Συνδυασμός προσομοίωσης και μη γραμμικής βελτιστοποίησης
Εφαρμογές σε συστήματα ταμιευτήρων

Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

1. Μη γραμμικός προγραμματισμός χωρίς περιορισμούς

Συνθήκες ακροτάτου

Πρόβλημα: Να βρεθεί το σημείο $\mathbf{x}_*$ έτσι ώστε

$$f(\mathbf{x}_*) = \min\,[f(\mathbf{x})]$$

Αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου:

1. $\left(\dfrac{df(\mathbf{x}_*)}{d\mathbf{x}}\right) = \mathbf{0}^T$ ($\mathbf{x}_*$ στάσιμο σημείο)

2. Εσσιανό μητρώο $\left(\dfrac{d^2 f(\mathbf{x}_*)}{d\mathbf{x}^2}\right)$ θετικά ορισμένο.

Παρατηρήσεις:

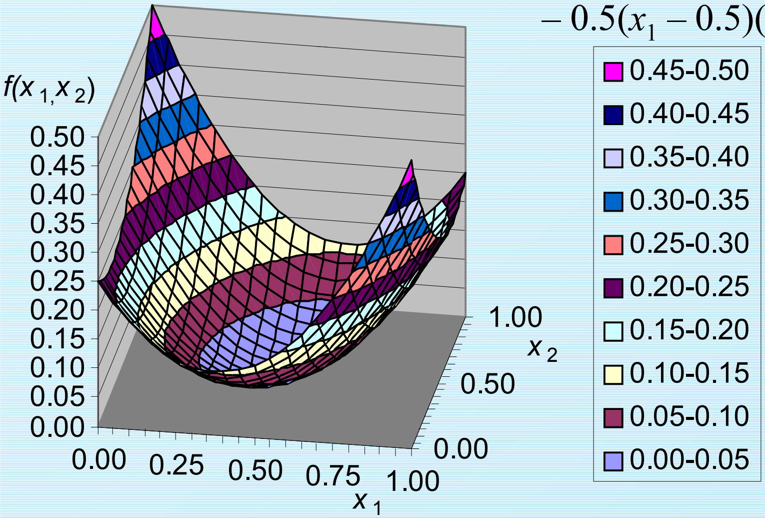
Οι παραπάνω συνθήκες είναι και ικανές αν η συνάρτηση είναι *κυρτή*, δηλαδή το Εσσιανό μητρώο είναι θετικά ορισμένο για κάθε $\mathbf{x}$. Σε αυτή την περίπτωση η $f(\mathbf{x})$ έχει ένα μοναδικό στάσιμο σημείο που είναι και *ολικό* (global) *ελάχιστο*.

Διαφορετικά μπορεί η $f(\mathbf{x})$ να έχει περισσότερα στάσιμα σημεία, καθένα από τα οποία, ανάλογα με τις ιδιότητες του Εσσιανού, μπορεί να είναι *τοπικό* (local) *ελάχιστο* ή *τοπικό μέγιστο* ή τίποτε απ’ τα δύο. Σε αυτή την περίπτωση η επίλυση του προβλήματος προϋποθέτει την εύρεση όλων των στάσιμων σημείων $\mathbf{x}_{*i}$ και τη σύγκριση των τιμών $f(\mathbf{x}_{*i})$.

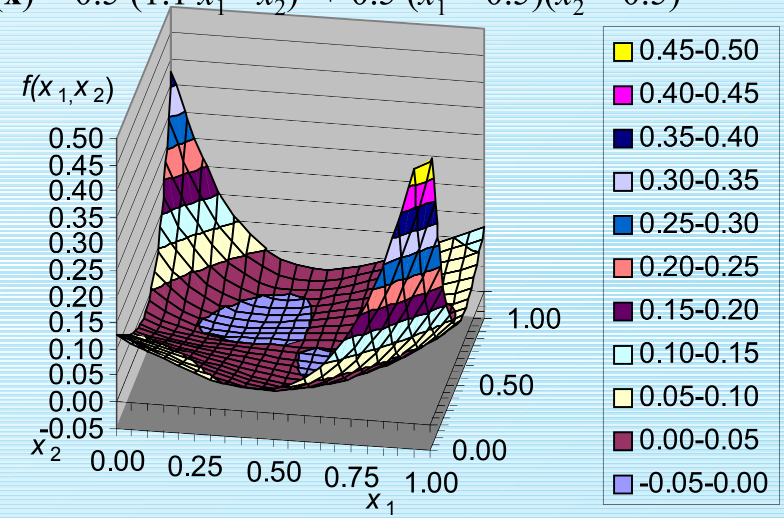
Το πρόβλημα της αναζήτησης μεγίστου άμεσα μετατρέπεται σε πρόβλημα αναζήτησης ελαχίστου, δεδομένου ότι $\max[f(\mathbf{x})] = -\min[-f(\mathbf{x})]$.

Τοπικά και ολικά ακρότατα

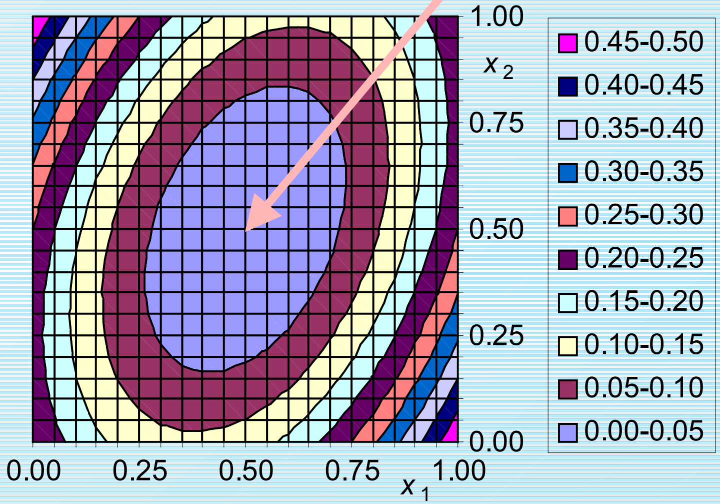
$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.5(x_2 - 0.5)^2 - 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$



