Στοχαστικές Μέθοδοι στους Υδατικούς Πόρους
Τυχαίες μεταβλητές, στοχαστικές ανελίξεις και χρονοσειρές

Δημήτρης Κουτσογιάννης

Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος,
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα – Επανέκδοση 2013

1. Υπενθύμιση εννοιών πιθανοτήτων και στατιστικής

Πιθανότητα

Βασικό σύνολο, Ω:	Σύνολο που τα στοιχεία του δ αντιστοιχούν στις δυνατές εκβάσεις ενός πειράματος ή μιας διεργασίας. Είναι γνωστό και ως δειγματικός χώρος ή βέβαιο γεγονός.
σ-άλγεβρα ή σ-πεδίο, Σ:	Σύνολο υποσυνόλων δ του Ω με τις εξής ιδιότητες: (α) $\Omega \in \Sigma$, $\varnothing \in \Sigma$· (β) αν $\delta \in \Sigma$ τότε $\Omega - \delta \in \Sigma$· (γ) η ένωση (αριθμήσιμα) πολλών στοιχείων του Σ είναι στοιχείο του Σ.
Πιθανότητα, $P(\delta)$:	Απεικόνιση του Σ στο διάστημα [0, 1] που πληροί τα εξής αξιώματα: (Ι, μη αρνητικότητα) $P(\delta) \geq 0$. (ΙΙ, κανονικοποίηση) $P(\Omega) = 1$. (ΙΙΙ, προσθετικότητα) Αν $\delta_1\delta_2 = \varnothing$, $P(\delta_1 + \delta_2) = P(\delta_1) + P(\delta_2)$
Πιθανοτικός χώρος:	Η τριάδα (Ω, Σ, P).

Σημείωση: Αν το Σ είναι απειροσύνολο, τότε ο ορισμός της πιθανότητας χρειάζεται και ένα τέταρτο αξίωμα, αυτό της συνέχειας στο μηδέν: Αν $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία γεγονότων με $A_1A_2\ldots A_n\ldots = \varnothing$, τότε $\lim_{n\to\infty}P(A_n) = 0$.

Τυχαία μεταβλητή, Συνάρτηση κατανομής, Πυκνότητα πιθανότητας, Περίοδος επαναφοράς

Τυχαία μεταβλητή, $\underline{x}(\omega)$: Απεικόνιση του δειγματικού χώρου στο R.

Συνάρτηση κατανομής: $F(x) := P\{\underline{x} \le x\}$

Πιθανότητα υπέρβασης: $\bar{F}(x) = P\{\underline{x} > x\} = 1 - F(x)$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: $f(x) := \dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$

Περίοδος επαναφοράς μέγιστων τιμών $T = \dfrac{\varDelta}{P\{\underline{x} > x\}} = \dfrac{\varDelta}{\bar{F}(x)} = \dfrac{\varDelta}{1 - F(x)}$

Περίοδος επαναφοράς ελάχιστων τιμών $T = \dfrac{\varDelta}{P\{\underline{x} \le x\}} = \dfrac{\varDelta}{F(x)} = \dfrac{\varDelta}{1 - \bar{F}(x)}$

όπου $\varDelta$ χρονική μονάδα, συνήθως 1 έτος.

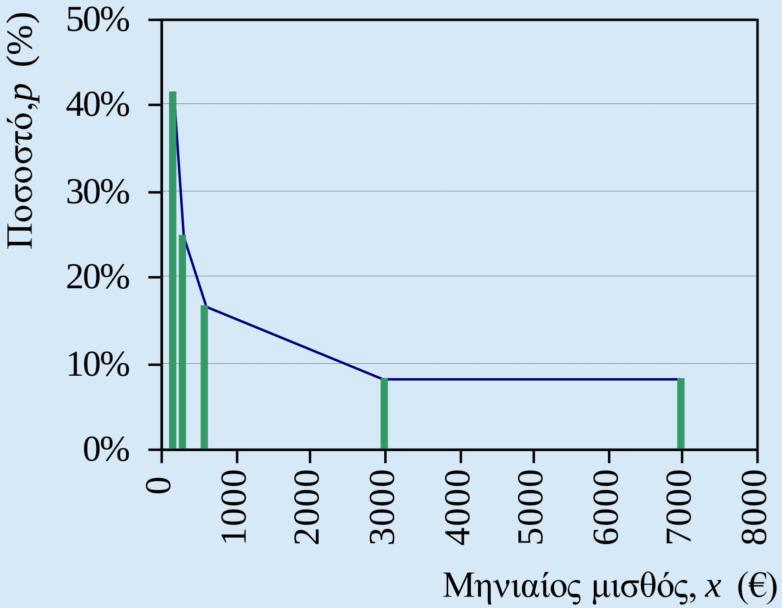
Σημειώσεις: (1) Σύμφωνα με τη σύμβαση που ακολουθούμε εδώ, οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με υπογραμμισμένα γράμματα, ενώ οι τιμές τους δεν έχουν υπογράμμιση. (2) Στην περίπτωση που εξετάζουμε πολλές τυχαίες μεταβλητές π.χ. $\underline{x}$, $\underline{y}$ κτλ. οι συναρτήσεις κατανομής, πιθανότητας υπέρβασης και πυκνότητας πιθανότητας που αναφέρονται σε αυτές φέρουν αντίστοιχους δείκτες π.χ. $F_{\underline{x}}(x)$, $F_{\underline{y}}(y)$ κτλ. Για απλοποίηση μπορεί να παραλείπουμε την υπογράμμιση του δείκτη, δηλ. $F_{\underline{x}}(x)$, $F_{\underline{y}}(y)$ κτλ.

