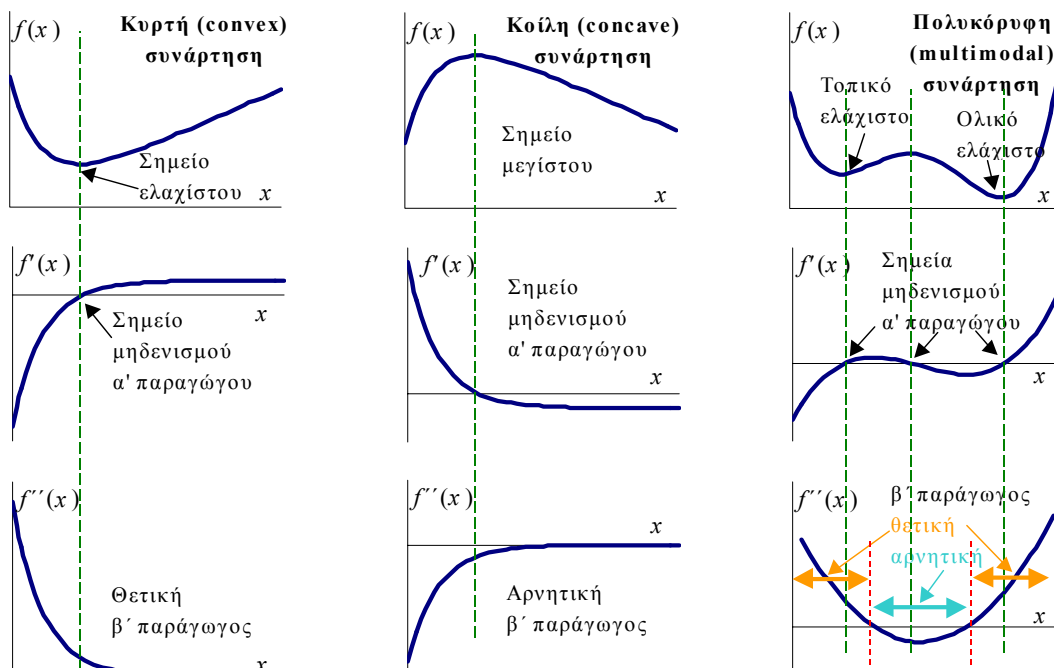


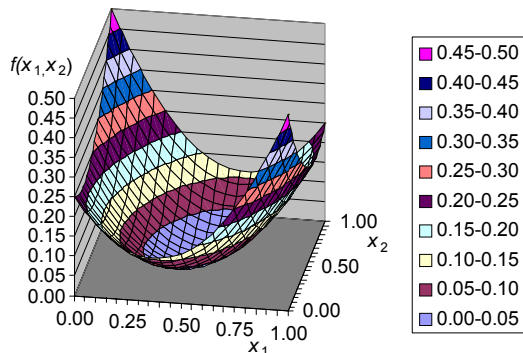
Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων

Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Η βελτιστοποίηση για απλή πραγματική στοχική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής



Η βελτιστοποίηση για απλή πραγματική στοχική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής

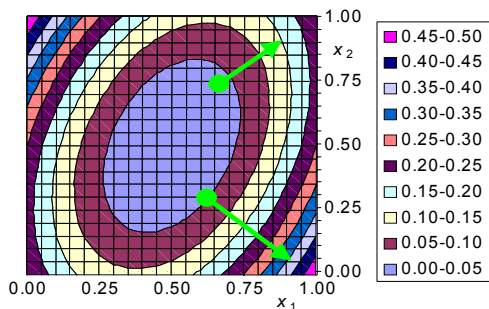


Μεταβλητές ελέγχου: x_1, x_2 , (χώρος δύο διαστάσεων): συμπυκνώνονται σε μία **διανυσματική μεταβλητή:** $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$

Στοχική συνάρτηση (πραγματική):

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.5(x_2 - 0.5)^2 - 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

Το γράφημα της συνάρτησης στο πεδίο ($0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$) φαίνεται στα διπλανά σχήματα (πάνω τριδιάστατη προοπτική απεικόνιση, κάτω διδιάστατη απεικόνιση με μορφή ισοτιμικών καμπυλών).