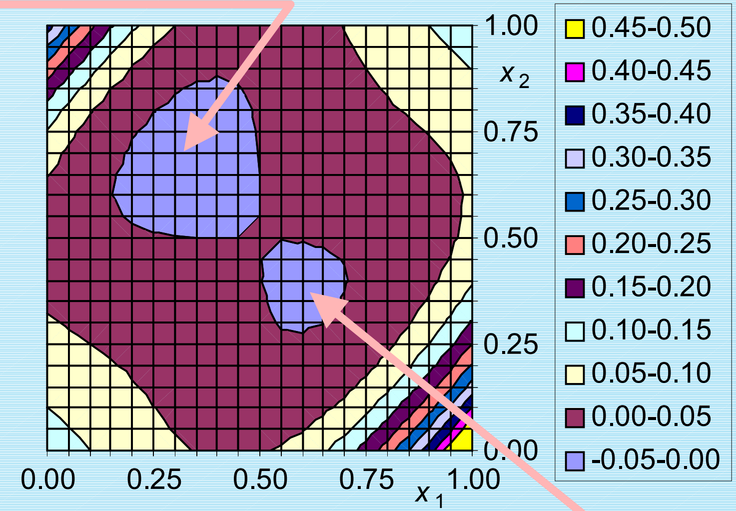
$$f(\mathbf{x}) = 0.5\,(1.1\,x_1 - x_2)^4 + 0.5\,(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$



Μοναδικό ελάχιστο $\mathbf{x}_* = [0.5, 0.5]^T$, $f(\mathbf{x}_*) = 0$



Ολικό ελάχιστο $\mathbf{x}_* = [0.314, 0.705]^T$, $f(\mathbf{x}_*) = -0.011$



Τοπικό ελάχιστο $\mathbf{x}_* = [0.618, 0.371]^T$, $f(\mathbf{x}_*) = -0.003$

2. Τυπικοί αλγόριθμοι αναζήτησης τοπικού ελαχίστου

Η μέθοδος της πιο απότομης κατάβασης (steepest descent)

(1) Ξεκινάμε από ένα αρχικό σημείο $\mathbf{x}^{[k]}$ όπου $k = 0$.

(2) Υπολογίζουμε την κλίση (gradient) $\nabla f(\mathbf{x}^{[k]})$ της προς ελαχιστοποίηση συνάρτησης $f(\mathbf{x})$.

(3) Κινούμαστε πάνω στην ευθεία που ορίζει η $\nabla f(\mathbf{x}^{[k]})$, αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση, και εντοπίζουμε το νέο σημείο $\mathbf{x}^{[k+1]}$ το οποίο είναι το σημείο ελαχίστου της $f(\mathbf{x})$ πάνω στη συγκεκριμένη ευθεία.

Η ευθεία έχει εξίσωση

$$\mathbf{x} = \mathrm{x}^{[k]} - \beta^{[k]} \nabla f(\mathbf{x}^{[k]})$$

όπου $\beta^{[k]}$ (βαθμωτή) παράμετρος, και κατά συνέπεια

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \beta^{[k]} \nabla f(\mathbf{x}^{[k]})$$

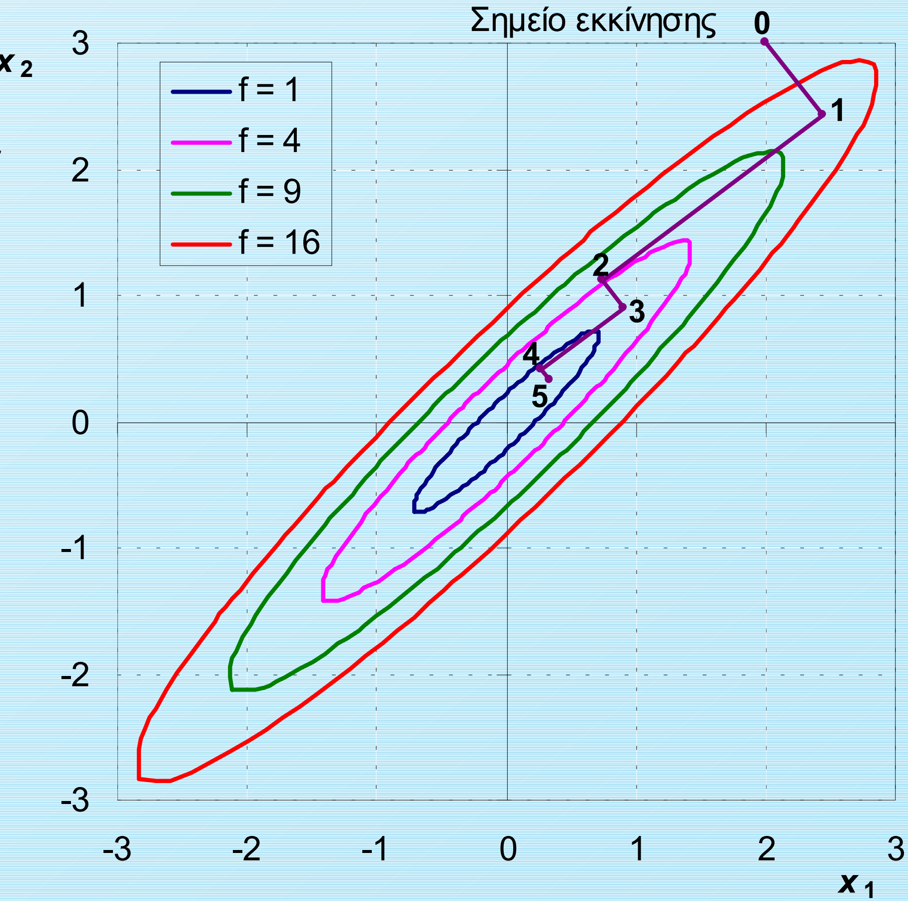
όπου η τιμή της $\beta^{[k]}$ προσδιορίζεται σε τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η

$$g(\beta^{[k]}) := f(\mathbf{x}^{[k]} - \beta^{[k]} \nabla f(\mathbf{x}^{[k]}))$$

(πρόβλημα βελτιστοποίησης μιας μεταβλητής).

