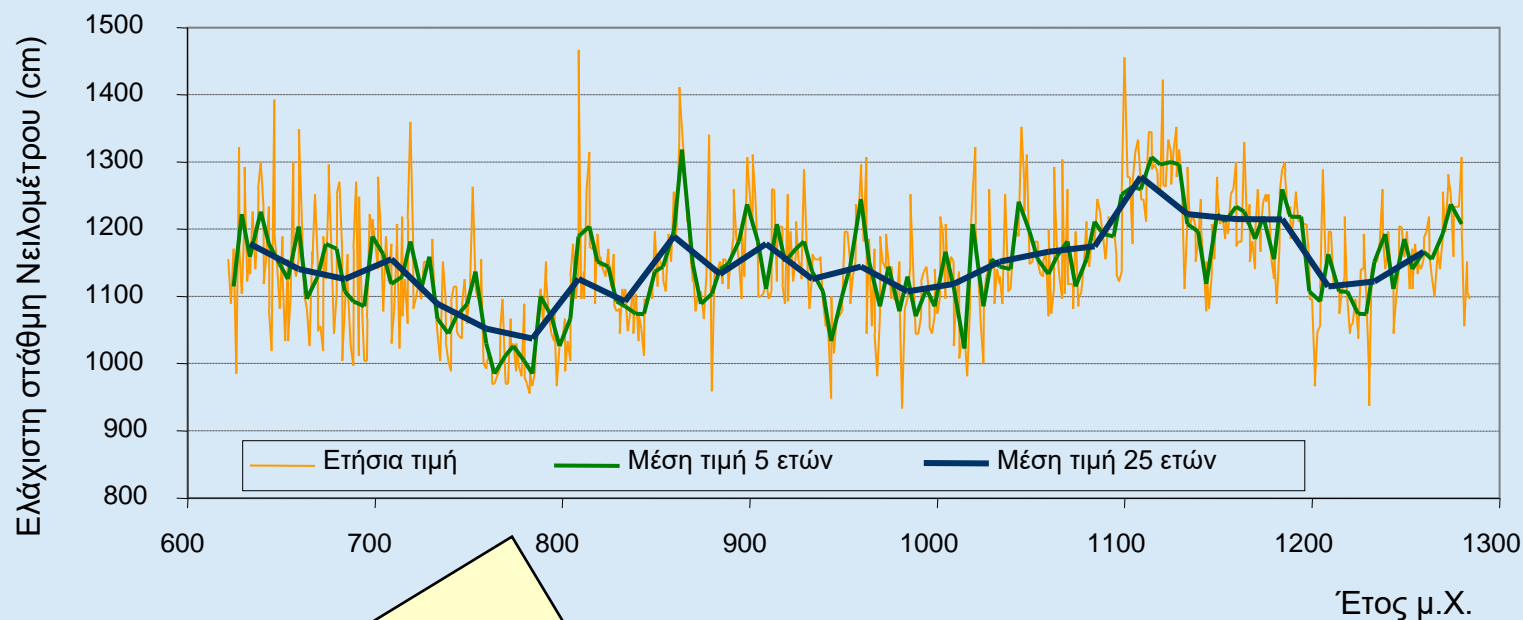


Στοχαστικές Μέθοδοι
**Εμμογή και ανελίξεις απλής ομοιοθεσίας
(Hurst-Kolmogorov)**

Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος,
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα – Αναθεώρηση 2019

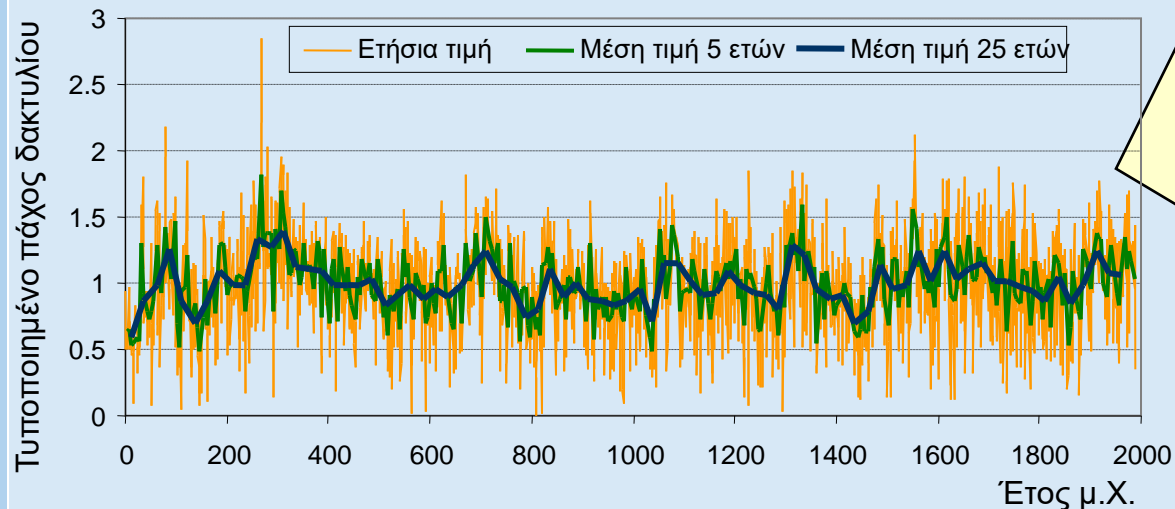
Σύνολα δεδομένων αναφοράς

1 Ελάχιστες στάθμες Νείλου

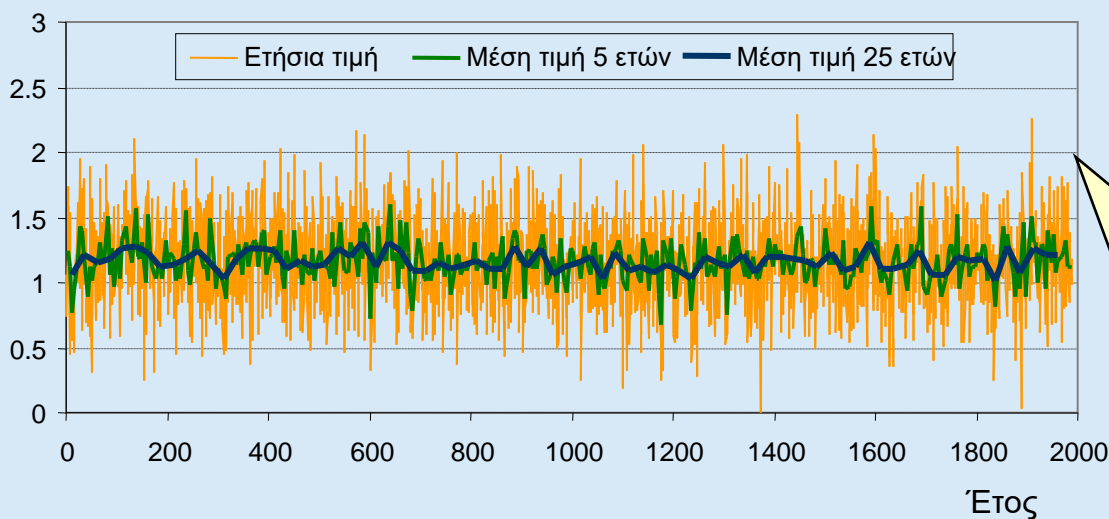


Χρονοσειρά ετήσιας ελάχιστης στάθμης του Νείλου για το διάστημα 622-1284 μ.Χ. (663 δεδομένα), μετρημένης στο «Νειλόμετρο» στο νησί Ρόντα κοντά στο Κάιρο (Toussoun, 1925, σ. 366-385· τα δεδομένα διατίθενται στο διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://lib.stat.cmu.edu/S/beran>).

2. Πάχη δακτυλίων δένδρων στη Utah



Χρονοσειρά τυποποιημένου πάχους δακτυλίων από μια παλαιοκλιματολογική μελέτη στο Mammoth Creek, Utah (ΗΠΑ), για το διάστημα 0-1989 (1990 τιμές· το έτος 0 είναι στην πραγματικότητα το 1 π.Χ.). Τα δεδομένα προέρχονται από κωνοφόρα (Graybill, 1990· τα δεδομένα διατίθενται στο διαδίκτυο στη διεύθυνση <ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/paleo/treering/chronologies/asciifiles/usawest/ut509.crn>).



Συνθετική χρονοσειρά κατασκευασμένη από ανέλιξη AR(1) με ίδια μέση τιμή, τυπική απόκλιση και συντελεστή αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1. (Για λόγους σύγκρισης)

Συναθροισμένη ανέλιξη και αθροιστικό κλιμακόγραμμα

Ανέλιξη στη βασική κλίμακα: $\underline{x}_i, i = 1, 2, \dots$

Διακριτή κλίμακα: $\kappa = k/D:$

Συναθροισμένη ανέλιξη:
$$\underline{X}_i^{(\kappa)} := \sum_{l=(i-1)\kappa+1}^{i\kappa} \underline{x}_l$$

Προφανώς, για $\kappa = 1$, $\underline{X}_i^{(1)} \equiv \underline{x}_i$.

