

# ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΚΑΙ ΥΔΡΑΥΛΙΚΑ ΕΡΓΑ

## Ροή με Ελεύθερη Επιφάνεια

Α. Νάνου-Γιάνναρου

Νοέμβριος 2018

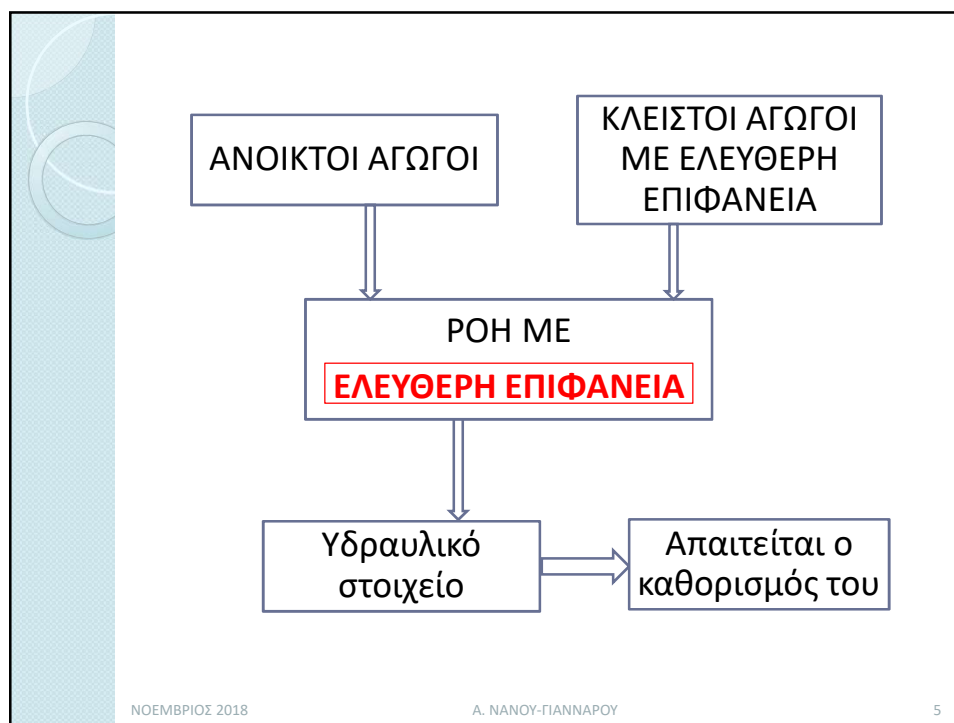
## Ελληνική Βιβλιογραφία

- Στάμου, Α. (2016). Εφαρμοσμένη Υδραυλική, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα.

## Αγγλική Βιβλιογραφία

- Ven Te Chow, 1959. “Open-Channel Hydraulics”, McGraw-Hill International Student Editions.
- H. Chanson, 2004. “The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction”, Elsevier.
- B. R. Munson, A. P. Rothmayer, T. H. Okiishi, W. W. Huebsch. “Fundamental of Fluid Mechanics”, ISBN: 978-0-470-26284-9.
  - Υπάρχει στα Ελληνικά: Εκδόσεις Τζιόλα.

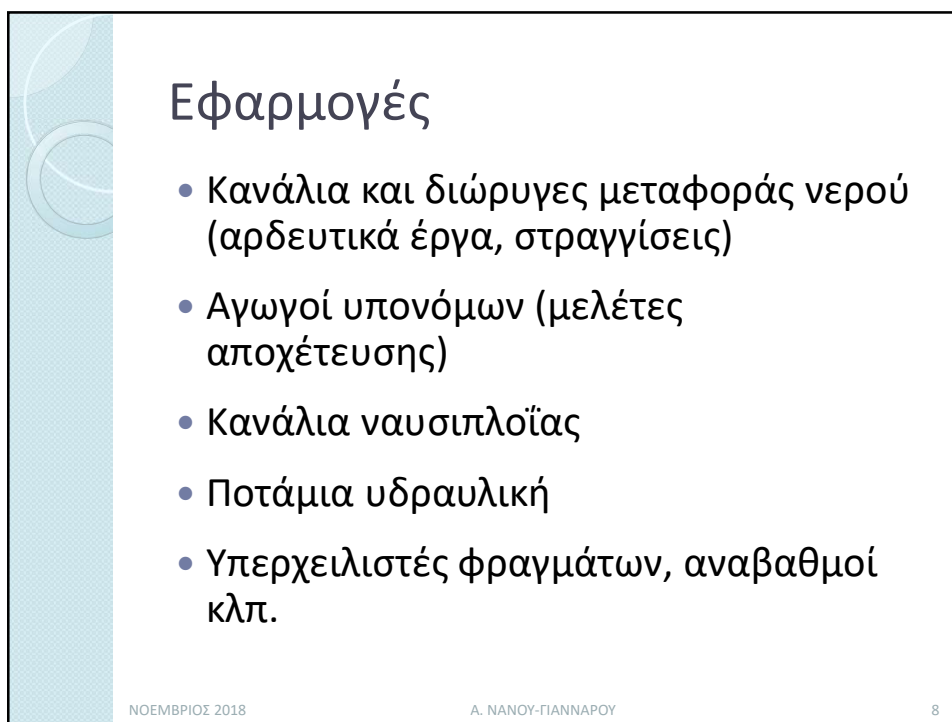
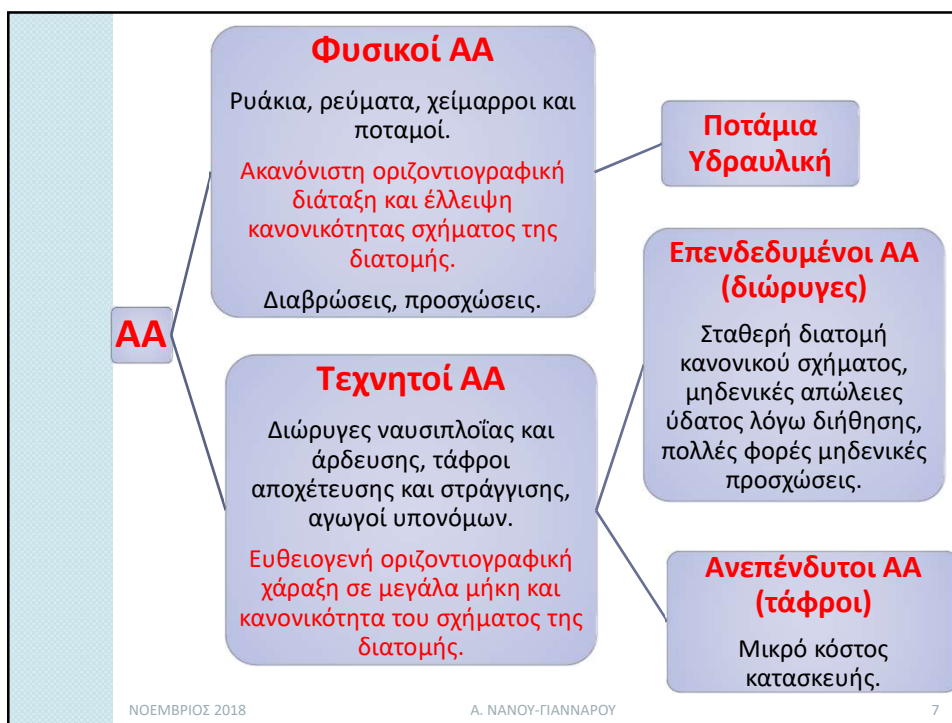
## ΕΙΣΑΓΩΓΗ



## Εισαγωγή

- Ανοικτός αγωγός (ΑΑ): Ο αγωγός στον οποίο πραγματοποιείται η ροή με την εμφάνιση ελεύθερης επιφάνειας (ΕΕ).
- Είδη
  - Φυσικοί αγωγοί (ρεύματα, χείμαρροι και ποταμοί)
  - Τεχνητοί αγωγοί (υπόνομοι, διώρυγες και τάφροι)
- Κύριο χαρακτηριστικό: Ύπαρξη της ΕΕ
- Η ΕΕ δεν παρατηρείται μόνο σε ΑΑ αλλά και σε κλειστούς (π.χ. υπόνομοι, οχετοί).

NOΕΜΒΡΙΟΣ 2018 Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ 6

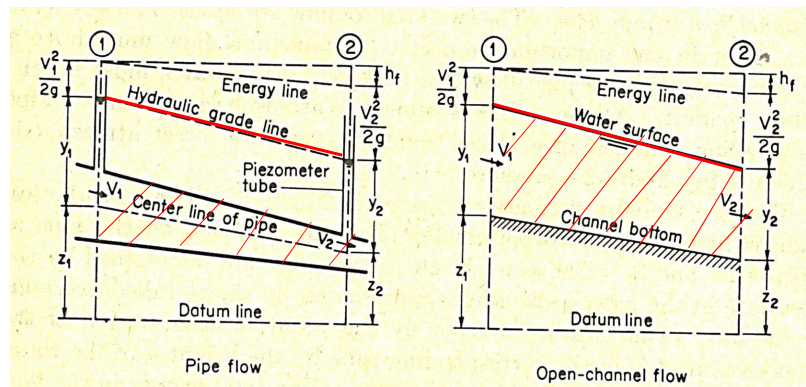


## Παράδειγμα φυσικής κοίτης



Από Munson et al

## Διαφορά κλειστών και ανοικτών αγωγών



Από Ven Te Chow

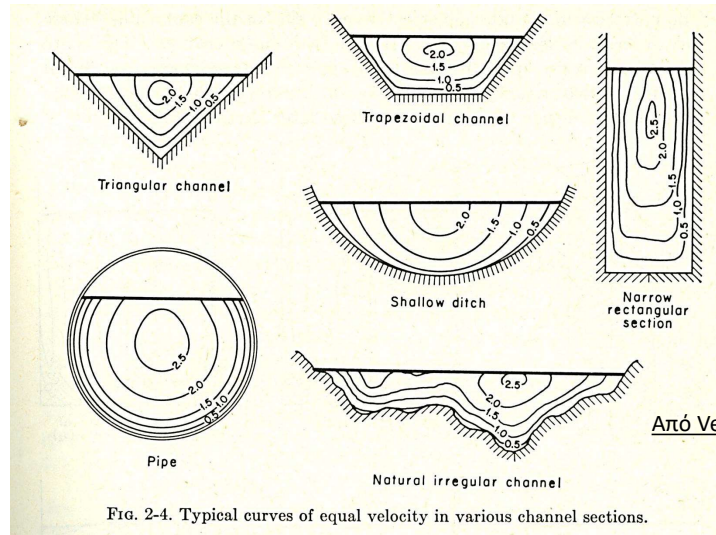
## Επίλυση ροής προβλημάτων με ΕΕ

- Η ύπαρξη της ΕΕ εισάγει σημαντική δυσκολία στην επίλυση.
- Η πίεση στην ΕΕ ισούται με την ατμοσφαιρική.
- Βαρύτητα: Αυτή καθορίζει κατά κύριο λόγο την κίνηση του ρευστού.

## Πρόσθετες δυσχέρειες (1)

- Η γεωμετρία των ΑΑ ποικίλλει σε σχήμα σημαντικά. Πολύπλοκη γεωμετρία διατομής.
- Στους ΑΑ παρατηρείται πάντοτε δευτερεύουσα ροή στο επίπεδο της διατομής, όπως και στην περίπτωση ροής σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση μη κυκλικής διατομής.

## Διατομές αγωγών με ΕΕ -1

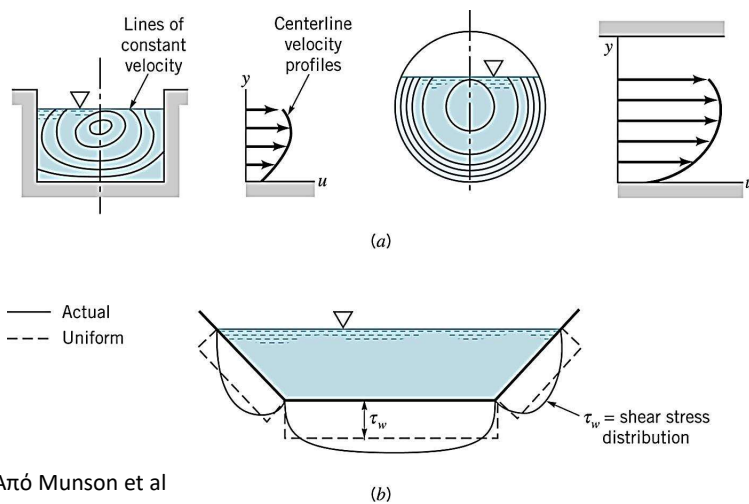


ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

13

## Διατομές αγωγών με ΕΕ -2



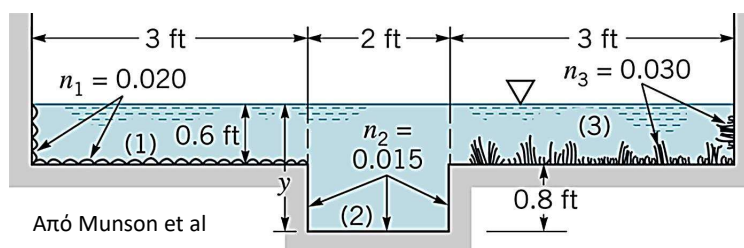
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

14

## Παράδειγμα σύνθετης διατομής αγωγού με ΕΕ

- Κυρίως κοίτη
- Πλημμυρικές κοίτες (μία ή δύο)



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

15

## Πρόσθετες δυσχέρειες (2)

- Η τραχύτητα των ανοικτών αγωγών παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερες διακυμάνσεις από αγωγό σε αγωγό, σε σύγκριση με την τραχύτητα των σωλήνων, οι οποίοι κατασκευάζονται βιομηχανικά.
- Δύσκολη έκφραση τραχύτητας → δύσκολος υπολογισμός αντιστάσεων τριβής και απωλειών → **εμπειρική εκτίμηση**

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

16



## Πειραματική διερεύνηση

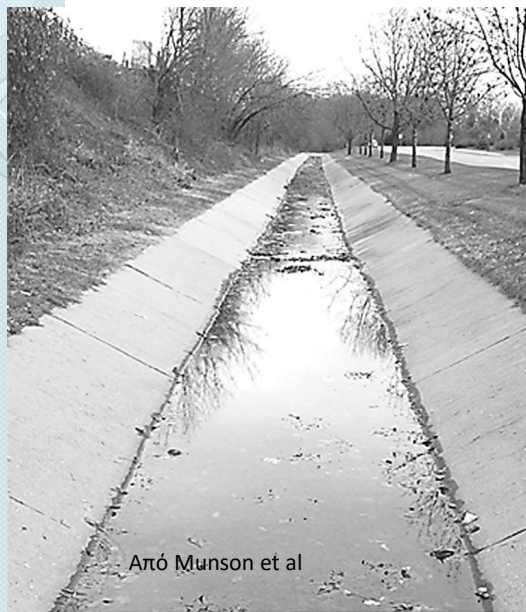
- Η πειραματική διερεύνηση προβλημάτων AA είναι δυσχερής.
- Φυσικά ομοιώματα είναι αναγκαία να γίνουν σε πολλά τεχνικά έργα.
- Η ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνθηκών ομοιότητας κατά Froude και κατά Reynolds είναι πρακτικά αδύνατη, εκτός και αν το ομοίωμα πλησιάζει τις διαστάσεις του πρωτοτύπου.
- Για το λόγο αυτόν η εμπειρία και ο πειραματισμός και σε φυσική κλίμακα είναι πολύτιμη και επιβεβλημένη.

## Συμπεράσματα

- Λόγω των ανωτέρω δυσχερειών, που περιγράφηκαν σε συντομία, σε προβλήματα ροής σε AA, η αντιμετώπιση είναι περισσότερο εμπειρική και άρα περισσότερο προσεγγιστική από την αντίστοιχη κατηγορία προβλημάτων ροής σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση.
- Η μεγάλη ποικιλία προβλημάτων ροής σε AA απαιτεί τον διαχωρισμό τους σε ευρείες ενότητες που αντιμετωπίζονται με κοινή μεθοδολογία.

