Στοχαστικές Μέθοδοι στους Υδατικούς Πόρους
Στάσιμα στοχαστικά μοντέλα μιας μεταβλητής

Δημήτρης Κουτσογιάννης

Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος,
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα – Επανέκδοση 2013

Μοντέλα Μαρκόφ – Φυσική θεμελίωση

Γραμμικό σύστημα: Ένα σύστημα, του οποίου η είσοδος $h(t)$ και η έξοδος $q(t)$, όπου t ο χρόνος, συνδέονται με γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, δηλ. της μορφής

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n q}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} q}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + a_0 q = h$$

όπου a_i συντελεστές. Αποδεικνύεται η λύση της εξίσωσης είναι μια συνελικτική σχέση της μορφής

$$q(t) = \int_0^t h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

όπου $u(t)$ είναι η λεγόμενη *συνάρτηση απόκρισης* (*response function*) του συστήματος.

Γραμμική λεκάνη απορροής: Μια λεκάνη απορροής για την οποία υποτίθεται βάσιμα ότι μπορεί να θεωρηθεί γραμμικό σύστημα ως προς το μετασχηματισμό της καθαρής βροχής σε απορροή. Εν προκειμένω η είσοδος $h(t)$ είναι η καθαρή βροχόπτωση στη λεκάνη (= ολική βροχόπτωση − απώλειες) και $q(t)$ είναι η παροχή σε δεδομένη διατομή του υδατορεύματος.

Γραμμική λεκάνη πρώτης τάξης: Έστω ότι μια λεκάνη μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας γραμμικός ταμιευτήρας, στον οποίο η εκροή q είναι ανάλογη του αποθέματος S, ήτοι $q = k\,S$.
Η εξίσωση συνέχειας είναι $dS / dt + q = h$, οπότε προκύπτει η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, με σταθερούς συντελεστές:

$$\frac{1}{k} \frac{dq}{\mathrm{d}t} + q = h$$

Μοντέλα Μαρκόφ – Φυσική θεμελίωση (2)

Επίλυση της εξίσωσης της γραμμικής λεκάνης πρώτης τάξης: Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με e^{kt} προκύπτει

$$\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[q(t)\, e^{kt}] = h(t)\, e^{kt}$$

Οπότε η εξίσωση ολοκληρώνεται άμεσα και δίνει

$$q(t) = q(0)\, e^{-kt} + k\, e^{-kt} \int_0^t h(\xi)\, e^{k\xi}\, d\xi$$

Στοχαστική θεώρηση της διαφορικής εξίσωσης και της λύσης της: Αν η εισροή θεωρηθεί ότι αποτελεί στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο, $\underline{h}(t)$, τότε και η εκροή, $\underline{q}(t)$, αποτελεί στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο. Θα υποθέσουμε ότι η $\underline{h}(t)$ αποτελεί λευκό θόρυβο. Συγκεκριμένα, αποτελεί στάσιμη ανέλιξη, το $\underline{h}(t)$ είναι ανεξάρτητο του $\underline{h}(t')$ για κάθε $t' \neq t$, η μέση τιμή είναι $\mathrm{E}[\underline{h}(t)] = \mu$ και η αυτοσυνδιασπορά είναι

$$C_h(\tau) := \mathrm{Cov}[h(t), h(t+\tau)] = \sigma^2\, \delta(\tau)$$

όπου δ( ) η συνάρτηση δέλτα του Dirac ($\delta(0) = \infty$, $\delta(\tau) = 0$ για $\tau \neq 0$). Προφανώς, η $\underline{q}(t)$ δεν είναι λευκός θόρυβος, αφού η παραπάνω λύση της διαφορικής εξίσωσης δείχνει ότι τα μεγέθη $\underline{q}(t)$ και $\underline{q}(0)$ είναι εξαρτημένα. Παρακάτω θα εκφράσουμε ποσοτικά την εξάρτηση.

Σημείωση: Σύμφωνα με τα παραπάνω η διασπορά του $\underline{h}(t)$ είναι άπειρη. Σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα μήκους τ, αποδεικνύεται ότι η διασπορά του ολοκληρώματος του $\underline{h}(t)$ είναι πεπερασμένη, ίση με $\sigma^2\, \tau$. Κατά συνέπεια το μέγεθος σ έχει διαστάσεις $[\mathrm{h}]\mathsf{T}^{1/2}$.

