ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ-ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΓΕΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑ ΝΕΑΣ ΓΕΝΙΑΣ/ΕΥΡΩΠΑΙΚΟ ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΜΕ ΘΕΜΑ: **"ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΤΑΣΙΑΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ"**

ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ
ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕΣΩΝ, ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΠΑΡΟΧΩΝ

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΛΥΨΗ 6 ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΩΡΩΝ

ΑΠΟ ΤΟΝ: ΔΗΜΗΤΡΗ ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΗ
ΔΡ. ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ
ΕΠΙΣΤ. ΣΥΝΕΡΓΑΤΗ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 10-24 ΜΑΙΟΥ 1989

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Φύση υδρολογικών μεταβολών [1], [3]

Ολες οι υδρολογικές μεταβλητές (απορροή, βροχόπτωση, εξάτμιση κλπ) δεν έχουν καθορισμένες τιμές στο χρόνο, αλλά εμφανίζουν τυχαίες διακυμάνσεις. Περιέχουν επίσης και συνιστώσες προσδιοριστικές (ντετερμινιστικές), αλλά συνήθως οι τυχαίες συνιστώσες είναι οι καθοριστικές. Οι προσδιοριστικές συνιστώσες μπορεί να είναι περιοδικές ή μη περιοδικές (π.χ. τάσεις, άλματα) και προσδιορίζονται σε τελευταία ανάλυση από τις μεταβολές των κλιματικών και φυσιογραφικών χαρακτηριστικών. Οι τυχαίες (ή ακριβέστερα στοχαστικές) διακυμάνσεις δεν μπορούν να αποδοθούν σε συγκεκριμένους φυσικούς μηχανισμούς, αλλά περιγράφονται από τη μαθηματική Θεωρία Πιθανοτήτων.

1.2 Εννοια του όρου "εκτίμηση" ενός υδρολογικού μεγέθους

Λόγω του τυχαίου χαρακτήρα των υδρολογικών μεταβλητών ο όρος "εκτίμηση" χρησιμοποιείται και στην Υδρολογία με ανάλογο περιεχόμενο όπως στην Στατιστική.

Μία πληροφορία για το σφάλμα ή την ακρίβεια της εκτίμησης, λέμε ότι περιγράφει την αξιοπιστία της εκτίμησης.

Τα μεγέθη που εκτιμούμε μπορεί να είναι:

- Στατιστικές παράμετροι μιας μεταβλητής (π.χ. μέση τιμή, διασπορά, ασυμμετρία κλπ.).
- Τιμές μιας μεταβλητής που αντιστοιχούν σε δεδομένη πιθανότητα (π.χ. η τιμή της πλημμυρικής παροχής που συμβαίνει κατά μέσο όρο μια φορά στα 100 χρόνια, ή ακριβέστερα, η τιμή της πλημμυρικής παροχής που έχει πιθανότητα υπέρβασης 1:100 -ή περίοδο επαναφοράς Τ=100 χρόνια).

Μία εκτίμηση μπορεί να είναι:

- σημειακή όταν αποδίδεται με ένα συγκεκριμένο αριθμό

- <u>διαστήματος</u> όταν δίνεται με ένα διάστημα, μέσα στο οποίο θεωρούμε ότι περιέχεται (με δεδομένο ποσοστό βεβαιότητας) η τιμή της προς εκτίμηση μεταβλητής. Αυτό το δεδομένο ποσοστό βεβαιότητας λέγεται <u>βαθμός εμπιστοσύνης</u> και τα όρια του διαστήματος <u>όρια εμπιστοσύνης.</u>

1.3 Βασικές έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στατιστικής

[1], [2], [3]

- <u>Δειγματοχώρος</u> (δ): Το σύνολο όλων των δυνατών εκβάσεων ζ_i (outcomes) μιας πειραματικής μέτρησης ή παρατήρησης. Μπορεί να είναι: πεπερασμένος, άπειρος και αριθμήσιμος (διακριτός) ή άπειρος και μη αριθμήσιμος (συνεχής).

- <u>Γεγονός ή συμβάν</u> (β) (event): Κάθε υποσύνολο του δειγματοχώρου (δ). <u>Στοιχειώδες</u> είναι ένα γεγονός με ένα μόνο στοιχείο: $\{\zeta_i\}$. Ο δειγματοχώρος (δ) είναι το <u>βέβαιο γεγονός,</u> ενώ το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι το αδύνατο γεγονός.

- <u>Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας</u>
  Εστω ένα σύνολο από γεγονότα (β) ενός δειγματικού χώρου (δ), που σχηματίζουν ένα πεδίο Borel (F). Η πιθανότητα είναι μία πραγματική συνάρτηση του F, που πληρεί τα εξής τρία αξιώματα:

  1. $P(\beta) \geq 0$, όπου $\beta \in F$
  2. $P(\delta) = 1$
  3. Αν $\beta_1 . \beta_2 = \emptyset$ τότε $P(\beta_1+\beta_2)=P(\beta_1)+P(\beta_2)$, όπου β_1, $\beta_2 \in F$

- <u>Τυχαία μεταβλητή:</u> Μία συνάρτηση $X(\zeta)$ με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο και πεδίο τιμών ένα αριθμοσύνολο (π.χ. πραγματικών αριθμών). Μπορεί να είναι διακριτή ή συνεχής (σε αντιστοιχία με το δειγματικό χώρο).

- <u>Συνάρτηση κατανομής</u> ή απλώς <u>κατανομή:</u> Είναι εξ ορισμού η πιθανότητα μη υπέρβασης της τυχούσας τιμής X,
  $F_X(x) = P(X \leq x)$
  Είναι μη φθίνουσα συνάρτηση και ισχύει $0 \leq F_X(x) \leq 1$

- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
Είναι εξ ορισμού η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- Πιθανότητα υπέρβασης:

$$F_{1X}(x) = P(X>x) = 1-F_X(x)$$

Είναι μη αύξουσα συνάρτηση και ισχύει $0 \leq F_{1X}(x) \leq 1$

- Περίοδος επαναφοράς: Στην υδρολογία ο όρος περιγράφει συνήθως το αντίστροφο της πιθανότητας υπέρβασης

$$T(x) = \frac{1}{F_{1X}(x)}$$

Συχνά μπορεί να περιγράφει το αντίστροφο της συνάρτησης κατανομής, και τότε για διάκριση αναφέρεται ως περίοδος επαναφοράς ελάχιστης τιμής

