Υδρολογική αβεβαιότητα στα συστήματα υδατικών πόρων – Προσομοίωση

Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

1. Εισαγωγή στην προσομοίωση

Γενικές έννοιες

- **Προσομοίωση** (simulation): τεχνική μίμησης ενός πραγματικού συστήματος, όπως αυτό εξελίσσεται στο χρόνο (Winston, 1994, σ. 23).
- **Μοντέλο προσομοίωσης** (simulation model): ένα σύνολο υποθέσεων για τη λειτουργία του συστήματος, εκφρασμένων υπό μορφή μαθηματικών ή λογικών σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων του συστήματος (και συνήθως κωδικοποιημένων σε πρόγραμμα υπολογιστή).
- **Διάκριση μοντέλων προσομοίωσης**:
  - στοχαστικά (αλλιώς: Monte Carlo· περιλαμβάνουν τυχαίους αριθμούς) ή ντετερμινιστικά
  - διακριτά (οι μεταβλητές κατάστασης αλλάζουν τιμή σε διακριτές χρονικές στιγμές) ή συνεχή
- **Σκοπός της προσομοίωσης**: μελέτη της συμπεριφοράς ενός συστήματος (με «δειγματοληπτική» τεχνική), όταν η εφαρμογή αναλυτικών μεθόδων είναι ανέφικτη ή ιδιαίτερα δυσχερής.
- **Πλεονεκτήματα της προσομοίωσης**:
  - Ευκολία, αμεσότητα, ευελιξία
  - Ακρίβεια στην περιγραφή του συστήματος (χωρίς απλοποιητικές υποθέσεις)
- **Μειονεκτήματα της προσομοίωσης**:
  - Αργή υπολογιστική διαδικασία
  - Προσεγγιστικά αποτελέσματα, εξαρτώμενα και από το μέγεθος της δειγματοληψίας

Ιστορικό της προσομοίωσης στα συστήματα υδατικών πόρων

- **Προϊστορία**: ο Hazen το 1914 χρησιμοποίησε για πρώτη φορά συνθετικές σειρές στην υδρολογία σε μελέτες αξιοπιστίας υδατικών πόρων (εμπειρική μέθοδος· βλ. Grygier & Stedinger, 1990).
- **Επιστημονική θεμελίωση**: τη δεκαετία του 1940, εισάγεται από μαθηματικούς και φυσικούς (Ulam, von Neumann, Fermi, Metropolis) η μέθοδος Monte-Carlo για τη μελέτη φαινομένων πυρηνικής φυσικής (Metropolis, 1989, Eckhardt, 1989), η οποία απετέλεσε τη βάση και για την ανάπτυξη της υδρολογικής προσομοίωσης.
- **Ανάπτυξη και διάδοση στην επιστήμες υδατικών πόρων** (βλ. Grygier and Stedinger, 1990):
  - 1954, Barnes: γέννηση ασυσχέτιστων ετήσιων δεδομένων με κανονική κατανομή σε μία θέση.
  - 1962, Maass κ.ά., Thomas & Fiering: γέννηση χρονικά συσχετισμένων δεδομένων με μη κανονικές κατανομές.
  - 1965, Beard, 1967, Matalas: γέννηση παράλληλων χρονοσειρών σε διάφορες θέσεις.
  - 1970, Box & Jenkins: κυκλοφορία του κλασικού βιβλίου *Time Series Analysis* που πραγματεύεται την ανάλυση και σύνθεση των χρονοσειρών, την ταξινόμηση των στοχαστικών μοντέλων και τις εφαρμογές τους στην προσομοίωση και την πρόγνωση.
  - 1976, Matalas &Wallis: κωδικοποίηση των διάφορων μοντέλων πολυμεταβλητής στοχαστικής προσομοίωσης υδρολογικών διεργασιών (στο κλασικό βιβλίο του Biswas *Systems Approach to Water Management*).
  - 1985, Bras & Rodriguez-Iturbe: κυκλοφορία του κλασικού βιβλίου *Random functions and hydrology*, που εμβάθυνε στη χρήση της στοχαστικής υδρολογίας.

Τύποι προσομοίωσης - Ακρίβεια αποτελεσμάτων

- Τύποι προσομοίωσης (Winston, 1994, σ. 1220):
  - *Καταληκτική προσομοίωση* (terminating simulation): πραγματοποιείται ένας αριθμός n επαναλήψεων της προσομοίωσης με τις ίδιες αρχικές συνθήκες (και ίδιες συνθήκες μεταβολής παραμέτρων, εφόσον το σύστημα χαρακτηρίζεται από μη στασιμότητα) και με την ίδια συνθήκη τερματισμού (π.χ. για δεδομένο χρόνο).
  - *Προσομοίωση μόνιμης κατάστασης* (steady state simulation): πραγματοποιείται μία προσομοίωση μεγάλου (θεωρητικά άπειρου) χρονικού μήκους (εφόσον το σύστημα χαρακτηρίζεται από στασιμότητα).
- Ακρίβεια αποτελεσμάτων
  - Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης διέπεται από τους νόμους της στατιστικής.
  - Μια παράμετρος της επίδοσης του συστήματος θ που εκτιμάται από τα εξαγόμενα n προσομοιώσεων του συστήματος (θεωρώντας ότι $\theta = E[X]$, οπότε η θ εκτιμάται ως ο μέσος όρος των προσομοιωμένων τιμών x_i), έχει διάστημα εμπιστοσύνης μήκους

    $$2\, z_{(1+\gamma)/2}\, s_X / n^{0.5}$$

    όπου γ ο συντελεστής εμπιστοσύνης, $z_{(1+\gamma)/2}$ το $[(1+\gamma)/2]$ ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής και s_X η δειγματική τυπική απόκλιση. Αν το διάστημα αυτό είναι επιθυμητό να είναι το πολύ $2\, c\, \theta$, όπου c δεδομένο κλάσμα, και ο συντελεστής μεταβλητότητας της X είναι c_v, τότε ο απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων είναι

    $$n = (z_{(1+\gamma)/2}\, c_v / c)^2$$

    Για παράδειγμα, για $\gamma = 95\%$ ($z_{(1+\gamma)/2} = 1.96$), $c = 1\%$ και $c_v = 0.25$, προκύπτει $n = 2400$.

2. Τυχαίοι αριθμοί

Εισαγωγικές έννοιες

- Μια ακολουθία αριθμών x_i λέγεται *ακολουθία τυχαίων αριθμών δεδομένης κατανομής* $F(x)$ αν αποτελεί δείγμα της τυχαίας μεταβλητής X, η οποία έχει συνάρτηση κατανομής $F(x)$ (Papoulis, 1990).
- Η διαδικασία γέννησης τυχαίων αριθμών είναι γνωστή και ως *δειγματοληψία Monte Carlo*.
- Για κάθε συνάρτηση κατανομής μπορεί να κατασκευαστεί μία *γεννήτρια τυχαίων αριθμών* (ή και περισσότερες).
- Η γεννήτρια είναι ένας αλγόριθμος, συνήθως αναδρομικός, ο οποίος μπορεί να παράγει διαδοχικά οσουσδήποτε όρους της τυχαίας ακολουθίας. (Στην πράξη υπάρχει ένα αρκετά μεγάλο, αλλά πάντως πεπερασμένο, όριο τυχαίων αριθμών που μπορεί να δώσει η ακολουθία· πάνω από αυτό το όριο γίνεται επανάληψη των ίδιων αριθμών, δηλαδή η ακολουθία γίνεται περιοδική.)
- Οι τυχαίοι αριθμοί δεν γεννώνται στην τύχη, αλλά βάσει ενός αυστηρά προσδιοριστικού αλγορίθμου, ο οποίος οδηγεί στην ίδια ακολουθία αριθμών, αν ξεκινήσει με τις ίδιες αρχικές συνθήκες. (Για το λόγο αυτό τους τυχαίους αριθμούς μερικοί τους ονομάζουν *ψευδοτυχαίους*.) Αν αλλάξουμε τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε άλλη τυχαία ακολουθία (ακριβέστερα άλλο τμήμα της ίδιας περιοδικής ακολουθίας).