## Γεωμετρικά χαρακτηριστικά - Ορισμοί

- **Πρισματικός αγωγός:** Σταθερή και ενιαία κατά μήκος κλίση πυθμένα και σταθερή αναλλοίωτη διατομή κατά μήκος αυτού.
- **Διατομή αγωγού:** Τομή του αγωγού από επίπεδο κάθετο προς την κατεύθυνση της ροής. Στην περίπτωση πρισματικού αγωγού η τομή θεωρείται παράλληλη προς την κατά μήκος γραμμή του πυθμένα.
- **Κατακόρυφη διατομή αγωγού:** Τομή του αγωγού από κατακόρυφο επίπεδο.

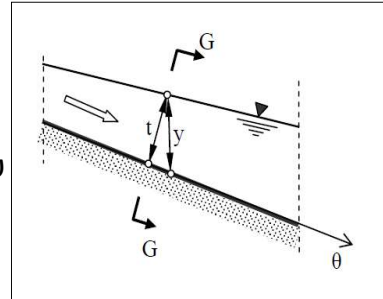


Από Munson et al

Ομοιόμορφη  
ροή –  
Πρισματικός  
αγωγός

## Βάθη ροής

- **Βάθος ροής  $t$ :** Η κάθετη απόσταση μεταξύ του χαμηλότερου σημείου του πυθμένα (πόδι της διατομής και της ΕΕ του νερού).
- **Βάθος ροής  $y$ :** Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του χαμηλότερου σημείου του πυθμένα της διατομής και της ΕΕ του νερού. Είναι προφανές ότι το βάθος ροής  $y$  αναφέρεται σε κατακόρυφη διατομή.

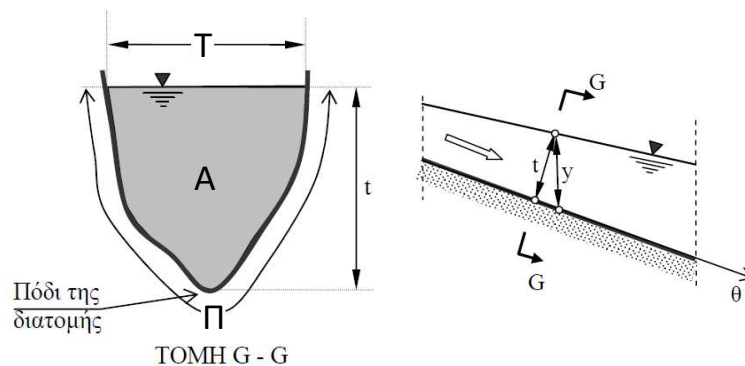


ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

21

## Σχηματική παράσταση

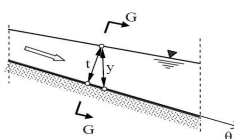
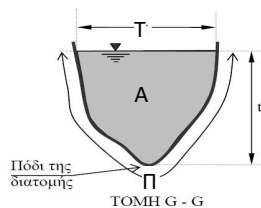


ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

22

## Χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη



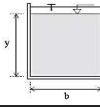
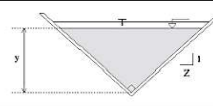
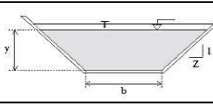
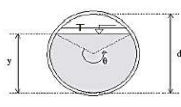
Όλα τα γεωμετρικά στοιχεία θεωρούνται ως συναρτήσεις της γεωμετρίας της διατομής και του βάθους ροής  $t$ .

- $A$  = εμβαδόν υγρής διατομής
- $T$  = πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας
- $\Pi$  = βρεχόμενη περίμετρος
- $R = (A/\Pi)$  υδραυλική ακτίνα
- $D = (A/T)$  υδραυλικό βάθος = βάθος της ισοδύναμης ορθογωνικής διατομής πλάτους  $T$

## Μορφές διατομών των τεχνητών ΑΑ

- **Ορθογωνική διατομή:** Επενδεδυμένη διατομή. Αποχετευτικά έργα και διώρυγες ναυσιπλοΐας, αρδεύσεως και μεταφοράς νερού.
- **Τραπεζοειδής διατομή:** Κατά κανόνα συμμετρική. Σε επενδεδυμένες διώρυγες και σε ανεπένδυτες τάφρους.
- **Τριγωνική διατομή:** Σε μικρούς αποχετευτικούς χάνδακες, σε τάφρους αποχέτευσης οδών και σε εργαστηριακές διώρυγες.
- **Κυκλική διατομή:** Σε αγωγούς υπονόμων και οχετών.
- **Γεωμετρικά κλειστές διατομές:** Ωοειδείς, πεταλοειδείς, σκουφοειδείς, ελλειπτικές κλπ. Σε μεγάλους αγωγούς υπονόμων και σε σήραγγες.
- **Παραβολική διατομή:** Σε προκατασκευασμένους αγωγούς αρδευτικών δικτύων.

## Πίνακας γεωμετρικών στοιχείων διατομών

Σχήμα διατομής	Σχήμα	A	Π	T
Ορθογωνικό		$by$	$b + 2y$	$b$
Τριγωνικό		$Zy^2$	$2y\sqrt{1+Z^2}$	$2Zy$
Τραπεζοειδές		$(b + Zy)y$	$b + 2y\sqrt{1+Z^2}$	$b + 2Zy$
Κυκλικό		$\frac{d^2}{8} (\theta - \sin \theta)$	$\theta \frac{d}{2}$	$\frac{d \sin(\frac{\theta}{2})}{2\sqrt{y(d-y)}}$ ή

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

25

## Υπολογισμός παροχής

$$Q = AV$$

Μόνιμη ροή

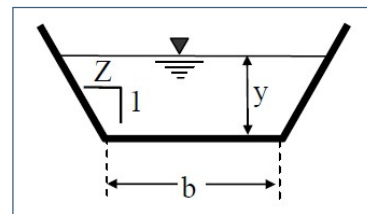
$$A = f(\text{γεωμετρία}, y)$$

Μη μόνιμη ροή, π.χ. πλημμύρα

$$y = f(t) \rightarrow A = f(\text{γεωμετρία}, y, t)$$

Παράδειγμα: τραπεζοειδής διατομή

$$A = (b + zy)y$$



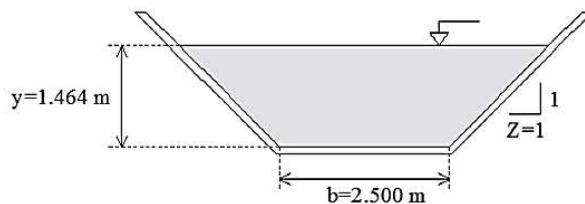
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

26

## Παράδειγμα 6.2-1

Υπολογίστε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και το είδος της ροής στον αγωγό τραπεζοειδούς διατομής του Σχ. 1 που έχει βάθος ροής ίσο με  $y=1.464$  m και μεταφέρει παροχή ίση με  $Q=5.0$  m<sup>3</sup>/s.



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

27

## Λύση -1

$$A = (b + Zy)y = [2.5\text{m} + (1.0)(1.464\text{m})](1.464\text{m}) = 5.803\text{m}^2$$

$$\Pi = b + 2y\sqrt{1 + Z^2} = 2.5\text{m} + 2(1.464\text{m})\sqrt{1 + 1^2} = 6.641\text{m}$$

$$T = b + 2Zy = 2.5\text{m} + 2(1.0)(1.464\text{m}) = 5.428\text{m}$$

$$R = \frac{A}{\Pi} = \frac{5.803\text{m}^2}{6.641\text{m}} = 0.874\text{m}$$

$$D = \frac{A}{T} = \frac{5.803\text{m}^2}{5.428\text{m}} = 1.069\text{m}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

28

## Λύση -2

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{5.0 \text{ m}^3/\text{s}}{5.803 \text{ m}^2} = 0.862 \text{ m/s}$$

$$c = \sqrt{gD} = \sqrt{\left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(1.069 \text{ m})} = 3.239 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{V \cdot 4R}{\nu} = \frac{(0.862 \text{ m/s})4(0.874 \text{ m})}{1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^2} = 2737889, \text{ \acute{o}\pi\omicron\tau\epsilon \eta \rho\omicron\eta \acute{\epsilon}\nu\alpha\iota \tau\upsilon\pi-\beta\acute{\omega}\delta\eta\varsigma.}$$

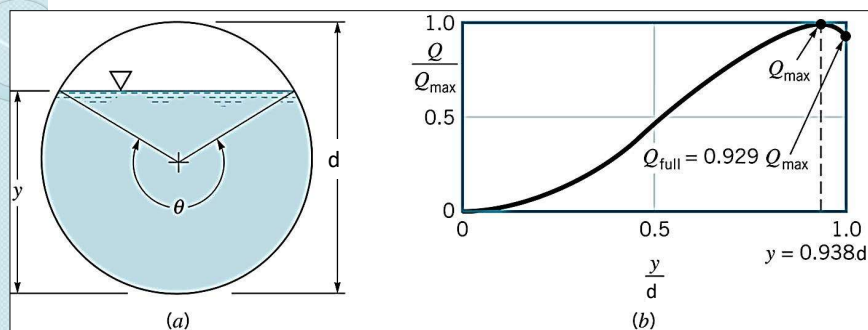
$$F = \frac{V}{c} = \frac{0.862 \text{ m/s}}{3.239 \text{ m/s}} = 0.266, \text{ \acute{o}\pi\omicron\tau\epsilon \eta \rho\omicron\eta \acute{\epsilon}\nu\alpha\iota \pi\omicron\tau\acute{\alpha}\mu\iota\alpha -\upsilon\pi\omicron\kappa\rho\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta.}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

29

## Αγωγός κυκλικής διατομής



Από Munson et al

$$\text{\textit{Όταν } } y < 0.5d \quad \theta = \pi - 2 \sin^{-1} \left( 1 - \frac{y}{0.5d} \right)$$

$$\text{\textit{Όταν } } y > 0.5d \quad \theta = \pi + 2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{0.5d} - 1 \right)$$

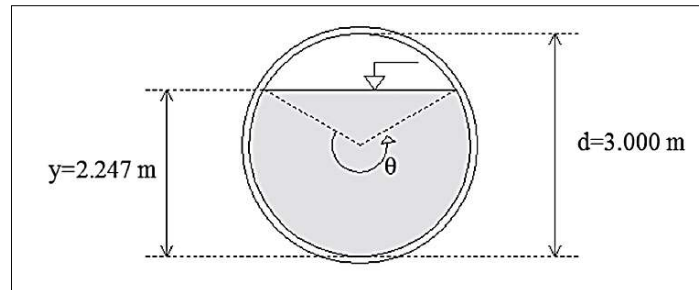
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

30

## Παράδειγμα 6.2-2

Υπολογίστε το γεωμετρικά χαρακτηριστικά και το είδος της ροής στον κυκλικό αγωγό του Σχ. 1 που έχει βάθος ροής ίσο με  $y=2.247$  m και μεταφέρει παροχή ίση με  $Q=5.0$  m<sup>3</sup>/s.



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

31

## Λύση -1

$$y > d/2 \rightarrow$$

$$\theta = \pi + 2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{0.5d} - 1 \right) = 3.142 + 2 \sin^{-1} \left( \frac{2.247}{0.5(3.0)} - 1 \right) = 4.184 \text{ rad}$$

$$\text{γωνία } \theta = 239.75^\circ$$

$$A = \frac{d^2}{8} (\theta - \sin \theta) = \frac{(3.0\text{m})^2}{8} [4.184 - \sin(4.184)] = 5.679 \text{ m}^2$$

$$\Pi = \theta \frac{d}{2} = 4.184 \frac{(3.0\text{m})}{2} = 6.276 \text{ m}$$

$$T = 2\sqrt{y(d-y)} = 2\sqrt{(2.247\text{m})(3.0\text{m} - 2.247\text{m})} = 2.602 \text{ m}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

32



## Λύση -2

$$R = \frac{A}{\Pi} = \frac{5.679\text{m}^2}{6.276\text{m}} = 0.905\text{m}$$

$$D = \frac{A}{T} = \frac{5.679\text{m}^2}{2.602\text{m}} = 2.183\text{m}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{5.0\text{m}^3/\text{s}}{5.679\text{m}^2} = 0.880\text{m/s}$$

$$c = \sqrt{gD} = \sqrt{\left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2.183\text{m})} = 4.628\text{m/s}$$

$$Re = \frac{V \cdot 4R}{\nu} = \frac{(0.880\text{m/s})4(0.905\text{m})}{1.1 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}^2} \approx 2.9 \times 10^7$$

$$F = \frac{V}{c} = \frac{0.880\text{m/s}}{4.628\text{m/s}} = 0.190 < 1$$

## Κατηγορίες ροής σε ΑΑ Κινηματικά κριτήρια -1

- Από την άποψη χρονικών μεταβολών του βάθους ροής διατομής  $t$  διακρίνουμε

### **Μόνιμη και Μη μόνιμη ροή**

- Η ροή καλείται μόνιμη, όταν το βάθος ροής διατομής  $t$ , σε κάθε θέση κατά μήκος του αγωγού, παραμένει σταθερό, δηλαδή αμετάβλητο με το χρόνο.

## Κατηγορίες ροής σε ΑΑ Κινηματικά κριτήρια - 2

- Από την άποψη χωρικών μεταβολών του βάθους ροής διατομής  $t$  διακρίνουμε

### Ομοιόμορφη και Ανομοιόμορφη (ή Μεταβαλλόμενη) ροή

- Η ροή καλείται ομοιόμορφη, όταν σε δεδομένη χρονική στιγμή το βάθος ροής διατομής  $t$  είναι το ίδιο σε κάθε διατομή κατά μήκος του αγωγού.
- Λογική προϋπόθεση είναι, ότι ο αγωγός έχει σταθερή γεωμετρία διατομής, δηλαδή είναι πρισματικός.

## Κατηγορίες ανομοιόμορφης ροής

- Ανάλογα με το μέγεθος μεταβολής του βάθους ροής, σε σχέση προς το μήκος του αγωγού, στο οποίο πραγματοποιείται η μεταβολή.
- **Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή (BMP):** Το βάθος ροής διατομής  $t$  μεταβάλλεται λίγο σε σχέση με το μήκος.
- **Ταχέως μεταβαλλόμενη ροή (TMP):** Το βάθος ροής διατομής  $t$  μεταβάλλεται σημαντικά κατά μήκος της ροής σε σχετικά μικρό μήκος.

## Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

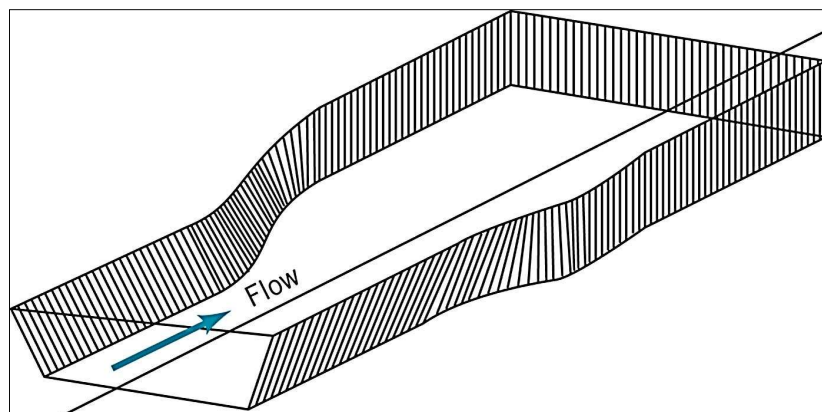
- Το βάθος ροής διατομής  $t$  μεταβάλλεται λίγο σε σχέση με το μήκος.
- Η καμπύλωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι μικρή, ώστε με ικανή προσέγγιση οι γραμμές ροής να μπορούν να θεωρηθούν περίπου παράλληλες.
- Αυτό διευκολύνει πάρα πολύ τη θεωρητική ανάλυση των προβλημάτων αυτής της κατηγορίας.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

37

## Παράδειγμα BMP



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

38

## Ταχέως μεταβαλλόμενη ροή

- Το βάθος ροής διατομής,  $t$ , μεταβάλλεται σημαντικά κατά μήκος της ροής σε σχετικά μικρό μήκος.
- Η καμπύλωση της ΕΕ είναι έντονη και οι γραμμές ροής παρουσιάζουν γενικά σημαντική καμπυλότητα και δεν μπορούν ούτε κατά προσέγγιση να θεωρηθούν παράλληλες.
- Ροές αυτής της κατηγορίας πραγματοποιούνται σε μικρά τμήματα κατά μήκος του αγωγού ή και σε περιοχές ασυνέχειας αυτού.
  - Τοπικά φαινόμενα
  - Υπερχειλιστές, θυροφράγματα, υδραυλικό άλμα

## Παράδειγμα TMP



## Από κινηματική άποψη διακρίνουμε

- Μόνιμη ομοιόμορφη ροή.
- Μόνιμη ανομοιόμορφη ροή, βαθμιαία μεταβαλλόμενη
- Μόνιμη ανομοιόμορφη ροή, ταχέως μεταβαλλόμενη
- Μη μόνιμη ομοιόμορφη ροή (πρακτικά αδύνατη)
- Μη μόνιμη ανομοιόμορφη ροή, βαθμιαία μεταβαλλόμενη
- Μη μόνιμη ανομοιόμορφη ροή, ταχέως μεταβαλλόμενη.

