Στοχαστικές Μέθοδοι
Εισαγωγή στην προσομοίωση

Δημήτρης Κουτσογιάννης
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα – Αναθεώρηση 2017

Μέρη της παρουσίασης

1. Γενικές έννοιες
   - Ορισμοί, κατάταξη
   - Ιστορικό
   - Χρήσεις

2. Τυπικές εφαρμογές – παραδείγματα
   - Πειραματισμός, στατιστική επαγωγή
   - Ολοκλήρωση Monte Carlo
   - Στοχαστική βελτιστοποίηση
   - Άλλες εφαρμογές

3. Τυχαίοι αριθμοί
   - Γενικά
   - Αλγόριθμοι

Μοντέλο και προσομοίωση: δύο διακριτές έννοιες

- **Μοντέλο** (model, από το λατινικό modus = τρόπος, μέτρο)

  Κάτι που αντιπροσωπεύει κάτι άλλο (= πρωτότυπο), δίνοντας έμφαση σε ορισμένα από τα χαρακτηριστικά του – όχι όλα (βλ. Chartrand, 1985, σ.2).

  Παραδείγματα: χάρτης, σχέδια ή μακέτα κτηρίου, πρότυπο ή πιλοτικό σύστημα, μανεκέν, μοντέλο αεροπλάνου.

- **Μαθηματικό μοντέλο** (ή απλώς μοντέλο στην επιστημονική γλώσσα)

  Μαθηματικό σύστημα που αντιπροσωπεύει μια πραγματική οντότητα ή κατάσταση

  Παραδείγματα: Ευκλείδειος χώρος, μαθηματικό σύνολο, σύνολο εξισώσεων

- **Προσομοίωση** (simulation)

  Τεχνική μίμησης ενός πραγματικού συστήματος, όπως αυτό εξελίσσεται στο χρόνο (Winston, 1994, σ. 23)

- **Μοντέλο προσομοίωσης** (simulation model)

  Σύνολο υποθέσεων για τη λειτουργία του συστήματος, εκφρασμένων υπό μορφή μαθηματικών ή λογικών σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων του συστήματος (και συνήθως κωδικοποιημένων σε πρόγραμμα υπολογιστή).

  Σημείωση: Η προσομοίωση γίνεται συνήθως σε μοντέλο – όχι στο πρωτότυπο.

Γλωσσικές παρατηρήσεις: Ο όρος *μοντέλο* είναι η καθιερωμένη επίσημη μετάφραση του διεθνούς λατινογενούς όρου model και κλίνεται κατά την ελληνικό τυπικό. Εξ άλλου, όλα τα σύγχρονα ελληνικά λεξικά περιέχουν τη λέξη *μοντέλο*, που σύμφωνα με τη *Νεοελληνική Γραμματική* του Α. Τσοπανάκη (σσ. 758, 768) ανήκει στα νεολατινικά δάνεια. Όροι όπως *προσομοίωμα*, *ομοίωμα*, *υπόδειγμα* ή *πρότυπο* είναι ακατάλληλοι. Στην αρχαία ελληνική υπάρχουν λέξεις όπως *προσομοιώ*, *προσομοιάζω*, *προσόμοιος*, αλλά όχι προσομοίωση, ενώ χρησιμοποιείται περισσότερο η λέξη μίμησις (πρβλ. «μίμησις πράξεως σπουδαίας καὶ τελείας» και «Ὦ Μένανδρε καὶ βίε, πότερος ἄρ’ ὑμῶν πότερον ἀπεμιμήσατο»;