Μοντέλα Μαρκόφ – Φυσική θεμελίωση (3)

Τιμή της ανέλιξης εκροής στο μελλοντικό χρόνο $t + \tau$: Ας υποθέσουμε ότι είναι γνωστές οι τιμές της ανέλιξης $\underline{q}(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή του διαστήματος $[0, t]$, θεωρώντας ότι το διάστημα $[0, t)$ αποτελεί το παρελθόν και η χρονική στιγμή t το παρόν. Ενδιαφερόμαστε για τη μελλοντική τιμή $\underline{q}(t + \tau)$. Από τη γενική λύση της διαφορικής προκύπτει:

$$\underline{q}(t + \tau) = \underline{q}(0)\, e^{-k(t + \tau)} + k\, e^{-k(t + \tau)} \int_0^{t + \tau} \underline{h}(\xi)\, e^{k\xi}\, d\xi$$

Αν αυτή συνδυαστεί με την αντίστοιχη έκφραση της $\underline{q}(t)$, προκύπτει η απλοποίηση:

$$\underline{q}(t + \tau) = \underline{q}(t)\, e^{-k\tau} + k \int_t^{t + \tau} \underline{h}(\xi)\, e^{k(\xi - t - \tau)}\, d\xi$$

Στην τελευταία εξίσωση παρατηρούμε:

(1) Οι δύο όροι του δεξιού μέλους είναι στοχαστικά ανεξάρτητοι, αφού οι τιμές του $\underline{h}(\xi)$ αναφέρονται σε χρόνους ξ μελλοντικούς και η εκροή του παρόντος $\underline{q}(t)$ δεν μπορεί να εξαρτάται από την εισροή του μέλλοντος $\underline{h}(\xi)$.

(2) Στην έκφραση δεν υπεισέρχονται καθόλου οι τιμές $\underline{q}(\xi)$ του παρελθόντος παρά μόνο η τιμή $\underline{q}(t)$ του παρόντος.

Μια ανέλιξη $\underline{x}(t)$ (εν προκειμένω η $\underline{q}(t)$) στην οποία, αν είναι γνωστό το παρόν, το μέλλον δεν εξαρτάται από παρελθόν αλλά μόνο από το παρόν, λέγεται **ανέλιξη Μαρκόφ**. Συμβολικά, για $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$, και $\tau > 0$,

$$P\{\underline{x}(t + \tau) \le x \mid x(t), x(t_n), \ldots, x(t_1)\} = P\{\underline{x}(t + \tau) \le x \mid x(t)\}$$

Μοντέλα Μαρκόφ – Φυσική θεμελίωση (4)

Μέση τιμή της ανέλιξης εκροής: Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές στη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης και επεκτείνοντας την αθροιστική ιδιότητα αναμενόμενων τιμών αθροισμάτων σε ολοκληρώματα, προκύπτει

$$\mathrm{E}[\underline{q}(t)] = \mathrm{E}[\underline{q}(0)]\, e^{-kt} + k\, e^{-kt} \int_0^t \mathrm{E}[\underline{h}(\xi)]\, e^{k\xi}\, d\xi$$

Δεδομένου ότι $\mathrm{E}[\underline{h}(\xi)] = \mu$, θα έχουμε $\mathrm{E}[\underline{q}(t)] = \mathrm{E}[\underline{q}(0)]\, e^{-kt} + e^{-kt} \mu\, (e^{kt} - 1) = \mu + e^{-kt} \{\mathrm{E}[\underline{q}(0)] - \mu\}$.
Αν $E[\underline{q}(0)] = \mu$, τότε $E[\underline{q}(t)] = \mu$ (στασιμότητα της μέσης τιμής της εκροής και ισότητα με αυτήν της εισροής, όπως είναι άλλωστε λογικό).

Διασπορά της ανέλιξης εκροής: Αφαιρώντας από τη γενική λύση της διαφορικής την παραπάνω εξίσωση μέσων τιμών και αντικαθιστώντας $\underline{q}'(t) = \underline{q}(t) - \mathrm{E}[\underline{q}(t)] = \underline{q}(t) - \mu$, και $\underline{h}'(t) = \underline{h}(t) - \mathrm{E}[\underline{h}(t)] = \underline{h}(t) - \mu$, παίρνουμε

$$\underline{q}'(t) = \underline{q}'(0)\, e^{-kt} + k\, e^{-kt} \int_0^t \underline{h}'(\xi)\, e^{k\xi}\, d\xi$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνοντας αναμενόμενες τιμές και προσέχοντας ότι (α) οι δύο όροι του δεύτερου μέλους είναι ανεξάρτητοι, (β) τα $\underline{h}'(\xi)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα για διαφορετικές τιμές του ξ, (γ) $\mathrm{E}[\underline{q}'^2(t)] = \mathrm{Var}[\underline{q}(t)]$, $\mathrm{E}[\underline{h}'^2(t)] = \mathrm{Var}[\underline{h}(t)] = \sigma^2\, \delta(0)$, παίρνουμε:

$$\mathrm{Var}[\underline{q}(t)] = \mathrm{Var}[\underline{q}(0)]\, e^{-2kt} + k^2\, e^{-2kt} \int_0^t \sigma^2\, e^{2k\xi}\, d\xi = k\, \sigma^2/2 + e^{-2kt}\{\mathrm{Var}[\underline{q}(0)] - k\, \sigma^2/2\}$$

Αν $\mathrm{Var}[\underline{q}(0)] = k\, \sigma^2/2$, τότε $\mathrm{Var}[\underline{q}(t)] = k\, \sigma^2/2$ (στασιμότητα της διασποράς της εκροής).

