Γραμμικός Προγραμματισμός
Δικτυακός προγραμματισμός

Ανδρέας Ευστρατιάδης και Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ΓΠ

Ένα πρόβλημα **γραμμικού προγραμματισμού** (ΓΠ) συνίσταται στη μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης κάτω από ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών περιορισμών:

$$\text{max / min} \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{έτσι ώστε} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Οι n τελευταίοι περιορισμοί καλούνται περιορισμοί μη αρνητικότητας.

Οικονομική ερμηνεία: Η σταθερά c_j εκφράζει το κέρδος ανά μονάδα δραστηριότητας j, η σταθερά b_i εκφράζει τη διαθέσιμη ποσότητα του πόρου i και ο συντελεστής a_{ij} εκφράζει την ποσότητα του πόρου i που καταναλώνεται από κάθε μονάδα δραστηριότητας j.

Μητρωϊκή διατύπωση του προβλήματος ΓΠ:

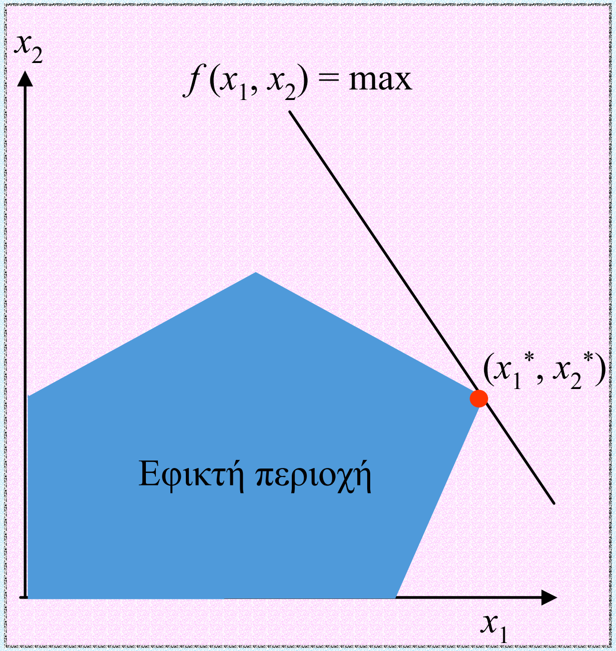
$$\text{max / min} \qquad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}$$

$$\text{έτσι ώστε} \qquad \mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

όπου **x**: $n \times 1$ διάνυσμα *μεταβλητών ελέγχου (απόφασης)*, **c**: $n \times 1$ διάνυσμα, **A**: $m \times n$ μητρώο, **b**: $m \times 1$ διάνυσμα, **0**: $n \times 1$ μηδενικό διάνυσμα.

Γεωμετρική ερμηνεία του γραμμικού προγραμματισμού



Οι περιοριστικές εξισώσεις ορίζουν ένα κυρτό γεωμετρικό σχήμα (πολύεδρο) n διαστάσεων, το οποίο καλείται *εφικτή περιοχή* (feasible region) ή *χώρος πολιτικής* (policy domain). Ο αριθμός των *ακμών* του πολυέδρου ισούται με τον αριθμό των περιοριστικών εξισώσεων $(m + n)$.

Θεμελιώδεις ιδιότητες

- Αν υπάρχει μία μόνο βέλτιστη λύση, αυτή κείται σε κορυφή της εφικτής περιοχής.
- Ο αριθμός των εφικτών λύσεων ακραίων σημείων είναι πεπερασμένος.
- Αν μια εφικτή λύση ακραίου σημείου είναι καλύτερη από όλες τις γειτονικές της, τότε είναι η βέλτιστη του προβλήματος.

Παρατήρηση: Αν και ο αριθμός των κορυφών της εφικτής περιοχής είναι πεπερασμένος, η επίλυση μέσω απαρίθμησής τους είναι πρακτικά αδύνατη. Κάθε ακραίο σημείο αποτελεί λύση ενός συστήματος n από τις $(m + n)$ περιοριστικές εξισώσεις, οπότε οι δυνατοί συνδυασμοί που προκύπτουν είναι:

$$\frac{(m+n)!}{m!\, n!}$$

Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα 50 μεταβλητών και 50 περιορισμών προκύπτουν 10^{29} ανεξάρτητα συστήματα προς επίλυση.

Ο αλγόριθμος simplex

Πρόκειται για μια επαναληπτική διαδικασία, μέσω της οποίας επιτυγχάνεται *διαδοχική βελτίωση* της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, μέχρις ότου εντοπιστεί η βέλτιστη λύση. Ο αλγόριθμος κινείται μεταξύ διαδοχικών κορυφών της εφικτής περιοχής και περιλαμβάνει:

- Ένα μέσο επιλογής του σημείου εκκίνησης $\mathbf{x}^{[0]}$.
- Μια διαδικασία μεταφοράς από μια εφικτή ακραία λύση $\mathbf{x}^{[k]}$ σε μια γειτονική της $\mathbf{x}^{[k+1]}$ τέτοια ώστε $f(\mathbf{x}^{[k+1]}) \geq f(\mathbf{x}^{[k]})$.
- Ένα μέσο αναγνώρισης την βέλτιστης λύσης.

Η εφαρμογή της μεθόδου προϋποθέτει τη διατύπωση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού στην *τυπική μορφή* (standard form):

max $\quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

έτσι ώστε $\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$

Με την προσθήκη *m αδιάφορων μεταβλητών* (slack variables), οι ανισωτικοί περιορισμοί μετατρέπονται σε ισότητες. Οι αδιάφορες μεταβλητές εκφράζουν το πόσο απέχει μια λύση από κάθε περιορισμό, δηλαδή κατά πόσο εξαντλείται κάθε οριακή εξίσωση. Κάθε λύση $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ η οποία ικανοποιεί τους εξισωτικούς περιορισμούς καλείται *επαυξημένη* (augmented), ενώ αν κείται σε κορυφή της εφικτής περιοχής καλείται *βασική* (basic). Κάθε βασική λύση αποτελείται από *n* μηδενικές μεταβλητές, οι οποίες καλούνται *μη βασικές* και *m* μη μηδενικές μεταβλητές, οι οποίες καλούνται *βασικές*.