Για $\kappa = 2$, $\underline{X}_1^{(2)} := \underline{x}_1 + \underline{x}_2$, $\underline{X}_2^{(2)} := \underline{x}_3 + \underline{x}_4$, $\underline{X}_3^{(2)} := \underline{x}_5 + \underline{x}_6$, ...

για $\kappa = 3$, $\underline{X}_1^{(3)} := \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3$, $\underline{X}_2^{(3)} := \underline{x}_4 + \underline{x}_5 + \underline{x}_6$, $\underline{X}_3^{(3)} := \underline{x}_7 + \underline{x}_8 + \underline{x}_9$, ...

κτλ.

Μέση ανέλιξη σε κλίμακα κ : $\underline{x}_i^{(\kappa)} := \underline{X}_i^{(\kappa)} / \kappa$

Αθροιστικό κλιμακόγραμμα: $\Gamma_\kappa = \Gamma(\kappa D) := \text{Var}[\underline{X}_i^{(\kappa)}]$

Κλιμακόγραμμα: $\gamma_\kappa = \gamma(kD) := \text{Var}[\underline{x}_i^{(\kappa)}]$

Άλλα μεγέθη αναφοράς

Αυτοσυνδιασπορά & αυτοσυσχέτιση

$$c_\eta := \text{COV}[\underline{x}_\tau, \underline{x}_{\tau+\eta}], \quad c_\eta^{(\kappa)} := \text{COV}[\underline{x}_\tau^{(\kappa)}, \underline{x}_{\tau+\eta}^{(\kappa)}], \quad r_\eta^{(\kappa)} := c_\eta^{(\kappa)} / \gamma(\kappa D), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Σχέση αυτοσυνδιασποράς - κλιμακογράμματος

$$c_\eta^{(\kappa)} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\Gamma(|\eta + 1|k) + \Gamma(|\eta - 1|k)}{2} - \Gamma(|\eta|k) \right)$$

Φάσμα ισχύος: διακριτός μετασχηματισμός Fourier της αυτοσυνδιασποράς

$$s_d^{(\kappa)}(\omega) := 2 c_0^{(\kappa)} + 4 \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(\kappa)} \cos(2\pi j \omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^{(\kappa)} \cos(2\pi j \omega)$$

Αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier της αυτοσυνδιασποράς

$$c_j^{(\kappa)} = \int_0^{1/2} s_d^{(\kappa)}(\omega) \cos(2\pi j \omega) d\omega$$

Απλά μοντέλα αναφοράς

1. Μοντέλο λευκού θορύβου

Μέση τιμή

$$E[\underline{x}_i^{(\kappa)}] = E[\underline{x}_i], \quad E[\underline{X}_i^{(\kappa)}] = \kappa E[\underline{x}_i]$$

Κλιμακόγραμμα

$$\gamma_\kappa = \gamma_1 / \kappa, \quad \Gamma_\kappa := \text{var}[\underline{X}_i^{(\kappa)}] = \kappa \gamma_1$$

Αυτοσυνδιασπορά - Αυτοσυσχέτιση

$$c_j^{(\kappa)} := \text{cov}[\underline{x}_i^{(\kappa)}, \underline{x}_{i+j}^{(\kappa)}] = 0, \quad r_j^{(\kappa)} := \text{corr}[\underline{x}_i^{(\kappa)}, \underline{x}_{i+j}^{(\kappa)}] = 0, \quad j \neq 0$$

Φάσμα ισχύος

$$s_d^{(\kappa)}(\omega) = 2 \gamma_1$$

2. Γραμμικό μοντέλο Μάρκοφ (AR(1))

Έκφραση του μοντέλου στη βασική κλίμακα

$$\underline{x}_i = r \underline{x}_{i-1} + \underline{v}_i$$

Μέση τιμή

$$E[\underline{x}_i^{(\kappa)}] = E[\underline{x}_i], \quad E[\underline{X}_i^{(\kappa)}] = \kappa E[\underline{X}_i]$$

Κλιμακόγραμμα

$$\gamma_\kappa = \gamma_1 \frac{\kappa(1-r^2) - 2r(1-r^\kappa)}{\kappa^2(1-r)^2}, \quad \Gamma_\kappa = \gamma_1 \frac{\kappa(1-r^2) - 2r(1-r^\kappa)}{(1-r)^2}$$

Αυτοσυνδιασπορά - Αυτοσυσχέτιση

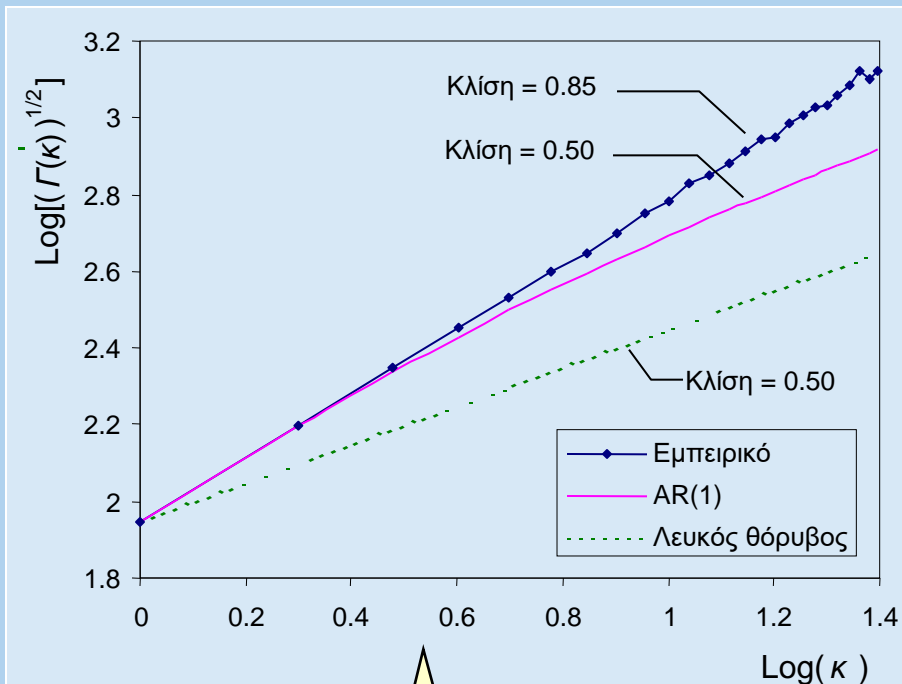
$$c_\eta^{(\kappa)} = \gamma_1 \frac{r^{\kappa\eta - \kappa + 1} (1-r^\kappa)^2}{(1-r)^2}, \quad r_\eta^{(\kappa)} = r_1^{(\kappa)} r^{\kappa(\eta-1)} \quad \text{όπου } r_1^{(\kappa)} = \frac{r(1-r^\kappa)^2}{\kappa(1-r^2) - 2r(1-r^\kappa)}$$

Φάσμα ισχύος

$$s_\gamma^{(\kappa)}(\omega) / \gamma_\kappa = 2 + 4 r_1^{(\kappa)} \frac{\cos(2\pi\omega) - r^\kappa}{1 + r^{2\kappa} - 2r^\kappa \cos(2\pi\omega)}$$

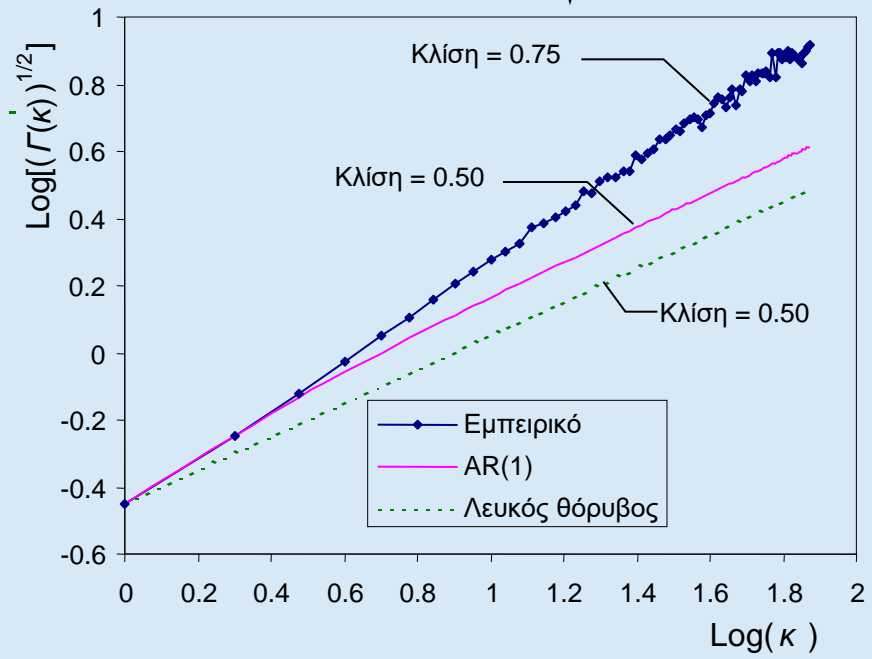
Σύγκριση δεδομένων αναφοράς και απλών μοντέλων αναφοράς