Μοντέλα Μαρκόφ – Φυσική θεμελίωση (5)

Αυτοσυνδιασπορά της ανέλιξης εκροής: Η εξίσωση που συνδέει τις τιμές $\underline{q}(t + \tau)$ και $\underline{q}(t)$ είναι:

$$\underline{q}(t + \tau) = \underline{q}(t)\, e^{-k\tau} + k \int_t^{t+\tau} \underline{h}(\xi)\, e^{k(\xi - t - \tau)}\, d\xi$$

Αφαιρώντας από αυτή τις μέσες τιμές και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της προηγούμενης σελίδας γράφουμε:

$$\underline{q}'(t + \tau) = \underline{q}'(t)\, e^{-k\tau} + k \int_t^{t+\tau} \underline{h}'(\xi)\, e^{k(\xi - t - \tau)}\, d\xi$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\underline{q}'(t)$, παίρνοντας αναμενόμενες τιμές, αξιοποιώντας την ανεξαρτησία των δύο όρων του δεύτερου μέλους και παρατηρώντας ότι $\mathrm{E}[\underline{q}'^2(t)] = \mathrm{Var}[\underline{q}(t)]$, $\mathrm{E}[\underline{q}'(t + \tau)\, \underline{q}'(t)] = \mathrm{Cov}[\underline{q}(t + \tau), \underline{q}(t)]$, βρίσκουμε

$$\mathrm{Cov}[\underline{q}(t + \tau), \underline{q}(t)] = e^{-k\tau}\, \mathrm{Var}[\underline{q}(t)]$$

Η τελευταία εξίσωση που δείχνει εκθετική μείωση της αυτοσυνδιασποράς (ή της αυτοσυσχέτισης) με τη χρονική υστέρηση τ είναι χαρακτηριστική των ανελίξεων Μαρκόφ.

Μοντέλα Μαρκόφ σε διακριτό χρόνο

Αν μας ενδιαφέρουν οι τιμές της εκροής σε διακριτές χρονικές στιγμές $t_i := i\,\Delta t$, αξιοποιούμε την εξίσωση που συνδέει τις τιμές $\underline{q}(t+\tau)$ και $\underline{q}(t)$ για $t = (i-1)\Delta t$ και $\tau = \Delta t$ και γράφουμε:

$$\underline{q}(i\,\Delta t) = \underline{q}((i-1)\Delta t + \Delta t) = \underline{q}((i-1)\Delta t)\, e^{-k\,\Delta t} + k \int_{(i-1)\Delta t}^{i\,\Delta t} \underline{h}(\xi)\, e^{k(\xi - i\,\Delta t)}\, \mathrm{d}\xi$$

Εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς, προσανατολισμένους στη διακριτοποίηση του χρόνου:

$$\underline{x}_i := \underline{q}(i\,\Delta t), \quad \underline{v}_i = k \int_{(i-1)\Delta t}^{i\,\Delta t} \underline{h}(\xi)\, e^{k(\xi - i\,\Delta t)}\, \mathrm{d}\xi = k \int_0^{\Delta t} \underline{h}(\xi + (i-1)\Delta t)\, e^{k(\xi - \Delta t)}\, \mathrm{d}\xi$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\underline{x}_i = a\,\underline{x}_{i-1} + \underline{v}_i$$

όπου $a := e^{-k\,\Delta t}$. Η $\underline{x}_i$ είναι στάσιμη ανέλιξη σε διακριτό χρόνο. Η ακολουθία των $\underline{v}_i$ αποτελεί λευκό θόρυβο σε διακριτό χρόνο. Η πιο πάνω σχέση ορίζει το **μοντέλο Μαρκόφ σε διακριτό χρόνο** ή αλλιώς **μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης** (autoregression) **τάξης 1** (συμβολικά AR(1)).

Αν μ_x και μ_v οι μέσες τιμές των $\underline{x}_i$ και $\underline{v}_i$, αντίστοιχα, γ_m η αυτοσυνδιασπορά της $\underline{x}_i$ για υστέρηση m, σ_v^2 η διασπορά της $\underline{v}_i$, και μ_{3x} και μ_{3v} οι τρίτες κεντρικές ροπές των $\underline{x}_i$ και $\underline{v}_i$, αντίστοιχα, τότε εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\mathrm{Cov}[\underline{x}_1, \underline{v}_i] = \mathrm{Cov}[\underline{x}_{i-1}, \underline{v}_i] = 0,\ \mathrm{Cov}[\underline{x}_i, \underline{v}_i] = \sigma_v^2,\ \mathrm{Cov}[\underline{x}_{i+m}, \underline{v}_i] = a^m \sigma_v^2 \quad (m > 0)$$

$$\gamma_m = a^m \gamma_0 \text{ (ειδικότερα } \boxed{\gamma_1 = a\,\gamma_0}\text{)}$$

$$\boxed{\mu_v = \mu_x (1-a),\ \sigma_v^2 = \gamma_0 (1-a^2),\ \mu_{3v} = \mu_{3x}(1-a^3)}$$

Οι εξισώσεις μέσα στα τετράγωνα χρησιμοποιούνται για την προσαρμογή του μοντέλου.