Χαρακτηριστικές παράμετροι τυχαίας μεταβλητής με διακριτές τιμές

Μισθός (x_i)	Άτομα (v_i)	Ποσοστό (p_i)	$p_i\, x_i$	$p_i\,(x_i-\mu)^2$	$p_i\,(x_i-\mu)^3$
150	5	41.7%	63	353306	-325335799
300	3	25.0%	75	148546	-114504214
600	2	16.7%	100	36947	-17396038
3 000	1	8.3%	250	310140	598312398
7 000	1	8.3%	583	2929585	17369996425
Σ	12	100.0%	1 071	3778524	17511072772
			Μέση τιμή (μ)	Διασπορά (σ^2)	Τρίτη κεντρική ροπή ($\mu^{(3)}$)

Το παράδειγμα του μισθολογίου μιας μικρομεσαίας επιχείρησης

Μέση τιμή (μ):	1 071
Πιθανότερη τιμή (x_p):	150
Διάμεση τιμή ($x_{0.5}$):	300
Τυπική απόκλιση (σ)	1 944
Συντελεστής διασποράς ($C_V = \sigma/\mu$)	1.82
Συντελεστής ασυμμετρίας ($C_S = \mu^{(3)}/\sigma^3$)	2.38



Ροπές συνεχούς μεταβλητής

Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή $\underline{x}$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και συνάρτηση κατανομής $F(x)$. Ορίζονται τα ακόλουθα μεγέθη:

Ροπή περί την αρχή τάξης r ($r = 1, 2, \ldots$): $m_r \equiv \mathrm{E}[\underline{x}^r] := \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,\mathrm{d}x$

Ειδική περίπτωση – **Μέση τιμή** ($r = 1$): $m \equiv \mathrm{E}[\underline{x}]$

Κεντρική ροπή τάξης r ($r = 1, 2, \ldots$): $\mu_r \equiv \mathrm{E}[(\underline{x} - m)^r] := \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^r f(x)\,\mathrm{d}x$

Ειδικές περιπτώσεις:

Διασπορά ($r = 2$): $\sigma^2 := \mu_2 \equiv \mathrm{E}[(\underline{x} - m)^2] \equiv \mathrm{Var}[\underline{x}]$ $\quad\sigma^2 = m_2 - m^2$

Τρίτη κεντρική ροπή ($r = 3$): $\mu_3 \equiv \mathrm{E}[(\underline{x} - m)^3]$ $\quad\mu_3 = m_3 - 3\,m_2\,m + 2\,m^3$

Τέταρτη κεντρική ροπή ($r = 4$): $\mu_4 \equiv \mathrm{E}[(\underline{x} - m)^4]$ $\quad\mu_4 = m_4 - 4\,m_3\,m + 6\,m_2\,m^2 - 3\,m^4$

Αδιάστατοι συντελεστές

Συντελεστής μεταβλητότητας: $C_\mathrm{v} := \sigma / m$

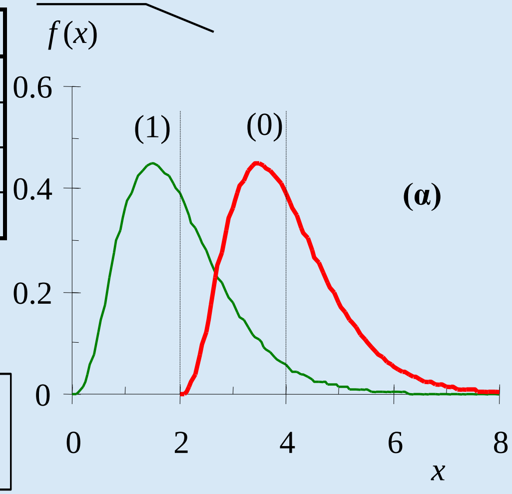
Συντελεστής ασυμμετρίας: $C_\mathrm{s} := \mu_3 / \sigma^3$

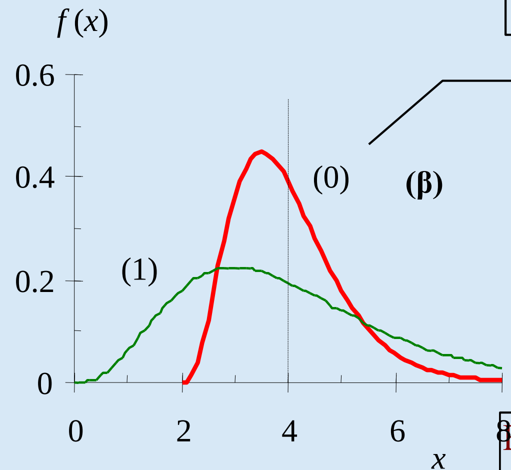
Συντελεστής κύρτωσης: $C_\mathrm{k} := \mu_4 / \sigma^4$