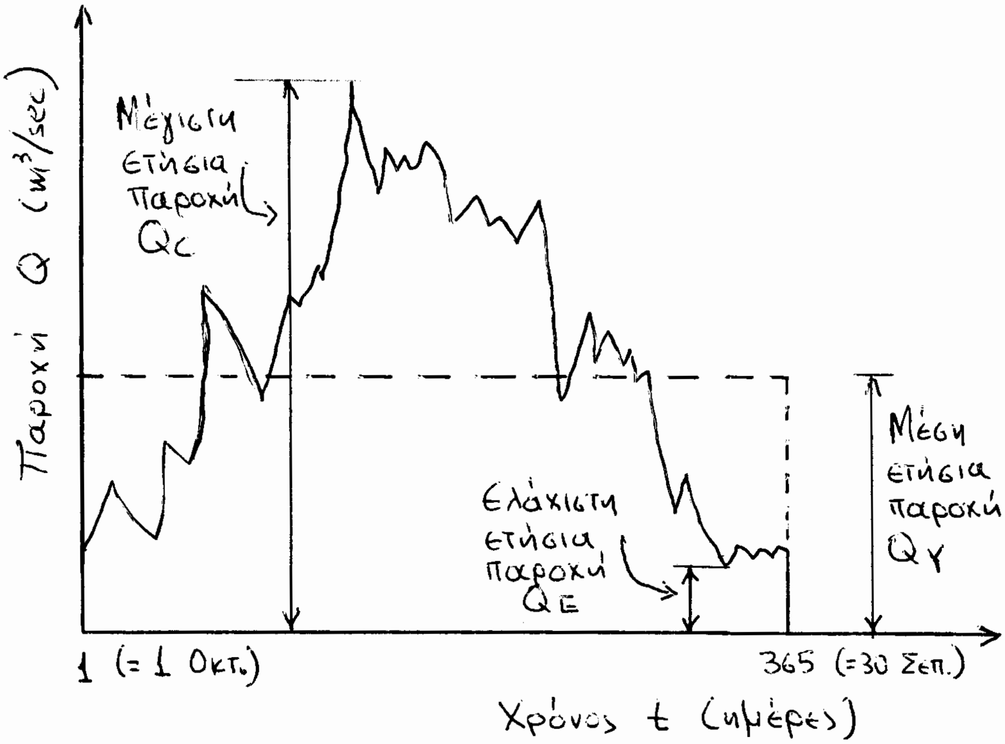
$$T'(x) = \frac{1}{F_X(x)} = \frac{1}{1-F_{1X}(x)}$$

- Πληθυσμός: Στην Στατιστική με τον όρο αυτό περιγράφεται κάθε συλλογή ή σύνολο αντικειμένων, πεπερασμένο ή άπειρο. Κάθε αντικείμενο χαρακτηρίζεται από ένα συγκεκριμένο στοιχείο (έκβαση ζ) ενός δειγματοχώρου β, και κατά συνέπεια από μία τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X_i=X(\zeta_i)$. Οι πληθυσμοί στην υδρολογία είναι συνήθως (πρακτικώς) άπειροι και αναφέρονται στο σύνολο των δυνατών παρατηρήσεων ενός μεγέθους (π.χ. το ετήσιο ύψος βροχής X_t) για $t=(-\infty, +\infty)$.

- <u>Δείγμα:</u> είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του πληθυσμού (π.χ. τα ετήσια ύψη βροχής X_t της περιόδου 1950-1988). Από την εξέταση ενός δείγματος συνάγουμε ποσοτικά συμπεράσματα για τον πληθυσμό, και σε τελευταία ανάλυση για την συνάρτηση πιθανότητας του δειγματικού χώρου που χαρακτηρίζει τον πληθυσμό. Το δείγμα χαρακτηρίζεται ως <u>τυχαίο</u> όταν κάθε στοιχείο του πληθυσμού έχει την ίδια πιθανότητα να συμπεριληφθεί σε αυτό.

1.4 Χαρακτηριστικές μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν την απορροή

Η απορροή εμφανίζει σημαντικές διακυμάνσεις κατά τη διάρκεια ενός έτους, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα (=ετήσιο υδρογράφημα).



Σχήμα 1: Τυπικό ετήσιο υδρογράφημα

Βεβαίως το σχήμα αυτό δεν επαναλαμβάνεται κάθε χρόνο αλλά αντίθετα, εμφανίζεται διαφορετικό. Στο σχήμα αυτό υπάρχει πάντα η ετήσια περιοδικότητα και είναι πιθανό να υπάρχει και κάποια άλλη προσδιοριστική συνιστώσα. Το υπόλοιπο μέρος Q′(t) της συνάρτησης Q(t), (αφού αφαιρεθούν οι προσδιοριστικές συνιστώσες) αποτελεί μία στοχαστική ανέλιξη (=τυχαία συνάρτηση του χρόνου, ή απειροπληθής οικογένεια τυχαίων μεταβλητών, με δεικτοσύνολο τον χρόνο t).

Ομως εδώ δεν θα ασχοληθούμε με την πλήρη μαθηματική περιγραφή των ανελίξεων Q(t) ή Q′(t), αλλά θα εντοπίσουμε τη μελέτη μας στις τρεις μεμονωμένες στοχαστικές μεταβλητές που διακρίνονται στο σχήμα, οι οποίες παρουσιάζουν και το μεγαλύτερο πρακτικό ενδιαφέρον, ήτοι

- Τη μέση ετήσια παροχή Q_Y
- Τη μέγιστη ετήσια παροχή Q_C

- Την ελάχιστη ετήσια παροχή Q_E

1.5 Μεθοδολογίες και παροχές μελέτης

Προϋπόθεση για την αξιόπιστη μελέτη της κάθε μιας από τις παραπάνω μεταβλητές είναι η ύπαρξη μιας σειράς μετρήσεων ικανοποιητικού μεγέθους, (π.χ. 20 ετών), η οποία λέγεται και ιστορική χρονοσειρά. Ας σημειωθεί ότι οι χρονοσειρές των παραπάνω μεταβλητών δεν είναι πάντα ανεξάρτητες (ιδίως των μέσων ετησίων παροχών Q_Y σε μεγάλα ποτάμια). Ετσι κάθε μεταβλητή Q_{Yi}, αναφερόμενη σε ένα συγκεκριμένο έτος i είναι στοχαστικά εξαρτημένη από τις αντίστοιχες μεταβλητές των προηγουμένων και επόμενων ετών. Εδώ πάντως δεν θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της συσχέτισης των διαδοχικών μεταβλητών, αλλά με τις ιδιότητες της περιθώριας κατανομής της μεταβλητής. Για τη μελέτη μας θα δεχτούμε ότι η διατιθέμενη ιστορική χρονοσειρά αποτελεί ένα τυχαίο ομογενές δείγμα, με την έννοια ότι κάθε στοιχείο της προέρχεται από τον ίδιο πληθυσμό. Εννοείται ότι για να είναι σωστή η παραδοχή μας αυτή (α) δεν θα πρέπει να υπάρχουν υπερετήσιες ντετερμινιστικές συνιστώσες (π.χ. τάσεις) (β) υπάρχει ομογένεια των μετρήσεων, με την έννοια ότι όλες οι μετρήσεις αναφέρονται στο ίδιο σημείο, και έχουν γίνει με τις ίδιες συνθήκες και (γ) η χρονοσειρά έχει επαρκές μήκος, ώστε να μπορεί να αγνοηθεί η επίδραση της στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ των διαδοχικών μεταβλητών, πάνω στα χαρακτηριστικά της περιθώριας κατανομής.

Στην πράξη είμαστε συχνά υποχρεωμένοι να κάνουμε εκτιμήσεις των παραπάνω υδρολογικών μεταβλητών με ανεπαρκή ιστορικά δεδομένα, ή και με πλήρη έλλειψη δεδομένων. Η υδρολογία διαθέτει κατάλληλες μεθοδολογίες και για αυτές τις περιπτώσεις, αλλά τα αποτελέσματα τους είναι πάντα μειωμένης αξιοπιστίας. Οι μεθοδολογίες αυτές βασίζονται σε άλλες μεταβλητές του υδρολογικού κύκλου, κυρίως στη βροχόπτωση και δευτερευόντως στην εξάτμιση, διήθηση, κατακράτηση κλπ.

Στα παρακάτω κεφάλαια θα γίνει συνοπτική αναφορά και στις δύο κατηγορίες μεθοδολογιών, δηλαδή τις άμεσες, που στηρίζονται σε δεδομένα μετρήσεων παροχής (=κύρια υδρολογική πληροφορία) και τις έμμεσες που στηρίζονται σε δεδομένα άλλων υδρολογικών μεταβλητών (=δευτερεύουσα και τριτεύουσα υδρολογική πληροφορία).