Μοντέλα μη Μαρκόφ – Φυσική θεμελίωση

Η έκφραση της αθροιστικής εκροής: Το μέγεθος της εκροής $\underline{q}(t)$ που εξετάστηκε ως εδώ αποτελεί στιγμιαίο μέγεθος (παροχή). Συχνά μας ενδιαφέρει το αθροιστικό μέγεθος (όγκος) μιας περιόδου τ, το οποίο ορίζεται ως

$$\underline{y}_\tau(t) := \int_t^{t+\tau} \underline{q}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \underline{Q}(t+\tau) - \underline{Q}(t), \text{ όπου } \underline{Q}(t) := \int_0^t \underline{q}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Υπολογίζουμε αρχικά το μέγεθος $\underline{Q}(t)$, που από τη γενική λύση της διαφορικής προκύπτει:

$$\underline{Q}(t) = \underline{q}(0) \int_0^t e^{-k\zeta}\,\mathrm{d}\zeta + k \int_{\zeta=0}^t \int_{\xi=0}^{\zeta} \underline{h}(\xi)\, e^{-k\zeta} e^{k\xi}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta$$

Αναδιατάσσουμε το διπλό ολοκλήρωμα και παίρνουμε:

$$\underline{Q}(t) = \underline{q}(0) \int_0^t e^{-k\zeta}\,\mathrm{d}\zeta + k \int_{\xi=0}^t \underline{h}(\xi)\, e^{k\xi} \int_{\zeta=\xi}^t e^{-k\zeta}\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\xi = \underline{q}(0)\,(1 - e^{-kt})/k + \int_0^t \underline{h}(\xi)\, e^{k\xi}\,(e^{-k\xi} - e^{-kt})\,\mathrm{d}\xi$$

$$\underline{Q}(t) = \underline{q}(0)\,(1 - e^{-kt})/k + \int_0^t \underline{h}(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^t \underline{h}(\xi)\, e^{-k(t-\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\underline{Q}(t+\tau) = \underline{q}(0)\,[1 - e^{-k(t+\tau)}]/k + \int_0^{t+\tau} \underline{h}(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^{t+\tau} \underline{h}(\xi)\, e^{-k(t+\tau-\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

Μοντέλα μη Μαρκόφ – Φυσική θεμελίωση (2)

Η έκφραση της αθροιστικής εκροής (συνέχεια): Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$\underline{y}_\tau(t) = \underline{Q}(t+\tau) - \underline{Q}(t) =$$

$$= \underline{q}(0)\, e^{-kt}(1 - e^{-k\tau})/k + \int_t^{t+\tau} \underline{h}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^t \underline{h}(\xi)\, e^{-k(t-\xi)}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^{t+\tau} \underline{h}(\xi)\, e^{-k(t+\tau-\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

Εφαρμόζοντας την πιο πάνω εξίσωση, εκφράζουμε το μέγεθος $Y_\tau(t-\tau)$ ως εξής:

$$\underline{y}_\tau(t-\tau) = \underline{q}(0)\, e^{k\tau} e^{-kt}(1 - e^{-k\tau})/k + \int_{t-\tau}^{t} \underline{h}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + e^{k\tau}\int_0^{t-\tau} \underline{h}(\xi)\, e^{-k(t-\xi)}\,\mathrm{d}\xi - e^{k\tau}\int_0^{t} \underline{h}(\xi)\, e^{-k(t+\tau-\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη με $e^{-k\tau}$ και αφαιρούμε κατά μέλη, οπότε

$$\underline{y}_\tau(t) - e^{-k\tau}\,\underline{y}_\tau(t-\tau) = \int_t^{t+\tau} \underline{h}(\xi)\,\mathrm{d}\xi - e^{-k\tau}\int_{t-\tau}^{t} \underline{h}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{t-\tau}^{t} \underline{h}(\xi)\, e^{-k(t-\xi)}\,\mathrm{d}\xi - \int_t^{t+\tau} \underline{h}(\xi)\, e^{-k(t+\tau-\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\underline{y}_\tau(t) = e^{-k\tau}\,\underline{y}_\tau(t-\tau) + \int_0^{\tau} \underline{h}(\xi+t)\,\mathrm{d}\xi - e^{-k\tau}\int_0^{\tau} \underline{h}(\xi+t-\tau)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{\tau} \underline{h}(\xi+t-\tau)\, e^{-k(\tau-\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

$$- \int_0^{\tau} \underline{h}(\xi+t)\, e^{-k(\tau-\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