Κλίση:

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{df}{d\mathbf{x}} \right)^T = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]^T =$$

$$[2(x_1 - 0.5) - 0.5(x_2 - 0.5), (x_2 - 0.5) - 0.5(x_1 - 0.5)]^T$$

Παραδείγματα τιμών κλίσης:

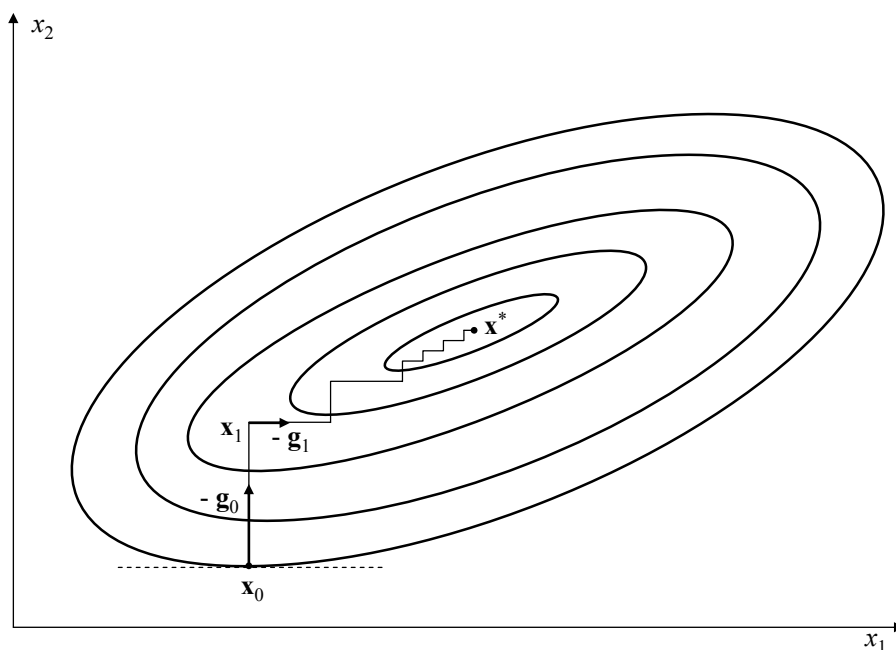
Για $\mathbf{x} = [0.6, 0.3]^T$, $\text{grad}(f) = [0.3, -0.25]^T$

Για $\mathbf{x} = [0.65, 0.75]^T$, $\text{grad}(f) = [0.175, 0.175]^T$

Συνθήκη ακροτάτου: $\text{grad}(f) = \mathbf{0}$

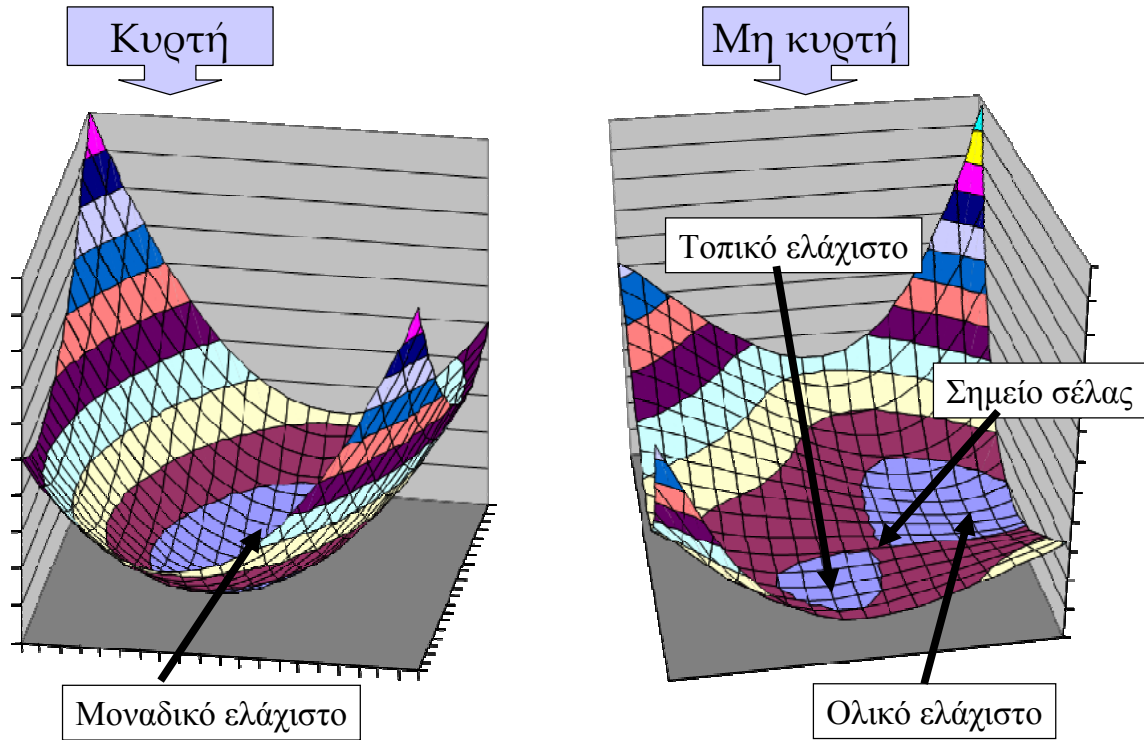
Δ. Κουτσογιάννης, Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων 3