Τυπική απόκλιση

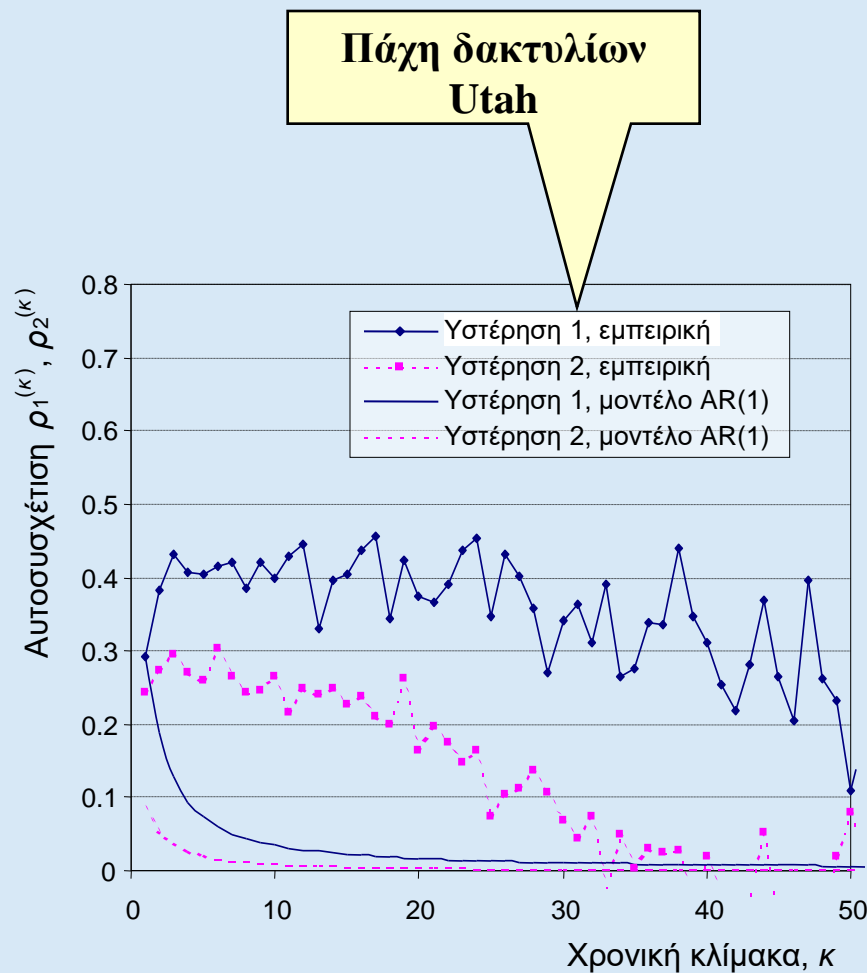
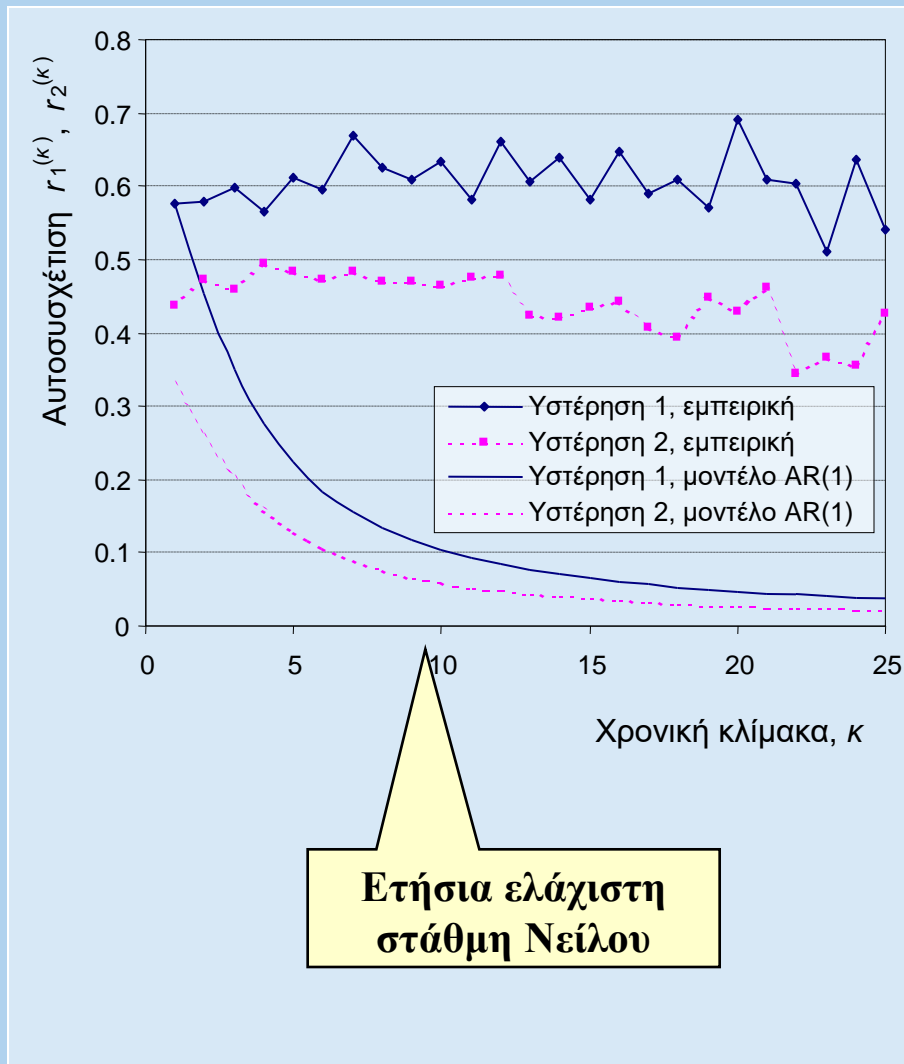