Ροπές και σχήμα κατανομής

Επίδραση της μέσης τιμής

	(0)	(1)
μ	4	2
σ	1	1
C_s	1	1
C_k	4.5	4.5



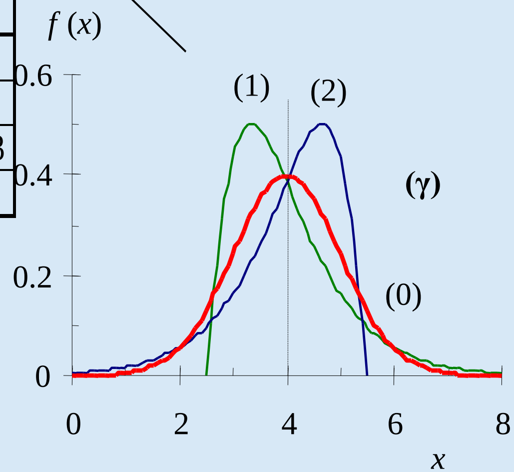


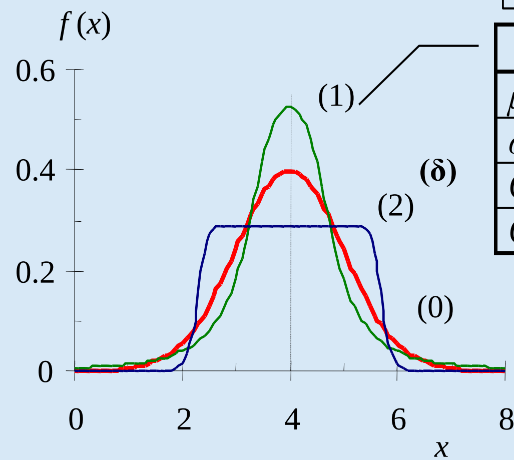
Επίδραση της τυπικής απόκλισης

	(0)	(1)
μ	4	4
σ	1	2
C_s	1	1
C_k	4.5	4.5

Επίδραση του συντε-λεστή ασυμμετρίας

	(0)	(1)	(2)
μ	4	4	4
σ	1	1	1
C_s	0	1.33	-1.33
C_k	3	5.67	5.67





Επίδραση του συντελεστή κύρτωσης

	(0)	(1)	(2)
μ	4	4	4
σ	1	1	1
C_s	0	0	0
C_k	3	5	2

Εκτιμήσεις ροπών

Εκτίμηση ροπής περί την αρχή από δείγμα (αμερόληπτη): $\hat{m}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$

Ειδική περίπτωση – Δειγματική μέση τιμή: $\bar{x} := \hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Εκτίμηση κεντρικής ροπής από δείγμα (μεροληπτική):
Από τη σχέση κεντρικής ροπής προς ροπή περί την αρχή ή, ισοδύναμα από τη γενική σχέση $\hat{\mu}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r$

Ειδική περίπτωση – Δειγματική μέση τιμή: $s^2 := \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$

Αμερόληπτη δειγματική διασπορά: $s^{*2} = \frac{n}{n-1} s^2$

Πιθανοφάνεια

Έστω η τυχαία μεταβλητή $\underline{x}$ με συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$ και συνάρτηση κατανομής $F(x)$.

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $F(x)$ εξαρτώνται από m παραμέτρους $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$· γι' αυτό και μπορεί να συμβολίζονται $f(x| \theta_1, \ldots, \theta_m)$ και $F(x| \theta_1, \ldots, \theta_m)$, αντίστοιχα.

Έστω ακόμη δείγμα n τιμών της μεταβλητής $\underline{x}$, που συμβολίζεται ως $(x_1, \ldots, x_n)$.

Η **συνάρτηση πιθανοφάνειας** ορίζεται από τη σχέση

$$\Pi(\theta_1, \ldots, \theta_m | x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta_1, \ldots, \theta_m)$$

Η **λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας** ορίζεται από τη σχέση

$$L(\theta_1, \ldots, \theta_m | x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i | \theta_1, \ldots, \theta_m)$$

Πιθανοτικά σταθμισμένες ροπές και L ροπές – Ορισμοί

Πιθανοτικά σταθμισμένη ροπή (probability-weighted moment) τάξης r (r = 0, 1, 2, …):

$$\beta_r \equiv \mathrm{E}[\underline{x}\,(F(\underline{x}))^r] := \int_{-\infty}^{\infty} x\,(F(x))^r\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x(u)\, u^r\,\mathrm{d}u$$

L ροπή τάξης r (r = 0, 1, …): $\lambda_r \equiv \mathrm{E}[\underline{x}\, P^*_{r-1}(F(\underline{x}))] := \int_0^1 x(u)\, P^*_{r-1}(u)\,\mathrm{d}u$

όπου $P^*_r(u)$ το μετατοπισμένο πολυώνυμο Legendre βαθμού r, ήτοι $P^*_r(u) := \sum_{k=0}^{r} p^*_{r,k}\, u^k$

με συντελεστές $p^*_{r,k} := (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} = \dfrac{(-1)^{r-k}\,(r+k)!}{(k!)^2\,(r-k)!}$

Σχέση L ροπών και πιθανοτικά σταθμισμένων ροπών: $\lambda_r = \sum_{k=0}^{r-1} p^*_{r,k}\;\beta_r$

Σημείωση: Οι πιθανοτικά σταθμισμένες ροπές έχουν εισαχθεί από τους Greenwood et al. (1979) και οι L ροπές από τον Hosking (1990).

