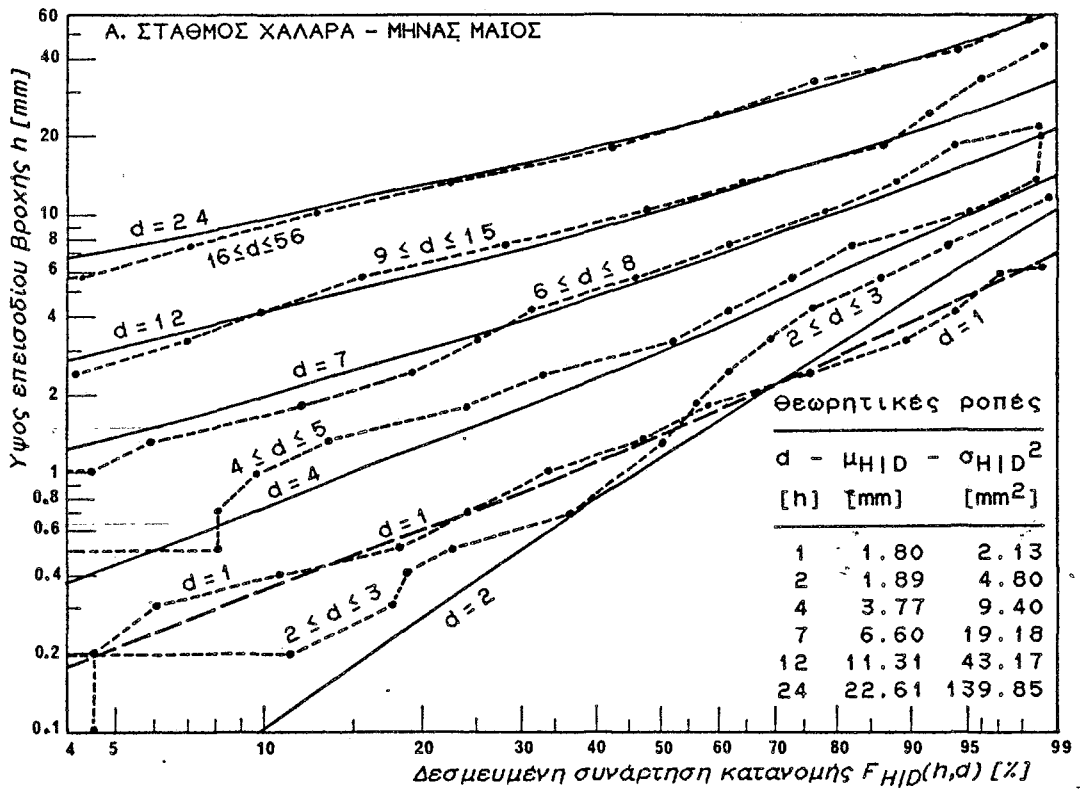
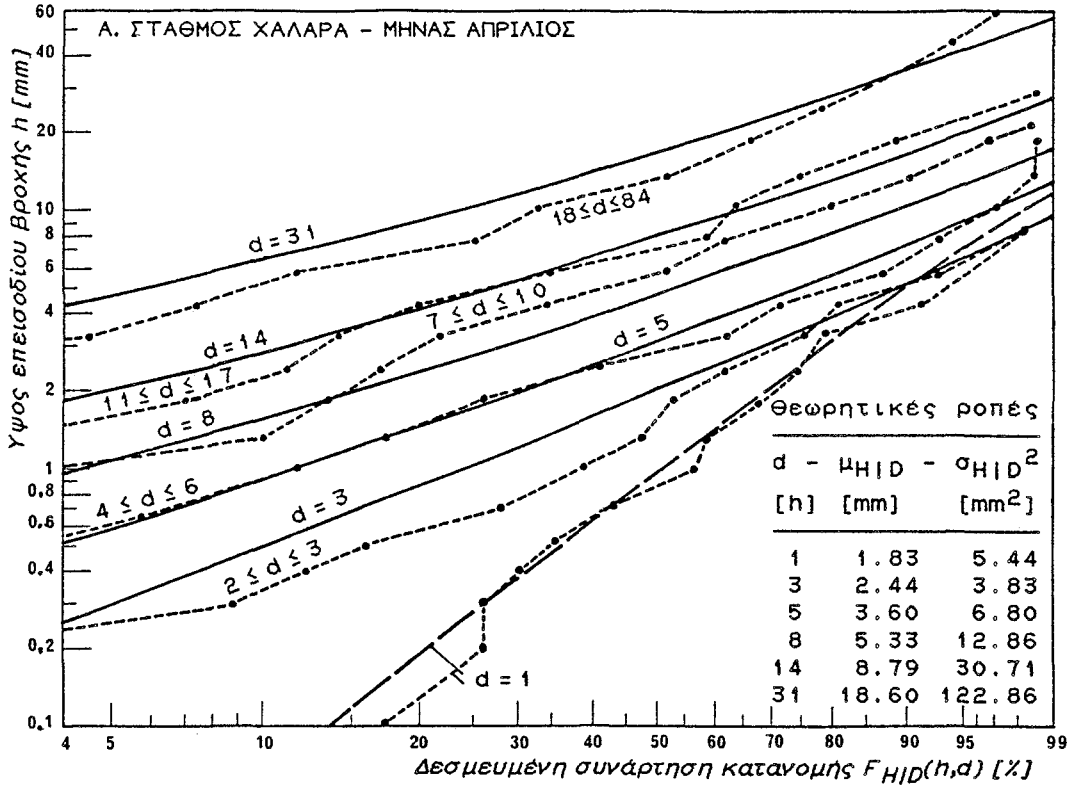
Σχήμα 3.6 : Μεταβολή της μέσης τιμής του ύψους επεισοδίου βροχής συναρτήσει της διάρκειας βροχής.

Τα σημεία αντιστοιχούν στις εμπειρικές τιμές των δειγματικών κλάσεων και οι συνεχείς γραμμές στην εξίσωση (2.8.1).

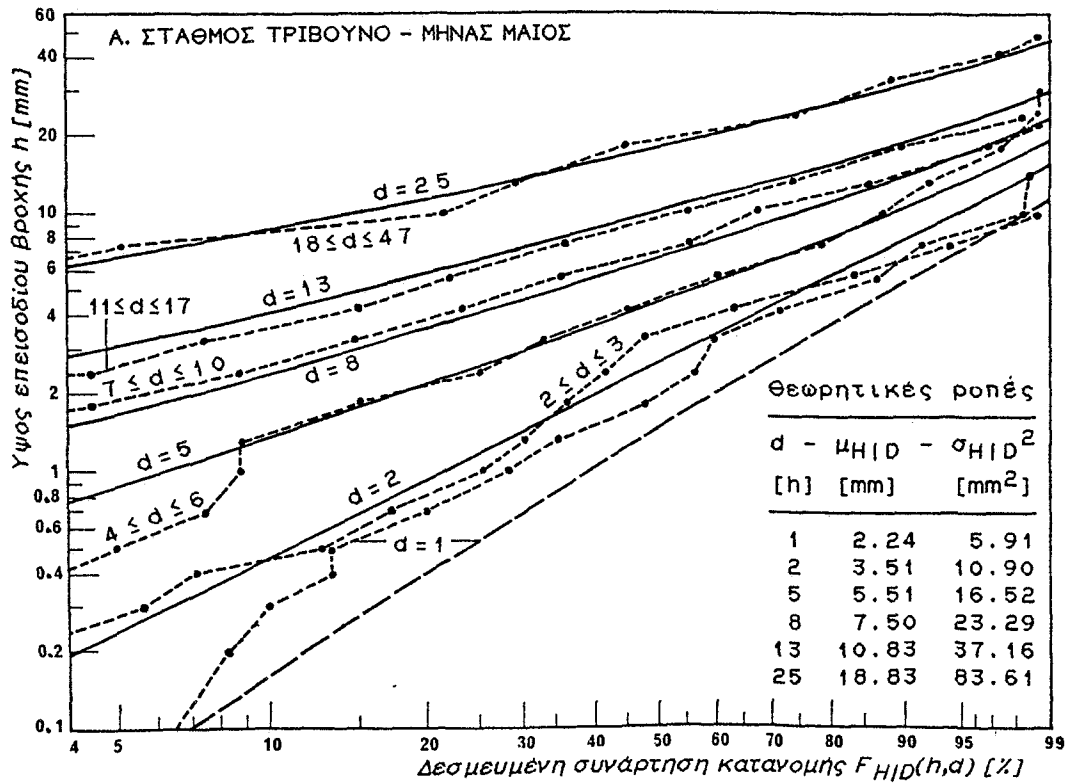
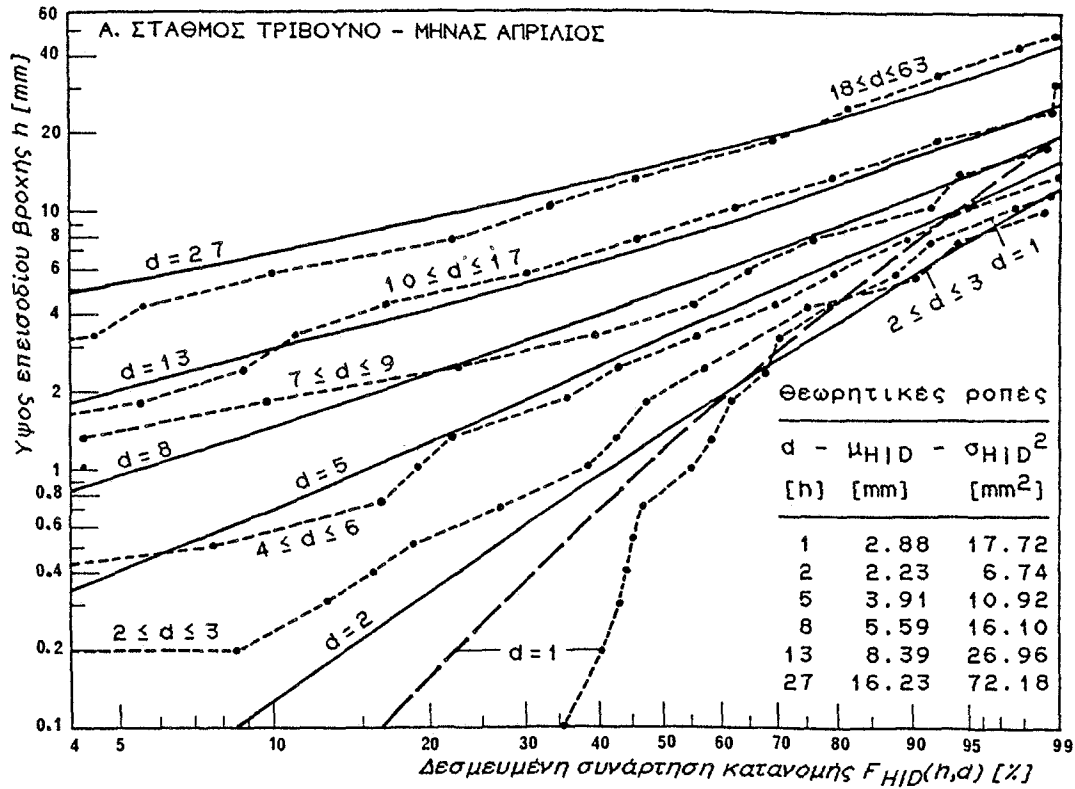


Σχήμα 3.7 : Μεταβολή της τυπικής απόκλισης του ύψους επεισοδίου βροχής συναρτήσει της διάρκειας βροχής.

Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στην εξίσωση (2.8.2) και τα σημεία στις εμπειρικές τιμές των δειγματικών κλάσεων (για επεξήγηση των δύο ομάδων σημείων βλέπε σελ. 181).