(4) Επαναλαμβάνουμε ξεκινώντας από το νέο σημείο $\mathbf{x}^{[k+1]}$ μέχρι να ικανοποιηθούν ορισμένα κριτήρια σύγκλισης.

Παράδειγμα: Εντοπισμός ελαχίστου της $f(x_1, x_2) = 20\, x_1^2 + 20\, x_2^2 - 38\, x_1 x_2$



Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων (conjugate gradient)

- Η πορεία σύγκλισης στη μέθοδο της πιο απότομης κατάβασης είναι αργή (μικρά βήματα).
- Στην ίδια μέθοδο, η διεύθυνση μετακίνησης σε κάθε βήμα είναι κάθετη στην αντίστοιχη διεύθυνση του προηγούμενου βήματος.
- Για επιτάχυνση της πορείας, σε κάθε βήμα λαμβάνονται υπόψη και οι διευθύνσεις προηγούμενων βημάτων (μέθοδοι συζυγών διευθύνσεων).
- Στη μέθοδο συζυγών διευθύνσεων των Fletcher-Reeves η νέα διεύθυνση προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των κλίσεων στο παρόν και το προηγούμενο σημείο εκκίνησης. Κατά συνέπεια

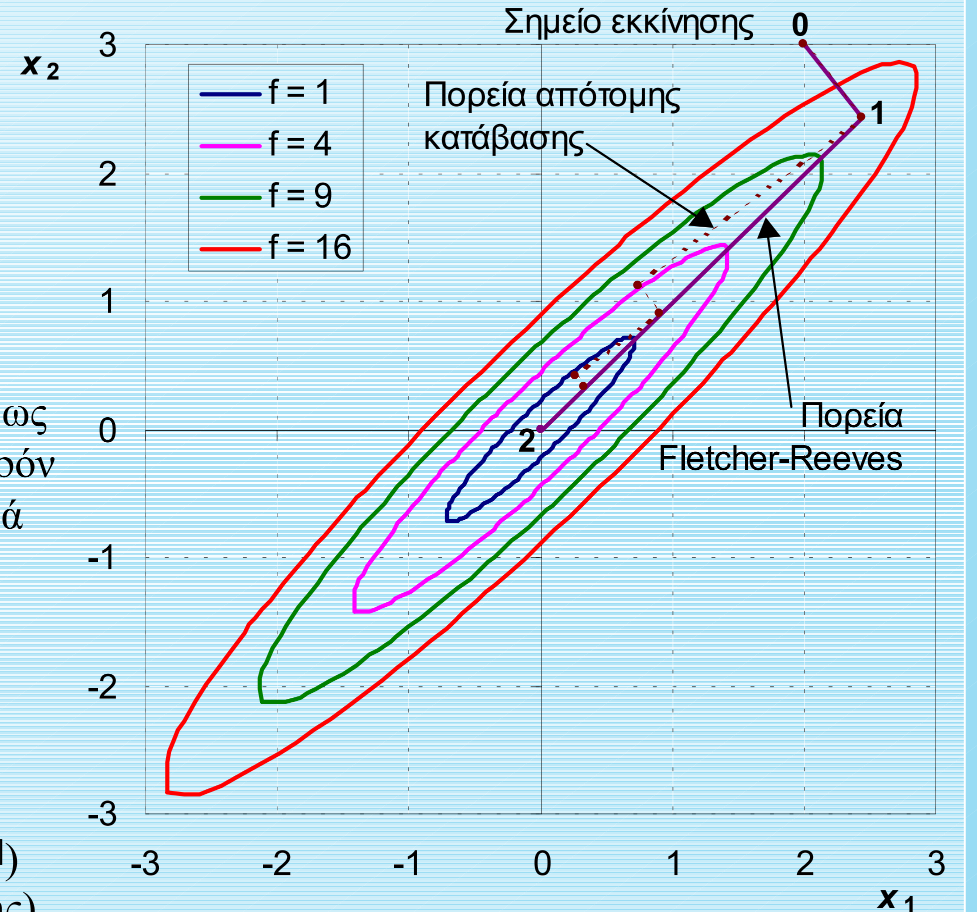
$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \beta^{[k]} \left[\nabla f(\mathbf{x}^{[k]}) + \gamma^{[k]} \nabla f(\mathbf{x}^{[k-1]})\right]$$

όπου

$$\gamma^{[k]} = \|\nabla f(\mathbf{x}^{[k]})\|^2 / \|\nabla f(\mathbf{x}^{[k-1]})\|^2$$

και η τιμή της $\beta^{[k]}$ προσδιορίζεται σε τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η $g(\beta^{[k]}) := f(\mathbf{x}^{[k+1]})$ (πρόβλημα βελτιστοποίησης μιας μεταβλητής).

Παράδειγμα: Εντοπισμός ελαχίστου της $f(x_1, x_2) = 20\, x_1^2 + 20\, x_2^2 - 38\, x_1 x_2$