## Κατηγορίες ροής σε ΑΑ Δυναμικά κριτήρια

- Σχέση των δυνάμεων αδρανείας προς κάθε μία από τις δυνάμεις που επηρεάζουν την κίνηση (π.χ. δυνάμεις πίεσης, βαρύτητας κλπ.).
- Χαρακτηριστικοί αδιάστατοι αριθμοί (Re, Fr).
- Προβλήματα ροής με ΕΕ: Τόσο οι δυνάμεις συνεκτικότητας, όσο και η δύναμη της βαρύτητας παίζουν (σημαντικό) ρόλο.

## Επίδραση της συνεκτικότητας

$$\text{Re} = \frac{\text{Δυνάμεις Αδράνειας}}{\text{Δυνάμεις Συνεκτικότητας}} = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

- $V$  = η μέση ταχύτητα χαρακτηριστικής διατομής
- $L$  = η υδραυλική ακτίνα  $R = A/\Pi$  ή το τετραπλάσιο αυτής  $4R$  (επειδή η υδρ. ακτίνα σε κυκλικό αγωγό διαμέτρου  $D$  είναι  $D/4$ ).
- $\nu$  = ο συντελεστής κινηματικής συνεκτικότητας

$$\Rightarrow \text{Re} = \frac{V \cdot R}{\nu} \quad \text{ή} \quad \text{Re} = \frac{V \cdot 4R}{\nu}$$

## Αριθμός Reynolds

- Η κρίσιμη τιμή του  $\text{Re}$  είναι γενικά μικρή.
  - Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα η ροή είναι τυρβώδης.
- Παράδειγμα στρωτής ροής: Ροή λεπτού στρώματος νερού επί του εδάφους, όπως κατά την απορροή ομβρίων υδάτων.
- Τυπική κρίσιμη τιμή του  $\text{Re}$  σε ορθογωνικό αγωγό:

$$\text{Re}_{\text{κρ}} = \frac{V \cdot R}{\nu} \approx 750 \quad \text{ή} \quad \text{Re}_{\text{κρ}} = \frac{V \cdot 4R}{\nu} \approx 3.000$$

## Επίδραση της βαρύτητας

$$F = \frac{\text{Δυνάμεις Αδράνειας}}{\text{Δυνάμεις Βαρύτητας}} = \frac{V}{\sqrt{g \cdot L}} \Rightarrow F = \frac{V}{\sqrt{g \cdot D}}$$

- V = η μέση ταχύτητα χαρακτηριστικής διατομής
- L = χαρακτηριστικό μήκος ίσο με το υδραυλικό βάθος D, **L=D=A/T**
- Η επίδραση της βαρύτητας σε προβλήματα ροής με ελεύθερη επιφάνεια είναι καθοριστική.

## Σημαντική παράμετρος στα προβλήματα ΑΑ

- Αριθμός **Froude**



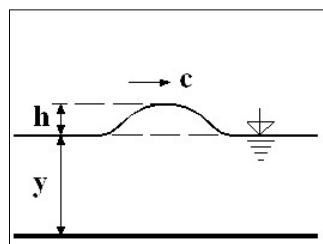
Σημαντική επίδραση της βαρύτητας

## Χαρακτηρισμός της ροής με ΕΕ από δυναμική άποψη

- Για  $F < 1$ , η ροή καλείται υποκρίσιμη.
  - Η ροή έχει μικρή σχετικά ταχύτητα και καλείται και ποταμιαία, επειδή ο τύπος αυτός της ροής παρατηρείται στα χαμηλά τμήματα των ποταμών.
- Για  $F > 1$ , η ροή καλείται υπερκρίσιμη.
  - Η ροή έχει μεγάλη ταχύτητα, καλείται και χειμαρρώδης, επειδή ο τύπος αυτός της ροής παρατηρείται σε ρέματα με ισχυρή κατά μήκος κλίση, τους χειμάρρους.
- Για  $F = 1$ , η ροή καλείται κρίσιμη.

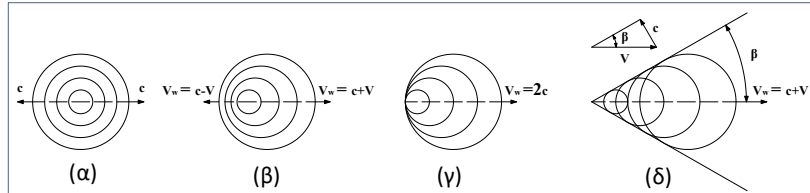
## Ταχύτητα μετάδοσης μικρής διαταραχής σε ΑΑ

- Η ποσότητα  $c = \sqrt{g \cdot D}$  έχει διαστάσεις ταχύτητας.
- Στη μηχανική των κυμάτων η  $c$  εκφράζει την ταχύτητα μετάδοσης μικρής διαταραχής, η οποία μπορεί να δημιουργηθεί στην ΕΕ του αγωγού σαν αποτέλεσμα στιγμιαίας τοπικής μεταβολής του βάθους ροής λόγω εξωτερικών αιτίων.
- Άρα, ο αριθμός του Froude, όπως ορίζεται για τους ΑΑ, εκφράζει το λόγο της μέσης ταχύτητας της ροής προς την ταχύτητα μετάδοσης κύματος μικρού ύψους (μικρής διαταραχής).





## Μετάδοση κυματισμών



Αν πετάξουμε μία πέτρα σε μία λιμνάζουσα μάζα νερού, η μορφή των κυματισμών που θα εμφανισθούν στην επιφάνεια θα είναι ομόκεντροι κύκλοι.

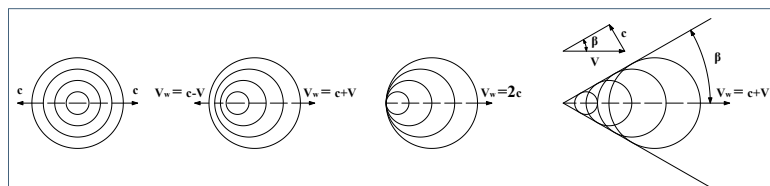
Στην περίπτωση που το νερό κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά με ταχύτητα  $V$ , τότε οι δημιουργούμενοι κυματισμοί δεν είναι πλέον ομόκεντροι κύκλοι, διότι η μετάθεσή τους, με ταχύτητα  $c$ , εξαρτάται από την ταχύτητα κίνησης του νερού  $V$ .

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

49

## Διάδοση μικρής διαταραχής -1



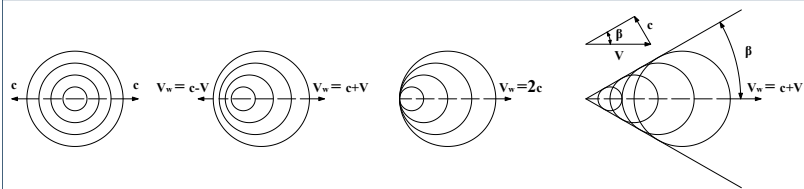
- **Υποκρίσιμη:**  $V < c$  ( $Fr < 1$ ), ένα κύμα κινείται ταχύτερα από τη μέση ροή  $\Rightarrow$  τυχόν μικροδιαταραχές στην ΕΕ μεταδίδονται και προς τα ανάντη.
  - Τα ανάντη σημεία είναι σε υδραυλική επικοινωνία με τα κατόντη.
  - Ένας παρατηρητής που βρίσκεται ανάντη αντιλαμβάνεται τη διαταραχή.
- **Οι δυνάμεις βαρύτητας (κύματα) υπερिशύουν των δυνάμεων αδράνειας (ταχύτητα ρευστού).**

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

50

## Διάδοση μικρής διαταραχής -2



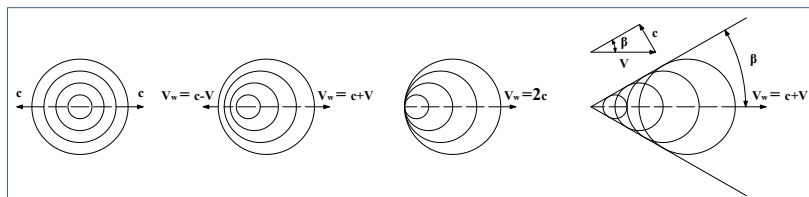
- **Υπερκρίσιμη:**  $V > c$  ( $Fr > 1$ ), ένα κύμα κινείται βραδύτερα από τη μέση ρή  $\Rightarrow$  τυχόν μικροδιαταραχές στην ΕΕ παρασύρονται προς τα κατάντη.
  - Δεν υφίσταται υδραυλική επικοινωνία μεταξύ των ανάντη με τα κατάντη σημεία.
  - Ένας παρατηρητής που βρίσκεται ανάντη **δεν** αντιλαμβάνεται τη διαταραχή.
- *Οι δυνάμεις αδράνειας (ταχύτητα ρευστού) υπερिशύουν των δυνάμεων βαρύτητας (κύματα).*

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

51

## Διάδοση μικρής διαταραχής -3



- **Κρίσιμη:**  $V = c$  ( $Fr = 1$ ), ασταθής ρή που μεταλίπτει από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη και αντίστροφα.
- *Οι δυνάμεις αδράνειας και δυνάμεις βαρύτητας είναι ισοδύναμες.*

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

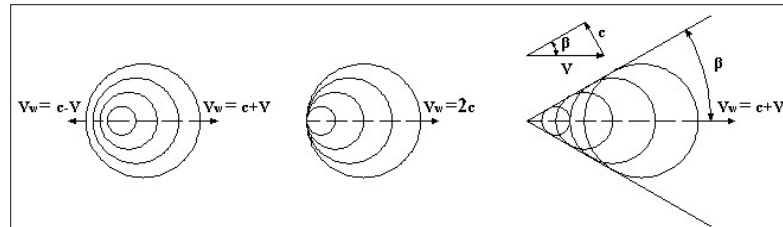
52

## Μετάδοση κυματισμών

$$\underline{V < c \rightarrow F < 1}$$

$$\underline{V = c \rightarrow F = 1}$$

$$\underline{V > c \rightarrow F > 1}$$



$$\begin{aligned} V_{w\alpha} &= c - V \\ V_{w\kappa} &= c + V \end{aligned}$$

$$V_{w\kappa} = c + V = 2c$$

$$\begin{aligned} V_{w\alpha} &= c - V < 0 \\ V_{w\kappa} &= c + V > 2c \end{aligned}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

53

## Υδραυλικό άλμα

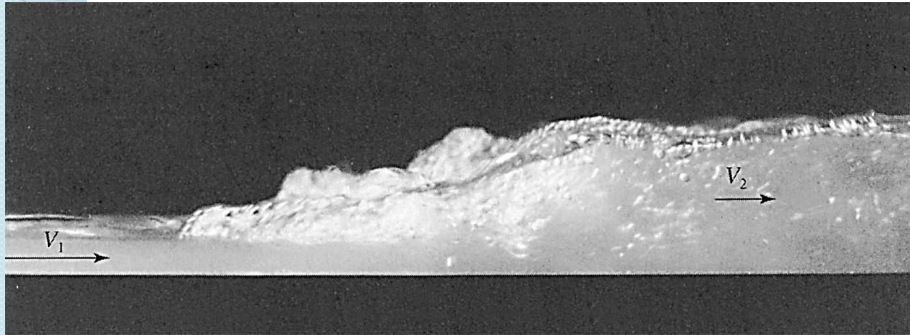
- Ταχέως μεταβαλλόμενη ροή.
- Η μετάβαση από **υπερκρίσιμη ροή** σε **υποκρίσιμη ροή** πραγματοποιείται απότομα, σε μικρό μήκος κατά την κατεύθυνση της κύριας ροής.
- Το τοπικό αυτό φαινόμενο ονομάζεται υδραυλικό άλμα

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

54

## Υδραυλικό άλμα

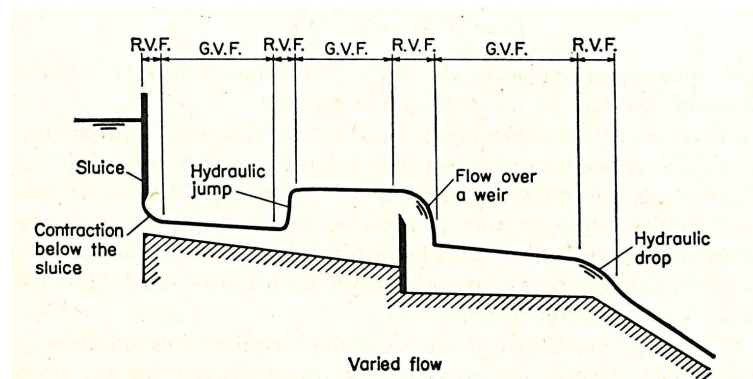


ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

55

## Παράδειγμα βαθμιαίας και ταχέως μεταβαλλόμενης ροής



Από Ven Te Chow

R.V.F. Ταχέως μεταβαλλόμενη ροή

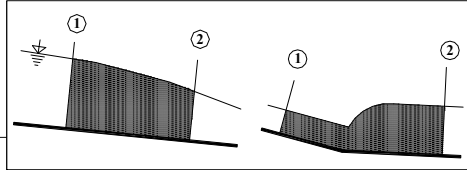
G.V.F. Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

56

## Μέθοδοι ανάλυσης



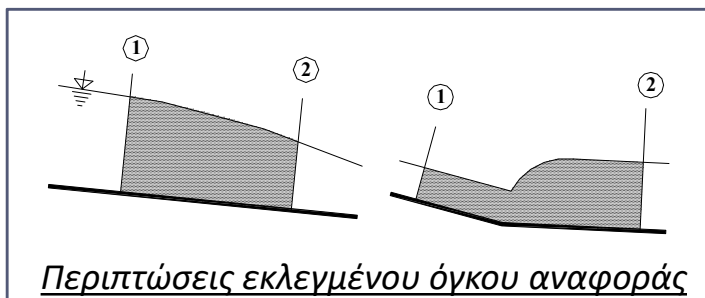
- Ροή μονοδιάστατη.
- Μέθοδοι του σταθερού πεπερασμένου και του σταθερού διαφορικού όγκου αναφοράς.
- Απόσταση μεταξύ των δύο διατομών ① και ②
  - Πεπερασμένος όγκος αναφοράς: Απόσταση  $L$  πεπερασμένη.
  - Διαφορικός όγκος αναφοράς: Απόσταση  $dx$  μικρή.
- Οι διατομές ① και ② έχουν εκλεγεί σε **περιοχές παράλληλης, ή περίπου παράλληλης ροής**, ώστε να ισχύει στις διατομές αυτές η αρχή της υδροστατικής κατανομής των πιέσεων.
- Με την παραπάνω μέθοδο, για σταθερό **πεπερασμένο** όγκο αναφοράς, προσδιορίζονται χρήσιμα **ολοκληρωματικά υδραυλικά μεγέθη**, όμως **όχι η μορφή της ΕΕ**.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

57

## Βασικές εξισώσεις για μόνιμη ροή



- Διατομές, ① ανάντη και ② κατόντη, σε περιοχές παράλληλης ή περίπου παράλληλης ροής

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

58

## Εξίσωση συνέχειας

$$\int_A \rho (\vec{V} d\vec{A}) = 0 \Rightarrow \int_A (\vec{V} d\vec{A}) = 0 \Rightarrow A_1 V_1 = A_2 V_2$$

- $Q = A \cdot V \Rightarrow Q = \text{σταθερό κατά μήκος του αγωγού, εφόσον στον όγκο αναφοράς δεν υπάρχει εισροή ή εκροή.}$

$\rho$	η πυκνότητα του υγρού
$A$	το εμβαδόν της διατομής
$V$	η μέση ταχύτητα της ροής, θεωρούμενη κάθετη στην διατομή
$Q$	η παροχή της διατομής