**Ετήσια ελάχιστη
στάθμη Νείλου**

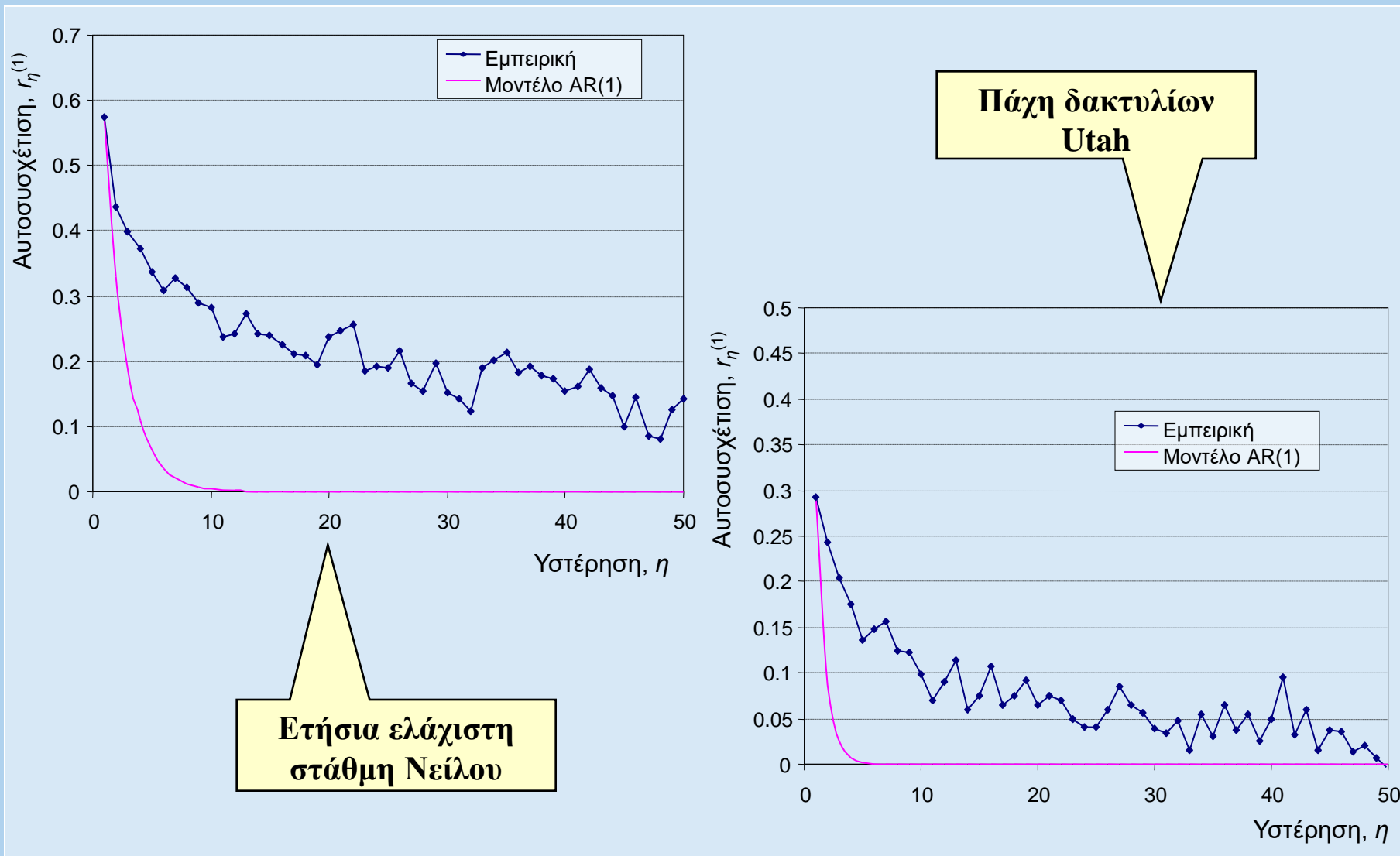
**Πάχη δακτυλίων
Utah**



Συντελεστές αυτοσυσχέτισης σε σχέση με τη χρονική κλίμακα



Συντελεστές αυτοσυσχέτισης σε σχέση με την υστέρηση



Συμπέρασμα συγκρίσεων

- ◆ Αποτυχία των απλών μοντέλων αναφοράς να περιγράψουν τη φυσική πραγματικότητα.
- ◆ Τάση ομαδοποίησης χαμηλών (ή ψηλών) τιμών σε μεγαλύτερες περιόδους ξηρασιών (ή υδρολογικά πλούσιων) ετών: εμμογή μακράς κλίμακας – μακροπρόθεσμη εμμογή – φαινόμενο Hurst – φαινόμενο Ιωσήφ – δυναμική Hurst-Kolmogorov – βλ. Hurst, 1951, Mandelbrot, 1977, Koutsoyiannis, 2002, 2003, 2010, 2011, 2020).
- ◆ Τυπική απόκλιση συναθροισμένης ανέλιξης συναρτήσει της κλίμακας συνάθροισης: συνάρτηση δύναμης με εκθέτη $H > 0.5$.
- ◆ Σημαντική αυτοσυσχέτιση ακόμη και για μεγάλες τιμές της υστέρησης (εξάρτηση μεγάλης εμβέλειας).
- ◆ Σημαντική αυτοσυσχέτιση ακόμη και για μεγάλες τιμές της κλίμακας συνάθροισης.

Κάλυψη κενού: Μοντέλο απλής ομοιοθεσίας (simple scaling)

Εισαγωγή

- ◆ Εναλλακτικές ονομασίες: ανέλιξη απλής ομοιοθεσίας, στάσιμα αυξήματα αυτο-όμοιων ανελίζεων (stationary increments of self-similar process), κλασματικός Γκαουσιανός θόρυβος (fractional Gaussian noise)*, ανέλιξη Hurst-Kolmogorov (Hurst-Kolmogorov process).
- ◆ Ορίζεται από τη ακόλουθη σχέση που αφορά την αθροιστική ανέλιξη:

$$\underline{X}(kt) - kt\mu =_d (k/l)^H (\underline{X}(lt) - lt\mu)$$

όπου το σύμβολο $=_d$ σημαίνει ισότητα στην (πεπερασμένης διάστασης από κοινού) κατανομή, t , k και l είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, μ είναι η μέση τιμή της στιγμιαίας ανέλιξης $\underline{x}(t)$ και H είναι μια σταθερά ($0 < H < 1$) γνωστή ως παράμετρος (ή συντελεστής ή εκθέτης) Hurst.

*Σύμφωνα με ορολογία που καθιέρωσε ο Mandelbrot, Γκαουσιανός θόρυβος είναι ο λευκός θόρυβος, ενώ θόρυβος Brown είναι το ολοκλήρωμα ως προς το χρόνο του λευκού θορύβου. Η πρώτη ανέλιξη στάσιμη και η τελευταία μη στάσιμη.

Βασικές ιδιότητες

Κλιμακόγραμμα (συνάρτηση δύναμης της κλίμακας συνάθροισης κ)

$$\gamma_{\kappa} := \text{var}[\underline{x}_i^{(\kappa)}] = \gamma_1 / \kappa^{2-2H}, \quad \Gamma_{\kappa} := \text{Var}[\underline{X}_i^{(\kappa)}] = \kappa^{2H} \gamma_1$$

Αυτοσυσχέτιση ανεξάρτητη της κλίμακας συνάθροισης κ

$$r_{\eta}^{(\kappa)} = r_{\eta} = (1/2) [|\eta + 1|^{2H} + |\eta - 1|^{2H}] - |\eta|^{2H}$$

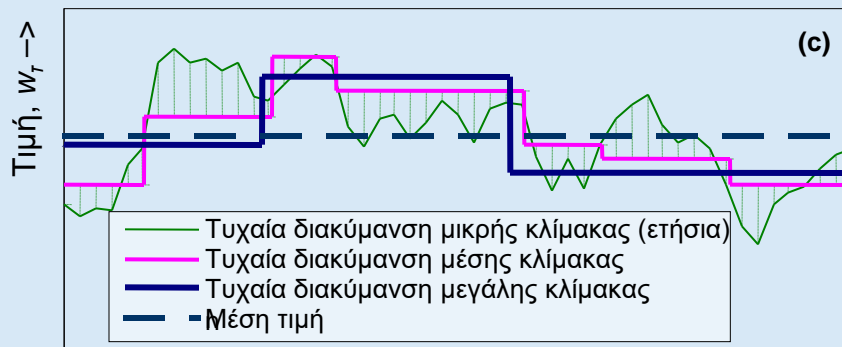
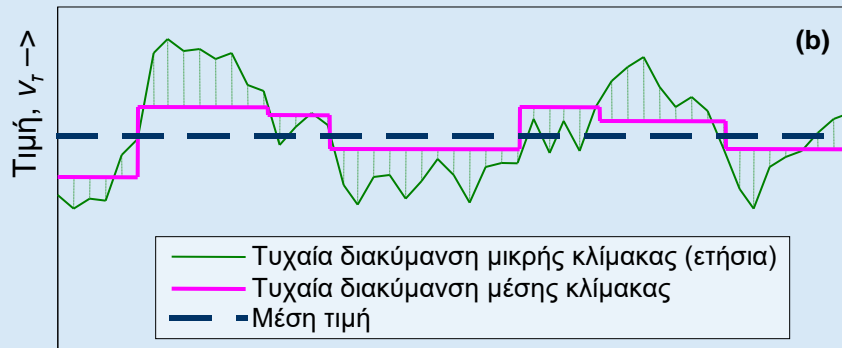
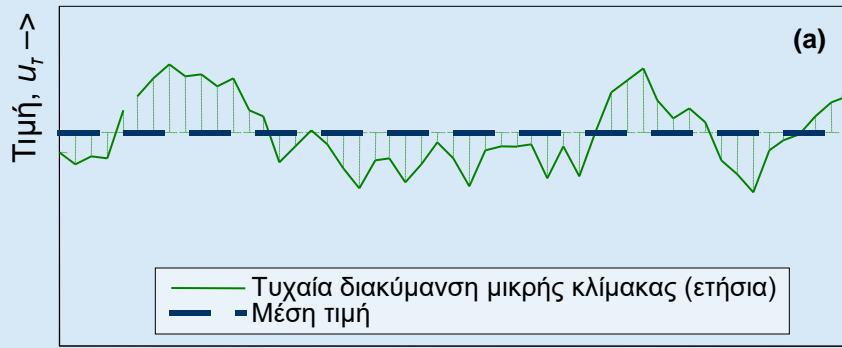
ή προσεγγιστικά (συνάρτηση δύναμης της υστέρησης)

$$r_{\eta}^{(\kappa)} = r_j \approx H(2H-1) \eta^{2H-2}$$

Φάσμα ισχύος (συνάρτηση δύναμης της συχνότητας)