Αριθμητικό παράδειγμα

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

max $\quad 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

έτσι ώστε
$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 5 \\
4x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 11 \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 8 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Για κάθε έναν από τους ανισωτικούς περιορισμούς εισάγεται μία αδιάφορη μεταβλητή έτσι ώστε:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

Το αρχικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το:

Max $\quad z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

έτσι ώστε $\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$

Κάθε εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος (x_1, x_2, x_3) είναι ισοδύναμη με την επαυξημένη λύση $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ και αντίστροφα.

Επιλογή του σημείου εκκίνησης

Ως σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε κορυφή της εφικτής περιοχής, δηλαδή οποιαδήποτε βασική λύση $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1, \ldots,} x_{n+m})$. Το ισοδύναμο πρόβλημα γράφεται:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$x_{n+i} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Δεδομένου ότι $b_i \geq 0$, θέτοντας τις μεταβλητές ελέγχου $(x_1, \ldots, x_n)$ ίσες με το μηδέν προκύπτει η αρχική λύση $(0, \ldots, 0, b_{1, \ldots,} b_m)$, με $z = 0$. Οι αδιάφορες μεταβλητές αποτελούν τις βασικές (μη μηδενικές) μεταβλητές της αρχικής λύσης, η οποία κείται γεωμετρικά στην αρχή των αξόνων.

Η αρχική λύση του αριθμητικού παραδείγματος είναι:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = 11, x_6 = 8$

Παρατήρηση: Εάν ένας ή περισσότεροι όροι b_i λαμβάνει αρνητική τιμή, τότε η λύση $(0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$ είναι μη εφικτή. Στην περίπτωση αυτή ακολουθείται ειδική μεθοδολογία, η οποία είναι γνωστή ως *μέθοδος δύο φάσεων* (two-phase simplex method). Κατά την πρώτη φάση αναζητείται μια κατάλληλη βασική λύση με την εισαγωγή μιας *ψευδομεταβλητής*. Η λύση αυτή εντοπίζεται μέσω επίλυσης ενός *βοηθητικού προβλήματος* (auxiliary problem) και χρησιμοποιείται ως σημείο εκκίνησης για την επίλυση του αρχικού προβλήματος.

Η μέθοδος των δύο φάσεων εφαρμόζεται και σε προβλήματα με περιορισμούς της μορφής "≥".

Επαναληπτικό βήμα (1)

Σε κάθε επανάληψη, κάθε νέα βασική λύση προκύπτει από την προηγούμενή της με αντικατάσταση μιας τρέχουσας βασικής μεταβλητής x_l (*εξερχόμενη μεταβλητή*) από μια μη βασική x_e (*εισερχόμενη μεταβλητή*), δηλαδή η μετάβαση από μια κορυφή της εφικτής περιοχής σε μια αμέσως πλησιέστερη.

Επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής

Υποψήφιες εισερχόμενες μεταβλητές x_e είναι όλες οι τρέχουσες μη βασικές μεταβλητές x_j οι οποίες δύνανται να βελτιώσουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή όλες οι μεταβλητές που έχουν θετικό συντελεστή c_j. Μια συνήθης πρακτική είναι η επιλογή της μεταβλητής με τη μέγιστη μοναδιαία αξία. Σημειώνεται ότι το παραπάνω κριτήριο δεν εξασφαλίζει τη μέγιστη βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης, καθώς δε λαμβάνονται υπόψη οι περιοριστικές εξισώσεις.

Στο αριθμητικό παράδειγμα, οι μη βασικές μεταβλητές είναι οι x_1, x_2, x_3 με $c_1 = 5$, $c_2 = 4$, $c_3 = 3$. Με βάση το κριτήριο εισόδου, η εισερχόμενη μεταβλητή στην πρώτη επανάληψη είναι η x_1.

Παρατήρηση 1: Εάν δύο ή περισσότερες μεταβλητές πληρούν το κριτήριο εισόδου, τότε η επιλογή γίνεται αυθαίρετα, χωρίς να είναι δυνατός ο προσδιορισμός της ταχύτερης διαδρομής εκ των προτέρων.

Παρατήρηση 2: Σε βελτιωμένη εκδοχή της μεθόδου, γνωστή ως *αναθεωρημένη* (revised) simplex, έχει αναπτυχθεί ειδική μεθοδολογία για τον εντοπισμό της μεταβλητής εισόδου, κατάλληλη για πολύ μεγάλα προβλήματα με αραιά (sparse) μητρώα.

Παρατήρηση 3: Αν καμία μη βασική μεταβλητή δεν εκπληρώνει το κριτήριο εισόδου τότε δεν μπορεί να αυξηθεί περαιτέρω η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη.

Επαναληπτικό βήμα (2)

Επιλογή της εξερχόμενης μεταβλητής

Η εξερχόμενη μεταβλητή x_l είναι η βασική εκείνη μεταβλητή της οποίας η απαίτηση μη αρνητικότητας θέτει το μέγιστο περιορισμό στην αύξηση της εισερχόμενης μεταβλητής x_e, δηλαδή:

$$\frac{b_l}{a_{le}} = \min_i \{\frac{b_i}{a_{ie}}, a_{ie} > 0\}$$

Στο παράδειγμα, η συνθήκη $x_4 = 5 – 2x_1 – 3x_2 – x_3 \geq 0$ προϋποθέτει ότι $x_1 \leq 5/2$, η συνθήκη $x_5 \geq 0$ προϋποθέτει ότι $x_1 \leq 11/4$ και η συνθήκη $x_6 \geq 0$ προϋποθέτει ότι $x_1 \leq 8/3$. Από αυτές, η πλέον κρίσιμη είναι η πρώτη, οπότε αυξάνοντας τη μεταβλητή x_1 μέχρι το μέγιστο όριο προκύπτει η νέα βασική λύση:

$x_1 = 5/2, x_2= 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1/2$

Η τιμή της συνάρτησης μετά την πρώτη επανάληψη αυξάνεται από $\mathrm{z}^{[0]} = 0$ σε $z^{[1]} = 25/2$.