3. Μη γραμμικός προγραμματισμός με περιορισμούς

Εξισωτικοί περιορισμοί

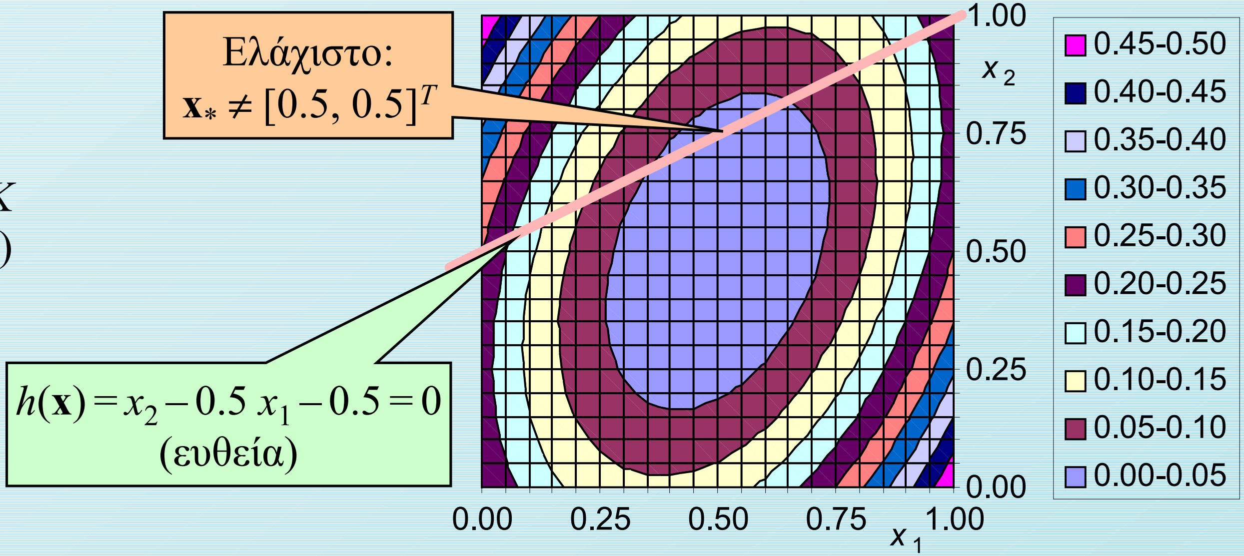
Πρόβλημα: Να βρεθεί το σημείο $\mathbf{x}_*$ έτσι ώστε

$$f(\mathbf{x}_*) = \min\,[f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K]$$

όπου το σύνολο περιορισμών K (γνωστό και ως *εφικτή περιοχή*) ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$$

για δεδομένη διανυσματική (ή πραγματική) συνάρτηση $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

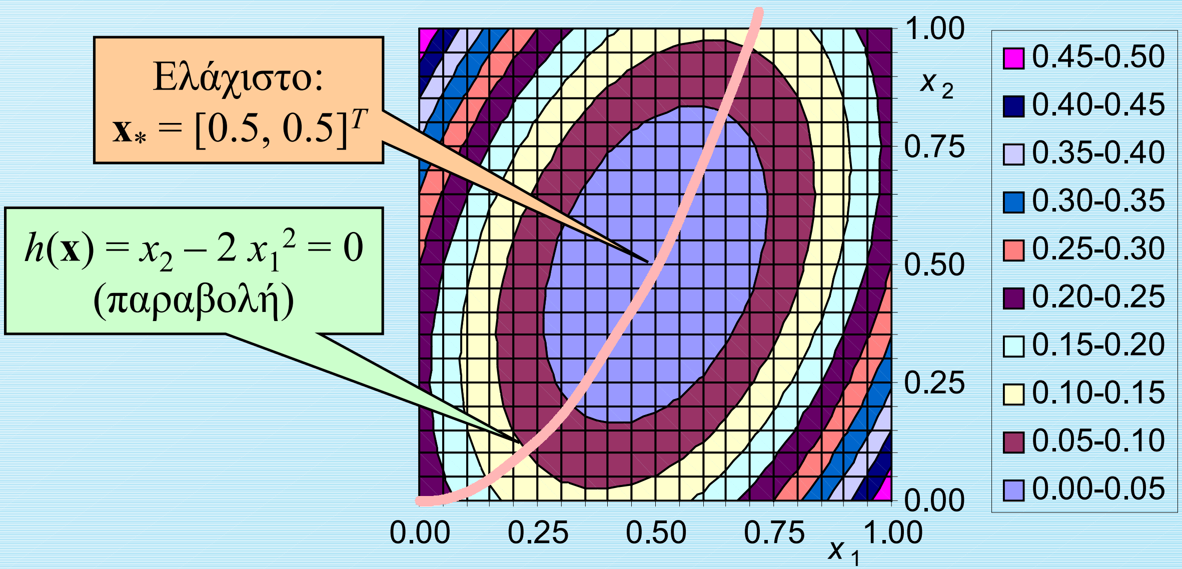


Παραδείγματα:

Στα παραδείγματα των σχημάτων εξετάζεται η συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.5(x_2 - 0.5)^2 - 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

με διάφορες μορφές εξισωτικών περιορισμών.



Ανισωτικοί περιορισμοί

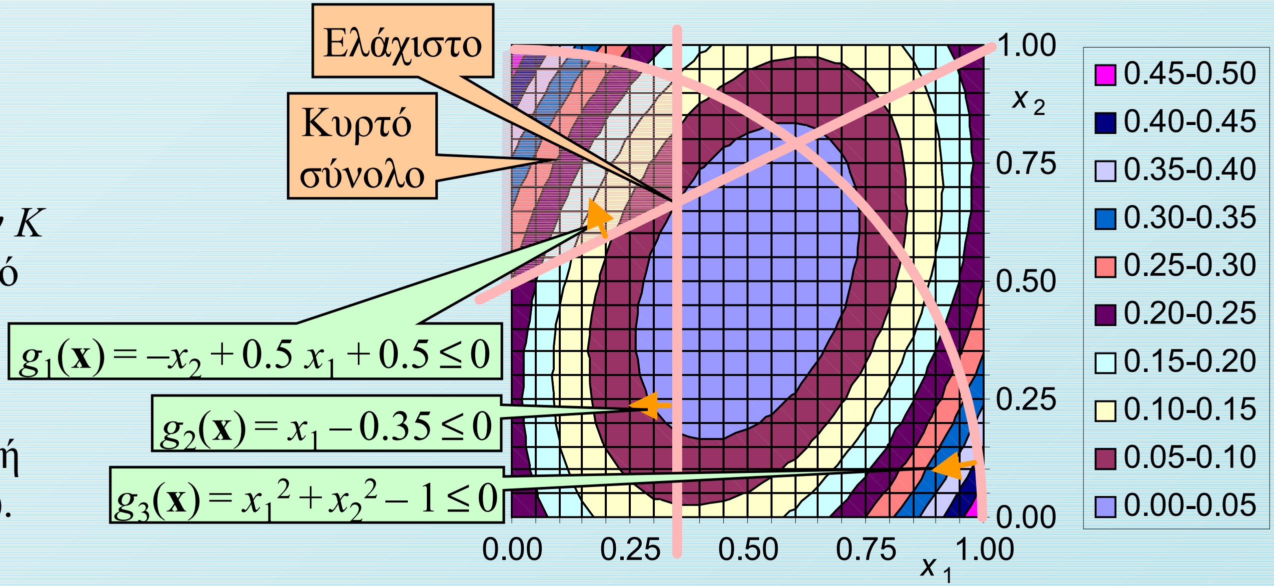
Πρόβλημα: Να βρεθεί το σημείο $\mathbf{x}_*$ έτσι ώστε

$$f(\mathbf{x}_*) = \min\,[f(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in K]$$