2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΤΗΣΙΑΣ ΠΑΡΟΧΗΣ

2.1 Χρησιμότητα της εκτίμησης

Η μέση ετήσια απορροή αντιπροσωπεύει το ολικό επιφανειακό υδατικό δυναμικό μιας λεκάνης απορροής. Η ποσοτική εκτίμηση της είναι απαραίτητη για τον ορθολογικό σχεδιασμό και τη λειτουργία των έργων αξιοποίησης του υδατικού δυναμικού (για ύδρευση, άρδευση, υδροηλεκτρική εκμετάλλευση κλπ.). Σημειώνεται ότι η εντατική εκμετάλλευση του υδατικού δυναμικού απαιτεί την κατασκευή ταμιευτήρων υπερετήσιας εξίσωσης, οι οποίοι αποθηκεύουν το νερό κατά τα έτη πλούσιας υδροφορίας, και το αποδίδουν κατά τα έτη φτωχής υδροφορίας. Με μικρότερου μεγέθους ταμιευτήρες, γνωστούς ως ετήσιας εξίσωσης, στους οποίους το νερό αποθηκεύεται τους μήνες υψηλής υδροφορίας (χειμώνας-άνοιξη) και αποδίδεται το καλοκαίρι, επιτυγχάνεται η αξιοποίηση μικρότερου ποσοστού του υδατικού δυναμικού. Συμπερασματικά, όσο πιο μεγάλο είναι το μέγεθος των έργων ταμίευσης, τόσο πιο μεγάλο ποσοστό του συνολικού επιφανειακού δυναμικού γίνεται εκμεταλλεύσιμο, χωρίς όμως ποτέ να φτάνει το 100%, δεδομένου ότι υπάρχουν πάντα οι απώλειες εξάτμισης, ενώ δεν μπορούν να αποκλειστούν και οι υπερχειλίσεις.

Η εκτίμηση του ολικού επιφανειακού δυναμικού είναι ακόμα χρήσιμη για περιβαλλοντικές μελέτες, κυρίως σε υδατικά συστήματα που περιλαμβάνουν λίμνες, φυσικές ή τεχνητές, καθώς και σε εκβολές ποταμών στη θάλασσα. Από την ποσότητα του υδατικού δυναμικού προκύπτουν βασικές παράμετροι τέτοιων συστημάτων, όπως οι χρόνοι ανανέωσης τους.

2.2 Τυπικές συναρτήσεις κατανομής και χρήση τους

Υπάρχουν θεωρητικοί λόγοι (θεώρημα κεντρικού ορίου) από τους οποίους προκύπτει ότι η κατανομή της μέσης ετήσιας παροχής προσεγγίζει στην κανονική κατανομή του Gauss, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad -\infty \leq x \leq +\infty \qquad (1)$$

όπου μ και σ παράμετροι της κατανομής (σ>0) και η μεταβλητή X χρησιμοποιείται σαν ισοδύναμη με την Q_y. Πράγματι, η κανονική κατανομή είναι κατάλληλη για την περιγραφή μέσων ετήσιων παροχών, σε αρκετά μεγάλες λεκάνες απορροής, με άφθονες βροχοπτώσεις, διανεμημένες σε μακρά χρονική περίοδο.

Για μικρότερες λεκάνες απορροής, (χειμάρρων) ή/και για περιοχές αρκετά ξηρές, ταιριάζουν καλύτερα ασύμμετρες συναρτήσεις κατανομής, όπως αυτές που προκύπτουν από εκθετικό ή λογαριθμικό μετασχηματισμό της κανονικής κατανομής:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{(2\pi)}} \exp\left[-\frac{(z-\mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] \qquad (2)$$

όπου

$$Z = (X^\lambda-1)/\lambda \qquad 0\leq x\leq+\infty \qquad (3)$$

με πρόσθετη παράμετρο (πέραν των μ_z και σ_z) τη $\lambda>0$, ή

$$Z = \ln(X-a) \qquad a\leq x\leq+\infty \qquad (4)$$

με πρόσθετη παράμετρο την α. Η κατανομή που προκύπτει με το μετασχηματισμό (4) είναι γνωστή ως κατανομή Galton ή λογάριθμο-κανονική. Ευρέως χρησιμοποιείται επίσης σε τέτοιες περιπτώσεις η κατανομή Γάμα ή Pearson III, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\kappa(x-a)^{\kappa-1}\exp[-\lambda(x-a)]}{\Gamma(\kappa)} \qquad a\leq x\leq+\infty \qquad (5)$$

όπου α, κ, παράμετροι (κ,λ>0) κι και Γ() η συνάρτηση γάμα. Για α=0 προκύπτει η κατανομή Γάμα 2 παραμέτρων.

Η εκτίμηση παραμέτρων μιας κατανομής μπορεί να γίνει με βάση το διατιθέμενο ιστορικό δείγμα. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι εκτίμησης· εδώ θα περιγράψουμε συνοπτικά τη μέθοδο των ροπών. Η μέθοδος συνίσταται στην εξίσωση των θεωρητικών ροπών της συνάρτησης κατανομής (που εξαρτώνται από τις παραμέτρους της κατανομής) με τις εμπειρικές εκτιμήσεις τους, που προέρχονται από το δείγμα. Προφανώς καταστρώνονται τόσες εξισώσεις, όσες είναι και οι άγνωστες παράμετροι. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με τις συναρτήσεις κατανομής δύο παραμέτρων, οπότε μας χρειάζονται οι δύο πρώτες ροπές, η μέση τιμή (μ) και η διασπορά (σ^2). Οι αμερόληπτες εμπειρικές εκτιμήσεις τους από ένα δείγμα τιμών X_i, i=1, ...,N δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mu}_X = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \tag{6}$$

$$\hat{\sigma}^2_X = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i-\mu_X)^2}{N-1} \tag{7}$$

Με εφαρμογή της μεθόδου των ροπών προκύπτουν οι ακόλουθες, άμεσα εφαρμόσιμες εξισώσεις εκτίμησης παραμέτρων:

α) Για την κανονική κατανομή

$$\mu = \hat{\mu}_X, \qquad \sigma^2 = \hat{\sigma}^2_X \tag{8}$$

β) Για την λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων (α=0)

$$\sigma^2_Z = \ln[1+ (\hat{\sigma}^2_X/\hat{\mu}^2_X)], \quad \mu_z = \ln \hat{\mu}_X-(\hat{\sigma}^2_Z/2) \tag{9}$$

γ) Για την κατανομή γάμα δύο παραμέτρων (α=0)

$$\kappa = \frac{\hat{\mu}_X^2}{\hat{\sigma}_X^2}, \qquad \lambda = \frac{\hat{\mu}_X}{\hat{\sigma}_X^2} \tag{10}$$

2.3 Εκτίμηση της μέσης ετήσιας εισροής για δεδομένη πιθανότητα υπέρβασης

Οταν είναι γνωστή η μαθηματική μορφή της συνάρτησης κατανομής $F_X(x)$ μιας μεταβλητής X, και έχουν εκτιμηθεί οι παράμετροί της, είναι εύκολο να υπολογιστεί κάποια συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής, που αντιστοιχεί σε δεδομένη τιμή της πιθανότητας μη υπέρβασης F_X=y ή της πιθανότητας υπέρβασης F_{1X} = 1-y: Αρκεί να λυθεί ως προς x η εξίσωση $F_X(x)$=y. Βέβαια, σε όλες τις συναρτήσεις κατανομής της προηγούμενης παραγράφου δεν προκύπτει απλή αναλυτική επίλυση της εξίσωσης ως προς x. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί απαιτούν τη χρήση στατιστικών πινάκων ή ηλεκτρονικού υπολογιστή, με παράλληλη χρήση αριθμητικής ανάλυσης.