Μοντέλα μη Μαρκόφ σε διακριτό χρόνο

Αν μας ενδιαφέρουν οι τιμές της αθροιστικής εκροής σε διακριτές χρονικές στιγμές $t_i := i\,\Delta t$, αξιοποιούμε την εξίσωση που συνδέει τις τιμές $\underline{y}_\tau(t)$ και $\underline{y}_\tau(t-\tau)$ για $t = i\,\Delta t$ και $\tau = \Delta t$ και γράφουμε:

$$\underline{y}_{\Delta t}(i\,\Delta t) = e^{-k\,\Delta t}\,\underline{y}_{\Delta t}((i-1)\Delta t) + \int_0^{\Delta t} \underline{h}(\xi + i\,\Delta t)\,\mathrm{d}\xi - e^{-k\,\Delta t}\int_0^{\Delta t} \underline{h}(\xi + (i-1)\Delta t)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{\Delta t} \underline{h}(\xi + (i-1)\Delta t)\,e^{k(\xi-\Delta t)}\,\mathrm{d}\xi$$

$$-\int_0^{\Delta t} \underline{h}(\xi + i\,\Delta t)\,e^{k(\xi-\Delta t)}\,\mathrm{d}\xi$$

Εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς, προσανατολισμένους στη διακριτοποίηση του χρόνου:

$$\underline{x}_i := \underline{y}_{\Delta t}(i\,\Delta t) = \int_{i\,\Delta t}^{(i+1)\Delta t} \underline{q}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^{\Delta t} \underline{q}(\xi + i\,\Delta t)\,\mathrm{d}\xi,\;\; \underline{w}_i = \int_0^{\Delta t} \underline{h}(\xi + i\,\Delta t)\,\mathrm{d}\xi\,,\; \underline{v}_i = \int_0^{\Delta t} \underline{h}(\xi + i\,\Delta t)\,e^{k(\xi-\Delta t)}\,\mathrm{d}\xi,$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\underline{x}_i = a\,\underline{x}_{i-1} + \underline{w}_i - \underline{v}_i - a\,\underline{w}_{i-1} + \underline{v}_{i-1}$$

όπου $a := e^{-k\,\Delta t}$. Η $\underline{x}_i$ είναι στάσιμη ανέλιξη σε διακριτό χρόνο. Καθεμιά από τις ακολουθίες $\underline{w}_i$ και $\underline{v}_i$ αποτελεί λευκό θόρυβο σε διακριτό χρόνο. Οι δύο ακολουθίες είναι μεταξύ τους εξαρτημένες για τον ίδιο χρόνο i. Συγκεκριμένα, με βάση τους ορισμούς των $\underline{w}_i$ και $\underline{v}_i$ αποδεικνύεται ότι:

$$\mathrm{E}[\underline{w}_i] = \mu_w = \mu\,\Delta t,\;\; \mathrm{E}[\underline{v}_i] = \mu_v = \mu\,\Delta t\,(1-a)\,/(-\ln a) = \mu_w\,(1-a)\,/(-\ln a)$$

$$\mathrm{Var}[\underline{w}_i] = \sigma_w^2 = \sigma^2\,\Delta t,\;\; \mathrm{Var}[\underline{v}_i] = \sigma_v^2 = \sigma^2\,\Delta t\,(1-a^2)\,/(-2\ln a) = \sigma_w^2\,(1-a^2)\,/(-2\ln a),$$

$$\mathrm{Cov}[\underline{w}_i, \underline{v}_i] = \sigma_{wv} = \sigma^2\,\Delta t\,(1-a)\,/(-\ln a) = \sigma_w^2\,(1-a)\,/(-\ln a),\; \mathrm{Corr}[\underline{w}_i, \underline{v}_i] = \sqrt{\frac{2}{-\ln a}}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$$

Μοντέλα μη Μαρκόφ σε διακριτό χρόνο (2)

Αν μ_x, μ_w και μ_v και οι μέσες τιμές των $\underline{x}_i$, $\underline{w}_i$ και $\underline{v}_i$, αντίστοιχα, γ_m η αυτοσυνδιασπορά της $\underline{x}_i$ για υστέρηση m, σ_w^2 και σ_v^2 οι διασπορές των $\underline{w}_i$ και $\underline{v}_i$, αντίστοιχα, και σ_{wv} η συνδιασπορά τους, τότε ξεκινώντας από τη βασική σχέση

$$\underline{x}_i = a\,\underline{x}_{i-1} + \underline{w}_i - \underline{v}_i - a\,\underline{w}_{i-1} + \underline{v}_{i-1}$$