Γέννηση ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών με δεδομένη συνάρτηση κατανομής (1)

- Ομοιόμορφη κατανομή
  - Γεννώνται οι ακέραιοι αριθμοί q_i από τον αναδρομικό τύπο

    $$q_i = (k\, q_{i-1} + c) \bmod m$$

    όπου k, c και m κατάλληλες ακέραιες σταθερές (π.χ. k = 16 807, c = 0, $m = 2^{31} - 1$ = 2 147 483 647), οι οποίοι αποτελούν τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφα κατανεμημένους στο διάστημα $[1, m - 1]$.
  - Υπολογίζονται οι αριθμοί

    $$u_i = q_i \,/\, m$$

    που αποτελούν πρακτικά ακολουθία τυχαίων αριθμών συνεχούς τύπου στο διάστημα (0, 1).
- Κανονική κατανομή
  - Απλή μέθοδος: Λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος, το άθροισμα πολλών ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών (πρακτικά τουλάχιστον 12) είναι τυχαίοι αριθμοί με κανονική κατανομή.
  - Ακριβέστερη μέθοδος: Αν οι αριθμοί u_i και v_i είναι διαδοχικοί ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα (0, 1), τότε οι αριθμοί

    $$w_i = (-2 \ln v_i)^{0.5} \cos \pi(2 - u_i), \;\; z_i = (-2 \ln v_i)^{0.5} \sin \pi(2 - u_i)$$

    αποτελούν διαδοχικούς όρους ακολουθίας τυχαίων αριθμών με κανονική κατανομή $N(0, 1)$.

Γέννηση ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών με δεδομένη συνάρτηση κατανομής (2)

- Κατανομή γάμα
  - Για παράμετρο σχήματος $\kappa > 0$, όπου $\kappa = k + \tau$ με $k = [\kappa]$ και $0 < \tau < 1$, υπολογίζεται η ακολουθία τυχαίων αριθμών w_i με τον ακόλουθο τρόπο:
    - Γεννώνται οι τυχαίοι αριθμοί v_i και r_i με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0, 1)
    - Υπολογίζονται οι αριθμοί $a_i = v_i^{1/\kappa}$, $b_i = r_i^{1/(1-\kappa)}$
    - Ελέγχεται αν $a_i + b_i \le 1$. Σε περίπτωση που αυτό δεν συμβαίνει επαναλαμβάνονται τα προηγούμενα βήματα μέχρι να επιτευχθεί.
    - Υπολογίζεται ο αριθμός w_i από τον ακόλουθο τύπο

$$w_i = -[a_i / (a_i + b_i)] \ln u_i - \sum_{j=1}^{k} \ln u_j$$

- Τυχούσα κατανομή
  - Αν $F^{-1}(\ )$ η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής $F(x)$, και u_i διαδοχικοί ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα (0, 1), τότε οι αριθμοί

$$w_i = F^{-1}(u_i)$$

    αποτελούν διαδοχικούς όρους ακολουθίας τυχαίων αριθμών με συνάρτηση κατανομή $F(x)$.
  - Η παραπάνω παρατήρηση βρίσκει εφαρμογή εφόσον μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά η $F^{-1}(\ )$ (π.χ. κατανομές εκθετική, Gumbel, ΓΑΤ).
  - Η θεωρία πιθανοτήτων περιλαμβάνει και άλλες γενικές μεθοδολογίες που βρίσκουν εφαρμογή σε περιπτώσεις άλλων κατανομών.

3. Μονομεταβλητά στοχαστικά μοντέλα

Τυπικές κατηγορίες

- Στάσιμα (stationary) μοντέλα (Box and Jenkins,1970):
  - Μοντέλα τύπου αυτοπαλινδρόμησης (autoregressive – AR)

    $$X_i = a_1 X_{i-1} + a_2 X_{i-2} + \ldots + a_n X_{i-n} + b V_i$$

    όπου X_i η προς γέννηση στοχαστική ανέλιξη (= ποσοτική έκφραση μιας μεταβλητής, π.χ. απορροής, στη διακριτή τιμή του χρόνου i), V_i βοηθητική τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη από όλες τις προηγούμενες V_{i-1}, V_{i-2}, …, καθώς και από τις X_{i-1}, X_{i-2}, …, με δεδομένη σταθερή (ανεξάρτητη του i) συνάρτηση κατανομής, και a_1, a_2, …, a_n και b παράμετροι με σταθερές τιμές (ανεξάρτητες του i).
  - Μοντέλα τύπου κινητού μέσου (moving average – MA)

    $$X_i = b_0 V_i + b_1 V_{i-1} + b_2 V_{i-2} + \ldots + b_m V_{i-m}$$
  - Μοντέλα τύπου αυτοπαλινδρόμησης-κινητού μέσου (autoregressive-moving average – ARMA)

    $$X_i = a_1 X_{i-1} + a_2 X_{i-2} + \ldots + a_n X_{i-n} + b_0 V_i + b_1 V_{i-1} + b_2 V_{i-2} + \ldots + b_m V_{i-m}$$
- Περιοδικά ή εποχιακά (periodic or seasonal) μοντέλα
  - Όπως τα στάσιμα, αλλά με παραμέτρους και συναρτήσεις κατανομής των V_i που μεταβάλλονται περιοδικά. Για παράδειγμα το μηνιαίο μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης για τάξη n = 1 γίνεται

    $$X_i = a_i X_{i-1} + b_i V_i$$

    όπου οι παράμετροι a_i και b_i παίρνουν διαφορετικές τιμές για κάθε μήνα (12 διαφορετικά σύνολα τιμών), ενώ το ίδιο συμβαίνει για τις παραμέτρους της συνάρτησης κατανομής της V_i.

4. Απλά πολυμεταβλητά στοχαστικά μοντέλα

Βασικές εξισώσεις

- **Μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης τάξης 1 (AR(1))**

$$\mathbf{X}^t = \mathbf{a}\,\mathbf{X}^{t-1} + \mathbf{b}\,\mathbf{V}^t$$

όπου t δείκτης που συμβολίζει χρονική θέση (περίοδο, π.χ. έτος), $\mathbf{X}^t$ διάνυσμα n προς γέννηση στοχαστικών μεταβλητών της περιόδου t, εξαρτημένων μεταξύ τους και με τις αντίστοιχες μεταβλητές προηγούμενων περιόδων, $\mathbf{V}^t$ διάνυσμα n βοηθητικών τυχαίων μεταβλητών της περιόδου t, ανεξάρτητων μεταξύ τους και από τις μεταβλητές $\mathbf{X}$ και $\mathbf{V}$ προηγούμενων περιόδων, και $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ μητρώα παραμέτρων, ήτοι

$$\mathbf{X}^t = \begin{bmatrix} X_1^t \\ X_2^t \\ \vdots \\ X_n^t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^t = \begin{bmatrix} V_1^t \\ V_2^t \\ \vdots \\ V_n^t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Περιοδικό μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης τάξης 1 (PAR(1))**