Ειδικές περιπτώσεις L ροπών – Πρακτικό νόημα

Ειδικές περιπτώσεις:

$r = 1$: $\lambda_1 = \beta_0$ $\qquad$ $\lambda_1 = \mathrm{E}[\underline{x}] = m$

$r = 2$: $\lambda_2 = 2\,\beta_1 - \beta_0$ $\qquad$ $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[\underline{x}_{(1|2)} - \underline{x}_{(2|2)}]$

$r = 3$: $\lambda_3 = 6\,\beta_2 - 6\,\beta_1 + \beta_0$ $\qquad$ $\lambda_3 = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{E}[\underline{x}_{(1|3)} - 2\underline{x}_{(2|3)} + \underline{x}_{(3|3)}]$

$r = 4$: $\lambda_4 = 20\,\beta_3 - 30\,\beta_2 + 12\,\beta_1 - \beta_0$ $\qquad$ $\lambda_4 = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{E}[\underline{x}_{(1|4)} - 3\underline{x}_{(2|4)} + 3\underline{x}_{(3|4)} - \underline{x}_{(4|4)}]$

όπου $\underline{x}_{(i|n)}$ συμβολίζει την τυχαία μεταβλητή με την i-οστή μεγαλύτερη τιμή ανάμεσα από n.

Αδιάστατοι συντελεστές

L συντελεστής μεταβλητότητας: $\tau_2 = \lambda_2 / \lambda_1$

L συντελεστής ασυμμετρίας: $\tau_3 = \lambda_3 / \lambda_2$

L συντελεστής κύρτωσης: $\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2$

Εκτιμήσεις των πιθανοτικά σταθμισμένων ροπών

Μεροληπτικές εκτιμήσεις – Γενικός τύπος: $\hat{\beta}_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{j - 0.35}{n}\right)^r x_{(j)}$

Αμερόληπτες εκτιμήσεις – Γενικός τύπος: $\hat{\beta}^*_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-r}\frac{\binom{n-j}{r}}{\binom{n-1}{r}} x_{(j)}$

όπου n το μέγεθος του δείγματος και $x_{(j)}$ ($j = 1, \ldots, n$) η j-οστή μεγαλύτερη τιμή στο δείγμα.

Ειδικές περιπτώσεις:

Μεροληπτικές εκτιμήσεις	Αμερόληπτες εκτιμήσεις
$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}^*_0 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{(j)}$	
$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{j - 0.35}{n}\right) x_{(j)}$	$\hat{\beta}^*_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-r}\frac{n-j}{n-1} x_{(j)}$
$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{j - 0.35}{n}\right)^2 x_{(j)}$	$\hat{\beta}^*_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-r}\frac{n-j}{n-1}\,\frac{n-j-1}{n-2} x_{(j)}$
$\hat{\beta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{j - 0.35}{n}\right)^3 x_{(j)}$	$\hat{\beta}^*_3 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-r}\frac{n-j}{n-1}\,\frac{n-j-1}{n-2}\,\frac{n-j-2}{n-3} x_{(j)}$

Μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων κατανομής

1. Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας:

$$\max L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_m) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \theta_1, \ldots, \theta_m)$$

   Ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(x_i, \theta_1, \ldots, \theta_m)} \frac{\partial f(x_i, \theta_1, \ldots, \theta_m)}{\partial \theta_r} = 0$$

2. Μέθοδος ροπών:

$$m_r(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \hat{m}_r(x_1, \ldots, x_n)$$

   Ισοδύναμα

$$\mu_r\,(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \hat{\mu}_r(x_1, \ldots, x_n)$$

3. Μέθοδος L ροπών:

$$\lambda_r(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \hat{\lambda}^*_r(x_1, \ldots, x_n)$$

   Εναλλακτικά

$$\lambda_r\,(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \hat{\lambda}_r(x_1, \ldots, x_n)$$

Όλες οι μέθοδοι καταλήγουν σε m εξισώσεις ($r = 1, \ldots, m$) με αγνώστους τις m παραμέτρους $\theta_1, \ldots, \theta_m$. Ειδικά η αρχική μορφή της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά χωρίς καν να γραφούν οι εξισώσεις.