Παρατήρηση 1: Αν δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές ικανοποιούν το κριτήριο εξόδου, οποιαδήποτε από αυτές μπορεί να επιλεγεί ως εξερχόμενη, ενώ οι υπόλοιπες θα πρέπει να λάβουν μηδενική τιμή, οπότε καλούνται *εκφυλισμένες* (degenerate). Σε ορισμένες περιπτώσεις αυτό μπορεί να οδηγήσει σε *ανακύκλωση* (cycling), δηλαδή σε περιοδική επανάληψη της ίδιας αλληλουχίας λύσεων χωρίς μεταβολή της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης.

Παρατήρηση 2: Αν καμία βασική μεταβλητή δεν ικανοποιεί το κριτήριο εξόδου, η εισερχόμενη μεταβλητή μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα. Η περίπτωση αυτή εμφανίζεται όταν ο συντελεστής a_{ie} είναι μη αρνητικός για κάθε περιορισμό i και υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει όριο στην αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης μέσα στην εφικτή περιοχή.

Οι πίνακες simplex

Σε κάθε επανάληψη, η διαδικασία simplex μπορεί να πινακοποιηθεί ως εξής:

Βασικές μεταβλητές	Διάνυσμα - γραμμή	Μεταβλητές ελέγχου			Αδιάφορες μεταβλητές			Σταθερές
		x_1	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{m+n}	
x_{B1}	R_1	a_{11}	...	a_{1n}	s_{11}	...	s_{1m}	b_1
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮
x_{Bm}	R_m	a_{m1}	...	a_{mn}	s_{m1}	...	s_{mm}	b_m
Αντικειμενική συνάρτηση	R_0	$z_1 - c_1$	...	$z_n - c_n$	y_1	...	y_m	z

Η ποσότητα z_j εκφράζει το καθαρό ποσό κατά το οποίο αυξάνεται η αρχική μοναδιαία αξία της μεταβλητής x_j.

Θεμελιώδης ιδιότητα: Σε κάθε επανάληψη k, η τελευταία γραμμή του πίνακα simplex προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του αρχικού πίνακα:

$$R_0^{[k]} = R_0^{[0]} + \sum_{i=1}^{m} y_i^{[k]} R_i^{[0]}$$

Η παραπάνω ιδιότητα βρίσκει εφαρμογή στη δυαδική θεωρία και στην ανάλυση ευαισθησίας.

Επίλυση του παραδείγματος με τους πίνακες simplex

Αρχικός πίνακας							
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	2	3	1	1	0	0	5
x_5	4	1	2	0	1	0	11
x_6	3	4	2	0	0	1	8
z	-5	-4	-3	0	0	0	0
1^{η} επανάληψη							
x_1	1	1.5	0.5	0.5	0	0	2.5
x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
x_6	0	-0.5	0.5	1.5	0	1	0.5
z	0	3.5	-0.5	2.5	0	0	12.5
2^{η} επανάληψη							
x_1	1	2	0	-2	0	0	2
x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
z	0	3	0	1	0	1	13

Εισερχόμενη μεταβλητή x_1
Εξερχόμενη μεταβλητή x_4

Εισερχόμενη μεταβλητή x_3
Εξερχόμενη μεταβλητή x_6

Δεν υπάρχει υποψήφια εισερχόμενη μεταβλητή, εντοπίστηκε το βέλτιστο

Η δυαδική θεωρία

Έστω το *πρωτεύον* (primal) πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{έτσι ώστε} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Στο παραπάνω πρόβλημα αντιστοιχεί ένα *δυαδικό*, η μαθηματική διατύπωση του οποίου είναι:

$$\min \qquad f'(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{έτσι ώστε} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geq c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

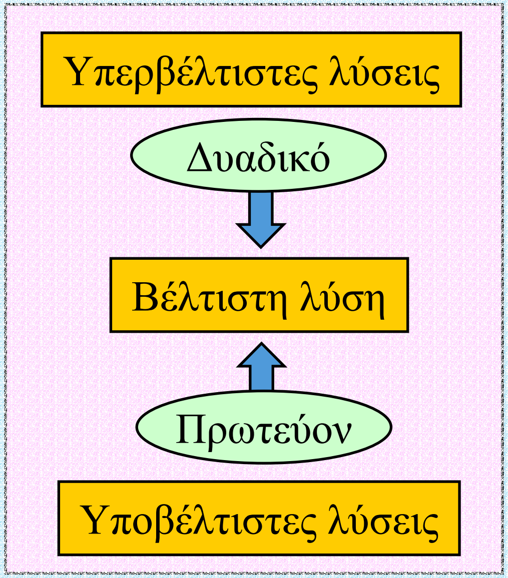
$$y_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Οι μεταβλητές ελέγχου y_i του δυαδικού προβλήματος ταυτίζονται με τα στοιχεία της μηδενικής γραμμής των πινάκων simplex τα οποία αντιστοιχούν στις αδιάφορες μεταβλητές του πρωτεύοντος. Σε κάθε επανάληψη k προσδιορίζεται ένα άνω φράγμα $z_u^{[k]}$ της αντικειμενικής συνάρτησης τέτοιο ώστε $z_u^{[k]} \geq z_u^{[k+1]}$. Το ελάχιστο άνω φράγμα είναι ίσο με τη μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η συνάρτηση μέσα στην εφικτή περιοχή.

Σχέσεις πρωτεύοντος και δυαδικού προβλήματος

Για κάθε ζεύγος πρωτεύοντος – δυαδικού προβλήματος ισχύει:

	Πρωτεύον	**Δυαδικό**
Μεταβλητή ελέγχου	x_j	y_i
Αριθμός μεταβλητών	n	m
Αριθμός περιορισμών	m	n
Στόχος	max	min
Συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης	c_j	b_i
Περιορισμοί	$\mathbf{A\,x \leq b}$	$\mathbf{A^T\,y \geq c}$



Θεμελιώδες θεώρημα: Αν το πρωτεύον πρόβλημα έχει μια βέλτιστη λύση $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, τότε το δυαδικό έχει μια βέλτιστη λύση $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ τέτοια ώστε:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Παρατηρήσεις

- Το πρωτεύον πρόβλημα έχει βέλτιστη λύση αν και μόνο αν το δυαδικό του έχει βέλτιστη λύση.
- Μη βέλτιστες αλλά εφικτές βασικές λύσεις οποιουδήποτε από τα δύο προβλήματα (*υποβέλτιστες*) είναι συμπληρωματικές προς βασικές λύσεις του άλλου προβλήματος, οι οποίες είναι μη εφικτές αλλά καλύτερες της βέλτιστης (*υπερβέλτιστες*).