Οι προκύπτουσες με τον τρόπο αυτό τιμές της μεταβλητής x, αποτελούν σημειακές εκτιμήσεις της, με την έννοια που έχει αποσαφηνιστεί στην παράγραφο 1.2. Η εξαγωγή εκτίμησης διαστήματος είναι ένα πρόβλημα αρκετά πολύπλοκο, και δεν εξετάζεται εδώ. Πάντως για ορισμένες κατανομές όπως η κανονική, το πρόβλημα αντιμετωπίζεται αναλυτικά [1], ενώ για άλλες κατανομές είναι απαραίτητο να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους επίλυσης (π.χ. Monte Carlo).

Ενα παράδειγμα εκτιμήσεων για την κανονική κατανομή δίνεται στην ακόλουθη εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

Σε κατάλληλη θέση ενός χειμάρρου μελετάται η κατασκευή ταμιευτήρα ετήσιας εξίσωσης, για αρδευτική εκμετάλλευση. Οι απορροές του χειμάρρου πραγματοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά το χειμώνα και την άνοιξη, ενώ η εκμετάλλευσή τους γίνεται αποκλειστικά το καλοκαίρι και τους πρώτους φθινοπωρινούς μήνες. Τεχνικοί και οικονομικοί λόγοι καθόρισαν την ωφέλιμη χωρητικότητα του ταμιευτήρα σε $25*10^6$ m^3 και τη μέση επιφάνεια που κατακλύζεται σε 1 km^2. Στη θέση του φράγματος έχει εκτελεστεί ένα 20ετές πρόγραμμα υδρομετρήσεων. Από το σχετικό δείγμα μεγέθους N=20, προέκυψαν (σχέσεις (6) και (7)) τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ετήσιας απορροής (=(μέση ετήσια παροχή)x(χρόνος)): $\hat{\mu}$ = $21,2*10^6$ m^3 και $\hat{\sigma}$ = $5.5*10^6$ m^3. Με την προϋπόθεση ότι κατά τη λειτουργία του ταμιευτήρα θα εξαντλούνται σε κάθε αρδευτική περίοδο τα υδατικά αποθέματα, ζητούνται: (α) η δυνατή απόληψη που εξασφαλίζεται με πιθανότητα 90% και 50% και (β) η συχνότητα με την οποία θα συμβαίνουν υπερχειλίσεις στον ταμιευτήρα. Να θεωρηθεί ότι οι καθαρές απώλειες εξάτμισης (=εξάτμιση-βροχόπτωση) κάθε χρόνο είναι σταθερές, ίσες με 500 mm.

Λύση

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο η κατανομή των εισροών στον ταμιευτήρα δεν θα πρέπει να είναι κανονική. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες στο θέμα της επιλογής της κατάλληλης κατανομής θα δεχτούμε σαν τέτοια την λογαριθμοκανονική δύο παραμέτρων. Οι παράμετροι της υπολογίζονται από τις σχέσεις (10) και είναι:

$$\sigma_Z^2 = \ln\left[1 + \frac{(5.5)^2}{(21.2)^2}\right] = 0.0651$$

ή

$$\sigma_Z = 0.255$$

και

$$\mu_z = \ln 21.2 - \frac{0.0651}{2} = 3.02$$

(Σημείωση: Για απλοποίηση των πράξεων χρησιμοποιούμε σαν μονάδα το $1*10^6$ m^3).

Ερώτημα (α)

(α1) Δίνεται $P(Q_Y \geq q) = F_{1QY}(q) = 90\%$, άρα $F_{QY}(q) = 1-0.90 = 0.10$, και ζητείται η τιμή q. Προφανώς ισχύει $F_Z(z) = F_{QY}(q) = 0.10$ όπου $z = \ln q$, (σχέση (4)) Η $F_Z(z)$ είναι η κανονική συνάρτηση κατανομής (2). Από τον πίνακα της κανονικής κατανομής για F=0.10 προκύπτει ότι η τυποποιημένη μεταβλητή u = $[(Z-\mu_Z)/\sigma_Z]$ έχει την τιμή u= -1.285 και κατά συνέπεια z = -1.285 * 0.255 + 3.02 = 2.69. Αρα $q = e^z = e^{2.69} = 14.8(*10^6\ m^3)$.

(α2) Δίνεται $P(Q_Y \geq q) = 50\% \longrightarrow F_Z(z)=F_{QY}(q)=0.50$. Θα είναι u=0 και z=3.02, άρα $q = e^{3.02} = 20.5(*10^6\ m^3)$

Τα παραπάνω αποτελέσματα αναφέρονται σε εισροές στον ταμιευτήρα. Οι απολήψεις θα είναι μειωμένες κατά την ποσότητα της καθαρής απώλειας εξάτμισης, που είναι:

$\varepsilon = 0.5\text{m} * 10^6\ \text{m}^2 = 0.5 * 10^6\ \text{m}^3$.

Κατά συνέπεια, σε 90 από τις 100 αρδευτικές περιόδους η απόληψη θα είναι μεγαλύτερη ή ιση των $(14.8-0.5)*10^6\ \text{m}^3 = 14.3 * 10^6\ \text{m}^3$, ενώ στις μισές αρδευτικές περιόδους η απόληψη θα είναι μεγαλύτερη ή ιση των $(20.5-0.5)*10^6\ \text{m}^3 = 20.0 * 10^6\ \text{m}^3$.

Ερώτημα (β)

Προφανώς υπερχειλίσεις συμβαίνουν όταν η εισροή είναι μεγαλύτερη από τον όγκο του ταμιευτήρα. Η πιθανότητα να έχουμε υπερχείλιση είναι:

$p_Y = P(Q_Y > V)$ όπου $V = 25(*10^6\ \text{m}^3)$.

Αλλά $p_Y = F_{1QY}(V) = 1-F_{QY}(V) = 1-F_Z(\ln z)$

Η τυποποιημένη κανονική μεταβλητή είναι:

$$u = \frac{\ln 25-3.02}{0.255} = 0.796,$$

και από τον πίνακα της κανονικής κατανομής προκύπτει $F_Z = 0.787$. Αρα $p_Y = 1-0.787=21.3\%$. Συμπερασματικά, κατά μέσο όρο στα 21.3 από τα 100 χρόνια θα συμβαίνουν υπερχειλίσεις στον ταμιευτήρα.

2.4 Εκτίμηση της μέσης υπερετήσιας παροχής

Με τον όρο μέση υπερετήσια παροχή μ_{QY} εννοούμε τη μέση τιμή της μεταβλητής Q_Y. Προφανώς η σημειακή εκτίμηση της δίνεται από το μέσο όρο των μέσων ετησίων παροχών του δείγματος $\overline{Q}_Y$ (σχέση (6)). Αντίστοιχα οι εκτιμήσεις διαστήματος της μ_{QY} δίνονται από τη μελέτη της κατανομής της δειγματικής μέσης τιμής $\overline{Q}_Y$, θεωρούμενης ως τυχαίας μεταβλητής.

