Σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος:

Βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων –Υδροπληροφορική

Θεμελιώδεις έννοιες βελτιστοποίησης και κλασικές μαθηματικές μέθοδοι

Ανδρέας Ευστρατιάδης, ΕΔΙΠ ΕΜΠ

Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Θεμελιώδεις ορισμοί βελτιστοποίησης

- Η έννοια της βελτιστοποίησης εφαρμόζεται σε προβλήματα **λήψης αποφάσεων** (decision-making), και προϋποθέτει μια διαδοχή από εναλλακτικές **επιλογές** (alternatives) και **αξιολογήσεις** (evaluations) των επιπτώσεων κάθε επιλογής.
- Κάθε επιλογή που ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος καλείται **εφικτή** (feasible). Το σύνολο των εφικτών επιλογών καλείται **εφικτός χώρος** ή **χώρος αποφάσεων** (decision space) ή **χώρος αναζήτησης** (search space).
- Αν κάθε εφικτή επιλογή μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο **μεταβλητών ελέγχου** (control variables) $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ και αν σε κάθε τέτοια περιγραφή μπορεί να αντιστοιχιστεί ένα **μέτρο επίδοσης** (performance measure), τότε ως βέλτιστη (optimal) λαμβάνεται η απόφαση που μεγιστοποιεί το εν λόγω μέτρο.
- Η μαθηματική έκφραση του μέτρου επίδοσης καλείται **αντικειμενική** ή **στοχική συνάρτηση** (objective function) και συμβολίζεται $f(\mathbf{x})$.
- Το μέτρο επίδοσης μπορεί να περιλαμβάνει ένα ή περισσότερα κριτήρια, οπότε η στοχική συνάρτηση είναι, αντίστοιχα, **βαθμωτή** ή **διανυσματική**. Η γενική μορφή της πολυκριτηριακής στοχικής συνάρτησης είναι $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})\}$.

Γενικός ορισμός: Ένα σύστημα είναι βέλτιστο ως προς ένα μέτρο επίδοσης και ένα σύνολο περιορισμών εφόσον λειτουργεί/αποδίδει τουλάχιστον ίσα, αν όχι καλύτερα, από κάθε άλλο σύστημα που ικανοποιεί τους ίδιους περιορισμούς (Pierre, 1984, σ. 2).

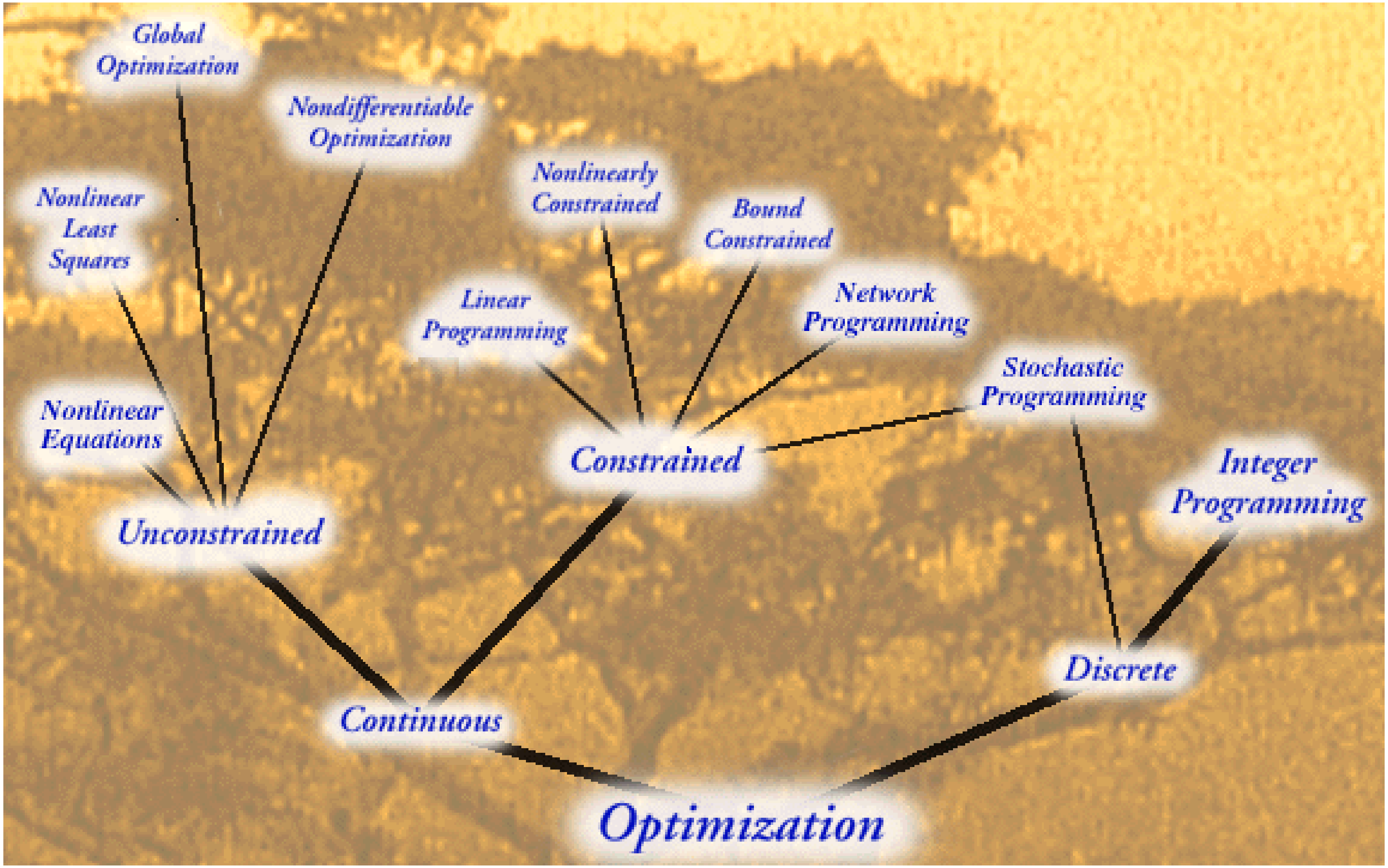
Βελτιστοποίηση: Μαθηματική διατύπωση

- Γενική διατύπωση προβλήματος:

  minimize / maximize $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, όπου $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\mathbf{x} \in X$