$$\mathbf{X}^s = \mathbf{a}^s\,\mathbf{X}^{s-1} + \mathbf{b}^s\,\mathbf{V}^s$$

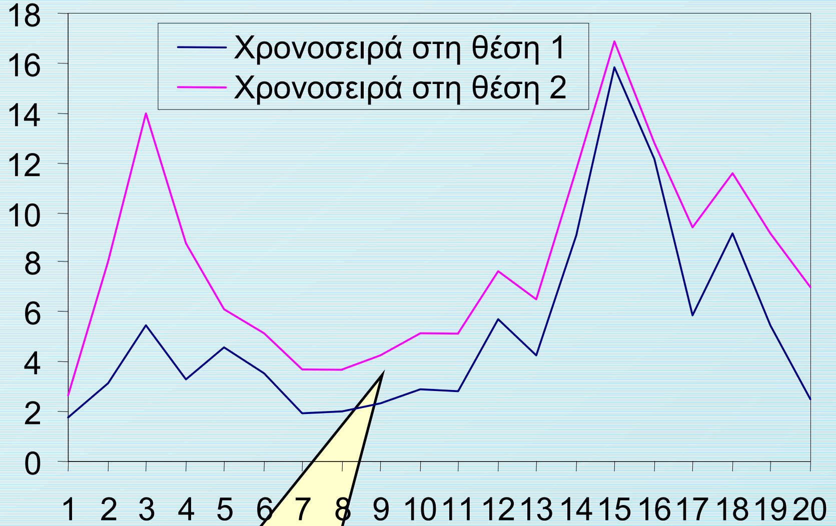
όπου s δείκτης που συμβολίζει χρονική θέση (υποπερίοδο, π.χ. μήνα), και τα υπόλοιπα μεγέθη έχουν την ίδια σημασία όπως παραπάνω, με τη διαφορά ότι τα μητρώα παραμέτρων εξαρτώνται με περιοδικό τρόπο από την υποπερίοδο s:

$$\mathbf{X}^s = \begin{bmatrix} X_1^s \\ X_2^s \\ \vdots \\ X_n^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^s = \begin{bmatrix} V_1^s \\ V_2^s \\ \vdots \\ V_n^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11}^s & a_{12}^s & \cdots & a_{1n}^s \\ a_{21}^s & a_{22}^s & \cdots & a_{2n}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^s & a_{n2}^s & \cdots & a_{nn}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11}^s & b_{12}^s & \cdots & b_{1n}^s \\ b_{21}^s & b_{22}^s & \cdots & b_{2n}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^s & b_{n2}^s & \cdots & b_{nn}^s \end{bmatrix}$$

Στατιστικές παράμετροι που διατηρούνται

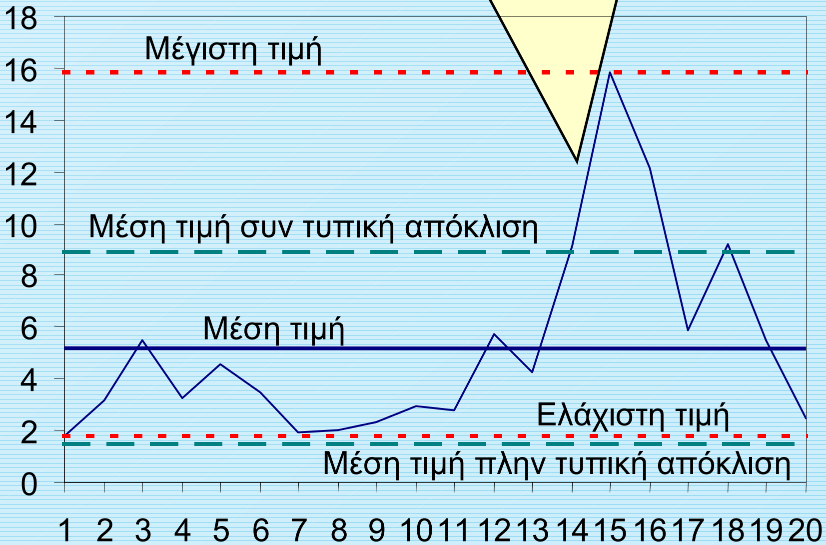
- Στα μοντέλα AR(1) και PAR(1) διατηρείται (αναπαράγεται) το ελάχιστο σύνολο ουσιωδών στατιστικών παραμέτρων (φειδωλή χρήση παραμέτρων – parsimony of parameters) που περιλαμβάνει τις ακόλουθες κατηγορίες:
  - *Παράμετροι των περιθώριων συναρτήσεων κατανομής κάθε μεταβλητής*
    - (1) Μέσες τιμές των μεταβλητών.
    - (2) Διασπορές των μεταβλητών.
    - (3) Συντελεστές ασυμμετρίας των μεταβλητών (και, κατά συνέπεια, τρίτες ροπές).
  - *Παράμετροι των από κοινού συναρτήσεων κατανομής των μεταβλητών*
    - (4) Συντελεστές ετεροσυσχέτισης με μηδενικό χρονικό βήμα μεταξύ μεταβλητών διαφορετικής θέσης.
    - (5) Για το μοντέλο με διαγώνιο μητρώο **a**: Συντελεστές αυτοσυσχέτισης με μοναδιαίο χρονικό βήμα μεταξύ μεταβλητών της ίδιας θέσης.
    - (5α) Για το μοντέλο με πλήρες μητρώο **a**: Συντελεστές αυτοσυσχέτισης με μοναδιαίο χρονικό βήμα μεταξύ καθεμιάς μεταβλητής και όλων των άλλων μεταβλητών.

Γραφική επεξήγηση των ουσιωδών στατιστικών χαρακτηριστικών (α) Περιθώρια χαρακτηριστικά



Οι δύο χρονοσειρές προέρχονται από στάσιμες ανελίξεις (σε δύο θέσεις)

Η ύπαρξη αρκετών πολύ ψηλών τιμών, πάνω από το επίπεδο της μέσης τιμής συν την τυπική απόκλιση, και η απουσία πολύ χαμηλών τιμών, κάτω από το επίπεδο της μέσης τιμής πλην την τυπική απόκλιση, είναι ενδεικτική της **θετικής ασυμμετρίας**