## Εξίσωση ποσότητας κίνησης

$$\Sigma \vec{F} = (\vec{F}_p + \vec{F}_\tau)_A + (\vec{F}_g)_U = (\rho \beta Q \vec{V})_2 - (\rho \beta Q \vec{V})_1$$

$$Q_1 = Q_2 = Q \Rightarrow \Sigma \vec{F} = (\vec{F}_p + \vec{F}_\tau)_A + (\vec{F}_g)_U = \rho Q [(\beta \vec{V})_2 - (\beta \vec{V})_1]$$

Συντελεστής συνόρθωσης  $\beta$ :

$$\int_A \rho V (V dA) = \int_A \rho V^2 dA = \rho \beta Q V \Rightarrow \beta = \frac{\int_A V^2 dA}{V^2 A} = \frac{\int_A V^2 dA}{Q V}$$

$$\Sigma F_x = (F_{px} + F_{\tau x})_A + (F_{gx})_U = \rho Q \{ (\beta V_x)_2 - (\beta V_x)_1 \}$$

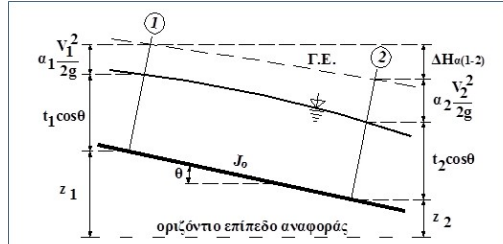
$$(F_{px})_A = (F_{px})_{A_1, A_2} = \rho g (A_1 \bar{t}_1 - A_2 \bar{t}_2)$$

## Εξίσωση ενέργειας -1

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$$H_{1,2} = \left( z + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right)_{1,2}$$

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_{\pi} + \frac{p_{\pi}}{\rho g} = z_{\varepsilon} + \frac{p_{\varepsilon}}{\rho g}$$



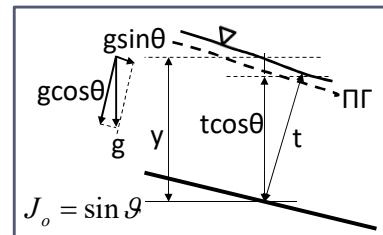
$z_{\pi}$	το υψόμετρο του πυθμένα της διατομής
$z_{\varepsilon}$	το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας
$p_{\pi}$	η πίεση στον πυθμένα της διατομής
$p_{\varepsilon}$	η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια της διατομής

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

61

## Εξίσωση ενέργειας -2



$$\left. \begin{array}{l} p_{\varepsilon} = 0 \\ p_{\pi} = \rho g t \cos \theta = \rho g y \cos^2 \theta \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\varepsilon} = z + t \cos \theta = z + y \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow z_1 + t_1 \cos \theta + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + t_2 \cos \theta + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$$\Rightarrow z_1 + y_1 \cos^2 \theta + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 \cos^2 \theta + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$$\int_A \frac{V^2}{2g} V dA = \alpha \frac{V^2}{2g} VA \Rightarrow \alpha = \frac{\int_A V^3 dA}{V^3 A} = \frac{\int_A V^3 dA}{QV^2}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

62

## Εξίσωση ενέργειας -3

$$\alpha = 1, \sin \vartheta \approx 1 \Rightarrow z_1 + t_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + t_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$$t \approx y \Rightarrow z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$$\theta = 2^\circ \Rightarrow \cos 2\theta = 0.999 (J_o = 0.0349)$$

$$\theta = 5^\circ \Rightarrow \cos 2\theta = 0.992 (J_o = 0.0875)$$

$$\theta = 7.5^\circ \Rightarrow \cos 2\theta = 0.983 (J_o = 0.1317)$$

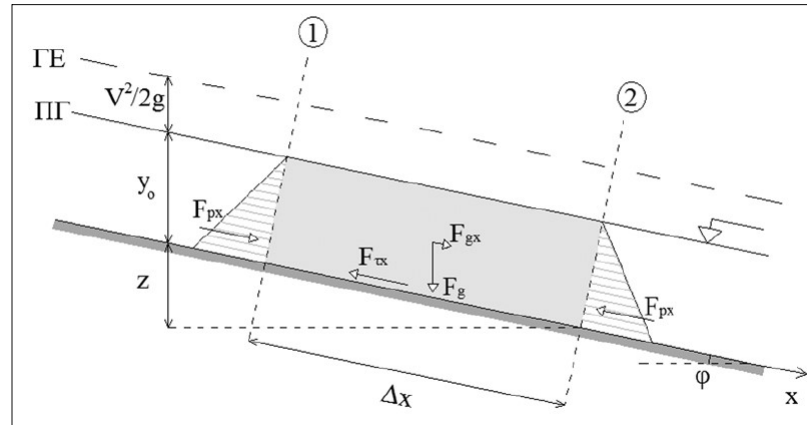
$$\theta = 10^\circ \Rightarrow \cos 2\theta = 0.970 (J_o = 0.1763)$$

➤ **Πρακτικά για κλίση πυθμένα μέχρι 15% ( $\theta \approx 8^\circ$ ) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $y = t$ .**

## ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ



## Όγκος αναφοράς για μόνιμη και ομοιόμορφη ροή με ΕΕ



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

65

## Ομοιόμορφη ροή -1

Εξίσωση συνέχειας

$$\left. \begin{array}{l} A_1 V_1 = A_2 V_2 \\ y_1 = y_2 = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{V_1 = V_2 = V_0}$$

Εξίσωση ενέργειας

$$z_1 + t_1 \cos \theta + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + t_2 \cos \theta + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$$\Rightarrow z_1 - z_2 = \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$\Rightarrow$  ΓΕ, ΠΓ ( $\equiv$  ΕΕ) και κλίση πυθμένα = παράλληλες

$$\Rightarrow \boxed{J_E = J_v = J_o}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

66

## Ομοιόμορφη ροή -2

### Διατμητική τάση στα τοιχώματα

Εξίσωση ποσότητας κίνησης

$$\Sigma F_x = (F_{px} + F_{\tau x})_A + (F_{gx})_U = \rho Q \{ (\beta V_x)_2 - (\beta V_x)_1 \} = 0$$

$$(F_{px})_A = (F_{px})_{A_1, A_2} = \rho g (A_1 \bar{t}_1 - A_2 \bar{t}_2) = 0 \Rightarrow F_{\tau x} + F_{gx} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} F_{\tau x} &= -\tau_w (\Pi \cdot \Delta x) \\ F_{gx} &= \gamma (A \cdot \Delta x) \sin \varphi = \gamma (A \cdot \Delta x) J_o \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_w = \gamma R J_o$$

όπου  $R = A / \Pi$

Για αγωγούς μεγάλου πλάτους:  $R = y$

## Ομοιόμορφη ροή -3

- Η εξίσωση Darcy-Weisbach ισχύει και για αγωγούς με ΕΕ, αλλά δεν χρησιμοποιείται, λόγω δυσχέρειας στην εκτίμηση της ισοδύναμης τραχύτητας και του συντελεστή τριβών.
- Παλαιότερα για τον υπολογισμό του ομοιόμορφου βάθους εφαρμοζόταν η εξίσωση Chezy.
- Σήμερα ο υπολογισμός του ομοιόμορφου βάθους γίνεται με τον τύπο του Manning.

## Σχέση εξ. Darcy-Weisbach και εμπειρικών σχέσεων

$$R_h = \frac{A}{\Pi} \text{ και } D_h = \frac{4A}{\Pi} = 4R_h$$

$$\text{Darcy-Weisbach} \rightarrow h_f = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2g} = f \frac{L}{4R} \frac{V^2}{2g} \Rightarrow$$

$$\frac{h_f}{L} = f \frac{1}{4R} \frac{V^2}{2g} = \frac{f}{8g} \frac{1}{R} V^2 \rightarrow J_E = \frac{f}{8g} \frac{1}{R} V^2$$

$J_E = \text{κλίση της Γ.Ε.} = J_o$

$$\text{Λύνοντας ως προς } V \rightarrow V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{RJ_o}$$

$$\rightarrow \text{Εξίσωση Chezy} \rightarrow V = C_h \sqrt{RJ_o}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

69

## Ομοιόμορφη ροή -4

- Εξίσωση Manning

$$V = \frac{R^{1/6}}{n} \sqrt{RJ_o} \Rightarrow V = \frac{1}{n} R^{2/3} J_o^{1/2} \Rightarrow Q = \frac{A}{n} R^{2/3} J_o^{1/2}$$

- Σχέσεις μεταξύ συντελεστών

$$C_h = \sqrt{\frac{8g}{f}} = \text{συντελ. Chezy, διαστάσεις } [L^{1/2}T^{-1}]$$

$$C_h = \frac{R^{1/6}}{n} \Rightarrow n = \frac{R^{1/6}}{C_h} = \text{συντελ. Manning, διαστάσεις } [L^{-1/3}T]$$

$$\text{Μεταξύ } C_h \text{ και } n \rightarrow f = \frac{8gn^2}{R^{1/3}} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{fR^{1/3}}{8g}}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

70

## Παρατηρήσεις

- Στην πράξη έχει επικρατήσει χάριν απλότητας να μη χρησιμοποιούμε μονάδες για τον συντελεστή Manning. Έτσι, συχνά ένας μηχανικός αναφέρει ότι ο συντελεστής Manning είναι ίσος με 0.0125.
- Οι τιμές του  $n$  εκτιμώνται από πίνακες, ανάλογα με την τραχύτητα του αγωγού ή δίνονται από τον κατασκευαστή.
- Επίσης, αρκετές φορές χρησιμοποιείται και η αντίστροφη τιμή  $1/n$  που καλείται **συντελεστής Strickler**, δηλ.  $1/0.0125=80.0$ .

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

71

Κατηγορία αγωγού και υλικό του	$n \left( \frac{s}{m^{1/3}} \right)$
<b>Ανεπένδυτοι αγωγοί (τάφροι)</b>	
Γαιώδεις ευθύγραμμοι πρόσφατης κατασκευής	0.018
Γαιώδεις ευθύγραμμοι παλαιάς κατασκευής	0.022
Βραχώδεις	0.035
<b>Επενδεδυμένοι αγωγοί (διώρυγες)</b>	
Με λεία ασφαλτική επάλειψη	0.013
Με τσιμεντοκονία	0.013
Με επιμελές σκυροκονίαμα	0.017
Με gunite	0.019
Με τοιχοποιία και τσιμεντοκονία	0.025
Με ξηρολιθοδομή	0.032
<b>Σωλήνες</b>	
Πλαστικοί	0.011
Από σκυρόδεμα	0.012-0.015
Χυτοσίδηροί με επάλειψη	0.013
Αργιλοπυριτικοί	0.013
Χωρίς επάλειψη	0.014
Μαύροι σιδηροσωλήνες	0.014
Σιδηροσωλήνες γαλβανισμένοι	0.016

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

72

## Μέθοδος υπολογισμού της εξίσωσης Manning

- Η εξίσωση Manning δεν επιλύεται απ' ευθείας. Δυνατές μεθοδολογίες:

### 1. Δοκιμές.

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} J_o^{1/2} \Rightarrow AR^{2/3} = \frac{nQ}{J_o^{1/2}} = f(y)$$

Σφάλμα υπολογισμού:  $\frac{AR^{2/3} - C_o}{C_o} = \frac{AR^{2/3}}{C_o} - 1, \quad C_o = \frac{nQ}{J_o^{1/2}}$

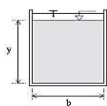
- ### 2. Εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων, χρησιμοποιώντας αναδρομικές σχέσεις (excel).

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

73

## Ορθογωνική διατομή – Αναδρομική σχέση

Σχήμα διατομής	Σχήμα	A	Π	T
Ορθογωνικό		by	b + 2y	b

$$R = A / P, \quad Q = AV = byV$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{by} = \frac{1}{n} R^{2/3} J_o^{1/2} = \frac{1}{n} \left( \frac{A}{P} \right)^{2/3} J_o^{1/2} = \frac{1}{n} \left( \frac{by}{b+2y} \right)^{2/3} J_o^{1/2} \Rightarrow$$

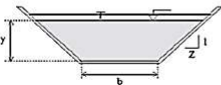
$$y = \frac{1}{b} \left[ \frac{Qn}{J_o^{1/2}} (b+2y)^{2/3} \right]^{3/5} \quad (\text{αναδρομική σχέση})$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

74

## Τραπεζοειδής διατομή – Αναδρομική σχέση

Σχήμα διατομής	Σχήμα	A	Π	T
Τραπεζοειδής		$(b + Zy)y$	$b + 2y\sqrt{1 + Z^2}$	$b + 2Zy$

$$R = A / P, \quad Q = AV$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{(b + Zy)y} = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n} \left( \frac{A}{P} \right)^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n} \left( \frac{(b + Zy)y}{b + 2y\sqrt{1 + Z^2}} \right)^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow$$


$$y = \frac{1}{b + Zy} \left[ \frac{nQ}{J^{1/2}} (b + 2y\sqrt{1 + Z^2})^{2/3} \right]^{3/5} \quad (\text{αναδρομική σχέση})$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

75

## Κυκλική διατομή – Αναδρομική σχέση -1

Σχήμα διατομής	Σχήμα	A	Π	T
Κυκλικό		$\frac{d^2}{8} (\theta - \sin \theta)$	$\theta \frac{d}{2}$	$\frac{d \sin(\frac{\theta}{2})}{2\sqrt{y(d-y)}}$ ή

$$\text{Όταν } y < 0.5d \quad \theta = \pi - 2 \sin^{-1} \left( 1 - \frac{y}{0.5d} \right)$$

$$R = \frac{d}{4} \frac{\theta - \sin \theta}{\theta}$$

$$\text{Όταν } y > 0.5d \quad \theta = \pi + 2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{0.5d} - 1 \right)$$

$$y = \frac{d}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$\theta$  σε ακτίνια (rad)

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

76

## Κυκλική διατομή – Αναδρομική σχέση -2

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{d^2}{8}(\theta - \sin \theta)} = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} \xrightarrow{R=A/P}$$

$$\frac{Q}{\frac{d^2}{8}(\theta - \sin \theta)} = \frac{1}{n} \left( \frac{d}{4} \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} \right)^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow \theta = \left[ \frac{nQ}{J^{1/2}} \frac{\theta^{2/3}}{\left(\frac{d}{2}\right)^{8/3}} \right]^{3/5} + \frac{\sin \theta}{2} + \frac{\theta}{2}$$

Αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό της γωνίας  $\theta$  που αντιστοιχεί στο ομοιόμορφο βάθος. Η **γωνία  $\theta$**  είναι σε **ακτίνια (rad)**.

Με γνωστό  $\theta$ , το ομοιόμορφο βάθος είναι:

$$y_o = \frac{d}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

77

## Κυκλική διατομή - Διερεύνηση

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow Q = \frac{1}{n} \frac{d^2}{8} (\theta - \sin \theta) \left( \frac{d}{4} \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} \right)^{2/3} J^{1/2}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{n} \frac{d^{8/3}}{2^{13/3}} \frac{(\theta - \sin \theta)^{5/3}}{\theta^{2/3}} J^{1/2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 2\pi \\ y=d \end{array} \right\} \Rightarrow Q_{\text{full}} = \frac{1}{n} \frac{d^{8/3}}{2^{13/3}} \frac{(2\pi - 0)^{5/3}}{(2\pi)^{2/3}} J^{1/2} = \frac{2\pi}{n} \frac{d^{8/3}}{2^{13/3}} J^{1/2} \Rightarrow \frac{Q}{Q_{\text{full}}} = \frac{(\theta - \sin \theta)^{5/3}}{2\pi\theta^{2/3}}$$

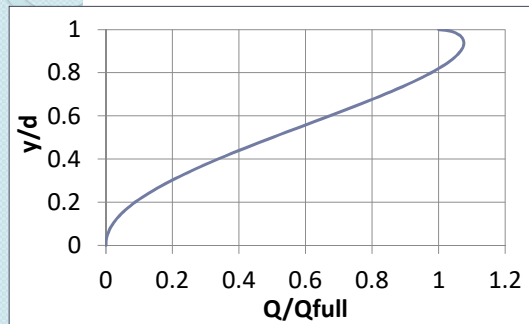
$Q_{\text{full}}$  = Παροχή πλήρωσης, για σωλήνα γεμάτο, αλλά ροή όχι υπό πίεση (οριακή περίπτωση).