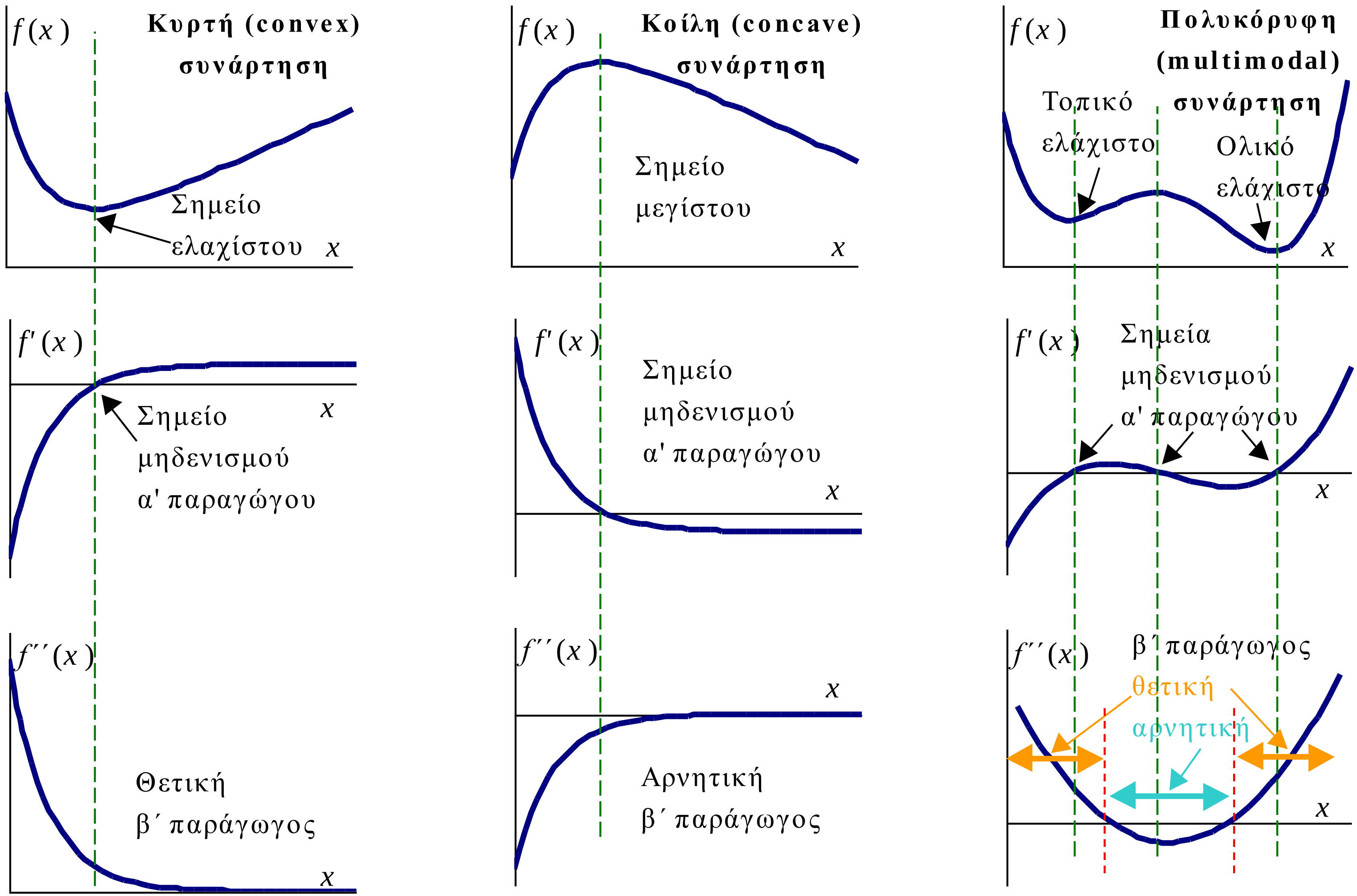
- Μορφές στοχικής συνάρτησης / προβλήματος:
  - Βαθμωτή ($m = 1$) ή διανυσματική (πολυκριτηριακή , $m > 1$)
  - Μονοδιάστατη ($n = 1$) ή πολυδιάστατη ($n > 1$)
  - Προσδιοριστική ή στοχαστική
  - Με συνεχείς, διακριτές, ακέραιες ή μικτές μεταβλητές ελέγχου
  - Με περιορισμούς ή χωρίς περιορισμούς
  - Με ρητούς ή ασαφείς (fuzzy) περιορισμούς
  - Γραμμική ή μη γραμμική
  - Κυρτή (μοναδικό ακρότατο) ή μη κυρτή (πολλαπλά ακρότατα)
  - Με αναλυτική ή μη αναλυτική ιδία έκφραση
  - Με αναλυτική ή μη αναλυτική έκφραση των παραγώγων πρώτης και δεύτερης τάξης
  - Με αμελητέο ή σημαντικό φόρτο υπολογισμού (π.χ. εφαρμογές στις οποίες το μέτρο επίδοσης του συστήματος αποτιμάται μέσω προσομοίωσης)

Το «δέντρο» των μεθόδων βελτιστοποίησης



Πηγή: http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/OptWeb

Ακρότατα συναρτήσεων μιας μεταβλητής



Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Πραγματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής: $f\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$

Παράγωγος ως προς διάνυσμα (της $f(\mathbf{x})$ ως προς $\mathbf{x}$): $\dfrac{df}{d\mathbf{x}} := \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right]$

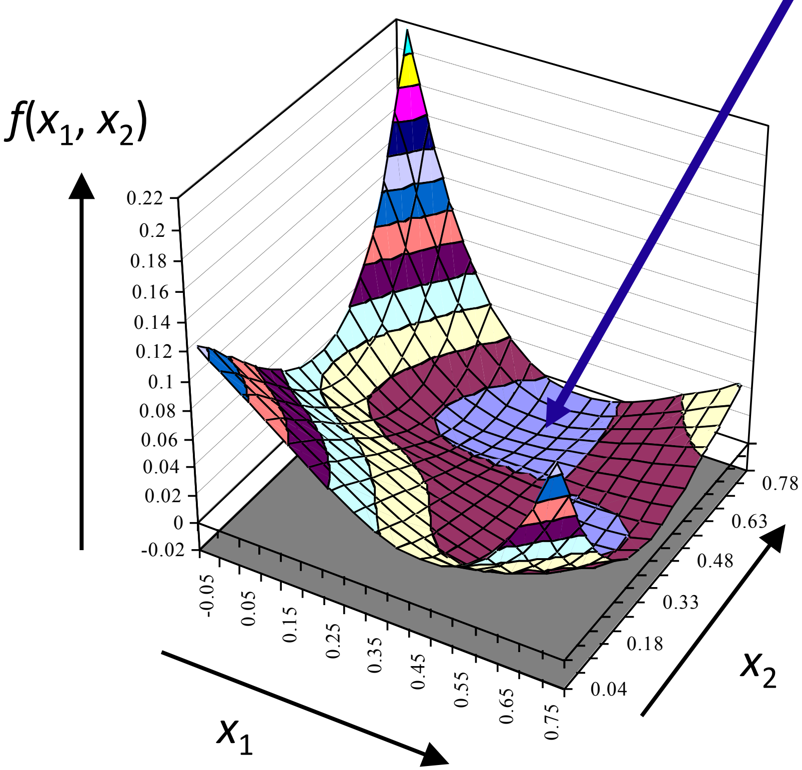
Τελεστής «ανάδελτα»: $\nabla := \left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right]^T.$