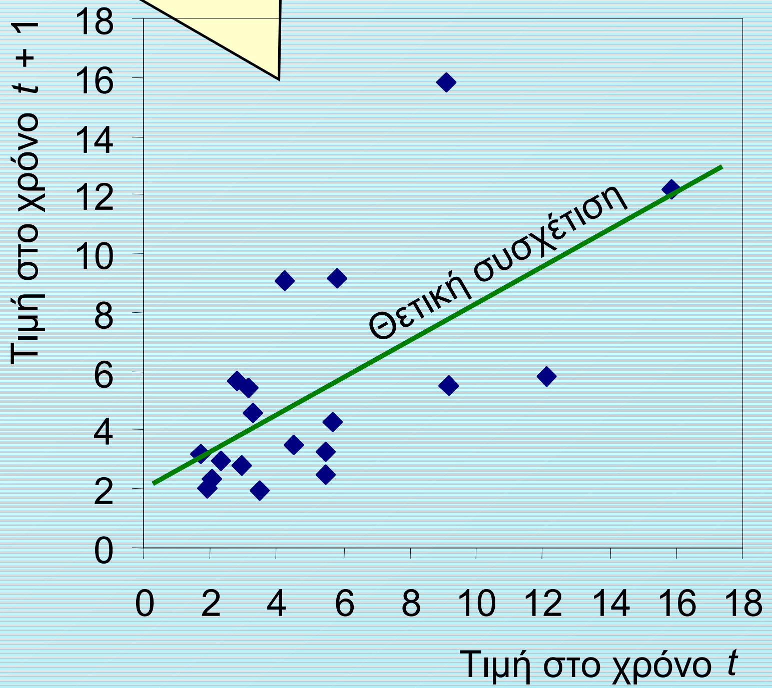


Επεξήγηση των περιθώριων στατιστικών χαρακτηριστικών στη θέση 1

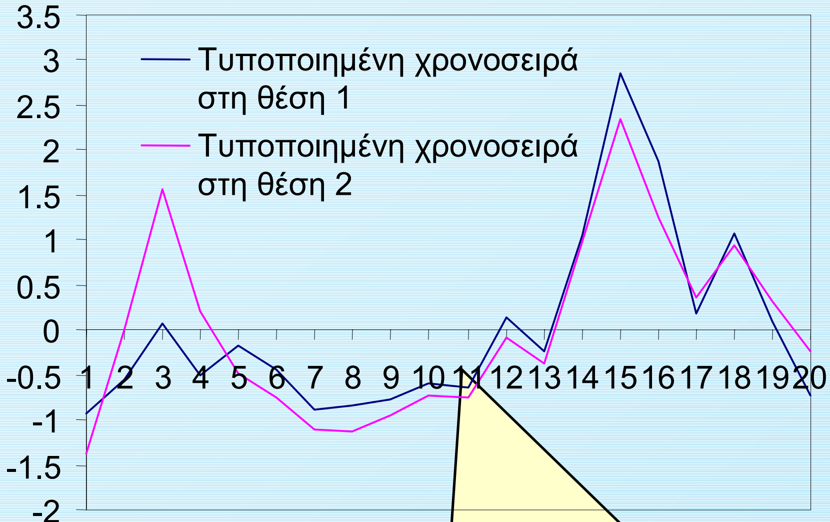
Γραφική επεξήγηση των ουσιωδών στατιστικών χαρακτηριστικών (β) Συντελεστές αυτοσυσχέτισης

Το γεγονός ότι, αν η χρονοσειρά μετακινηθεί 1 χρονικό βήμα προς τα δεξιά, το γράφημά της παραμένει κοντά στο αρχικό, είναι ενδεικτικό μιας σημαντικής τιμής του συντελεστή αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1

Αυτό φαίνεται καλύτερα αν απεικονιστούν οι τιμές της μετακινημένης χρονοσειράς συναρτήσει αυτών της αρχικής

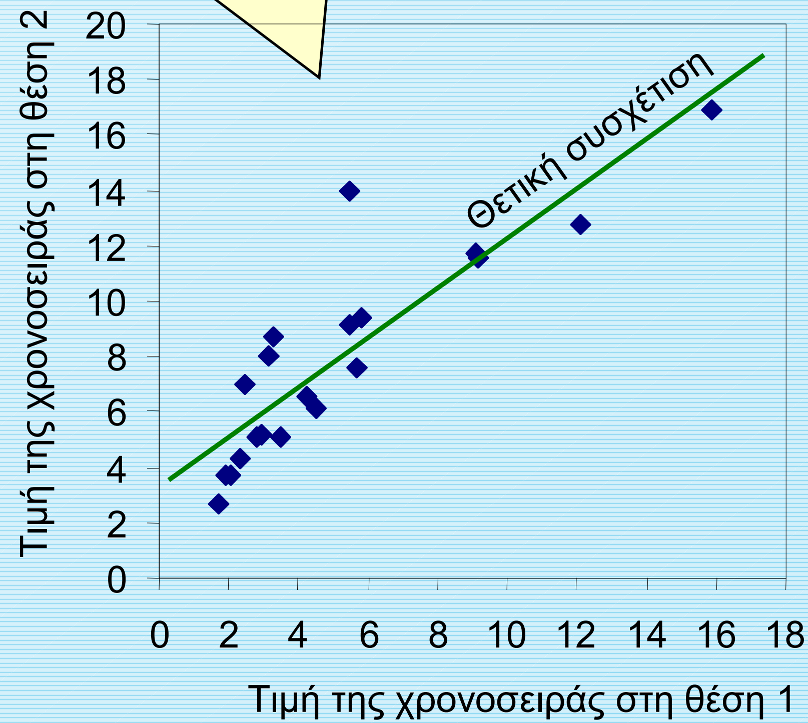


Γραφική επεξήγηση των ουσιωδών στατιστικών χαρακτηριστικών (γ) Συντελεστές ετεροσυσχέτισης



Το γεγονός ότι τα γραφήματα των δύο χρονοσειρών είναι κοντινά (εφόσον τυποποιηθούν με αφαίρεση της μέσης τιμής και μετά με διαίρεση με την τυπική απόκλιση) είναι ενδεικτικό ενός σημαντικού συντελεστή ετεροσυσχέτισης για μηδενική υστέρηση

Αυτό φαίνεται καλύτερα αν απεικονιστούν οι τιμές της μίας χρονοσειράς συναρτήσει αυτών της άλλης



Εκτίμηση παραμέτρων του μοντέλου PAR(1)
(α) Μητρώα παραμέτρων

- Πλήρες μητρώο παραμέτρων **a**

$$\mathbf{a}^s = \mathrm{Cov}[\mathbf{X}^s, \mathbf{X}^{s-1}]\ \{\mathrm{Cov}[\mathbf{X}^{s-1}, \mathbf{X}^{s-1}]\}^{-1}$$

όπου με Cov[**Ξ**, **Ψ**] συμβολίζεται το μητρώο συνδιασπορών μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διανυσμάτων τυχαίων μεταβλητών **Ξ** και **Ψ**, ήτοι

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{\Xi}, \mathbf{\Psi}] := E\{(\mathbf{\Xi} - E[\mathbf{\Xi}])\ (\mathbf{\Psi}^T - E[\mathbf{\Psi}]^T)\} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}[\Xi_1, \Psi_1] & \mathrm{Cov}[\Xi_1, \Psi_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[\Xi_1, \Psi_n] \\ \mathrm{Cov}[\Xi_2, \Psi_1] & \mathrm{Cov}[\Xi_2, \Psi_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[\Xi_2, \Psi_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[\Xi_n, \Psi_1] & \mathrm{Cov}[\Xi_n, \Psi_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[\Xi_n, \Psi_n] \end{bmatrix}$$

ενώ με $E[\ ]$ συμβολίζεται η αναμενόμενη τιμή.

- Διαγώνιο μητρώο παραμέτρων **a** (εναλλακτική απλουστευμένη περίπτωση)

$$\mathbf{a} = \mathrm{diag}\left(\mathrm{Cov}[X_1^s, X_1^{s-1}] / \mathrm{Var}[X_1^{s-1}], \ldots, \mathrm{Cov}[X_n^s, X_n^{s-1}] / \mathrm{Var}[X_n^{s-1}]\right)$$

- Μητρώο παραμέτρων **b**

$$\mathbf{b}\,\mathbf{b}^T = \mathrm{Cov}[\mathbf{X}^t, \mathbf{X}^t] - \mathbf{a}\ \mathrm{Cov}[\mathbf{X}^{t-1}, \mathbf{X}^{t-1}]\ \mathbf{a}^T$$

Ο προσδιορισμός του μητρώου **b** από το γνωστό από την πιο πάνω εξίσωση μητρώο $\mathbf{c} = \mathbf{b}\,\mathbf{b}^T$:

- είναι γνωστός ως εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας του **c**·
- αποτελεί αδύνατο πρόβλημα (καμία λύση) όταν το **c** δεν είναι θετικά ορισμένο·
- αποτελεί αόριστο πρόβλημα (άπειρες λύσεις) εφόσον το **c** είναι θετικά ορισμένο· υπάρχουν δύο διαδεδομένοι αλγόριθμοι για τον προσδιορισμό δύο λύσεων (α. αποσύνθεση σε τριγωνικό μητρώο με τον αλγόριθμο Cholesky, και β. αποσύνθεση σε πλήρες μητρώο με χρήση των ιδιοδιανυσμάτων του **c**), καθώς και ένας γενικευμένος αλγόριθμος προσδιορισμού μιας βέλτιστης λύσης (Koutsoyiannis, 1999).