Από κοινού ιδιότητες δύο τυχαίων μεταβλητών

Από κοινού συνάρτηση κατανομής του ζεύγους μεταβλητών $(\underline{x}, \underline{y})$: $F_{xy}(x, y) := P\{\underline{x} \le x, \underline{y} \le y\}$

Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών: $f_{xy}(x, y) := \dfrac{\partial^2 F_{xy}(x, y)}{\partial x\, \partial y}$

Περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των $\underline{x}$ και $\underline{y}$: $F_x(x) := P\{\underline{x} \le x\}$, $F_y(y) := P\{\underline{y} \le y\}$

Από κοινού ροπή τάξης $p + q$ των $\underline{x}$ και $\underline{y}$: $m_{pq} \equiv \mathrm{E}[\underline{x}^p\, \underline{y}^q] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q\, f_{xy}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

Περιθώριες πρώτες ροπές (μέσες τιμές) των $\underline{x}$ και $\underline{y}$: $m_x \coloneqq m_{10}$, $m_y \coloneqq m_{10}$

Από κοινού κεντρική ροπή τάξης $p + q$ των X και Y:

$$\mu_{pq} \equiv \mathrm{E}[(\underline{x} - m_x)^p(\underline{y} - m_y)^q] := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^p(y - m_y)^q\, f_{xy}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Συνδιασπορά των $\underline{x}$ και $\underline{y}$: $\sigma_{xy} := \mu_{11} \equiv \mathrm{Cov}[\underline{x}, \underline{y}] \equiv \mathrm{E}[(\underline{x} - m_x)(\underline{y} - m_y)] = \mathrm{E}[\underline{x}\underline{y}] - \mathrm{E}[\underline{x}]\, \mathrm{E}[\underline{y}]$

Συντελεστής συσχέτισης: $\rho_{xy} := \dfrac{\mathrm{Cov}[\underline{x}, \underline{y}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\, \mathrm{Var}[Y]}} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\, \sigma_y}$ $(-1 \le \rho_{xy} \le 1)$

Ανεξάρτητες μεταβλητές: $F_{xy}(x, y) = F_x(x)\, F_y(y)$

Ασυσχέτιστες μεταβλητές: $\sigma_{xy} = 0$, $\mathrm{E}[\underline{x}\, \underline{y}] = \mathrm{E}[\underline{x}]\, \mathrm{E}[\underline{y}]$, $\rho_{xy} = 0$

2. Στοχαστικές ανελίξεις

Στοχαστική ανέλιξη: οικογένεια μεταβλητών $\underline{x}_t$ [ή $\underline{x}(t)$] όπου t είναι παράμετρος που παίρνει τιμές από ένα κατάλληλο σύνολο T (**δεικτοσύνολο)**, το οποίο συνήθως παριστάνει χρόνο.

Ανέλιξη σε διακριτό χρόνο: όταν το δεικτοσύνολο αντιστοιχεί σε διακριτές μονάδες χρόνου, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Ανέλιξη σε συνεχή χρόνο: όταν το δεικτοσύνολο αντιστοιχεί σε συνεχή χρόνο, π.χ. $T = [0, \infty)$.

Χρονοσειρά ή **δειγματοσυνάρτηση**: μια υλοποίηση της στοχαστικής ανέλιξης, δηλαδή ένα σύνολο παρατηρήσεων $x(t)$ της $\underline{x}(t)$, για μεταβαλλόμενο χρόνο t.

Συνάρτηση κατανομής πρώτης τάξης της ανέλιξης: $F(x; t) := P\{\underline{x}(t) \le x\}$

Συνάρτηση κατανομής δεύτερης τάξης: $F(x_1, x_2; t_1, t_2) := P\{\underline{x}(t_1) \le x_1, \underline{x}(t_2) \le x_2\}$

Συνάρτηση κατανομής *n* τάξης: $F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) := P\{\underline{x}(t_1) \le x_1, \ldots, \underline{x}(t_n) \le x_n\}$

Μέση τιμή της ανέλιξης: $\mu(t) := \mathrm{E}[\underline{x}(t)]$

Αυτοσυνδιασπορά της ανέλιξης $C(t; \tau) := \mathrm{Cov}[\underline{x}(t), \underline{x}(t + \tau)] = \mathrm{E}[(\underline{x}(t) - \mu(t))\,(\underline{x}(t + \tau) - \mu(t + \tau))]$

Διασπορά της ανέλιξης**:** $C(t; 0) = \mathrm{Var}[\underline{x}(t)] = \mathrm{Cov}[\underline{x}(t), \underline{x}(t)]$

Συντελεστής αυτοσυσχέτισης: $\rho(t; \tau) := \dfrac{\mathrm{Cov}[\underline{x}(t),\ \underline{x}(t + \tau)]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\underline{x}(t)]\ \mathrm{Var}[\underline{x}(t + \tau)]}} = \dfrac{C(t; \tau)}{\sqrt{C(t; 0)\ C(t + \tau; 0)}}$

Ετεροσυνδιασπορά δύο ανελίξεων $\underline{x}(t)$ και $\underline{y}(t)$: $C_{xy}(t; \tau) := \mathrm{Cov}[\underline{x}(t), \underline{y}(t + \tau)]$

Συντελεστής ετεροσυσχέτισης δύο ανελίξεων $\underline{x}(t)$ και $\underline{y}(t)$: $r_{xy}(t; \tau) := \dfrac{\mathrm{Cov}[\underline{x}(t),\ \underline{y}(t + \tau)]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\underline{x}(t)]\ \mathrm{Var}[\underline{y}(t + \tau)]}}$

Στάσιμες και εργοδικές στοχαστικές ανελίξεις

Στασιμότητα

Γενικά οι στατιστικές παράμετροι μιας στοχαστικής ανέλιξης, π.χ. η μέση τιμή και η διασπορά της, μπορεί να μεταβάλλονται στο χρόνο. Ωστόσο, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι στάσιμες ανελίξεις στις οποίες δεν υπάρχει μεταβολή των στατιστικών χαρακτηριστικών με την πάροδο του χρόνου.