όπου το σύνολο περιορισμών K (εφικτή περιοχή) ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_*) \le \mathbf{0}$$

για δεδομένη διανυσματική (ή πραγματική) συνάρτηση $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

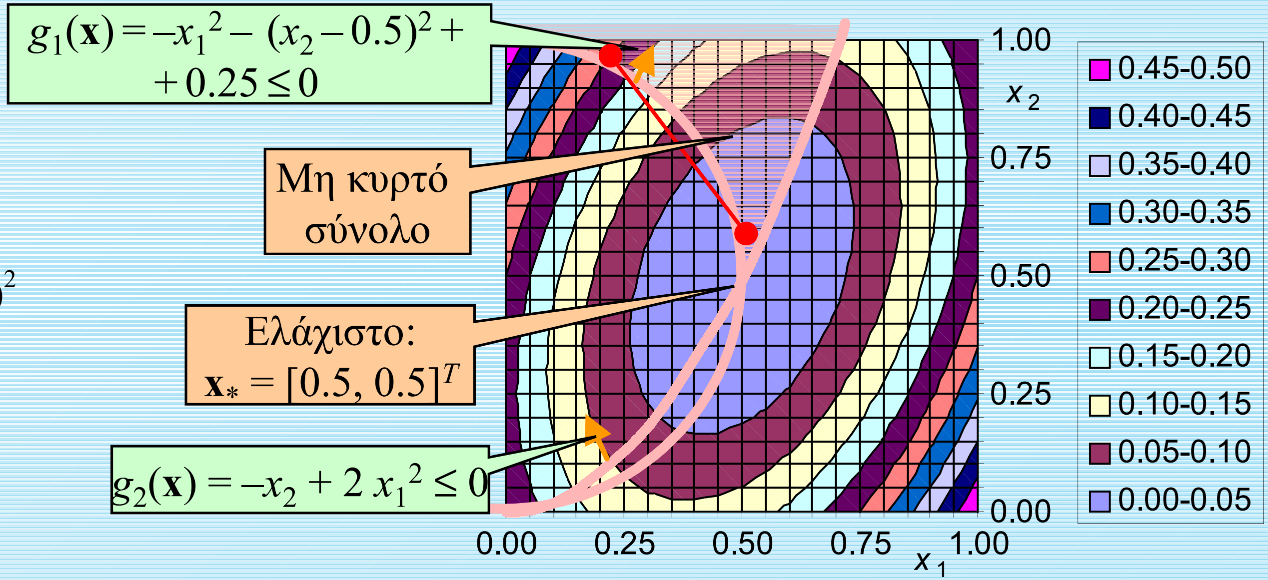


Παραδείγματα:

Στα παραδείγματα των σχημάτων εξετάζεται η συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.5(x_2 - 0.5)^2 - 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

με διάφορες μορφές ανισωτικών περιορισμών.



Συνθήκες Kuhn-Tucker για βελτιστοποίηση με περιορισμούς (1)

Αρχικό πρόβλημα:

$\min f(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

με περιορισμούς

$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}$ όπου $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_k(\mathbf{x})]^T$ (ανισωτικοί περιορισμοί)

Μετασχηματισμένο πρόβλημα:

$\max \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$

όπου $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k]^T$, διανύσματα παραμέτρων που είναι γνωστές ως πολλαπλασιαστές Langrange.

Αναγκαίες συνθήκες βέλτιστου:

Αν το σημείο $\mathbf{x}_*$ αποτελεί λύση του προβλήματος, τότε ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_*) \le \mathbf{0}$$

και επιπλέον υπάρχει μοναδικό $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k]^T$ τέτοιο ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα (συνθήκες Kuhn-Tucker):

$$\frac{df(\mathbf{x}_*)}{d\mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x}_*)}{d\mathbf{x}} = \mathbf{0}^T$$

$$\lambda_j \, g_j(\mathbf{x}_*) = 0, \quad \lambda_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

Σημείωση: Οι συνθήκες είναι και ικανές αν τόσο η $f(\mathbf{x})$, όσο και οι $g_j(\mathbf{x}_*)$ είναι κυρτές συναρτήσεις. (Εφόσον οι $g_j(\mathbf{x}_*)$ είναι κυρτές, τότε και η εφικτή περιοχή – δηλαδή το σύνολο των $\mathbf{x}$ που ικανοποιούν τους περιορισμούς – είναι κυρτή.)

Συνθήκες Kuhn-Tucker για βελτιστοποίηση με περιορισμούς (2)

Αρχικό πρόβλημα:

$\min f(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

με περιορισμούς

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ όπου $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \ldots, h_k(\mathbf{x})]^T$ (εξισωτικοί περιορισμοί)

$\underline{\mathbf{x}} \le \mathbf{x} \le \overline{\mathbf{x}}$ όπου $\underline{\mathbf{x}} = [\underline{x}_1, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n]$, $\overline{\mathbf{x}} = [\overline{x}_1, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n]$, (άνω και κάτω όρια μεταβλητών)

Σημείωση: Κάθε πρόβλημα με ανισωτικούς περιορισμούς μετατρέπεται στην παραπάνω μορφή με την εισαγωγή αδιάφορων (slack) μεταβλητών.

Μετασχηματισμένο πρόβλημα:

$$\max \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \underline{\boldsymbol{\mu}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \underline{\boldsymbol{\mu}}^T (\underline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + \overline{\boldsymbol{\mu}}^T (\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$$

όπου $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k]^T$, $\underline{\boldsymbol{\mu}} = [\underline{\mu}_1, \underline{\mu}_1, \ldots, \underline{\mu}_n]$, $\overline{\boldsymbol{\mu}} = [\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_n]$ διανύσματα παραμέτρων που είναι γνωστές ως πολλαπλασιαστές Langrange.