Κλίση ή **βαθμίδα** (gradient): $\mathrm{grad}(f) := \nabla f = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T = \left(\dfrac{df}{d\mathbf{x}}\right)^T$

Δεύτερη παράγωγος ως προς διάνυσμα: $$\frac{d^2 f}{d\mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \Lambda & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \Lambda & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \Lambda & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

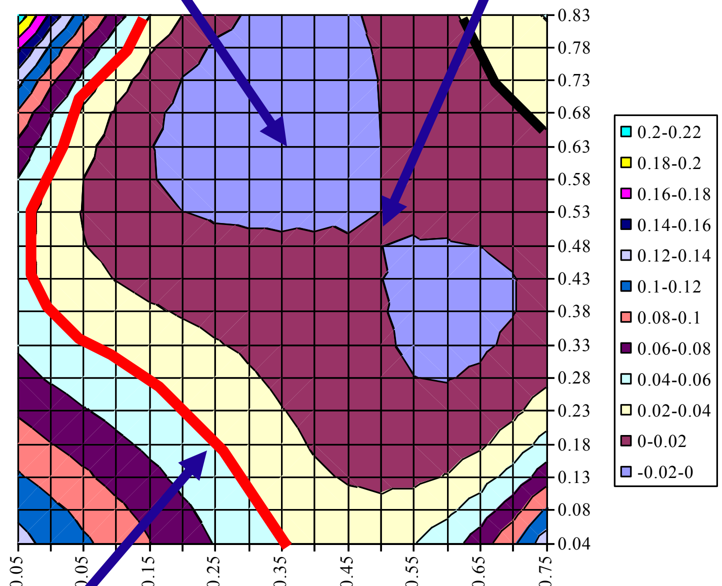
Η δεύτερη παράγωγος είναι συμμετρικό μητρώο, γνωστό ως *Εσσιανό* (Hessian)

Η έννοια της επιφάνειας απόκρισης



Θέση ακροτάτου

Περιοχή «αυχένα»



Κάθε καμπύλη της μορφής $z = f(x_1, x_2) = c$ ονομάζεται **ισοσταθμική**

Η έννοια της κυρτότητας

- Ένα n-διάστατο πεδίο S είναι κυρτό αν για κάθε ζεύγος σημείων $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \in S$ και για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει $\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2 \in S$.
- Η παραπάνω σχέση καλείται **κυρτός συνδυασμός** και υποδηλώνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει οποιοδήποτε ζεύγος σημείων $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \in S$ κείται αποκλειστικά στο πεδίο. Αποδεικνύεται ότι:
  - η *τομή* δύο κυρτών πεδίων είναι εξ ορισμού κυρτό πεδίο
  - η *ένωση* δύο κυρτών πεδίων δεν είναι απαραίτητα κυρτό πεδίο
- Έστω συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ ορισμένη στο κυρτό πεδίο $X \subseteq R^n$. Για κάθε ζεύγος σημείων $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \in X$ και για κάθε $\lambda \in [0, 1]$, η συνάρτηση f είναι:
  - **κυρτή** (convex) στο πεδίο X, εφόσον ισχύει:

$$\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2) \geq f [\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2]$$

  - **κοίλη** (concave) στο πεδίο X, εφόσον ισχύει:

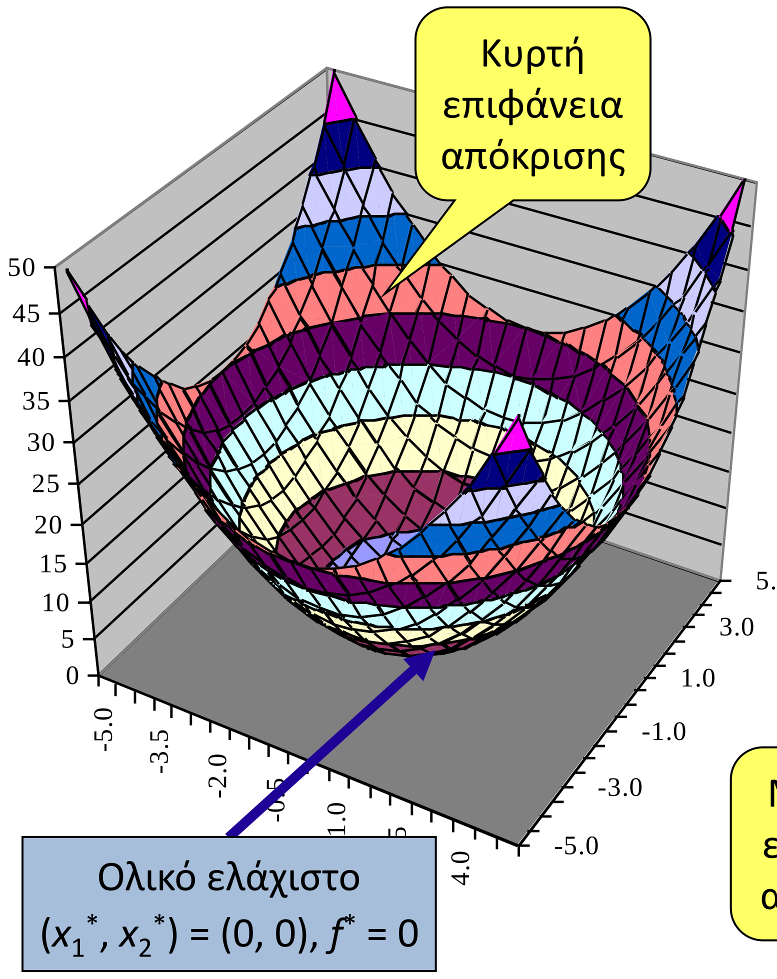
$$\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2) \leq f [\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2]$$