Μια στοχαστική ανέλιξη λέγεται **στάσιμη με την αυστηρή έννοια**, ή απλώς **στάσιμη**, όταν η συνάρτηση κατανομής της δεν επηρεάζεται από το χρόνο, δηλαδή αν, για τυχούσα χρονική μετατόπιση τ, η συνάρτηση κατανομής οποιασδήποτε τάξης της $\underline{x}(t+\tau)$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση κατανομής της ίδιας τάξης της $\underline{x}(t)$.

Μια στοχαστική ανέλιξη λέγεται **στάσιμη με την ευρεία** (ή **ελαστική**) **έννοια** αν η μέση τιμή της είναι σταθερή και η αυτοσυνδιασπορά της εξαρτάται μόνο από τη διαφορά του χρόνου, δηλαδή αν

$$\mathrm{E}[\underline{x}(t)] = \mu = \text{σταθερά}, \quad \mathrm{E}[(\underline{x}(t)-\mu)(\underline{x}(t+\tau)-\mu)] = C(\tau)$$

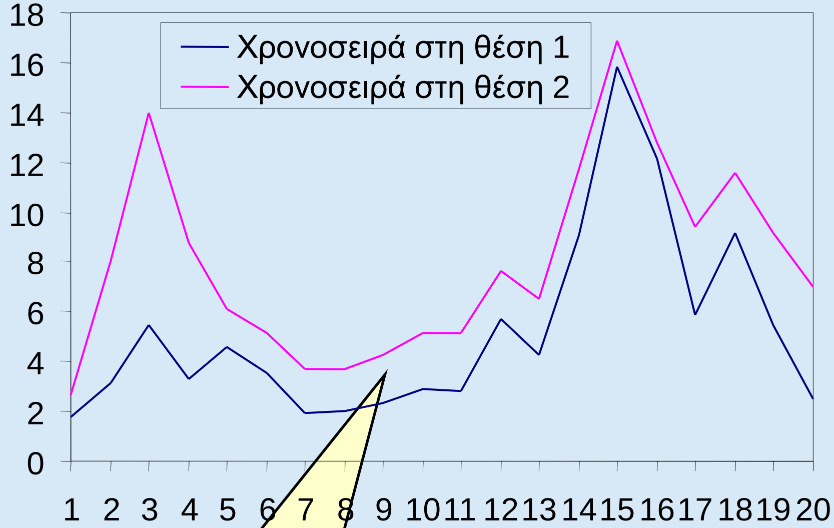
Εργοδικότητα

Μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη είναι **εργοδική** αν κάθε παράμετρος της κατανομής μπορεί να προσδιοριστεί από μια απλή δειγματοσυνάρτηση της ανέλιξης. Δεδομένου ότι οι παράμετροι υπολογίζονται ως χρονικές μέσες τιμές, ο παραπάνω ορισμός εκφράζεται και με τον εξής τρόπο: Μια ανέλιξη είναι εργοδική αν οι χρονικοί μέσοι είναι ίσοι με τους θεωρητικούς μέσους. Για παράδειγμα, μια ανέλιξη είναι εργοδική ως προς τη μέση τιμή αν

$$\mathrm{E}[\underline{x}(t)] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}\underline{x}(t) \text{ (για διακριτό χρόνο)}, \quad \mathrm{E}[\underline{x}(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\underline{x}(t)\,\mathrm{d}t \text{ (για συνεχή χρόνο)}$$

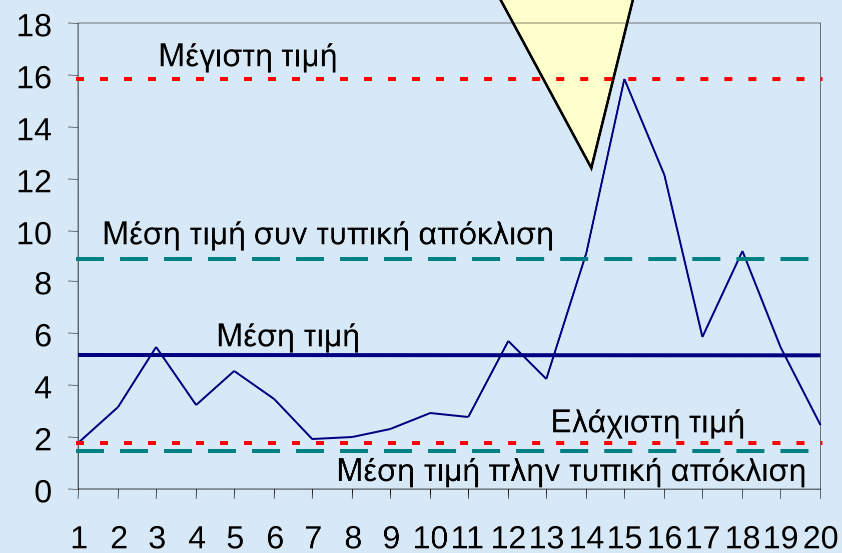
3. Γραφική επεξήγηση των ουσιωδών στατιστικών χαρακτηριστικών

