

Στοχαστικές Μέθοδοι στους Υδατικούς Πόρους
**Μακροπρόθεσμη εμμογή και ανεπίξεις απλής
ομοιοθεσίας (simple scaling)**

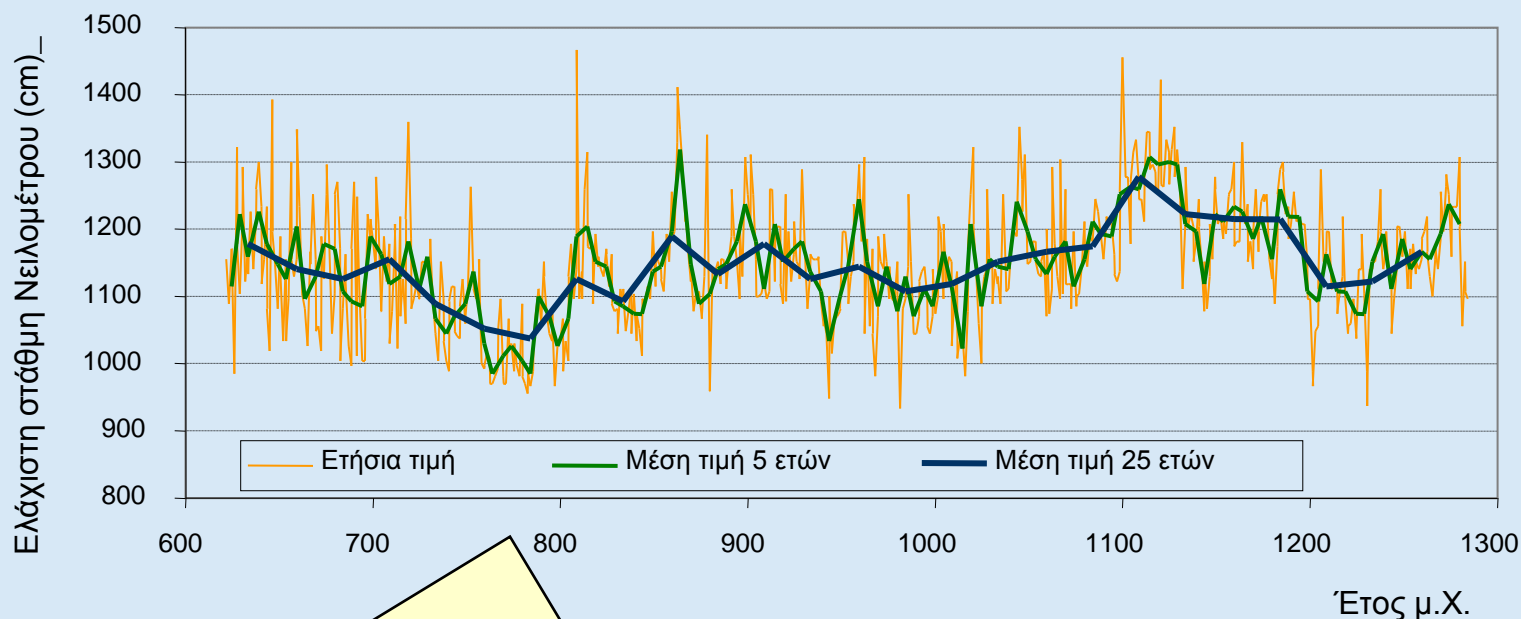
Δημήτρης Κουτσογιάννης

Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος,
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα – Επανεκδοση 2013

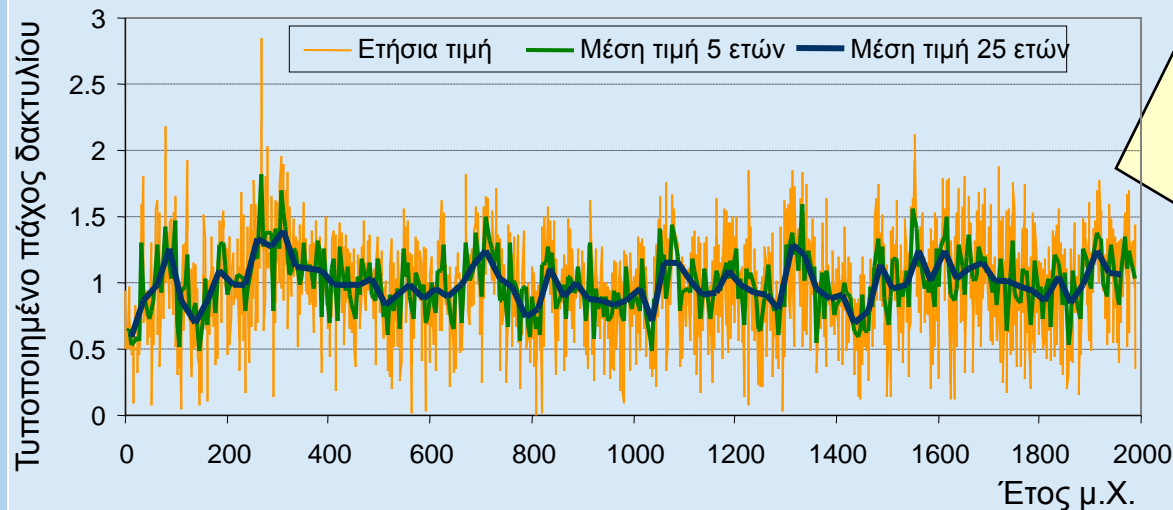
Σύνολα δεδομένων αναφοράς

1 Ελάχιστες στάθμες Νείλου

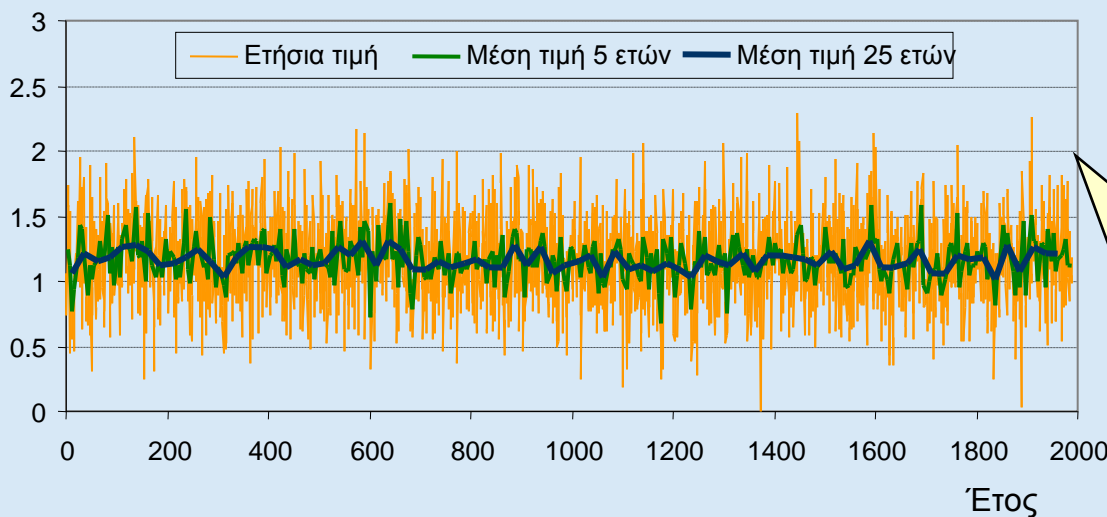


Χρονοσειρά ετήσιας ελάχιστης στάθμης του Νείλου για το διάστημα 622-1284 μ.Χ. (663 δεδομένα), μετρημένης στο «Νειλόμετρο» στο νησί Ρόντα κοντά στο Κάιρο (Toussoun, 1925, σ. 366-385· τα δεδομένα διατίθενται στο διαδίκτυο στη διεύθυνση <http://lib.stat.cmu.edu/S/beran>).

2. Πάχη δακτυλίων δένδρων στη Utah



Χρονοσειρά τυποποιημένου πάχους δακτυλίων από μια παλαιοκλιματολογική μελέτη στο Mammoth Creek, Utah (ΗΠΑ), για το διάστημα 0-1989 (1990 τιμές· το έτος 0 είναι στην πραγματικότητα το 1 π.Χ.). Τα δεδομένα προέρχονται από κωνοφόρα (Graybill, 1990· τα δεδομένα διατίθενται στο διαδίκτυο στη διεύθυνση <ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/paleo/treering/chronologies/asciifiles/usawest/ut509.crn>).



Συνθετική χρονοσειρά κατασκευασμένη από ανέλιξη AR(1) με ίδια μέση τιμή, τυπική απόκλιση και συντελεστή αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1. (Για λόγους σύγκρισης)

Κύριοι συμβολισμοί

Ανέλιξη στη βασική κλίμακα

$$\underline{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Συναθροισμένη ανέλιξη

$$\underline{z}_i^{(k)} := \sum_{l=(i-1)k+1}^{ik} \underline{z}_l$$

Προφανώς, για $k = 1$, $\underline{z}_i^{(1)} \equiv \underline{x}_i$. Για $k = 2$,

$$\underline{z}_1^{(2)} := \underline{x}_1 + \underline{x}_2, \quad \underline{z}_2^{(2)} := \underline{x}_3 + \underline{x}_4, \quad \underline{z}_3^{(2)} := \underline{x}_5 + \underline{x}_6, \quad \dots$$

για $k = 3$,

$$\underline{z}_1^{(3)} := \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3, \quad \underline{z}_2^{(3)} := \underline{x}_4 + \underline{x}_5 + \underline{x}_6, \quad \underline{z}_3^{(3)} := \underline{x}_7 + \underline{x}_8 + \underline{x}_9, \quad \dots$$

κτλ.

