

Θ. Σ. ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΝ

Κατὰ τὰς παραδόσεις τοῦ

Θ. Σ. ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΝΤ. ΥΦΗΓΗΤΟΥ ΕΝ Τῇ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚῇ ΣΧΟΛῇ
ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

**ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
1966**

Ἀπαγορεύεται ἡ ὅλη ἢ μερική ἀνατύπωσις τοῦ παρόντος ἄνευ γραπτῆς ἀδείας τοῦ συγγραφέως.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	Σελ.
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	1 - 2
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3 - 6
ΚΥΡΙΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ	7-10
ΠΙΝΑΞ ΣΥΜΒΟΛΩΝ	11-13

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ	15
--	----

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ-ΟΡΙΑ-ΠΕΔΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	17- 21
1.1 'Η υλασσιμή μηχανική	17
1.2 Τά ρευστά	17
1.3 'Εσωτερικαί καί έξωτερικαί δυνάμεις	18
1.4 Κατάταξις τῶν φαινομένων τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν	18
1.5 Χαρακτηριστικὰ μεγέθη τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν	20
1.5.1 Συνολικά μεγέθη	20
1.5.2 Τοπικά μεγέθη	20
1.6 Τά λεπτά σημεῖα τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν	21

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ	22- 45
2.1 Διανυσματικός λογισμός	22
2.1.1 Διανυσματική ἄλγεβρα-στροφεῖς	23
2.1.2 Διανυσματική ἀνάλυσις	26
2.1.3 Διανυσματικοί χώροι ν διαστάσεων	31
2.2 Μητρικός καί τανυστικός λογισμός	38
2.2.1 Γενιότητες περί μητρώων	38
2.2.2 Γενιότητες περί τανυστῶν	39
2.2.3 Τανυσταί ἐν πολυγραμμικῶν μορφῶν	40
2.2.4 Συμμετρικοί καί ἀντισυμμετρικοί τανυσταί	42
2.2.5 Γινόμενον τανυστῶν	44

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΡΧΩΝ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

46-50

- 3.1 Ἡ κίνησις 46
- 3.2 Ἡ κίνησις 47
- 3.3 Ἡ δύναμις 48
- 3.4 Αἱ δυναταὶ ἰσχεῖς 49

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4.

ΒΑΣΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ-
ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

51- 57

- 4.1 Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις συνοχῆς 51
- 4.2 Ἐφαρμογὴ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς δυναμικῆς 52
- 4.3 Τανυστὴς τῶν τάσεων σημείου τινός 53
- 4.4 Ἐξισώσεις ἰσορροπίας καὶ κινήσεως ὑλικοῦ σημείου.
Συμμετρωτότης τοῦ τανυστοῦ τῶν τάσεων 55

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ
ΜΕΣΩΝ-ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

58- 74

- 5.1 Κινηματική τῶν συνεχῶν μέσων 58
 - 5.1.1 Ἐμφρασις κατὰ LAGRANGE 58
 - 5.1.2 Ἐμφρασις κατὰ EULER 59
 - 5.1.3 Μοριακὴ παράγωγος 61
- 5.2 Κινητική-Νόμος διατηρήσεως τῆς μάζης 64
 - 5.2.1 Ἀσυμπύκτα ὑλικά συστήματα 65
 - 5.2.2 Μόνιμοι κινήσεις 65
- 5.3 Δυναμική-Βασικαὶ ἐξισώσεις καὶ θεωρήματα 66
 - 5.3.1 Ἐξισώσεις ἐν τοῦ θεμελιώδους νόμου δυναμικῆς 66
 - 5.3.2 Ἐξισώσεις ἐν τοῦ θεωρήματος ποσοτήτων κινήσεως 66
 - 5.3.3 Ἐξισώσεις ἐν τοῦ θεωρήματος δυνατῶν ἰσχύων 67
 - 5.3.4 Συνθῆμαι εἰς τὰ ὅρια 67
- 5.4 Μέθοδοι προσεγγιστικῶν λύσεων 68
 - 5.4.1 Ἀναγωγή τυχουσῶν μορφῶν εἰς γραμμικὰς 69
 - 5.4.2 Ἐφαρμογαὶ τῶν γραμμικῶν προσεγγίσεων 70
 - 5.4.3 Γεωμετρικαὶ ἀπλοποιήσεις ὑλικῶν συστημάτων 74

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6.

ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΣ
ΝΟΜΟΙ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

75- 83

- 6.1 Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τῆς βαθμίδος εἰς τὰς
διανυσματικὰς συναρτήσεις-Τανυστὴς $grad \vec{V}$ 75
- 6.2 Προσδιορισμὸς τοῦ τανυστοῦ ταχυτήτων παραμορφώσεως 76
 - 6.2.1 Γεωμετρικὴ μέθοδος 77
 - 6.2.2 Κινηματικὴ μέθοδος 78
- 6.3 Φυσικὴ ἐννοια καὶ ἀντιμείμενον τῶν νόμων τάσεων-
παραμορφώσεων 78-79
- 6.4 Μαθηματικὴ μελέτη τῶν νόμων τάσεων-παραμορφώσεων 79
 - 6.4.1 Κλασσικὰ ἢ συνήθη ρευστά 79
 - 6.4.2 Μὴ υλασσιμὰ ρευστά 82

- 6.5 Τελυμαί έξισώσεις τής μηχανιής τών ρευστών
υαί υατάταξια αύτών

83

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7.

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΙΞΩΔΟΥΣ-
ΚΑΤΑΤΑΞΙΣ ΤΩΝ ΥΠΟ ΜΕΛΕΤΗΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

84-90

- 7.1 Όρισμός τών συντελεστών μ υαί ν υατά NEWTON

84

- 7.2 Σύνδεσις μέ τόν τανυστήν τών τάσεων τοῦ ίξώδους

86

- 7.3 Φύσις τών μελετουμένων ρευστών

88

- 7.3.1 Τέλεια άσυμπίαστα ρευστά

88

- 7.3.2 Ίξώδη άσυμπίαστα ρευστά

88

- 7.3.3 Τέλεια συμπίεστά ρευστά

89

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

91-92

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

93

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8.

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

95-103

- 8.1 Γενυμαί έξισώσεις

95

- 8.2 Στατιμή τών άσυμπίαστων ρευστών- Ύδροστατιμή

97

- 8.3 Στατιμή τών συμπίεστών ρευστών

102

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 9.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ ΕΙΣ ΤΑΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΕΙΔΙΚΑΣ
ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

104-113

- 9.1 Έξισώσεις έυ τοῦ θεμελιώδους νόμου τής

δυναμιής υαί τών νόμων συμπεριφοράς

105

- 9.2 Έξισωσις συνεχείας ή νόμος διατηρήσεως τής μάξης

107

- 9.3 Έξισώσεις υαταστάσεως

108

- 9.4 Συνθήμαι είς τά όρια τών γεννιῶν έξισώσεων

τής δυναμιής

109

- 9.5 Άπλοποίησης τών γεννιῶν έξισώσεων

111

- 9.5.1 Έξωτερυμαί δυνάμεις έυ πεδίου βαρύτητος

111

- 9.5.2 Ίξώδη ή πρaxyματιά άσυμπίαστα ρευστά

111

- 9.5.3 Τέλεια άσυμπίαστα ρευστά

112

- 9.5.4 Τέλεια συμπίεστά ρευστά

113

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 10.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ BERNOULLI-ΑΣΤΡΟΒΙΛΟΙ ΡΟΑΙ ΚΑΙ
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΩΛΗΝΩΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

114-125

- 10.1 Πρῶτον θεωρήμα τοῦ BERNOULLI

114

- 10.2 Μορφή υαί έφαρμογαί τοῦ πρώτου θεωρήματος

BERNOULLI είς τά προβλήματα τής ύδραυλιής

117

- 10.2.1 Τύπος τοῦ TORRICELLI

118

- 10.2.2 Μετρητής VENTURI

119

- 10.2.3 Σωλήν PITOT

120

10.3 Ροή αστρόβιλος ή μέ δυναμιών πεδίων ταχυτήτων-Δεύτερον θεωρήμα του BERNOULLI	121
10.4 Βασικά θεωρήματα επί των σωλήνων περιστροφής	124
10.4.1 Τέλδη ασυμπίεστα ρευστά	124
10.4.2 Τέλεια ασυμπίεστα ή βαροτροπικά ρευστά	125
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 11.	
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΚ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΣ	126-134
11.1 Ύπολογισμός των συνισταμένων δυνάμεων κατά την ροήν εντός τυχόντος αγωγού ένια μπύλη	127
11.2 Ύπολογισμός της συνισταμένης των δυνάμεων τάς όποίας έλασσει μία ροή επί τυχόντος στερεού σώ- ματος παρεμβαλλομένου είν αυτήν	128
11.3 Έφαρμογαί των θεωρημάτων έν της έξισώσεως των ποσοτήτων κινήσεως	129
11.3.1 Προώθησις δι' έκτονώσεως αερίου έξ όπής	129
11.3.2 Δύναμις ώθήσεως ρευστής φλεβός επί έπιπέδου πλαούς	130
11.3.3 Δύναμις ώθήσεως ρευστής φλεβός επί κμπύλης πλαούς	133
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΜΕΡΟΥΣ	135-150
II, A ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ	135-141
II, B ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ BERNOULLI ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΣ	142-150