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

78

## Κυκλική διατομή - Διερεύνηση



$$\frac{y}{d} \approx 0.94 \Rightarrow \left( \frac{Q}{Q_{full}} \right)_{max} \approx 1.075$$

$$\frac{y}{d} = 0.825 \Rightarrow Q = Q_{full}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

79

## Παράδειγμα 7.3-1

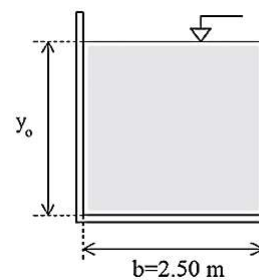
**Ομοιόμορφο βάθος  $y_0 = ??$**

Σκυρόδεμα  $n=0.015$

Πλάτος  $b=2.50$  m

Κλίση πυθμένα  $J_0=0.0002$

Παροχή  $Q=5.0$  m<sup>3</sup>/s



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

80



## Λύση

$$C_o = \frac{nQ}{J_o^{1/2}} = \frac{(0.015)(5.00)}{(0.0002)^{1/2}} = 5.303$$

$$AR(y_o) = AR^{2/3} = (by_o) \left( \frac{by_o}{b+2y_o} \right)^{2/3} = (2.5y_o) \left( \frac{2.5y_o}{2.5+2y_o} \right)^{2/3}$$

$$(2.5y_o) \left( \frac{2.5y_o}{2.5+2y_o} \right)^{2/3} = 5.302 \quad y_o = 2.414 \text{ m.}$$

$$\text{Σφάλμα υπολογισμού} = \left[ (2.5y_o) \left( \frac{2.5y_o}{2.5+2y_o} \right)^{2/3} - 5.302 \right] / 5.302$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

81

## Πινακοποίηση λύσης

	$y_o$	A	Π	R	$AR^{2/3}$	Σφάλμα
	m	m <sup>2</sup>	m	m	m <sup>8/3</sup>	
Δοκ.1	2.00	5.00	6.50	0.77	4.198	-21%
Δοκ.2	3.00	7.50	8.50	0.88	6.900	30%
Δοκ.3	2.414	6.04	7.33	0.82	5.302	0%

$$x = 1.0 * \frac{6.9 - 4.198}{5.302 - 4.198} \cong 0.41$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{g \cdot D}}, D = \frac{A}{T} \Rightarrow T = b = 2.50 \text{ m} \Rightarrow D = 6.04 / 2.50 = 2.416$$

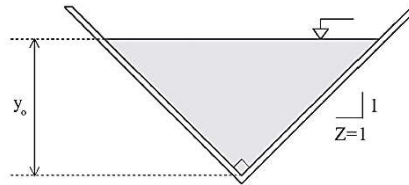
$$V = Q / A = 5.0 / 6.04 = 0.834 \Rightarrow \boxed{F = 0.171} \rightarrow \text{Υποκρίσιμη ροή}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

82

## Παράδειγμα 7.3-2



**Ομοιόμορφο βάθος  $y_0 = ??$**

Σκυρόδεμα  $n=0.015$

Πλάτος  $b=2.50$  m

Κλίση πυθμένα  $J_0=0.0002$

Παροχή  $Q=5.0$  m<sup>3</sup>/s

Κλίση πρανών  $Z=1$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

83

## Λύση

Σχήμα διατομής	Σχήμα	A	Π	T
Τριγωνικό		$Zy^2$	$2y\sqrt{1+Z^2}$	$2Zy$

$$AR^{2/3} = (y_0^2) \left( \frac{y_0^2}{2\sqrt{2}y_0} \right)^{2/3} = 5.303 \text{ ή } y_0^{8/3} = 5.30 (2\sqrt{2})^{2/3} = 10.606 \text{ m}^{8/3} \text{ ή } y_0 = 2.424 \text{ m.}$$

Παράμετρος	Μονάδες	Τιμή
$y_0$	m	2.424
A	m <sup>2</sup>	5.88
Π	m	6.86
R	m	0.86
$AR(y_0)$	m <sup>8/3</sup>	5.301

$$D = \frac{A}{T}, \quad T = 2Zy = 2 * 1 * 2.424 = 4.848 \text{ m}$$

$$\Rightarrow D = 5.88 / 4.848 = 1.213 \text{ m}$$

$$V = Q / A = 5.0 / 5.88 = 0.850$$

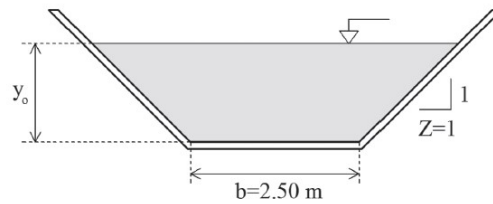
$$\Rightarrow \boxed{F = 0.247} \rightarrow \text{Υποκρίσιμη ροή}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

84

## Παράδειγμα 7.3-3



Ομοιόμορφο βάθος  $y_0 = ??$

Σκυρόδεμα  $n=0.015$

Πλάτος  $b=2.50$  m

Κλίση πυθμένα  $J_0=0.0002$

Παροχή  $Q=5.0$  m<sup>3</sup>/s

Κλίση πρανών  $Z=1$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

85

## Λύση

Σχήμα διατομής	Σχήμα	A	Π	T
Τραπεζοειδές		$(b + Zy)y$	$b + 2y\sqrt{1 + Z^2}$	$b + 2Zy$

Παράμετρος	Μονάδες	Δοκιμή 1	Δοκιμή 2	Δοκιμή 3	Δοκιμή 4
$y_0$	m	1.000	2.000	1.500	1.464
A	m <sup>2</sup>	3.50	9.00	6.00	5.80
Π	m	5.33	8.16	6.74	6.64
R	m	0.66	1.10	0.89	0.87
$AR(y_0)$	m <sup>8/3</sup>	2.645	9.610	5.551	5.304
Σφάλμα	-	-50%	81%	5%	0%

$$D = \frac{A}{T}, \quad T = b + 2Zy = 2.50 + 2 * 1.464 = 5.428 \text{ m} \Rightarrow D = 5.80 / 5.428 = 1.068 \text{ m}$$

$$V = Q / A = 5.0 / 5.80 = 0.862 \Rightarrow \boxed{F = 0.266} \rightarrow \text{Υποκρίσιμη ροή}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

86

Χρησιμοποιώντας αναδρομική σχέση:

$$y_i = \frac{1}{b + Zy_{i-1}} \left[ \frac{nQ}{J^{1/2}} (b + 2y_{i-1}\sqrt{1+Z^2})^{2/3} \right]^{3/5}$$

$y_0$	$b$	$Z$	$n$	$J_0$	$Q$	$nQ/J^{1/2}$	$y_1$
1.000	2.50	1.00	0.015	0.0002	5.00	5.3033	1.518
1.518	2.50	1.00	0.015	0.0002	5.00	5.3033	1.457
1.457	2.50	1.00	0.015	0.0002	5.00	5.3033	1.465
1.465	2.50	1.00	0.015	0.0002	5.00	5.3033	1.464
1.464	2.50	1.00	0.015	0.0002	5.00	5.3033	1.464
1.464	2.50	1.00	0.015	0.0002	5.00	5.3033	1.464

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

87

## Παράδειγμα 7.3-4

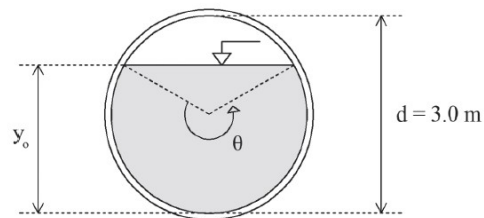
Ομοιόμορφο βάθος  $y_0 = ??$

Σκυρόδεμα  $n=0.015$

Διάμετρος  $d=3.0$  m

Κλίση πυθμένα  $J_0=0.0002$

Παροχή  $Q=5.0$  m<sup>3</sup>/s



$$\text{Όταν } y < 0.5d \quad \theta = \pi - 2 \sin^{-1} \left( 1 - \frac{y}{0.5d} \right)$$

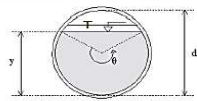
$$\text{Όταν } y > 0.5d \quad \theta = \pi + 2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{0.5d} - 1 \right)$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

88

# Λύση

Σχήμα διατομής	Σχήμα	A	Π	T
Κυκλικό		$\frac{d^2}{8} (\theta - \sin \theta)$	$\theta \frac{d}{2}$	$2\sqrt{y(d-y)}$

θ σε ακτίνια (rad)

Παράμετρος	Μονάδες	Δοκιμή 1	Δοκιμή 2	Δοκιμή 3	«Γεμάτος» αγωγός (βλ. σχόλιο 1)	Τριπλάσια κλίση (βλ. σχόλιο 2)
$y_0$	m	2.000	2.500	2.247	2.500	1.780
$\theta$	-	3.821	4.576	4.179	5.492	4.015
A	m <sup>2</sup>	5.005	6.262	5.671	4.846	3.736
Π	m	5.731	6.864	6.269	6.865	5.019
R	m	0.873	0.912	0.905	0.706	0.744
AR( $y_0$ )	m <sup>8/3</sup>	4.573	5.891	5.304	3.842	3.068
Σφάλμα	-	-14%	11%	0%	-	0%


ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

89

# Παράδειγμα 7.3-4

d	y	θ	A	P	R	(nQ/vJ) calc	Jo=JE	n	Q	nQ/vJ	V
3	2	3.8212	5.006	5.732	0.8734	4.5739	0.0002	0.015	5	5.3033	
3	2.5	4.6011	6.294	6.902	0.912	5.9193	0.0002	0.015	5	5.3033	
3	<b>2.244</b>	4.1796	5.671	6.269	0.9046	<b>5.3043</b>	0.0002	0.015	5	<b>5.3033</b>	0.882
<b>3</b>	<b>3</b>	6.2832	7.069	9.425	0.75	5.8350	0.0002	0.015	<b>5.5</b>	5.8336	0.778
Σχόλιο 1											
<b>2.5</b>	<b>2.5</b>	6.2832	4.909	7.854	0.625	<b>3.5883</b>	0.0002	0.015	<b>3.38</b>	3.5850	0.689
Σχόλιο 2											
<b>2.5</b>	<b>1.78</b>	4.0173	3.739	5.022	0.7445	3.0709	<b>0.0006</b>	0.015	<b>5</b>	3.0619	1.337

Κυκλικό		A= $\frac{d^2}{8} (\theta - \sin \theta)$	Π= $\theta \frac{d}{2}$
---------	---	---	-------------------------

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

90

## Σχόλια

1. Δοκιμάστε να λύσετε το ίδιο πρόβλημα για διάμετρο αγωγού ίση με  $d=2.5$  m. Θα παρατηρήσετε ότι ο αγωγός δεν επαρκεί για να μεταφέρει την παροχή των  $5.0$  m<sup>3</sup>/s με ροή με ελεύθερη επιφάνεια. Ακόμα και εάν είναι «οριακά γεμάτος», η μέγιστη παροχή που μπορεί να μεταφέρει είναι ίση με  $3.62$  m<sup>3</sup>/s (βλ. 6<sup>η</sup> στήλη του Πίν. 1).
2. Σκεφτείτε ποιες αλλαγές θα μπορούσατε να κάνετε στον αγωγό για να μεταφέρει την παροχή των  $5$  m<sup>3</sup>/s. Π.χ. αν τριπλασιάζατε την κατά μήκος κλίση (σε  $J_0=0.0006$ ) θα επαρκούσε αυτός να μεταφέρει την επιθυμητή παροχή; Αν ναι, ποιο είναι το ομοιόμορφο βάθος ροής (βλ. 7<sup>η</sup> στήλη του Πίν. 1).

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

91

## Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση

d	$\gamma$	$\theta$ (0-6.28)	A	P	R	(nQ/VJ) calc	$J_0=JE$	n	Q	nQ/VJ
3	2.000	3.8213	5.0060	5.7319	0.8734	4.5739	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.143	4.0278	5.4028	6.0417	0.8943	5.0149	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.198	4.1097	5.5503	6.1646	0.9003	5.1751	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.222	4.1462	5.6140	6.2193	0.9027	5.2435	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.233	4.1633	5.6433	6.2449	0.9037	5.2748	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.239	4.1714	5.6572	6.2571	0.9041	5.2895	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.241	4.1753	5.6639	6.2630	0.9043	5.2966	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.242	4.1772	5.6671	6.2658	0.9044	5.3001	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.243	4.1782	5.6687	6.2672	0.9045	5.3017	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.243	4.1786	5.6694	6.2679	0.9045	5.3025	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.244	4.1788	5.6698	6.2682	0.9045	5.3029	0.0002	0.015	5	5.3033
3	2.244	4.1789	5.6700	6.2684	0.9045	5.3031	0.0002	0.015	5	5.3033

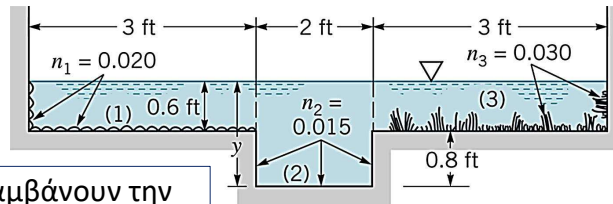
$$\theta_i = \left[ \left( \frac{nQ}{J^{1/2}} \right) \frac{\theta_{i-1}^{2/3}}{\left( \frac{d}{2} \right)^{8/3}} \right]^{3/5} + \frac{\sin \theta_{i-1}}{2} + \frac{\theta_{i-1}}{2}$$

$$y_o = \frac{d}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \Rightarrow y_o = 2.244 \text{ m}$$

NO

92

## Σύνθετες διατομές



- Διατομές που περιλαμβάνουν την κύρια κοίτη καθώς και τμήματα της πλημμυρικής κοίτης.

- Παρατηρούνται κυρίως σε φυσικά υδατορεύματα ή σε τεχνητές τάφρους με αναχώματα εκατέρωθεν
- Το κυριότερο χαρακτηριστικό της ροής σε αυτές είναι η διαφορά που παρατηρείται στη μέση ανά τμήμα ταχύτητα λόγω της διαφορετικής ανά τμήμα υδραυλικής ακτίνας καθώς επίσης και της διαφορετικής τραχύτητας.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

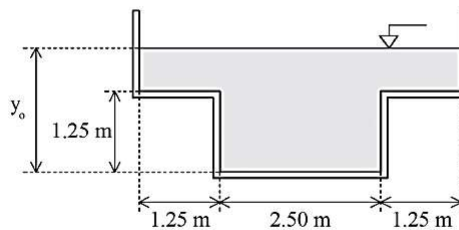
Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

93

## Σύνθετη διατομή

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3-5

Υπολογίστε το ομοιόμορφο βάθος ροής στον αγωγό με τη σύνθετη διατομή που φαίνεται στο Σχ. 1 και με τα ίδια λοιπά χαρακτηριστικά του αγωγού του παραδείγματος 7.3-1.