Κύρια μεγέθη αναφοράς

Αυτοσυνδιασπορά

$$\gamma_j := \text{Cov}[\underline{x}_i, \underline{x}_{i+j}], \quad \gamma_j^{(k)} := \text{Cov}[\underline{z}_i^{(k)}, \underline{z}_{i+j}^{(k)}], \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_j := \text{Corr}[\underline{x}_i, \underline{x}_{i+j}] = \gamma_j / \gamma_0, \quad \rho_j^{(k)} := \text{Corr}[\underline{z}_i^{(k)}, \underline{z}_{i+j}^{(k)}] = \gamma_j^{(k)} / \gamma_0^{(k)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Φάσμα ισχύος: διακριτός μετασχηματισμός Fourier της αυτοσυνδιασποράς

$$s_\gamma^{(k)}(\omega) := 2 \gamma_0^{(k)} + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(k)} \cos(2\pi j \omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j^{(k)} \cos(2\pi j \omega)$$

Αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier της αυτοσυνδιασποράς

$$\gamma_j^{(k)} = \int_0^{1/2} s_\gamma^{(k)}(\omega) \cos(2\pi j \omega) d\omega$$

Απλά μοντέλα αναφοράς

1. Μοντέλο λευκού θορύβου

Μέση τιμή

$$E[\underline{z}_i^{(k)}] = k E[\underline{x}_i]$$

Διασπορά

$$\gamma_0^{(k)} := \text{Var}[\underline{z}_i^{(k)}] = k \gamma_0$$

Αυτοσυνδιασπορά - Αυτοσυσχέτιση

$$\gamma_j^{(k)} := \text{Cov}[\underline{z}_i^{(k)}, \underline{z}_{i+j}^{(k)}] = 0, \quad \rho_j^{(k)} := \text{Corr}[\underline{z}_i^{(k)}, \underline{z}_{i+j}^{(k)}] = 0$$

Φάσμα ισχύος

$$s_\gamma^{(k)}(\omega) / \gamma_0^{(k)} = 2$$

2. Γραμμικό Μαρκοβιανό μοντέλο (AR(1))

Έκφραση του μοντέλου στη βασική κλίμακα

$$\underline{x}_i = \rho \underline{x}_{i-1} + \underline{v}_i$$

Μέση τιμή

$$E[\underline{z}_i^{(k)}] = k E[\underline{x}_i]$$

Διασπορά

$$\gamma_0^{(k)} = \gamma_0 \frac{k(1-\rho^2) - 2\rho(1-\rho^k)}{(1-\rho)^2}$$

Αυτοσυνδιασπορά - Αυτοσυσχέτιση

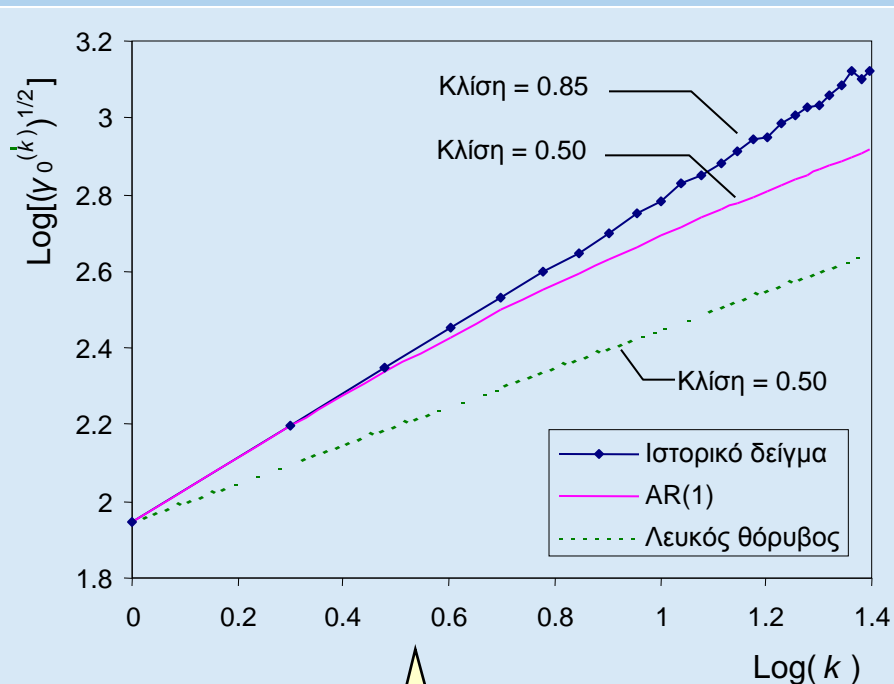
$$\gamma_j^{(k)} = \gamma_0 \frac{\rho^{kj-k+1} (1-\rho^k)^2}{(1-\rho)^2}, \quad \rho_j^{(k)} = \rho_1^{(k)} \rho^{k(j-1)} \quad \text{όπου} \quad \rho_1^{(k)} = \frac{\rho(1-\rho^k)^2}{k(1-\rho^2) - 2\rho(1-\rho^k)}$$

Φάσμα ισχύος

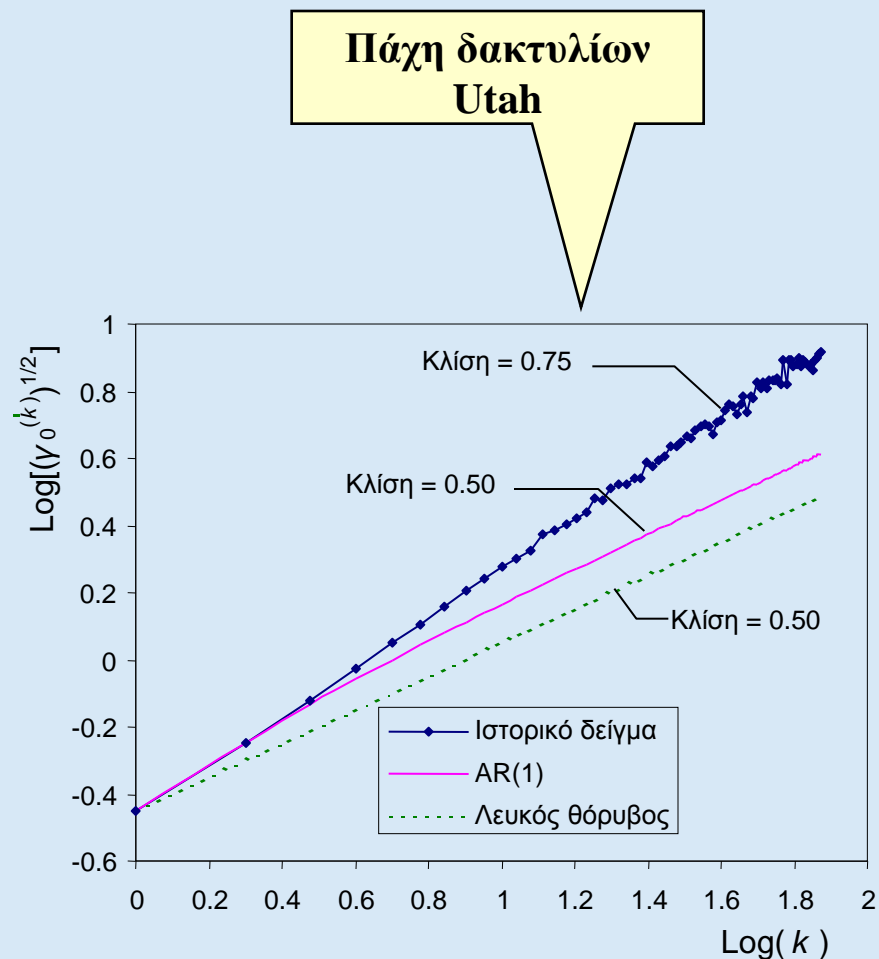
$$s_\gamma^{(k)}(\omega) / \gamma_0^{(k)} = 2 + 4\rho_1^{(k)} \frac{\cos(2\pi\omega) - \rho^k}{1 + \rho^{2k} - 2\rho^k \cos(2\pi\omega)}$$