(α) Περιθώρια χαρακτηριστικά



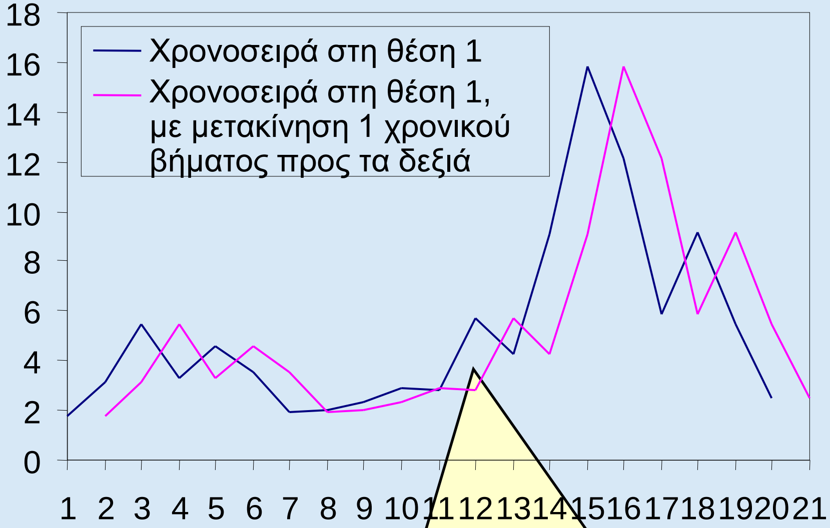
Οι δύο χρονοσειρές προέρχονται από στάσιμες ανελίξεις (σε δύο θέσεις)

Η ύπαρξη αρκετών πολύ ψηλών τιμών, πάνω από το επίπεδο της μέσης τιμής συν την τυπική απόκλιση, και η απουσία πολύ χαμηλών τιμών, κάτω από το επίπεδο της μέσης τιμής πλην την τυπική απόκλιση, είναι ενδεικτική της **θετικής ασυμμετρίας**



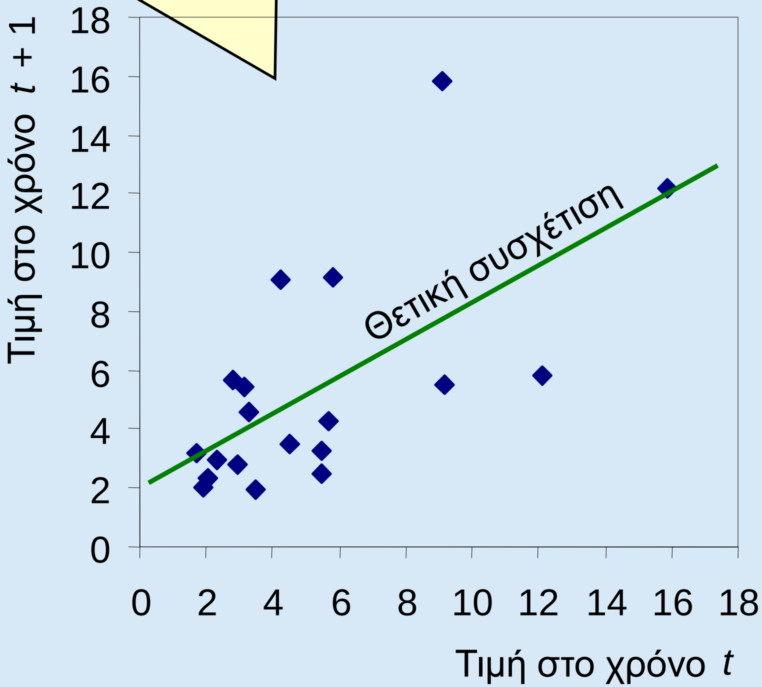
Επεξήγηση των περιθώριων στατιστικών χαρακτηριστικών στη θέση 1