Εκτίμηση παραμέτρων του μοντέλου PAR(1)
(β) Ροπές των βοηθητικών μεταβλητών

- Μέσες τιμές:

$$E[\mathbf{V}] = \mathbf{b}^{-1} \{E[\mathbf{X}^t] - \mathbf{a}\, E[\mathbf{X}^{t-1}]\}$$

- Διασπορές (εξ ορισμού 1):

$$\mathrm{Var}[\mathbf{V}] = [1, \ldots, 1]^T$$

- Τρίτες ροπές:

$$\mu_3[\mathbf{V}] = \left(\mathbf{b}^{(3)}\right)^{-1} \{\mu_3[\mathbf{X}^t] - \mu_3[\mathbf{a}\, \mathbf{X}^{t-1}]\}$$

όπου με $\mu_3[\boldsymbol{\Xi}]$ συμβολίζεται το διάνυσμα των τρίτων κεντρικών ροπών οποιουδήποτε διανύσματος τυχαίων μεταβλητών $\boldsymbol{\Xi}$, ήτοι $\mu_3[\boldsymbol{\Xi}] := E\{(\boldsymbol{\Xi} - E[\boldsymbol{\Xi}])^3\}$, και με $\mathbf{b}^{(3)}$ συμβολίζεται το μητρώο, τα στοιχεία του οποίου είναι οι κύβοι των στοιχείων του $\mathbf{b}$.

Εναλλακτικά, για διαγώνιο μητρώο $\mathbf{a}$

$$\mu_3[\mathbf{V}] = \left(\mathbf{b}^{(3)}\right)^{-1} \{\mu_3[\mathbf{X}^t] - \mathbf{a}^{(3)}\, \mu_3[\mathbf{X}^{t-1}]\}$$

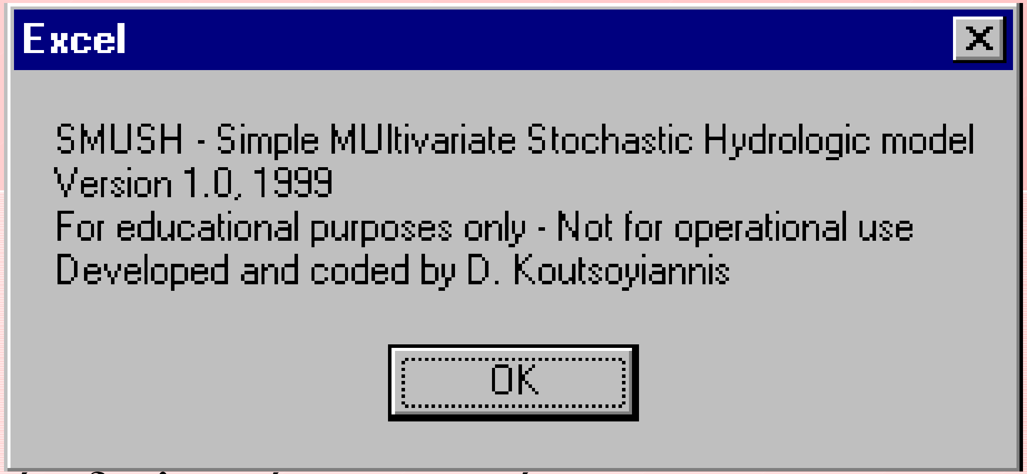
Σημείωση 1: Τα παραπάνω καλύπτονται βιβλιογραφικά από τους Matalas and Wallis (1976, σ. 63)· Salas et al. (1988, σ. 381)· Salas (1993, σ. 19.31)· Koutsoyiannis and Manetas (1996)· Koutsoyiannis (1999).

Σημείωση 2: Για το στάσιμο μοντέλο AR(1) εφαρμόζονται κατ' αναλογία οι ίδιες εξισώσεις μια μόνο φορά, δεδομένου ότι οι παράμετροι παραμένουν σταθερές.

5. Όρια της προσομοίωσης

- Τα προσομοιωμένα (συνθετικά) δείγματα υδρολογικών μεταβλητών σε καμία περίπτωση δεν υποκαθιστούν τα ιστορικά δείγματα υδρολογικών μετρήσεων.
- Η επιλογή ενός συγκεκριμένου στοχαστικού μοντέλου και η εκτίμηση των παραμέτρων του βασίζεται πάντα στο διαθέσιμο ιστορικό δείγμα, το οποίο αποτελεί τη μόνη πρωτογενή πηγή πληροφορίας.
- Η γέννηση συνθετικών χρονοσειρών (με συνηθισμένο μήκος πολλαπλάσιο του μήκους του διαθέσιμου ιστορικού δείγματος) δεν προσθέτει ουσιαστική πληροφορία, ούτε επαυξάνει τη διάρκεια του συγκεκριμένου ιστορικού δείγματος.
- Η προσομοίωση δεν έχει νόημα για απλά προβλήματα στα οποία είναι δυνατή η αναλυτική λύση. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα της εκτίμησης της πλημμύρας εκατονταετίας σε συγκεκριμένη θέση ποταμού, για την οποία υπάρχει δείγμα π.χ. 30 ετών, η χρησιμοποίηση συνθετικών χρονοσειρών δεν εξυπηρετεί σε τίποτε. (Η εκτίμηση με συνθετικές χρονοσειρές θα είναι ίδια με την άμεση εκτίμηση, την οποία δίνει η συνάρτηση κατανομής που έχει υιοθετηθεί για τη συγκεκριμένη μεταβλητή.)
- Η χρήση συνθετικών χρονοσειρών αποκτά νόημα όταν εξετάζονται αλληλοεξαρτώμενα μεγέθη που συνδυάζονται σε ένα αρκετά πολύπλοκο σύστημα, των οποίων η συνάρτηση κατανομής δεν μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά. Κλασικό παράδειγμα είναι η περίπτωση συστήματος ταμιευτήρων (ή ακόμη και ενός μεμονωμένου ταμιευτήρα), όπου ενδιαφέρει η στατιστική κατανομή των απολήψεων, οι οποίες εξαρτώνται με πολύπλοκο τρόπο από τις εισροές, τις καταναλώσεις, τους κανόνες λειτουργίας κοκ.

6. Το μοντέλο SMUSH
Γενικά χαρακτηριστικά



- Το μοντέλο **SMUSH** (*Απλό Πολυμεταβλητό Στοχαστικό Υδρολογικό* μοντέλο – *Simple MUltivariate Stochastic Hydrologic* model) γεννά συνθετικές υδρολογικές χρονοσειρές.
- Έχει τη δυνατότητα γέννησης μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών **μεγέθους 2000 ετών** (24 000 μηνών) το πολύ για **5 θέσεις** το πολύ.
- Βασίζεται στο μοντέλο PAR(1) αλλά με μερικές απλοποιήσεις για τον περιορισμό του αριθμού των παραμέτρων.
- Ειδικότερα, έχει γίνει η παραδοχή σταθερών σε όλους τους μήνες τιμών των συντελεστών μεταβλητότητας, ασυμμετρίας, αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης
- Λόγω των απλοποιητικών παραδοχών είναι κατάλληλο μόνο για εκπαιδευτικούς σκοπούς – όχι για επιχειρησιακή χρήση.
- Έχει κωδικοποιηθεί σε γλώσσα PASCAL και δίνεται σε μορφή βιβλιοθήκης δυναμικής σύνδεσης (SmushLib.dll) ώστε να μπορεί να κληθεί από οποιοδήποτε άλλο πρόγραμμα (π.χ. EXCEL).
- Συνοδεύεται από αρχείο EXCEL (SmushTest.xls) με πρόσθετο κώδικα σε γλώσσα Visual Basic για την κλήση των υπολογιστικών διαδικασιών και ολοκληρωμένα παραδείγματα για τη χρήση τους.