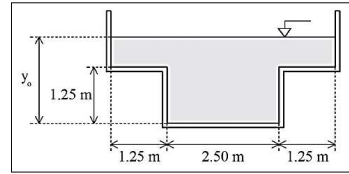
ΣΧΗΜΑ 1. Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της σύνθετης διατομής του παραδείγματος 7.3-5

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

94

## Λύση



$$A = (2.5\text{m})(1.25\text{m}) + (5.0\text{m})(y_0 - 1.25) = 3.125 + 5(y_0 - 1.25)$$

$$\Pi = 2.5\text{m} + 2 \cdot 1.25\text{m} + 2 \cdot 1.25\text{m} + 2(y_0 - 1.25) = 7.50 + 2(y_0 - 1.25)$$

$$AR^{2/3} = [3.125 + 5(y_0 - 1.25)] \left( \frac{3.125 + 5(y_0 - 1.25)}{7.50 + 2(y_0 - 1.25)} \right)^{2/3} = 5.303$$

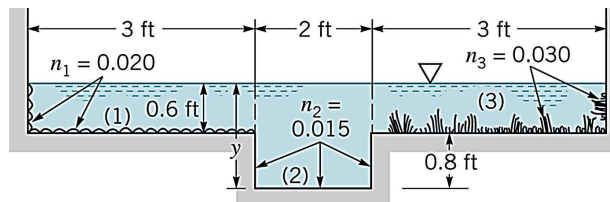
Παράμετρος	Μονάδες	Δοκιμή 1	Δοκιμή 2	Δοκιμή 3	Δοκιμή 4
$y_0$	m	1.300	1.800	2.000	1.927
A	m <sup>2</sup>	3.375	5.875	6.875	6.510
Π	m	7.600	8.600	9.000	8.854
R	m	0.444	0.683	0.764	0.735
AR( $y_0$ )	m <sup>8/3</sup>	1.964	4.557	5.745	5.303
Σφάλμα	-	-63%	-14%	8%	0%

NOΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

95

## Σύνθετες διατομές – Άλλες μεθοδολογίες



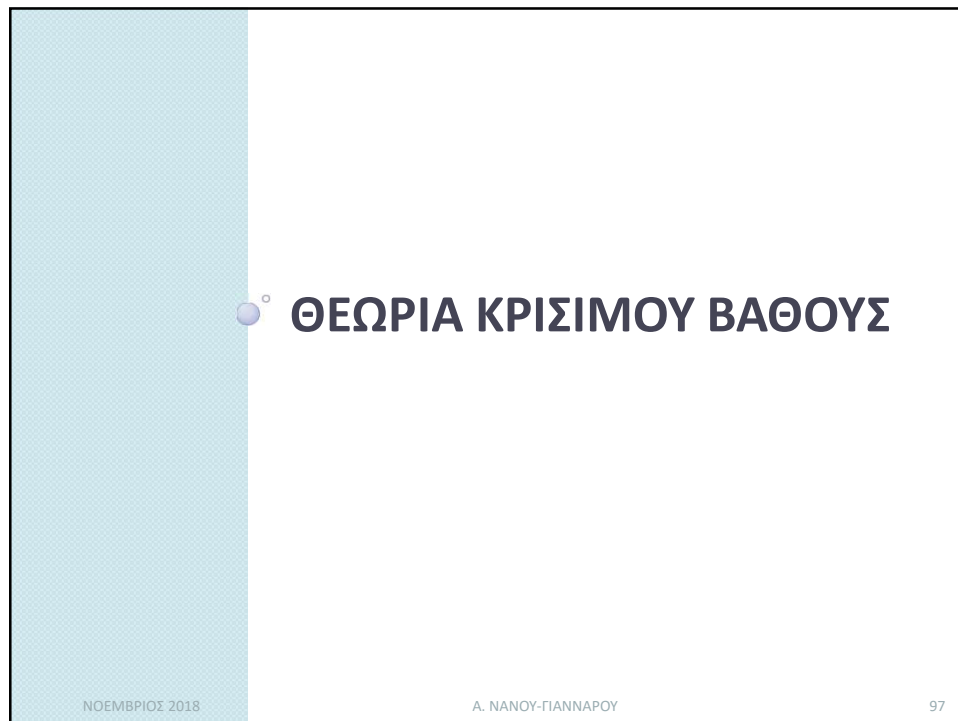
- 1)  $n_1, E_1, P_1, R_1$
- 2)  $n_2, E_2, P_2, R_2$
- 3)  $n_3, E_3, P_3, R_3$
- 4)  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

NOΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

96





Slide 97 features a light blue vertical bar on the left side with a small blue sphere and a white circle. The main title is centered in bold, uppercase Greek letters. At the bottom, there are three small text elements: the date, the author's name, and the slide number.

**ΘΕΩΡΙΑ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΒΑΘΟΥΣ**

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018 A. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ 97

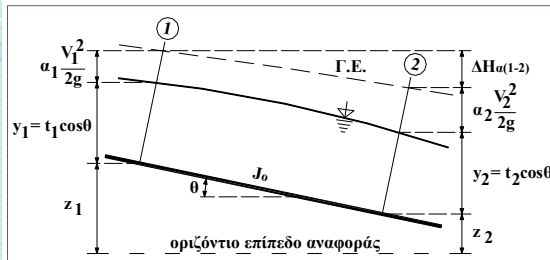


Slide 98 features a light blue vertical bar on the left side with a small blue sphere and a white circle. The main title is centered in bold, uppercase Greek letters. At the bottom, there are three small text elements: the date, the author's name, and the slide number.

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ  
ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ**

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018 A. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ 98

## Εξισώσεις συνέχειας και ενέργειας για αγωγό με μικρή κλίση πυθμένα



$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1}, V_2 = \frac{Q}{A_2}$$

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

$$\xrightarrow{\alpha=1} z_1 + y_1 + \frac{Q^2}{2gA_1^2} = z_2 + y_2 + \frac{Q^2}{2gA_2^2} + \Delta H_{\alpha(1-2)}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

99

## Ειδική ενέργεια

Ύψος ολικής ενέργειας:  $H = z + y + \frac{V^2}{2g}$

Ορίζουμε:  $E = y + \frac{V^2}{2g} = \text{ειδική ενέργεια}$

$$\left. \begin{array}{l} Q = VA \\ A = A(y) \end{array} \right\} \Rightarrow E = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Η ειδική ενέργεια εκφράζει το ύψος ενέργειας ως προς επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα του ΑΑ.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

100

◦ Διάγραμμα ειδικής ενέργειας  
**E** για δεδομένη σταθερή  
 παροχή Q συναρτήσει του  $y$

Διάγραμμα ειδικής ενέργειας  
 για σταθερή παροχή Q

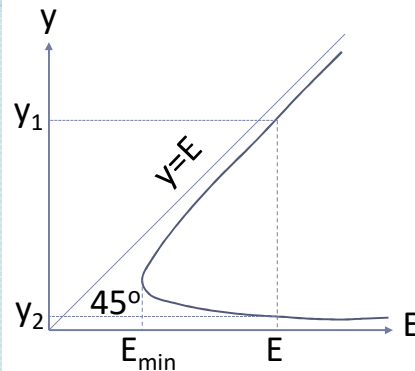
$$E = y + \frac{Q^2}{2g[A(y)]^2} = \phi(y)$$

Η συνάρτηση  $E = \phi(y)$  έχει δύο ασύμπτωτες,  
 τις ευθείες  $E = y$  (γωνία  $45^\circ$ ) και  $y = 0$ .

$$y \rightarrow 0 \Rightarrow A(y) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{Q^2}{2gA^2} \rightarrow \infty \Rightarrow E \rightarrow \infty$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{Q^2}{2gA^2} \rightarrow 0 \Rightarrow E \rightarrow y$$

## Διάγραμμα ειδικής ενέργειας για σταθερή παροχή Q



$$E = y + \frac{Q^2}{2g[A(y)]^2} = \phi(y)$$

### Παρατηρήσεις

- Υπάρχει **min τιμή E**
- Για κάθε τιμή E, προκύπτουν 2 βάθη y τα οποία ονομάζονται **εναλλακτά βάθη**

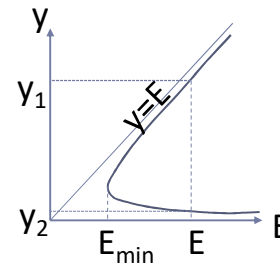
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

103

## Καθορισμός της E και του βάθους $y_k$

- Από το διάγραμμα προκύπτει ότι υπάρχει μια **ελάχιστη τιμή ειδικής ενέργειας  $E_{min}$**  για τη συγκεκριμένη παροχή.
- Αποδεικνύεται (στις επόμενες διαφάνειες) ότι η ελάχιστη τιμή της ειδικής ενέργειας αντιστοιχεί σε **F=1**, δηλαδή όταν **η ροή στη διατομή είναι κρίσιμη**.
- Το βάθος της ροής στη θέση αυτή καλείται **κρίσιμο βάθος  $y_k$**  και όλα τα υδραυλικά μεγέθη που αντιστοιχούν στο κρίσιμο βάθος καλούνται **κρίσιμα**.

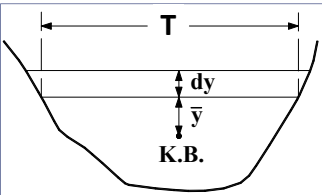


ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

104

Καθορισμός της  $E_{\min}$   
και του βάθους  $y_{\kappa}$



$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = 0$

Πλάτος διατομής

Μέσο υδραυλικό βάθος με:  $\frac{dA}{dy} = T = T(y) \Rightarrow \frac{Q^2 T}{gA^3} = 1 \xrightarrow{(1)} 1 = \frac{Q^2}{g} \left( \frac{T}{A^3} \right)_{\kappa}$

Εισάγουμε:  $D = \frac{A}{T} = D(y) \xrightarrow{(2)} D_{\kappa} = \frac{Q^2}{gA_{\kappa}^2} = \frac{V_{\kappa}^2}{g} \Rightarrow 1 = \frac{V_{\kappa}^2}{gD_{\kappa}}$

$\xrightarrow{(3)} \frac{V_{\kappa}}{\sqrt{gD_{\kappa}}} = 1 \Rightarrow F = 1 \xrightarrow{(4)} E_{\min} = y_{\kappa} + \frac{V_{\kappa}^2}{2g} = y_{\kappa} + \frac{D_{\kappa}}{2}$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018 A. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ 105

### Άρα, για $Q=\text{σταθ.}$ :

- Υφίσταται μία ελάχιστη τιμή της  $E$ , η  $E_{\min}$ , η οποία πραγματοποιείται για βάθος ροής ίσο με  $y_{\kappa}$ .
- Για  $E < E_{\min}$ , η ροή της δεδομένης παροχής  $Q$ , στη δεδομένη γεωμετρία της διατομής, είναι φυσικώς αδύνατη, δηλαδή δεν μπορεί να υπάρξει μικρότερη τιμή  $E$  για τη δεδομένη παροχή  $Q$ .
- Για  $E > E_{\min}$ , η ροή είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί με δύο βάθη, ένα μεγαλύτερο ή ένα μικρότερο του  $y_{\kappa}$ . Τα βάθη αυτά καλούνται εναλλακτά βάθη.

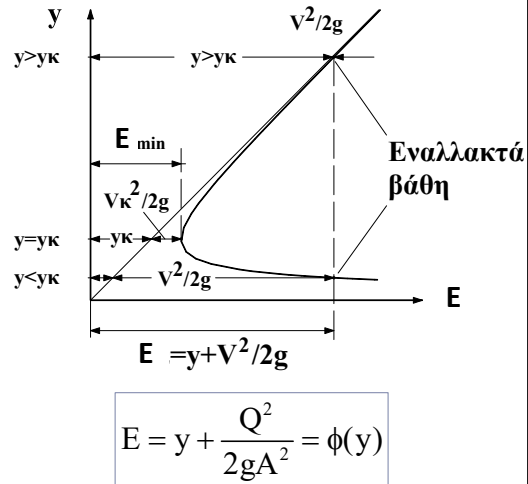
## Διάγραμμα E για σταθερή παροχή Q Χρήσιμα αποτελέσματα

- Για να υπολογίσουμε το  $y_k$  σε μια τυχαία διατομή, χρησιμοποιούμε τη σχέση:

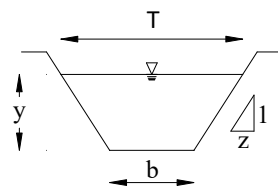
$$D = \frac{A}{T} = \frac{Q^2}{gA^2}$$

- Η  $E_{min}$  είναι:

$$E_{min} = y_k + \frac{D_k}{2} = y_k + \frac{Q^2}{2gA_k}$$

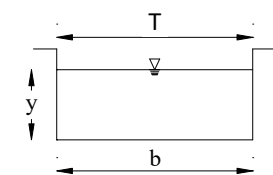


## Εφαρμογή για τραπεζοειδή και ορθογωνική διατομή



$$E = y + \frac{1}{2g} \left( \frac{Q}{by + zy^2} \right)^2$$

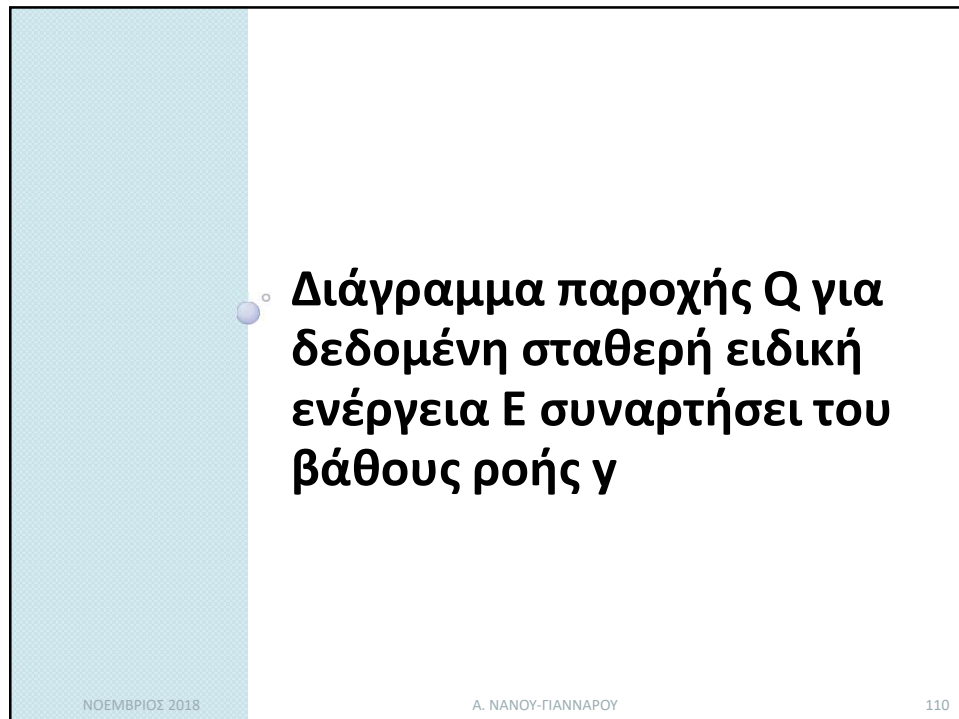
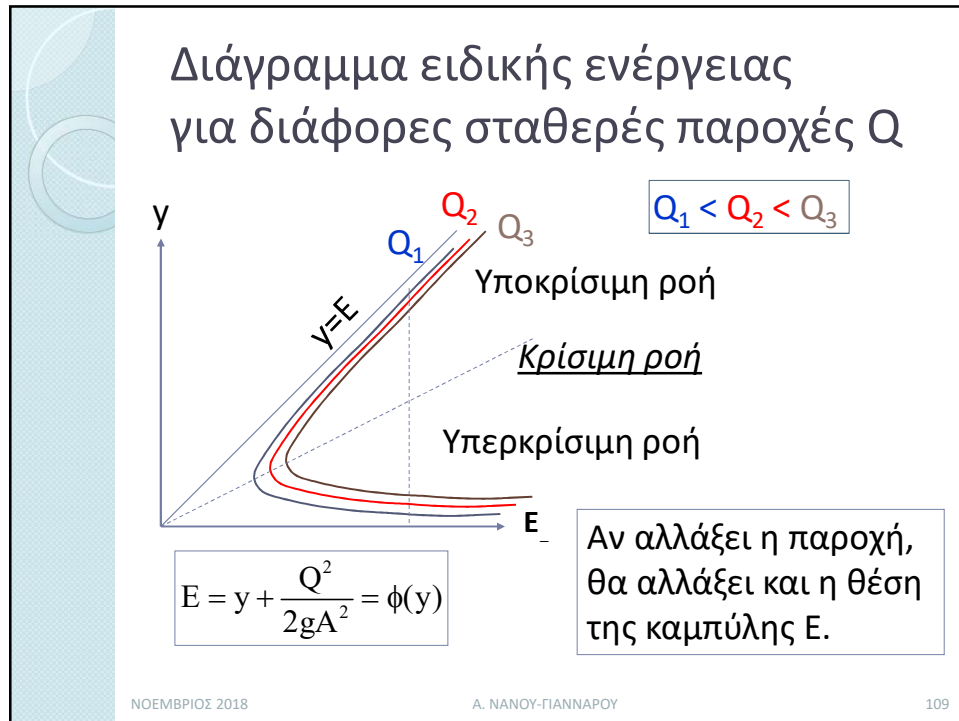
$$\min E = y_k + \frac{by_k + zy_k^2}{2(b + 2zy_k)} = \frac{5zy_k^2 + 3by_k}{2(b + 2zy_k)}$$