Εντοπισμός ελαχίστου με τη μέθοδο της πιο απότομης κατάβασης



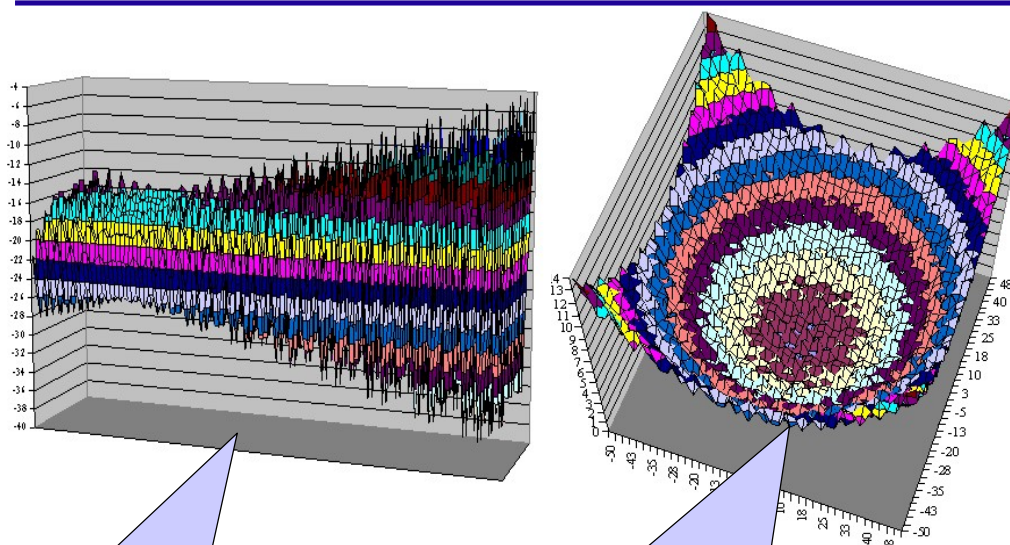
Δ. Κουτσογιάννης, Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων 4

Κυρτές και μη κυρτές διανυσματικές συναρτήσεις



Δ. Κουτσογιάννης, Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων 5

Παραδείγματα έντονα μη κυρτών (πολυκόρυφων) διανυσματικών συναρτήσεων



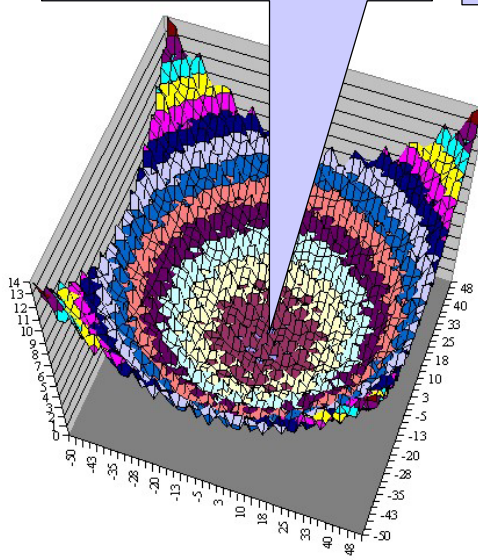
Συνάρτηση Michalewicz
 $f(x_1, x_2) = -21.5 + x_1 \sin(4\pi x_1) + x_2 \sin(20\pi x_2)$