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ**ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ
ΡΕΥΣΤΩΝ ΔΙΑ ΡΟΗΝ ΜΟΝΙΜΟΝ ΚΑΙ ΑΣΤΡΟΒΙΛΟΝ**

151

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 12.**ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΑΡΑΔΟΧΑΙ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΥΠΟ ΜΕΛΕΤΗΝ
ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ**

153-158

12.1 Όριοι-Γενιότητες-Παράδοχαί	153
12.2 Γενικαί έξισώσεις κινήσεως	154
12.3 Γενιότητες επί των διαφοριών έξισώσεων β' τάξεως μέ μεριμιάς παραγωγούς	156

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 13.**ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗ-
ΣΕΩΝ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΕΙΣ ΑΣΤΡΟΒΙΛΟΝ ΡΟΗΝ**

159-163

13.1 Θεμελιώδης έξισωσις	159
13.2 Γραφική μέθοδος του PRAŠIL	160
13.2.1 Έφαρμογή: Χάραξις διωτύου ροηφόρων καί ίσο- δυναμιών γραμμών είν ροήν ύδατος υπεράνω έκχειλιστού παχείας στέψεως	161

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 14.**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ ΔΙΑ ΤΩΝ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ**

164-179

14.1 Γενιότητες	164
-----------------	-----

	Σελ.
14.2 Ἡ ἔννοια τοῦ μιγαδικοῦ δυναμιμοῦ καὶ τῆς μιγαδικῆς ταχύτητος	165
14.3 Ἰδιότητες τῶν μιγαδικῶν δυναμιμῶν	166
14.4 Ἐφαρμογή εἰς τὰς ἀστροβίλους καὶ ἐπιτέδους υἰνήσεις τῶν ἀσυμπιέστων ρευστῶν	169
14.4.1 Ὁμοιόμορφος ροή	169
14.4.2 Ροή εἰς γωνίαν	170
14.4.3 Σημειαυή πηγή ἢ φρέαρ	174
14.4.4 Σημειαυός στροβιλισμός ἢ σημειαυή δύννη	176
14.4.5 Ροή μέσῳ σχισμῆς	177
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 15.	
ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΙΑ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ-ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΟΥ BLASIUS	180-198
15.1 Πηγή καὶ φρέαρ τῆς αὐτῆς παροχῆς	180
15.2 Ροή ἐν πηγῆς παρουσίᾳ μιᾶς ἐπιτέδου παρεΐᾳ ἢ δύο παραλλήλων ἐπιτέδων παρεΐων	185
15.3 Πηγή ἐν μέσῳ ὁμοιομόρφου ροῆς	186
15.4 Δίτιλον ἐν μέσῳ ὁμοιομόρφου ροῆς ἢ ροή περὶ υἰλίνδρου ἄνευ υἰλοφορίας. Παράδοξον τοῦ D'ALEMBERT	188
15.5 Ροή περὶ υἰλίνδρου μετὰ υἰλοφορίας	192
15.6 Ὑπολογισμός τῶν συνολικῶν δυνάμεων τελείου ἀσυμπιέστου ρευστοῦ δι' ἀστροβίλον ροήν καὶ ἄνευ πεδίου ἐξωτερικῶν δυνάμεων-Σχέσεις τοῦ BLASIUS	194
15.6.1 Παράδοξον τοῦ D'ALEMBERT	196
15.6.2 Θεώρημα τοῦ JOUKOWSKI	197
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 16.	
Ἡ ΣΥΜΜΟΡΦΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΚΑΙ Αἱ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ Εἰς τὴν ἐπὶ λῦσιν ἐπιπέδων κινήσεων διὰ τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων μιγαδικῆς μεταβλητῆς	199-217
16.1 Ὅρισμός τῆς συμμόρφου ἀπειμονίσεως	200
16.2 Βασικά θεωρήματα τῆς συμμόρφου ἀπειμονίσεως	200
16.3 Ἰδιότητες τῆς συμμόρφου ἀπειμονίσεως διὰ τὰς περιπτώσεις ροῆς ἐν μιγαδικοῦ δυναμιμοῦ	201
16.4 Μέθοδοι ἐπὶ λύσεως διὰ τῆς συμμόρφου ἀπειμονίσεως	204
16.4.1 Ἀπ' εὐθείας μέθοδοι	204
16.4.2 Μέθοδοι διαδοχικῶν δοκιμῶν	205
16.4.3 Μέθοδοι τῶν διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν	205
16.5 Μετασχηματισμός τῶν SCHWARTZ-CHRISTOFFEL	205
16.5.1 Εἰσαγωγή καὶ στοιχειώδης μετασχηματισμός	205
16.5.2 Γενίμευσις-Μετασχηματισμός τῶν SCHWARTZ-CHRISTOFFEL	207
16.5.3 Εἰδιυαί περιπτώσεις ἐφαρμογῆς καὶ τελικὰ συμπεράσματα	209