Με την προϋπόθεση ότι η $\overline{Q}_Y$ ακολουθεί κανονική κατανομή, τα όρια εμπιστοσύνης q_{Y1}, και q_{Y2} για την μέση υπερετήσια παροχή μ_{QY}, δίνονται από τη σχέση:

$$q_{Y1,2} = \hat{\overline{q}}_Y \pm \frac{\hat{\sigma}_{QY}\, t_{(1-a)/2}}{\sqrt{n}} \qquad (11)$$

όπου

$\hat{\overline{q}}_Y$	=	η δειγματική μέση τιμή
σ_{QY}	=	η δειγματική τυπική απόκλιση
n	=	το μέγεθος του δείγματος
$t_{(1-a)/2}$	=	η τιμή της τυχαίας μεταβλητής του Student, για n-1 βαθμούς ελευθερίας και για πιθανότητα υπέρβασης $(1-a)/2$
a	=	ο επιθυμητός βαθμός εμπιστοσύνης $(0<a<1)$.

Σημειώνεται ότι όσο μεγαλύτερη τιμή του a επιλέγεται, τόσο πιο ευρύ είναι και το διάστημα εμπιστοσύνης. Τυπικές τιμές που χρησιμοποιούνται είναι από $a=0.90$ μέχρι $a=0.99$.

Τα παραπάνω είναι κατά προσέγγιση σωστά και για περιπτώσεις που η Q_Y δεν ακολουθεί κανονική κατανομή.

Εφαρμογή 2

Μία λίμνη μέσης έκτασης F=10 km² και μέσου όγκου $V=20*10^6$ m^3 τροφοδοτείται με την απορροή χειμάρρων με συνολική έκταση λεκανών 200 Km². Η αθροιστική ετήσια απορροή των χειμάρρων, εκτιμωμένη από δείγμα 18 ετών, έχει μέση τιμή $\hat{q}_Y=80.0*10^6$ m^3 και τυπική απόκλιση $\sigma_{QY} = 14.0*10^6$ m^3. Η καθαρή απώλεια εξάτμισης (=εξάτμιση-βροχόπτωση) στη λίμνη μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, ίση με 700 mm ετησίως, ενώ τα περισσεύματα απορροής διαφεύγουν υπόγεια ή υπερχειλίζουν προς παρακείμενη αποχετευτική τάφρο. Ζητείται η σημειακή εκτίμηση και τα όρια εμπιστοσύνης (για βαθμό εμπιστοσύνης 95%) του μέσου χρόνου ανανέωσης της λίμνης.

Λύση

Ο μέσος χρόνος ανανέωσης της λίμνης δίνεται από την (προφανή) σχέση:

$$t_a(\text{έτη}) = \frac{V}{q_\kappa}$$

όπου q_κ είναι η καθαρή μέση ετήσια εισροή στη λίμνη, (εκφρασμένη σε όγκο/έτος). Στο μέγεθος q_κ έχουν αφαιρεθεί οι καθαρές απώλειες εξάτμισης, δεδομένου ότι αυτές δεν συντελούν στην ανανέωση του νερού της λίμνης (εξατμίζεται μόνο καθαρό νερό ενώ οι περιεχόμενες. Αν ο όγκος V της λίμνης θεωρηθεί σταθερός, τότε το πρόβλημα της εκτίμησης του χρόνου t_a μεταπίπτει στην εκτίμηση του q_κ.

Η σημειακή εκτίμηση της μέσης εισροής είναι προφανώς η:

$$\hat{q}_Y = 80 * 10^6 \ m^3$$

Από τον πίνακα τιμών της μεταβλητής Student για (1-α)/2=0.025 και για N-1=17 βαθμούς ελευθερίας προκύπτει $t_{(1-a)/2} = 2.11$ οπότε τα όρια για την μ_{QY} θα είναι:

$$q_{Y1} = 80 - \frac{14*2.11}{\sqrt{17}} = 72.8 \ (*10^6 \ m^3)$$

$$q_{Y2} = 80 + \frac{14*2.11}{\sqrt{17}} = 87.2\ (*10^6\ m^3)$$

Για να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές της q_κ θα πρέπει να αφαιρέσουμε το μέγεθος της καθαρής απώλειας εξάτμισης, που σε ετήσια βάση είναι:

$$\varepsilon = 0.7 * 10 * 10^6 = 7 * 10^6\ m^3$$

Κατά συνέπεια τα αντίστοιχα μεγέθη για την μέση ετήσια καθαρή εισροή είναι:

$\bar{q}_\kappa$ = 73.0 * 10^6 m^3/έτος
$q_{\kappa 1}$= 65.8 * 10^6 m^3/έτος
$q_{\kappa 2}$= 80.2 * 10^6 m^3/έτος

Τέλος οι τιμές του χρόνου ανανέωσης είναι:

$$t_a = \frac{20*10^6}{73*10^6} = 0.274 \text{ έτη} = 3.3 \text{ μήνες}$$

$$t_{a1} = \frac{20 * 10^6}{65.8*10^6} = 0.304 \text{ έτη} = 3.6 \text{ μήνες}$$

$$t_{a2} = \frac{20 * 10^6}{80.2*10^6} = 0.250 \text{ έτη} = 3.0 \text{ μήνες}$$

Κατά συνέπεια, από τα υπάρχοντα στοιχεία προκύπτει ότι με διακινδύνευση λάθους 1-a = 5%, ο μέσος χρόνος ανανέωσης της λίμνης κυμαίνεται στο διάστημα από 3.0 μέχρι 3.6 μήνες με μέση τιμή 3.3 μήνες.

2.5 Πρακτικές μέθοδοι εκτίμησης με ελλιπή στοιχεία

Θα αναφερθούμε σε δύο σχετικά απλές μεθόδους εκτίμησης του υδατικού δυναμικού, όταν τα διαθέσιμα στοιχεία είναι ανεπαρκή, ή και λείπουν παντελώς.

Η πρώτη μέθοδος στηρίζεται (α) στη βροχόπτωση της υπό εξέταση λεκάνης απορροής και (β) στην απορροή και τη βροχόπτωση μιας γειτονικής λεκάνης, με παρόμοιο μέγεθος, τοπογραφική διαμόρφωση και γεωλογική σύσταση, που βρίσκεται κάτω από παρόμοιες κλιματικές συνθήκες. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η απορροή της υπό εξέταση λεκάνης (μέση ετήσια παροχή ενός συγκεκριμένου έτους, η μέση υπερετήσια παροχή) εκφρασμένη σε ισοδύναμο ύψος στη λεκάνη προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$Q_Y = C \cdot P \qquad (12)$$

όπου P η ετήσια βροχόπτωση και C ο συντελεστής απορροής, ο οποίος λαμβάνεται ίσος με τον αντίστοιχο συντελεστή της γειτονικής λεκάνης C′,

$$C = C' = \frac{Q'_Y}{P'} \qquad (13)$$

όπου Q'_Y η μετρημένη απορροή και P′ η μετρημένη βροχόπτωση της γειτονικής λεκάνης.