Γενικές έννοιες

- **Διάκριση μοντέλων προσομοίωσης**
  - στοχαστικά (αλλιώς: Monte Carlo· περιλαμβάνουν τυχαίους αριθμούς) ή ντετερμινιστικά
  - διακριτά (οι μεταβλητές κατάστασης αλλάζουν τιμή σε διακριτές χρονικές στιγμές) ή συνεχή
- **Σκοπός της προσομοίωσης**: μελέτη της συμπεριφοράς ενός συστήματος (με «δειγματοληπτική» τεχνική), όταν η εφαρμογή αναλυτικών ή άλλων αριθμητικών μεθόδων είναι ανέφικτη ή ιδιαίτερα δυσχερής.
- **Εφαρμογές της προσομοίωσης**
  - Πειραματισμός πάνω σε ένα σύστημα (π.χ. μελέτη εναλλακτικών σεναρίων)
  - Στατιστική επαγωγή (προσδιορισμός πιθανοτήτων, στατιστικοί έλεγχοι Monte Carlo, όρια εμπιστοσύνης Monte Carlo)
  - Ολοκλήρωση Monte Carlo (αντί της αναλυτικής ή αριθμητικής ολοκλήρωσης)
  - Στοχαστική βελτιστοποίηση (για αντικειμενικές συναρτήσεις με πολλά ακρότατα ή που δεν προσδιορίζονται αναλυτικά)
- **Πλεονεκτήματα της προσομοίωσης**
  - Ευκολία, αμεσότητα, ευελιξία
  - Ακρίβεια στην περιγραφή του συστήματος (χωρίς απλοποιητικές υποθέσεις)
- **Μειονεκτήματα της προσομοίωσης**
  - Αργή υπολογιστική διαδικασία
  - Προσεγγιστικά αποτελέσματα, εξαρτώμενα και από το μέγεθος της δειγματοληψίας

Ιστορικό της προσομοίωσης

- **Προϊστορία**: ο Hazen το 1914 χρησιμοποίησε για πρώτη φορά συνθετικές σειρές στην υδρολογία σε μελέτες αξιοπιστίας υδατικών πόρων (εμπειρική μέθοδος· βλ. Grygier & Stedinger, 1990).
- **Επιστημονική θεμελίωση**: τη δεκαετία του 1940, εισάγεται από μαθηματικούς και φυσικούς (Ulam, von Neumann, Fermi, Metropolis) η μέθοδος Monte-Carlo για τη μελέτη φαινομένων πυρηνικής φυσικής (Metropolis, 1989, Eckhardt, 1989), η οποία απετέλεσε τη βάση και για την ανάπτυξη της υδρολογικής προσομοίωσης.
- **Ανάπτυξη και διάδοση στην επιστήμες υδατικών πόρων** (βλ. Grygier and Stedinger, 1990):
  - 1954, Barnes: γέννηση ασυσχέτιστων ετήσιων δεδομένων με κανονική κατανομή σε μία θέση.
  - 1962, Maass κ.ά., Thomas & Fiering: γέννηση χρονικά συσχετισμένων δεδομένων με μη κανονικές κατανομές.
  - 1965, Beard, 1967, Matalas: γέννηση παράλληλων χρονοσειρών σε διάφορες θέσεις.
  - 1970, Box & Jenkins: κυκλοφορία του κλασικού βιβλίου *Time Series Analysis* που πραγματεύεται την ανάλυση και σύνθεση των χρονοσειρών, την ταξινόμηση των στοχαστικών μοντέλων και τις εφαρμογές τους στην προσομοίωση και την πρόγνωση.
  - 1976, Matalas &Wallis: κωδικοποίηση των διάφορων μοντέλων πολυμεταβλητής στοχαστικής προσομοίωσης υδρολογικών διεργασιών (στο κλασικό βιβλίο του Biswas *Systems Approach to Water Management*).
  - 1985, Bras & Rodriguez-Iturbe: κυκλοφορία του βιβλίου *Random functions and hydrology*, που εμβάθυνε στη χρήση της στοχαστικής υδρολογίας.