Εφαρμογές της δυαδικότητας

Αντιμετώπιση προβλημάτων με πολλούς περιορισμούς

Σε μεγάλα προβλήματα, ο αριθμός των απαιτούμενων επαναλήψεων με τη μέθοδο simplex έχει παρατηρηθεί ότι είναι περίπου ανάλογος του αριθμού των περιορισμών m (διπλάσιος ως τριπλάσιος), ενώ παραμένει σχετικά αδιάφορος ως προς τον αριθμό των μεταβλητών n. Όταν $m > n$, μπορεί να επιτευχθεί σημαντική μείωση του υπολογιστικού φόρτου μέσω επίλυσης του δυαδικού αντί του πρωτεύοντος προβλήματος.

Οικονομική ερμηνεία

Αν και ο γραμμικός προγραμματισμός προϋποθέτει σταθερές τιμές παραμέτρων, συνήθως στην πράξη υπάρχει μερική ευελιξία των διαθέσιμων πόρων. Στην περίπτωση αυτή τα b_i αντιπροσωπεύουν την *προσδοκώμενη* (anticipated) διαθεσιμότητα των πόρων i. Στη βέλτιστη λύση, οι δυαδικές μεταβλητές y_i^*, οι οποίες καλούνται *σκιώδεις τιμές* (shadow prices), χρησιμοποιούνται για να αξιολογηθεί κατά πόσο πρέπει να αλλάξει η κατανομή των πόρων. Οι σκιώδεις τιμές εκφράζουν το ρυθμό αύξησης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης για μοναδιαία αύξηση του πόρου b_i και χωρίς αλλαγή των βασικών μεταβλητών (και κατά συνέπεια των περιορισμών που ορίζουν τη βέλτιστη λύση).

Ανάλυση ευαισθησίας

Η ανάλυση ευαισθησίας εξετάζει τη συμπεριφορά του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού στις αλλαγές των τιμών των παραμέτρων του. Η δυαδική θεωρία αποτελεί τη βάση αυτής της μεθόδου, καθώς η αλλαγή των παραμέτρων του πρωτεύοντος προβλήματος επηρεάζει τις συσχετιζόμενες παραμέτρους του δυαδικού.

Ανάλυση ευαισθησίας

Στόχος: Η διερεύνηση της συμπεριφοράς του συστήματος κάτω συνθήκες αβεβαιότητας ως προς τις τιμές των παραμέτρων του. Συνήθως επιχειρείται μια αρχικά αδρή προσέγγισή τους και αφού επιλυθεί το πρόβλημα, εξετάζεται για ποιες από αυτές η βέλτιστη λύση παρουσιάζει ευαισθησία.

Τυπική περίπτωση αποτελεί η παράλειψη περιορισμών που θεωρούνται δευτερεύουσας σημασίας, έτσι ώστε να μειωθεί ο υπολογιστικός φόρτος. Η εκ των υστέρων προσθήκη τους βελτιώνει την αξιοπιστία του μοντέλου αλλά δε βελτιώνει ποτέ την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Τυπικά προβλήματα που χειρίζεται η θεωρία ανάλυσης ευαισθησίας

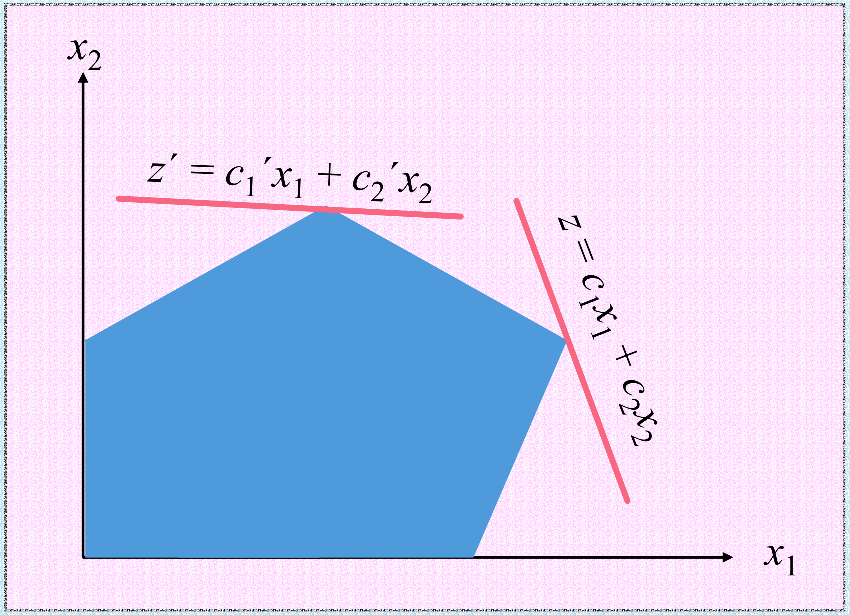
α) Μεταβολές των διαθέσιμων πόρων b_i.

β) Μεταβολές συντελεστών μη βασικών μεταβλητών.

γ) Μεταβολές συντελεστών βασικών μεταβλητών.

δ) Προσθήκη νέας μεταβλητής ελέγχου.

ε) Προσθήκη νέου περιορισμού.