Είσοδοι του μοντέλου

- Κύριες υπολογιστικές διαδικασίες
  - ModelParametersE: Υπολογίζει τις παραμέτρους του μοντέλου.
  - GenerateE: Γεννά τις συνθετικές χρονοσειρές.
- Γενικές είσοδοι
  - Αριθμός θέσεων (n): ακέραιος, από 1 έως 5.
  - Μέσες τιμές των 12 n μηνιαίων μεταβλητών του προβλήματος.
  - Συντελεστής μεταβλητότητας (τυπική απόκλιση / μέση τιμή), ένας για κάθε θέση.
  - Συντελεστής ασυμμετρίας, ένας για κάθε θέση.
  - Συντελεστής αυτοσυσχέτισης τάξης 1, ένας για κάθε θέση.
  - Συντελεστές ετεροσυσχέτισης τάξης 0, ένας για κάθε συνδυασμό δύο θέσεων.
- Ειδικά για τη διαδικασία GenerateE
  - «Σπόρος» (seed) τυχαίων αριθμών.
  - Επιθυμητός αριθμός ετών συνθετικών χρονοσειρών.

Έξοδοι του μοντέλου

- Διαδικασία ModelParametersE
  - Μητρώα παραμέτρων **a.**
  - Μητρώα παραμέτρων **b**.
  - Διανύσματα μέσων τιμών βοηθητικών μεταβλητών $E[\mathbf{V}]$ (ένα ανά μήνα).
  - Διανύσματα τρίτων κεντρικών ροπών (= συντελεστών ασυμμετρίας) βοηθητικών μεταβλητών $\mu_3[\mathbf{V}]$ (ένα ανά μήνα).
- Διαδικασία GenerateE
  - Γεννά τις συνθετικές χρονοσειρές για το σύνολο των θέσεων, ετών και μηνών.

Οι χρονοσειρές αυτές μπορούν να ανακτηθούν σε φύλλα εργασίας του EXCEL μέσω των ακόλουθων συναρτήσεων (δίνονται στο συνοδευτικό αρχείο SmushTest.xls)

- Generate: Συνάρτηση VBA που καλεί τη διαδικασία GenerateE
- SyntheticAll: Ανακτά το σύνολο των χρονοσειρών.
- SyntheticLocation: Ανακτά τη χρονοσειρά μιας δεδομένης θέσης για όλους τους μήνες.
- SyntheticMonth: Ανακτά τμήμα της χρονοσειράς μιας θέσης που αποτελείται από τις διαδοχικές τιμές που αναφέρονται στον ίδιο μήνα.

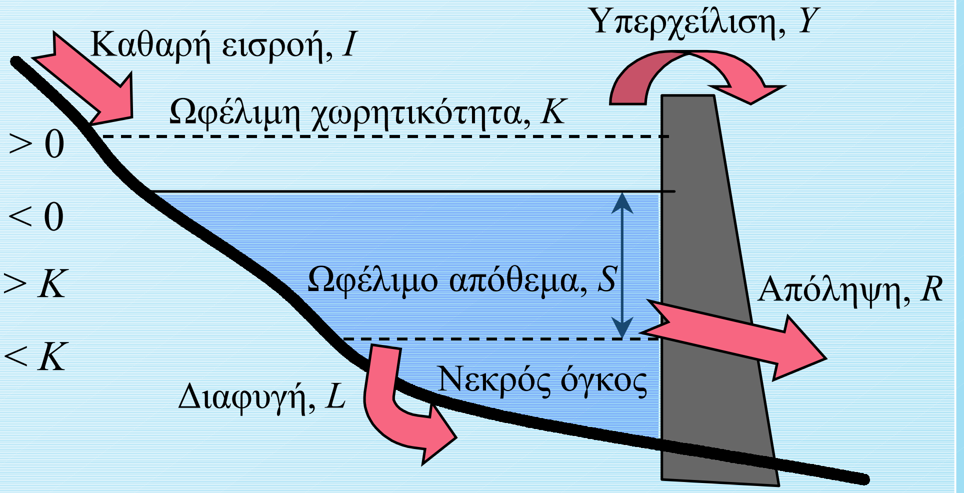
7. Εφαρμογή της προσομοίωσης σε μεμονωμένο ταμιευτήρα

Βασικές εξισώσεις

$$S_t = S_{t-1} + I_t - R_t - Y_t - L_t$$

$$R_t = \begin{cases} D_t, & S_{t-1} + I_t - D_t - L_t > 0 \\ S_{t-1} + I_t - L_t, & S_{t-1} + I_t - D_t - L_t < 0 \end{cases}$$

$$Y_t = \begin{cases} S_{t-1} + I_t - D_t - L_t - K, & S_{t-1} + I_t - D_t - L_t > K \\ 0, & S_{t-1} + I_t - D_t - L_t < K \end{cases}$$



όπου

S_t το απόθεμα στον ταμιευτήρα στο χρόνο t,

I_t η καθαρή εισροή (= ολική εισροή μείον απώλειες εξάτμισης, υπόγειας διαφυγής, κτλ.),

D_t η ζήτηση, που θεωρείται δεδομένη (σταθερή ή μεταβλητή)

R_t η πραγματική απόληψη,

Y_t η υπερχείλιση

L_t η υπόγεια διαφυγή και

K η ωφέλιμη χωρητικότητα του ταμιευτήρα.

Σημείωση 1: Ο χρόνος t θεωρείται διακριτός και τα μεγέθη D_t, R_t, L_t και Y_t αναφέρονται στο χρονικό διάστημα $(t–1, t]$. Όλα τα μεγέθη εκφράζονται σε μονάδες όγκου.

Σημείωση 2: Η παραπάνω περίπτωση είναι απλοποιημένη. Σε πραγματικούς ταμιευτήρες υπεισέρχονται και άλλοι περιορισμοί που προκύπτουν από την παροχετευτικότητα του υδραγωγείου, από τις περιβαλλοντικές ανάγκες κ.ά.

Μέτρα επίδοσης: Αξιοπιστία ως προς την κάλυψη του στόχου

- **Επίπεδο αξιοπιστίας σε ετήσια βάση** = πιθανότητα κάλυψης της ζήτησης σε χρονική βάση $T = 1$ έτος:

$$\alpha_T = P(R_T = D_T)$$

όπου α_T το επίπεδο αξιοπιστίας, R_T η πραγματική απόληψη (θεωρούμενη ως τυχαία μεταβλητή) στην περίοδο $T = 1$ έτος και D_T η ζήτηση στην ίδια περίοδο, ενώ με $P(.)$ συμβολίζεται η πιθανότητα. Εμπειρικά υπολογίζεται ως ο λόγος $k΄/k$ όπου $k΄$ είναι ο αριθμός των ετήσιων περιόδων στις οποίες ικανοποιείται η ζήτηση και k ο συνολικός αριθμός των περιόδων προσομοίωσης.