Σύγκριση δεδομένων αναφοράς και απλών μοντέλων αναφοράς

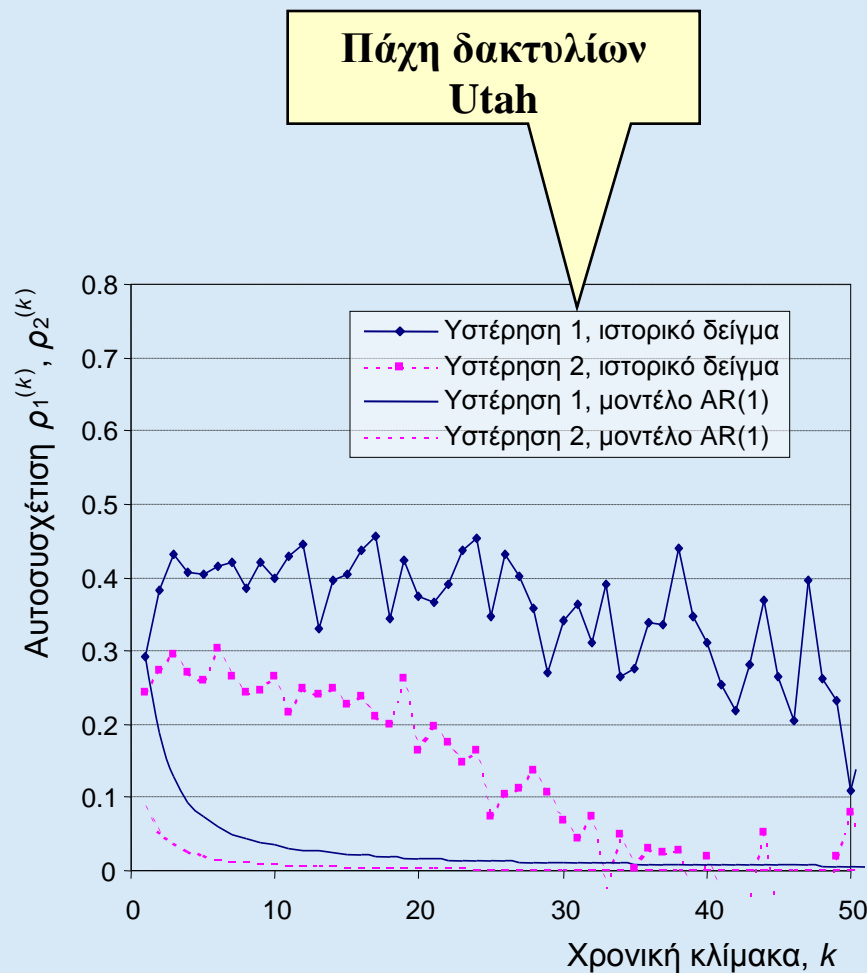
Τυπική απόκλιση



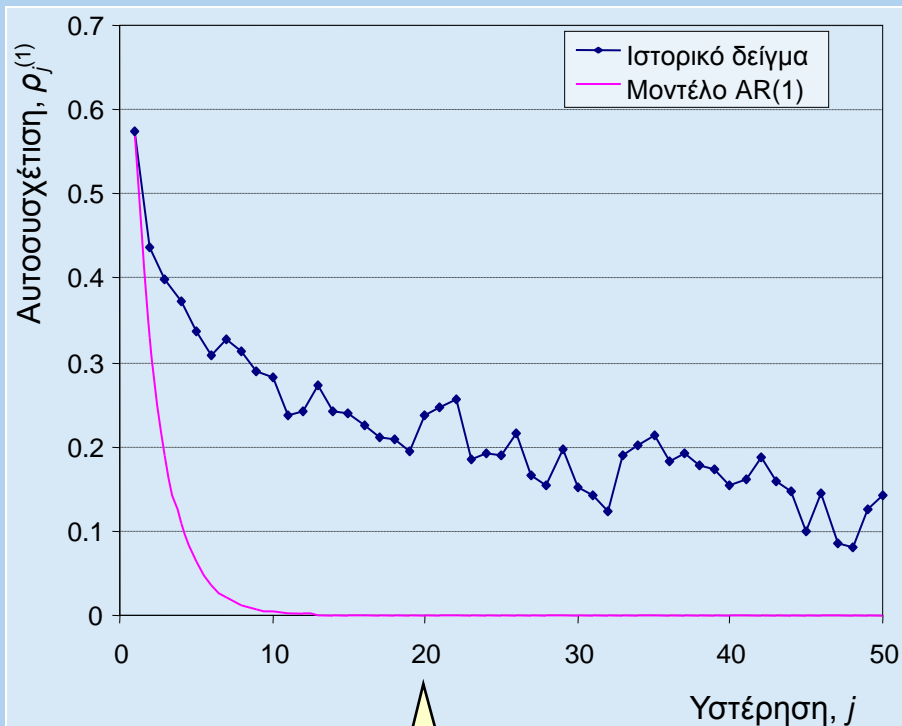
Ετήσια ελάχιστη
στάθμη Νείλου



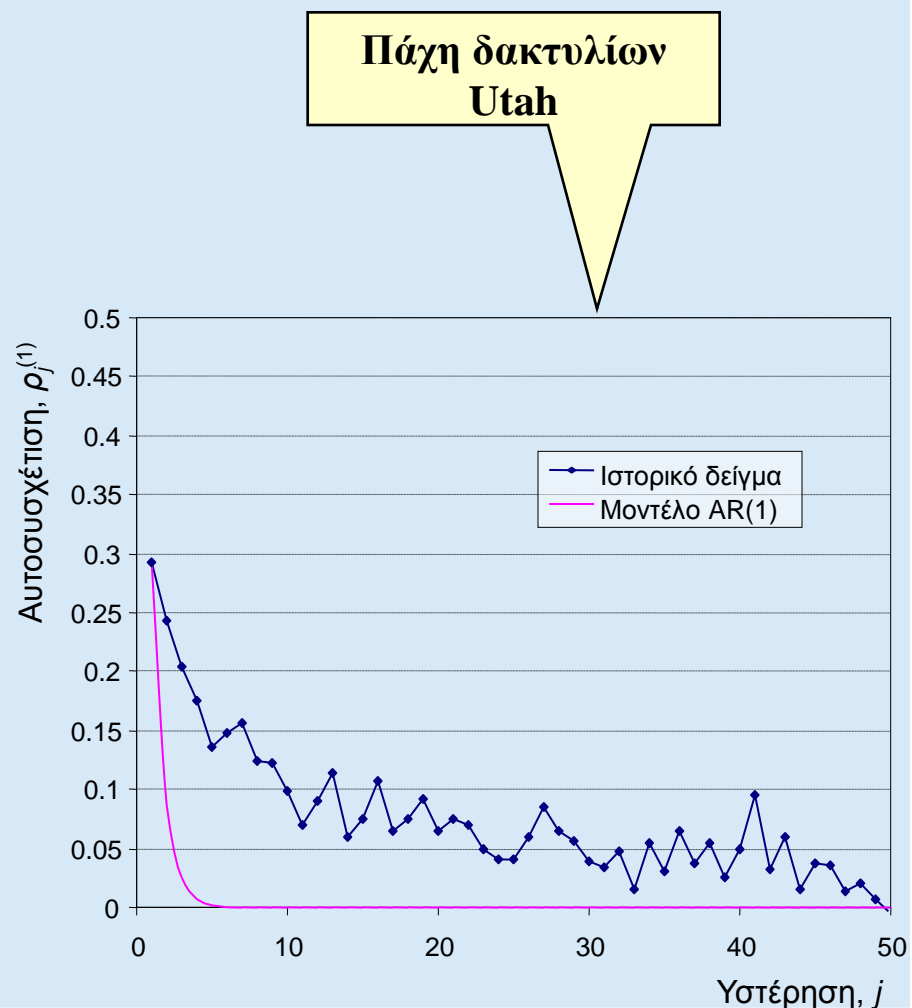
Συντελεστές αυτοσυσχέτισης σε σχέση με τη χρονική κλίμακα



Συντελεστές αυτοσυσχέτισης σε σχέση με την υστέρηση



Ετήσια ελάχιστη στάθμη Νείλου



Συμπέρασμα συγκρίσεων

- ◆ Αποτυχία των απλών μοντέλων αναφοράς να περιγράψουν τη φυσική πραγματικότητα.
- ◆ Τάση ομαδοποίησης χαμηλών (ή ψηλών) τιμών σε μεγαλύτερες περιόδους ξηρασιών (ή υδρολογικά πλούσιων) ετών (εμμονή μακράς κλίμακας (ή μακροπρόθεσμη) – φαινόμενο Hurst – φαινόμενο Ιωσήφ – δυναμική Hurst-Kolmogorov – βλ. Hurst, 1951, Mandelbrot, 1977, Koutsoyiannis, 2002, 2003, 2010, 2011).
- ◆ Τυπική απόκλιση συναθροισμένης ανέλιξης συναρτήσει της κλίμακας συνάθροισης: συνάρτηση δύναμης με εκθέτη $H > 0.5$.
- ◆ Σημαντική αυτοσυσχέτιση ακόμη και για μεγάλες τιμές της υστέρησης (εξάρτηση μεγάλης εμβέλειας).
- ◆ Σημαντική αυτοσυσχέτιση ακόμη και για μεγάλες τιμές της κλίμακας συνάθροισης.

Κάλυψη κενού: Μοντέλο απλής ομοιοθεσίας (simple scaling)

Εισαγωγή

- ◆ Εναλλακτικές ονομασίες: ανέλιξη απλής ομοιοθεσίας, στάσιμα αυξήματα αυτο-όμοιων ανελίζεων (stationary increments of self-similar process), κλασματικός Γκαουσιανός θόρυβος (fractional Gaussian noise)*, ανέλιξη Hurst-Kolmogorov (Hurst-Kolmogorov process).
- ◆ Είναι στάσιμη ανέλιξη που ορίζεται από τη σχέση

$$\underline{z}_i^{(k)} - k \mu =_d (k/l)^H (\underline{z}_j^{(l)} - l \mu)$$

όπου το σύμβολο $=_d$ σημαίνει ισότητα στην (πεπερασμένης διάστασης από κοινού) κατανομή, i, j, k και l είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι, μ είναι η μέση τιμή του $\underline{z}_i^{(1)}$ και H είναι μια σταθερά ($0 < H < 1$) γνωστή ως συντελεστής (ή εκθέτης) Hurst.

*Σύμφωνα με ορολογία που καθιέρωσε ο Mandelbrot, Γκαουσιανός θόρυβος είναι ο λευκός θόρυβος, ενώ θόρυβος Brown είναι το ολοκλήρωμα ως προς το χρόνο του λευκού θορύβου. Αντιπροσωπεύει την τυχαία κίνηση των μορίων των αερίων (κίνηση Brown) και αποτελεί στάσιμη ανέλιξη. Αντίστοιχα, το ολοκλήρωμα ως προς το χρόνο του κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου είναι γνωστό ως κλασματικός θόρυβος Brown και αποτελεί επίσης μη στάσιμη ανέλιξη.