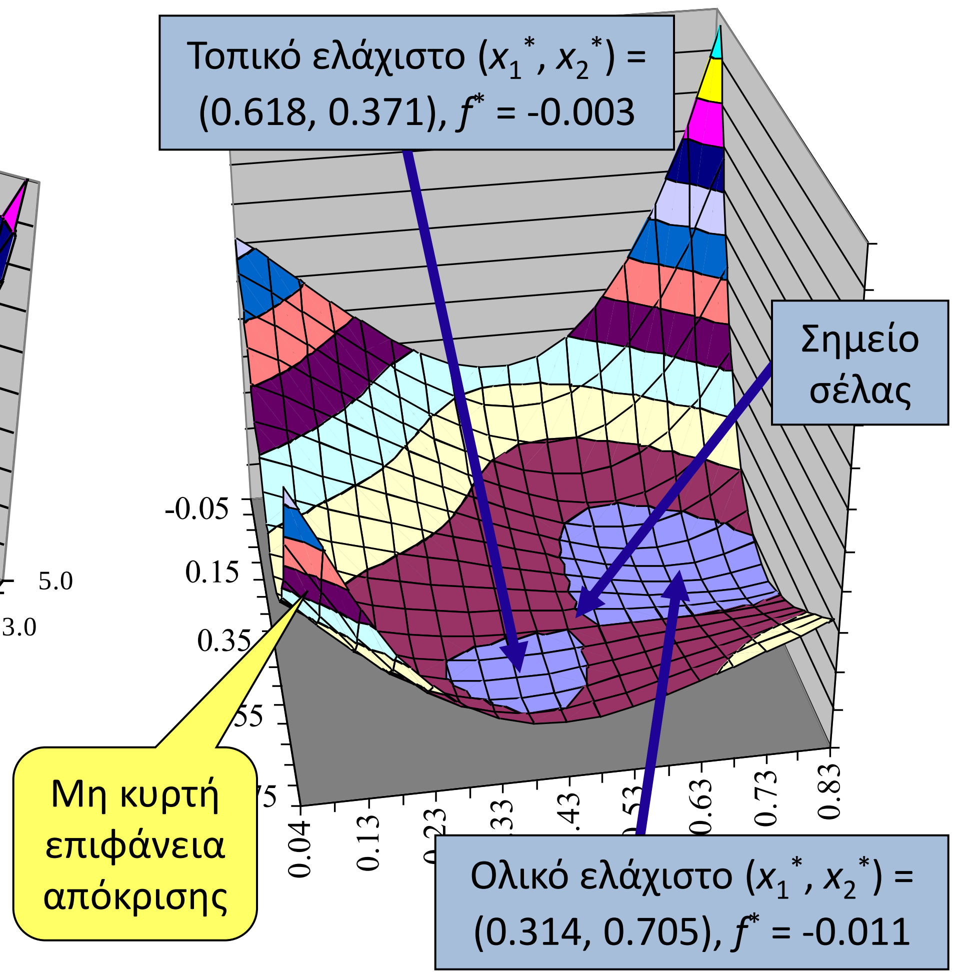
  - **μη κυρτή** (non-convex) στο πεδίο X, σε κάθε άλλη περίπτωση.
- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο τυχαία σημεία του X δεν βρίσκεται ποτέ κάτω από το γράφημά της, ενώ αν η f είναι κοίλη, το εν λόγω τμήμα δεν βρίσκεται ποτέ πάνω από το γράφημά της. Κάθε κυρτή συνάρτηση είναι εξ ορισμού συνεχής.

Αναλυτικός υπολογισμών ακροτάτων σε συναρτήσεις χωρίς περιορισμούς

- Έστω συνεχής συνάρτηση $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^n$, με συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Κάθε σημείο μηδενισμού του διανύσματος κλίσης της συνάρτησης, ήτοι κάθε σημείο $\mathbf{x}^*$ για το οποίο $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \text{grad}\, f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, καλείται στάσιμο (stationary).
- Αν $H_i(\mathbf{x})$ είναι η i υπο-ορίζουσα του εσσιανού μητρώου $d^2 f(\mathbf{x}) / d\mathbf{x}^2$, η οποία προκύπτει με αφαίρεση των $n - i$ τελευταίων γραμμών και στηλών του, τότε:
  - αν $H_i(\mathbf{x}^*) > 0$ για κάθε i, το $\mathbf{x}^*$ είναι τοπικό ελάχιστο·
  - αν $H_i(\mathbf{x}^*) \neq 0$ για κάθε i και $\text{sign}(H_i) = \text{sign}(-1)^i$, το $\mathbf{x}^*$ είναι τοπικό μέγιστο·
  - αν $H_i(\mathbf{x}^*) \neq 0$ και δεν ισχύει καμία από τις παραπάνω συνθήκες, το $\mathbf{x}^*$ είναι σημείο σέλας·
  - αν $H_i(\mathbf{x}^*) = 0$, δεν μπορεί να υπάρξει συμπέρασμα.
- Αν η συνάρτηση είναι κυρτή, έχει μοναδικό στάσιμο σημείο που αντιστοιχεί στο ολικό ακρότατο αυτής (ελάχιστο ή μέγιστο). Κατά συνέπεια, αν ικανοποιείται η *αναγκαία συνθήκη στασιμότητας* και η *ικανή συνθήκη κυρτότητας* (εσσιανό μητρώο θετικά ορισμένο) τότε το $\mathbf{x}^*$ είναι το ολικό ακρότατο της συνάρτησης.
- Αν η συνάρτηση είναι μη κυρτή, τότε έχει περισσότερα του ενός στάσιμα σημεία, καθένα από τα οποία μπορεί να είναι τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο ή σημείο σέλας. Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται πολυσχηματική (multimodal).