Αναγκαίες συνθήκες βέλτιστου:

Αν το σημείο $\mathbf{x}_*$ αποτελεί λύση του προβλήματος, τότε ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}, \qquad \underline{\mathbf{x}} \le \mathbf{x}_* \le \overline{\mathbf{x}}$$

και επιπλέον υπάρχουν μοναδικά $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k]^T$, $\underline{\boldsymbol{\mu}} = [\underline{\mu}_1, \underline{\mu}_1, \ldots, \underline{\mu}_n]$, $\overline{\boldsymbol{\mu}} = [\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_n]$, τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα (συνθήκες Kuhn-Tucker):

$$\frac{df(\mathbf{x}_*)}{d\mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{h}(\mathbf{x}_*)}{d\mathbf{x}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}^T + \overline{\boldsymbol{\mu}}^T = \mathbf{0}^T$$

$$\underline{\mu}_j\,(\underline{x}_j - x_{j*}) = 0, \quad \overline{\mu}_j\,(x_{j*} - \overline{x}_j) = 0, \quad \underline{\mu}_j \ge 0, \quad \overline{\mu}_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Η μέθοδος της γενικευμένης ανηγμένης κλίσης (Generalised Reduced Gradient – GRG)

Αρχικό πρόβλημα:

$\min f(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

με περιορισμούς

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ όπου $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \ldots, h_k(\mathbf{x})]^T$ (εξισωτικοί περιορισμοί)

$\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}}$ όπου $\underline{\mathbf{x}} = [\underline{x}_1, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n]$, $\overline{\mathbf{x}} = [\overline{x}_1, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n]$, (άνω και κάτω όρια μεταβλητών)

Βασικές και μη βασικές μεταβλητές:

Οι n μεταβλητές διακρίνονται σε k βασικές $\mathbf{x}_\mathrm{B}$ (όπου k ο αριθμός των περιορισμών) και $n - k$ μη βασικές $\mathbf{x}_\mathrm{N}$, ήτοι $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_\mathrm{B}, \mathbf{x}_\mathrm{N})$. Λόγω των περιορισμών, οι βασικές μεταβλητές εκφράζονται συναρτήσει των μη βασικών: $\mathbf{x}_\mathrm{B} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_\mathrm{N})$ και η αντικειμενική συνάρτηση ανάγεται στην $F(\mathbf{x}_\mathrm{N}) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x}_\mathrm{N}), \mathbf{x}_\mathrm{N})$.

Πορεία επίλυσης:

1. Ξεκινάμε το αρχικό βήμα $k = 0$, επιλέγοντας τις μη βασικές μεταβλητές $\mathbf{x}_\mathrm{N}^{[k]}$.
2. Καταστρώνουμε και επιλύουμε αριθμητικά τις εξισώσεις $\mathbf{x}_\mathrm{B}^{[k]} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_\mathrm{N}^{[k]})$ προσδιορίζοντας έτσι τις βασικές μεταβλητές.
3. Προσδιορίζουμε τη διεύθυνση μετακίνησης $\mathbf{d}^{[k]}$ στο χώρο των μεταβλητών $\mathbf{x}_\mathrm{N}^{[k]}$.
4. Προσδιορίζουμε το νέο σημείο $\mathbf{x}_\mathrm{N}^{[k+1]}$ επιλύοντας ως προς $\beta^{[k]}$ το μονοδιάστατο πρόβλημα βελτιστοποίησης $\min \mathrm{F}(\mathbf{x}_\mathrm{N}^{[k]} + \beta^{[k]}\, \mathbf{d}^{[k]})$, σε τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί $\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}}$ (για βασικές και μη βασικές μεταβλητές).
5. Επαναλαμβάνουμε μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση. Σε κάθε επανάληψη μπορεί να αλλάξει η διάκριση των μεταβλητών σε βασικές και μη βασικές σε τρόπο ώστε βασικές μεταβλητές να είναι αυτές που δεν φτάνουν τα επιτρεπτά όριά τους.

Τυπικοί μη γραμμικοί επιλυτές: (1) για λογιστικά πακέτα

- **Excel Solver**
  - Τυπικός γραμμικός και μη γραμμικός επιλυτής ενσωματωμένος στο πακέτο του Excel.
  - Έχει αναπτυχθεί από την Frontline Systems.
  - Γενικές πληροφορίες και οδηγίες παρέχονται στο διαδίκτυο (http://frontsys.com· βλ. και Winston and Albright, 1997, σσ. 31-44).
  - Ο μη γραμμικός επιλυτής βασίζεται στη μέθοδο GRG (Lasdon et al., 1978·Lasdon and Smith, 1992).
- **Excel Solver Upgrades**
  - Διάφοροι εξελιγμένοι επιλυτές κατάλληλοι για το Excel με πολύ περισσότερες δυνατότητες από τον τυπικό επιλυτή.
  - Έχουν αναπτυχθεί από την Frontline Systems.
  - Περιλαμβάνουν διάφορους αλγόριθμους (γραμμικού προγραμματισμού, ακέραιου προγραμματισμού, μη γραμμικού προγραμματισμού, εξελικτικούς).
- **What’s Best!**:
  - Αντίστοιχος επιλυτής κατάλληλος για πακέτα λογιστικών φύλλων (ειδικότερα για το πακέτο Lotus 1-2-3).
  - Έχει αναπτυχθεί από τη Lindo Systems (βλ. και Winston, 1994, σσ. 182-186· Winston and Albright, 1997, σσ. 62-67).