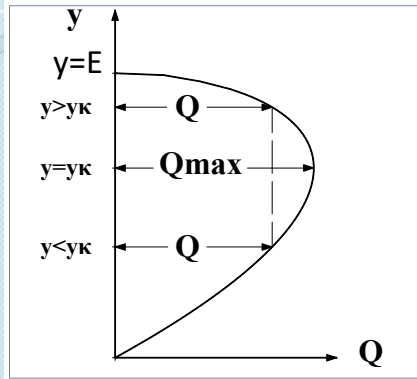
$z = 0 \Rightarrow$

$$E = y + \frac{1}{2g} \left( \frac{Q}{by} \right)^2 = y + \frac{q^2}{2gb^2}, \quad q = \frac{Q}{b}$$

$$\min E = y_k + \frac{by_k}{2b} = \frac{3}{2}y_k$$



## Διάγραμμα παροχής Q για σταθερή ειδική ενέργεια H<sub>E</sub>



$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \Rightarrow$$

$$Q^2 = 2gA^2(E - y) \Rightarrow$$

$$Q = \sqrt{2gA^2(E - y)}$$

Για	y	→	E	⇒	Q	→	0
Για	y	→	0	⇒	Q	→	0

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

111

## Υπολογισμός μέγιστης τιμής Q<sub>max</sub> και του βάθους y<sub>κ</sub>

$$\frac{dQ}{dy} = 0 \Rightarrow -2gA^2 + 4gA(E - y) = 0 \Rightarrow \left(\frac{A}{T}\right)_k = D_k = 2(E - y_k)$$

$$\Rightarrow E = y_k + \frac{D_k}{2} \xrightarrow{E = y_k + \frac{V_k^2}{2g}} \frac{V_k^2}{2g} = \frac{D_k}{2} \Rightarrow V_k = \sqrt{gD_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_k}{\sqrt{gD_k}} = F = 1 \Rightarrow Q_{\max} = A_k V_k = A_k \sqrt{gD_k}$$

Όστε, η μέγιστη τιμή της παροχής παρατηρείται για **F=1**, δηλαδή όταν η ροή στη διατομή είναι κρίσιμη και το βάθος της ροής y<sub>κ</sub> είναι ίσο με το κρίσιμο βάθος.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

112



### Άρα για $E=\text{σταθ.}$ :

- Για μία δοσμένη γεωμετρία και δοσμένη τιμή  $E$ , υπάρχει μία μέγιστη παροχή  $Q_{\max}$ .
- Για  $Q > Q_{\max}$  η ροή είναι φυσικώς αδύνατη
- Για  $Q < Q_{\max}$  η ροή μπορεί φυσικώς να πραγματοποιηθεί με δύο βάθη, ένα μικρότερο του  $\gamma_k$  και ένα μεγαλύτερο του  $\gamma_k$ .
- Η παροχή  $Q_{\max}$  παρατηρείται όταν η ροή είναι κρίσιμη και το βάθος ροής κρίσιμο.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

### ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

### (ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΟΡΜΗΣ)

## ΕΙΔΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

## Εξίσωση ποσότητας κίνησης (μικρή κλίση πυθμένα) - Ειδική δύναμη

$$\begin{aligned} \gamma A_1 \bar{y}_1 - \gamma A_2 \bar{y}_2 + F_{rx} + F_{gx} &= \rho Q (V_2 - V_1) \Rightarrow \\ \gamma A_1 \bar{y}_1 - \gamma A_2 \bar{y}_2 + F_{rx} + F_{gx} &= \frac{\gamma Q^2}{g A_2} - \frac{\gamma Q^2}{g A_1} \Rightarrow \\ F_{rx} + F_{gx} &= \left[ \frac{\gamma Q^2}{g A_2} + \gamma A_2 \bar{y}_2 \right] - \left[ \frac{\gamma Q^2}{g A_1} + \gamma A_1 \bar{y}_1 \right] \Rightarrow \\ \frac{F_{rx} + F_{gx}}{\gamma} &= \left[ \frac{Q^2}{g A_2} + A_2 \bar{y}_2 \right] - \left[ \frac{Q^2}{g A_1} + A_1 \bar{y}_1 \right] \end{aligned}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

115

## Εξίσωση ποσότητας κίνησης Ειδική δύναμη

Ορίζουμε:

$$M = \left[ \frac{Q^2}{gA} + A\bar{y} \right] = \text{ειδική δύναμη} \Rightarrow \frac{F_{rx} + F_{gx}}{\gamma} = M_2 - M_1$$

$\frac{Q^2}{gA}$  = η εισροή ποσότητας κίνησης μέσω της διατομής ανά μονάδα βάρους ρέοντος ρευστού.

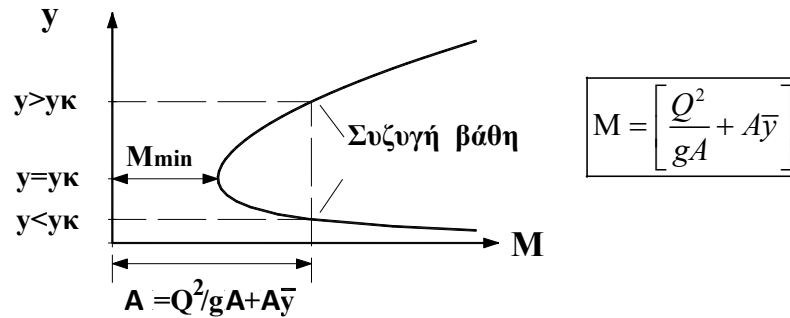
$A\bar{y}$  = η δύναμη από την υδροστατική πίεση ανά μονάδα βάρους ρέοντος ρευστού.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

116

## Διάγραμμα ειδικής δύναμης



Για	$y \rightarrow \infty$	$\Rightarrow$	$M \rightarrow A\bar{y}$
Για	$y \rightarrow 0$	$\Rightarrow$	$M \rightarrow \infty$

Η συνάρτηση  $M=M(y)$  έχει ασύμπτωτο την  $y=0$ .

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

117

## Ειδική δύναμη

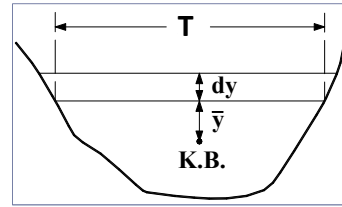
- Η συνάρτηση  $M$  παρουσιάζει **ελάχιστη τιμή  $M_{min}$**  κάτω από την οποία η ροή παροχής  $Q$  είναι φυσικώς αδύνατη.
- Η ελάχιστη αυτή τιμή αποδεικνύεται ότι παρατηρείται και πάλι σε **βάθος ροής  $y_k$** .
- Για τιμές της ειδικής δύναμης  $M$  μεγαλύτερες της  $M_{min}$ , η ροή είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί φυσικώς με δύο βάθη, ένα μικρότερο του κρισίμου  $y_k$  (υπερκρίσιμη ροή) και ένα μεγαλύτερο του κρισίμου  $y_k$  (υποκρίσιμη ροή).
- Τα δύο αυτά **βάθη** ονομάζονται **συζυγή**.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

118

Υπολογισμός  
ελάχιστης τιμής  $M_{\min}$   
και του βάθους  $y_{\kappa}$



$$\text{Είναι: } \frac{dM}{dy} = -\frac{Q^2}{gA^2} \frac{dA}{dy} + \frac{d(A\bar{y})}{dy} = 0$$

$$\text{Αλλά: } d(A\bar{y}) = \dots = A dy \xrightarrow{\frac{dA}{dy}=T} \frac{dM}{dy} = -\frac{Q^2}{gA^2} T + A = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{Q^2}{g} \left( \frac{T}{A^3} \right)_{\kappa} = 1 \Rightarrow \frac{Q^2}{gA_{\kappa}^2} = \left( \frac{A}{T} \right)_{\kappa} = D_{\kappa} \Rightarrow \frac{V_{\kappa}^2}{gD_{\kappa}} = 1 \Rightarrow \boxed{F=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{\min} = \frac{Q^2}{gA_{\kappa}} + A_{\kappa} \bar{y}_{\kappa} = \frac{A_{\kappa}^2}{T_{\kappa}} + A_{\kappa} \bar{y}_{\kappa}}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

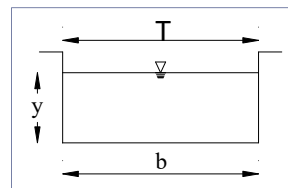
Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

119

Εφαρμογή για ορθογωνική διατομή

$$\bar{y} = \frac{y}{2} \Rightarrow M = \frac{Q^2}{gby} + \frac{by^2}{2}$$

$$\boxed{M_{\min} = \frac{3by_{\kappa}^2}{2}}$$



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

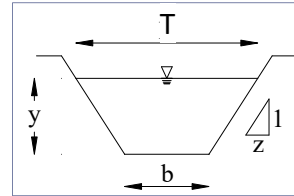
120

## Εφαρμογή για τραπεζοειδή διατομή

$$\bar{y} = \frac{2zy^3 + 3by^2}{6A}, \quad A\bar{y} = \frac{2zy^3 + 3by^2}{6}$$

$$M = \frac{Q^2}{g(by + zy^2)} + \frac{2zy^3 + 3by^2}{6}$$

$$M_{\min} = \frac{(by_{\kappa} + zy_{\kappa}^2)^2}{b + 2zy} + \frac{2zy^3 + 3by^2}{6} = \frac{10z^2y_{\kappa}^4 + 20bzy_{\kappa}^3 + 9b^2y_{\kappa}^2}{6(b + 2zy)}$$



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

121

## Επομένως στη διατομή κρίσιμου βάθους ισχύουν τα ακόλουθα: -1

1. Ο αριθμός Froude είναι ίσος με τη μονάδα:

$$F = \frac{V}{\sqrt{gD}} = 1$$

2. Η ειδική ενέργεια,  $H_E$ , είναι ελάχιστη για δοσμένη παροχή  $Q$ :

$$E_{\min} = y_{\kappa} + \frac{D_{\kappa}}{2}$$

3. Η ειδική δύναμη  $M$  είναι ελάχιστη για δοσμένη παροχή  $Q$ .

$$M_{\min} = \frac{Q^2}{gA_{\kappa}} + A_{\kappa}\bar{y}_{\kappa} = \frac{A_{\kappa}^2}{T_{\kappa}} + A_{\kappa}\bar{y}_{\kappa}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

122

Επομένως στη διατομή κρίσιμου βάθους ισχύουν τα ακόλουθα: -2

4. Η παροχή  $Q$  είναι μέγιστη για δοσμένη ειδική ενέργεια  $E$ :

$$Q_{\max} = A_{\kappa} \sqrt{gD_{\kappa}}$$

5. Το ύψος της κινητικής ενέργειας είναι ίσο με το μισό του υδραυλικού βάθους  $D$ :

$$\frac{V_{\kappa}^2}{2g} = \frac{D_{\kappa}}{2}$$

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΒΑΘΟΥΣ ΓΙΑ ΓΝΩΣΤΗ ΠΑΡΟΧΗ $Q$

## Υπολογισμός κρίσιμου βάθους

- Υπολογίζεται ως η ρίζα της εξίσωσης:

$$F = 1, \quad V_{\kappa}^2 = gDy_{\kappa}, \quad \frac{A_{\kappa}^3}{T_{\kappa}} = \frac{Q^2}{g}$$

- Για όλες τις διατομές, υπάρχει πάντα μία μόνο πραγματική θετική ρίζα.
- Το κρίσιμο βάθος εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του αγωγού και τη διερχόμενη παροχή και όχι από την κατά μήκος κλίση του πυθμένα ή την τραχύτητα του αγωγού.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

125

## Υπολογισμός κρίσιμου βάθους – Ορθογωνική διατομή

- Ορθογωνική διατομή: Άμεση επίλυση

$$\frac{(by_{\kappa})^3}{b} = \frac{Q^2}{g} \Rightarrow y_{\kappa} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2g}} \xrightarrow{q=Q/b} y_{\kappa} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

Σε άλλες διατομές, όπως η τραπεζοειδής, ο υπολογισμός της ρίζας γίνεται με δοκιμές, με κάποια μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων ή γραφικά.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

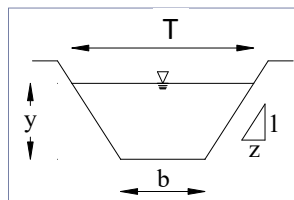
Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

126

## Υπολογισμός κρισίμου βάθους – Τραπεζοειδής διατομή

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{\frac{Q}{(b+Zy)y}}{\sqrt{g(A/T)}} = \frac{\frac{Q}{(b+Zy)y}}{\sqrt{g(b+Zy)y/(b+2Zy)}} = 1; y = y_c,$$

Λύση με δοκιμές ή με την παρακάτω αναδρομική σχέση:



Αναδρομική σχέση:

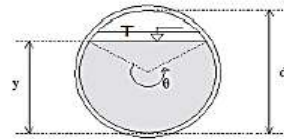
$$y_c = \frac{1}{(b+Zy_c)} \left( \frac{Q^2}{g} (b+2Zy_c) \right)^{1/3}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

127

## Υπολογισμός κρισίμου βάθους–Κυκλική διατομή



$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{V^2}{gD} = \frac{Q^2/A^2}{gA/T} = \frac{Q^2T}{gA^3} = 1 \rightarrow \text{Λύση με δοκιμές}$$

Αναδρομική σχέση ως προς  $\vartheta$  ( $\vartheta$  σε ακτίνια - rad).

$$\frac{Q^2T}{gA^3} = \frac{Q^2 d \sin(\theta/2)}{g((\theta - \sin\theta)d^2/8)^3} = 1 \Rightarrow \theta = \sin\theta + \frac{8}{d^{5/3}} \left( \frac{Q^2 \sin(\theta/2)}{g} \right)^{1/3}$$

- Θεωρούμε  $\vartheta = \vartheta 1$ .
- Υπολογίζουμε  $\vartheta = \vartheta 2$ .
- Θέτουμε  $\vartheta = (\vartheta 1 + \vartheta 2)/2$  και επαναλαμβάνουμε.

$$y_c = \frac{d}{2} [1 - \cos(\theta/2)]; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

128



## Παραδείγματα 8.2-1, 8.2-2

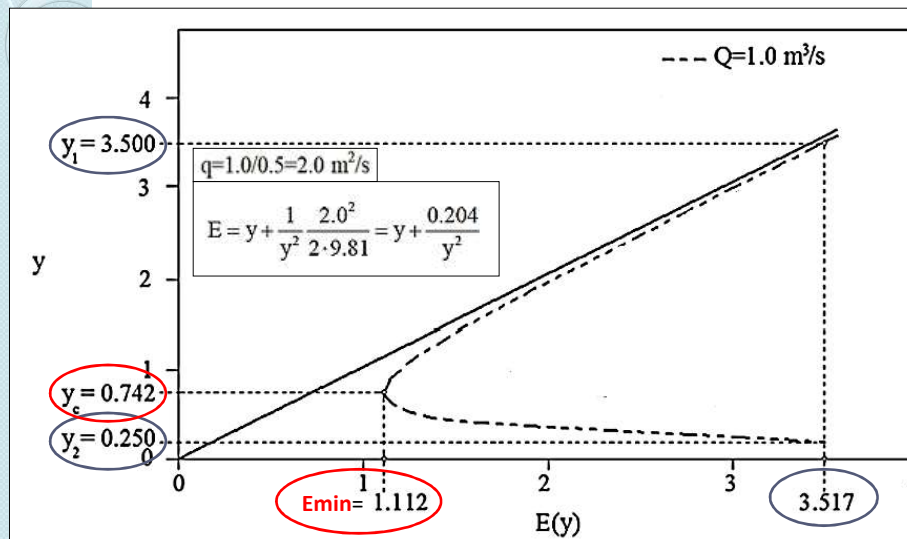
- Σχεδιάστε το διάγραμμα ειδικής ενέργειας σε ορθογωνικό αγωγό πλάτους  $b=0.50 \text{ m}$  που μεταφέρει παροχή ίση με  $Q=1.0 \text{ m}^3/\text{s}$  και σχολιάστε τη μορφή του.
- Επαναλάβετε το σχεδιασμό
  - (α) διπλασιάζοντας την παροχή, δηλ. θέτοντας  $Q=2.0 \text{ m}^3/\text{s}$ .
  - (β) υποδιπλασιάζοντας το πλάτος, δηλ. θέτοντας  $b=0.25 \text{ m}$  και σχολιάστε.
- Υπολογίστε τα μεγέθη της κρίσιμης ροής.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