Συνάρτηση Griewank (για $n = 2$)
 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{12} + x_2^2 + \dots + x_n^2)/400 - \cos(x_1/\sqrt{1}) \cos(x_2/\sqrt{2}) \dots \cos(x_n/\sqrt{n}) + 1$

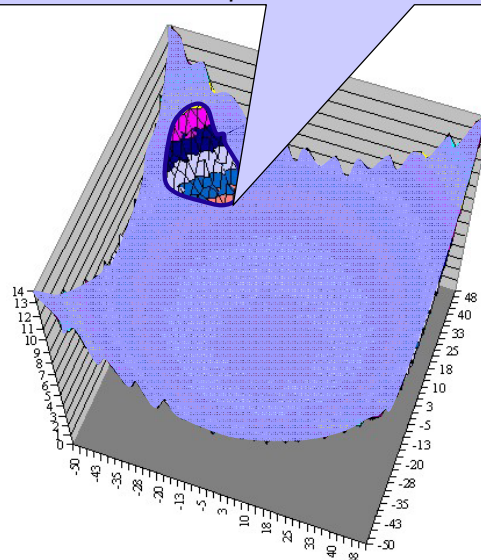
Δ. Κουτσογιάννης, Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων 6

Η έννοια των περιορισμών και της εφικτής περιοχής

Ελαχιστοποίηση χωρίς περιορισμούς: το ολικό ελάχιστο είναι εδώ



Εισαγωγή περιορισμού με εφικτή περιοχή τη μη γραμμοσκιασμένη: το ολικό ελάχιστο μετατίθεται εδώ



Δ. Κουτσογιάννης, Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων 7

Εντοπισμός ολικού ακροτάτου σε πολυκόρυφες διανυσματικές συναρτήσεις

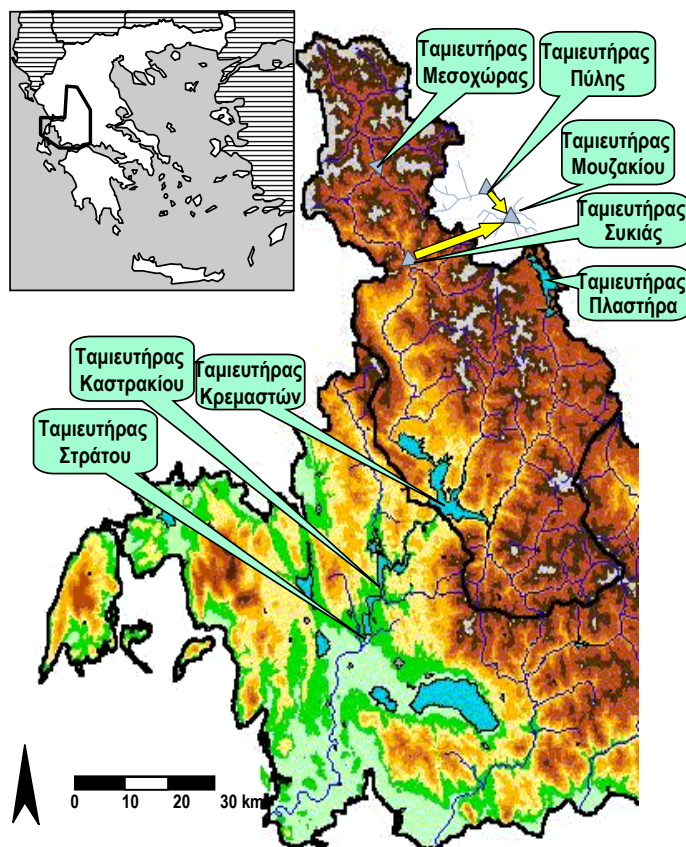
- Δεν υπάρχει εγγυημένη μεθοδολογία εντοπισμού του ολικού ακροτάτου
- Μέθοδοι κλασικών μαθηματικών (π.χ. της πιο απότομης κατάβασης) → εγκλωβισμός σε τοπικά ακρότατα
- Μέθοδοι διακριτοποίησης και απαριθμητικής αναζήτησης → «κατάρρα» της διαστατικότητας
- Μέθοδοι τυχαίας αναζήτησης → αργή & μη αντικειμενική διαδικασία
- Μέθοδοι συνδυασμού κλασικών μαθηματικών και τυχαίας αναζήτησης → η πιο πρόσφορη μέθοδος αλλά δεν εγγυάται τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης
- Παράδειγμα: Προσομοιωμένη ανόπτηση → προσδιορίζουμε την κατεύθυνση κατάβασης αλλά επιτρέπουμε να κινηθούμε και ανάποδα (με δεδομένη πιθανότητα) για να αποφύγουμε τον εγκλωβισμό