Τύποι προσομοίωσης - Ακρίβεια αποτελεσμάτων

- Τύποι προσομοίωσης (Winston, 1994, σ. 1220)
  - *Καταληκτική προσομοίωση* (terminating simulation): πραγματοποιείται ένας αριθμός n επαναλήψεων της προσομοίωσης με τις ίδιες αρχικές συνθήκες (και ίδιες συνθήκες μεταβολής παραμέτρων, εφόσον το σύστημα χαρακτηρίζεται από μη στασιμότητα) και με την ίδια συνθήκη τερματισμού (π.χ. για δεδομένο χρόνο).
  - *Προσομοίωση μόνιμης κατάστασης* (steady state simulation): πραγματοποιείται μία προσομοίωση μεγάλου (θεωρητικά άπειρου) χρονικού μήκους (εφόσον το σύστημα χαρακτηρίζεται από στασιμότητα).
- Ακρίβεια αποτελεσμάτων
  - Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης διέπεται από τους νόμους της στατιστικής.
  - Μια παράμετρος της επίδοσης του συστήματος θ που εκτιμάται από τα εξαγόμενα n προσομοιώσεων του συστήματος (θεωρώντας ότι $\theta = E[X]$, οπότε η θ εκτιμάται ως ο μέσος όρος των προσομοιωμένων τιμών x_i), έχει διάστημα εμπιστοσύνης μήκους

$$2\, z_{(1+\gamma)/2}\, s_X / n^{0.5}$$

    όπου γ ο συντελεστής εμπιστοσύνης, $z_{(1+\gamma)/2}$ το $(1+\gamma)/2$ ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής και s_X η δειγματική τυπική απόκλιση. Αν το διάστημα αυτό είναι επιθυμητό να είναι το πολύ $2c\theta$, όπου c δεδομένο κλάσμα, και ο συντελεστής μεταβλητότητας της X είναι C_v, τότε ο απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων είναι

$$n = (z_{(1+\gamma)/2}\, C_v / c)^2$$

    Για παράδειγμα, για $\gamma = 95\%$ ($z_{(1+\gamma)/2} = 1.96$), $c = 1\%$ και $C_v = 0.25$, προκύπτει $n = 2400$.

Απλές εφαρμογές της προσομοίωσης
Α. Πειραματισμός και στατιστική επαγωγή

Απλό παράδειγμα – Άσκηση: Η ετήσια εισροή I ενός ταμιευτήρα είναι κάθε χρόνο σταθερή, ίση με 10 μονάδες και η εκροή Q είναι αύξουσα συνάρτηση του αποθέματος S της μορφής $Q = \varphi(S) = 0.2\ \mathrm{e}^{0.3\,S}$.

1. Κατασκευάστε μοντέλο προσομοίωσης του συστήματος. Πραγματοποιήστε μια πρώτη προσομοίωση μήκους 100 ετών ξεκινώντας από μια αρχική τιμή S_0 στο διάστημα (5, 15). Επαναλάβετε την προσομοίωση αλλάζοντας κατά 0.01% την πρώτη τιμή. Χαρακτηρίστε την κατηγορία της προσομοίωσης αλλά και το ίδιο το σύστημα.
2. Εκτιμήστε τη συχνότητα με την οποία συμβαίνει το απόθεμα του ταμιευτήρα να είναι μεγαλύτερο από 5 μονάδες.
3. Αν η εκτίμηση αυτής της συχνότητας γίνεται με βάση δείγμα 20 τιμών, ξεκινώντας από μια τυχαία πρώτη τιμή στο διάστημα (5, 15), εκτιμήστε πειραματικά την τυπική απόκλιση και τα όρια διακύμανσής της εκτίμησης αυτής για συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.
4. Υπολογίστε το απαιτούμενο μήκος προσομοίωσης για να γίνει εκτίμηση της πιο πάνω συχνότητας με ακρίβεια 99%.

Β. Ολοκλήρωση Monte Carlo (1)

Στην αριθμητική ολοκλήρωση μιας μεταβλητής, ένα ορισμένο ολοκλήρωμα προσεγγίζεται με τη σχέση

$$\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u \approx \sum_{n=0}^{m} w_n\, f\left(\frac{n}{m}\right) \tag{1}$$

όπου m είναι ένας θετικός ακέραιος και τα βάρη w_n είναι $1 / (2m)$ για τις ακραίες τιμές (0 και m) του n και $1 / m$ για όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Αντίστοιχα, για αριθμητική ολοκλήρωση με πολλές μεταβλητές στο διάστημα $I^s := [0, 1]^s$, η σχέση είναι

$$\int_{I^s} f(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \approx \sum_{n_1=0}^{m} \dots \sum_{n_s=0}^{m} w_{n_1} \dots w_{n_s}\, f\left(\frac{n_1}{m}, ..., \frac{n_s}{m}\right) \tag{2}$$

Οι υπολογιστικοί κόμβοι σχηματίζουν ένα ορθογωνικό κάναβο με ισοδιάσταση $1 / n$. Ο αριθμός τους είναι $N = (m + 1)^s$ και το υπολογιστικό σφάλμα $O(m^{-2}) = O(N^{-2/s})$.