	Σελ.
16.6 'Αρχαί της θεωρίας των "profils"	211
16.6.1 Κανονική σύμμορφος άπειρόνισις έυ του έξωτερικού ενός υλειστού περιγράμματος εΐς τό έξωτερικόν ενός υύλου	211
16.6.2 Ροή περί ενός "profil" μέ δεδομένα τήν γωνίαν προσπτώσεως καί τήν υυλο-φορίαν-Θεώρημα του JOUKOWSKI	213
16.6.3 "Profils" μέ αΐχμήν. Ύπόθεσις του JOUKOWSKI	214
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 17. Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΠΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ (DIGITAL COMPUTERS)	217-240
17.1 Γενιότητες επί της αριθμητικής αναλύσεως	217
17.2 Ή μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών	219
17.3 Έπίλυσις του συστήματος των γραμμικών έξισώσεων	220
17.4 Γενιότητες επί των ήλεκτρονικών υπολογιστών αριθμητικού τύπου	221
17.4.1 Ιστορικόν	221
17.4.2 Γενική διάρθρωσις ενός ήλεκτρονικού υπολογιστού αριθμητικού τύπου	223
17.4.3 Ή έννοια του προγράμματος	228
17.4.4 Άναπαράστασις καί έπεξεργασία των αριθμών εΐς τούς ήλεκτρονικούς υπολογιστάς	229
17.4.5 Φάσεις προετοιμασίας ενός προβλήματος διά τόν ήλεκτρονικόν υπολογιστήν αριθμητικού τύπου	233
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ	241-247
ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΝ	249
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 18. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑΝ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ	251-255
18.1 Γενιότητες	251
18.2 Γεωμετρική όμοιότης	253
18.3 Κινηματική όμοιότης	254
18.4 Δυναμική όμοιότης	254
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 19. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ	256-264
19.1 Μαθηματικός όρισμός της όμοιότητος	256
19.2 Συνθῆναι καί αποτελέσματα όμοιότητος-Θεμελιώδες θεώρημα της όμοιότητος	259
19.3 Άνηγμένα μεταβληταί- Άνηγμένα έξισώσεις	262

19.4 Μέθοδοι ἀναζητήσεως τῶν νόμων τῆς φυσικῆς ὁμοιότητος	263
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 20. ΝΟΜΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΣΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥ	265-275
20.1 Προσδιορισμός τῆς φυσικῆς περιοχῆς τῶν φαινόμενων Γενναίαι ἐξισώσεις	265
20.2 Ἐυλογή τῶν υλισμῶν τῆς φυσικῆς ὁμοιότητος	266
20.3 Σχέσεις ὁμοιότητος-Συνθῆμαι καὶ ἀποτελέσματα ὁμοιότητος	267
20.4 Ροή τῶν πραγματικῶν ἀσυμπίεστων ρευστῶν μέ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν	269
20.5 Ροή τῶν τελείων ἀσυμπίεστων ρευστῶν μέ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν	270
20.6 Ροή τῶν πραγματικῶν ἀσυμπίεστων ρευστῶν ὑπὸ πίεσιν	272
20.7 Ροή τῶν τελείων ἀσυμπίεστων ρευστῶν ὑπὸ πίεσιν	273
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 21. ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΙΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΜΙΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ	276-285
21.1 Βασικαὶ ἔννοιαι καὶ ὁρισμοί	276
21.2 Θεώρημα τῶν π (ἢ VASCHY-BUCKINGHAM)	278
21.3 Συμβολή εἰς τὴν μαθηματικὴν μελέτην τῶν διαστατικῶν ἐξισώσεων καὶ τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων π	279
21.4 Συστηματικὸς ὑπολογισμὸς μιᾶς πλήρους σειρᾶς ἀδιαστάτων μονωνύμων π	283
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 22. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΙΝ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ	286-293
22.1 Ἐυλογή τῶν μεταβλητῶν τοῦ προβλήματος	286
22.2 Ἐυλογή τοῦ θεμελιώδους συστήματος μονάδων-Διαστατικὸν μητρῶον τῶν μεταβλητῶν	287
22.3 Ἐξισώσεις τῶν συντελεστῶν καὶ μητρῶον τῶν λύσεων	288
22.4 Μονώνυμα π , Μετατροπαὶ καὶ τελικὴ των μορφή. Τελικὴ μορφή τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν	289
22.5 Ἀσυμπίεστα ρευστά ἄνευ μεταδόσεως θερμικῆς ἐνεργείας καὶ μετὰ σημαντικοῦ εἰδιμοῦ βάρους	291
22.6 Συμπίεστα ρευστά ἄνευ μεταδόσεως θερμικῆς ἐνεργείας καὶ μικροῦ εἰδιμοῦ βάρους (ἀέρια)	291
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 23. ΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΜΕΓΑΛΩΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΕΠΙ ΤΗΣ ΣΤΡΕΒΛΗΣ ΚΛΙΜΑΚΟΣ	294-300
23.1 Εἰσαγωγή εἰς τὰς ἐργαστηριακὰς μελέτας ὑδραυλικῶν ἔργων	294