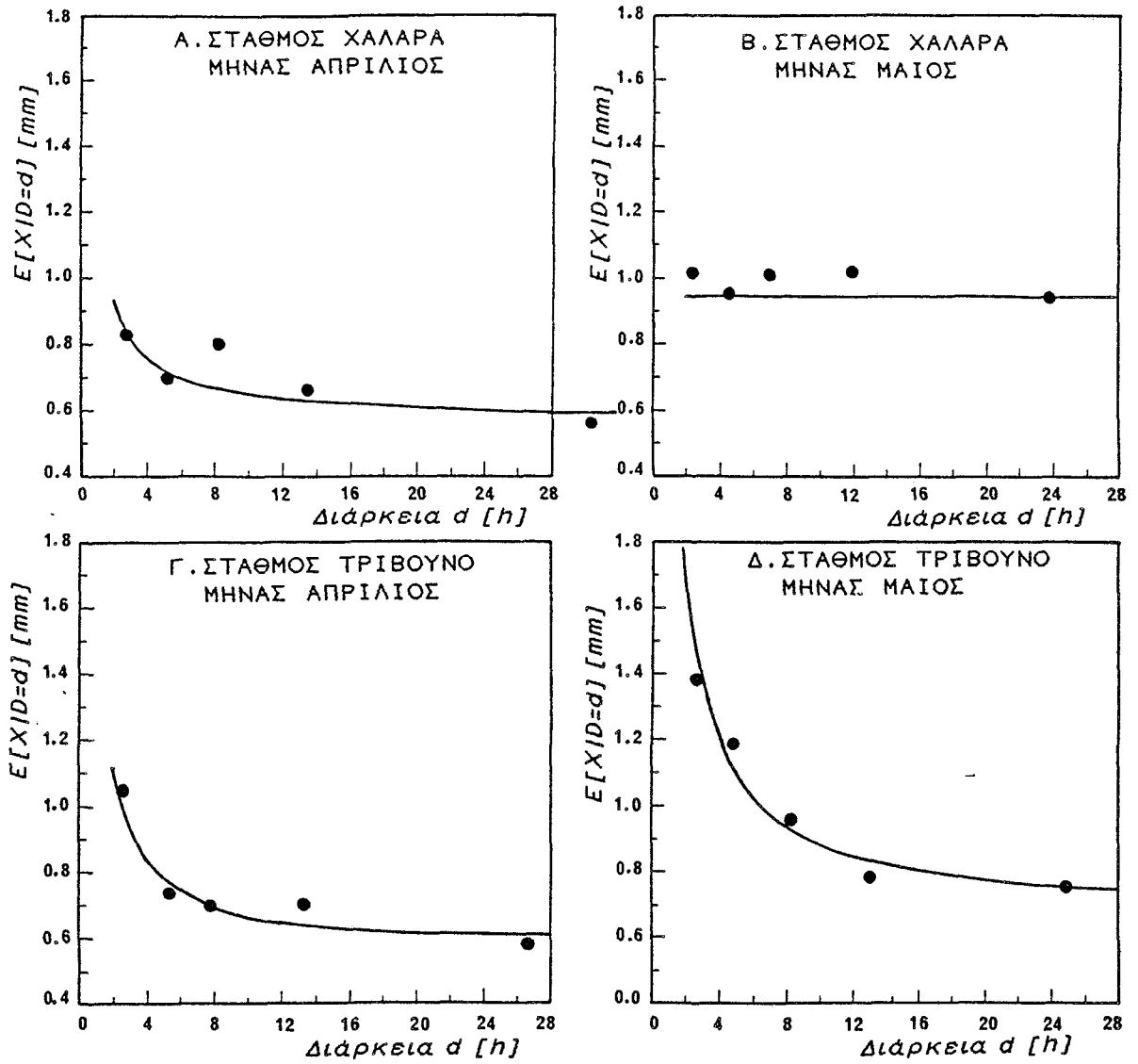
Σχήμα 3.8: Δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια. Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στην κατανομή γάμα και οι διακεκομμένες στις εμπειρικές κατανομές των συνθετικών δειγματικών κλάσεων.



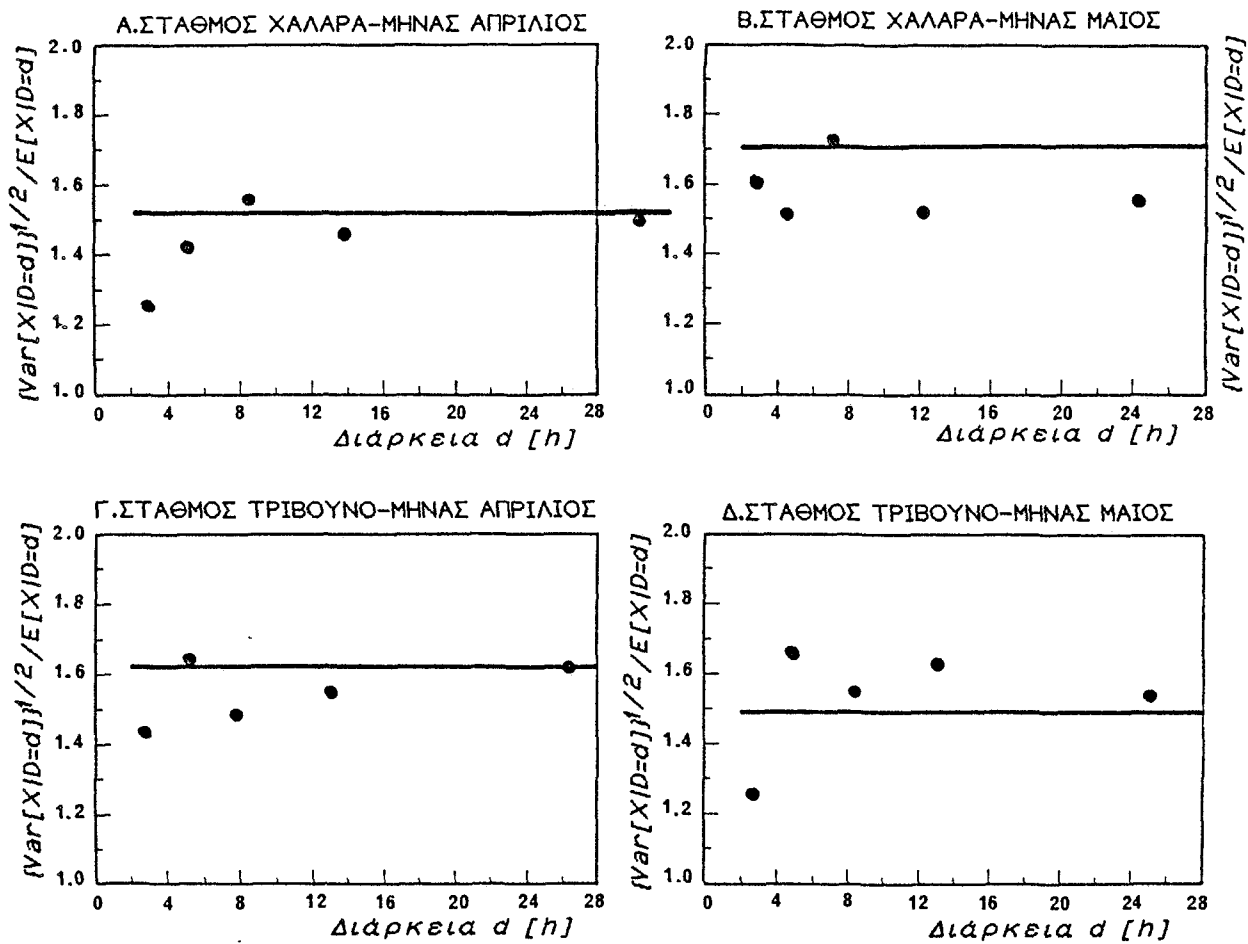
Σχήμα 3.8 (συνέχεια): Δεσμευμένη κατανομή του υψους βροχής για δεδομένη διάρκεια.

Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στην κατανομή γάμα και οι διακεκομμένες στις εμπειρικές κατανομές των συνθετικών δειγματικών κλάσεων.



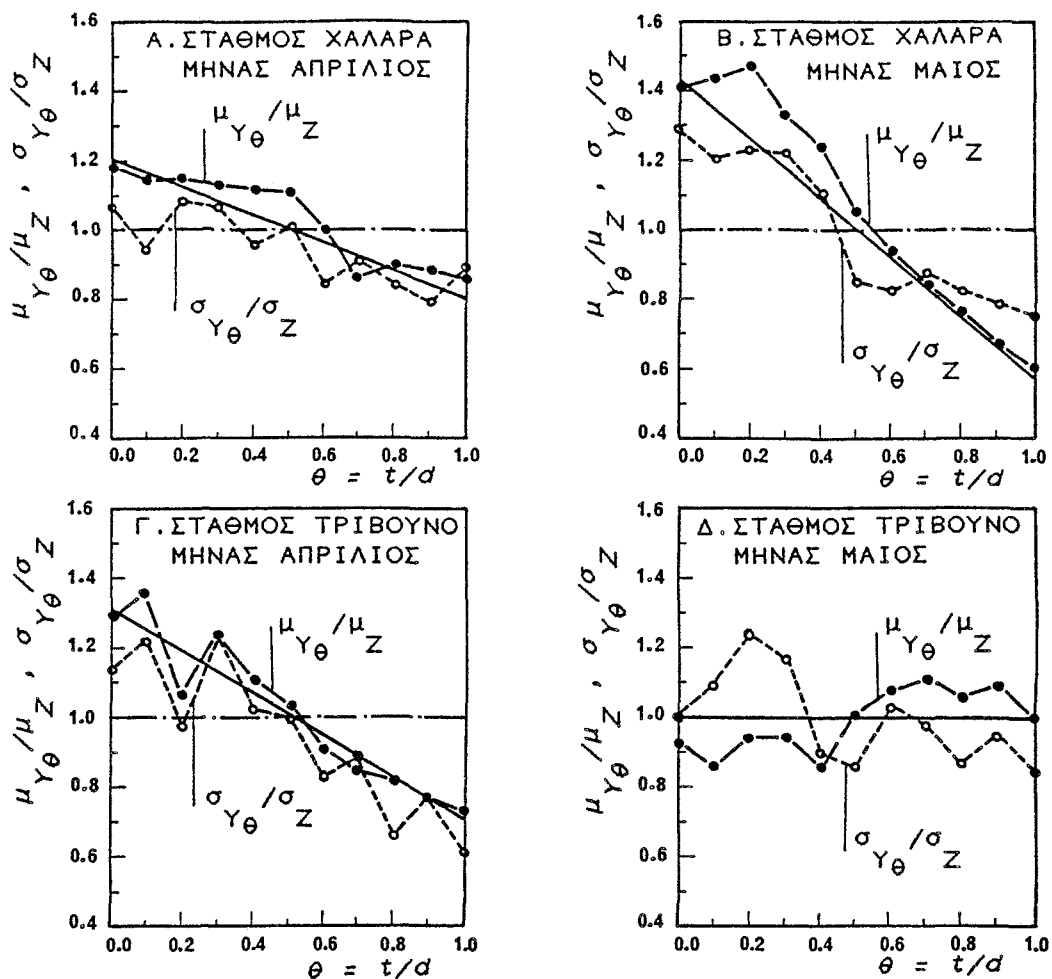


Σχήμα 3.9: Δεσμευμένη μέση τιμή του ωριαίου ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια βροχής.  
Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στις θεωρητικά προβλεπόμενες μέσες τιμές, και τα σημεία στις εμπειρικές μέσες τιμές των συνθετικών δειγματικών κλάσεων.



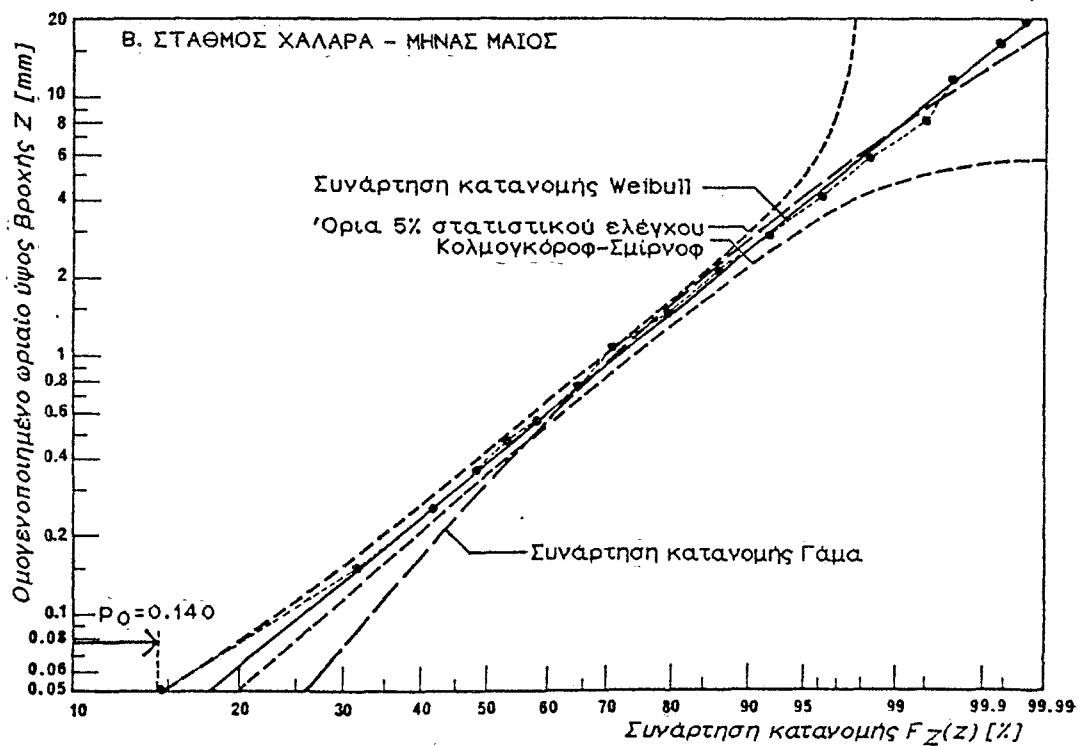
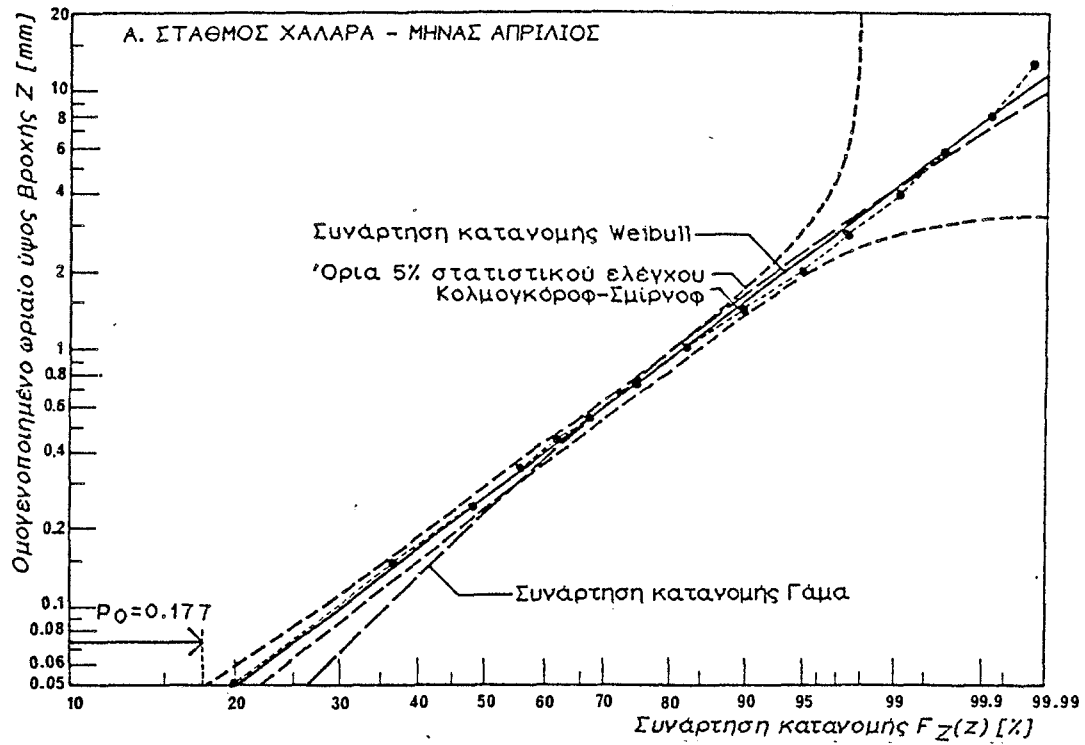
Σχήμα 3.10 : Δεσμευμένος συντελεστής διασποράς ωριαίου ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια βροχής.

Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στις θεωρητικά προβλεπόμενες τιμές του συντελεστή διασποράς, και τα σημεία στις εμπειρικές τιμές του, υπολογισμένες από τις συνθετικές δειγματικές κλάσεις.

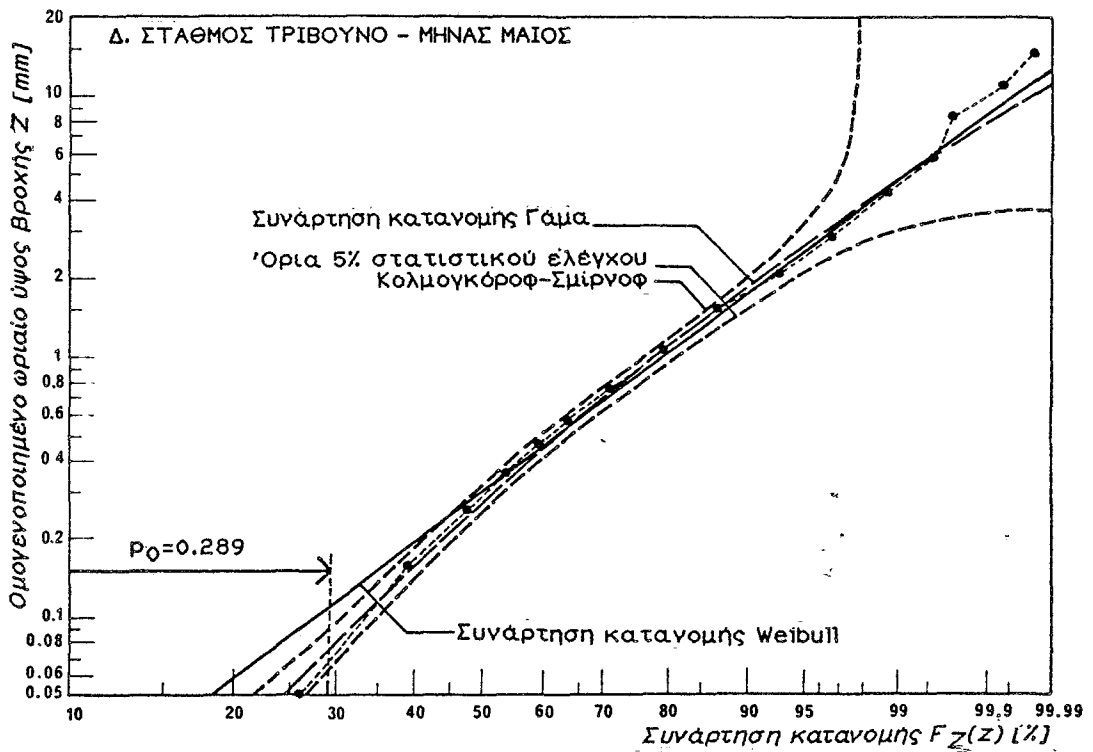
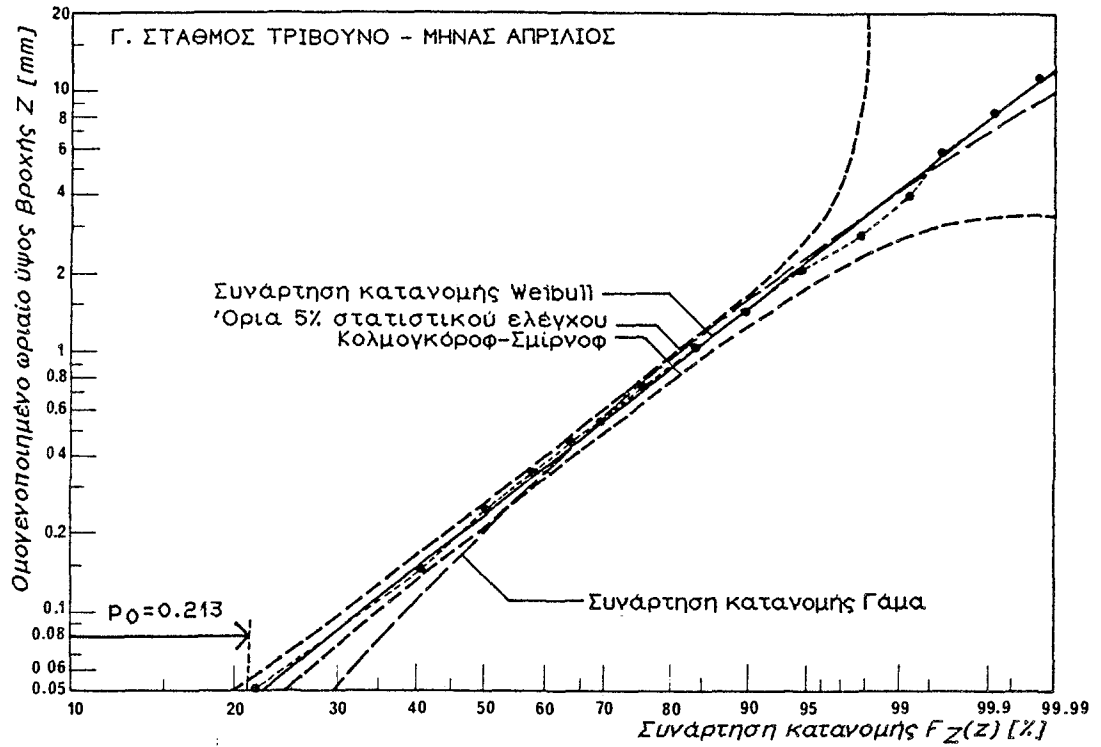


Σχήμα 3.11 : Μέση τιμή και τυπική απόκλιση του μετασχηματισμένου ύψους Βροχής ( $Y$ ) συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου χρόνου ( $\theta$ ).

Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στις θεωρητικά προβλεπόμενες μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις (οι δύο καμπύλες συμπίπτουν στο αδιαστατοποιημένο διάγραμμα), και οι διακεκομμένες στις αντίστοιχες εμπειρικές παραμέτρους, υπολογισμένες από τα συνθετικά δείγματα.

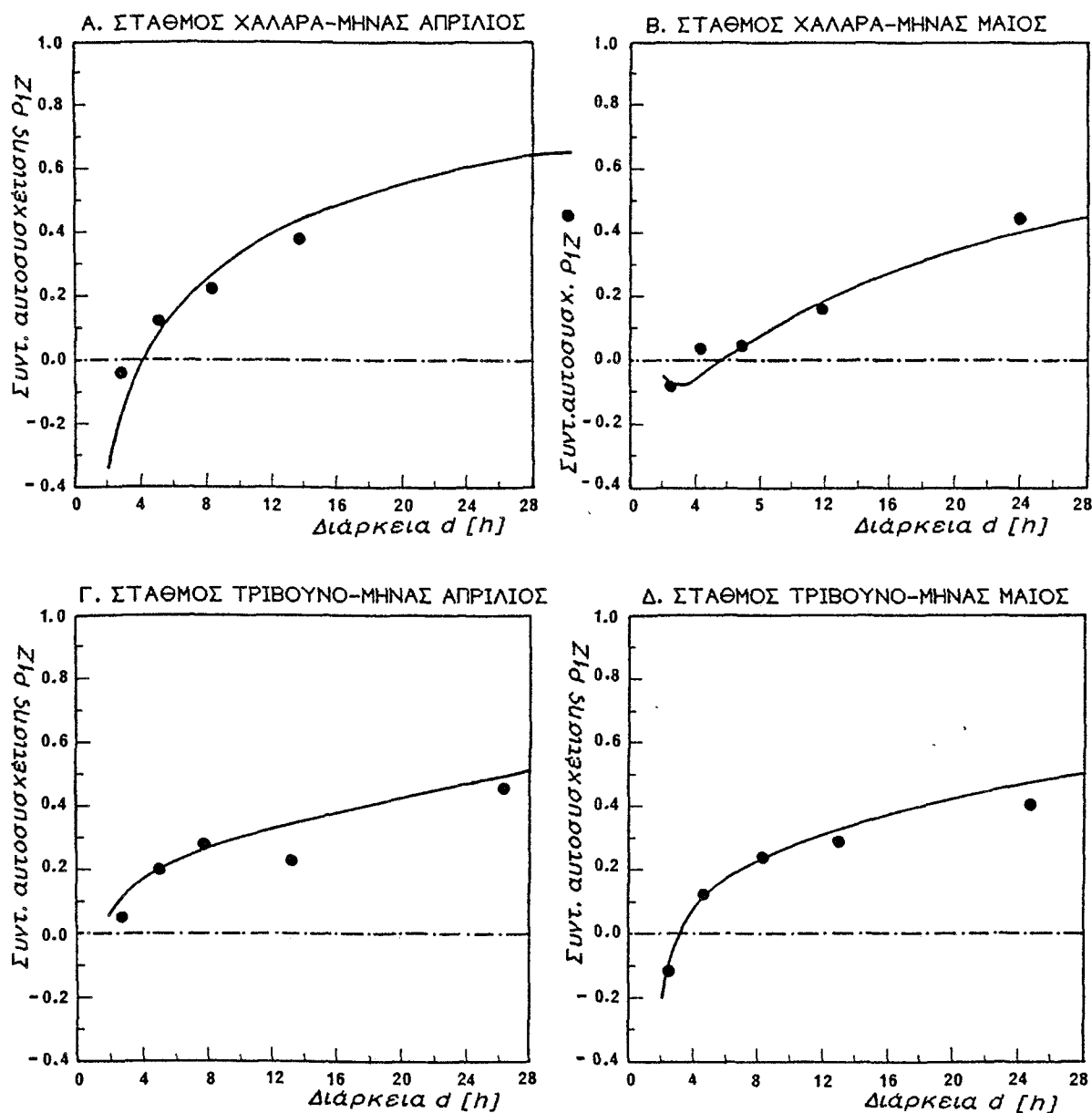


Σχήμα 3.12 ; Συνάρτηση κατανομής του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής,  $Z$ . Τα σημεία (και οι διακεκομμένες γραμμές που τα ενώνουν) αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.