και αξιοποιώντας τις εξισώσεις της προηγούμενης σελίδας καθώς και το γεγονός ότι τα $\underline{w}_i$ και $\underline{v}_i$ είναι ανεξάρτητα του $\underline{x}_{i-1}$, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\mu_x = \mu_w$$

$$\mathrm{Cov}[\underline{x}_i, \underline{w}_i] = \sigma_w^2 - \sigma_{wv} = [1 - (1-a)/(-\ln a)]\,\sigma_w^2, \quad \mathrm{Cov}[\underline{x}_i, \underline{v}_i] = \sigma_{wv} - \sigma_v^2 = (1-a)^2/(-2\ln a)\,\sigma_w^2$$

$$\gamma_0 = \left[\frac{1 - 2a^2 + 2a^4}{1 - a^2} + \frac{(1-a)(1+a^2)}{-\ln a}\right]\sigma_w^2,$$

$$\gamma_1 = \left[\frac{a^3(1 - 2a^2)}{1 - a^2} + \frac{(1-a)(1 + 3a + 2a^3)}{-2\ln a}\right]\sigma_w^2$$

$$\gamma_m = a\,\gamma_{m-1} = a^{m-1}\gamma_1 \text{ για } m > 1$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ίδια με αυτή του μοντέλου Μαρκόφ, αλλά ισχύει για τιμές του m μεγαλύτερες από 1. Η όχι καθολική εφαρμογή αυτής της εξίσωσης για όλες τις τιμές του m δείχνει ότι το μοντέλο **δεν είναι μοντέλο Μαρκόφ**.

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = \gamma_1 / \gamma_0$ είναι συνάρτηση του a και μόνο, οπότε το a μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά εφόσον είναι γνωστή η τιμή του ρ_1. Στη συνέχεια μπορεί να υπολογιστεί το σ_w^2 από το γ_0, ενώ $\mu_w = \mu_x$. Οι αντίστοιχες ροπές του $\underline{v}_i$ μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν από τις εξισώσεις της προηγούμενης σελίδας. (Για τις τρίτες κεντρικές ροπές των μεταβλητών δεν προκύπτουν απλές αναλυτικές εκφράσεις).

Το μοντέλο ARMA(1, 1)

Το προηγούμενο μοντέλο είναι δύσκολο να εφαρμοστεί σε προσομοιώσεις. Ένα απλούστερο μοντέλο διακριτού χρόνου με ταυτόσημη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από την εξίσωση

$$\underline{x}_i = a\, \underline{x}_{i-1} + \underline{v}_i + b\, \underline{v}_{i-1}$$

όπου η μεταβλητή $\underline{v}_i$ είναι ανεξάρτητη από όλα τις προηγούμενες $\underline{v}_j$ και $\underline{x}_j$ για $j < i$. Το μοντέλο είναι γνωστό ως μοντέλο **αυτοπαλινδρόμησης τάξης 1 – κινούμενου μέσου τάξης 1** (first-order autoregressive – first-order moving average / ARMA(1, 1).

Αν μ_x και μ_v και οι μέσες τιμές των x_i και v_i, αντίστοιχα, γ_m η αυτοσυνδιασπορά της $\underline{x}_i$ για υστέρηση m, σ_v^2 η διασπορά της $\underline{v}_i$ τότε εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\mu_{\underline{x}} = \mu_{\underline{v}}\ (1 + b) / (1 - a)$$

$$\mathrm{Cov}[\underline{x}_i, \underline{v}_i] = \sigma_V^2,\ \mathrm{Cov}[\underline{x}_i, \underline{v}_{i-1}] = (a + b)\, \sigma_v^2$$

$$\gamma_0 = a\, \gamma_1 + (1 + a\, b + b^2)\, \sigma_v^2$$

$$\gamma_1 = a\, \gamma_0 + b\, \sigma_v^2$$

$$\gamma_m = a\, \gamma_{m-1} = a^{m-1}\, \gamma_1 \text{ για } m > 1$$

Οι τελευταίες τρεις εξισώσεις είναι γνωστές ως εξισώσεις Yule-Walker. Η τελευταία εξίσωση, ίδια με αυτή του προηγούμενου μοντέλου διακριτού χρόνου, δείχνει ότι το μοντέλο ARMA(1, 1) είναι ουσιαστικά ισοδύναμο με το προηγούμενο. Έχει μια παράμετρο περισσότερη (b) αλλά είναι ευκολότερο στην προσομοίωση. Αν η τελευταία εξίσωση εφαρμοστεί για $m = 2$, προκύπτει ότι $a = \gamma_2 / \gamma_1$. Οι παράμετροι b και σ_v^2 μπορούν να υπολογιστούν με αριθμητική επίλυση των δύο εξισώσεων που δίνουν τα γ_0 και γ_1.