Βασικές ιδιότητες

Διασπορά (συνάρτηση δύναμης της κλίμακας συνάθροισης k)

$$\gamma_0^{(k)} := \text{Var}[\underline{z}_i^{(k)}] = k^{2H} \gamma_0$$

Αυτοσυσχέτιση ανεξάρτητη της κλίμακας συνάθροισης k

$$\rho_j^{(k)} = \rho_j = (1/2) [(j+1)^{2H} + (j-1)^{2H}] - j^{2H}, \quad j > 0$$

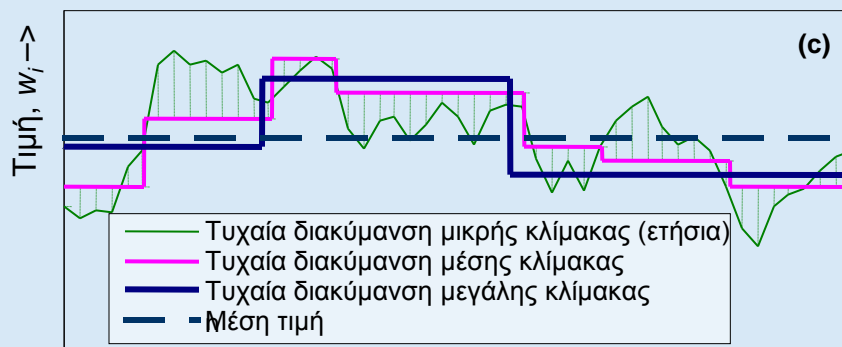
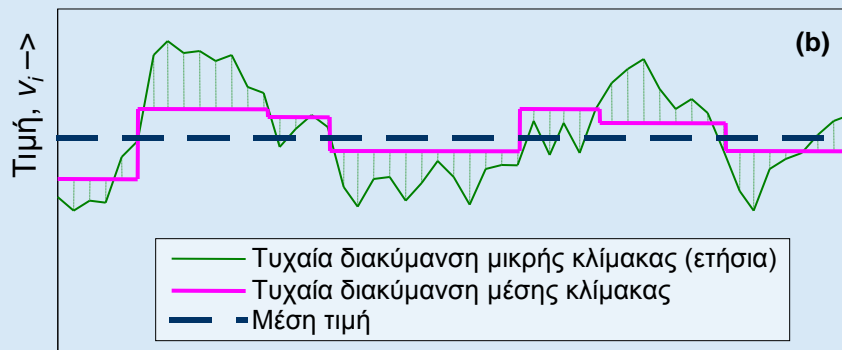
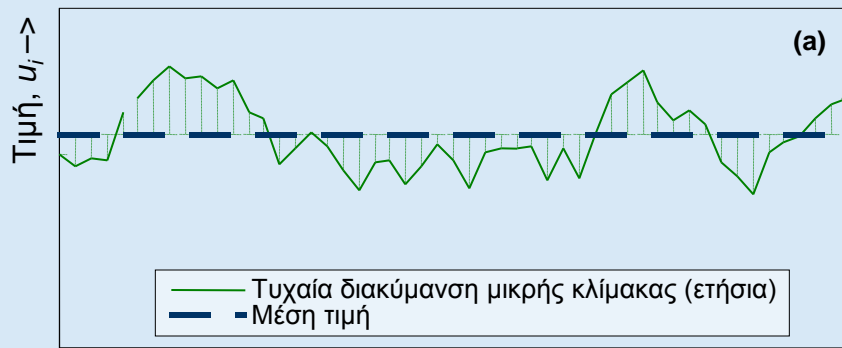
ή προσεγγιστικά (συνάρτηση δύναμης της υστέρησης)

$$\rho_j^{(k)} = \rho_j = H(2H-1)j^{2H-2}$$

Φάσμα ισχύος (συνάρτηση δύναμης της συχνότητας)

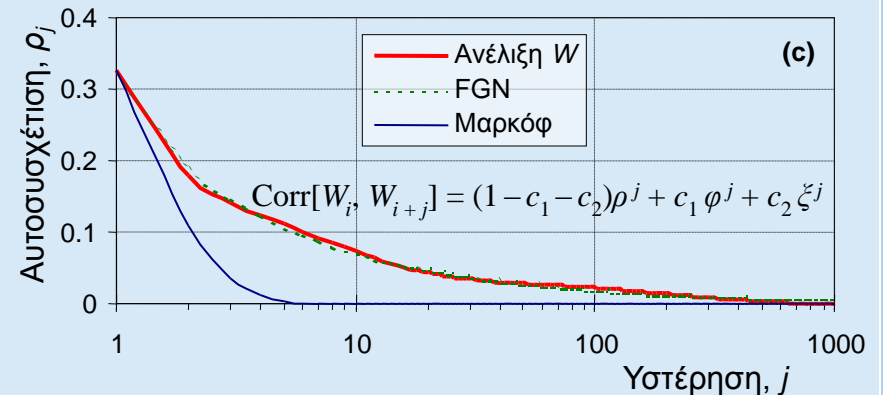
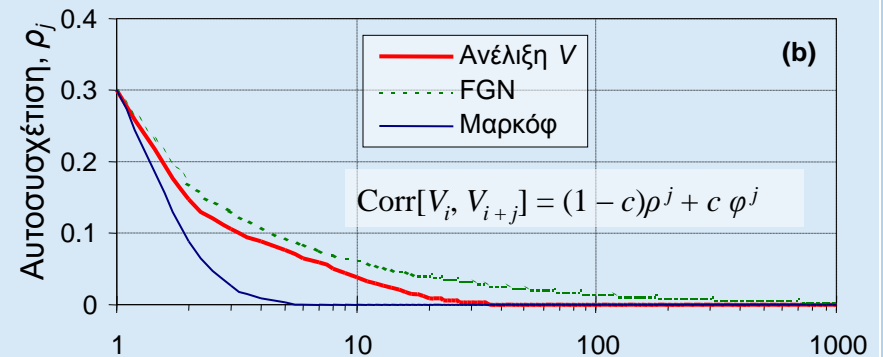
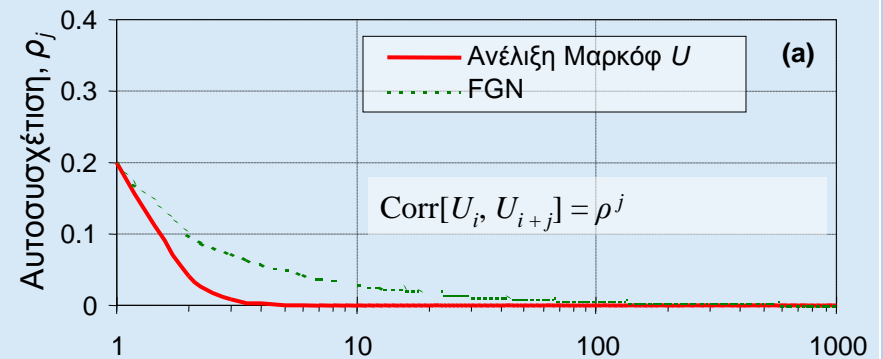
$$s_\gamma^{(k)}(\omega) / \gamma_0^{(k)} \approx 4(1-H)(2\omega)^{1-2H}$$

Φυσική εξήγηση: Τυχαίες διακυμάνσεις πολλαπλής κλίμακας



Πηγή: Κουτσογιάννης (2002)

Χρόνος, $i \rightarrow$



Αλγόριθμοι παραγωγής χρονοσειρών απλής ομοιοθεσίας

1. Με τη λογική των τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας

Η ανέλιξη x_i παράγεται ως άθροισμα τριών ανελιξεων AR(1):

$$x_i = \underline{A}_i + \underline{B}_i + \underline{C}_i$$

με συντελεστές αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1, αντίστοιχα,

$$\rho = 1.52 (H - 0.5)^{1.32},$$

$$\varphi = 0.953 - 7.69 (1 - H)^{3.85},$$

$$\xi = \begin{cases} 0.932 + 0.087 H, & H \leq 0.76, \\ 0.993 + 0.007 H, & H > 0.76 \end{cases}$$

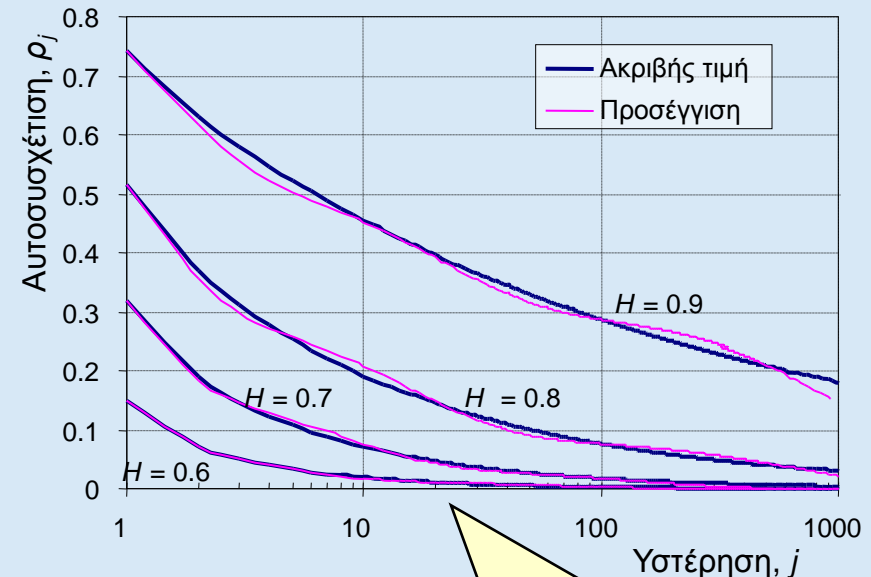
Και διασπορές αντίστοιχα,

$$(1 - c_1 - c_2) \gamma_0, \quad c_1 \gamma_0, \quad c_2 \gamma_0$$

όπου τα c_1 και c_2 εκτιμώνται σε τρόπο ώστε η αυτοσυσχέτιση του αθροίσματος των τριών ανελιξεων

$$\rho_j = (1 - c_1 - c_2) \rho^j + c_1 \varphi^j + c_2 \xi^j$$

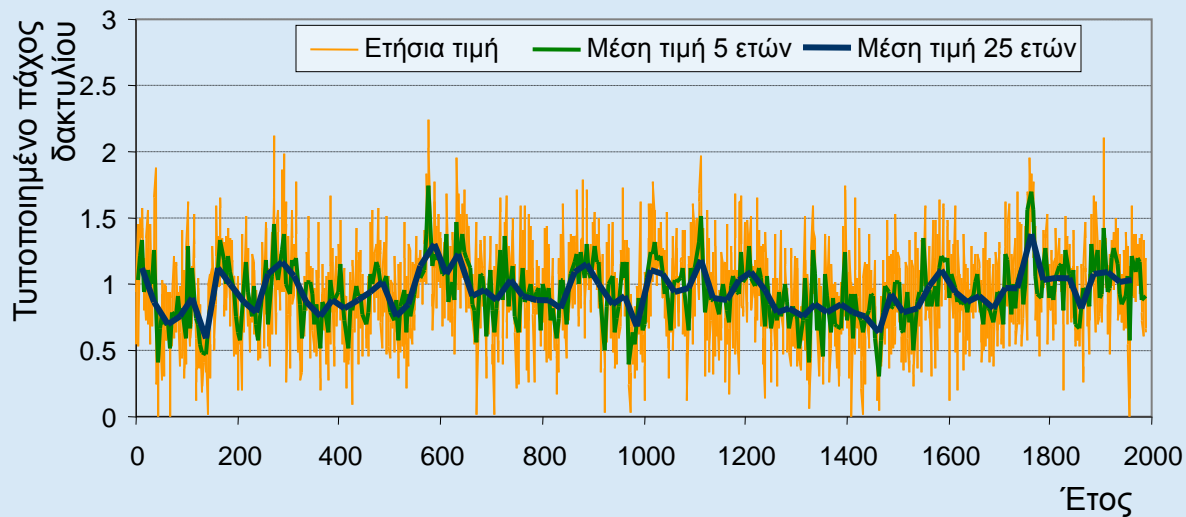
να ταυτίζεται με τη θεωρητική αυτοσυσχέτιση της ανέλιξης απλής ομοιοθεσίας για υστέρηση 1 και 100.