Β. Ολοκλήρωση Monte Carlo (2)

Στην ολοκλήρωση Monte Carlo, οι N υπολογιστικοί κόμβοι λαμβάνονται στην τύχη (όχι σε κανονικό κάναβο) και ο συντελεστής βάρους είναι 1 / N, οπότε (Niederreiter, 1992)

$$\int_{I^s} f(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\boldsymbol{x}_n) \tag{3}$$

όπου $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία στο I^s. Για τυχόν πεδίο ολοκλήρωσης B η σχέση γίνεται

$$\int_{B} f(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \approx \frac{\lambda(B)}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\boldsymbol{x}_n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\boldsymbol{x}_n)\, U_B(\boldsymbol{x}_n) \tag{4}$$

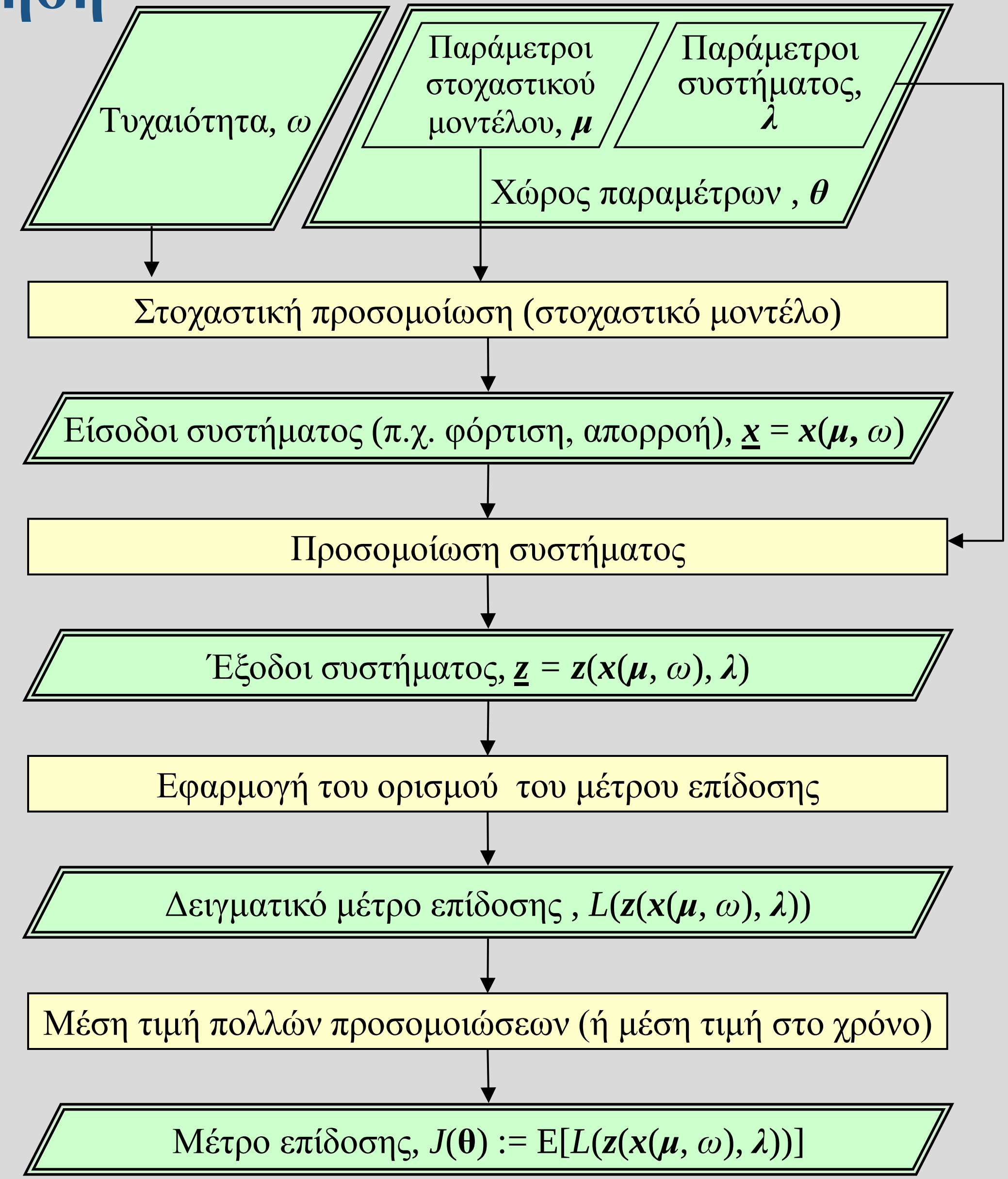
όπου $\lambda(B)$ είναι η πιθανότητα το τυχαίο σημείο $\boldsymbol{x}_i$ να ανήκει στο B και $U_B(\mathbf{x}_n) = 1$ αν $\boldsymbol{x}_n \in B$ ή 0 αν $\boldsymbol{x}_n \notin B$. Το υπολογιστικό σφάλμα είναι $O(N^{-1/2})$, δηλαδή **δεν εξαρτάται από τη διάσταση** s. Συγκρίνοντας τα υπολογιστικά σφάλματα των δύο μεθόδων, συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος Monte Carlo είναι προτιμότερη για $s > 4$.