- **Επίπεδο αξιοπιστίας σε βάση χρονικού βήματος** (π.χ. μηνιαία) = πιθανότητα κάλυψης της ζήτησης σε χρονική βάση $t = 1$ υπολογιστικό χρονικό βήμα:

$$a_t = P(R_t = D_t)$$

όπου α_t το επίπεδο αξιοπιστίας, R_t η πραγματική απόληψη στην περίοδο t ενός υπολογιστικού χρονικού βήματος (π.χ. μήνα) και D_t η ζήτηση στην ίδια περίοδο. Εμπειρικά υπολογίζεται ως ο λόγος $n΄/n$ όπου $n΄$ είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων στα οποία ικανοποιείται η ζήτηση και n ο συνολικός αριθμός των χρονικών βημάτων προσομοίωσης.

- **Ογκομετρική έκφραση αξιοπιστίας**:

$$a_R = E[R_T] / D_T$$

όπου α_R το επίπεδο αξιοπιστίας, R_t η πραγματική απόληψη (θεωρούμενη ως τυχαία μεταβλητή) στην περίοδο t ενός υπολογιστικού χρονικού βήματος (π.χ. μήνα) και D_t η ζήτηση στην ίδια περίοδο, ενώ με $E[.]$ συμβολίζεται η αναμενόμενη τιμή. Εμπειρικά υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των πραγματικών απολήψεων στο συνολικό αριθμό των ετήσιων περιόδων προσομοίωσης.

Μέτρα επίδοσης: Αστοχία ως προς την κάλυψη του στόχου

- **Πιθανότητα αστοχίας σε ετήσια βάση**:

  $$\beta_T = 1 - \alpha_T = P(R_T < D_T)$$

  Εμπειρικά υπολογίζεται ως ο λόγος k''/k όπου k'' είναι ο αριθμός των ετήσιων περιόδων στις οποίες δεν ικανοποιείται η ζήτηση και k ο συνολικός αριθμός των περιόδων προσομοίωσης.

- **Πιθανότητα αστοχίας σε βάση χρονικού βήματος**:

  $$\beta_t = 1 - \alpha_t = P(R_t < D_t)$$

  Εμπειρικά υπολογίζεται ως ο λόγος n''/n όπου n'' είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων (μηνών) στα οποία δεν ικανοποιείται η ζήτηση και n ο συνολικός αριθμός των χρονικών βημάτων προσομοίωσης.

- **Ογκομετρικό μέτρο αστοχίας**:

  $$\beta_R = 1 - a_R = 1 - E[R_T] / D_T$$

- **Περίοδος επαναφοράς εκκένωσης** (recurrence time of emptiness)

  $$T_\mathrm{E} = 1 / \beta_T = 1 / (1 - \alpha_T)$$

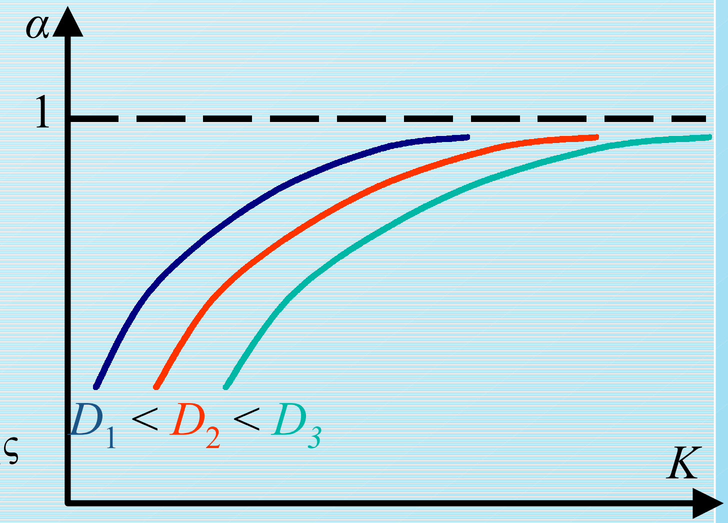
- **Σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών μέτρων αξιοπιστίας / αστοχίας**

  $a_T \leq a_t \leq a_R$ ή ισοδύναμα $\beta_T \geq \beta_t \geq \beta_R$

  (δεδομένου ότι η μη ικανοποίηση της ζήτησης σε ένα έτος, δε σημαίνει ότι εκτείνεται σε όλη τη διάρκεια του έτους, και ακόμα, κατά την περίοδο που δεν ικανοποιείται η ζήτηση, η απόληψη δεν είναι μηδενική αλλά $0 \leq R < D$).

Τυπικά προβλήματα

- Για δεδομένα υδρολογικά χαρακτηριστικά εισροών, η αξιοπιστία συναρτάται άμεσα με την ωφέλιμη χωρητικότητα του ταμιευτήρα K και με τη ζήτηση D.
- Κατηγορίες προβλημάτων
  (1) Διαστασιολόγηση: Δεδομένα D, α – Ζητούμενο K.
  (2) Λειτουργία: Δεδομένα K, α – Ζητούμενο D.
  (3) Λειτουργία: Δεδομένα K, D – Ζητούμενο α.
- Στόχος της προσομοίωσης είναι ο προσδιορισμός της σχέσης των τριών μεγεθών, δηλαδή της αξιοπιστίας (ή, ισοδύναμα, της πιθανότητας αστοχίας), της ωφέλιμης χωρητικότητας και της ζήτησης.



- Λόγω της μαθηματικής πολυπλοκότητας του προβλήματος, η σχέση αυτή δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί με αναλυτικές μεθόδους (εκτός από εξαιρετικά απλές περιπτώσεις). Εξάλλου οι εμπειρικές/γραφικές προσεγγίσεις (π.χ. αθροιστικές καμπύλες) είναι εξαιρετικά ανακριβείς. Έτσι, η μέθοδος της προσομοίωσης παραμένει η αποτελεσματικότερη μέθοδος αριθμητικού προσδιορισμού αυτής της σχέσης.
- Μειονέκτημα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι η προσομοίωση χρειάζεται να επεκταθεί σε διάστημα (n) χιλιάδων ετών, διάστημα το οποίο εξαρτάται από το επίπεδο αξιοπιστίας ή το μέτρο αστοχίας $\beta_{T,}$, το απαιτούμενο ποσοστό ακρίβειας c και το συντελεστή εμπιστοσύνης γ, σύμφωνα με τη σχέση:

$$n = (z_{(1+\gamma)/2} / c)^2 (1/ \beta_T - 1)$$

- Παράδειγμα: Για $\gamma = 95\%$ ($z_{(1+\gamma)/2} = 1.96$), $c = 10\%$, $\theta = 0.01 \Rightarrow n = 38\ 000$.

8. Εφαρμογή της προσομοίωσης σε σύστημα ταμιευτήρων
Η περίπτωση μεμονωμένου καταναλωτικού στόχου

- Οι βασικές εξισώσεις ισοζυγίου παραμένουν οι ίδιες για κάθε ταμιευτήρα
- Η βασική διαφορά έγκειται στον επιμερισμό της απόληψης στους επιμέρους ταμιευτήρες του συστήματος. Ο επιμερισμός αυτός παρουσιάζει βαθμούς ελευθερίας (= αριθμός ταμιευτήρων – 1).
- Λόγω των διαθέσιμων βαθμών ελευθερίας, υπάρχει απειρία λύσεων (εκτός οριακών περιπτώσεων, π.χ. σε περίπτωση που όλοι οι ταμιευτήρες εκτός από έναν έχουν αδειάσει) και έχει νόημα ο προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης.
- Η άμεση βελτιστοποίηση ως προς τις απολήψεις κάθε χρονικού βήματος στα πλαίσια ενός μοντέλου προσομοίωσης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη λόγω των πολλών μεταβλητών απόφασης (π.χ. για περίοδο προσομοίωσης 1000 ετών με μηνιαίο βήμα και 3 ταμιευτήρες οι μεταβλητές απόφασης θα ήταν τουλάχιστον $1000 \times 12 \times 3 = 36\ 000$ με ακόμη περισσότερους περιορισμούς).
- Για την αποφυγή τέτοιων καταστάσεων έχει επινοηθεί η χρήση ευρετικών κανόνων λειτουργίας που με τη χρήση τους αποφεύγεται η βελτιστοποίηση (π.χ. κανόνας Νέας Υόρκης, χωρικός κανόνας).