Βαθμός προσέγγισης της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου που επιτυγχάνεται με χρήση τριών ανελιξεων AR(1)

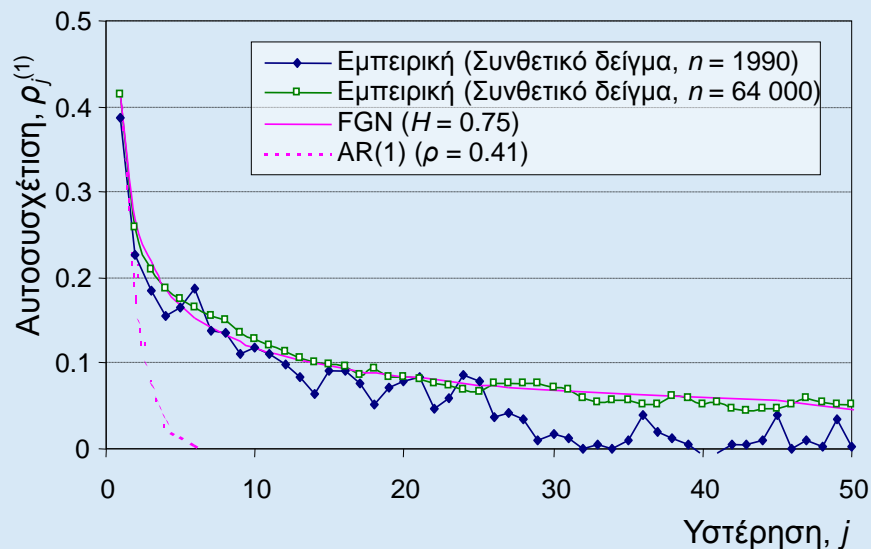
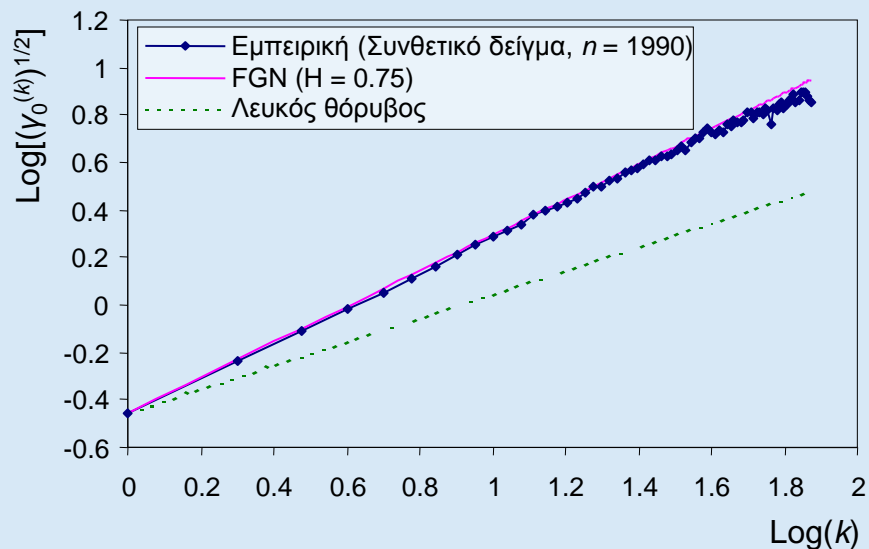
Πηγή: Κουτσογιάννης (2002)

Αποτελέσματα αλγορίθμου 1

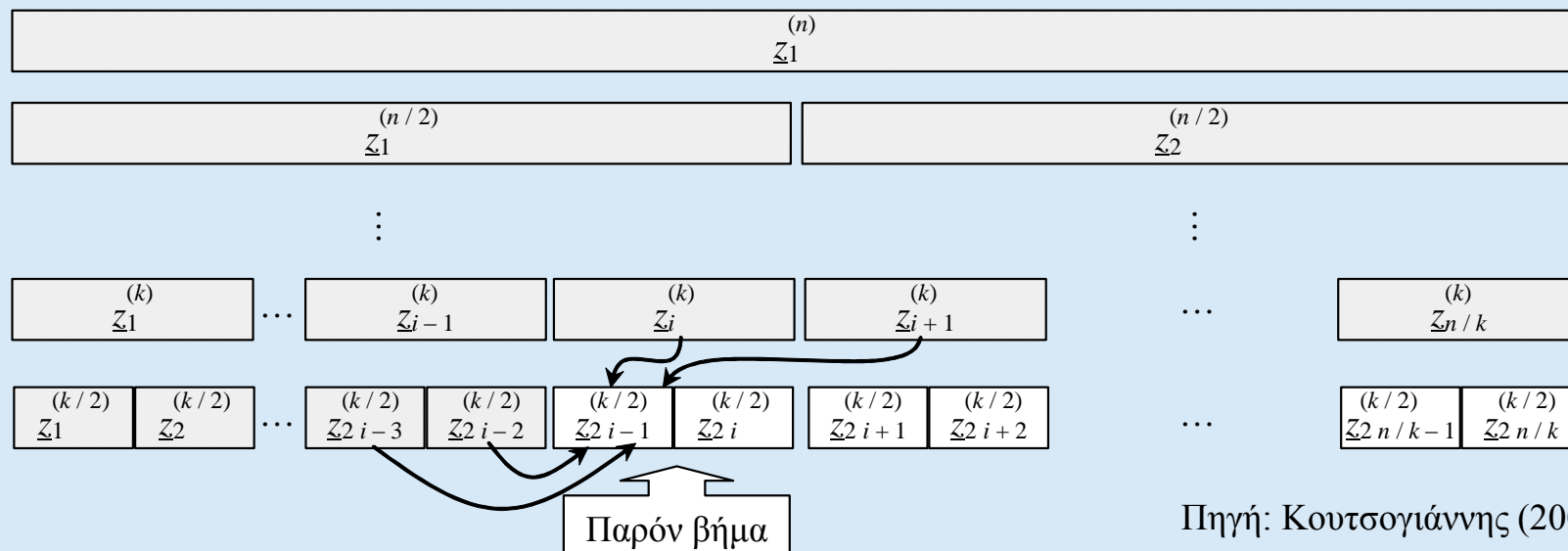


Εφαρμογή: Παραγωγή και ανάλυση συνθετικού δείγματος μεγέθους 1990 ετών με χαρακτηριστικά ίδια με αυτά του ιστορικού δείγματος πάχους δακτυλίων στη Utah

Πηγή: Κουτσογιάννης (2002)



2. Μέθοδος βασισμένη σε διαδοχικούς επιμερισμούς



Η παραγωγή της ανέλιξης \underline{x}_i ($i = 1, \dots, n$, όπου το n θεωρείται ως δύναμη του 2) γίνεται σε διαδοχικά βήματα. Στο πρώτο βήμα παράγεται το άθροισμα $\underline{z}_1^{(n)}$ για τη συνολική περίοδο n . Στο δεύτερο βήμα αυτό επιμερίζεται σε δύο συνιστώσες $\underline{z}_1^{(n/2)}$ και $\underline{z}_2^{(n/2)}$ κοκ. Σε κάθε βήμα επιμερισμού ισχύει η σχέση

$$\underline{z}_{2i-1}^{(k/2)} + \underline{z}_{2i}^{(k/2)} = \underline{z}_i^{(k)}$$

ενώ στην παραγωγή διατηρούνται οι αυτοσυσχετίσεις με προηγούμενες μεταβλητές ίσης κλίμακας $(k/2)$ και επόμενες μεταβλητές μεγαλύτερης κλίμακας (k) .