Παράδειγμα – Άσκηση: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_B\int dx\, dy$ όπου το B είναι το τεταρτοκύκλιο με κέντρο το (0, 0) και ακτίνα 1.

(Ισοδύναμη εκφώνηση: Να υπολογιστεί η τιμή του π).

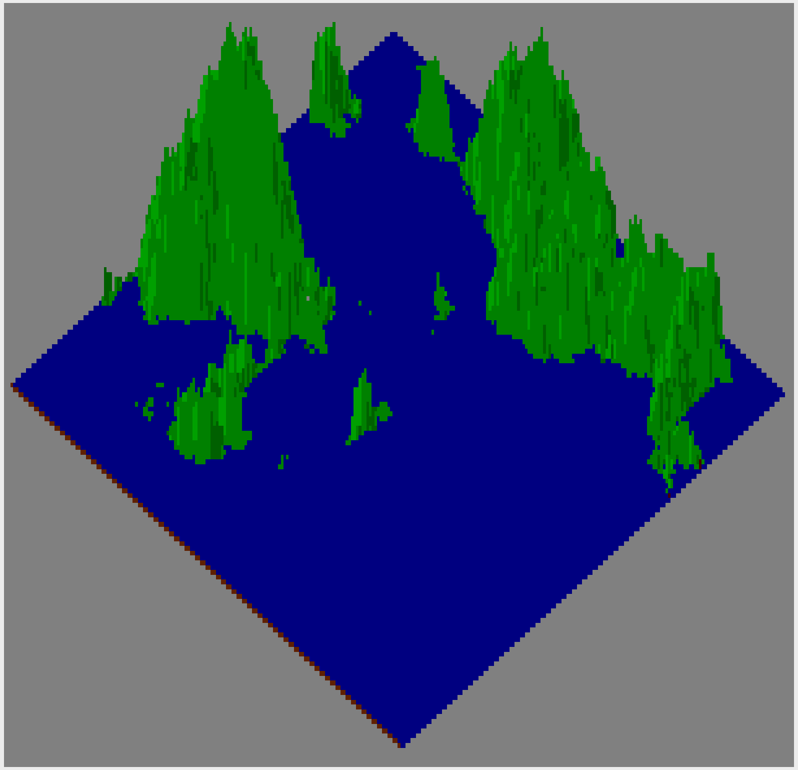
Γ. Στοχαστική βελτιστοποίηση

- Συστήματα που στις εισόδους τους ή στις σχέσεις εισόδων-εξόδων υπεισέρχονται τυχαίοι παράγοντες (όπως κατ’ εξοχήν είναι τα συστήματα μελετά ο πολιτικός μηχανικός), δεν μπορούν να βελτιστοποιηθούν με τις αναλυτικές ή τις τυπικές αριθμητικές μεθόδους βελτιστοποίησης
- Η στοχαστική προσομοίωση προσφέρει άμεση και απλή λύση, όπως φαίνεται στο λογικό διάγραμμα (*Fu and Hu*, 1997, σ. 2).
- **Παράδειγμα-άσκηση**: Αρδευτικός ταμιευτήρας δέχεται ετήσιες εισροές που ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 6 μονάδες και τυπική απόκλιση 1 μονάδα. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή σταθερή ετήσια απόληψη από το σύστημα για αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας 5%.



Δ. Άλλες εφαρμογές

- Σαν παράδειγμα μιας από τις πολλές και ποικίλες εφαρμογές της προσομοίωσης στην επιστήμη και τεχνολογία, στο σχήμα φαίνεται ένα «εικονικό τοπίο» (εικονικές βραχονησίδες) που συντέθηκε με στοχαστική προσομοίωση.
- **Παράδειγμα-άσκηση**: Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο της μετατόπισης του μέσου σημείου (midpoint displacement· Saupe, 1988, σσ. 96-105) σε δύο διαστάσεις, να κατασκευαστεί στοχαστική γεννήτρια εικονικών τοπίων και να γίνουν διάφορες προσομοιώσεις με διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του αλγορίθμου.