Η δεύτερη μέθοδος στηρίζεται στη βροχόπτωση και την εξάτμιση της υπό εξέταση λεκάνης και βασίζεται στην απλή εξίσωση υδατικού ισοζυγίου:

$$Q_Y = P - ET \qquad (14)$$

όπου P η ετήσια βροχόπτωση και ET η ετήσια <u>πραγματική εξατμισοδιαπνοή</u> της λεκάνης. Η τελευταία εξίσωση ισχύει κατά προσέγγιση σε ετήσια βάση με την προϋπόθεση ότι η λεκάνη είναι στεγανή, δηλαδή δεν έχουμε υπόγεια κυκλοφορία νερού από και προς άλλες λεκάνες. Η βροχόπτωση P προσδιορίζεται πάντα με ικανοποιητική ακρίβεια, αλλά ο προσδιορισμός της πραγματικής εξατμισοδιαπνοής είναι πολύπλοκος και μειωμένης αξιοπιστίας, δεδομένου ότι αυτή εξαρτάται <u>και</u>

<u>από την διαθεσιμότητα νερού στο έδαφος,</u> πέρα από την προφανή εξάρτηση της από πλήθος κλιματικών παραγόντων. Στην απλούστερη των περιπτώσεων προσδιορίζεται αρχικά η <u>δυναμική εξατμισοδιαπνοή</u> (δηλαδή η εξατμισοδιαπνοή που θα συνέβαινε κάτω από συνθήκες συνεχούς κορεσμού του εδάφους) και στη συνέχεια χρησιμοποιείται ένα απλό μοντέλο που αναπαριστά την διακύμανση της εδαφικής υγρασίας, π.χ. σε μηνιαία βάση, από το οποίο υπολογίζεται στη συνέχεια η πραγματική εξατμισοδιαπνοή. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και χωρίς να υπάρχουν καθόλου μετρήσεις παροχής, αλλά πάντως τέτοιες μετρήσεις, αν υπάρχουν έστω και για λίγα χρόνια, αυξάνουν σοβαρά την αξιοπιστία της εκτίμησης, δεδομένου ότι βοηθούν στην αντικειμενικότερη εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου που χρησιμοποιείται.

2.6 Μοντέλα λεκανών απορροής

Οι δυνατότητες που παρέχουν οι σύγχρονοι υπολογιστές επέτρεψαν την κατάρτιση πολύπλοκων μαθηματικών μοντέλων, που αναπαριστούν μαθηματικά είτε την πλήρη εξέλιξη του υδρολογικού κύκλου σε μία λεκάνη απορροής, είτε ένα συγκεκριμένο τμήμα του υδρολογικού κύκλου που ενδιαφέρει. Η εφαρμογή τέτοιων μοντέλων δίνει πολύ πιο αξιόπιστους τρόπους εκτίμησης του υδατικού δυναμικού, σε σχέση με αυτούς που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Βεβαίως η εφαρμογή τους απαιτεί κάποιες, έστω και μικρού μεγέθους (λίγων ετών), χρονοσειρές ιστορικών δεδομένων, για τη ρύθμιση των παραμέτρων τους.

Σύμφωνα με την επικρατούσα κατάταξη τα μοντέλα διακρίνονται σε στοχαστικά και προσδιοριστικά. Στα πρώτα αγνοούνται οι φυσικοί μηχανισμοί που επενεργούν κατά την εξέλιξη του υδρολογικού κύκλου, και τα μοντέλα καταστρώνονται βάσει μαθηματικών (στοχαστικών) συσχετισμών των διάφορων μεταβλητών. Τα δεύτερα, αντίθετα βασίζουν τη μαθηματική τους δομή σε αυτούς τους φυσικούς μηχανισμούς. Τα προσδιοριστικά μοντέλα εν γένει περιγράφουν πληρέστερα τη συνδυασμένη εξέλιξη του συνόλου των υδρολογικών μεταβλητών μιας λεκάνης. Παίρνουν ως "εισόδους" τα χαρακτηριστικά της λεκάνης, την βροχόπτωση και τη δυναμική εξατμισοδιαπνοή, αναπαριστούν την εξέλιξη της πραγματικής εξατμισοδιαπνοής, της κατακράτησης, της διήθησης, της εδαφικής και της υπόγειας αποθήκευσης νερού, της αποθήκευσης και της τήξης του χιονιού κλπ., και καταλήγουν στην εξαγωγή της χωροχρονικής εξέλιξης της απορροής.

Τα στοχαστικά μοντέλα μπορούν να υποκαταστήσουν τα προσδιοριστικά σε συγκεκριμένα τμήματα του υδρολογικού κύκλου, και παράλληλα δίνουν τις "εισόδους" στα προσδιοριστικά μοντέλα, σε περιπτώσεις που γίνεται συνθετική προσομοίωση (simulation) της υδρολογικής δίαιτας της λεκάνης.

3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΠΑΡΟΧΗΣ

3.1 Χρησιμότητα της εκτίμησης

Κατ'αρχήν θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι η εκτίμηση ελαχίστων παροχών έχει νόημα όταν πρόκειται για ποταμούς ή αξιόλογους χειμάρρους, που τροφοδοτούνται από πηγές συνεχούς υδροφορίας. Μικρότεροι χείμαρροι καθαρώς επιφανειακής τροφοδοσίας, ξηραίνονται τελείως κατά τους καλοκαιρινούς μήνες.

Η εκτίμηση των ελάχιστων παροχών ξηρασίας αποκτά ενδιαφέρον σε περιπτώσεις που η εκμετάλλευση του νερού γίνεται με άμεση απόληψη από ένα υδατόρευμα χωρίς έργα ταμίευσης (π.χ. απευθείας άντληση). Τότε βέβαια η ελάχιστη παροχή καθορίζει την απολήψιμη ποσότητα νερού από το υδατόρευμα.

Επίσης η εκτίμηση των ελάχιστων τιμών της παροχής είναι αποφασιστικής σημασίας προϋπόθεση για μία ορθολογική περιβαλλοντική μελέτη ενός υδατορεύματος, στο οποίο καταλήγουν οποιασδήποτε μορφής ρυπαντικές ουσίες (π.χ. από διάθεση λυμάτων-αποβλήτων). Είναι προφανές ότι κατά τις περιόδους της ξηρασίας παρατηρούνται οι μέγιστες τιμές της συγκέντρωσης ρυπαντών στο νερό, και κατά συνέπεια το πρόβλημα της ξηρασίας συνδυάζεται και με την κρισιμότητα από πλευράς ρύπανσης.

Σημειώνεται ότι η ελάχιστη τιμή της παροχής δεν περιγράφει πλήρως τα χαρακτηριστικά μιας ξηρασίας. Αλλες μεταβλητές όπως η διάρκεια της ξηρασίας θα πρέπει γενικά να εξετάζονται σε συνδυασμό. Ομως εδώ θα περιοριστούμε μόνο στην μελέτη της ελάχιστης παροχής αποκλειστικά.

Η στιγμιαία ελάχιστη τιμή της παροχής, Q_E, όπως αυτή περιγράφηκε στην παράγραφο 1.4, δεν αποδίδει πιστά τα προβλήματα μιας περιόδου ξηρασίας, δεδομένου ότι οι επιπτώσεις της ξηρασίας προκύπτουν από την εμφάνιση μιας σειράς χαμηλών παροχών. Για το λόγο αυτό, αντί της στιγμιαίας τιμής προτιμάται η μελέτη μιας ελάχιστης "μέσης" παροχής, που προκύπτει ως ο μέσος όρος των παροχών σε n διαδοχικές μέρες ξηρασίας (π.χ. n=10,20,30 ημέρες). Πάντως κατά τις περιόδους ξηρασίας δεν εμφανίζονται σημαντικές διακυμάνσεις της παροχής, και κατά συνέπεια η ελάχιστη στιγμιαία τιμή δεν διαφέρει πολύ από την ελάχιστη μέση παροχή. Σε κάθε περίπτωση η μεθοδολογία στατιστικής ανάλυσης που ακολουθείται είναι η ίδια, ανεξάρτητα από το ποιά χαρακτηριστική μεταβλητή έχει επιλεγεί.