	Σελ.
23.2 Μελέται προστασίας έσωτεριμοῦ λιμένων ἀπό υψματισμοῦς	295
23.3 Μελέται υινήσεως φερτῶν ὑλῶν εἰς λιμένας υαί ποταμούς	295
23.4 Μελέται ἐπαληθεύσεως υαί εὔσταθείας- Ὑποσυαφαί	296
23.5 Θεωρητιή μελέτη ἐπὶ τῆς στρεβλῆς υλῆμαος	297
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ	301-306

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΔΙΑΙΤΑΙ ΡΟΗΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ	307
--	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 24.

ΔΙΑΙΤΑΙ ΡΟΗΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ-ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ	309-320
---	---------

24.1 Γεννιότητες ἐπὶ τῶν ἐννοῶν στρωτῆς υαί τυρβώδους ροῆς διὰ τόν προσδιορισμόν τοῦ πεδίου ἰσχύος τῶν γεννιῶν ἐξισώσεων υινή- σεως τῶν πραγματιῶν ρευστῶν	309
24.2 Φυσιὰ χαραυτηρισιτιὰ τῆς στρωτῆς υαί τῆς τυρβώδους ροῆς-Πειράματα τοῦ REYNOLDS διὰ ροήν εἰς σωλῆνας	310
24.3 Μαθηματιὰ χαραυτηρισιτιὰ τῆς τυρβώδους ροῆς	313
24.4 Ἐξισώσεις τοῦ BOUSSINESQ διὰ τυρβώδη ροήν	316
24.5 Προσδιορισμός τῶν διαυτηρισιτιῶν τάσεων εἰς στά- σιμον τυρβώδη ροήν	318

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 25.

ΜΕΛΕΤΗ ΑΠΛΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΣΤΡΩΤΗΣ ΡΟΗΣ ΔΙ' ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΡΕΥΣΤΑ	321-337
---	---------

25.1 Γεννιότητες υαί συμπληρωματιὰ ἐξισώσεις υινήσεως	321
25.2 Ἐφαρμογαί τῶν γεννιῶν ἐξισώσεων διὰ μόνιμον ροήν	323
25.2.1 Ροή μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων λόγῳ διαφορᾶς πιέσεων	323
25.2.2 Ροή ἐντός υυλινδριμοῦ σωλῆνος σταθερᾶς διατομῆς λόγῳ διαφορᾶς πιέσεων	326
25.2.3 Ροή μέ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν εἰς υευλιμένον ἐπίπεδον λόγῳ τοῦ δυναμιμοῦ πεδίου βαρύτητος	328
25.2.4 Ροή μεταξύ δύο συναζονιῶν υυλίνδρων λόγῳ περιστροφῆς τοῦ έσωτεριμοῦ υυλίνδρου μέ σταθεράν γωνιαιήν ταχύτητα	330
25.3 Ἐφαρμογαί τῶν γεννιῶν ἐξισώσεων διὰ μή μόνιμον ροήν	332
25.3.1 Ροαί ἀπλῆς ὀλισθήσεως	332
25.3.2 Διάχυσις τῆς περιστροφῆς	335

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 26.

ΜΟΝΙΜΟΣ ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ ΜΕ ΜΙΚΡΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ
 REYNOLDS ΔΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ
 ΑΝΕΥ ΠΕΔΙΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

338-343

26.1 Ἀνηγμέναι μεταβληταί- Ἀνηγμέναι ἐξισώσεις

339

26.2 Γενναί ἐξισώσεις τῶν υἱνήσεων μέ μιρούς
 ἀριθμούς REYNOLDS

341

26.3 Ἐφαρμογαί τῶν γεννιῶν ἐξισώσεων

343

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 27.