Τυπικοί μη γραμμικοί επιλυτές: (2) αυτόνομοι

- **LINGO**
  - Αυτόνομο πρόγραμμα-γλώσσα προγραμματισμού για κατασκευή (γραμμικών, μη γραμμικών και ακέραιων) μοντέλων βελτιστοποίησης
  - Έχει αναπτυχθεί από τη Lindo Systems (βλ. και Winston, 1994, σσ. 115-160).
- **GINO**
  - Αυτόνομο πρόγραμμα μη γραμμικού επιλυτή (Liebman et al., 1986· βλ. και Winston, 1994, σ. 640).
- **Nonlinear Solver DLL**
  - Μη γραμμικός επιλυτής σε μορφή βιβλιοθήκης δυναμικής σύνδεσης (DLL).
  - Έχει αναπτυχθεί από την Frontline Systems.
  - Βασίζεται στη μέθοδο GRG.
  - Είναι κατάλληλος για ενσωμάτωση σε οποιαδήποτε προγράμματα (για προγραμματιστές).
- **«Συνταγές» βελτιστοποίησης**
  - Σειρά υπολογιστικών διαδικασιών σε μορφή πηγαίου κώδικα.
  - Έχουν αναπτυχθεί από τους Press et al. (1992).
  - Διατίθενται σε γλώσσες C, FORTRAN και Pascal.
  - Βασίζονται σε μια ποικιλία μεθοδολογιών, χωρίς όμως να καλύπτουν βελτιστοποίηση με περιορισμούς.
  - Είναι κατάλληλες για ενσωμάτωση σε οποιαδήποτε προγράμματα (για προγραμματιστές).

4. Αναζήτηση ολικού ακροτάτου
Γενικά σχόλια

- Σε προβλήματα που υπάρχουν πολλά ακρότατα, η αναζήτηση του ολικού ακροτάτου δυσχεραίνεται.
- Δεν υπάρχει εγγυημένη μεθοδολογία εντοπισμού ενός ολικού ακροτάτου. Γενικά οι τρέχουσες μεθοδολογίες στηρίζονται
  - είτε σε διακριτοποίηση της εφικτής περιοχής, ακολουθούμενη από απαριθμητική (εξαντλητική) αναζήτηση στο σύνολο των διακριτών σημείων (πρόβλημα: υπερβολικά μεγάλος αριθμός λύσεων σε πολυδιάστατα προβλήματα – «κατάρα» της διαστατικότητας).
  - είτε σε χρήση τυχαίων αριθμών (πρόβλημα: μη αντικειμενικός τρόπος προσδιορισμού της βέλτιστης λύσης – έλλειψη επαρκών κριτηρίων αξιολόγησης)

(βλ. Loucks et al., 1981, σσ. 65-69·Nalbantis and Koutsoyiannis, 1997).

Μεθοδολογίες αναζήτησης

- Απλά σχήματα αναζήτησης:
  - Αναζήτηση με ομοιόμορφο πλέγμα.
  - Αναζήτηση με επάλληλα ομοιόμορφα πλέγματα.
  - Αναζήτηση μέσω τυχαίας δειγματοληψίας.
- Υβριδικά σχήματα αναζήτησης:
  - Ορίζεται ένα σύνολο αρχικών σημείων, είτε με βάση ένα αραιό ομοιόμορφο πλέγμα, είτε σε τυχαίο τρόπο, και στη συνέχεια από κάθε αρχικό σημείο ξεκινά μια διαδικασία συστηματικής αναζήτησης (με τις τυπικές μεθόδους μη γραμμικού προγραμματισμού).
- Γενετικοί/εξελικτικοί αλγόριθμοι.
- Μέθοδος προσομοιωμένης ανόπτησης (Press et al., 1992).

5. Εναλλακτικές μεθοδολογίες αντιμετώπισης συστημάτων υδατικών πόρων

Βελτιστοποίηση
(χρήση γραμμικού ή δυναμικού προγραμματισμού ή θεωρίας βέλτιστου ελέγχου)
Πλεονέκτημα: Βέλτιστη λύση
Μειονεκτήματα: Υπερβολικά μεγάλος αριθμός μεταβλητών (ανέφικτη λύση για πολύπλοκα συστήματα) – Απλοποιημένη περιγραφή του συστήματος

Προσομοίωση
(χρήση ευρετικών κανόνων λειτουργίας)
Πλεονεκτήματα: Πιστή αναπαράσταση του συστήματος – Εφικτή εφαρμογή σε πολύπλοκα συστήματα
Μειονέκτημα: Μη βέλτιστη λύση

Παραμετροποίηση-Προσομοίωση-Βελτιστοποίηση (ΠΠΒ)
(χρήση παραμετρικών κανόνων λειτουργίας και εκτίμηση των παραμέτρων με βελτιστοποίηση ενός δείκτη επίδοσης, ο οποίος υπολογίζεται με προσομοίωση)
Πλεονεκτήματα: Πιστή αναπαράσταση του συστήματος – Εφικτή εφαρμογή σε πολύπλοκα συστήματα – Μικρός αριθμός μεταβλητών
Μειονέκτημα: Προσέγγιση της βέλτιστης λύσης (λόγω αυθαίρετης προαποφασισμένης μορφής των κανόνων λειτουργίας)

6. Το γενικό σχήμα ΠΠΒ
Γενική μεθοδολογία

- **Παραμετροποίηση του συστήματος με την εισαγωγή παραμετρικών κανόνων λειτουργίας**. Οι παραμετρικοί κανόνες αποτελούν μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τις απολήψεις από ταμιευτήρες με τις μεταβλητές που περιγράφουν την κατάσταση του συστήματος (π.χ. αποθέματα ταμιευτήρων). Οι σχέσεις αυτές περιλαμβάνουν ένα αριθμό παραμέτρων, οι οποίες αποτελούν τις προς βελτιστοποίηση μεταβλητές (αντί των απολήψεων).
- **Λεπτομερής προσομοίωση της λειτουργίας του συστήματος**. Το μοντέλο προσομοίωσης αναπαριστά με πιστό τρόπο τη λειτουργία του συστήματος με ικανοποίηση όλων των φυσικών και των εσωτερικών λειτουργικών περιορισμών του. Η λειτουργία του προϋποθέτει τον καθορισμό των τιμών των παραμέτρων των παραμετρικών κανόνων.
- **Βελτιστοποίηση του δείκτη επίδοσης του συστήματος**. Ο δείκτης επίδοσης συνδέεται, ανάλογα με το εξεταζόμενο πρόβλημα, με την αξιοπιστία του συστήματος ή με το οικονομικό όφελος από τη λειτουργία του (ενεργειακό, αρδευτικό κτλ.). Στο μοντέλο βελτιστοποίησης μπορεί να υπεισέρχονται και εξωτερικοί λειτουργικοί περιορισμοί, η ικανοποίηση των οποίων δεν μπορεί να ελεγχθεί από το μοντέλο προσομοίωσης. Από τη βελτιστοποίηση (με ή χωρίς περιορισμούς) προκύπτουν οι τιμές παραμέτρων του συστήματος.