Θα πρέπει τέλος να τονιστεί ότι προϋπόθεση για την εκτιμηση της ελάχιστης παροχής είναι η ύπαρξη μετρήσεων παροχής, έστω και στιγμιαίων υδρομετρήσεων. Δεδομένου ότι οι παροχές των περιόδων ξηρασίας προέρχονται αποκλειστικά από εκφόρτιση υπόγειων υδροφορέων, δεν συσχετίζονται άμεσα με άλλες μεταβλητές του υδρολογικού κύκλου, και κατά συνέπεια δεν μπορούν να εκτιμηθούν με έμμεσο τρόπο από τις τελευταίες. Τα προσδιοριστικά μοντέλα της πλήρους (επιφανειακής και υπόγειας) υδρολογικής δίαιτας μιας λεκάνης απορροής μπορεί να βοηθήσουν, σε περίπτωση ανεπάρκειας στοιχείων, αλλά και αυτά απαιτούν ρύθμιση με βάση έστω και μιας μικρού μήκους χρονοσειράς παροχών.

3.2 Τυπικές συναρτήσεις κατανομής και χρήση τους

Οι ασυμπτωτικές κατανομές ελαχίστων, οι οποίες προκύπτουν από θεωρητικές υποθέσεις και αναλύσεις, περιγράφουν συνήθως με ικανοποιητικό τρόπο τις ελάχιστες ετήσιες παροχές Q_E. Οι κατανομές αυτές είναι:

α) Κατανομή ελαχίστων τύπου Ι, ή Gumbel με συνάρτηση κατανομής.

$$F_X(x) = 1-\exp(-\exp(a(x-x_o))), \quad -\infty \le x \le +\infty \tag{15}$$

όπου a και x_o παράμετροι (a>0)

β) Κατανομή ελαχίστων τύπου ΙΙΙ ή Weibull, με συνάρτηση κατανομής.

$$F_X(x) = 1-\exp\left[-\left[\frac{x-a}{b-a}\right]^c\right], \quad a \le x \le +\infty \tag{16}$$

όπου a, b και c παράμετροι (b>a, c>0).
Για a=0 προκύπτει η κατανομή Weibull δύο παραμέτρων.

Μία ακόμη κατανομή που έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία για τις ελάχιστες παροχές, είναι η εκθετικά μετασχηματισμένη κανονική κατανομή (βλ. παρ. 2.2).

Η εκτίμηση των παραμέτρων των κατανομών ελαχίστων με τη μέθοδο των ροπών (βλ. παρ. 2.2) γίνεται ως εξής.

α) Για την κατανομή ελαχίστων Gumbel με άμεση επίλυση των εξισώσεων

$$a = \frac{\pi/\sqrt{6}}{\hat{\sigma}_X}, \qquad x_o = \hat{\mu}_X + (\gamma/a) \tag{17}$$

όπου π=3.14159 και γ=0.577 (=σταθερά Euler).

γ) Για την κατανομή Weibull 2 παραμέτρων (a=0), με αριθμητική επίλυση των εξισωσεων (χρησιμοποιώντας επαναληπτικές μεθόδους)

$$\frac{\Gamma(1+2/c)}{\Gamma^2(1+1/c)} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\hat{\mu}_X} + 1, \qquad b = \frac{\hat{\mu}_X}{\Gamma(1+2/c)} \tag{18}$$

Λόγω της πολυπλοκότητας του χειρισμού των παραπάνω εξισώσεων της κατανομής Weibull, χρησιμοποιείται συχνά ο μετασχηματισμός

$$Z = \ln X \tag{19}$$

Η κατανομή της Z είναι η κατανομή ελαχίστων τύπου I, με παραμέτρους a=c και x_o=lnb και κατά συνέπεια οι παράμετροι b και c μπορούν να προσδιοριστούν από τις σχέσεις:

$$c = \frac{\pi/\sqrt{6}}{\hat{\sigma}_{\ln X}}, \quad b = \exp(\hat{\mu}_{\ln X} + (\gamma/c)) \tag{20}$$

3.3 Εκτίμηση ελάχιστης παροχής για δεδομένη πιθανότητα μη υπέρβασης

Λόγω των απλούστατων αναλυτικών εκφράσεων των συναρτήσεων κατανομής ελαχίστων, η σημειακή εκτίμηση της ελάχιστης παροχής που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη τιμή της πιθανότητας μη υπέρβασης $F_X(x) = y$, είναι πολύ εύκολη. Από την επίλυση των εξισώσεων (15) και (16) ως προς χ προκύπτουν αντίστοιχα οι:

$$x = x_o + \frac{\ln(-\ln(1-y))}{a} \tag{21}$$

για την κατανομή Gumbel, και

$$x = b(\ln(1-y))^{1/c} \tag{22}$$

για την κατανομή Weibull.

Συνήθως η κατανομή Weibull προσαρμόζεται καλύτερα από την κατανομή Gumbel στα δείγματα ελαχίστων παροχών, ενώ έχει και το πλεονέκτημα ότι δίνει πάντα θετικές τιμές της ελάχιστης παροχής πράγμα που δεν συμβαίνει με την Gumbel.

Εφαρμογή 3

Για την μελέτη των περιβαλλοντικών επιπτώσεων της διάθεσης των επεξεργασμένων αστικών λυμάτων των Ιωαννίνων στον Καλαμά, ζητείται η εκτίμηση των ελαχίστων παροχών δεκαημέρου του ποταμού για περιόδους επαναφοράς T=5 και 10 έτη. Η εκτίμηση θα γίνει για τη θέση Κιοτέκι, όπου λειτουργεί υδρομετρικός σταθμός, από τα δεδομένα του οποίου προέκυψε ένα δείγμα ελαχίστων παροχών δεκαημέρου μεγέθους 12 ετών. Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του δείγματος είναι μ_{QE} = 14,70 m^3/sec και σ_{QE} = 1.84 m^3/sec.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την απλούστερη κατανομή Gumbel. Οι παράμετροι της κατανομής είναι:

$$a = \frac{3.14159/\sqrt{6}}{1.84} = 0.697$$

$$x_o = 14,70 + \frac{0.577}{0.697} = 15.53$$

Για T=5 η πιθανότητα μη υπέρβασης είναι $y=F_{QE}(q_E) = 1/T = 1/5 + 0.20$, οπότε από την (21) προκύπτει:

$$q_E = 15.53 + \frac{\ln(-\ln(0.80))}{0.967} = 13.38$$

Αντιστοιχα, για T=10: $y=1/T=0.10$, οπότε:

$$q_E = 15.53 + \frac{\ln(-\ln(0.90))}{0.697} = 12.30$$

4. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΑΡΟΧΗΣ

4.1 Χρησιμότητα της εκτίμησης

Η εκτίμηση των πλημμυρικών παροχών παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για τη μελέτη έργων καθαρά αντιπλημμυρικών και αποχετευτικών ή και άλλων έργων που διατρέχουν κινδύνους από ένα ενδεχόμενο πλημμύρας. (πχ. γέφυρες, οδικά δίκτυα, φράγματα κ.α.). Λόγω του ενδιαφέροντος αυτού, ένα σημαντικό μέρος της τεχνικής υδρολογίας ασχολείται με την εκτίμηση των πλημμυρικών παροχών.