ΜΟΝΙΜΟΣ ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ ΜΕ ΜΕΓΑΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ
 REYNOLDS ΚΑΙ ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΙΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ
 ΤΗΣ ΣΤΡΩΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΤΟΙΒΑΔΟΣ

344-354

27.1 Γενναί ἀρχαί

344

27.2 Μελέτη ἐπὶ μαθηματικοῦ ὁμοιώματος

345

27.3 Ἐξίσωσις τῆς ὀριαῖς στοιβάδος διὰ τὴν περὶπτωσην
 ἐπιπέδου ἡμισφαίριου πλαυός

347

27.4 Συνοπτικὴ μελέτη τῆς ἐξισώσεως τῆς ὀριαῖς
 στοιβάδος δι' ἐπίπεδον πλάνα

349

27.5 Γενναί στοιχεῖα ἐπὶ τῶν θεωριῶν τῆς στρωτῆς καὶ
 τυρβώδους ὀριαῖς στοιβάδος διὰ σώματα τυχοῦσης
 μορφῆς παρεμβαλλόμενα εἰς ὁμοιόμορφον ροήν

352

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΕΜΠΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

355-365

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

367-369

ΑΛΦΑΒΗΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

371-379

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αἱ ἐξελίξεις τῆς τελευταίας τριαμονταετίας εἰς τὴν ἐπιστήμην τῆς ὑδραυλικῆς δημιουργοῦν τὴν ἀνάγκην μιᾶς υαλυτέρας καὶ γενικωτέρας ἐδράσεως τῶν θεωρητικῶν βάσεων αὐτῆς.

Μία τοιαύτη θεωρητικὴ ἀντιμετώπισις τῆς ὑδραυλικῆς παρουσιάζει τὰ ἐξῆς βασικά πλεονεκτήματα ἐν σχέσει μὲ ἄλλας προγενεστέρας μεθόδους, ἀπολουθουμένας καὶ μέχρι σήμερον.

α) Συνδέει τὴν ὑδραυλικὴν μὲ τοὺς λοιποὺς κλάδους τῆς ἐφηρμοσμένης φυσικῆς ποὺ ἐνδιαφέρουν τὸν μηχανικόν, ὅπως θεωρίαν ἐλαστικότητος, ἀεροδυναμικὴν, θερμοδυναμικὴν, ἐδαφομηχανικὴν κ.λπ.

β) Εἶναι ἀπηλλαγμένη ἀσαφειῶν ἢ σφαλμάτων εἰς τὰς ἀρχικὰς παραδοχὰς καὶ εἰς τὰς συνθήκας τῶν ὁρίων, διότι ἐκκινεῖ ἀπὸ γενικῆς ἀρχῆς τῆς υαλοστικῆς μηχανικῆς διὰ νὰ υαταλήξῃ εἰς τοὺς ἐπὶ μέρους νόμους ἐπὶ τῇ βάσει αὐστηρᾶς μαθηματικῆς ἀναλύσεως.

γ) Εἶναι πολὺ ταχύτερα καὶ πλέον παραστατικὴ, διότι στηρίζεται εἰς τὸν διανυσματικόν λογισμόν καὶ εἰς τινὰ στοιχεῖα τοῦ τανυστικοῦ λογιμοῦ.

δ) Δίδει τὰς βάσεις εἰς τὸν σπουδαστὴν μηχανικόν διὰ τὴν παραμολούθησιν τῆς συγχρόνου βιβλιογραφίας καὶ τῶν τελευταίων ἐξελίξεων εἰς τὸν τομέα τῆς ὑδραυλικῆς ἢ εἰς ἄλλους συγγενεῖς τομεῖς.

Ἡ ἀνάπτυξις τῶν ἀρχῶν τῆς θεωρητικῆς καὶ ἐφηρμοσμένης ὑδραυλικῆς ὑπὸ τὸ πρῶτον αὐτὸ ἀπαιτεῖ βεβαίως ἐν σχετικῶς ὑψηλὸν ἐπίπεδον μαθηματικῶν. Πλὴν ὅμως, διὰ τῆς συστηματικῆς εἰσαγωγῆς ὅλων τῶν νέων ἐννοιῶν εἰς εἰδικὰ κεφάλαια ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν μιᾶς ἐκάστης παραγράφου, δημιουργοῦμεν μίαν ὁμαλήν καὶ εὐκόλως μετάβασιν ἀπὸ τὰς γνωστὰς βάσεις τῆς διδασκομένης, εἰς τὰ δύο πρῶτα ἔτη, ὕλης τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν, πρὸς τὰ χρησιμοποιούμενα νέα στοιχεῖα τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν.