Σημείωση: Το σχήμα έχει εισαχθεί από τους Nalbantis and Koutsoyiannis (1997) για την αντιμετώπιση συστημάτων ταμιευτήρων απλού σκοπού, ενώ έχει γενικευτεί και εφαρμοστεί σε συστήματα πολλαπλού σκοπού (π.χ. Κουτσογιάννης, 1996· Καραβοκυρός κ.ά., 1999· Ευστρατιάδης και Ζερβός, 1999).

Εφαρμογή σε συστήματα ταμιευτήρων απλού σκοπού

- **Κανόνας εκκίνησης**: Χωρικός κανόνας
- **Γενίκευση - Παραμετροποίηση**

$$S_i^* = a_i + b_i V$$

όπου S_i^* το απόθεμα-στόχος στον ταμιευτήρα i, V το συνολικό απόθεμα σε όλους τους ταμιευτήρες και a_i και b_i παράμετροι προς προσδιορισμό.

Οι παράμετροι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\Sigma_i a_i = 0, \quad \Sigma_i b_i = 1$$

Κατά συνέπεια ο αριθμός των προς προσδιορισμό παραμέτρων είναι μόνο 2 (k – 1) όπου k ο αριθμός των ταμιευτήρων. (Μάλιστα, όπως έχει εμπειρικά δειχτεί, μπορεί να τεθεί χωρίς ουσιώδες σφάλμα $a_i = 0$, οπότε ο αριθμός των προς προσδιορισμό παραμέτρων μειώνεται σε $k – 1$).

- **Δείκτης επίδοσης**: Επίπεδο αξιοπιστίας (μέτρο αξιοπιστίας σε ετήσια βάση ή βάση χρονικού βήματος ή ογκομετρική βάση ή – προτιμότερο – συνδυασμός των διαφορετικών μέτρων αξιοπιστίας).
- **Σημείωση**: Ο παραπάνω κανόνας στη γραμμική του μορφή παραβιάζει τους προφανείς περιορισμούς

$$0 \le S_i^* \le K_i$$

όπου K_i η χωρητικότητα του ταμιευτήρα i. Οι Nalbantis and Koutsoyiannis (1997) έχουν προτείνει διόρθωση της γραμμικής εξίσωσης, οπότε η τελική μορφή του κανόνα λειτουργίας είναι μη γραμμική.

Βασική βιβλιογραφία

- Loucks, D. P., Stedinger, J. R., and Haith, D. A., *Water Resource System Planning and Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1981.
- Mays, L. W., and Y.-K. Tung, *Hydrosystems Engineering and Management* McGraw-Hill, New York, 1992.
- Mays, L. W., and Y.-K. Tung, Systems analysis, in *Water Resources Handbook*, edited by L. W. Mays, McGraw-Hill, New York, 1996.
- Marlow, W. H., *Mathematics for Operations Research*, Dover Publications, New York, 1993.
- Nalbantis, I., and D. Koutsoyiannis, A parametric rule for planning and management of multiple reservoir systems, *Water Resources Research*, 33(9), 2165-2177, 1997.
- Pierre, D. P., *Optimization Theory With Applications*, Dover, New York, 1986.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- Searle, S. R., *Matrix Algebra Useful for Statistics*, Wiley, 1982.
- Winston, W, L., *Operations Research, Applications and Algorithms*, 3rd ed., Duxbury, Belmont, 1994.
- Winston, W, L., and S. C. Albright, *Practical Management Science, Spreadsheet modeling and Applications,* Duxbury, Belmont, 1997.

Αναφορές

- Lasdon, L.S., A. Waren, A. Jain and M. Ratner, Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming, *ACM Transactions on Mathematical Software,* 4(1), 34-50, 1978.
- Lasdon, L.S. and S. Smith, Solving Sparse Nonlinear Programs Using GRG, *ORSA Journal on Computing*, 4(1), 2-15, 1992.
- Liebman, J. S., L. S. Lasdon, L. Schrage and A. Waren, *Modeling and Optimization with GINO*, The Scientific Press, Palo Alto, 1986.
- Κουτσογιάννης, Δ., Μελέτη λειτουργίας ταμιευτήρων, *Γενική διάταξη έργων εκτροπής Αχελώου προς Θεσσαλία*, Εργοδότης: Μελετητής: ΕΥΔΕ Αχελώου, Σύμβουλοι: Γ. Καλαούζης, ELECTROWATT, Π. Μαρίνος, Δ. Κουτσογιάννης, Υπουργείο Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημόσιων Έργων, 420 σσ., Αθήνα, 1996.
- Καραβοκυρός, Γ., Δ. Κουτσογιάννης, Ν. Μανδέλλος, Ανάπτυξη μοντέλου προσομοίωσης και βελτιστοποίησης του υδροσυστήματος της ανατολικής στερεάς Ελλάδας, *Εκτίμηση και διαχείριση των υδατικών πόρων της Στερεάς Ελλάδας – Φάση Γ*, Τεύχος 40, ΕΜΠ, Τομέας ΥΠΥΘΕ, 164 σσ., Αθήνα, 1999.
- Ευστρατιάδης, Α. και Ν. Ζερβός, *Βελτιστη διαχείριση συστημάτων ταμιευτήρων – Εφαρμογή στο σύστημα Αχελώου-Θεσσαλίας*, Διπλωματική εργασία, ΕΜΠ, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Αθήνα, 1999.

Θέσεις διαδικτύου

- http://commerce.ubc.ca/MBAcore/tutorials/MSExcelSolver/solver1.html (University of British Columbia's MBA program online tutorial)
- http://frontsys.com (Frontline Systems – Optimization using EXCEL Solver)
- http://www.lindo.com (Lindo Systems – Premier Optimization Modeling Tools)
- http://www.nr.com (Numerical Recipes)