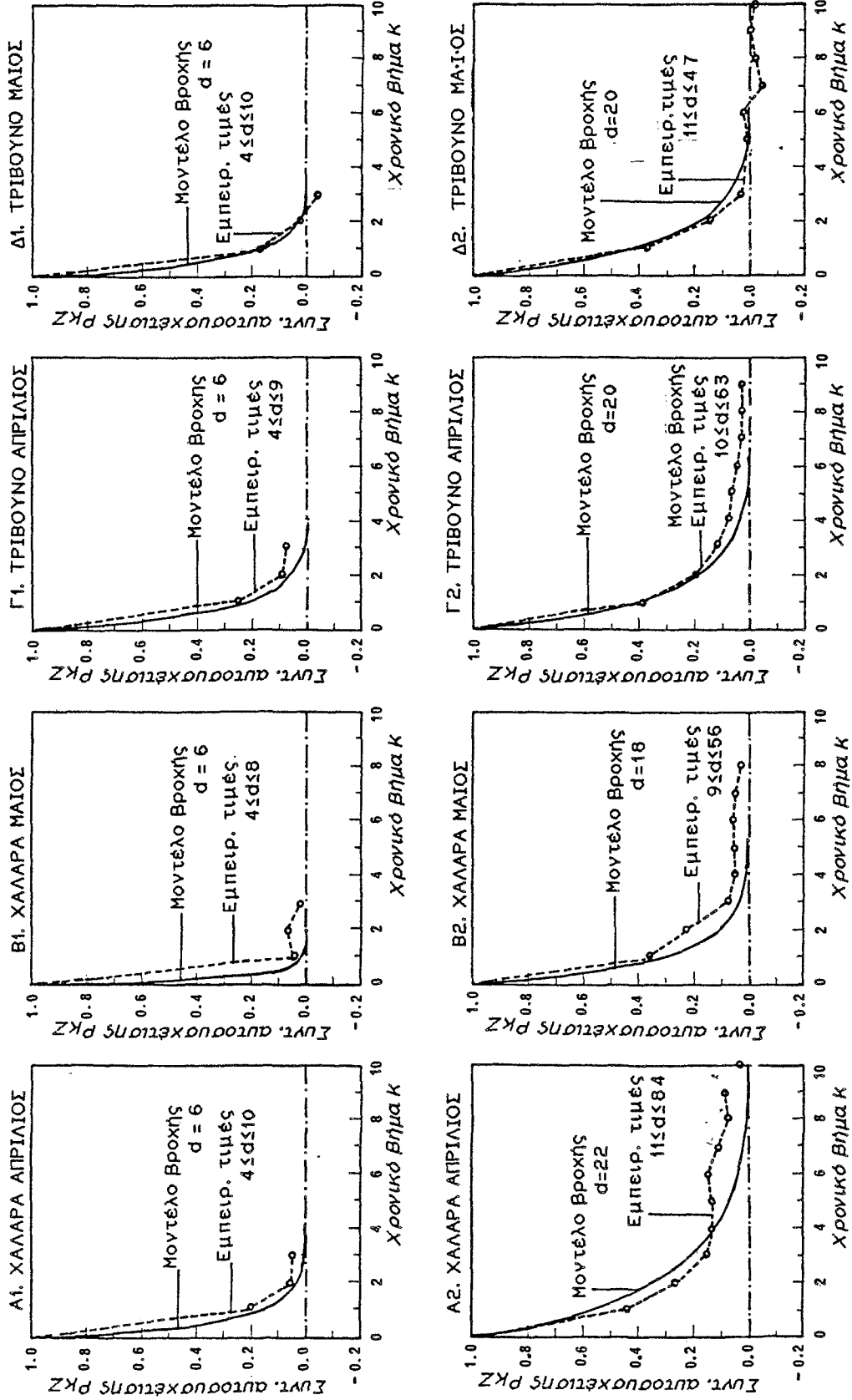


Σχήμα 3.12 (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής,  $Z$ .

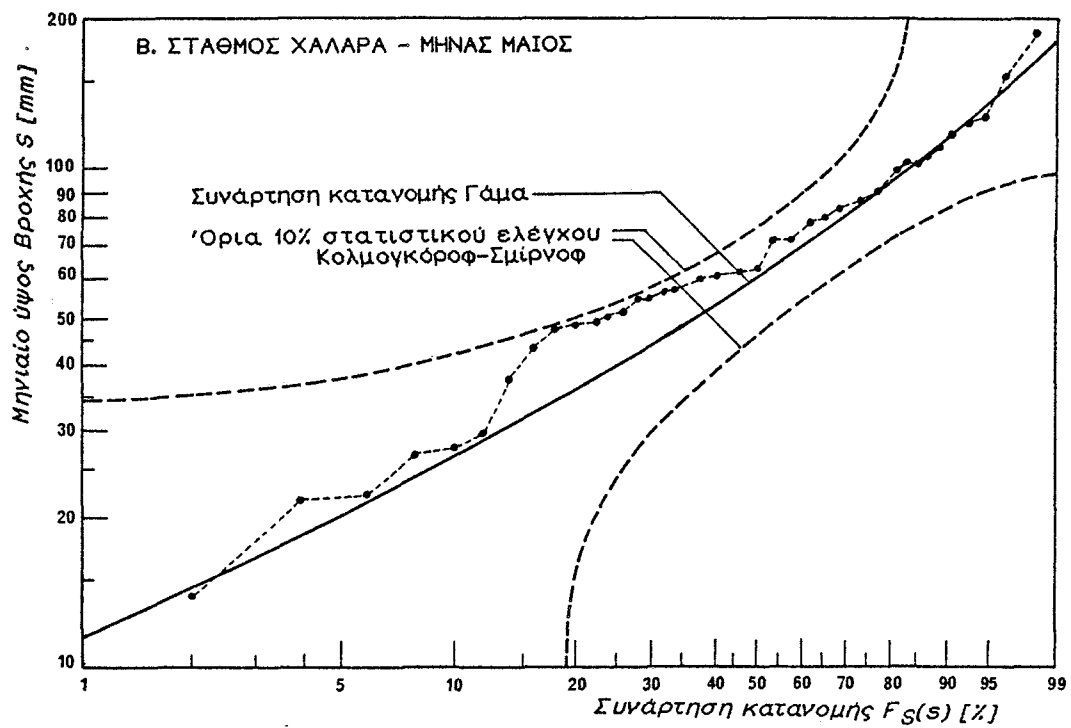
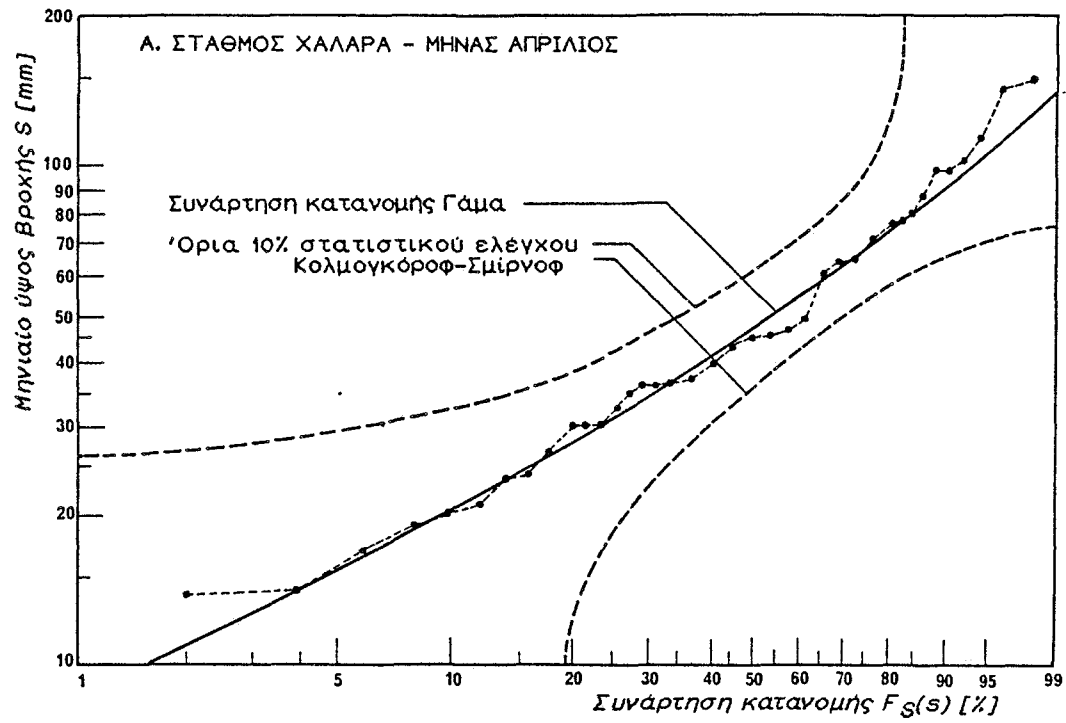
Τα σημεία (και οι διακεκομμένες γραμμές που τα ενώνουν) αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.



**Σχήμα 3.13 :** Συντελεστής αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης του ομογενοποιημένου ωριαίου ύψους βροχής συναρτήσει της διάρκειας επεισοδίου βροχής ( $d$ ). Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στις θεωρητικές τιμές που προβλέπονται από το μοντέλο βροχής, και τα σημεία στις εμπειρικές τιμές ανά κλάση των συνθετικών δειγμάτων.

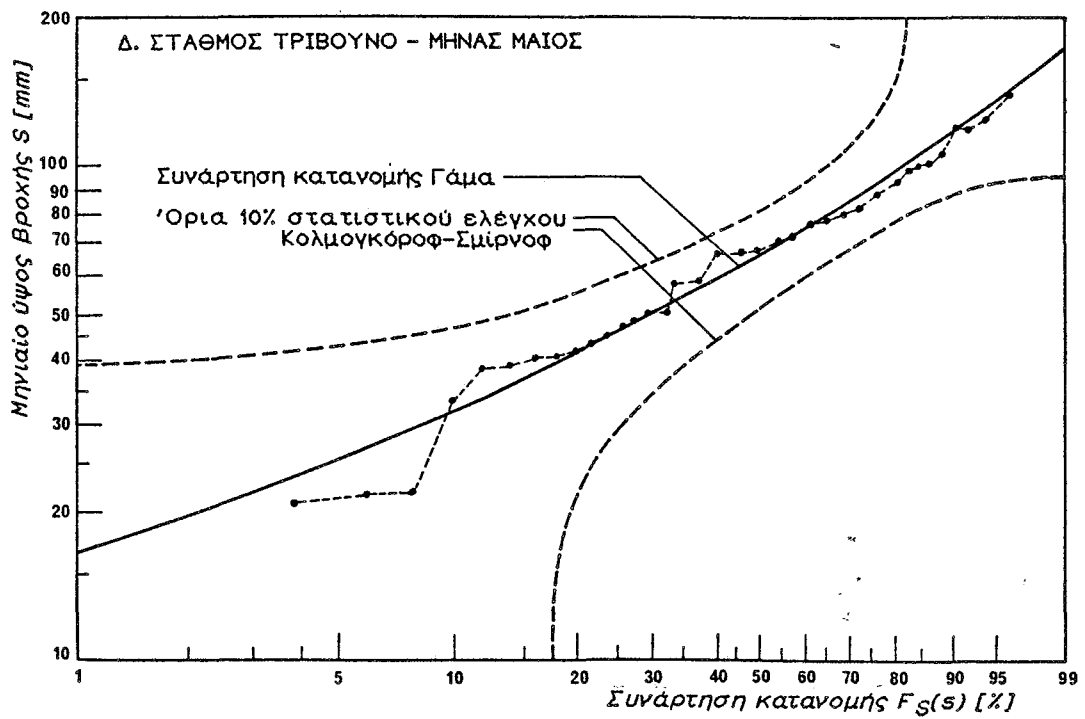
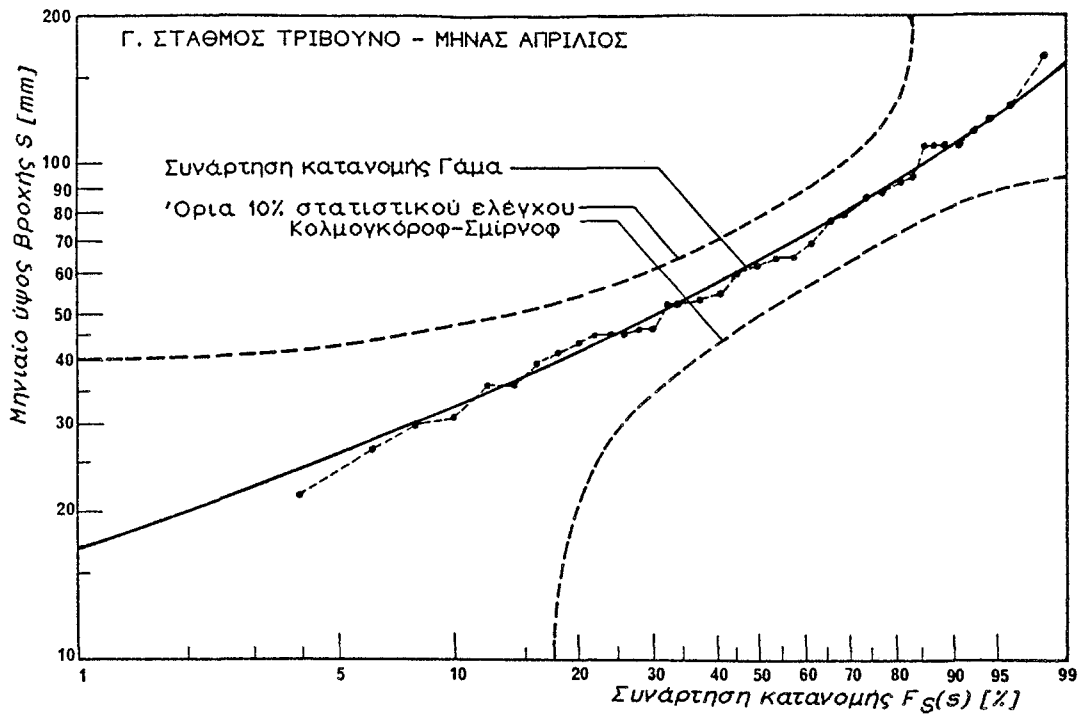


Σχήμα 3.14: Συντελεστής αυτοσυσχέτισης  $k$ -τάξης του ομογενοποιημένου φωλιαίου ύψους βροχής συναρτήσει του χρονικού βήματος ( $k$ ). Οι εμπειρικές τιμές προέκυψαν από τα συνθετικά δεδομένα που παρήγαγε το μοντέλο επιμερισμού.