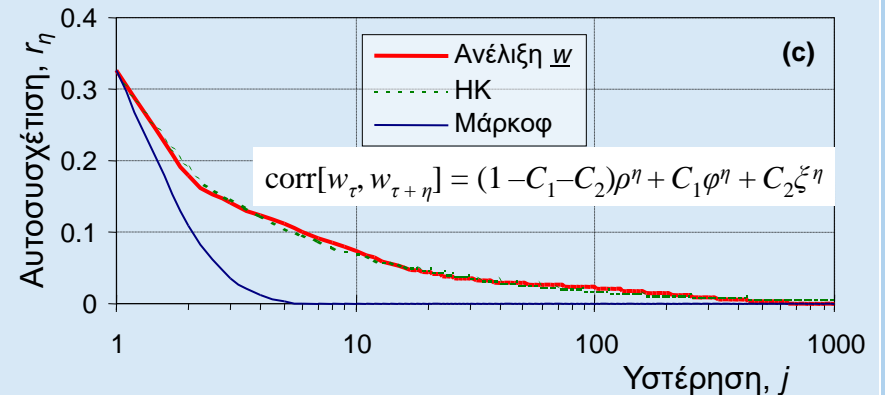
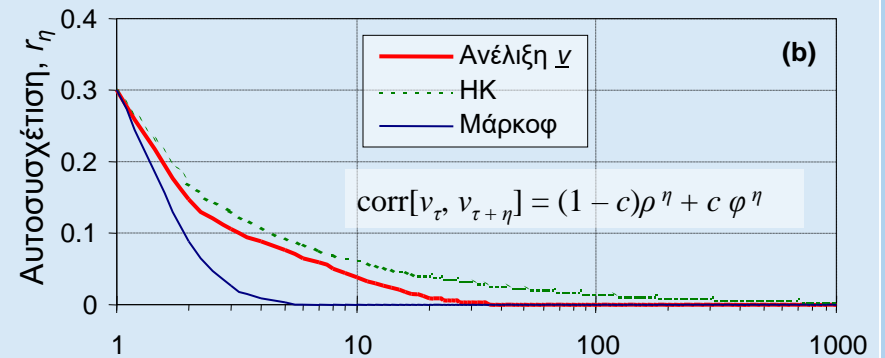
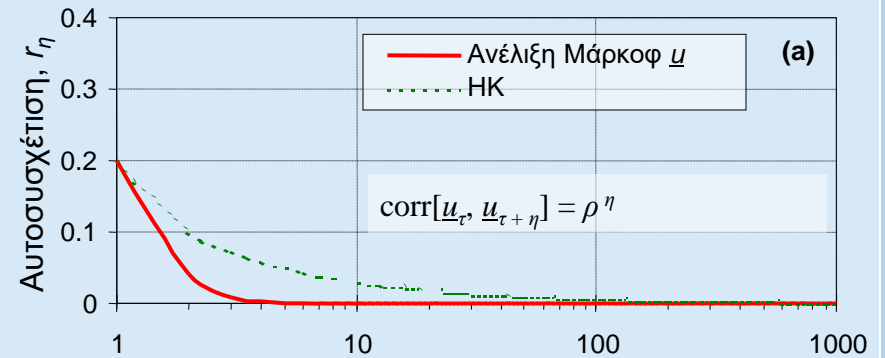
$$s_d^{(\kappa)}(\omega) / \gamma_{\kappa} \approx 4(1-H)(2\omega)^{1-2H}$$

Φυσική εξήγηση: Τυχαίες διακυμάνσεις πολλαπλής κλίμακας



Πηγή: Koutsoyiannis (2002)

Χρόνος, τ →



Αλγόριθμοι παραγωγής χρονοσειρών απλής ομοιοθεσίας

1. Με τη λογική των τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας

Η ανέλιξη x_i παράγεται ως άθροισμα τριών ανελιξεων AR(1):

$$\underline{x}_i = \underline{u}_i + \underline{v}_i + \underline{w}_i$$

με συντελεστές αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1, αντίστοιχα,

$$\rho = 1.52 (H - 0.5)^{1.32},$$

$$\varphi = 0.953 - 7.69 (1 - H)^{3.85},$$

$$\xi = \begin{cases} 0.932 + 0.087 H, & H \leq 0.76, \\ 0.993 + 0.007 H, & H > 0.76 \end{cases}$$

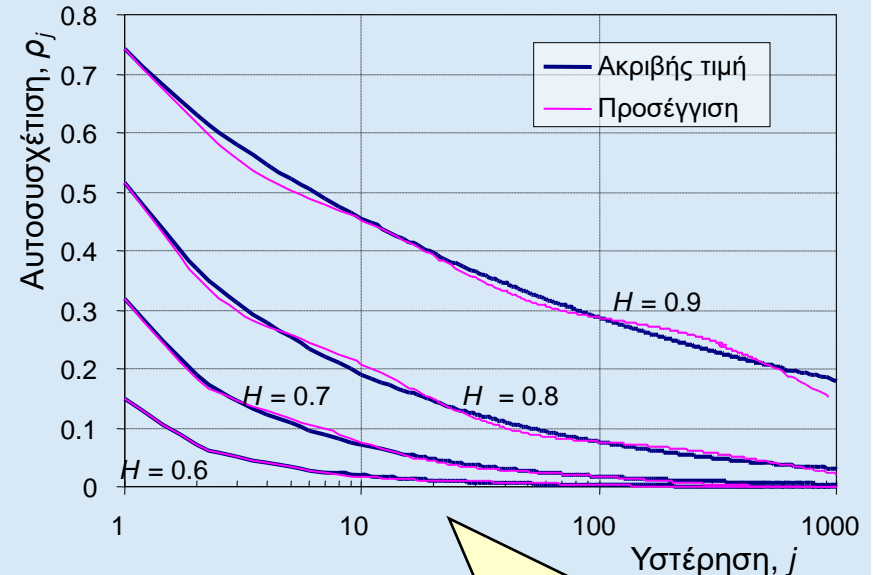
Και διασπορές αντίστοιχα,

$$(1 - C_1 - C_2) \gamma_1, \quad C_1 \gamma_1, \quad C_2 \gamma_1$$

όπου τα C_1 και C_2 εκτιμώνται σε τρόπο ώστε η αυτοσυσχέτιση του αθροίσματος των τριών ανελιξεων

$$\rho_\eta = (1 - C_1 - C_2) \rho^\eta + C_1 \varphi^\eta + C_2 \xi^\eta$$

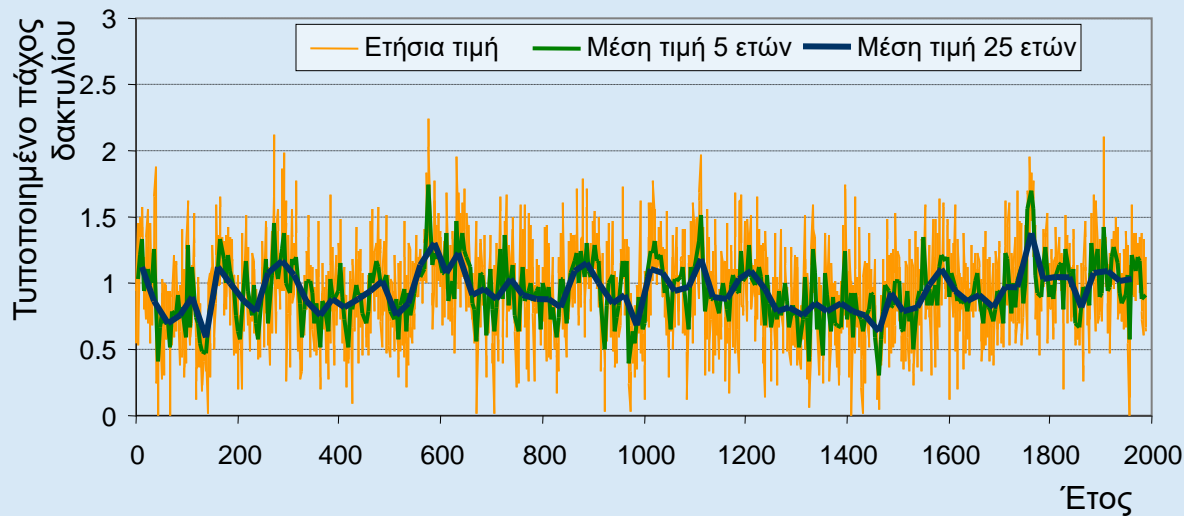
να ταυτίζεται με τη θεωρητική αυτοσυσχέτιση της ανέλιξης απλής ομοιοθεσίας για υστέρηση 1 και 100.



Βαθμός προσέγγισης της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του μοντέλου HK που επιτυγχάνεται με χρήση τριών ανελιξεων AR(1)

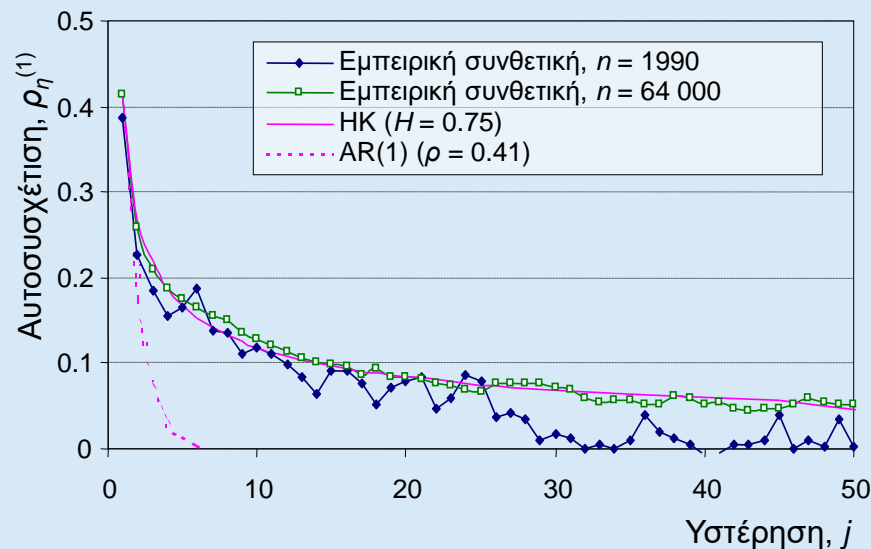
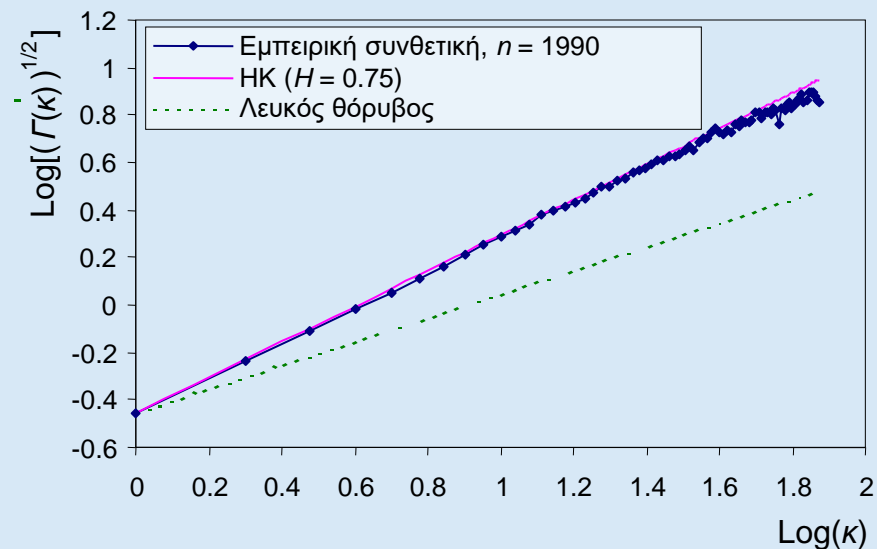
Πηγή: Κουτσογιάννης (2002)