Τοπικά και ολικά ακρότατα

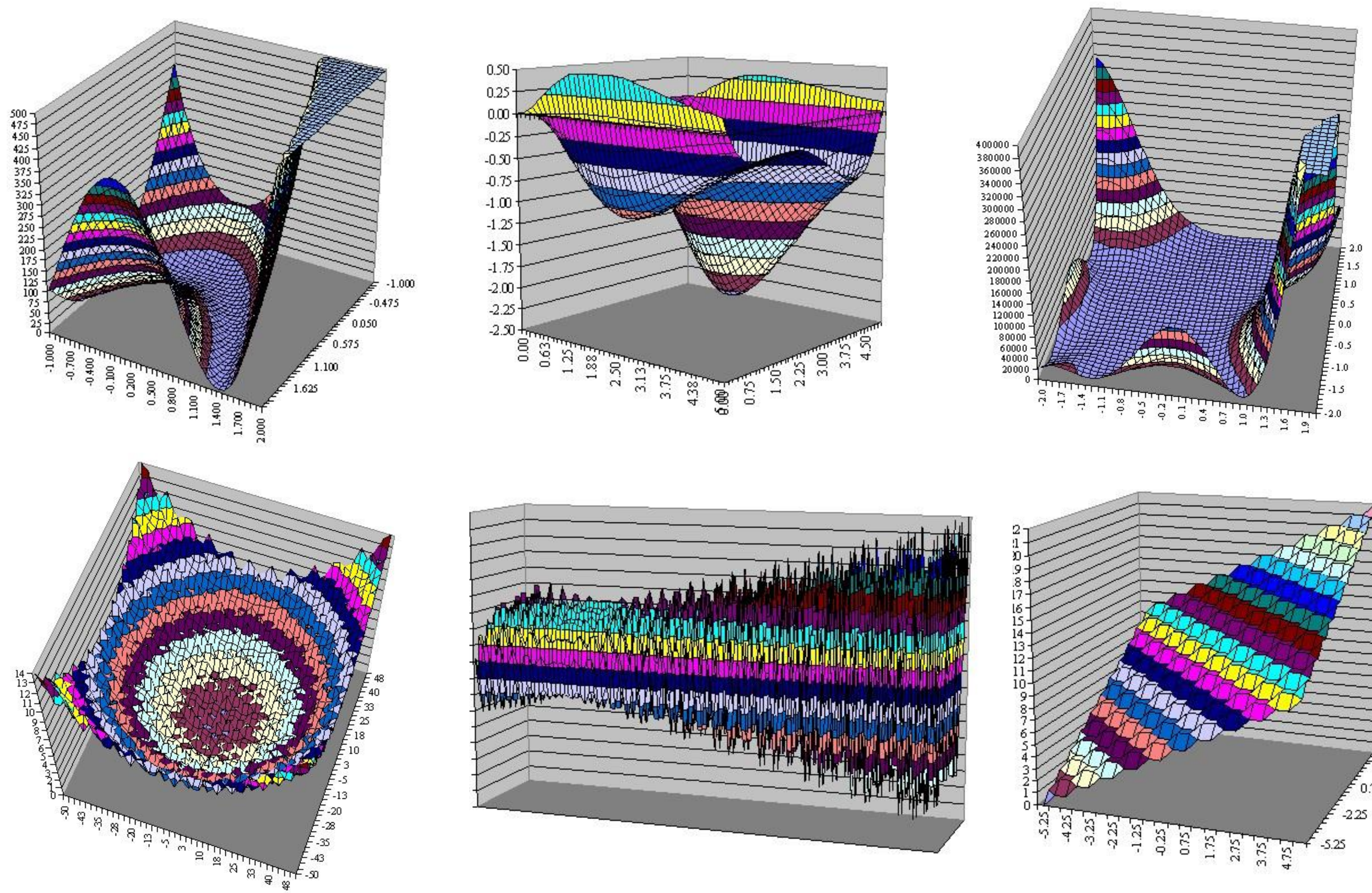




$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$f(x_1, x_2) = 0.5(1.1x_1 - x_2)^4 + 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

Παραδείγματα μη κυρτών συναρτήσεων



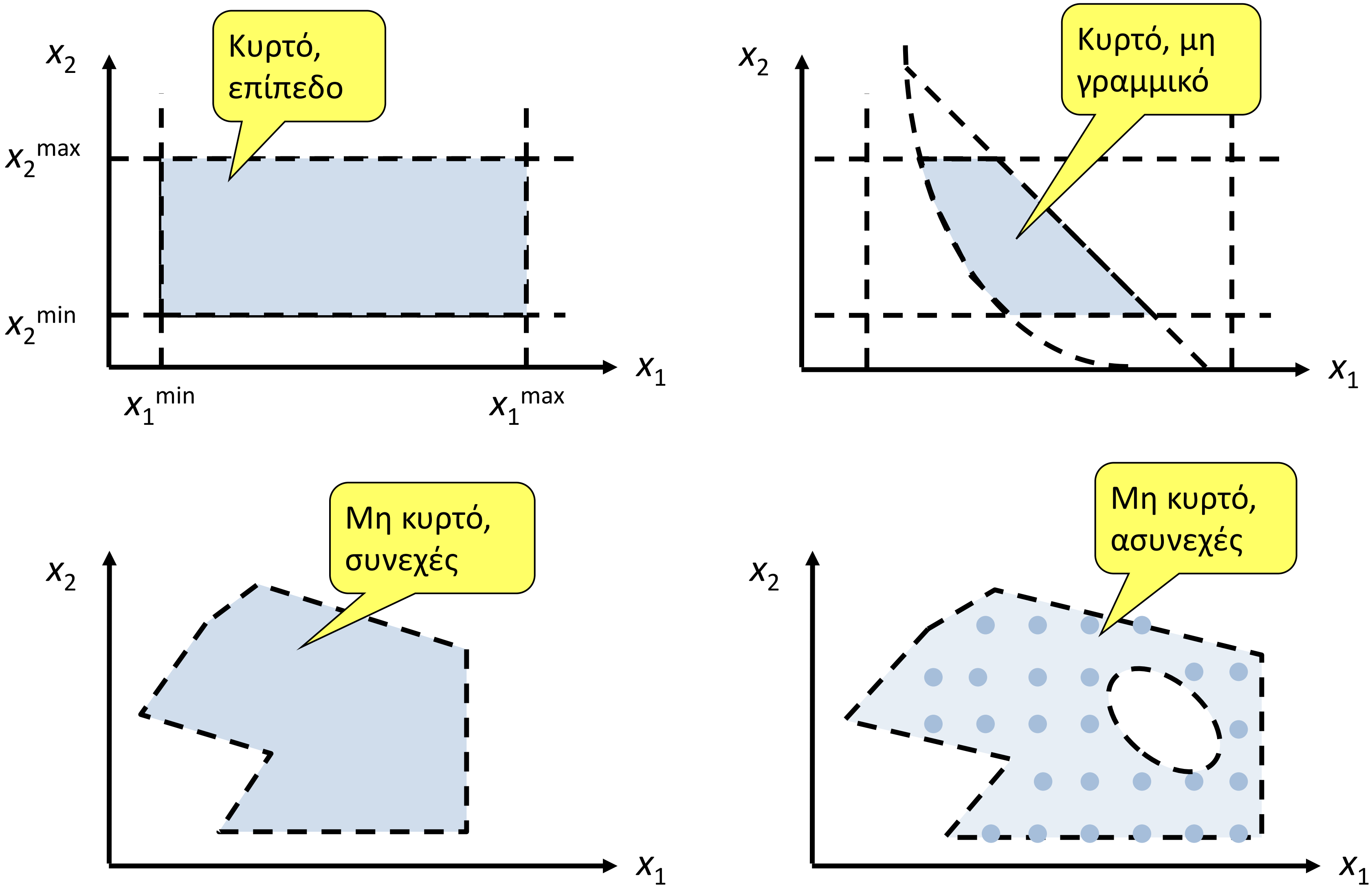
Βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς

- Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε ότι το πεδίο αναζήτησης $X \subseteq R^n$ περιγράφεται από μαθηματικούς περιορισμούς (constraints) της μορφής:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq, =, \geq \geq 0$$