Ο κανόνας Νέας Υόρκης και ο χωρικός κανόνας

Κανόνας νέας Υόρκης (Clark, 1950, 1956· Johnson et al., 1991): Αποδεικνύεται ότι οι αναμενόμενες τιμές των υπερχειλίσεων ελαχιστοποιούνται όταν οι πιθανότητες υπερχείλισης είναι ίσες για όλους τους ταμιευτήρες, ήτοι

$$P(\Sigma \mathrm{I}_i \geq K_i - S_i) = \text{σταθερή για όλα τα } i$$

όπου $\Sigma\mathrm{I}_i$ η αθροιστική εισροή στον ταμιευτήρα i (από το τέλος της τρέχουσας περιόδου μέχρι το τέλος της περιόδου γεμίσματος), K_i η χωρητικότητα του ταμιευτήρα i, και S_i το απόθεμα του ταμιευτήρα i .

Χωρικός κανόνας: Με την υπόθεση ότι η κατανομή της μεταβλητής $\Sigma\mathrm{I}_i$ / $E[\Sigma\mathrm{I}_i]$ (όπου $E[\ ]$ συμβολίζει αναμενόμενη τιμή) είναι ίδια για όλους τους ταμιευτήρες i, η κανόνας Νέας Υόρκης παίρνει την ακόλουθη μορφή (Johnson et al., 1991) :

$$\frac{K_i - S_i}{E[\Sigma \mathrm{I}_i]} = \frac{\sum_{j=1}^{N} K_j - V}{\sum_{j=1}^{N} E[\Sigma \mathrm{I}_i]}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι γνωστή ως χωρικός κανόνας (space rule), και εκφράζει μαθηματικά την αναλογία του κενού χώρου προς την αναμενόμενη αθροιστική εισροή σε κάθε ταμιευτήρα.

Σημείωση: η υπόθεση ισότητας των κατανομών των μεταβλητών $\Sigma\mathrm{I}_i$ / $E[\Sigma\mathrm{I}_i]$ δεν είναι υποχρεωτική. Πρακτικώς στο ίδιο συμπέρασμα (με ελαφρώς διαφοροποιημένη τελική έκφραση) οδηγούν και άλλες εναλλακτικές υποθέσεις όπως π.χ. η υπόθεση ότι όλα τα μεγέθη $\Sigma\mathrm{I}_i$ ακολουθούν κατανομή Gauss (Nalbantis and Koutsoyiannis, 1997).

Εφαρμογή του χωρικού κανόνα

Ισοδύναμη έκφραση του χωρικού κανόνα:

$$S_i^* = a_i + b_i\, V$$

όπου S_i^* το απόθεμα-στόχος στον ταμιευτήρα i, V το συνολικό απόθεμα σε όλους τους ταμιευτήρες και οι παράμετροι a_i και b_i δίνονται από τις εξισώσεις:

$$a_i = K_i - b_i \sum_{j=1}^{N} K_j \;, \qquad b_i = \frac{E[\mathrm{CQ}_i]}{\sum_{j=1}^{N} E[\mathrm{CQ}_j]}$$

Εφόσον οι ταμιευτήρες βρίσκονται σε περιοχές με παρόμοιο κλιματικό καθεστώς, οι λόγοι b_i δεν διαφέρουν σημαντικά από μήνα σε μήνα και έτσι οι ποσότητες a_i και b_i μπορεί να θεωρηθούν σταθερές στο χρόνο (Nalbantis and Koutsoyiannis, 1997).

Ενσωμάτωση του χωρικού κανόνα σε μοντέλο προσομοίωσης:

1. Εκτίμηση του συνολικού αποθέματος V στο τέλος της τρέχουσας περιόδου (με την υπόθεση ότι καλύπτεται η συνολική ζήτηση και δεν υπάρχουν υπερχειλίσεις)
2. Εκτίμηση των όγκων-στόχων S_i^* για κάθε ταμιευτήρα από το χωρικό κανόνα
3. Καθορισμός των απολήψεων από κάθε ταμιευτήρα σε τρόπο ώστε να ικανοποιηθούν οι όγκοι-στόχοι (ή να προσεγγιστούν όσο το δυνατόν καλύτερα, αν λόγω φυσικών περιορισμών δεν είναι εφικτή η ικανοποίηση).

Βασική βιβλιογραφία

- Box, G.E.P. & Jenkins, G.M. *Time Series Analysis; Forecasting and control*, Holden Day, 1970.
- Bras, R. L. and Rodriguez-Iturbe, I., *Random functions and hydrology*, Addison-Wesley, USA, 1985.
- Koutsoyiannis, D., Optimal decomposition of covariance matrices for multivariate stochastic models in hydrology, *Water Resources Research* 35(4), 1219-1229, 1999.
- Koutsoyiannis, D., and A. Manetas, Simple disaggregation by accurate adjusting procedures, *Water Resources Research*, 32(7) 2105-2117, 1996.
- Matalas, N.C. and Wallis, J.R., Generation of synthetic flow sequences, in *Systems approach to water management*, A.K. Biswas editor, McGraw Hill, 1976.
- Mays, L. W., and Y.-K. Tung, *Hydrosystems Engineering and Management* McGraw-Hill, New York, 1992.
- Nalbantis, I., and D. Koutsoyiannis, A parametric rule for planning and management of multiple reservoir systems, *Water Resources Research*, 33(9), 2165-2177, 1997.
- Papoulis, A., *Probability and Statistics*, Prentice-Hall, 1990.
- Salas, J. D., Analysis and modeling of hydrologic time series, Chapter 19, *Handbook of Hydrology*, edited by D. Maidment, McGraw-Hill, New York, 1993.
- Salas, J. D., Delleur, J. W., Yevjevich, V., and Lane, W. L., *Applied Modelling of Hydrologic Time Series*, Water Resources Publications, Littleton, Co., USA, 1988.
- Winston, W, L., *Operations Research, Applications and Algorithms*, 3rd ed., Duxbury, Belmont, 1994.

Λοιπές αναφορές

- Clark, E. J., New York control curves, *J. Am. Water Works Assoc., 42*(9), 823-857, 1950.
- Clark, E. J., Impounding reservoirs, *J. Am. Water Works Assoc., 48*(4), 349-354, 1956.
- Eckhardt, R., Stan Ulam, John von Neumann and the Monte Carlo Method, in *From cardinals to chaos*, edited by N.G. Cooper, Cambrige University, NY, USA, 1989.
- Grygier, J.C. & Stedinger, J.R., SPIGOT, A synthetic streamflow generation software package, Technical description, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY., Version 2.5, 1990.
- Johnson, S. A., J. R. Stedinger, and K. Staschus, Heuristic operating policies for reservoir system simulation, *Water Resour. Res., 27*(5), 673-685, 1991.
- Metropolis, N., The beginning of the Monte Carlo method, in *From cardinals to chaos*, edited by N.G. Cooper, Cambrige University, NY, USA, 1989.