Το μοντέλο AR (2)

Το μοντέλο ARMA(1, 1) μπορεί, όπως είδαμε, να διατηρήσει, εκτός απ’ τις μέσες τιμές, τη διασπορά γ_0 και τις δύο αυτοσυνδιασπορές γ_1 και γ_2. Τις ίδιες ακριβώς παραμέτρους μπορεί να διατηρήσει και ένα άλλο μοντέλο, το μοντέλο **αυτοπαλινδρόμησης τάξης 2**, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\underline{x}_i = a_1\, \underline{x}_{i-1} + \alpha_2\, \underline{x}_{i-2} + \underline{v}_i$$

όπου η μεταβλητή $\underline{v}_i$ είναι ανεξάρτητη από όλα τα προηγούμενα $\underline{v}_j$ και $\underline{x}_j$ για $j < i$. Κρατώντας τους ίδιους συμβολισμούς όπως πριν, έχουμε:

$$\mu_x = \mu_v \,/\, (1 - a_1 - a_2)$$

$$\mathrm{Cov}[\underline{x}_i, \underline{v}_i] = \sigma_v^2$$

$$\gamma_0 = a_1\, \gamma_1 + a_2\, \gamma_2 + \sigma_v^2$$

$$\gamma_1 = a_1\, \gamma_0 + a_2\, \gamma_1$$

$$\gamma_m = a_1\, \gamma_{m-1} + a_2\, \gamma_{m-2} \text{ για } m > 1$$

Αν η τελευταία εξίσωση εφαρμοστεί για $m = 2$ και συνδυαστεί με την εξίσωση που δίνει το γ_1 προκύπτει γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, από την επίλυση του οποίου υπολογίζονται οι παράμετροι a_1 και a_2. Η άγνωστη σ_v^2 υπολογίζεται άμεσα από την εξίσωση που δίνει το γ_0.

Το μοντέλο ARMA (p, q)

Γενικεύοντας το μοντέλο ARMA(1, 1) μπορούμε να διατυπώσουμε το γενικό μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης – κινούμενου μέσου ARMA(p, q), το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\underline{x}_i = a_1\, \underline{x}_{i-1} + \dots + \alpha_p\, \underline{x}_{i-p} + \underline{v}_i + b_1\, \underline{v}_{i-1} + \dots + b_q\, \underline{v}_{i-q}$$

όπου η μεταβλητή $\underline{v}_i$ είναι ανεξάρτητη από όλα τις προηγούμενες $\underline{v}_j$ και $\underline{x}_j$ για $j < i$. Κρατώντας τους ίδιους συμβολισμούς όπως πριν, έχουμε:

$$\mu_x = \mu_v\, (1 + b_1 + \dots + b_q) / (1 - a_1 - \dots - a_p)$$

$$\mathrm{Cov}[\underline{x}_i, \underline{v}_i] = \sigma_v^2,\ \mathrm{Cov}[\underline{x}_i, \underline{v}_{i-1}] = (a_1 + b_1)\sigma_v^2,\ \mathrm{Cov}[\underline{x}_i, \underline{v}_{i-2}] = [a_1(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)]\sigma_v^2 \text{, κοκ.}$$

Έτσι, οι εξισώσεις συνδιασπορών γίνονται πολύπλοκες και μη γραμμικές για $q > 1$ και για $m < q$, ενώ για $m > q$ ισχύει

$$\gamma_m = a_1\, \gamma_{m-1} + a_2\, \gamma_{m-2} + \dots + a_p\, \gamma_{m-p}$$

Υπενθυμίζεται ότι $\gamma_{-m} = \gamma_m$. Από το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων που αναφέρονται στη διασπορά γ_0 και στις $p + q$ τιμές της αυτοσυνδιασποράς γ_m (m = 1, …, p + q), θα προσδιοριστούν οι $p + q + 1$ άγνωστοι $a_1, \dots, \alpha_p, b_1, \dots, b_q, \sigma_v^2$.

Η γενικευμένη μορφή του μοντέλου ARMA(p, q) δεν έχει φυσικό νόημα. Χρησιμοποιείται σπάνια στην υδρολογία (με εξαίρεση τις απλές ειδικές περιπτώσεις που προαναφέρθηκαν), ενώ υπάρχουν απλούστερα και υπολογιστικώς προσφορότερα μοντέλα που μπορούν να διατηρήσουν οποιοδήποτε αριθμό αυτοσυνδιασπορών (βλ. παρακάτω καθώς και: Koutsoyiannis, D., A generalized mathematical framework for stochastic simulation and forecast of hydrologic time series, *Water Resources Research*, 36 (6), 1519–1533, 2000).

Το μοντέλο ΜΑ

Έστω ότι η συνάρτηση αυτοπαλινδρόμησης μιας στοχαστικής ανέλιξης ορίζεται (:

(α) από $s + 1$ αριθμητικές τιμές $\gamma_0, \ldots, \gamma_s$ και
(β) από μια εξίσωση επέκτασης (ουρά της συνάρτησης) για $m > s$, η οποία μπορεί να είναι:
(β1) τύπου ARMA, $\gamma_m = \gamma_s \exp(-\kappa\, |m - s|)$
(β2) τύπου γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς (generalized autocovariance function – GAS), $\gamma_m = \gamma_s (1 + \kappa\, \beta\, |m - s|)^{-1/\beta}$
(β2) τύπου GAS με περιοδικότητα, $\gamma_m = \gamma_s (1 + \kappa\, \beta\, |m - s|)^{-1/\beta} \cos(\theta\, |m - s|)$
(β3) τύπου Cauchy, $\gamma_m = \gamma_s (1 + |m - s|^{\alpha})^{-1/(\beta\, a)}$
(β4) τροποποιημένου τύπου Cauchy, $\gamma_m = \gamma_s (1 + |m - s|^{\alpha})^{-1/(\beta\, a) - 1} [1 + (1 - 1/\beta)\, |m - s|^{\alpha}]$