- Στα μοντέλα, οι σχέσεις ισότητας αντιπροσωπεύουν, κατά κανόνα, εξισώσεις διατήρησης μάζας ή ενέργειας, πρόκειται δηλαδή για αυστηρά διατυπωμένους περιορισμούς που απορρέουν από φυσικούς νόμους.
- Η απλούστερη κατηγορία περιορισμών είναι σχέσεις της μορφής $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$, που εκφράζουν όρια διακύμανσης παραμέτρων ή περιορισμούς χωρητικότητας. Οι περιορισμοί ορίου αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως *ρητοί* (explicit).
- Ειδικές κατηγορίες περιορισμών:
  - περιορισμοί ακεραιότητας (integrity), οι οποίοι αναφέρονται σε μεταβλητές ελέγχου που λαμβάνουν αποκλειστικά ακέραιες τιμές·
  - περιορισμοί δυαδικότητας (boolean), όπου X = {0, 1}, με την τιμή $x = 0$ να αντιστοιχεί σε άρνηση (false) ενώ η τιμή $x = 1$ υποδηλώνει κατάφαση (true)·
  - τελεστές ή λογικές εκφράσεις, όπως “if…then…else”, “and”, “or”, οι οποίοι κωδικοποιούνται μόνο σε γλώσσα υπολογιστή·
  - αριθμήσιμα σύνολα τιμών που υποδηλώνουν «διαθέσιμες» επιλογές (π.χ. σύνολα διαμέτρων εμπορίου σε προβλήματα βελτιστοποίησης δικτύων).

Παραδείγματα περιορισμών – εφικτών πεδίων



Αναλυτικός υπολογισμών δεσμευμένων ακροτάτων – Συνθήκες Kuhn-Tucker

- Έστω συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ με k περιορισμούς της μορφής $g(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}$. Το σημείο $\mathbf{x}^*$ είναι το ολικό ελάχιστο της f εφόσον ικανοποιεί τους περιορισμούς και επιπλέον υπάρχει διάνυσμα μη αρνητικών συντελεστών $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^T$ τέτοιο ώστε:

$$\lambda_j \, g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, m$$

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\lambda}^T \, \nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$$

- Οι παραπάνω εκφράσεις, που είναι αναγκαίες για την ύπαρξη ακροτάτου μιας συνάρτησης με περιορισμούς, είναι γνωστές ως **συνθήκες Kuhn-Tucker**.
- Κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς μπορεί να αναχθεί σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς, με θεώρηση της βοηθητικής συνάρτησης:

$$\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^T \, g(\mathbf{x}), \; \mathbf{x} \in X \subseteq R^n$$

- Η πρώτη συνθήκη εξασφαλίζει ότι το ολικό ακρότατο της φ ταυτίζεται με το ολικό ακρότατο της f, ήτοι $\varphi(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = f(\mathbf{x}^*)$. Η επίλυση του μετασχηματισμένου προβλήματος γίνεται θεωρώντας ως μεταβλητές ελέγχου τις αρχικές μεταβλητές $\mathbf{x}$ καθώς και τους συντελεστές $\boldsymbol{\lambda}$ (**πολλαπλασιαστές Lagrange**).
- Οι συνθήκες Kuhn-Tucker είναι ικανές και αναγκαίες για την ύπαρξη ολικού ελαχίστου της f, εφόσον τόσο η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι κυρτές συναρτήσεις.

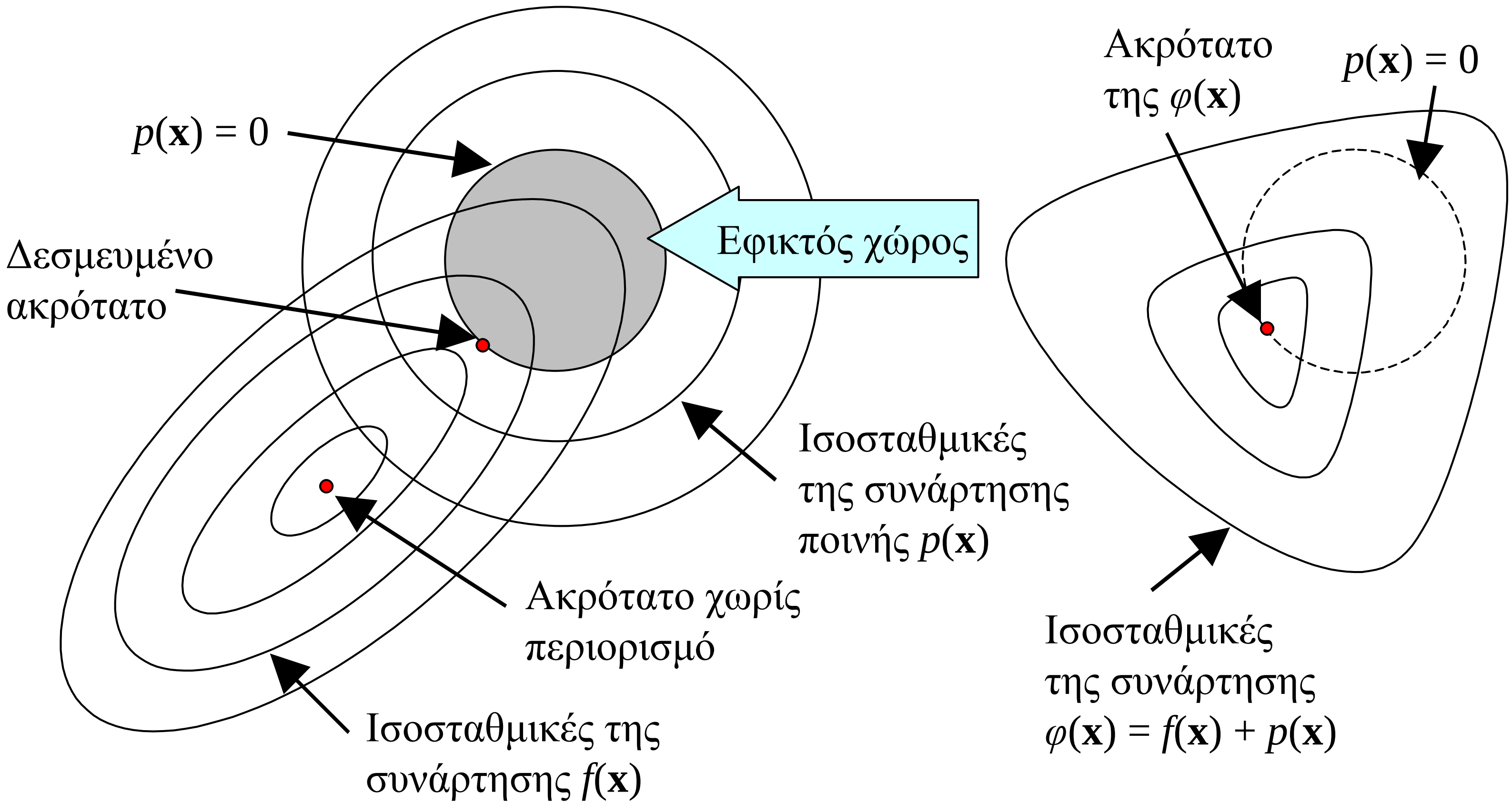
Χειρισμός περιορισμών με συναρτήσεις ποινής