Αποτελέσματα αλγορίθμου 1

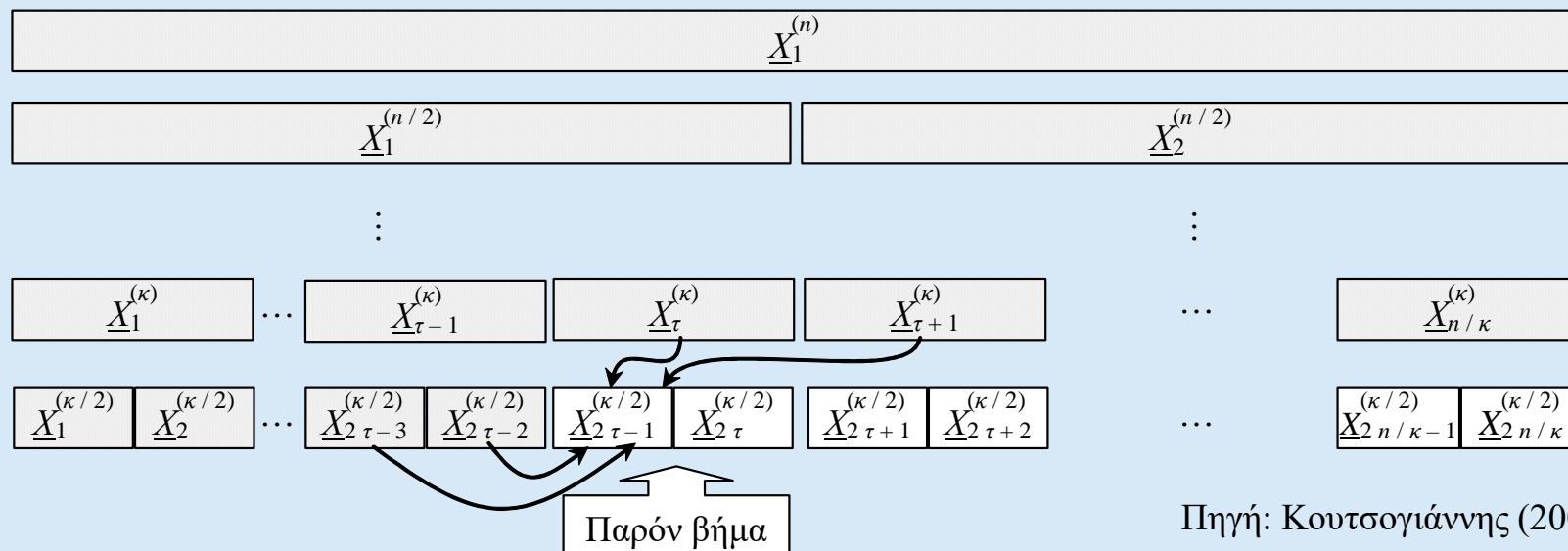


Εφαρμογή: Παραγωγή και ανάλυση συνθετικής χρονοσειράς μεγέθους 1990 ετών με χαρακτηριστικά ίδια με αυτά της χρονοσειράς πάχους δακτυλίων στη Utah

Πηγή: Koutsoyiannis (2002)



2. Μέθοδος βασισμένη σε διαδοχικούς επιμερισμούς



Η παραγωγή της ανέλιξης \underline{x}_τ ($\tau = 1, \dots, n$, όπου το n θεωρείται ως δύναμη του 2) γίνεται σε διαδοχικά βήματα. Στο πρώτο βήμα παράγεται το άθροισμα $\underline{X}_1^{(n)}$ για τη συνολική περίοδο n . Στο δεύτερο βήμα αυτό επιμερίζεται σε δύο συνιστώσες $\underline{X}_1^{(n/2)}$ και $\underline{X}_2^{(n/2)}$ κοκ. Σε κάθε βήμα επιμερισμού ισχύει η σχέση

$$\underline{X}_{2\tau-1}^{(k/2)} + \underline{X}_{2\tau}^{(k/2)} = \underline{X}_\tau^{(k)}$$

ενώ στην παραγωγή διατηρούνται οι αυτοσυσχετίσεις με προηγούμενες μεταβλητές ίσης κλίμακας $(k/2)$ και επόμενες μεταβλητές μεγαλύτερης κλίμακας (k) .

Μέθοδος βασισμένη σε διαδοχικούς επιμερισμούς (συνέχεια)

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τον Koutsoyiannis (2001, 2002), σε κάθε βήμα επιμερισμού το $\underline{X}_{2\tau-1}^{(\kappa/2)}$ παράγεται από τη γραμμική σχέση

$$\underline{X}_{2\tau-1}^{(\kappa/2)} = a_2 \underline{X}_{2\tau-3}^{(\kappa/2)} + a_1 \underline{X}_{2\tau-2}^{(\kappa/2)} + b_0 \underline{X}_{\tau}^{(\kappa)} + b_1 \underline{X}_{\tau+1}^{(\kappa)} + \underline{y}$$

και το $\underline{X}_{2\tau}^{(\kappa/2)}$ από τη σχέση

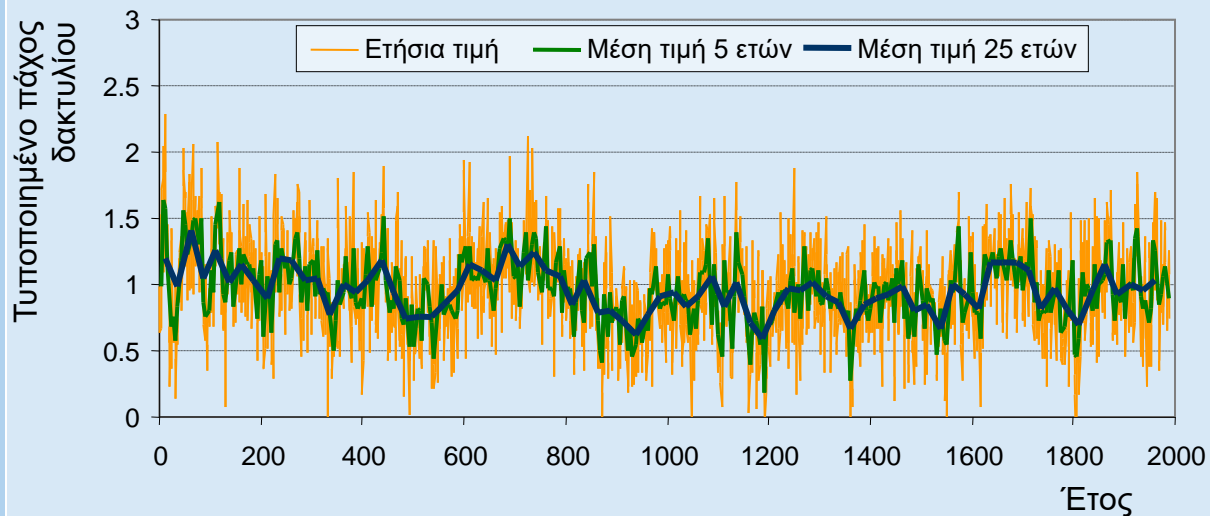
$$\underline{z}_{2\tau-1}^{(\kappa/2)} + \underline{z}_{2\tau}^{(\kappa/2)} = \underline{z}_{\tau}^{(\kappa)}$$

όπου οι παράμετροι a_2 , a_1 , b_0 και b_1 και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής \underline{y} εκτιμώνται από τις αυτοσυσχετίσεις $\text{corr}[\underline{X}_{2i-1}^{(\kappa/2)}, \underline{X}_{2i-1+j}^{(\kappa/2)}] = r_j$ και τη διασπορά $\gamma_{\kappa/2}$, σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 + r_3 & r_4 + r_5 \\ r_1 & 1 & r_1 + r_2 & r_3 + r_4 \\ r_2 + r_3 & r_1 + r_2 & 2(1 + r_1) & r_1 + 2r_2 + r_3 \\ r_4 + r_5 & r_3 + r_4 & r_1 + 2r_2 + r_3 & 2(1 + r_1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 \\ 1 + r_1 \\ r_2 + r_3 \end{bmatrix}$$