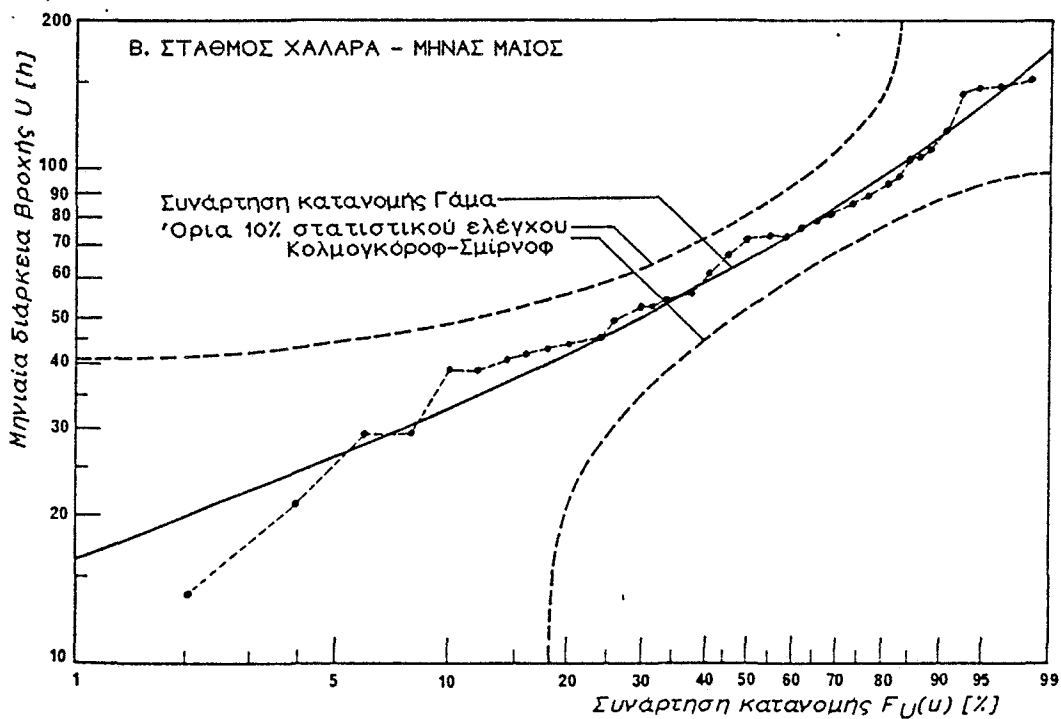
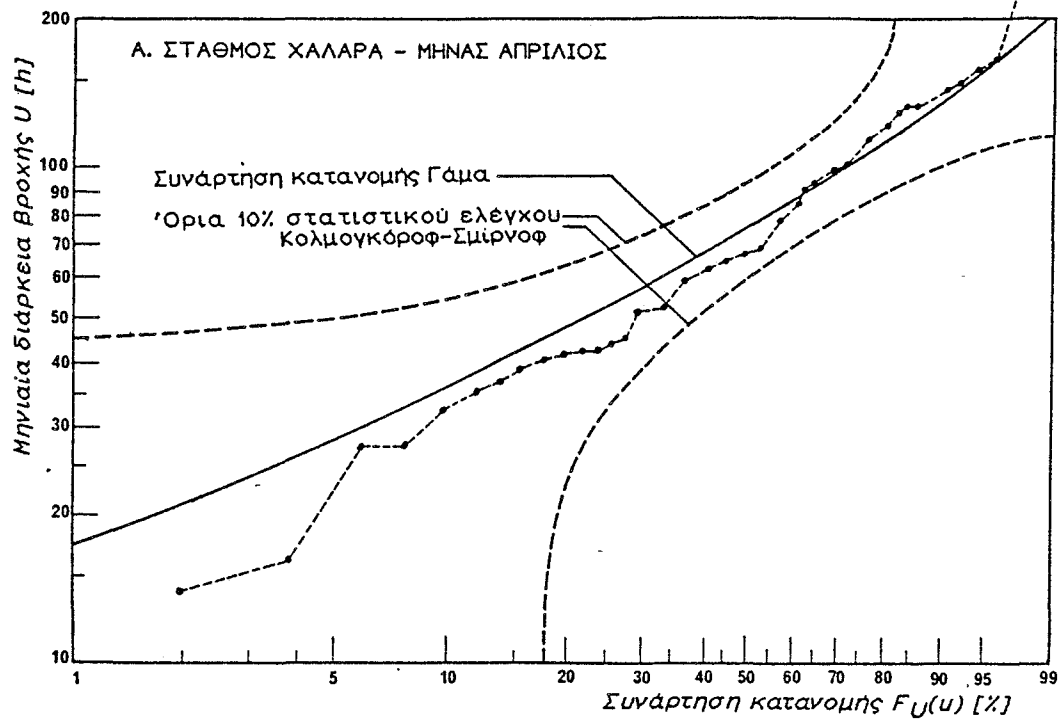


Σχήμα 3.15 : Συνάρτηση κατανομής του μηνιαίου ύψους βροχής,  $S$ . Τα σημεία αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.

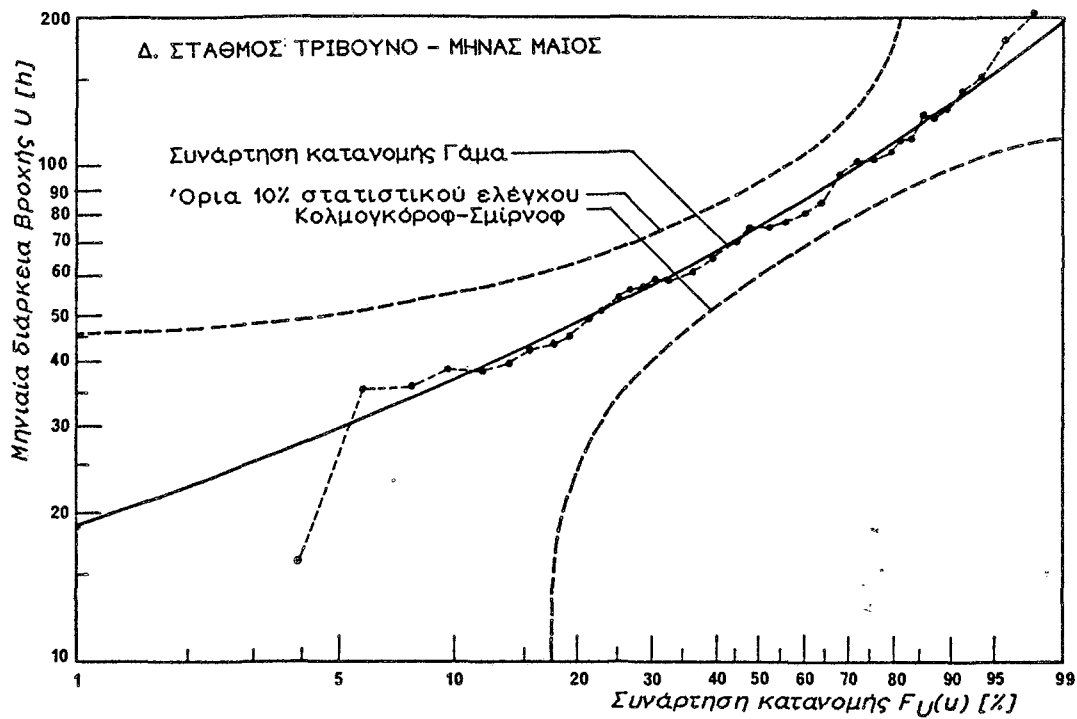
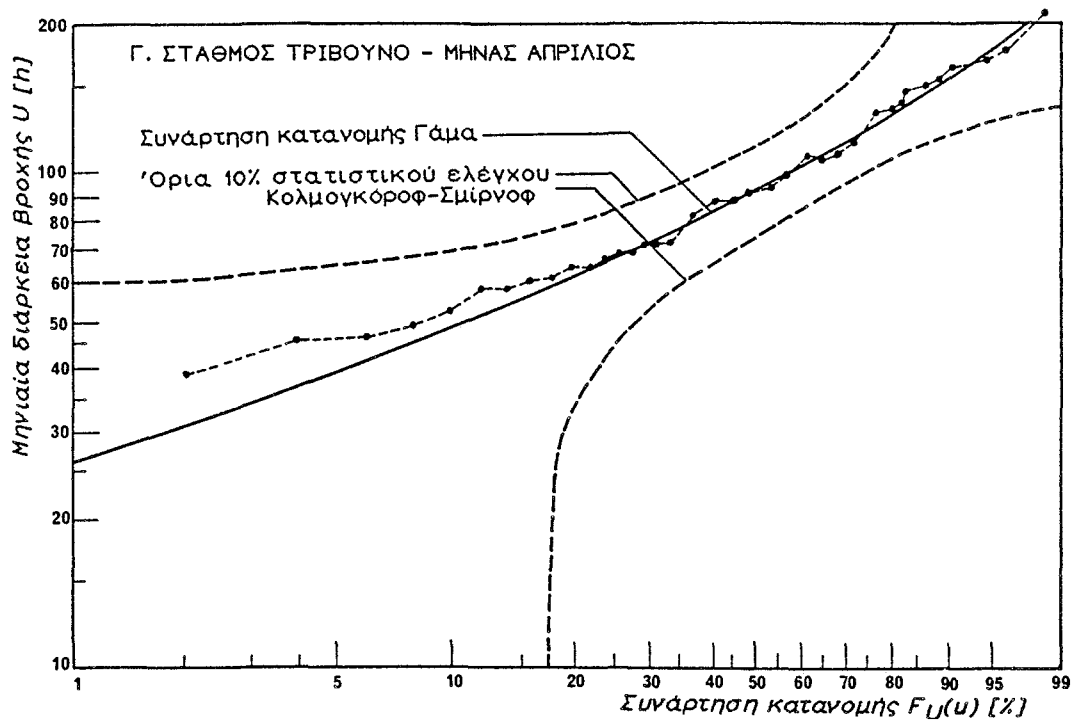




Σχήμα 3.15. (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής του μηνιαίου ύψους Βροχής,  $S$ . Τα σημεία αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.



Σχήμα 3.16 : Συνάρτηση κατανομής της μηνιαίας διάρκειας βροχής,  $U$ . Τα σημεία αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.



Σχήμα 3.16 (συνέχεια): Συνάρτηση κατανομής της μηνιαίας διάρκειας βροχής,  $U$ . Τα σημεία αντιστοιχούν στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των συνθετικών δειγμάτων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

### 4.1. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

#### 4.1.1. Γενικά

Στην εργασία αυτή αναπτύχθηκε ένα μαθηματικό μοντέλο για τον χρονικό επιμερισμό της σημειακής βροχόπτωσης. Το μοντέλο χρησιμοποιεί σαν μεταβλητή αφετηρίας το μηνιαίο ύψος βροχής και παράγει συνθετικές χρονοσειρές του ωριαίου ύψους βροχής, σε τρόπο ώστε (α) το μηνιαίο άθροισμα της σειράς των ωριαίων υψών να είναι ίσο με την τιμή αφετηρίας και (β) η στοχαστική δομή των παραγόμενων χρονοσειρών να είναι ίδια με την αντίστοιχη δομή των πραγματικών χρονοσειρών. Ο επιμερισμός γίνεται σε δύο φάσεις, όπου στην πρώτη φάση εντοπίζονται χρονικά τα μεμονωμένα επεισόδια και ορίζονται τα ολικά ύψη βροχής τους (**εξωτερικός επιμερισμός**), ενώ στη δεύτερη καθορίζονται τα ωριαία ύψη βροχής, μέσα στο κάθε επεισόδιο (**εσωτερικός επιμερισμός**).

Το συνολικό επιμεριστικό μοντέλο της βροχόπτωσης αποτελείται από δύο ανεξάρτητα, αλλά συμβιβαστά και συνεργαζόμενα μοντέλα: Το **δυναμικό μοντέλο επιμερισμού** και το **μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής με εσωτερική δομή**. Τα μοντέλα αυτά αναπτύχθηκαν και έτρεξαν σε μικρούπολογιστή συμβατικών δυνατοτήτων.

#### 4.1.2. Το δυναμικό μοντέλο επιμερισμού

Το δυναμικό μοντέλο επιμερισμού είναι ένα γενικό επιμεριστικό σχήμα κατάλληλο για την προσομοίωση μεταβλητών με κατανομή γάμα. Είναι αρκετά ευέλικτο και έχει τη δυνατότητα να λειτουργεί σε μεταβαλλόμενες χρονικές κλίμακες και με μεταβλητό αριθμό τμηματικών μεταβλητών. Ακόμα μπορεί να επεξεργάζεται στοχαστικές μεταβλητές που εμφανίζουν ασυνέχεια στην κατανομή τους. Ο επιμερισμός γίνεται με μια "βήμα προς βήμα" τεχνική, όπου στο κάθε βήμα πραγματοποιείται μια στοιχειώδης διαδικασία διχασμού της προς επιμερισμό μεταβλητής. Ακόμη, σε κάθε βήμα επιμερισμού γίνεται αναπροσαρμογή των παραμέτρων του μοντέλου, με βάση την πληροφορία που υπάρχει από τα προηγούμενα βήματα (σε αυτή την ιδιότητα του οφείλεται και ο χαρακτηρισμός του ως "δυναμικού μοντέλου"). Η διαδικασία υπολογισμού παραμέτρων στηρίζεται σε απλές σχέσεις αναλυτικής μορφής, και γενικά η εφαρμογή του μοντέλου δεν απαιτεί πολύπλοκους ή χρονοβόρους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Αποδείχθηκε θεωρητικά ότι το μοντέλο διατηρεί πλήρως τις κατανομές των

τμηματικών μεταβλητών όταν οι μεταβλητές αυτές είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κατανομές γάμα, με κοινή παράμετρο κλίμακας. Η αριθμητική διερεύνηση έδειξε ότι, και στη γενικότερη περίπτωση που οι μεταβλητές αυτές είναι στοχαστικά εξαρτημένες και έχουν διαφορετική παράμετρο κλίμακας, το μοντέλο εξασφαλίζει τη διατήρηση των δύο πρώτων ροπών, και των συντελεστών αυτοσυσχέτισης α' τάξης των μεταβλητών .