Παραμετρικός γραμμικός προγραμματισμός

Η παραμετρική ανάλυση βρίσκει εφαρμογή στην περίπτωση που οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης c_j μεταβάλλονται σύμφωνα με μια γραμμική παραμετρική σχέση και διερευνά όλο το πιθανό εύρος μεταβολής τους. Η συνάρτηση διατυπώνεται στη μορφή:

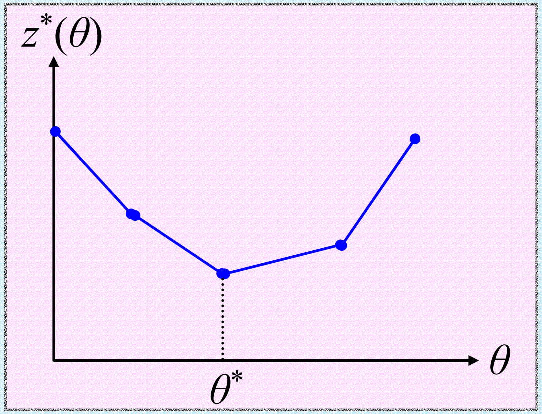
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + \lambda_j \theta)\, x_j$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $z^* = f(\theta)$ είναι *κυρτή* και κατά τμήματα γραμμική. Τα σημεία αλλαγής κλίσης αντιστοιχούν σε τιμές του θ για τις οποίες μεταβάλλεται η βασική λύση, ενώ υπάρχει μια κρίσιμη τιμή θ_o για την οποία η βέλτιστη λύση λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της.

Ο παραμετρικός προγραμματισμός αντιμετωπίζει και προβλήματα συστηματικής μεταβολής των διαθέσιμων πόρων b_i, με θεώρηση της δυαδικής αντικειμενικής συνάρτησης:

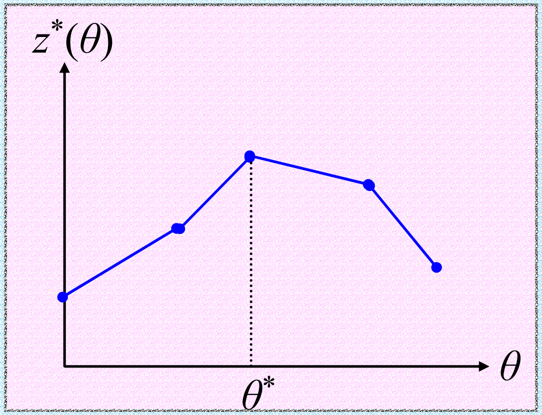
$$f'(y_1, y_2, \dots, y_m, \theta) = \sum_{i=1}^{m} (b_i + \mu_i \theta)\, y_i$$

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση $z^* = f'(\theta)$ είναι *κοίλη* και κατά τμήματα γραμμική.



Παραμετρική μεταβολή των συντελεστών c_j

Παραμετρική μεταβολή των συντελεστών b_i



Θεωρία γράφων - Ορισμοί

- **Γράφος** ή γράφημα (graph) είναι ένα σύνολο σημείων (κόμβων) N και ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών αυτών (ακμών ή τόξων) A. Κάθε γράφος μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή (N, A).
- **Διγράφος** ή διγράφημα (digraph) ή διευθυνόμενος γράφος είναι ένας γράφος του οποίου οι ακμές έχουν προσανατολισμένη φορά.
- **Δίκτυο** (network) είναι ένας γράφος στα στοιχεία του οποίου (κόμβοι και ακμές) αντιστοιχούν κάποιες ιδιότητες (π.χ. χωρητικότητα).
- Ένα **μονοπάτι** (path) μεταξύ δύο κόμβων s και t είναι ένα σύνολο ακμών μέσω των οποίων συνδέονται. Εάν οι κόμβοι s και t ταυτίζονται τότε καλείται **κύκλωμα** (circuit).
- Ένας γράφος καλείται **συναπτός** (connected) αν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι μεταξύ κάθε ζεύγους κόμβων αυτού.
- **Δένδρο** (tree) είναι ένας συναπτός γράφος χωρίς κυκλώματα. Οι επόμενοι ορισμοί είναι ισοδύναμοι:
  - Δένδρο είναι κάθε συναπτός γράφος που αποτελείται από n κόμβους και n - 1 ακμές.
  - Δένδρο είναι ένας γράφος, κάθε ζεύγος κόμβων του οποίου συνδέεται με ένα και μόνο μονοπάτι.
  - Δένδρο είναι ένας συναπτός γράφος τέτοιος ώστε η απαλοιφή οποιασδήποτε ακμής του να τον μετατρέπει σε μη συναπτό.
- Κάθε γράφος (N, A') που προκύπτει από τον αρχικό (N, A) με θεώρηση ενός υποσυνόλου των τόξων του καλείται **μερικός γράφος** (partial graph) ή υπογράφος (subgraph) του (N, A).
- Δένδρα που προκύπτουν ως μερικοί γράφοι ονομάζονται **δένδρα γεφύρωσης** (spanning trees). Σε κάθε τέτοιο δένδρο υπάρχει ένα μονοπάτι για κάθε ζεύγος κόμβων του γράφου, ενώ περιέχεται ο ελάχιστος δυνατός αριθμός ακμών.

Μητρωική απεικόνιση γράφων

Η τοπολογία ενός γράφου (N, A) ο οποίος αποτελείται από n κόμβους και m ακμές μπορεί να περιγραφεί αλγεβρικά με δύο τύπους μητρώων:

α) Το $n \times n$ *μητρώο γειτνίασης* (adjacency matrix) με στοιχεία $a_{ij} = 1$, αν υπάρχει ακμή που συνδέει τους κόμβους i και j κατά τη φορά (i, j) και $a_{ij} = 0$ αν δεν υπάρχει.