Τυχαίοι αριθμοί
Εισαγωγικές έννοιες

- Μια ακολουθία αριθμών x_i λέγεται *ακολουθία τυχαίων αριθμών δεδομένης κατανομής* $F(x)$ αν αποτελεί δείγμα της τυχαίας μεταβλητής $\underline{x}$, η οποία έχει συνάρτηση κατανομής $F(x)$ (Papoulis, 1990).
- Η διαδικασία γέννησης τυχαίων αριθμών είναι γνωστή και ως *δειγματοληψία Monte Carlo*.
- Για κάθε συνάρτηση κατανομής μπορεί να κατασκευαστούν *γεννήτριες τυχαίων αριθμών*.
- Η γεννήτρια είναι ένας αλγόριθμος, συνήθως αναδρομικός, ο οποίος μπορεί να παράγει διαδοχικά οσουσδήποτε όρους της τυχαίας ακολουθίας. (Στην πράξη υπάρχει ένα αρκετά μεγάλο, αλλά πάντως πεπερασμένο, όριο τυχαίων αριθμών που μπορεί να δώσει η ακολουθία· πάνω από αυτό το όριο γίνεται επανάληψη των ίδιων αριθμών, δηλαδή η ακολουθία γίνεται περιοδική.)
- Οι τυχαίοι αριθμοί δεν γεννώνται στην τύχη, αλλά βάσει ενός αυστηρά προσδιοριστικού αλγορίθμου, ο οποίος οδηγεί στην ίδια ακολουθία αριθμών, αν ξεκινήσει με τις ίδιες αρχικές συνθήκες. (Για το λόγο αυτό τους τυχαίους αριθμούς μερικοί τους ονομάζουν *ψευδοτυχαίους*.) Αν αλλάξουμε τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε άλλη τυχαία ακολουθία (ακριβέστερα άλλο τμήμα της ίδιας περιοδικής ακολουθίας).

Γέννηση ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών με δεδομένη συνάρτηση κατανομής (1)