Μέθοδος βασισμένη σε διαδοχικούς επιμερισμούς (συνέχεια)

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τον Koutsoyiannis (2001, 2002), σε κάθε βήμα επιμερισμού το $\underline{z}_{2i-1}^{(k/2)}$ παράγεται από τη γραμμική σχέση

$$\underline{z}_{2i-1}^{(k/2)} = a_2 \underline{z}_{2i-3}^{(k/2)} + a_1 \underline{z}_{2i-2}^{(k/2)} + b_0 \underline{z}_i^{(k)} + b_1 \underline{z}_{i+1}^{(k)} + \underline{v}$$

και το $\underline{z}_{2i}^{(k/2)}$ από τη σχέση

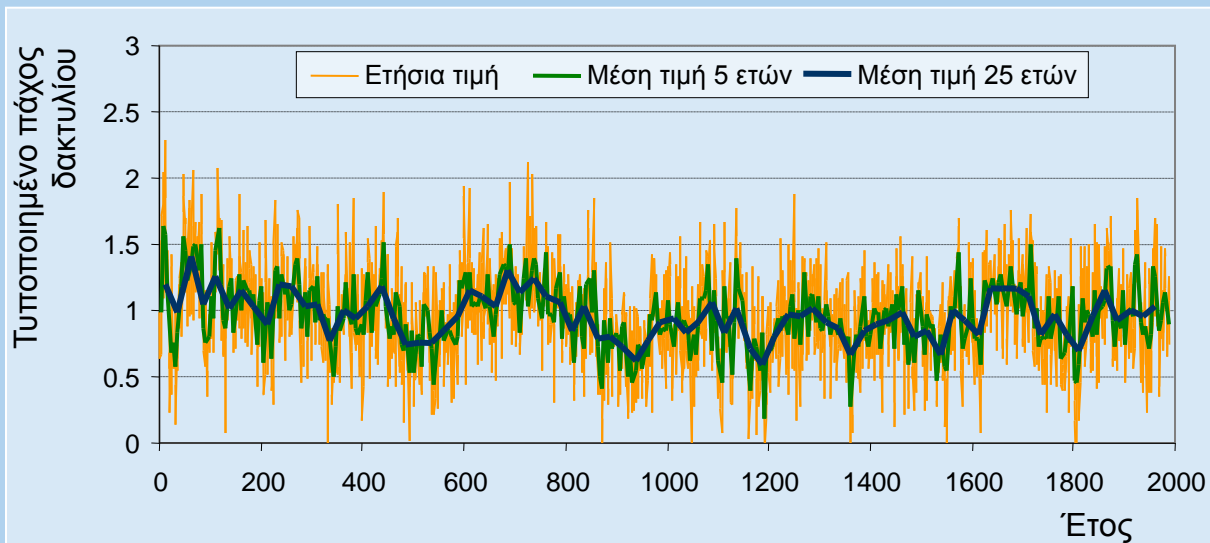
$$\underline{z}_{2i-1}^{(k/2)} + \underline{z}_{2i}^{(k/2)} = \underline{z}_i^{(k)}$$

όπου οι παράμετροι a_2 , a_1 , b_0 και b_1 και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής V εκτιμώνται από τις αυτοσυσχετίσεις $\text{Corr}[\underline{z}_{2i-1}^{(k/2)}, \underline{z}_{2i-1+j}^{(k/2)}] = \rho_j$ και τη διασπορά γ_0 , σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 + \rho_3 & \rho_4 + \rho_5 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 + \rho_2 & \rho_3 + \rho_4 \\ \rho_2 + \rho_3 & \rho_1 + \rho_2 & 2(1 + \rho_1) & \rho_1 + 2\rho_2 + \rho_3 \\ \rho_4 + \rho_5 & \rho_3 + \rho_4 & \rho_1 + 2\rho_2 + \rho_3 & 2(1 + \rho_1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_2 \\ \rho_1 \\ 1 + \rho_1 \\ \rho_2 + \rho_3 \end{bmatrix}$$

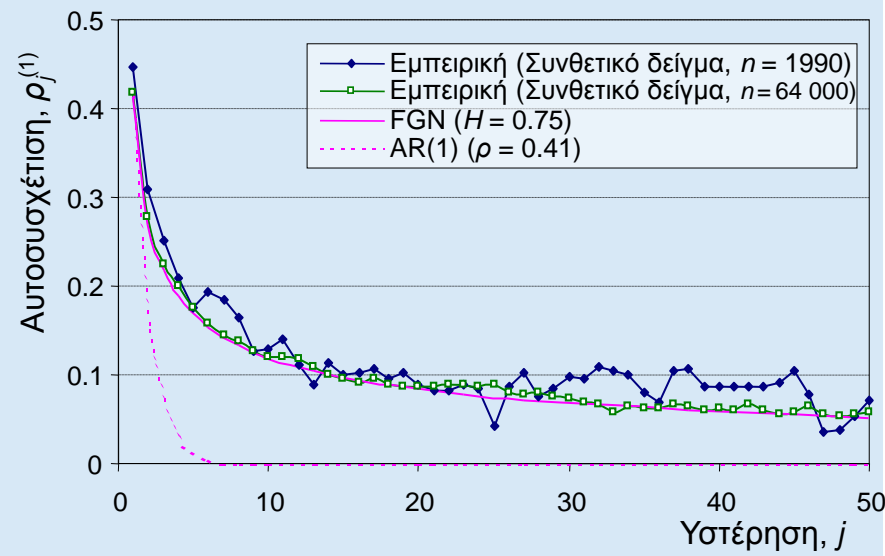
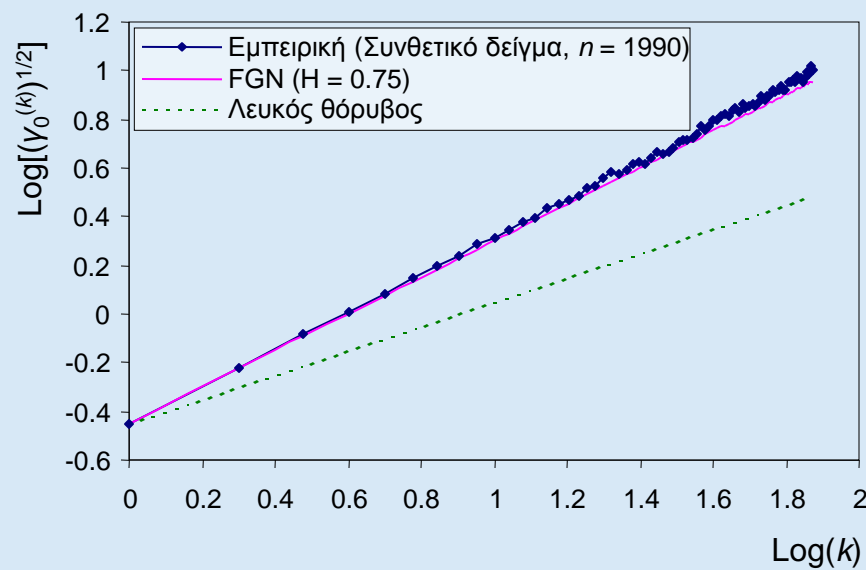
$$\text{Var}[V] = \gamma_0 \left(1 - [\rho_2, \rho_1, 1 + \rho_1, \rho_2 + \rho_3] [a_2, a_1, b_0, b_1]^T \right)$$

Αποτελέσματα αλγορίθμου 2



Εφαρμογή: Παραγωγή και ανάλυση συνθετικού δείγματος μεγέθους 1990 ετών με χαρακτηριστικά ίδια με αυτά του ιστορικού δείγματος πάχους δακτυλίων στη Utah

Πηγή: Κουτσογιάννης (2002)



3. Μέθοδος μοντέλου συμμετρικού κυλιόμενου μέσου (SMA)

Το σχήμα συμμετρικού κυλιόμενου μέσου (symmetric moving average – SMA) έχει εισαχθεί από τον Koutsoyiannis (2000) και μετασχηματίζει μια ανέλιξη λευκού θορύβου v_i σε μια ανέλιξη με αυτοσυσχέτιση x_i σύμφωνα με τη σχέση

$$x_i = \sum_{j=-q}^q a_{|j|} v_{i+j} = a_q v_{i-q} + \dots + a_1 v_{i-1} + a_0 v_i + a_1 v_{i+1} + \dots + a_q v_{i+q}$$

όπου ο τα a_j είναι συντελεστές βάρους και ο αριθμός τους q θεωρητικά είναι άπειρος αλλά στην πράξη λαμβάνει μια πεπερασμένη τιμή. Η μέθοδος είναι κατάλληλη για τυχούσα συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Στην περίπτωση του μοντέλου απλής ομοιοθεσίας αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές βάρους είναι

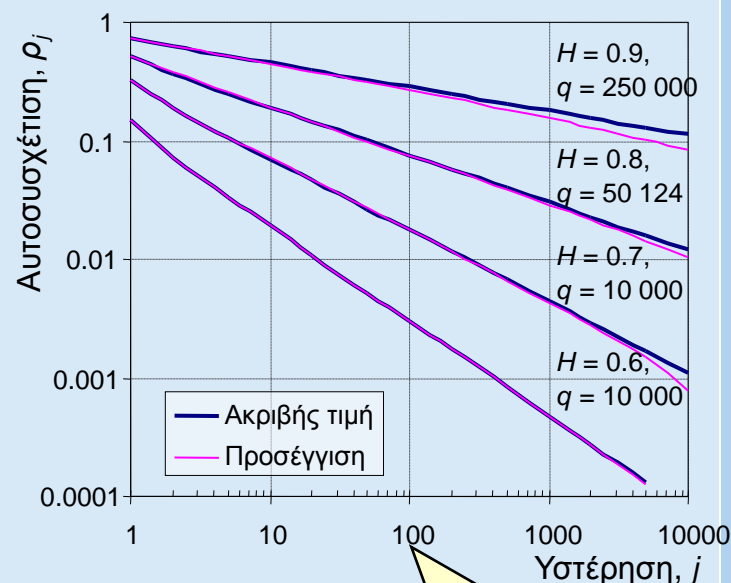
$$a_j \approx \frac{\sqrt{(2-2H)\gamma_0}}{3-2H} [(j+1)^{H+0.5} + (j-1)^{H+0.5} - 2j^{H+0.5}], \quad j > 0$$

και ο αναγκαίος αριθμός βαρών

$$q \geq \max \left[m, \left(\frac{2\beta}{H^2 - 0.25} \right)^{1/(H-1.5)} \right]$$

όπου m ο αριθμός των αυτοσυσχετίσεων που πρέπει να διατηρηθούν και β συντελεστής ακρίβειας (π.χ. $\beta = 0.001$). Η μέθοδος μπορεί να διατηρήσει και την ασυμμετρία ξ_x της x_i αν ο λευκός θόρυβος έχει ασυμμετρία ξ_v που δίνεται από τη σχέση