Δ. Κουτσογιάννης, Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων 8

Παρατηρήσεις για προβλήματα βελτιστοποίησης υδατικών πόρων

- ❑ Τα προβλήματα περιλαμβάνουν πολλές μεταβλητές ελέγχου
- ❑ Η στοχική συνάρτηση δεν είναι δεδομένη. Συχνά υπάρχουν πολλές που συνδέονται με την οικονομικότητα, την αξιοπιστία, την ποιότητα του νερού, κ.ά.
- ❑ Περιορισμοί υπάρχουν πάντα
- ❑ Τόσο η στοχική συνάρτηση, όσο και οι περιορισμοί δεν έχουν απλές μαθηματικές εκφράσεις. Συνήθως μπορούν να προσδιοριστούν τιμές τους για δεδομένες τιμές των μεταβλητών ελέγχου μέσα από αριθμητικές διαδικασίες (π.χ. προσομοίωση)
- ❑ Τα προβλήματα είναι συνήθως μη κυρτά και οι στοχικές συναρτήσεις πολυκόρυφες. Εξαιρέση: γραμμικά προβλήματα
- ❑ Το ουσιαστικότερο (και ξεχωριστό για κάθε πρόβλημα) μέρος είναι η κατάστρωση του προβλήματος. Για το αλγοριθμικό μέρος προσφέρονται σήμερα πολλές επιλογές