Οσοιδήποτε όροι της συνάρτησης αυτοπαλινδρόμησης μπορούν να αναπαραχθούν με το απλό μοντέλο κινούμενου μέσου ΜΑ(q). Κάθε γραμμικό στοχαστικό μοντέλο μπορεί να διατυπωθεί ως ένα μοντέλο ΜΑ άπειρων όρων:

$$\underline{x}_i = \sum_{j=-\infty}^{0} b_{-j}\, \underline{v}_{i+j} = \ldots + b_2\, \underline{v}_{i-2} + b_1\, \underline{v}_{i-1} + b_0\, \underline{v}_i$$

Αν ενδιαφέρει η διατήρηση q όρων γ_m, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο ΜΒ(q):

$$\underline{x}_i = \sum_{j=-q}^{0} b_{-j}\, \underline{v}_{i+j} = b_q\, \underline{v}_{i-q} + \ldots + b_2\, \underline{v}_{i-2} + b_1\, \underline{v}_{i-1} + b_0\, \underline{v}_i$$

Οι παράμετροι b_j μπορούν να εκτιμηθούν με αριθμητική επίλυση του συστήματος εξισώσεων:

$$\gamma_m = \sum_{j=0}^{q-m} b_j\, b_{i+j} =, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, q$$

Το μοντέλο SMA

Επεκτείνοντας τη διατύπωση του μοντέλου MA, το οποίο εκφράζει τη μεταβλητή $\underline{x}_i$ ως σταθμισμένο άθροισμα άπειρων προηγούμενων όρων λευκού θορύβου, μπορούμε να εκφράσουμε την ίδια μεταβλητή ως άθροισμα προηγούμενων και επόμενων μεταβλητών, οπότε προκύπτει το αμφίδρομο μοντέλο κινούμενου μέσου (backward-forward moving average – BFMA)

$$\underline{x}_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\, \underline{v}_{i+j} = \ldots + a_{-1}\, \underline{v}_{i-1} + a_0\, \underline{v}_i + a_1\, \underline{v}_{i+1} + \ldots$$

Αν $a_j = 0$ για κάθε $j < 0$, τότε προκύπτει το τυπικό μοντέλο MA. Μια πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι το συμμετρικό μοντέλο κινούμενου μέσου (symmetric moving average – SMA), όπου $a_j = a_{-j}$, $j = 1, 2, \ldots$ Αν (για πρακτικούς λόγους) περιορίσουμε τους άπειρους όρους σε πεπερασμένους, το SMA γράφεται:

$$\underline{x}_i = \sum_{j=-q}^{q} a_{|j|}\, \underline{v}_{i+j} = a_s\, \underline{v}_{i-q} + \ldots + a_1\, \underline{v}_{i-1} + a_0\, \underline{v}_i + a_1\, \underline{v}_{i+1} + \ldots + a_s\, \underline{v}_{i+q},$$

Οι συντελεστές a_j σχετίζονται με τα γ_m μέσω της εξίσωσης

$$\sum_{j=-s}^{s-i} a_{|j|}\, a_{|m+j|} = \gamma_m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Από την αριθμητική λύση της τελευταίας προκύπτουν οι τιμές των a_j, θεωρώντας $a_j = 0$ για $|j| > q$. Ωστόσο υπάρχει και κλειστή λύση που δίνεται από τη σχέση:

$$s_a(\omega) = \sqrt{2\, s_\gamma(\omega)}$$

όπου $s_a(\omega)$ ο αντίστροφος πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier της σειράς a_j και $s_\gamma(\omega)$ το φάσμα ισχύος της ανέλιξης.

Εφαρμογή

1. Να εξαχθούν οι εξισώσεις των μοντέλων AR(1), AR(2) και ARMA(1, 1).
2. Να προσαρμοστούν τα τρία αυτά μοντέλα στην ετήσια χρονοσειρά απορροής του Βοιωτικού Κηφισού. Ειδικά στο μοντέλο AR(1) να επιχειρηθεί και διατήρηση της ασυμμετρίας.
3. Να προσαρμοστούν τα ίδια τρία μοντέλα στη μηνιαία χρονοσειρά απορροής του Βοιωτικού Κηφισού, αφού προηγουμένως η τελευταία τυποποιηθεί με γραμμικό μετασχηματισμό ώστε όλοι οι μήνες να έχουν ίδια μέση τιμή και τυπική απόκλιση.
4. Να παραχθούν χρονοσειρές 1000 ετών με χρήση των μοντέλων των ερωτημάτων 2 και 3.
5. Να γραφεί έκθεση με σχολιασμό των πιο πάνω αναλύσεων.