Από τη σκοπιά των περιβαλλοντικών επιπτώσεων οι πλημμύρες ενδιαφέρουν μόνο ως προς τις καταστροφές ή την υποβάθμιση που μπορούν να προκαλέσουν στο φυσικό περιβάλλον, και κυρίως σε συνδυασμό με τις φυσικές διεργασίες διάβρωσης, μεταφοράς και εναπόθεσης φερτών υλικών. Ομως η μελέτη αυτών των φυσικών διεργασιών είναι ένα πολύπλοκο αντικείμενο, και ξεφεύγει από τον σκοπό αυτών των σημειώσεων. Για το λόγο αυτό και η εξέταση των πλημμυρικών παροχών γίνεται πολύ συνοπτικά, και μόνο για λόγους πληρότητας του αντικειμένου που εξετάζεται.

4.2 Τυπικές συναρτήσεις κατανομής και χρήση τους

Η ασυμπτωτική κατανομή <u>μεγίστων</u> τύπου Ι (αντίστοιχη με την κατανομή ελαχίστων τύπου Ι) έχει την πιο διαδεδομένη χρήση για τη στατιστική περιγραφή των μεγίστων παροχών. Πρόκειται για κατανομή θετικά ασύμμετρη με συνάρτηση κατανομής:

$$F_X(x) = \exp(-\exp(-a(x-x_o)) \qquad -\infty \le x \le +\infty \tag{23}$$

όπου a και x_o παράμετροι (a>0).

Η εκτίμηση των παραμέτρων της, βασισμένη στη μέθοδο των ροπών (βλ. παρ. 2.2) γίνεται με τις σχέσεις:

$$a = \frac{\pi/\sqrt{6}}{\hat{\sigma}_X}, \quad x_o = \hat{\mu}_X-(\gamma/a) \tag{24}$$

όπου π=3.14159 και γ=0.577 (=σταθερά Euler).

Ακόμα έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως και η λεγόμενη κατανομή Log-Pearson III, που προκύπτει από την κατανομή γάμα (βλ. παρ. 2.2), με βάση το μετασχηματισμό

$$Z = \ln X \tag{25}$$

4.3 Μέθοδοι εκτίμησης με ελλιπή στοιχεία

Οταν δεν υπάρχουν κατάλληλα δεδομένα από μετρήσεις, τότε η εκτίμηση της παροχής εξάγεται έμμεσα, με συσχετισμό με την βροχόπτωση. Προϋπόθεση βέβαια είναι η ύπαρξη αξιόπιστων ιστορικών δεδομένων εντάσεων βροχής, για μικρές διάρκειες, από βροχογραφικό σταθμό της περιοχής.

Η απλούστερη μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της παροχής αιχμής της πλημμύρας σχεδιασμού ενός υπό μελέτη έργου (και όχι ενός πραγματικού πλημμυρικού φαινομένου) είναι η λεγόμενη ορθολογιστική μέθοδος, που βασίζεται στη σχέση:

$$Q_p = C \cdot i \cdot A \tag{26}$$

όπου

Q_p: η παροχή αιχμής σχεδιασμού σε μία καθορισμένη θέση ενός υδατορεύματος

A: η έκταση της λεκάνης απορροής

i: η ένταση της κρίσιμης βροχόπτωσης

C: ο συντελεστής απορροής ($0<C<1$)

Η κρίσιμη βροχόπτωση θεωρείται ότι έχει διάρκεια ίση με το χρόνο συγκέντρωσης της λεκάνης απορροής, δηλαδή το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει η απορροή από το πιο απομακρυσμένο σημείο της λεκάνης μέχρι την θέση του υδατορεύματος που εξετάζεται. Η ένταση i της βροχής προκύπτει από τις λεγόμενες "όμβριες καμπύλες", αφού επιλεγεί η κατάλληλη συχνότητα υπέρβασης. Οι καμπύλες αυτές καταρτίζονται μετά από στατιστική ανάλυση διαθέσιμων δειγμάτων εντάσεων βροχής, σε ένα ή περισσότερους σταθμούς της υπό μελέτη περιοχής. Τέλος ο συντελεστής απορροής C επιλέγεται με τη βοήθεια πινάκων ανάλογα με τις γενικές συνθήκες της λεκάνης απορροής (τοπογραφικές, γεωλογικές, χρήσης γης, φυτοκάλυψης κλπ.).

Πιο αξιόπιστες εκτιμήσεις, όχι μόνο της πλημμυρικής αιχμής αλλά της συνολικής χρονικής εξέλιξης ενός πλημμυρικού φαινομένου (πραγματικού ή σχεδιασμού) δίνει η μέθοδος του <u>μοναδιαίου υδρογραφήματος.</u> Βάση της μεθόδου αποτελεί η θεωρία των γραμμικών συστημάτων, σύμφωνα με την οποία η <u>έξοδος</u> y(t) ενός "γραμμικού συστήματος" συνδέεται με την <u>είσοδο</u> x(t) που την προκαλεί με μία συνελικτική σχέση της μορφής:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau).h(t-\tau)d\tau \qquad (27)$$

όπου h(t) είναι η λεγόμενη συνάρτηση συστήματος. Εν προκειμένω η είσοδος x(t) είναι η καθαρή βροχόπτωση (=ολική βροχόπτωση-απώλειες κατακράτησης και διήθησης), y(t) είναι η (πλημμυρική) παροχή και h(t) είναι το (στιγμιαίο) μοναδιαίο υδρογράφημα. Η εφαρμογή της μεθόδου απαιτεί να υπάρχουν ταυτόχρονες ακριβείς μετρήσεις βροχής και παροχής σε συνεχή χρονική βάση, ώστε να μπορεί να προσδιοριστεί η συνάρτηση h(t). Οι αριθμητικοί υπολογισμοί της μεθόδου είναι αρκετά απλοί στην πράξη, δεδομένου ότι γίνονται σε διακριτό χρόνο. Η μέθοδος του μοναδιαίου υδρογραφήματος είναι αρκετά αξιόπιστη για ευρεία κλίμακα λεκανών απορροής και η χρήση της είναι πολύ διαδεδομένη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ξανθόπουλος Θ. (1984): Εισαγωγή στην Τεχνική Υδρολογία, Αθήνα.

2. Spiegel, M.R. (1977): Πιθανότητες και Στατιστική, Μετάφραση στα Ελληνικά Σ. Περσίδη, ΕΣΠΙ, Αθήνα.

3. Papoulis, A. (1965): Probatility, Random Variables and Stochastic Processes, Mc Graw-Hill.

4. Yevjevich, V. (1972): Probability and Statistics in Hydrology, Water Resources Publications Fort Collins, Colorado, USA.

5. Shaw, E.M. (1983): Hydrology in Practice, Van Nostrand Reinhold, U.K.

6. Kottegoda, N.T. (1980): Stochastic Water Resources Technology, Mac Millan Press, London, U.K.

Values of the standardized normal distribution *(Continued)*

The cumulative distribution function, $F_U(u) = \int_{-\infty}^{u} f_U(u)\,du$

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725									
2.1	0.98214									
2.2	0.98610									
2.3	0.98928									
2.4	0.99180									
2.5	0.99379									
3.0	0.99865									
3.5	0.999767									
4.0	0.9999683									
4.5	0.9999966									
5.0	0.99999971									
5.5	0.999999981									

u	2.32	3.09	3.72	4.27	4.75	5.20	5.61	6.00	6.36	6.71
$1 - F(u)$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}

Τιμές της μεταβλητής τ, των Student-Fisher συναρτήσει των ν και $F_{1,\nu}(\tau)$.

ν \ F_1	0.005	0.010	0.025	0.050	0.10
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28