129

## Διάγραμμα ειδικής ενέργειας για $q=2.0 \text{ m}^2/\text{s}$

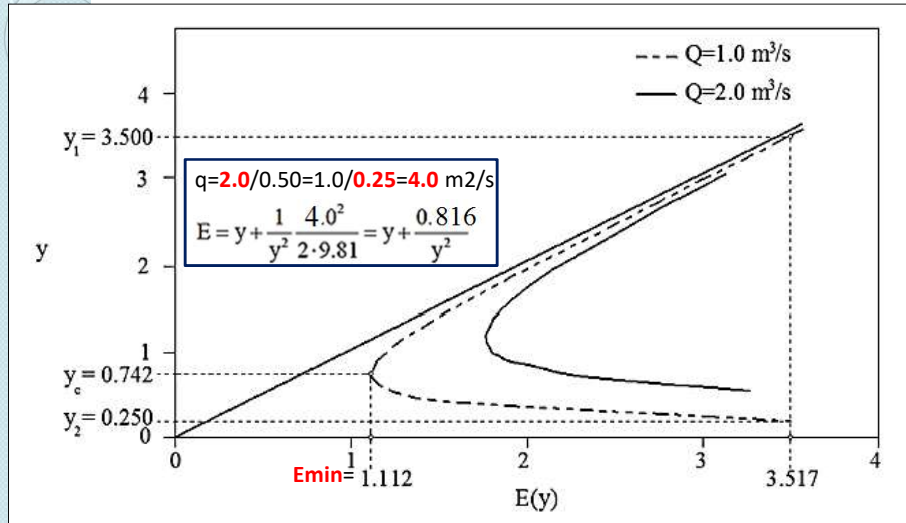


ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

130

## Διάγραμμα ειδικής ενέργειας για $q=4.0 \text{ m}^2/\text{s}$



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

131

## Υπολογισμός μεγεθών κρίσιμης ροής -1

Κρίσιμο βάθος:

$$y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left( \frac{2.0^2 \text{ m}^4 / \text{s}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \right)^{1/3} = 0.742 \text{ m}$$

Μέσο υδραυλικό βάθος:

$$D = \frac{by_c}{b} = y_c = 0.742 \text{ m}$$

Μέση ταχύτητα ροής:

$$V_c = \frac{Q}{by_c} = \frac{q}{y_c} = \frac{y_c^{3/2} g^{1/2}}{y_c} = \sqrt{gy_c} = \sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2) (0.742 \text{ m})} = 2.697 \text{ m/s}$$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

132

## Υπολογισμός μεγεθών κρίσιμης ροής -2

Ύψος κινητικής ενέργειας:  $\frac{V_c^2}{2g} = \frac{gy_c}{2g} = 0.5y_c = 0.5 (0.742 \text{ m}) = 0.371 \text{ m}$

Ελάχιστη ειδική ενέργεια:

$$E_{\min} = y_c + \frac{1}{y_c^2} \frac{q^2}{2g} = y_c + \frac{1}{y_c^2} \frac{y_c^3}{2} = y_c + 0.5y_c = 1.5y_c = 1.5 (0.742 \text{ m}) = 1.113 \text{ m}$$

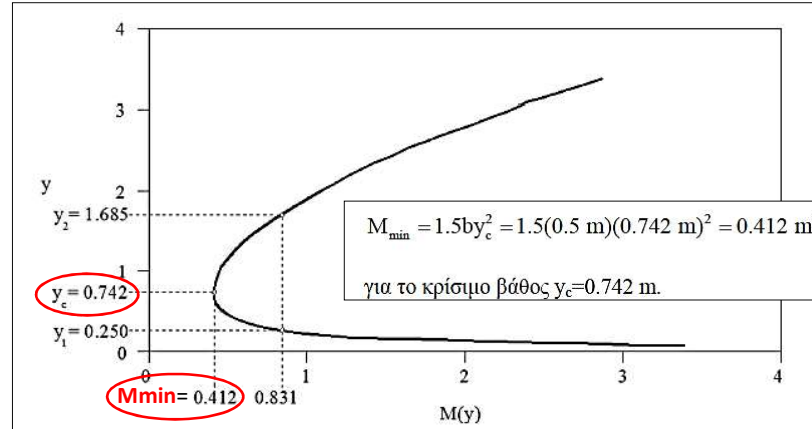
Αριθμός Froude:

$$F = \frac{V_c}{\sqrt{gD_c}} = \frac{\sqrt{gy_c}}{\sqrt{gy_c}} = 1$$

## Παράδειγμα 8.2-3

- Για ορθογωνικό αγωγό πλάτους **b=0.50 m** που μεταφέρει παροχή ίση με **Q=1.0 m<sup>3</sup>/s** (δεδομένα του παραδείγματος 8.2-1), σχεδιάστε το διάγραμμα ειδικής δύναμης και σχολιάστε τη μορφή του.

## Διάγραμμα ειδικής δύναμης



$$M = \left[ \frac{Q^2}{gA} + A\bar{y} \right] \Rightarrow M(y) = \frac{1.0^2}{(9.81)(0.5)y} + \frac{1}{2}(0.5)y^2 = \frac{0.204}{y} + 0.25y^2$$

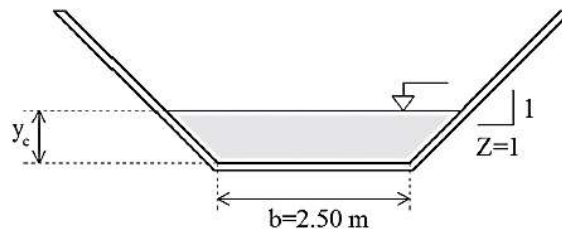
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

135

## Παράδειγμα 8.3-1

- Υπολογίστε το κρίσιμο βάθος ροής σε αγωγό τραπεζοειδούς διατομής που έχει πλάτος ίσο με  $b=2.50 \text{ m}$ , κλίση πρανών ίση με  $1/Z=1.0$  και μεταφέρει παροχή ίση με  $Q=5.0 \text{ m}^3/\text{s}$ .



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

136

## Λύση με δοκιμές

	1 <sup>η</sup> δοκιμή	2 <sup>η</sup> δοκιμή	3 <sup>η</sup> δοκιμή
$y$ (m)	1.00	0.70	<b>0.674</b>
$A=(b+Zy)y$ (m <sup>2</sup> )	3.500	2.240	2.139
$T=b+2Zy$ (m)	4.500	3.900	3.848
$D=A/T$ (m)	0.778	0.574	0.556
$V=Q/A$ (m/s)	1.429	2.232	2.337
$F=V/\sqrt{gD}$ (-)	0.517	0.940	1.001
Σφάλμα	$(0.517-1)/1 =$ $= 0.517-1 =$ $= -48.3\%$	-6.0 %	0.1 %

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

137

## Λύση με την αναδρομική σχέση

$y_c$	$Z$	$b$	$Q$	$y_c$ νέο
1.000	1	2.50	5.00	0.644
0.644	1	2.50	5.00	0.677
0.677	1	2.50	5.00	0.674
0.674	1	2.50	5.00	0.674

$$y_c = \frac{1}{(b + Zy_c)} \left( \frac{Q^2}{g} (b + 2Zy_c) \right)^{1/3}$$

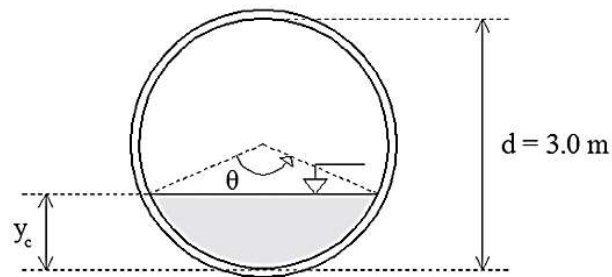
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

138

## Παράδειγμα 8.3-2

- Υπολογίστε το κρίσιμο βάθος ροής σε αγωγό κυκλικής διατομής διαμέτρου  $d=3.0$  m που μεταφέρει παροχή ίση με  $Q=5.0$  m<sup>3</sup>/s.



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

139

## Λύση

$$\theta = \pi - 2 \sin^{-1} \left( 1 - \frac{y}{0.5d} \right)$$

Κυκλικό		$A = \frac{d^2}{8} (\theta - \sin \theta)$	$T = \theta \frac{d}{2}$	$T = \frac{2\sqrt{y(d-y)}}{2}$
---------	--	--	--------------------------	--------------------------------

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{V^2}{gD} = \frac{Q^2 / A^2}{gA/T} = \frac{Q^2 T}{gA^3} = 1 \rightarrow \text{Λύση με δοκιμές}$$

- $y \rightarrow \theta \rightarrow A, T \rightarrow D=A/T \rightarrow V=Q/A \rightarrow F$

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

140

## Λύση με δοκιμές

$\gamma$	$\theta$	A	T	D	V	F	d	Q
1.000	2.4619	2.0626	2.8284	0.7292	2.4242	0.9064	3.00	5.00
0.900	2.3186	1.7835	2.7495	0.6487	2.8035	1.1113	3.00	5.00
0.950	2.3907	1.9220	2.7911	0.6886	2.6014	1.0009	3.00	5.00

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

141

## Λύση με αναδρομική σχέση

$\theta$	$Q^2/g$	d	Q	$\theta$	$\gamma_c$
5.000	2.5484	3.00	5.00	0.517	
2.758	2.5484	3.00	5.00	2.114	
2.436	2.5484	3.00	5.00	2.363	
2.399	2.5484	3.00	5.00	2.386	
2.393	2.5484	3.00	5.00	2.390	
2.392	2.5484	3.00	5.00	2.391	
2.391	2.5484	3.00	5.00	2.391	0.950

$$\theta = \sin \theta + \frac{8}{d^{5/3}} \left( \frac{Q^2 \sin(\theta/2)}{g} \right)^{1/3} \quad y_c = \frac{d}{2} [1 - \cos(\theta/2)]; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

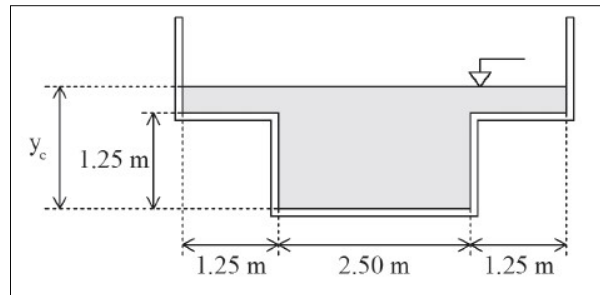
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

142

## Παράδειγμα 8.3-3

- Υπολογίστε το **κρίσιμο βάθος ροής** σε αγωγό με τη σύνθετη διατομή που φαίνεται στο σχήμα που μεταφέρει παροχή ίση με  **$Q=5.0 \text{ m}^3/\text{s}$** .
- Επαναλάβετε τον υπολογισμό για  **$Q=15.0 \text{ m}^3/\text{s}$** .



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

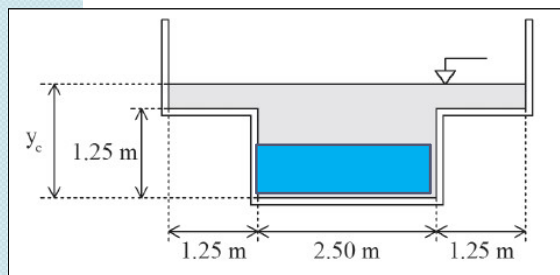
Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

143

## Λύση – Ερώτημα (α)

- a)  **$Q=5.0 \text{ m}^3/\text{s}$**  → Υποθέτουμε  $y_c < 1.25 \text{ m}$

$$y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left( \frac{(5.0/2.5)^2 \text{ m}^4/\text{s}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \right)^{1/3} = 0.742 \text{ m} \leq 1.25 \text{ m} \Rightarrow \text{OK}$$



Οριακή περίπτωση

$$y_c = 1.25 \text{ m} \Rightarrow$$

$$y_c = \left( \frac{Q^2}{b^2 g} \right)^{1/3} \Rightarrow$$

$$Q = (1.25^3 \cdot 2.50^2 \cdot 9.81)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = 10.943 \text{ m}^3/\text{s}$$

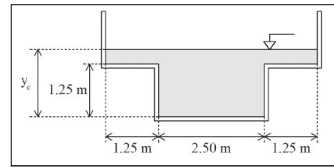
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α. ΝΑΝΟΥ-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

144



## Λύση – Ερώτημα (β)



b)  $Q = 15.0 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow$  Υποθέτουμε  $y \rightarrow$

$\rightarrow$  Εμβαδόν  $A = 2.50 \cdot 1.25 + 5.00 \cdot (y - 1.25) \text{ m}^2$

$\rightarrow$  Πλάτος  $T = 5.00 \text{ m}$ , μέσο υδρ. βάθος  $D = A/T$

$\rightarrow$  Ταχύτητα  $V = Q/A \rightarrow$  αριθμός Froude  $F = V/\sqrt{gD}$

Παράμετρος	Μονάδες	Δοκιμή 1	Δοκιμή 2	Δοκιμή 3
$y$	m	2.000	1.600	1.597
$A(y)$	$\text{m}^2$	6.875	4.875	4.860
$T(y)$	m	5.000	5.000	5.000
$D(y)$	m	1.375	0.975	0.972
$V(y)$	m/s	2.182	3.077	3.086
$F(y)$	-	0.594	0.995	1.000
Σφάλμα	-	-40.6%	-0.5%	0.0%

° ΚΡΙΣΙΜΗ ΚΛΙΣΗ

Κρίσιμη κλίση αγωγού – Εφαρμογή για ορθογωνική διατομή - δεδομένα τα Q, n, b

$$Q = \frac{A}{n} R^{2/3} J_o^{1/2} = \frac{b y_o}{n} \left( \frac{b y_o}{b + 2 y_o} \right)^{2/3} J_o^{1/2}$$

$$J_o = \frac{Q^2 n^2}{b^2 y_o^2} \left( \frac{1}{y_o} + \frac{2}{b} \right)^{4/3}$$

$$J_c = \frac{Q^2 n^2}{b^2 y_c^2} \left( \frac{1}{y_c} + \frac{2}{b} \right)^{4/3}$$

**Jo=Jc**

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

147

Κρίσιμη κλίση αγωγού – Εφαρμογή για ορθογωνική διατομή - δεδομένα τα Q, n, b

- Με δεδομένα τα Q, n και b, υπάρχει μια κλίση για την οποία η **ομοιόμορφη ροή** είναι και **κρίσιμη**.
- Όταν η κλίση του αγωγού αυτού είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης κλίσης  **$J_o > J_c$** , τότε την χαρακτηρίζουμε ως **υπερκρίσιμη κλίση**, γιατί η ομοιόμορφη ροή είναι υπερκρίσιμη.
- Όταν η κλίση του αγωγού αυτού είναι μικρότερη της κρίσιμης κλίσης  **$J_o < J_c$** , τότε την χαρακτηρίζουμε ως **υποκρίσιμη κλίση**, γιατί η ομοιόμορφη ροή είναι υποκρίσιμη.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

A. NANOY-ΓΙΑΝΝΑΡΟΥ

148

## ° ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

## Τυπολόγιο -1

1) Εξίσωση ενέργειας  $H = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g}$

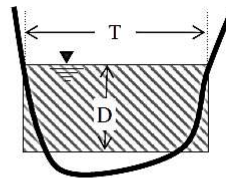
2) Ειδική ενέργεια  $E = y + \alpha \frac{V^2}{2g}$

3) Ειδική δύναμη  $M = \frac{Q^2}{gA} + yA$


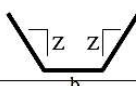

4) Αριθμός του Froude  $Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}}; D = A/T$

5) Κρίσιμο βάθος: Συνθήκη  $Fr = V / \sqrt{gD} = 1; D = A/T$

6) Εξίσωση του Manning  $V = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2}; R = A/P, Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} J^{1/2}$



## Τυπολόγιο -2

Διατομή	Κρίσιμο βάθος	Ομοιόμορφο βάθος
	$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$	$y = \frac{1}{b} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b + 2y)^{2/3} \right]^{3/5}$
	$y_c = \frac{1}{(b + Zy_c)} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g} (b + 2Zy_c)}$	$y = \frac{1}{b + zy} \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} (b + 2y\sqrt{1 + z^2})^{2/3} \right]^{3/5}$
	$\theta = \sin \theta + \frac{8}{d^{5/3}} \sqrt[3]{\frac{Q^2 \sin(\theta/2)}{g}}$ $y_c = \frac{d}{2} [1 - \cos(\theta/2)]$	$\theta = \left[ \frac{Qn}{J^{1/2}} \frac{\theta^{2/3}}{(d/2)^{8/3}} \right]^{3/5} + \frac{\sin \theta}{2} + \frac{\theta}{2}$ $y = \frac{d}{2} [1 - \cos(\theta/2)]$