Στην παρούσα μορφή του το μοντέλο επιμερισμού είναι διατυπωμένο για τμηματικές μεταβλητές με Μαρκοβιανή αυτοσυσχέτιση ή ανεξάρτητες. Χωρίς αλλαγές στη θεμελίωση και τη λογική του μοντέλου μπορούν να γίνουν επεκτάσεις που να καλύπτουν μεταβλητές με ανώτερης τάξης αυτοσυσχέτιση.

#### 4.1.3. Το μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής με εσωτερική δομή

Μετά από συστηματική επεξεργασία βροχογραφικών δεδομένων της υδρολογικής λεκάνης του Αλιάκμονα, αναπτύχθηκε ένα μαθηματικό μοντέλο συνολικής περιγραφής της βροχόπτωσης, από την μηνιαία μέχρι και την ωριαία χρονική κλίμακα. Η βασική του χρονική κλίμακα είναι η κλίμακα του επεισοδίου βροχής, ενώ στο κάθε επεισόδιο αντιστοιχεί μια εσωτερική στοχαστική δομή, που περιέχει την πληροφορία για τη μετάβαση στην ωριαία κλίμακα. Το μοντέλο αυτό διαρθρώνεται από πέντε επιμέρους ενότητες, που περιγράφουν διάφορες όψεις της βροχόπτωσης. Πιο συγκεκριμένα οι ενότητες που μελετήθηκαν είναι οι ακόλουθες:

##### 1. Ορισμός και κριτήριο εντοπισμού επεισοδίου βροχής

Ο ορισμός βασίστηκε στις υποθέσεις ότι τα διαδοχικά επεισόδια βροχής είναι στοχαστικά ανεξάρτητα και οι χρόνοι έναρξης τους αποτελούν ανέλιξη Poisson. Ο ορισμός αυτός αποδέχεται την ύπαρξη "στεγνών" περιόδων μέσα σε ένα επεισόδιο βροχής. Αποδείχτηκε ότι με κατάλληλη επιλογή του χρόνου διαχωρισμού, δηλαδή του ελάχιστου χρόνου ο οποίος διαχωρίζει δύο ανεξάρτητα διαδοχικά επεισόδια, οι παραπάνω υποθέσεις ευσταθούν. Μάλιστα η υπόθεση για την ανέλιξη Poisson έδωσε τη βάση για το κριτήριο χρονικού εντοπισμού του επεισοδίου βροχής. Οι χρόνοι διαχωρισμού που προέκυψαν με την εφαρμογή αυτού του κριτηρίου είναι 6-7 ώρες.

##### 2. Κατανομή των χρονικών μεταβλητών του επεισοδίου βροχής

Η ενότητα αυτή βασίστηκε σε μια μόνο υπόθεση, που αφορά τη δεσμευμένη κατανομή της διάρκειας βροχής, όταν είναι

γνωστός ο χρόνος διαδοχής του επεισοδίου βροχής. Με συνδυασμό της υπόθεσης αυτής και της ανέλιξης Poisson των χρόνων έναρξης των επεισοδίων βροχής προέκυψαν αναλυτικά οι συναρτήσεις κατανομής (περιθώριες και σύνθετες) της διάρκειας βροχής και του χρόνου διακοπής της βροχής. Η σύγκριση αυτών των θεωρητικών συναρτήσεων κατανομής με τις αντίστοιχες εμπειρικές έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

### 3. Κατανομή του ύψους επεισοδίου βροχής

Στην ενότητα αυτή εξετάστηκε κυρίως η δεσμευμένη κατανομή του ύψους βροχής για δεδομένη διάρκεια, που φάνηκε ότι αποδίδεται από τη συνάρτηση κατανομής γάμα. Η ανάλυση βασίστηκε σε δύο γραμμικές σχέσεις που δίνουν τη δεσμευμένη μέση τιμή και τη δεσμευμένη τυπική απόκλιση του ύψους βροχής συναρτήσει της διάρκειας.

### 4. Εσωτερική δομή του επεισοδίου βροχής

Εδώ ουσιαστικά εξετάστηκαν οι ιδιότητες του ωριαίου ύψους βροχής. Η επεξεργασία των ιστορικών δεδομένων έδειξε ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ωριαίου ύψους βροχής μεταβάλλονται, εξαρτώμενα από τη διάρκεια του επεισοδίου και το σχετικό χρόνο από την έναρξη του επεισοδίου. Θεωρήθηκε ότι η εμφανιζόμενη μη μονιμότητα στο χρόνο, μπορεί να περιγραφεί από μια γραμμική συνάρτηση του αδιαστατοποιημένου χρόνου. Η επίδραση της διάρκειας βροχής στα στατιστικά χαρακτηριστικά του ωριαίου ύψους βροχής υποτέθηκε ότι αποδίδεται από μια υπερβολική συνάρτηση της διάρκειας. Το ωριαίο ύψος βροχής, μέσα σε ένα επεισόδιο δεδομένης διάρκειας, θεωρήθηκε ότι έχει Μαρκοβιανή αυτοσυσχέτιση και περιθώρια συνάρτηση κατανομής Weibull ή γάμα. Βρέθηκε ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης είναι αύξουσα συνάρτηση της διάρκειας του επεισοδίου βροχής. Ο έλεγχος όλων των παραπάνω υποθέσεων με βάση τα ιστορικά δεδομένα έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

### 5. Περιγραφή της βροχόπτωσης σε μηνιαία βάση

Στην ενότητα αυτή προσδιορίστηκαν οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής του μηνιαίου ύψους, της μηνιαίας

διάρκειας και του μηνιαίου αριθμού επεισοδίων βροχής. Οι δύο πρώτες κατανομές διαπιστώθηκε ότι μπορούν να προσεγγιστούν με τη συνάρτηση κατανομής γάμα, ενώ η τρίτη αποδόθηκε με μια τροποποιημένη έκφραση της κατανομής Poisson. Θεωρήθηκε ότι η στοχαστική εξάρτηση μηνιαίου ύψους και μηνιαίας διάρκειας βροχής περιγράφεται από μια γραμμική σχέση. Η προσαρμογή των παραπάνω προς τα πραγματικά δεδομένα ήταν ικανοποιητική.

Το συνολικό μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής είναι εποχιακό, με την έννοια ότι οι παράμετροι του μεταβάλλονται από εποχή σε εποχή. Στην εργασία αυτή, σαν "εποχή" θεωρήθηκε ένας ημερολογιακός μήνας. Για την πλήρη περιγραφή της βροχής, σε κάθε εποχή απαιτούνται το πολύ 12 ανεξάρτητες παράμετροι, ο αριθμός αυτός όμως μπορεί να μειωθεί σε 4, το λιγότερο (με αντίστοιχη, βέβαια, μείωση της ακρίβειας του μοντέλου).

#### **4.1.4. Αποτελέσματα της εφαρμογής του μοντέλου**

Ο συνδυασμός των δύο παραπάνω ανεξάρτητων μοντέλων έδωσε το τελικό επιμεριστικό σχήμα της σημειακής βροχόπτωσης, το οποίο στη συνέχεια κωδικοποιήθηκε σε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Οι "είσοδοι" στο πρόγραμμα αυτό είναι οι παράμετροι που περιγράφουν τη δομή της βροχόπτωσης, και οι τιμές των μεταβλητών αφετηρίας σε μηνιαία βάση (μηνιαίο ύψος βροχής, μηνιαία διάρκεια, αριθμός επεισοδίων). Μια πρόσθετη διαδικασία που ενσωματώθηκε στο πρόγραμμα καθιστά δυνατή και την παραγωγή τιμών μιας ή και όλων των μεταβλητών αφετηρίας, όταν αυτές δεν καθορίζονται με άλλο τρόπο, όταν δηλαδή δεν δίνονται ως "είσοδοι". Οι "έξοδοι" του προγράμματος είναι συνθετικές χρονοσειρές ωριαίου ύψους βροχής που συμφωνούν με τις (δεδομένες ή υπολογισμένες) τιμές των μεταβλητών αφετηρίας.

Οι συνθετικές χρονοσειρές που προέκυψαν σαν αποτελέσματα εφαρμογών αυτού του προγράμματος, ελέγχθηκαν ως προς την συμφωνία τους με τη θεωρητικά προβλεπόμενη στοχαστική δομή των διάφορων μεταβλητών. Τέτοιόι έλεγχοι έγιναν για το σύνολο των εξεταζομένων μεταβλητών σε κλίμακα επεισοδίου βροχής και ωριαία. Συνοπτικά τα αποτελέσματα των σχετικών ελέγχων είναι τα ακόλουθα:

1. Οι μέσες τιμές και οι διασπορές όλων των μεταβλητών που εξετάστηκαν, περιθώριες και δεσμευμένες, όπως προέκυψαν από τις συνθετικές χρονοσειρές, συμφωνούν απόλυτα με τις θεωρητικά προβλεπόμενες τιμές τους.

2. Οι εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των μεταβλητών, όπως προέκυψαν από τις συνθετικές χρονοσειρές, επίσης συμφωνούν με τις αντίστοιχες θεωρητικές. Οι σχετικοί στατιστικοί έλεγχοι Κολμογκόροφ-Σμίρνοφ που έγιναν ήταν θετικοί με μια εξαίρεση, η οποία αφορούσε το ωριαίο ύψος βροχής, και σε μια μόνο από τις 4 χρονοσειρές που εξετάστηκαν. Πάντως, ακόμα και στην περίπτωση αυτού του αρνητικού ελέγχου, υπήρξε ικανοποιητική προσέγγιση της εμπειρικής συνάρτησης προς τη θεωρητική.
3. Οι εμπειρικές συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των συνθετικών ωριαίων υψών βροχής συμφωνούν σε ικανοποιητικό βαθμό με τις θεωρητικά προβλεπόμενες, Μαρκοβιανού τύπου, συναρτήσεις.
4. Οι εμπειρικά προσδιορισμένες πιθανότητες μηδενισμού του ωριαίου ύψους μέσα στο επεισόδιο βροχής προσεγγίζουν σε ανεκτό βαθμό τις θεωρητικά προβλεπόμενες τιμές, χωρίς όμως να βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με αυτές.



## 4.2. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΆΛΛΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

### 4.2.1. Σύγκριση του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού

Οι βασικές διαφορές του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού από το κλασικό γραμμικό μοντέλο των *Valencia και Schaake* [1972] συνίστανται στα ακόλουθα:

1. Το πρώτο είναι κατάλληλο για μεταβλητές με κατανομή γάμα, ενώ το δεύτερο είναι για μεταβλητές με κανονική κατανομή. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που το δυναμικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση των βροχοπτώσεων σε ωριαία βάση, πράγμα ανέφικτο για το γραμμικό μοντέλο.
2. Το πρώτο παράγει τις τιμές των μεταβλητών με μια τεχνική "βήμα προς βήμα", αναπροσαρμόζοντας σε κάθε βήμα τις παραμέτρους του. Αντίθετα στο δεύτερο ο υπολογισμός των παραμέτρων και η παραγωγή των τιμών των μεταβλητών γίνονται καθολικά. Η "βήμα προς βήμα" τεχνική δίνει μια μεγάλη ευελιξία στο δυναμικό μοντέλο, που επιτρέπει τη λειτουργία του με μεταβαλλόμενο αριθμό τμηματικών μεταβλητών και με πολύ μεγάλο πλήθος μεταβλητών (πχ. 50-100, ενώ στο δεύτερο συνιστάται ο αριθμός 3-7 στην πολυδιάστατη μορφή του και 30 στη μονοδιάστατη).
3. Το δεύτερο μοντέλο είναι πολυδιάστατο, ενώ το πρώτο, στην παρούσα έκδοση του είναι μονοδιάστατο. Επίσης το δεύτερο επεξεργάζεται μεταβλητές με οποιαδήποτε δομή στοχαστικής εξάρτησης, ενώ το πρώτο, στην παρούσα του μορφή είναι κατάλληλο για μεταβλητές με Μαρκοβιανή αυτοσυσχέτιση.

Βεβαίως το δυναμικό μοντέλο έχει τη δυνατότητα να πάρει διάφορες μορφές με κατάλληλες τροποποιήσεις ή επεκτάσεις. Στην εργασία (υποπαραγράφοι 1.8.2 και 1.8.3) έχουν μελετηθεί εκδόσεις του δυναμικού μοντέλου που είναι θεωρητικά ισοδύναμες με το γραμμικό μοντέλο.