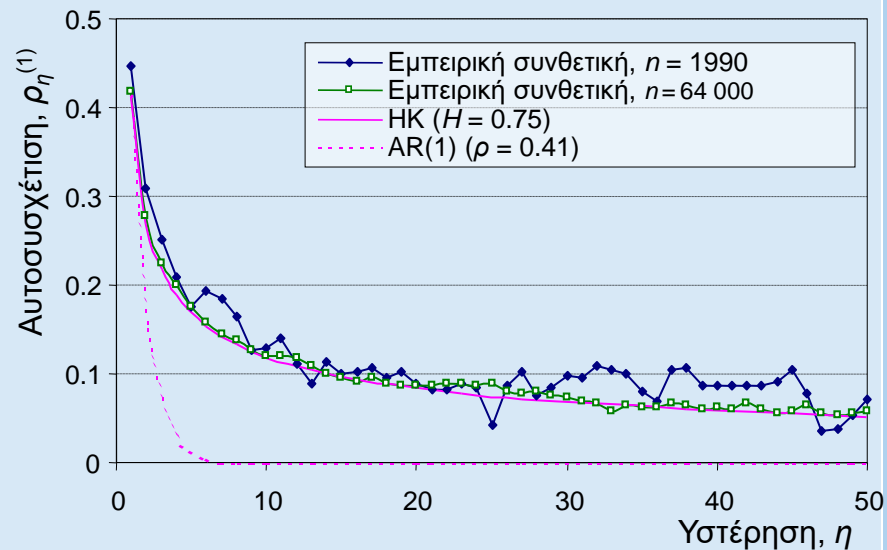
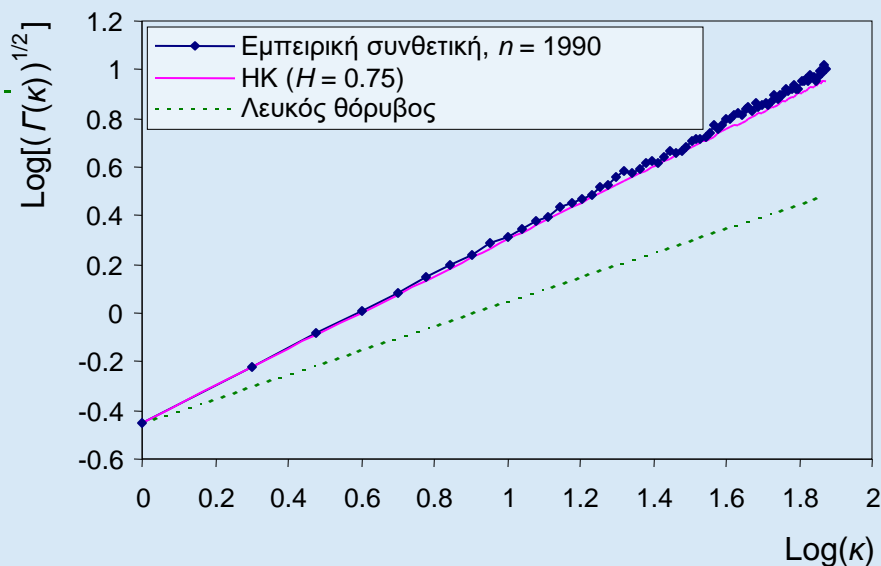
$$\text{var}[\underline{y}] = \gamma_{\kappa/2} (1 - [r_2, r_1, 1 + r_1, r_2 + r_3] [a_2, a_1, b_0, b_1]^T)$$

Αποτελέσματα αλγορίθμου 2



Εφαρμογή: Παραγωγή και ανάλυση συνθετικής χρονοσειράς μεγέθους 1990 ετών με χαρακτηριστικά ίδια με αυτά της ιστορικής χρονοσειράς πάχους δακτυλίων στη Utah

Πηγή: Koutsoyiannis (2002)



3. Μέθοδος μοντέλου συμμετρικού κυλιόμενου μέσου (SMA)

Το σχήμα συμμετρικού κυλιόμενου μέσου (symmetric moving average – SMA) έχει εισαχθεί από τον Koutsoyiannis (2000) και μετασχηματίζει μια ανέλιξη λευκού θορύβου \underline{v}_t σε μια ανέλιξη με αυτοσυσχέτιση \underline{x}_t σύμφωνα με τη σχέση

$$\underline{x}_t = \sum_{j=-J}^J a_{|j|} \underline{v}_{t+j} = a_J \underline{v}_{t-J} + \dots + a_1 \underline{v}_{t-1} + a_0 \underline{v}_t + a_1 \underline{v}_{t+1} + \dots + a_J \underline{v}_{t+J}$$

όπου τα a_j είναι συντελεστές βάρους και ο αριθμός τους J θεωρητικά είναι άπειρος αλλά στην πράξη λαμβάνει μια πεπερασμένη τιμή. Η μέθοδος είναι κατάλληλη για τυχούσα συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Στην περίπτωση του μοντέλου απλής ομοιοθεσίας αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές βάρους είναι

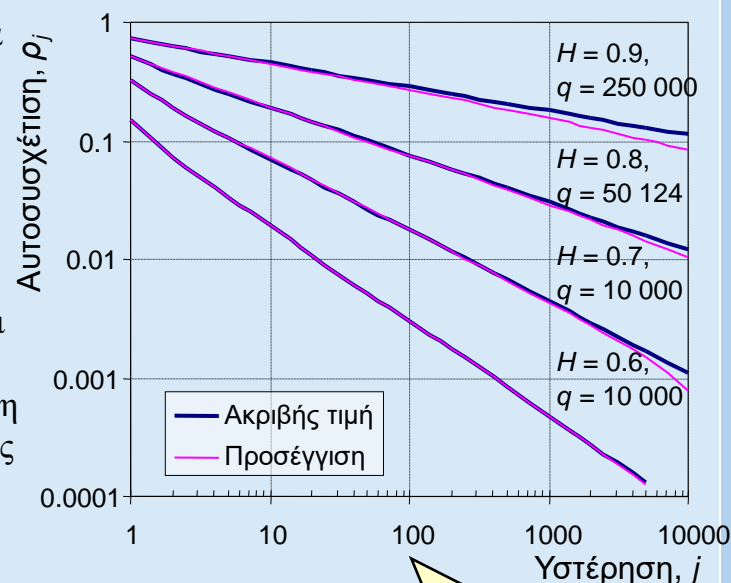
$$a_\eta \approx \frac{\sqrt{(2-2H)\gamma_1}}{3-2H} (|\eta+1|^{H+0.5} + |\eta-1|^{H+0.5} - 2|\eta|^{H+0.5})$$

και ο αναγκαίος αριθμός βαρών

$$J \geq \max \left[m, \left(\frac{2\beta}{H^2 - 0.25} \right)^{1/(H-1.5)} \right]$$

όπου m ο αριθμός των αυτοσυσχετίσεων που πρέπει να διατηρηθούν και β συντελεστής ακρίβειας (π.χ. $\beta = 0.001$). Η μέθοδος μπορεί να διατηρήσει και τον συντελεστή ασυμμετρίας $C_S^{(x)}$ της \underline{x}_t αν ο λευκός θόρυβος έχει συντελεστή ασυμμετρίας $C_S^{(v)}$ που δίνεται από τη σχέση

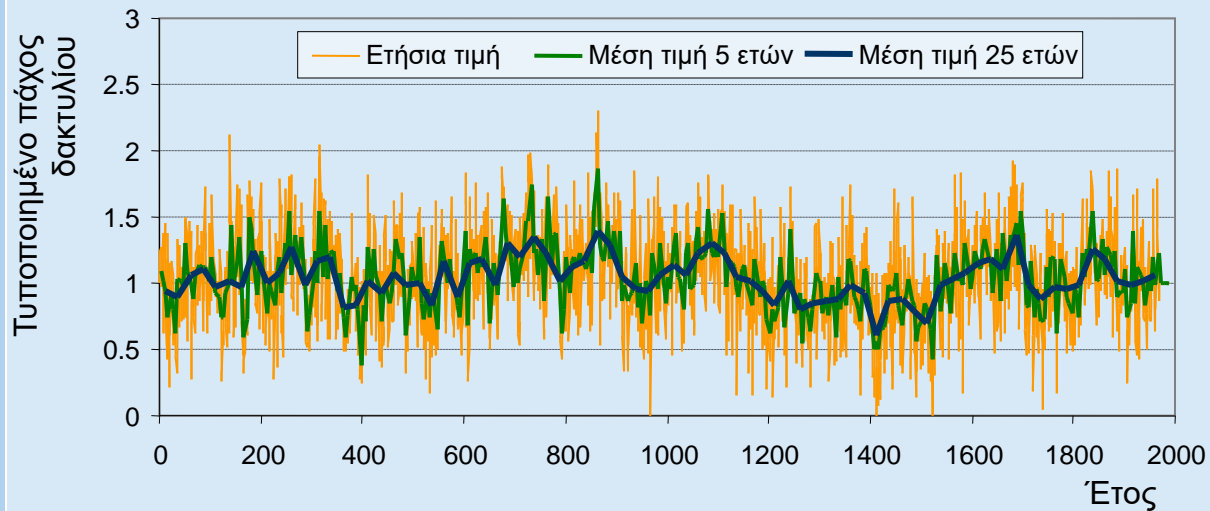
$$\left(a_0^3 + 2 \sum_{j=1}^q a_j^3 \right) C_S^{(v)} = C_S^{(x)} \gamma(1)^{3/2}$$