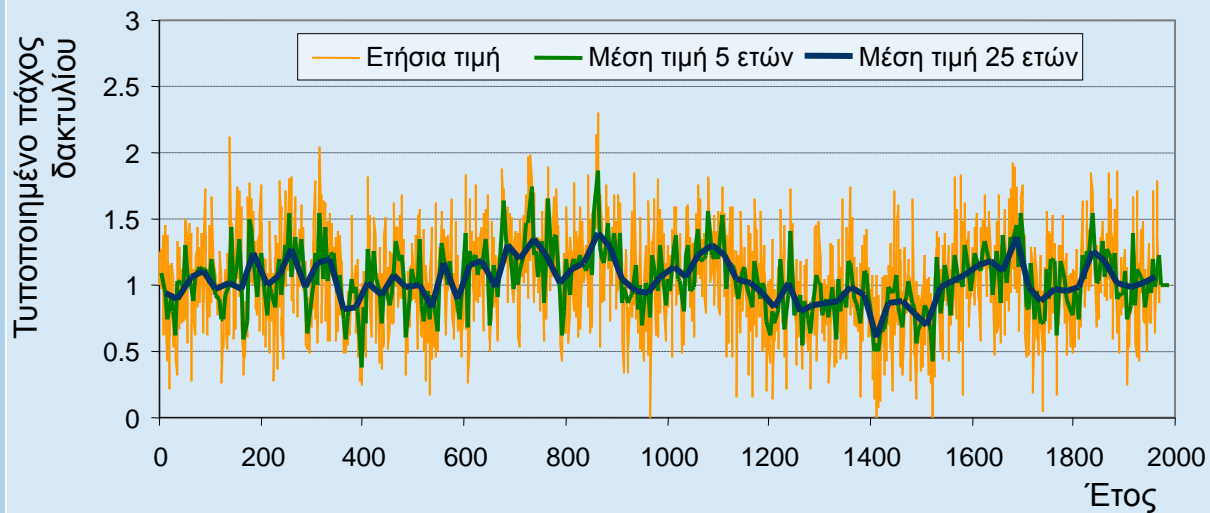
$$\left(a_0^3 + 2 \sum_{j=1}^q a_j^3 \right) \xi_v = \xi_x \gamma_0^{3/2}$$



Βαθμός προσέγγισης της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου που επιτυγχάνεται με χρήση του μοντέλου SMA

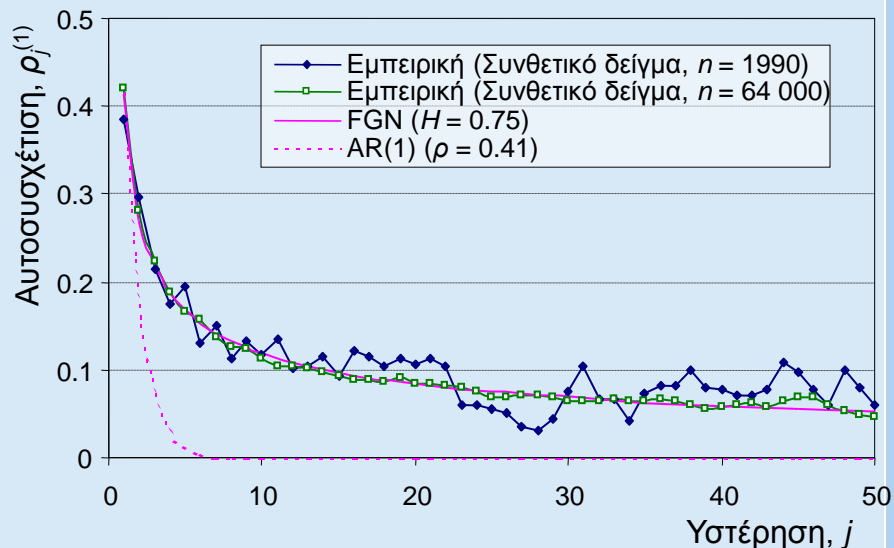
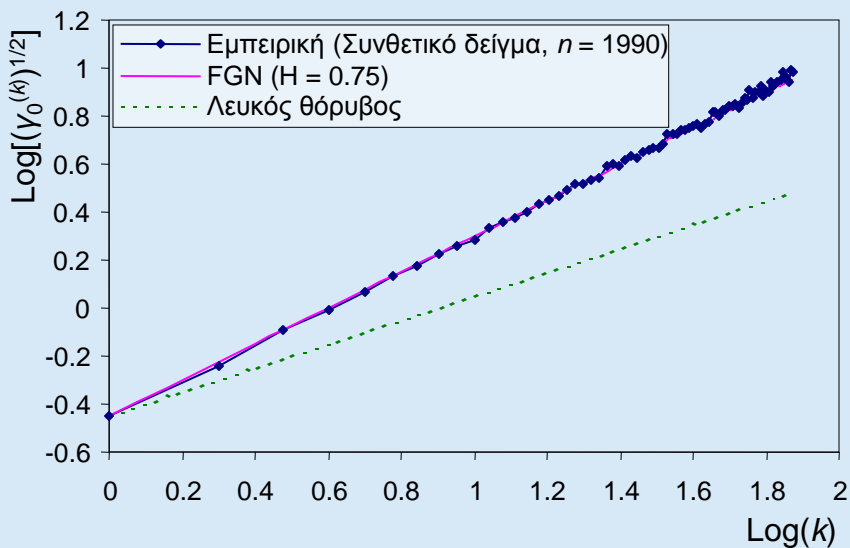
Πηγή: Κουτσογιάννης (2002)

Αποτελέσματα αλγορίθμου 3



Εφαρμογή: Παραγωγή και ανάλυση συνθετικού δείγματος μεγέθους 1990 ετών με χαρακτηριστικά ίδια με αυτά του ιστορικού δείγματος πάχους δακτυλίων στη Utah

Πηγή: Κουτσογιάννης (2002)



Πρόσθετες εφαρμογές

A. Να αναλυθούν τα ιστορικά δείγματα:

1. απορροής στη θέση Διώρυγα Καρδίτσας του Βοιωτικού Κηφισού (91 χρόνια – το μακρότερο δείγμα απορροής στην Ελλάδα, Κουτσογιάννης κ.α., 2000)
2. ανακατασκευασμένης μέσης ετήσιας θερμοκρασίας του Βορείου Ημισφαιρίου (992 χρόνια – Jones et al., 1998).

με στόχο να διαπιστωθεί η ύπαρξη μακροπρόθεσμης εμμοσύνης.

B. Να μοντελοποιηθούν κατάλληλα οι αντίστοιχες ανεπίξεις και να παραχθούν συνθετικά δείγματα μήκους 1000 ετών.

Γ. Να ελεγχθούν τα συνθετικά δείγματα ως προς τη διατήρηση των σημαντικών στατιστικών ιδιοτήτων, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η εμμοσύνη.

Δ. Να εκτιμηθεί η ασφαλής απόληψη από τη λίμνη Υλίκη, στην οποία καταλήγουν τα νερά του Βοιωτικού Κηφισού, χρησιμοποιώντας δύο εναλλακτικά μοντέλα εισροών και συγκεκριμένα τα FGN και AR(1) και με τις ακόλουθες επιπρόσθετες υποθέσεις:

1. Η ωφέλιμη χωρητικότητα της λίμνης είναι 550 hm^3 .
2. Λόγω του καρστικού υποβάθρου της λίμνης, ένα ποσοστό του αποθηκευμένου νερού διαρρέει υπόγεια. Το ποσοστό αυτό να θεωρηθεί αμελητέο όταν η λίμνη είναι άδεια και 60% όταν είναι γεμάτη.
3. Το επίπεδο αξιοπιστίας επιλέγεται 99%.
4. Για την ενδο-ετήσια ρύθμιση, δεσμεύεται ρυθμιστικός όγκος ίσος με το 60% της ετήσιας απόληξης.

Παράρτημα: Η έννοια του εύρους

Ορισμοί

Παραδοσιακά, το φαινόμενο Hurst έχει αναλυθεί σε όρους τυχαίων μεταβλητών που σχετίζονται με την αποθήκευση σε ταμειυτήρες (π.χ. Salas, 1993, σ. 19.14; Kottegoda, 1980, σ. 184). Έστω το μερικό άθροισμα

$$y_n := x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

της στοχαστικής ανέλιξης x_i , $i = 1, 2, \dots$, για οποιοδήποτε ακέραιο n . Αν μ είναι η μέση τιμή της ανέλιξης, y_n/n η δειγματική μέση τιμή της και s_n η δειγματική διασπορά της, τότε ορίζονται:

- Το εύρος (range)

$$\underline{R}_n := \max(y_i - i\mu; 1 \leq i \leq n) - \min(y_i - i\mu; 1 \leq i \leq n)$$

- Το διορθωμένο εύρος (adjusted range)

$$\underline{R}_n^* := \max(y_i - i y_n / n; 1 \leq i \leq n) - \min(y_i - i y_n / n; 1 \leq i \leq n)$$

- Το ανηγμένο εύρος (rescaled range)

$$\underline{R}_n^{**} = \underline{R}_n^* / s_n$$

Τα \underline{R}_n , \underline{R}_n^* και \underline{R}_n^{**} είναι τυχαίες μεταβλητές των οποίων η κατανομή εξαρτάται από τη κατανομή των x_i , τον αριθμό n και τη δομή συνδιασποράς των x_1, x_2, \dots, x_n .