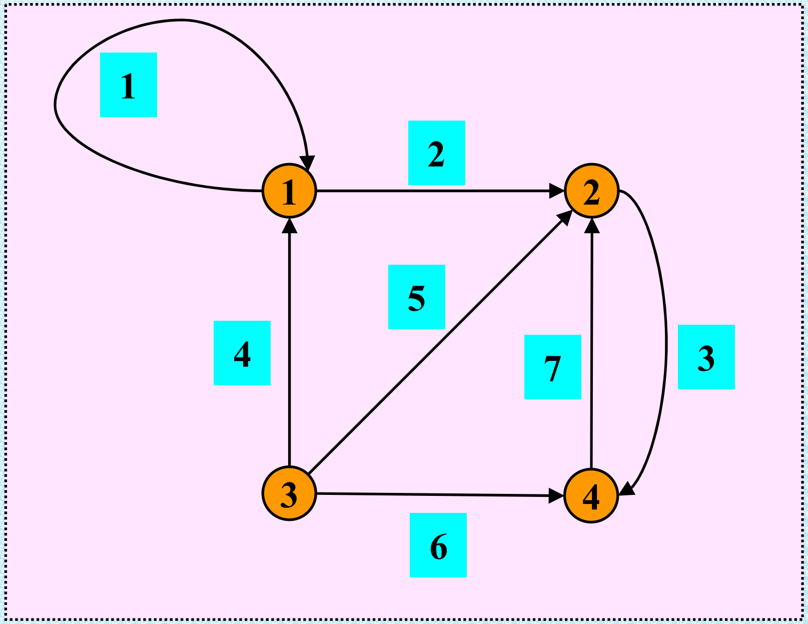
β) Το $n \times m$ *μητρώο πρόσπτωσης* (incidence matrix) με τιμές $a_{ik} = 1$ αν η φορά είναι από τον κόμβο i προς την ακμή k, $a_{ik} = -1$ αν η φορά είναι ανάστροφη και $a_{ik} = 0$ αν δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ του κόμβου i και της ακμής k.

Μειονέκτημα του μητρώου γειτνίασης είναι η αδυναμία απεικόνισης παράλληλων ακμών, ενώ το μειονέκτημα του μητρώου πρόσπτωσης είναι η αδυναμία απεικόνισης βροχωτών ακμών.

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

μητρώο γειτνίασης μητρώο πρόσπτωσης



Το πρόβλημα μεταφόρτωσης (transhippment problem)

Ορισμός: Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους μεταφοράς προϊόντων από κάποιους κόμβους που καλούνται πηγές (sources) στους κόμβους κατανάλωσης ή καταβοθρών (sinks), μέσω ενός δικτύου n κόμβων και m ακμών.

Οι κόμβοι στους οποίους δεν υπάρχει ούτε προσφορά ούτε ζήτηση καλούνται *ενδιάμεσοι* (intermediate).

Στο πρόβλημα μεταφόρτωσης ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Η συνολική προσφορά ισούται με τη συνολική ζήτηση (διαφορετικά εισάγεται ένας εικονικός κόμβος ο οποίος απορροφά το πλεόνασμα της προσφοράς).
- Σε κάθε κόμβο οι εισερχόμενες ποσότητες ισούνται με τις εξερχόμενες μείον τις καταναλισκόμενες (εξίσωση συνέχειας).

Μαθηματική διατύπωση

min $\quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x} = \sum c_{ij}\, x_{ij}$

έτσι ώστε $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

όπου x_{ij} η μεταφερόμενη ποσότητα μέσω του κλάδου (i, j), c_{ij} το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς, b_i η ζήτηση ή η προσφορά στον κόμβο i (με θετικό ή αρνητικό πρόσημο αντίστοιχα) και a_{ij} το στοιχείο του $n \times m$ μητρώου αντιστοίχισης του δικτύου.

Εφόσον η συνολική προσφορά ισούται με τη συνολική ζήτηση θα πρέπει:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$$

Η δικτυακή simplex (1)

Η δικτυακή simplex είναι μια επαναληπτική μέθοδος κατανομής των ποσοτήτων x_{ij} στο δίκτυο έτσι ώστε το σύνολο των κλάδων με $x_{ij} > 0$ να διαμορφώνουν ένα δένδρο γεφύρωσης T με n κόμβους και $n - 1$ ακμές. Κάθε επανάληψη περιλαμβάνει τρία βήματα:

Βήμα 1ο: Σε κάθε κόμβο j του δικτύου υπολογίζονται οι ποσότητες:

$$y_i + c_{ij} = y_j \text{ για κάθε κλάδο } (i, j) \text{ του δένδρου}$$

Η μεταβλητή y_j εκφράζει το συνολικό μοναδιαίο κόστος που αντιστοιχεί στον κόμβο j του δένδρου για τη διαδρομή που καταλήγει σε αυτόν. Θεωρώντας ότι $y_n = 0$, οι τιμές των y_j προκύπτουν από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $(n - 1) \times (n - 1)$ εξισώσεων.

Βήμα 2ο: Στο δένδρο προστίθεται μια νέα ακμή (i, j) τέτοια ώστε:

$$y_i + c_{ij} < y_j$$

Με τον τρόπο αυτό εισάγεται ένα εναλλακτικό μονοπάτι που καταλήγει στον κόμβο j και στο οποίο αντιστοιχεί μικρότερο κόστος μεταφοράς, ενώ δημιουργείται ένα κύκλωμα που αναιρεί τη δενδροειδή (ακτινωτή) μορφή του δικτύου.

Βήμα 3ο: Καθορίζεται η μέγιστη ποσότητα $x_{ij} = t$ η οποία μπορεί να μεταφερθεί μέσω της ακμής (i, j), έτσι ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις συνέχειας σε όλους τους κόμβους, χωρίς να παραβιάζονται οι περιορισμοί μη αρνητικότητας. Οι μεταβλητές του προβλήματος αναθεωρούνται ως εξής:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + t & \text{αν η φορά της ακμής } (i, j) \text{ είναι ορθή} \\ x_{ij} - t & \text{αν η φορά της ακμής } (i, j) \text{ είναι ανάστροφη} \\ x_{ij} & \text{αν η ακμή } (i, j) \text{ δεν ανήκει στο κύκλωμα} \end{cases}$$

Με τον τρόπο αυτό μία τουλάχιστον μεταβλητή x_{ij} γίνεται μηδενική, οπότε η αντίστοιχη ακμή τίθεται εκτός του δικτύου και διαμορφώνεται ένα νέο δένδρο γεφύρωσης.