Ἡ ἐμπνευσμένη καθοδήγησις καὶ ἐποπτεία τοῦ μαθηγῆτοῦ τῆς ἔδρας ὑδραυλικῆς καὶ ὑδραυλικῶν ἔργων κ. Ν. ΧΩΡΑΦΑ ἀπετέλεσεν τὸν ὁδηγόν διὰ τὴν σύνταξιν τοῦ παρόντος πρώτου τόμου ἐπὶ τῆς θεωρητικῆς ὑδραυλικῆς. Ἐυφράζω ὅθεν τὰς θερμότητας μου εὐχαριστίας, ἐλπίζων ὅτι ἐπιτελεῖται οὕτω τὸ πρῶτον βῆμα πρὸς πραγματοποίησιν τοῦ ὑπ' αὐτοῦ ταχθέντος, ἀπ' ἀρχῆς τῆς ιδρύσεως τῆς ἔδρας, ἀντικειμενικοῦ διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ἐπιπέδου, τὸν ἐκσυγχρονισμόν καὶ τὴν ἐπιστημονικὴν θεμελίωσιν τῆς θεωρητικῆς ὑδραυλικῆς εἰς τὰ πλαῖσια

τῆς ἀντιστοίχου ἐλληνικῆς βιβλιογραφίας.

Θεωρῶ ἐπίσης μαθῆμιον μου νά εὐχαριστήσω καί ἐντεῦθεν τόν μαθηγητήν τῆς ἐφηρμοσμένης στατικῆς κ. Γ. ΝΙΤΣΙΩΤΑΝ διά τās πολυτίμους ὑποδείξεις καί συμβουλάς, τās ὁποίας μοῦ παρέσχε μαθ' ὅλην τήν διάρκειαν τῆς συντάξεως.

Ἡ, εἰς τόσον σύντομον χρονικόν διάστημα, ξυδοσις τοῦ παρόντος τόμου ματέστη δυνατή χάρις εἰς τήν ἰδιαιτέραν φροντίδα τοῦ σπουδαστοῦ-βοηθοῦ κ. Γ. Μπαλαφούτα, μαθώς καί εἰς τήν συμβολήν τῆς παρασκευαστρίας κ. Α. Κυριαζῆ καί τῶν σπουδαστῶν-βοηθῶν δίδος Γ. Παπαδόπετρου καί κ. κ. Α. Μυλωνᾶ, Ν. Κωτσοβίνου καί Δ. Τολίμα, διά τήν ὁποίαν καί τοὺς εὐχαριστῶ θερμῶς.

Ὑπό τόν αὐτόν γενικόν τίτλον "Μαθήματα Ὑδραυλικῆς" εὐρίσκεται ἤδη ὑπό ξυδοσιν ὁ τόμος Β, "Εἰσαγωγή εἰς τήν Ἐφηρμοσμένην Ὑδραυλικήν", προβλέπεται δέ καί ἡ ξυδοσις τρίτου τόμου μέ στοιχεῖα ἐπὶ τῶν ὑδραυλικῶν μηχανῶν.

Θ. Σ. Ξανθόπουλος

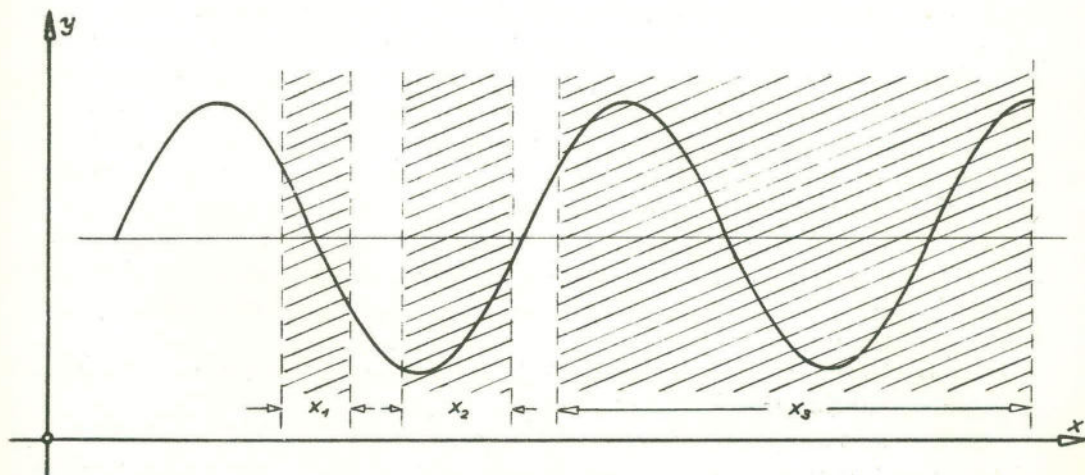
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ ἐπιστήμη τῆς φυσικῆς διαίρεται εἰς κλάδους καὶ ἕκαστος ἐξ αὐτῶν ἔχει πλείστας ὅσας ὑποδιαίρεσεις. Εἷς κλάδος ἢ μία ὑποδιαίρεσις χαρακτηρίζονται ἀπὸ μίαν σειράν νόμων "ἐσωτερικῆς συνθέσεως", οἵτινες διέπουν ἓν ὠρισμένον σύνολον φαινομένων. Τό συγυειροτημένον αὐτό σύνολον φαινομένων θά ὀνομάσωμεν φυσικὴν περιοχὴν, ἡ δέ θεωρητικὴ ὑδραυλικὴ ἀποτελεῖ μίαν ὑποδιαίρεσιν, δηλαδή ἓν τμῆμα τῆς φυσικῆς περιοχῆς τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν καὶ προσδιορίζεται ἀπὸ τὸν περιορισμὸν τῆς ἐννοίας τοῦ ρευστοῦ εἰς τὴν εἰδικὴν κατηγορίαν τῶν ἀσυμπιέστων ρευστῶν καὶ δὴ τοῦ ὕδατος.