Η τεχνική επιμερισμού του δυναμικού μοντέλου παρουσιάζει ομοιότητες με την αντίστοιχη τεχνική της εργασίας των *Marijen και Vandewiele* [1986] (βλ. υποπαραγράφο 2.4.1). Πιο συγκεκριμένα η μεθοδολογία επιμερισμού στην τελευταία εργασία μπορεί να θεωρηθεί σαν ειδική οριακή περίπτωση του δυναμικού μοντέλου

επιμερισμού για ανεξάρτητες τμηματικές μεταβλητές με κατανομή γάμα (βλ. υποπαράγραφο 1.7.2). Επίσης ομοιότητες υπάρχουν και με τη μεθοδολογία επιμερισμού της εργασίας των *Woolhisher και Osborn* [1985] (βλ. υποπαράγραφο 2.4.2), οι οποίες όμως είναι περισσότερο πρακτικές, παρά θεωρητικές.

#### 4.2.2. Σύγκριση του μοντέλου ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής

Το μοντέλο βροχής της εργασίας αυτής παρουσιάζει σαφείς ομοιότητες, ως προς την έννοια του επεισοδίου βροχής, με τις εργασίες των *Grace και Eagleson* [1966], και *Restepo-Posada και Eagleson* [1982], και δευτερευόντως με το μοντέλο *Marien και Vandewiele* [1986]. Υπάρχουν όμως και διαφοροποιήσεις στον ορισμό του επεισοδίου και το κριτήριο εντοπισμού του. Ως προς την εσωτερική στοχαστική δομή του επεισοδίου βροχής υπάρχουν ομοιότητες με τα μοντέλα των *Grace και Eagleson* [1966] και *Bras και Rodriguez-Iturbe* [1976a] (κυρίως ως προς τη χρήση αδιαστατοποιημένων σχέσεων για την έκφραση της μεταβολής των στατιστικών χαρακτηριστικών του ύψους βροχής στο χρόνο).

Σε σύγκριση με τα πιο σύγχρονα μοντέλα σημειακών ανελιξεων (βλ. παράγραφο 2.3), το μοντέλο αυτής της εργασίας παρουσιάζει πολλές διαφορές ιδίως με τα μοντέλα *Neyman-Scott* και *Cox* (ως προς την έννοια του επεισοδίου βροχής, τη δομή της αυτοσυσχέτισης και τη μονιμότητα στο χρόνο). Γενικά το μοντέλο αυτής της εργασίας υστερεί σε μαθηματική διατύπωση, σε σχέση με τα μοντέλα αυτά, αλλά πλεονεκτεί στο γεγονός ότι παίρνει υπόψη και περιγράφει τη μη μονιμότητα της βροχόπτωσης, πράγμα που αγνοείται τελείως από τα μοντέλα σημειακών ανελιξεων.

#### 4.3. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

Στην παράγραφο 1.8 επισημάνθηκαν διάφορες δυνατότητες επέκτασης του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού, που θα μπορούσαν να γίνουν στο μέλλον. Επιγραμματικά αυτές αναφέρονται (α) στην κατάσταση των γενικών εξισώσεων του μοντέλου για τμηματικές μεταβλητές που αποτελούν ακολουθίες αυτοσυσχέτισης (AR) τάξης μεγαλύτερης από 1, (β) στην τροποποίηση του μοντέλου δικασμού, ώστε να επεξεργάζεται μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής διαφορετικές από την γάμα και (γ) στην επέκταση του μοντέλου από τη μονοδιάστατη μορφή του σε πολυδιάστατη. Ακόμα θα είχε ενδιαφέρον η μελέτη της περίπτωσης τμηματικών μεταβλητών με δομή αυτοσυσχέτισης τύπου ARMA.

Στο μοντέλο ανεξάρτητων επεισοδίων βροχής υπάρχουν αρκετά σημεία που επιδέχονται βελτίωση ή επέκταση, όπως: (α) μια πιο γενικευμένη και θεωρητική διατύπωση του μοντέλου, βασισμένη στη στιγμιαία ένταση βροχής, και (β) μια διεξοδικότερη διερεύνηση του τρόπου εκτίμησης των παραμέτρων του μοντέλου, η οποία θα μπορούσε πιθανόν να συνδυαστεί και με την ομαδοποίηση των παραμέτρων σε εποχιακή, αντί μηνιαία, βάση. Επίσης παρουσιάζει ενδιαφέρον η εξειδικευμένη ανάλυση της στοχαστικής δομής των ισχυρών καταιγίδων, που θα είχε σαν αποτέλεσμα την διατύπωση ενός ανάλογου μοντέλου, πιθανόν σε ετήσια και όχι μηνιαία βάση.

Ακόμα θα ήταν δυνατός ο συνδυασμός του δυναμικού μοντέλου επιμερισμού με κάποιο άλλο μοντέλο βροχόπτωσης, όπως για παράδειγμα με ένα από τα μοντέλα σημειακών ανελίζων. Βεβαίως ο συνδυασμός αυτός μπορεί να προϋποθέτει κάποια ειδική τροποποίηση του συγκεκριμένου μοντέλου βροχόπτωσης, πχ. την εισαγωγή την έννοιας της διάρκειας του επεισοδίου βροχής. Σημειώνεται ότι ο συνδυασμός αυτός μπορεί να γίνει χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία για ορισμένα από τα μοντέλα βροχής που αναφέρθηκαν στις παραγράφους 2.2 έως 2.5, ενώ για άλλα θα χρειαστεί και κάποια από τις επεκτάσεις του μοντέλου επιμερισμού που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Τέλος, μετά από κατάλληλη μελέτη, είναι δυνατό να γίνει επιμερισμός της βροχόπτωσης με διαφοροποιημένες χρονικές κλίμακες αφετηρίας και τερματισμού, όπως ο επιμερισμός από την ετήσια στην εποχιακή ή μηνιαία κλίμακα, από την μηνιαία στην ημερήσια, χωρίς τη μεσολάβηση της κλίμακας του επεισοδίου βροχής, και τέλος η χρησιμοποίηση πολύ πυκνής κλίμακας τερματισμού, πχ. 10λεπτης.

#### 4.4. ΠΙΘΑΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Με την παρούσα του μορφή, το συνολικό μοντέλο της εργασίας αυτής αποτελεί μια πλήρη γεννήτρια βροχής σε κλίμακα επεισοδίου και ωριαία. Κατά συνέπεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα σε προβλήματα προσομοίωσης συστημάτων, τα οποία περιέχουν σαν μεταβλητή τη βροχόπτωση σε μια από τις παραπάνω χρονικές κλίμακες.

Όμως η ιδιαίτερη αξία του μοντέλου ανακύπτει σε προβλήματα όπου ενδιαφέρει η εξέταση ενός φαινομένου σε μηνιαία βάση, αλλά η μαθηματική περιγραφή του συστήματος μπορεί να γίνει μόνο σε μικρή χρονική κλίμακα. Σαν παράδειγμα αναφέρεται η προσομοίωση του ισοζυγίου ενός ταμιευτήρα, όταν λείπουν τελειώς οι μετρήσεις απορροής, όπου πράγματι η χρονική κλίμακα που ενδιαφέρει είναι η μηνιαία, αλλά για να περιγραφεί με αξιόπιστο τρόπο ο μετασχηματισμός βροχόπτωσης-απορροή (πχ. μέσω του μοναδιαίου υδρογραφήματος) θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η ωριαία κλίμακα. Ένα ακόμα παράδειγμα αποτελεί η εκτίμηση μηνιαίων (ή ετήσιων) ποσοτήτων φερτών υλικών σε μια λεκάνη απορροής, με βάση ένα φυσικά θεμελιωμένο μοντέλο βροχόπτωσης-απορροής-στερεοπαροχής (πχ. μοντέλο *Foster κ.α.* [1980], στο οποίο η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου γίνεται σε κλίμακα επεισοδίου βροχής). Σε τέτοιες περιπτώσεις το μοντέλο επιμερισμού της βροχόπτωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα ενδιάμεσο στάδιο για την παραγωγή σεναρίων βροχόπτωσης σε κλίμακα επεισοδίου ή ωριαία, παίρνοντας σαν "είσοδο" τη μηνιαία βροχόπτωση. Τα σεναρία αυτά μπορούν στη συνέχεια να αξιοποιηθούν από το κύριο μοντέλο για την παραγωγή αντίστοιχων σεναρίων της κύριας μεταβλητής που ενδιαφέρει (παροχής, στερεοπαροχής κλπ.), τα οποία, με κατάλληλη άθροιση, θα δώσουν τις μηνιαίες τιμές της κύριας μεταβλητής. Κατά τον τρόπο αυτό το συνολικό σχήμα προσομοίωσης θα συμπεριφέρεται εξωτερικά σαν να λειτουργεί σε μηνιαία βάση, ενώ θα έχει την αυξημένη ακρίβεια που του δίνει η πυκνή χρονική κλίμακα εσωτερικής λειτουργίας. Σε τέτοια προβλήματα αποκτούν ιδιαίτερη αξία οι απλοποιημένες εκδόσεις του μοντέλου βροχής, με μειωμένο αριθμό παραμέτρων (πχ. με τις 4 βασικές παραμέτρους - βλ. και υποπαράγραφο 2.11.5), οι οποίες επιτρέπουν την εφαρμογή του μοντέλου επιμερισμού χωρίς να προϋποθέτουν τη λεπτομερή εξέταση της δομής της βροχόπτωσης.

Τέλος, η αμεσότερη δυνατή χρήση του μοντέλου φαίνεται να αφορά την κατάρτιση των πλημμυρογραφημάτων σχεδιασμού σοβαρών υδραυλικών έργων, ιδίως υπερχειλιστών φραγμάτων, όπου οι σχετικές μελέτες βασίζονται πάντα στην καταιγίδα σχεδιασμού. Οι χρησιμοποιούμενες σήμερα τεχνικές παραγωγής υετογραμμάτων σχεδιασμού βασίζονται σε κάποια μάλλον αυθαίρετη μέθοδο κατανομής του ύψους βροχής στο χρόνο. Δύο τέτοιες χαρακτηριστικές μέθοδοι στηρίζονται αντίστοιχα

(α) στις όμβριες καμπύλες της περιοχής μελέτης και την παραδοχή ότι η καταιγίδα μελέτης εμφανίζει την ίδια περίοδο επαναφοράς σε κάθε επί μέρους διάρκεια μέσα στο επεισόδιο βροχής, και (β) σε αδιαστατοποιημένες χρονικές κατανομές του ύψους βροχής, που συνήθως παίρνονται από διαγράμματα της βιβλιογραφίας. Η πρώτη από αυτές της μεθόδους δίνει μια μοναδική μορφή του υετογράμματος σχεδιασμού, ενώ η δεύτερη δίνει πολλαπλές μορφές, αλλά δεν υπάρχει αντικειμενική μέθοδος επιλογής της κατάλληλης μορφής. Στο πρόβλημα αυτό το μοντέλο επιμερισμού μπορεί να δώσει μια σαφώς ορθολογικότερη προσέγγιση, πιθανοτικά θεμελιωμένη. Πράγματι με το συγκεκριμένο μοντέλο, για δεδομένο ολικό ύψος ή/και διάρκεια της καταιγίδας σχεδιασμού, μπορούν να καταρτιστούν οσαδήποτε ισοπίθανα υετογράμματα μελέτης, που θα έχουν τη στοχαστική δομή της πραγματικής βροκόπτωσης. Αν αυτά συνδυαστούν με ένα κατάλληλο μοντέλο βροχής-απορροής, θα προκύψουν ισάριθμα εναλλακτικά πλημμυρογραφήματα μελέτης. Η επιλογή του τελικού υδρογραφήματος σχεδιασμού μπορεί στη συνέχεια να γίνει μετά από στοιχειώδη στατιστική ανάλυση των συνθετικών παροχών αιχμής, αφού επιλεγεί ένα ανεκτό επίπεδο πιθανότητας. Μάλιστα με συνδυασμό αυτού του επιπέδου πιθανότητας με την πιθανότητα υπέρβασης του ολικού ύψους της καταιγίδας σχεδιασμού, μπορεί να προσδιοριστεί η πραγματική πιθανότητα υπέρβασης της τελικής πλημμύρας σχεδιασμού. Βεβαίως προϋπόθεση για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής είναι η κατάλληλη στοχαστική ανάλυση της δομής των ιστορικών καταιγίδων της υπό μελέτη περιοχής.





# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## A. Βασική Βιβλιογραφία (Θεωρία Πιθανοτήτων – Υδρολογία).

Κάκουλλος, Θ. Ν. [1978]: *Στοχαστικές Ανελιξεις*, Αθήνα.

Ξανθόπουλος, Θ. Σ. [1984]: *Εισαγωγή στην Τεχνική Υδρολογία*, Αθήνα.

Παντελίδης, Γ. Ν. [1972]: *Μαθηματική Ανάλυσις*, Τόμος 1, Αθήνα.

Παντελίδης, Γ. Ν. [1974]: *Μαθηματική Ανάλυσις*, Τόμος 2, Αθήνα.

Amarocho, J. and Wu, B. [1977]: "Mathematical Models for the Simulation of Cyclonic Storm Sequences and Precipitation Fields", *Journal of Hydrology*, vol. 32, pp. 329-345.

Benjamin, J. R. and Cornell, C. A. [1970]: *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*, McGraw-Hill.

Bergmann, H. and Zeyringer, T. [1986]: "High Resolution Time-Space Investigations of Rainfall Events through Timevariable Data Recording", *Hydrosoft 86, Proceedings of the 2nd International Conference, Southampton, Springer-Verlag, Berlin*.

Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. [1970]: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden Day.

Bras, R. L. and Rodriguez-Iturbe, I. [1976a]: "Rainfall Generation: A Nonstationary Time-Varying Multidimensional Model", *Water Resources Research*, vol. 12, no. 3, pp 450-456.

Bras, R. L. and Rodriguez-Iturbe, I. [1976b]: "Rainfall Network Design for Runoff Prediction", *Water Resources Research*, vol. 12, no. 6, pp 1197-1208.

De Bruin, H. A. R. [1980]: "A Stochastic Description of Wet and Dry Spells in Terms of an Effective Number of Days", *Journal of Hydrology*, vol. 45, pp. 91-99.

Eagleson, P. S. [1970]: *Dynamic Hydrology*, McGraw-Hill.

Eagleson, P. S. [1978]: "Climate, Soil and Vegetation, 2, The Distribution of Annual Precipitation Derived from Observed Storm Sequences", *Water Resources Research*, vol. 14, no. 5, pp. 713-721.

Foster, G. R., Lane, L. J., Nowlin, J. D., Laften, J. M., and Young, R. A. [1980]: *A Model to Estimate Sediment Yield from Field-Sized Areas, Development of Model*, Intern. Instit. for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.



- Franz, D. D. [1970]: *Hourly Rainfall Synthesis for a Network of Stations*, Technical Report no. 126, Department of Civil Engineering, Stanford University, Stanford, California.
- Foufoula-Georgiou, E. and Lettenmaier, D. P. [1986]: "Continuous-Time versus Discrete-Time Point Process Models for Rainfall Occurrence Series", *Water Resources Research*, vol. 22, no. 4, pp. 531-542.
- Foufoula-Georgiou, E., and Guttorp, P. [1986]: "Compatibility of Continuous Rainfall Occurrence Models with Discrete Rainfall Observations", *Water Resources Research*, vol. 22, no. 8, pp. 1316-1322.
- Grace, R. A. and Eagleson, P. S. [1966]: *The Synthesis of Short-Time-Increment Rainfall Sequences*, Report no. 91, Hydrodynamics Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
- Guttorp, P. [1986]: "On Binary Time Series Obtained from Continuous Point Processes Describing Rainfall", *Water Resources Research*, vol. 22, no. 6, pp. 897-904.
- Haan, C. T. [1977]: *Statistical Methods in Hydrology*, Iowa State University Press, Iowa.
- Haan, C. T., Allen, D. M. and Street J. O. [1976]: "A Markov Chain Model of Daily Rainfall", *Water Resources Research*, vol. 12, no. 3, pp. 443-449.
- Hershfield, D. M. [1970]: "A Comparison of Conditional and Unconditional Probabilities for Wet- and Dry-Day Sequences", *Journal of Applied Meteorology*, vol. 9, no. 5, pp. 825-827.
- Hjelmflet, A. T. [1981]: "Overland Flow from Time-Distributed Rainfall", *Journal of the Hydraulics Division*, Proceedings ASCE, vol. 107, no. HY2, pp. 227-238.
- Hoshi, K. and Burges, S. J. [1979]: "Disaggregation of Streamflow Volumes", *Journal of the Hydraulics Division*, Proceedings ASCE, vol. 105, no. HY1, pp. 27-41.
- Huff, F. A. [1967]: "Time Distribution of Rainfall in Heavy Storms", *Water Resources Research*, vol. 3, no. 4, pp. 1007-1019.
- Ison, N. T., Feyerherm, A. M. and Dean Bark, L. [1971]: "Wet-Period Precipitation and the Gamma Distribution", *Journal of Applied Meteorology*, vol. 10, no. 4, pp. 658-665.
- Johnson, E. R. and Bras, R. L. [1980]: "Multivariate Short-Term Rainfall Prediction", *Water Resources Research*, vol. 16, no. 1, pp. 173-185.
- Kavvas, M. L. and Delleur, J. W. [1981]: "A Stochastic Cluster Model of Daily Rainfall Sequences", *Water Resources Research*, vol. 17, no. 4, pp. 1151-1160

- Kottegoda, N. T. [1980]: *Stochastic Water Resources Technology*, Macmillan Press, London.
- Kottegoda, N. T. and Horder, M. A. [1980]: "Daily Flow Model Based on Rainfall Occurrences Using Pulses and a Transfer Function", *Journal of Hydrology*, vol. 47, pp. 215-234.
- Kumaraswamy, P. [1980]: "A Generalized Probability Density Function for Double Bounded Random Processes", *Journal of Hydrology*, vol. 46, pp. 79-88.
- Lall, U. and Beard, L. R. [1982]: "Estimation of Pearson Type 3 Moments", *Water Resources Research*, vol. 18, no. 5, pp. 1563-1569.
- Marien, J. L. and Vandewiele, G. L. [1986]: "A Point Rainfall Generator with Internal Storm Structure", *Water Resources Research*, vol. 22, no. 4, pp. 475-482.
- Mejia, J. M. and Rousselle, J. [1976]: "Disaggregation Models in Hydrology Revisited", *Water Resources Research*, vol. 12, no. 2, pp. 185-186.
- Murota, A. and Eto, T. [1973]: "Theoretical Studies on Gamma-Type Distribution and Runs, Their Applications in Hydrology", *Floods and Droughts, Proceedings of the 2nd International Symposium in Hydrology, Sep. 1972*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA, pp. 648-664.
- Obeysekera, J. T. B., and Yevjevich, V. [1985]: "A Note on Simulation of Samples of Gamma-Autoregressive Variables", *Water Resources Research*, vol. 21, no. 10, pp. 1569-1572.
- Papoulis, A. [1965]: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill.
- Plate, E. J. [1977]: "Intermittent Processes and Conditional Sampling", *Stochastic Processes in Water Resources Engineering, proceedings of the 2nd Int. IAHR Symposium on Stochastic Hydraulics*, Water Resources Publications, Fort Collins.
- Raudkivi, A. J. [1979]: *Hydrology - An Advanced Introduction to Hydrological Processes and Modelling*, Pergamon Press, England.
- Restepo-Posada, P. J. and Eagleson, P. S. [1982]: "Identification of Independent Rainstorms", *Journal of Hydrology*, no. 55, pp. 303-319.
- Rodda, J. C., Downing, R. A. and Law, F. M. [1976]: *Systematic Hydrology*, Newnes-Butterworths, London.
- Rodriguez-Iturbe, I. and Eagleson, P. S. [1987]: "Mathematical Models of Rainstorm Events in Space and Time", *Water Resources Research*, vol. 23, no. 1, pp. 181-190.
- Rodriguez-Iturbe, I., Gupta, V. K. and Waymire, E. [1984]: "Scale Considerations in the Modeling of Temporal Rainfall", *Water Resources Research*,

- vol. 20, no. 11, pp. 1611-1619.
- Roldan, J. and Woolhiser, D. A. [1982]: "Stochastic Daily Precipitation Models, 1, A Comparison of Occurrence Processes", *Water Resources Research*, vol. 18, no. 5, pp. 1451-1459.
- Schaake J. C., Ganslaw, M. J., Fothergill, J. W. and Harbaugh, T. E. [1972]: "Multivariate Rainfall Generator for Annual, Seasonal, Monthly and Daily Events", *Proceedings of the International Symposium on Mathematical Modeling Technics in Water Resources Systems*, vol. 2, pp. 437-460, Ottawa, Canada.
- Shaw, Elizabeth M. [1983]: *Hydrology in Practice*, Van Nostrand Reinhold, G. Britain.
- Shih, S. F. [1982]: "Raifall Variation Analysis and Optimization of Gaging Systems", *Water Resources Research*, vol. 18, no. 4, pp. 1269-1277.
- Singh, K. P. [1979]: "Synthetic Hydrologic Information - A Case Study", *Journal of the Hydraulics Division*, Proceedings ASCE, vol. 100, no. HY10, pp. 1257-1275.
- Singh, V. P. [1987]: "On Application of the Weibull Distribution in Hydrology", *Water Resources Management*, vol. 1, no. 1, pp. 33-43.
- Singh, V. P. and Singh, K. [1985]: "Derivation of the Pearson Type III Distribution by using the Principle of Maximum Entropy", *Journal of Hydrology*, vol. 80, pp. 197-214.
- Smith, J. A. and Karr, A. F. [1983]: "A Point Process Model of Summer Season Rainfall Occurrences", *Water Resources Research*, vol. 19, no. 1, pp. 95-103.
- Smith, R. E. and Schreiber, H. A. [1974]: "Point Processes of Seasonal Thunderstorm Rainfall, 2, Raifall Depth Probabilities", *Water Resources Research*, vol. 10, no. 3, pp. 418-423.
- Spiegel, M. R. [1976]: *Μαθηματικό Τυπολόγιο (μετάφραση στα ελληνικά του Mathematical Handbook of Formulas and Tables)*, ΕΣΠΙ, Αθήνα.
- Stedinger, J. R., Lettenmaier, D. P. and Vogel, R. M. [1985]: "Multisite ARMA(1,1) and Disaggregation Models for Annual Streamflow Generation", *Water Resources Research*, vol. 21, no. 4, pp. 497-509.
- Stedinger, J. R. and Vogel, R. M. [1984]: "Disaggregation Procedures for Generating Serially Correlated Flow Vectors", *Water Resources Research*, vol. 20, no. 1, pp. 47-56.
- Tao, P. C. and Delleur, J. W. [1976]: "Multistation, Multiyear Synthesis of Hydrologic Time Series by Disaggregation", *Water Resources Research*, vol. 12, no. 6, pp. 1303-1312.

- Todini, E. [1980]: "The Preservation of Skewness in Linear Disaggregation Schemes", *Journal of Hydrology*, vol. 47, pp. 199-214.
- Todorovic, P. and Yevjevich, V. [1969]: *Stochastic Process of Precipitation*, Hydrology Paper no. 35, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- Tsakiris, G., Agrafiotis, E. and Kiountouzis, E. [1984]: "Modelling the occurrence of wet and dry periods", *Proceedings of the 5th International Conference on Water Resources Planning and Management*, G. Tsakiris editor, Athens.
- Valdes, J. B., Rodriguez-Iturbe, I. and Gupta, V. K. [1985]: "Approximations of Temporal Rainfall from a Multidimensional Model", *Water Resources Research*, vol. 21, no. 8, pp. 1259-1270.
- Valencia D. and Schaake, J. C. [1972]: *A Disaggregation Model for Time Series Analysis and Synthesis*, Report no. 149, Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
- Valencia D. and Schaake, J. C. [1973]: "Disaggregation Processes in Stochastic Hydrology", *Water Resources Research*, vol. 9, no. 3, pp. 211-219.
- Waymire, E. and Gupta, V. K. [1981a]: "The Mathematical Structure of Rainfall Representations, 1, A Review of the Stochastic Rainfall Models", *Water Resources Research*, vol. 17, no. 5, pp. 1261-1272.
- Waymire, E. and Gupta, V. K. [1981b]: "The Mathematical Structure of Rainfall Representations, 2, A Review of the Theory of Point Processes", *Water Resources Research*, vol. 17, no. 5, pp. 1273-1285.
- Waymire, E. and Gupta, V. K. [1981c]: "The Mathematical Structure of Rainfall Representations, 3, Some Applications of the Point Process Theory to Rainfall Processes", *Water Resources Research*, vol. 17, no. 5, pp. 1287-1294.
- Waymire, E., Gupta, V. K. and Rodriguez-Iturbe, I. [1984]: "A spectral theory of rainfall intensity at the meso- $\beta$  scale", *Water Resources Research*, vol. 20, no. 10, pp. 1453-1465.
- Woolhiser, D. A. and Osborn, H. B. [1985]: "A Stochastic Model of Dimensionless Thunderstorm Rainfall", *Water Resources Research*, vol. 21, no. 4, pp. 511-522.
- Woolhiser, D. A. and Roldan, J. [1982]: "Stochastic Daily Precipitation Models, 2, A Comparison of Distribution Amounts", *Water Resources Research*, vol. 18, no. 5, pp. 1461-1468.
- Yevjevich, V. [1972]: *Probability and Statistics in Hydrology*, Water Resources

Publications, Fort Collins, Colorado.

Yevjevich, V. [1972b]: *Stochastic Processes in Hydrology*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.

Yevjevich, V. and Obeysekera, J. B. [1984]: "Estimation of Skewness of Hydrologic Variables", *Water Resources Research*, vol. 20, no. 7, pp. 935-943.

#### B. Βοηθητική Βιβλιογραφία (Αλγόριθμοι - Προγράμματα Η/Υ).

Αλεβίζος, Θ. και Καμπουρέλης, Α. [1984]: *Μαθήματα Προγραμματισμού - Εισαγωγή με τη Γλώσσα Pascal*, Αθήνα.

Crandall, R. E. [1984]: *Pascal Applications for the Sciences*, John Wiley & Sons, New York.

McGregor, J. J. [1983]: *Pascal for Science and Engineering*, Pitman, London.

Moffat, D. V. [1984]: *Common Algorithms in Pascal*, Prentice-Hall, New Jersey.

Osborn/ McGraw-Hill (editor) [1982]: *Some Common Pascal Programs*, McGraw-Hill, Berkeley, California.

Schneider, G. M. and Bruel, S. C. [1981]: *Advanced Programming and Problem Solving with Pascal*, John Wiley & Sons, New York.