(β) Συντελεστές αυτοσυσχέτισης

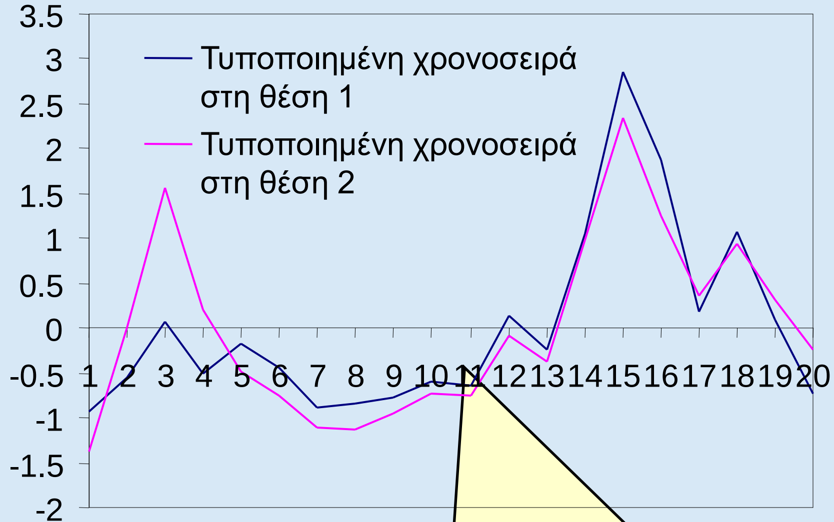


Το γεγονός ότι, αν η χρονοσειρά μετακινηθεί 1 χρονικό βήμα προς τα δεξιά, το γράφημά της παραμένει κοντά στο αρχικό, είναι ενδεικτικό μιας σημαντικής τιμής του συντελεστή αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1

Αυτό φαίνεται καλύτερα αν απεικονιστούν οι τιμές της μετακινημένης χρονοσειράς συναρτήσει αυτών της αρχικής

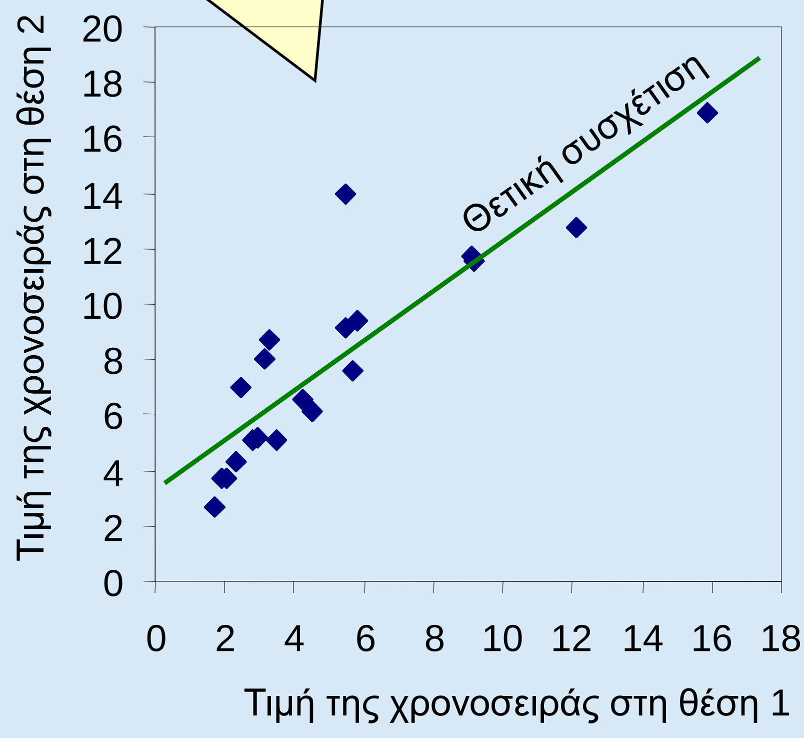


(γ) Συντελεστές ετεροσυσχέτισης



Το γεγονός ότι τα γραφήματα των δύο χρονοσειρών είναι κοντινά (εφόσον τυποποιηθούν με αφαίρεση της μέσης τιμής και μετά με διαίρεση με την τυπική απόκλιση) είναι ενδεικτικό ενός σημαντικού συντελεστή ετεροσυσχέτισης για μηδενική υστέρηση

Αυτό φαίνεται καλύτερα αν απεικονιστούν οι τιμές της μίας χρονοσειράς συναρτήσει αυτών της άλλης



Εφαρμογή

1. Από τα ιστορικά δείγματα βροχής στην Αλίαρτο και απορροής στη θέση Διώρυγα Καρδίτσας του Βοιωτικού Κηφισού (95 χρόνια) σε μηνιαία κλίμακα να σχηματιστούν (α) η ετήσια χρονοσειρά, (β) η συνολική μηνιαία χρονοσειρά και (γ) οι επιμέρους μηναιίες χρονοσειρές για κάθε μήνα.
2. Να εκτιμηθούν τα περιθώρια στατιστικά χαρακτηριστικά για τις τρεις χρονοσειρές καθεμιάς από τις δύο μεταβλητές.
3. Να κατασκευαστούν τα αυτοσυσχετογράμματα για τις τρεις χρονοσειρές καθεμιάς από τις δύο μεταβλητές.
4. Να κατασκευαστούν ετεροσυσχετογράμματα για τις χρονοσειρές (α) και (β) ανάμεσα στις δύο μεταβλητές.
5. Να γραφεί μια έκθεση σχετικά με τη στοχαστική συμπεριφορά των δύο μεταβλητών, όπως προκύπτει από τους παραπάνω υπολογισμούς και τα γραφήματα (ποιοτικές παρατηρήσεις).