Δ. Κουτσογιάννης, Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων 9

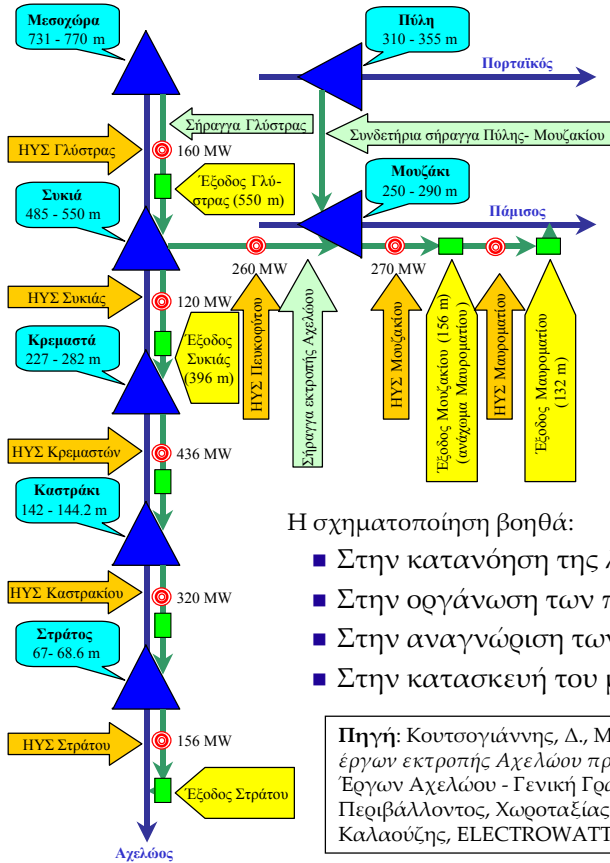


Τελικό παράδειγμα: Μελέτη του υδροσυστήματος Αχελώου-Θεσσαλίας

- 5 ταμιευτήρες στον Αχελώο (+Πλαστήρα)
- Σενάριο εκτροπής στη Θεσσαλία με 2 επιπλέον ταμιευτήρες
- 7 υδροηλεκτρικοί σταθμοί (κατά μέγιστο)
- Σύστημα αγωγών εκτροπής
- Κύρια χρήση: Υδροηλεκτρική ενέργεια
- Δευτερεύουσα χρήση: άρδευση
- Περιβαλλοντικές δεσμεύσεις

Δ. Κουτσογιάννης, Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων 10

Σχηματοποίηση του υδροσυστήματος Αχελώου - Θεσσαλίας



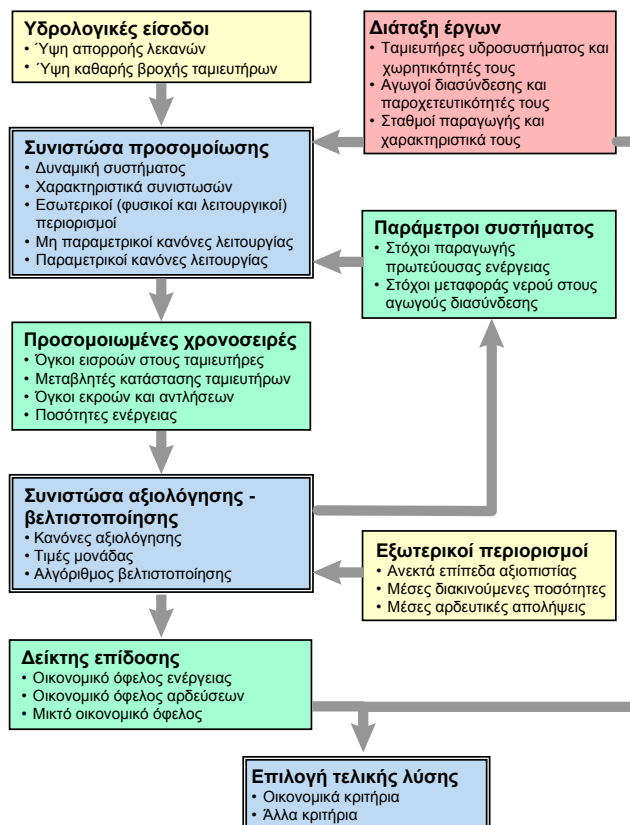
Η σχηματοποίηση βοηθά:

- Στην κατανόηση της λειτουργίας του συστήματος
- Στην οργάνωση των πληροφοριών
- Στην αναγνώριση των ουσιαδών στοιχείων
- Στην κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου

Πηγή: Κουτσογιάννης, Δ., Μελέτη λειτουργίας ταμιευτήρων, Γενική διάταξη έργων εκτροπής Αχελώου προς Θεσσαλία, Ανάδοχος: Ειδική Υπηρεσία Δημοσίων Έργων Αχελώου - Γενική Γραμματεία Δημοσίων Έργων - Υπουργείο Περιβάλλοντος, Χωροταξίας και Δημόσιων Έργων, Συνεργαζόμενοι: Γ. Καλαούζης, ELECTROWATT, Π. Μαρίνος, Δ. Κουτσογιάννης, 420 σελίδες, 1996.

Δ. Κουτσογιάννης, Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων 11

Διάρθρωση του συνολικού μαθηματικού μοντέλου του υδροσυστήματος Αχελώου-Θεσσαλίας



Στόχος του μοντέλου: Επαναθεώρηση της Γενικής Διάταξης των Έργων Εκτροπής του Αχελώου προς τη Θεσσαλία (Ρυθμιστικοί όγκοι, υδροηλεκτρικοί σταθμοί) με στόχο τη μεγιστοποίηση του οικονομικού οφέλους από παραγωγή ενέργειας και γεωργική αξιοποίηση

Δ. Κουτσογιάννης, Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων 12