- Η ύπαρξη περιορισμών σε προβλήματα βελτιστοποίησης μη γραμμικών συναρτήσεων είναι εξαιρετικά δυσχερής, καθώς προϋποθέτει:
  - την αναλυτική έκφραση των παραγώγων της στοχικής συνάρτησης και των περιορισμών (ώστε να μπορούν να διατυπωθούν οι συνθήκες Kuhn-Tucker)·
  - τον εντοπισμό των στάσιμων σημείων της βοηθητικής συνάρτησης, δηλαδή των διανυσμάτων $\mathbf{x}^*$ και $\boldsymbol{\lambda}^*$ (αναγκαία συνθήκη στασιμότητας)·
  - την ισχύ της ικανής συνθήκης κυρτότητας.
- **Συνάρτηση ποινής** (penalty function) καλείται οποιαδήποτε μαθηματική έκφραση $p_j(\mathbf{x}) \geq 0$, τέτοια ώστε $p_j(\mathbf{x}) = 0$ αν $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$, και $p_j(\mathbf{x}) > 0$ αν $g_j(\mathbf{x}) > 0$.
- Με την εισαγωγή συναρτήσεων ποινής έναντι όλων των περιορισμών $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$, προκύπτει ένα ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς:

$$min\ \phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x})$$

- Μειονέκτημα της μεθόδου είναι η αυθαίρετη διατύπωση των συναρτήσεων ποινής καθώς η κατά κανόνα απότομη μεταβολή της συνάρτησης φ στο όριο του εφικτού χώρου (κατά κανόνα τίθεται $p \approx 0$ όταν ο περιορισμός παραβιάζεται οριακά, αλλιώς επιβάλλεται μια πολύ μεγάλη ποινή $p >> 0$).

Γεωμετρική ερμηνεία συναρτήσεων ποινής



Παρατήρηση: Ενώ με την προσθήκη των όρων ποινής αίρονται όλοι οι περιορισμοί, οπότε ο εφικτός χώρος ταυτίζεται με το R^n , αλλοιώνεται η επιφάνεια απόκρισης της στοχικής συνάρτησης, η γεωμετρία της οποίας γίνεται γενικά πιο πολύπλοκη.

Εφαρμογή: Υδραυλικά βέλτιστες διατομές

- Η διαστασιολόγηση επενδεδυμένων αγωγών σε συνθήκες ομοιόμορφης ροής γίνεται με τη μέθοδο της υδραυλικά βέλτιστης διατομής.
- Εφαρμόζεται η σχέση του Manning:

$$Q = E\,V = (1 / n)\,E\,R^{2/3}\,J^{1/2} = (1 / n)\,E^{5/3}\,\Pi^{-2/3}\,J^{1/2}$$

  όπου Q η διερχόμενη παροχή (καθορισμένη από τον σχεδιασμό), V η ταχύτητα ροής, n ο συντελεστής τραχύτητας (εξαρτάται από το υλικό επένδυσης), J η κατά μήκος κλίση του αγωγού (καθορίζεται από την τοπογραφία), E η υγρή επιφάνεια της διατομής, Π η βρεχόμενη περίμετρος και R η υδραυλική ακτίνα ($R = E / \Pi$).
- Από τη σχέση του Manning προκύπτει ότι, για δεδομένη επιφάνεια $E = E_0$, η παροχετευτικότητα της διατομής μεγιστοποιείται όταν η βρεχόμενη περίμετρος γίνεται ελάχιστη (ελαχιστοποιούνται οι απώλειες λόγω τριβών).
- Τα μεγέθη E και Π είναι συνάρτηση του ομοιόμορφου βάθους ροής y_0 και ενός αριθμού μη καθορισμένων γεωμετρικών χαρακτηριστικών $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, τα οποία εξαρτώνται από το σχήμα της διατομής (π.χ. πλάτος πυθμένα, κλίσεις πρανών, διάμετρος). Το σχετικό πρόβλημα βελτιστοποίησης διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{minimize } \Pi = \Pi(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0)$$

$$\text{s.t. } E = E(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0) = E_0$$

Εφαρμογή: Βέλτιστη ορθογωνική διατομή

- Μεταβλητές ελέγχου: πλάτος πυθμένα b, βάθος ροής y_0
- Γεωμετρικά μεγέθη:
  - Εμβαδόν υγρής διατομής $E = b\, y_0$
  - Βρεχόμενη περίμετρος $\Pi = b + 2y_0$
- Διατύπωση προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$\text{minimize } \Pi(b, y_0) = b + 2y_0$$

$$\text{s.t. } E(b, y_0) = b\, y_0 = E_0$$

- Διατύπωση μετασχηματισμένου προβλήματος, με εισαγωγή ενός πολλαπλασιαστή Lagrange:

$$\text{minimize } \varphi(b, y_0, \lambda) = (b + 2y_0) - \lambda\, (b\, y_0)$$

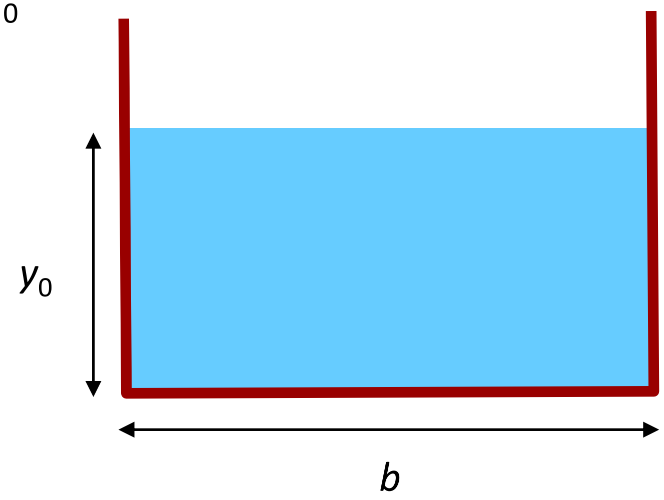
- Συνθήκη στασιμότητας:

$$\partial\varphi / \partial b = 1 - \lambda\, y_0 = 0$$

$$\partial\varphi / \partial y_0 = 2 - \lambda\, b = 0$$

- Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει η βέλτιστη αναλογία διαστάσεων της διατομής:

$$b = 2y_0$$



Παρατήρηση: Η εφαρμογή της υδραυλική βέλτιστης διατομής δεν ενδείκνυται για μη επενδεδυμένα κανάλια, καθώς προϋποθέτει μεγιστοποίηση της ταχύτητας ροής για δεδομένη επιφάνεια διατομής.