Στατιστικές ιδιότητες

Η μελέτη των κατανομών των \underline{R}_n , \underline{R}_n^* , και ιδίως του \underline{R}_n^{**} είναι πολύ πολύπλοκη. Ακόμη και οι μέσες τιμές τους είναι δύσκολο να εκτιμηθούν με ακρίβεια (Yevjevich, 1972, pp. 148-173). Για παράδειγμα, στην απλή περίπτωση που τα $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ , η μέση τιμή του εύρους είναι (Yevjevich, 1972, σ. 151)

$$E[\underline{R}_n] = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$$

και στην επίσης απλή περίπτωση που τα \underline{x}_i ακολουθούν ανέλιξη AR(1) με κατανομή Gauss και με γνωστά μ και σ , το μέσο εύρος είναι (Yevjevich, 1972, σ. 158)

$$E[\underline{R}_n] = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi(1-\rho^2)}} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{1+\rho}{i(1-\rho)} - \frac{2\rho(1-\rho^i)}{i^2(1-\rho)^2}}$$

Για τα \underline{R}_n^* και \underline{R}_n^{**} μόνο προσεγγιστικές σχέσεις έχουν διατυπωθεί. Γενικά είναι γνωστό ότι σε ανελιξίες τύπου ARMA το ανηγμένο εύρος ασυμπτωτικά έχει μέση τιμή

$$E[\underline{R}_n^{**}] \approx c \sqrt{n}$$

ενώ για την ανέλιξη απλής ομοιοθεσίας

$$E[\underline{R}_n^{**}] \approx c n^H$$

όπου c σταθερά (π.χ. Bras and Rodriguez-Iturbe, 1985, σ. 221).

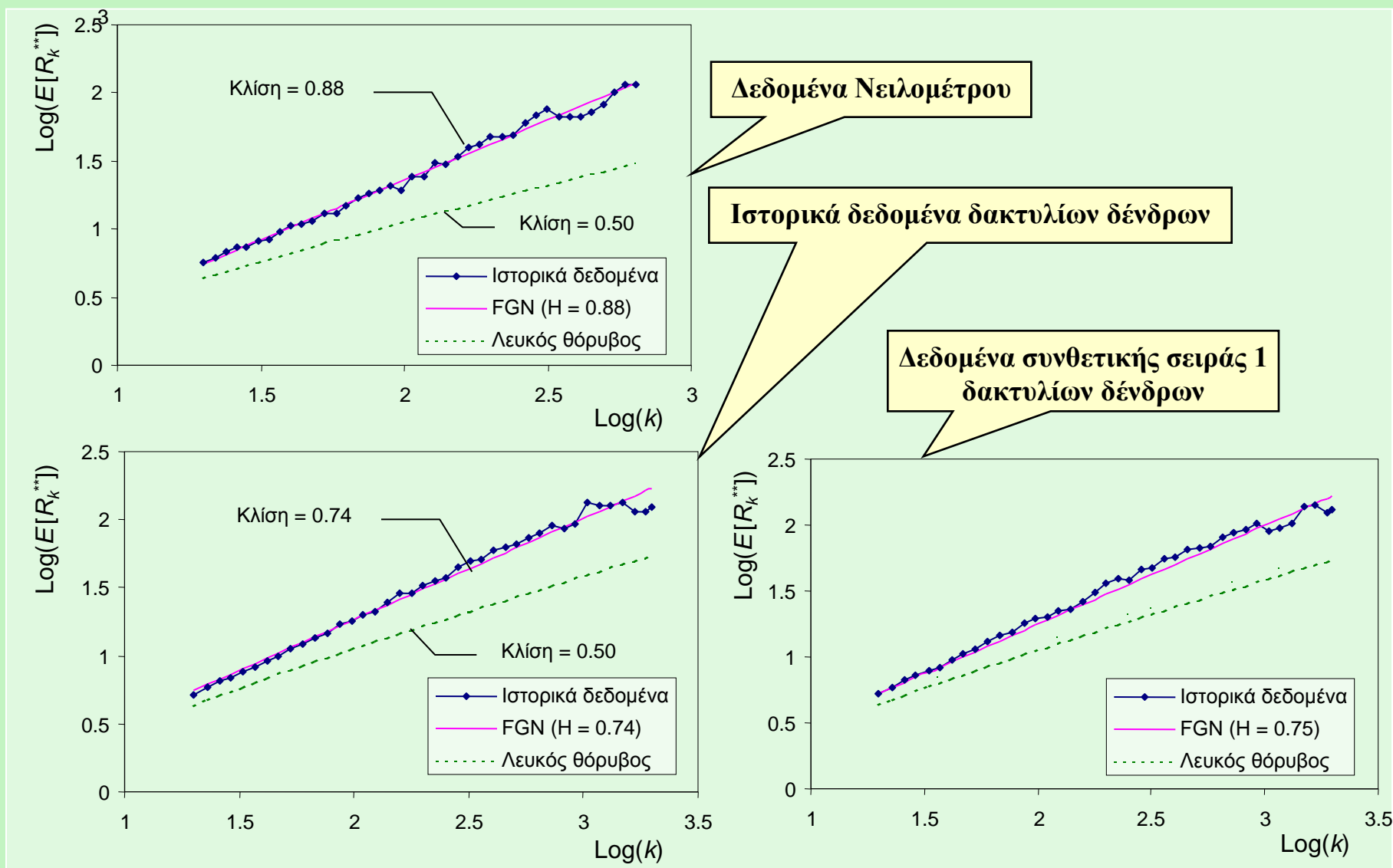
Προβλήματα

Η τελευταία εξίσωση παραδοσιακά έχει χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του συντελεστή Hurst (βλ. διαγράμματα επόμενης σελίδας). Ωστόσο, η αβεβαιότητα της εκτίμησης είναι πολύ μεγάλη. Αρκεί να λεχθεί ότι η σχέση μπορεί να οδηγήσει σε τιμή του H μεγαλύτερη της μονάδας, κάτι που μαθηματικά δεν είναι δυνατό (για συνεπείς μεθόδους εκτίμησης βλ. Koutsoyiannis, 2003 και Tyralis and Koutsoyiannis, 2011)

Η έννοια του εύρους σε ορισμένες περιπτώσεις έχει ένα φυσικό αντίστοιχο, που συνδέεται με την ανάλυση αθροιστικών καμπυλών εισροών και εκροών ταμιευτήρων, μια γραφική μέθοδο που αναπτύχθηκε από τον Ripple το 1883 και χρησιμοποιήθηκε ευρέως στο σχεδιασμό ταμιευτήρων. Συγκεκριμένα, το R_n αντιπροσωπεύει τον απαιτούμενο όγκο ταμιευτήρα που λειτουργεί χωρίς υπερχειλίση ή άλλη απώλεια και παρέχει σταθερή εκροή ίση με τη μέση εισροή. Προφανώς, η μέθοδος εισάγει μια υπεραπλούστευση της λειτουργίας των ταμιευτήρων και πρέπει να αντικατασταθεί από πιθανοτικά θεμελιωμένες μεθόδους. Άλλωστε, το εύρος δεν έχει κανένα νόημα «αποθήκευσης» σε περίπτωση που εξετάζονται άλλες μεταβλητές πλην εισροών ταμιευτήρων π.χ. θερμοκρασία, κλιματικές μεταβλητές (όπως τα πάχη δένδρων που εξετάστηκαν εδώ) κτλ.

Λόγω των προβλημάτων στον ορισμό και την εννοιολογία των διάφορων εκφράσεων του εύρους, των πολύπλοκων εξισώσεων των στατιστικών ιδιοτήτων του, και των προβλημάτων εκτίμησης, στην παρουσίαση αυτή αποφύγαμε τη χρήση αυτών των εννοιών, προτιμώντας την απλούστερη και συνεπέστερη εννοιολογική θεμελίωση στη μεταβολή της τυπικής απόκλισης ή διασποράς συναρτήσει της χρονικής κλίμακας.

Εκτίμηση συντελεστή Hurst με βάση το εύρος



Αναφορές

- ◆ Bras, R. L. and I. Rodriguez-Iturbe (1985), *Random functions and hydrology*, Addison-Wesley, USA.
- ◆ Graybill, D. A., (1990). IGBP PAGES/World Data Center for Paleoclimatology, NOAA/NGDC Paleoclimatology Program, Boulder, Colorado, USA.
- ◆ Hurst, H. E. (1951). Long term storage capacities of reservoirs, *Trans. ASCE*, 116, 776-808.
- ◆ Jones, P.D., K.R. Briffa, T.P. Barnett, and S.F.B. Tett (1998), High-resolution Palaeoclimatic Records for the last Millennium: Interpretation, Integration and Comparison with General Circulation Model Control-run Temperatures, *The Holocene* 8, 455-471.
- ◆ Kottegoda, N. T. (1980). *Stochastic Water Resources Technology*, Macmillan Press, London.
- ◆ Koutsoyiannis, D., (2000). A generalized mathematical framework for stochastic simulation and forecast of hydrologic time series *Water Resources Research*, 36(6), 1519-1534.
- ◆ Koutsoyiannis, D., (2001). Coupling stochastic models of different time scales, *Water Resources Research*, 37(2), 379-392.
- ◆ Koutsoyiannis, D. (2002). The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy, *Hydrological Sciences Journal*, 47(4), 573-595.
- ◆ Koutsoyiannis, D. (2003). Climate change, the Hurst phenomenon, and hydrological statistics, *Hydrological Sciences Journal*, 48 (1), 3–24.
- ◆ Koutsoyiannis, D. (2010). A random walk on water, *Hydrology and Earth System Sciences*, 14, 585–601.
- ◆ Koutsoyiannis, D. (2011). Hurst-Kolmogorov dynamics and uncertainty, *Journal of the American Water Resources Association*, 47 (3), 481–495.
- ◆ Mandelbrot, B. B. (1977). *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York.
- ◆ Salas, J. D. (1993). Analysis and modeling of hydrologic time series, *Handbook of Hydrology*, edited by D. Maidment, Chapter 19, pp. 19.1-19.72, McGraw-Hill, New York.
- ◆ Toussoun, O. (1925). Mémoire sur l'histoire du Nil, in *Mémoires a l'Institut d'Egypte*, vol. 18, pp. 366-404.
- ◆ Tyralis, H., and D. Koutsoyiannis (2011). Simultaneous estimation of the parameters of the Hurst-Kolmogorov stochastic process, *Stochastic Environmental Research & Risk Assessment*, 25 (1), 21–33.
- ◆ Yevjevich, V. (1972). *Stochastic Processes in Hydrology*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.