Βαθμός προσέγγισης της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του μοντέλου HK που επιτυγχάνεται με χρήση του μοντέλου SMA

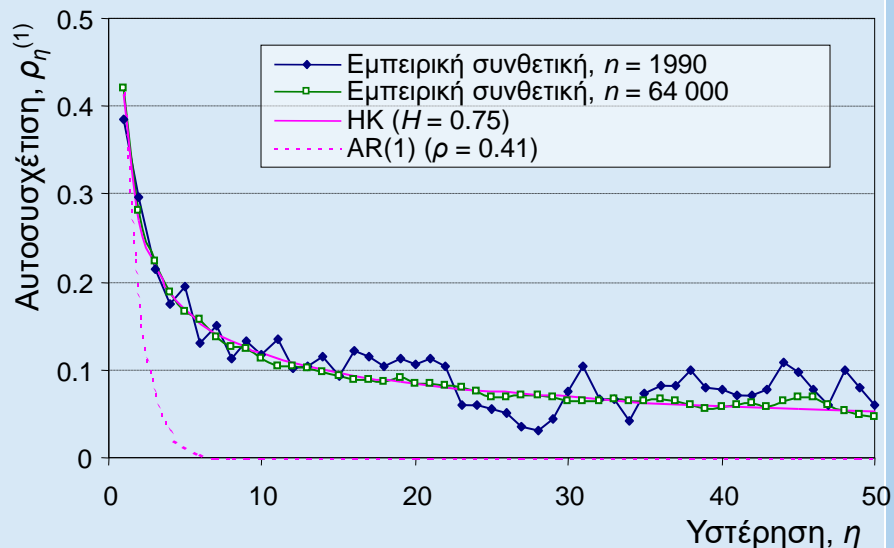
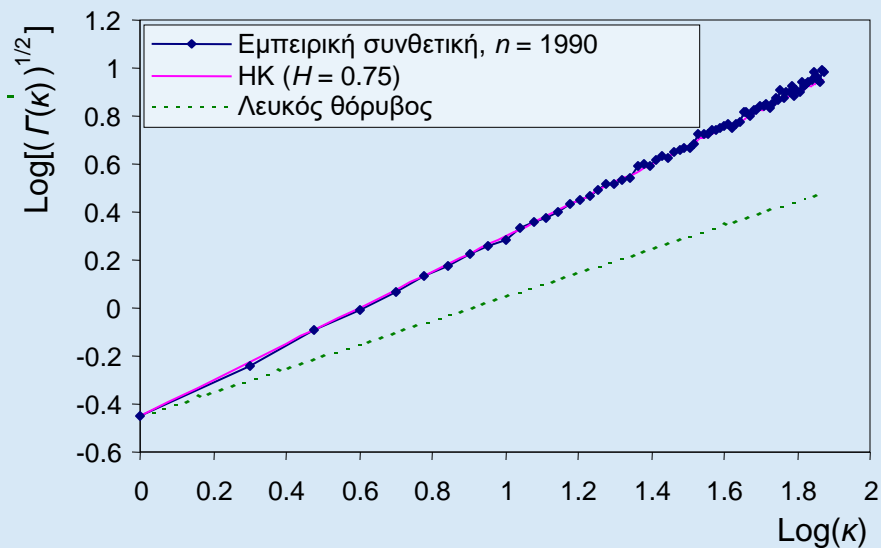
Πηγή: Κουτσογιάννης (2002)

Αποτελέσματα αλγορίθμου 3



Εφαρμογή: Παραγωγή και ανάλυση συνθετικού συνθετικής χρονοσειράς μεγέθους 1990 ετών με χαρακτηριστικά ίδια με αυτά της ιστορικής χρονοσειράς πάχους δακτυλίων στη Utah

Πηγή: Koutsoyiannis (2002)



Πρόσθετες εφαρμογές

A. Να αναλυθούν οι ιστορικές χρονοσειρές:

1. απορροής στη θέση Διώρυγα Καρδίτσας του Βοιωτικού Κηφισού (η μακρότερη χρονοσειρά απορροής στην Ελλάδα)
2. ανακατασκευασμένης μέσης ετήσιας θερμοκρασίας του Βορείου Ημισφαιρίου (992 χρόνια – Jones et al., 1998).

με στόχο να διαπιστωθεί η ύπαρξη μακροπρόθεσμης εμμοσύνης.

B. Να μοντελοποιηθούν κατάλληλα οι αντίστοιχες ανεπίξεις και να παραχθούν συνθετικές χρονοσειρές μήκους 1000 ετών.

Γ. Να ελεγχθούν οι συνθετικές χρονοσειρές ως προς τη διατήρηση των κύριων στατιστικών χαρακτηριστικών, στα οποία συμπεριλαμβάνεται και η εμμοσύνη.

Δ. Να εκτιμηθεί η ασφαλής απόληψη από τη λίμνη Υλίκη, στην οποία καταλήγουν τα νερά του Βοιωτικού Κηφισού, χρησιμοποιώντας δύο εναλλακτικά μοντέλα εισροών και συγκεκριμένα τα HK και AR(1) και με τις ακόλουθες επιπρόσθετες υποθέσεις:

1. Η ωφέλιμη χωρητικότητα της λίμνης είναι 550 hm^3 .
2. Λόγω του καρστικού υποβάθρου της λίμνης, ένα ποσοστό του αποθηκευμένου νερού διαρρέει υπόγεια. Το ποσοστό αυτό να θεωρηθεί αμελητέο όταν η λίμνη είναι άδεια και 60% όταν είναι γεμάτη.
3. Το επίπεδο αξιοπιστίας επιλέγεται 99%.
4. Για την ενδο-ετήσια ρύθμιση, δεσμεύεται ρυθμιστικός όγκος ίσος με το 60% της ετήσιας απόληξης.

Αναφορές

- ◆ Bras, R. L. and I. Rodriguez-Iturbe (1985), *Random functions and hydrology*, Addison-Wesley, USA.
- ◆ Graybill, D. A., (1990). IGBP PAGES/World Data Center for Paleoclimatology, NOAA/NGDC Paleoclimatology Program, Boulder, Colorado, USA.
- ◆ Hurst, H. E. (1951). Long term storage capacities of reservoirs, *Trans. ASCE*, 116, 776-808.
- ◆ Jones, P.D., K.R. Briffa, T.P. Barnett, and S.F.B. Tett (1998), High-resolution Palaeoclimatic Records for the last Millennium: Interpretation, Integration and Comparison with General Circulation Model Control-run Temperatures, *The Holocene* 8, 455-471.
- ◆ Kottegoda, N. T. (1980). *Stochastic Water Resources Technology*, Macmillan Press, London.
- ◆ Koutsoyiannis, D., (2000). A generalized mathematical framework for stochastic simulation and forecast of hydrologic time series *Water Resources Research*, 36(6), 1519-1534.
- ◆ Koutsoyiannis, D., (2001). Coupling stochastic models of different time scales, *Water Resources Research*, 37(2), 379-392.
- ◆ Koutsoyiannis, D. (2002). The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy, *Hydrological Sciences Journal*, 47(4), 573-595.
- ◆ Koutsoyiannis, D. (2003). Climate change, the Hurst phenomenon, and hydrological statistics, *Hydrological Sciences Journal*, 48 (1), 3–24.
- ◆ Koutsoyiannis, D. (2010). A random walk on water, *Hydrology and Earth System Sciences*, 14, 585–601.
- ◆ Koutsoyiannis, D. (2011). Hurst-Kolmogorov dynamics and uncertainty, *Journal of the American Water Resources Association*, 47 (3), 481–495.
- ◆ D. Koutsoyiannis, *Stochastics of Hydroclimatic Extremes - A Cool Look at Risk*, 2020.
- ◆ Mandelbrot, B. B. (1977). *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York.
- ◆ Salas, J. D. (1993). Analysis and modeling of hydrologic time series, *Handbook of Hydrology*, edited by D. Maidment, Chapter 19, pp. 19.1-19.72, McGraw-Hill, New York.
- ◆ Toussoun, O. (1925). Mémoire sur l’histoire du Nil, in *Mémoires a l’Institut d’Egypte*, vol. 18, pp. 366-404.
- ◆ Tyrallis, H., and D. Koutsoyiannis (2011). Simultaneous estimation of the parameters of the Hurst-Kolmogorov stochastic process, *Stochastic Environmental Research & Risk Assessment*, 25 (1), 21–33.
- ◆ Yevjevich, V. (1972). *Stochastic Processes in Hydrology*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.