- Ομοιόμορφη κατανομή
  - Γεννώνται οι ακέραιοι αριθμοί q_i από τον αναδρομικό τύπο

    $$q_i = (k\, q_{i-1} + c) \bmod m$$

    όπου k, c και m κατάλληλες ακέραιες σταθερές (π.χ. $k = 69069$, $c = 1$, $m = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$ ή $k = 7^5 = 16\,807$, $c = 0$, $m = 2^{31} – 1 = 2\,147\,483\,647$· βλ. Ripley, 1987, σ. 39), οι οποίοι αποτελούν τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφα κατανεμημένους στο διάστημα $[1, m – 1]$.
  - Υπολογίζονται οι αριθμοί

    $$u_i = q_i / m$$

    που αποτελούν πρακτικά ακολουθία τυχαίων αριθμών συνεχούς τύπου στο διάστημα (0, 1).
- Κανονική κατανομή
  - Απλή μέθοδος: Λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος, το άθροισμα πολλών ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών (πρακτικά τουλάχιστον 12) είναι τυχαίοι αριθμοί με κανονική κατανομή.
  - Ακριβέστερη μέθοδος (πολική – polar· Papoulis, 1990, σ. 266): Αν οι αριθμοί u_i και v_i είναι ανεξάρτητοι ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα (0, 1), τότε οι αριθμοί

    $$w_i = (–2 \ln v_i)^{0.5} \cos (2\pi\, u_i), \quad z_i = (–2 \ln v_i)^{0.5} \sin (2\pi\, u_i)$$

    αποτελούν ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς με κατανομή $N(0, 1)$.

Γέννηση ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών με δεδομένη συνάρτηση κατανομής (2)

- Κατανομή γάμα
  - Για παράμετρο σχήματος $\kappa > 0$, όπου $\kappa = k + \tau$ με $k = [\kappa]$ και $0 < \tau < 1$, και παράμετρο κλίμακας $\lambda = 1$,υπολογίζεται η ακολουθία τυχαίων αριθμών w_i με τον ακόλουθο αλγόριθμο (Whittaker, 1973· βλ. και Haan, 1977, σ. 265· για ταχύτερους, βλ. Ripley, 1987, σσ. 88, 90):
    - Γεννώνται οι τυχαίοι αριθμοί v_i και r_i με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0, 1)
    - Υπολογίζονται οι αριθμοί $a_i = v_i^{1/\tau}$, $b_i = r_i^{1/(1-\tau)}$
    - Ελέγχεται αν $a_i + b_i \le 1$. Σε περίπτωση που αυτό δεν συμβαίνει επαναλαμβάνονται τα προηγούμενα βήματα μέχρι να επιτευχθεί.
    - Υπολογίζεται ένας αριθμός w_i από τον τύπο $w_i = -[a_i / (a_i + b_i)] \ln u_i - \Sigma^{k}_{j=1} \ln u_j$

  Τυχούσα κατανομή

  - Αν $F^{-1}(\ )$ η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής $F(x)$, και u_i διαδοχικοί ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα (0, 1), τότε οι αριθμοί

  $$w_i = F^{-1}(u_i)$$

  αποτελούν διαδοχικούς όρους ακολουθίας τυχαίων αριθμών με συνάρτηση κατανομή $F(x)$.

  - Η παραπάνω παρατήρηση βρίσκει εφαρμογή εφόσον μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά η $F^{-1}(\ )$ (π.χ. κατανομές εκθετική, Gumbel, Γενική Ακραίων Τιμών).
  - Η θεωρία πιθανοτήτων περιλαμβάνει και άλλες γενικές μεθοδολογίες που βρίσκουν εφαρμογή σε περιπτώσεις άλλων κατανομών.