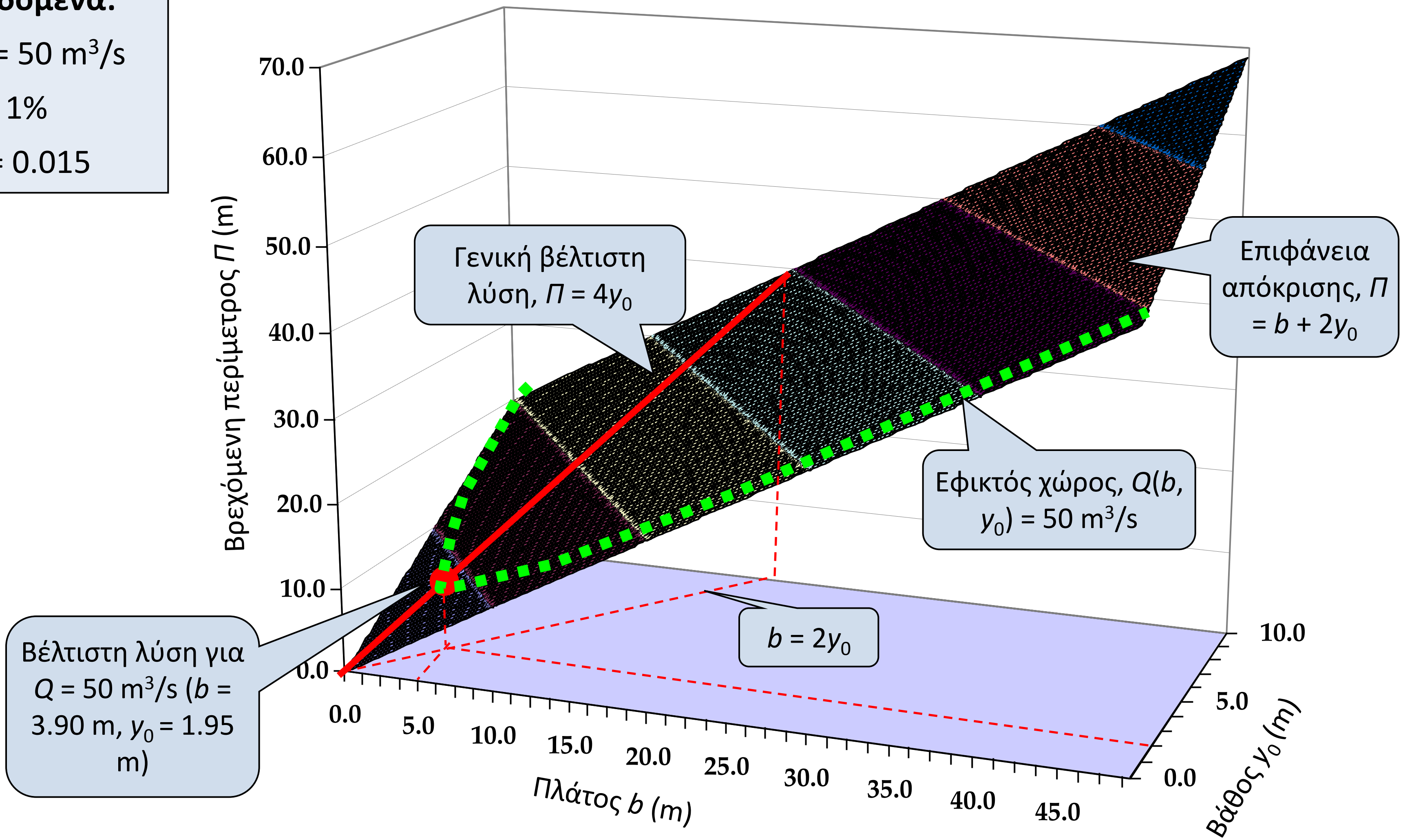
Αριθμητικό παράδειγμα

Δεδομένα:

Q = 50 m^3/s

J = 1%

n = 0.015



Βιβλιογραφία

Θεωρία μαθηματικών μεθόδων βελτιστοποίησης

- Ευστρατιάδης, Α., *Διερεύνηση μεθόδων αναζήτησης ολικού βελτίστου σε προβλήματα υδατικών πόρων*, Μεταπτυχιακή εργασία, 139 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Μάιος 2001 (http://itia.ntua.gr/el/docinfo/446/).
- Ευστρατιάδης, Α., *Μη γραμμικές μέθοδοι σε πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης υδατικών πόρων, με έμφαση στη βαθμονόμηση υδρολογικών μοντέλων*, Διδακτορική διατριβή, 391 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Φεβρουάριος 2008 (http://itia.ntua.gr/el/docinfo/838/).
- Ευστρατιάδης, Α., και Δ. Κουτσογιάννης, *Σημειώσεις Βελτιστοποίησης Συστημάτων Υδατικών Πόρων - Μέρος 2*, 140 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2004 (http://itia.ntua.gr/el/docinfo/201/).
- Κουτσογιάννης, Δ., *Σημειώσεις Βελτιστοποίησης Συστημάτων Υδατικών Πόρων – Μέρος 1*, Έκδοση 2, 91 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2000 (http://itia.ntua.gr/el/docinfo/200/).
- Παντελίδης, Γ. Ν., *Μαθηματική Ανάλυση*, Τόμος ΙΙΙ, Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα, 1994.
- Marlow, W. H., *Mathematics for Operations Research*, Dover Publications New York, 1993.
- Pierre, D. A., *Optimization Theory with Applications*, Dover Publications, New York, 1986.
- Press, W.H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1992.

Εφαρμογές σε προβλήματα σχεδιασμού επενδεδυμένων διατομών

- Παπανικολάου, Π. Στοιχεία μόνιμης ροής σε αγωγούς υπό πίεση & αγωγούς με ελεύθερη επιφάνεια, Διδακτικές σημειώσεις, Έκδοση 2, 264 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2012.
- Παπαθανασιάδης, Τ., *Ροή με ελεύθερη επιφάνεια – Ανοιχτοί αγωγοί*, Φροντιστηριακές σημειώσεις – Ασκήσεις Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2005.
- Abdulrahman, A. Best hydraulic section of a composite channel, *J. Irrig. Drain. Eng.*, 133(6), 695-697, 2007.
- Chin, D. A., *Water Resources Engineering*, 2nd edition, Pearson Education Inc., New Jersey, 2006.
- Monadjemi, P. General formulation of best hydraulic channel section, *J. Irrig. Drain. Eng.*, 120(1), 27-35, 1994.