Η δικτυακή simplex (2)

Κατασκευή ενός αρχικού δένδρου

Θεωρείται ένας τυχαίος κόμβος w του δικτύου, ο οποίος συνδέεται με τους υπόλοιπους $n - 1$ μέσω υπαρκτών ή τεχνητών τόξων (artificial arcs), διαμορφώνοντας ένα δένδρο T_w τέτοιο ώστε:

$$\begin{array}{ll} x_{wj} = b_j & \text{αν } b_j \geq 0 \text{ και } j \neq w \\ x_{iw} = -b_j & \text{αν } b_i < 0 \text{ και } i \neq w \\ x_{ij} = 0 & \text{αν ο κλάδος } (i, j) \text{ δεν ανήκει στο } T_w \end{array}$$

Αναζητείται μία εφικτή λύση του προβλήματος, τέτοια ώστε να μην περιλαμβάνει κανένα από τα τεχνητά τόξα. Για το λόγο αυτό τίθεται μια ποινή $\pi_{ij} = 1$ για κάθε τεχνητό τόξο (i, j) (με $\pi_{ij} = 0$ για κάθε πραγματικό τόξο) και επιλύεται το βοηθητικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$z = \sum \pi_{ij} x_{ij}$$

Εφόσον $z^* = 0$, η βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^*$ του βοηθητικού προβλήματος λαμβάνεται ως τιμή εκκίνησης του αρχικού, ενώ αν $z^* > 0$, τότε το αρχικό πρόβλημα μεταφόρτωσης δεν έχει λύση.

Εντοπισμός της βέλτιστης λύσης

Αν δεν υπάρχει κανένα τόξο (i, j) τέτοιο ώστε:

$$y_i + c_{ij} < y_j$$

τότε το δένδρο που έχει διαμορφωθεί είναι το βέλτιστο, δηλαδή δεν υπάρχει καμία εναλλακτική διαδρομή τέτοια ώστε να μειωθεί το συνολικό κόστος μεταφοράς, ενώ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$\mathrm{z}^* = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^* = \sum_{(i,j)\in T} c_{ij} x_{ij}^*$$

Σύγκριση της τυπικής με τη δικτυακή simplex

	Τυπική simplex	**Δικτυακή simplex**
Αριθμός μεταβλητών ελέγχου	n	m (= αριθμός ακμών δικτύου)
Αριθμός περιορισμών	m	$n - 1$ (= εξισώσεις συνέχειας στους κόμβους του δικτύου)
Στοιχεία μητρώου A	$a_{ij} \in R$	$a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$
Χώρος εφικτών λύσεων	Πολύεδρο n διαστάσεων με $n + m$ ακμές.	Δίκτυο n κόμβων και m ακμών.
Βασικές λύσεις	Κορυφές του πολυέδρου	Δένδρα του δικτύου
Αριθμός μη μηδενικών μεταβλητών	m (= αριθμός περιορισμών)	$n - 1$ (= αριθμός ακμών του δένδρου)
Επαναληπτικό βήμα	Μετάβαση σε μια γειτονική κορυφή με αντικατάσταση μιας βασικής μεταβλητής από μια μη βασική (μηδενική).	Αναμόρφωση του δένδρου με αντικατάσταση ενός κλάδου του από έναν κλάδο με μηδενική μεταφορά.
Αριθμός επαναλήψεων	$(2 \div 3)\, m$	n

Το θεώρημα ακεραίου

Έστω το πρόβλημα μεταφόρτωσης:

min $\quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}$

έτσι ώστε $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

τέτοιο ώστε όλα τα στοιχεία του διανύσματος **b** να είναι ακέραιοι αριθμοί.

α) Αν το πρόβλημα έχει μία τουλάχιστον εφικτή λύση, τότε αυτή είναι ακέραια.

β) Αν το πρόβλημα έχει μία βέλτιστη λύση, τότε αυτή είναι ακέραια.

Προβλήματα βελτιστοποίησης της μορφής:

min $\quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}$

έτσι ώστε $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

όπου **x** διάνυσμα ακέραιων μεταβλητών ελέγχου

καλούνται μοντέλα *ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού* (integer linear programming). Ο χειρισμός τέτοιων συστημάτων είναι δυσχερής, λόγω του περιορισμού ακέραιων τιμών. Ωστόσο, αν μπορούν να διατυπωθούν ως προβλήματα μεταφόρτωσης (αν το **A** είναι ένα μητρώο πρόσπτωσης δικτύου με στοιχεία 1, –1 και 0), τότε μπορούν να επιλυθούν με τη δικτυακή simplex.

Εφαρμογή: Μοντέλα χρονικού προγραμματισμού έργων (CPM)

Ειδικές μορφές του προβλήματος μεταφόρτωσης

α) Το πρόβλημα εκχώρησης (assignment problem)

Ορισμός: Το πρόβλημα της βέλτιστης αντιστοίχισης n κόμβων αφετηρίας σε n κόμβους προορισμού. Κάθε μεταβλητή απόφασης x_{ij} λαμβάνει την τιμή 1 αν υπάρχει αντιστοίχιση μεταξύ των κόμβων i, j και 0 αν δεν υπάρχει. Το πρόβλημα επιλύεται με τη δικτυακή simplex, με εφαρμογή του θεωρήματος ακεραίου.

Μαθηματική διατύπωση

min $\quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

έτσι ώστε $\quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$x_{ij} = 0$ ή 1 για κάθε i και j

β) Το πρόβλημα μεταφοράς (transportation problem)

Ορισμός: Το πρόβλημα μεταφόρτωσης στο δίκτυο του οποίου δεν υπάρχουν ενδιάμεσοι κόμβοι, ενώ κάθε ακμή συνδέει μία πηγή με έναν κόμβο κατανάλωσης.

Μαθηματική διατύπωση

min $\quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

έτσι ώστε $\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = r_i$ για κάθε κόμβο εισόδου (πηγή) $i = 1, 2, \ldots, m$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = s_j$ για κάθε κόμβο εξόδου (κατανάλωση) $j = 1, 2, \ldots, n$

Άνω φραγμένα προβλήματα μεταφόρτωσης

Μαθηματική διατύπωση

min $\quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{x}$

έτσι ώστε $\quad \mathbf{A}\, \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\quad \mathbf{0} \le \mathbf{x} \le \mathbf{u}$

Προσαρμογή της δικτυακής simplex

Οι περιορισμοί $x_{ij} \le u_{ij}$ αντιμετωπίζονται όπως οι περιορισμοί μη αρνητικότητας, θεωρώντας ότι $x_{ij} = 0$ ή $x_{ij} = u_{ij}$ εφόσον ο κλάδος (i, j) δεν ανήκει στο δένδρο T. Οι κλάδοι με $x_{ij} = u_{ij}$ καλούνται *κορεσμένοι* (saturated).