Όρια της προσομοίωσης

- Τα προσομοιωμένα (συνθετικά) δείγματα γεωφυσικών μεταβλητών σε καμία περίπτωση δεν υποκαθιστούν τα ιστορικά δείγματα μετρήσεων.
- Η επιλογή ενός συγκεκριμένου στοχαστικού μοντέλου και η εκτίμηση των παραμέτρων του βασίζεται πάντα στο διαθέσιμο ιστορικό δείγμα, το οποίο αποτελεί τη μόνη πρωτογενή πηγή πληροφορίας.
- Η γέννηση συνθετικών χρονοσειρών (με συνηθισμένο μήκος πολλαπλάσιο του μήκους του διαθέσιμου ιστορικού δείγματος) δεν προσθέτει ουσιαστική πληροφορία, ούτε επαυξάνει τη διάρκεια του συγκεκριμένου ιστορικού δείγματος.
- Η προσομοίωση δεν έχει νόημα για απλά προβλήματα στα οποία είναι δυνατή η αναλυτική λύση. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα της εκτίμησης της πλημμύρας εκατονταετίας σε συγκεκριμένη θέση ποταμού, για την οποία υπάρχει δείγμα π.χ. 30 ετών, η χρησιμοποίηση συνθετικών χρονοσειρών δεν εξυπηρετεί σε τίποτε. (Η εκτίμηση με συνθετικές χρονοσειρές θα είναι ίδια με την άμεση εκτίμηση, την οποία δίνει η συνάρτηση κατανομής που έχει υιοθετηθεί για τη συγκεκριμένη μεταβλητή.)
- Η χρήση συνθετικών χρονοσειρών αποκτά νόημα όταν εξετάζονται αλληλοεξαρτώμενα μεγέθη που συνδυάζονται σε ένα αρκετά πολύπλοκο σύστημα, των οποίων η συνάρτηση κατανομής δεν μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά. Κλασικό παράδειγμα είναι η περίπτωση συστήματος ταμιευτήρων (ή ακόμη και ενός μεμονωμένου ταμιευτήρα), όπου ενδιαφέρει η στατιστική κατανομή των απολήψεων, οι οποίες εξαρτώνται με πολύπλοκο τρόπο από τις εισροές, τις καταναλώσεις, τους κανόνες λειτουργίας κοκ.

Αναφορές

- Barnes, F. B., Storage required for a city water supply, *J. Inst. Eng. Australia*, 26(9) 198-203, 1954.
- Beard, L. R., Use of interrelated records to simulate streamflow, *Proc. ASCE, J. Hydraul. Div.*, 91(HY5), 13-22, 1965.
- Birge, J. R., and F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer, New York, 1999.
- Box, G.E.P. & Jenkins, G.M. *Time Series Analysis; Forecasting and control*, Holden Day, 1970.
- Bras, R. L. and Rodriguez-Iturbe, I., *Random functions and hydrology*, Addison-Wesley, USA, 1985.
- Chartrand, G., *Introduction to Graph Theory*, Dover, New York, 1985.
- Eckhardt, R., Stan Ulam, John von Neumann and the Monte Carlo method, in *From cardinals to chaos*, ed. by N. G. Cooper, Cambridge University, NY., 1989.
- Fu, M., and J.-Q. Hu, *Conditional Monte Carlo – Gradient Estimation and Optimization Applications*, Kluwer, Boston, 1997.
- Grygier, J.C. & Stedinger, J.R., SPIGOT, A synthetic streamflow generation software package, Technical description, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY., Version 2.5, 1990.
- Maass, A., M. M. Hufschmidt, R. Dorfman, H. A. Thomas, Jr., S. A. Marglin, and G. M. Fair, *Design of Water Resource Systems*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1962.
- Matalas, N. C., Mathematical assessment of synthetic hydrology, *Water Resour. Res.*, 3(4), 937-945, 1967.
- Matalas, N.C. and Wallis, J.R., Generation of synthetic flow sequences, in *Systems approach to water management*, A.K. Biswas editor, McGraw Hill, 1976.
- Metropolis, N., The beginning of the Monte Carlo method, in *From cardinals to chaos*, ed. by N. G. Cooper, Cambridge University, NY., 1989.
- Niederreiter, H., *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- Papoulis, A., *Probability and Statistics*, Prentice-Hall, 1990.
- Thomas, H. A., and M. B. Fiering, Mathematical synthesis of streamflow sequences for the analysis of river basins by simulation, in *Design of Water Resource Systems*, by A. Maass, M. M. Hufschmidt, R. Dorfman, H. A. Thomas, Jr., S. A. Marglin, and G. M. Fair, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1962.
- Ripley, B. D., *Stochastic Simulation*, Wiley, New York, 1987
- Saupe, D., Algorithms for random fractals, Chapter 2 in *The Science of Fractal Images*, edited by H.-O. Peitgen and D. Saupe, Springer-Verlag, 1988.
- Winston, W, L., *Operations Research, Applications and Algorithms*, 3rd ed., Duxbury, Belmont, 1994.