Σε κάθε επανάληψη ο υποψήφιος κλάδος (i, j) για εισαγωγή στο δένδρο θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$y_i + c_{ij} < y_j \text{ εφόσον } x_{ij} = 0$$

Αν δεν υπάρχει τέτοιος κλάδος, τότε εισάγεται ένας κορεσμένος κλάδος για τον οποίο ισχύει:

$$y_i + c_{ij} > y_j \text{ εφόσον } x_{ij} = u_{ij}$$

Αν κανένας κλάδος δεν ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες τότε η υφιστάμενη λύση είναι βέλτιστη.

Αν t είναι η ποσότητα οποία μεταφέρεται μέσω της εισερχόμενης ακμής (i, j) τότε οι ροές κατά μήκος του κυκλώματος που διαμορφώνεται αναθεωρούνται ως εξής:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + t \le u_{ij} & \text{αν η φορά της ακμής } (i, j) \text{ είναι ορθή} \\ x_{ij} - t \ge 0 & \text{αν η φορά της ακμής } (i, j) \text{ είναι ανάστροφη} \end{cases}$$

Άλλες μέθοδοι επίλυσης

Εναλλακτική μέθοδος (*Out-of-Kilter Algorithm*), κατάλληλη για ακέραιες τιμές των x_{ij}, έχει αναπτυχθεί από τους Ford και Fulkerson (Smith, 1982).

Το πρόβλημα μέγιστης ροής

Ορισμός: Η εκτίμηση της μέγιστης δυνατής ποσότητας που μπορεί να μεταφερθεί από μία πηγή s σε έναν προορισμό t μέσω ενός δικτύου, κάθε κλάδος (i, j) του οποίου έχει μια παροχετευτικότητα u_{ij}.

Τομή (cut) του δικτύου καλείται κάθε σύνολο C κόμβων αυτού, το οποίο περιλαμβάνει την πηγή s αλλά όχι τον κόμβο προορισμού t. Η ποσότητα:

$$k_c = \sum_{\substack{j \in C \\ k \notin C}} u_{jk}$$

καλείται *χωρητικότητα* (capacity) της τομής C.

Το θεώρημα μέγιστης ροής – ελάχιστης τομής (max-flow min-cut)

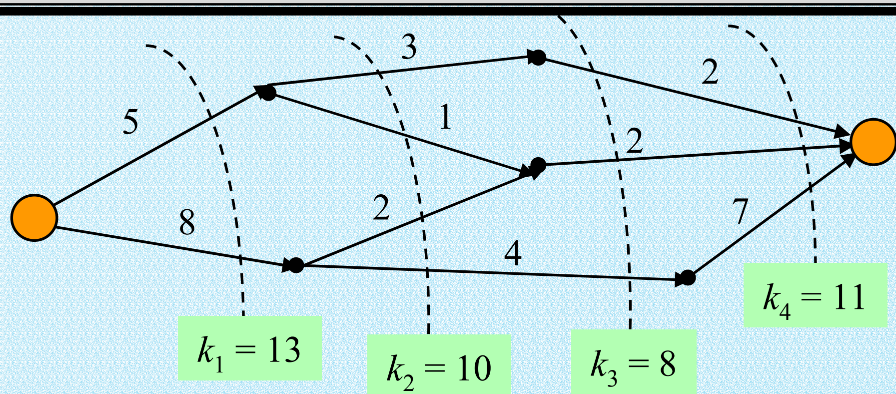
Κάθε πρόβλημα μέγιστης ροής ικανοποιεί μία ακριβώς από τις ακόλουθες συνθήκες:

α) Το δίκτυο μπορεί να μεταφέρει απεριόριστα μεγάλες παροχές και η χωρητικότητα οποιασδήποτε τομής είναι μη πεπερασμένη.

β) Το δίκτυο μπορεί να μεταφέρει μια μέγιστη παροχή, η τιμή της οποίας ταυτίζεται με την ελάχιστη χωρητικότητα μιας τομής αυτού.

Παράδειγμα

Στο δίκτυο του σχήματος η ελάχιστη χωρητικότητα αντιστοιχεί στην τομή 3 με $k_3 = 8$ και ισούται με τη μέγιστη ροή που μπορεί να μεταφερθεί από το δίκτυο.



Βασική βιβλιογραφία – Εφαρμογές

Θεωρία γραμμικού προγραμματισμού

- Chvátal, V., *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company, 1983.
- Deo, N., *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice-Hall, Inc., 1974.
- Hillier F., G. Lieberman, *Operations Research*, Holden-Day, Inc., 1967, 1974, 1980, 1989 (ελληνική μετάφραση από τις Εκδόσεις Παπαζήση).
- Smith, D. K., *Network Optimization Practice: A Computational Guide*, John Wiley and Sons, 1982.
- Hillier F., G. Lieberman, *Operations Research*, Holden-Day, Inc., 1967, 1974, 1980, 1989 (ελληνική μετάφραση από τις Εκδόσεις Παπαζήση).
- Neufville, R. de, *Applied Systems Analysis*, McGraw-Hill, 1990.
- Winston, and Wayne, R., *Operations Research*, Duxbury Press, 1994.
- Winston, W, L., and S. C. Albright, *Practical Management Science, Spreadsheet modeling and Applications,* Duxbury, Belmont, 1997.
- Ξηρόκωστας, Δ., *Γραμμικός Προγραμματισμός*, Σημειώσεις παραδόσεων στο Ε.Μ.Π., 1980.

Εφαρμογές στα συστήματα υδατικών πόρων

- Haith, D., *Environmental Systems Optimization*, John Wiley & Sons, 1982.
- Loucks, D. P., Stedinger, J. R., and Haith, D. A., *Water Resources System Planning and Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1981.
- ReVelle, C., *Optimizing Reservoir Resources*, John Wiley & Sons, 1999.