Γεννᾶται ὁμως, διὰ τὴν θεωρητικὴν ὑδραυλικήν, ὡς καὶ διὰ τοὺς ἄλλους εἰδικευμένους κλάδους τῆς φυσικῆς, τὸ ἐρώτημα: Ποῖον εἶναι τὸ κριτήριον τῆς ἐπιτυχοῦς μαθηματικῆς ἐμφράσεως ἐνός νόμου ἐσωτερικῆς συνθέσεως τῆς περὶωρισμένης φυσικῆς των περιοχῆς;

Ἡ ἀπάντησις δίδεται ἀπλᾶ ὡς ἐξῆς: "Μεταξύ δύο νόμων ἐμφραζόντων ἓν καὶ τὸ αὐτό φαινόμενον ἐνός περὶωρισμένου κλάδου τῆς φυσικῆς, ἐπιτυχέστερος εἶναι ὁ καταλαμβάνων μεγαλυτέραν ἔκτασιν φυσικῆς περιοχῆς, ἥτοι ὁ ἐξερχόμενος τῶν στενῶν ὁρίων τοῦ ὑπ' ὄψιν κλάδου καὶ πλησιάζων περισσότερο τὴν πηγὴν τοῦ φαινομένου".

Ἐν παράδειγμα δευνύει σαφέστερον τὴν ἀξίαν αὐτῆς τῆς ἀρχῆς:



Ἐστῶσαν τρεῖς ἐρευνηταί, E_1, E_2, E_3 , ἐπιφορτισμένοι ὁ καθείς ἀνεξαρτήτως τῶν ἄλλων, νά ἐμφράσουν μαθηματικῶς ἓνα φυσικόν νόμον ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μετρήσεων καὶ παρατηρήσεων τὰς ὁποίας ὁ καθείς δια-
 ἰάγει εἰς ἓνα ὠρισμένον τομέα ἐμφανίσεως τοῦ φυσικοῦ φαινομένου. Ὑ-
 ποθέτομεν ὅτι καὶ οἱ τρεῖς ἐρευνηταί ἐτελοῦν ὁρθὰς μετρήσεις καὶ
 ὅτι τὸ φυσικόν φαινόμενον δύναται ἐν τῷ συνόλῳ του νά παρασταθῇ εἰς
 ἓν συμβατικόν ἐπίπεδον Oxy , ὑπὸ μορφήν ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης.

Ἐστῶσαν x_1, x_2, x_3 , αἱ ὥναι εἰς τὰς ὁποίας ἐξετέλεσαν τὰς
 παρατηρήσεις καὶ μετρήσεις των, ἀντιστοίχως οἱ ἐρευνηταί E_1, E_2, E_3 .
 Προφανῶς, διὰ τὸν ἐρευνητὴν E_1 τὸ φαινόμενον ἐμφράζεται ὑπὸ μορ-
 φὴν εὐθείας, διὰ τὸν ἐρευνητὴν E_2 ὑπὸ μορφήν καμπύλης 2ου βαθμοῦ,
 καὶ μόνον ὁ ἐρευνητὴς E_3 εὕρισκε τὴν ὁρθὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν
 τοῦ φαινομένου, ἥτοι τὴν ἡμιτονοειδοῦς καμπύλην.

Ἡ ἐπιτυχία τοῦ ἐρευνητοῦ E_3 δὲν ἔγχειται εἰς τὴν ἀριβείαν
 τῶν μετρήσεων του ἀλλὰ εἰς τὴν ἐπέκτασίν των εἰς μεγάλην ὥσιν ἐ-
 πιρροῆς τοῦ φαινομένου, ἥτοι εἰς τὴν διερεύνησιν μιᾶς φυσικῆς περι-
 οχῆς μεγάλης ἐκτάσεως.

Αὐτὴν ἀριβῶς τὴν γενικὴν ἀρχὴν θέτομεν ὡς βάσιν διὰ τὴν ἀνά-
 πtyξιν τῆς θεωρητικῆς ὑδραυλικῆς, ἐξετάζοντες κατ' ἀρχὴν τὰ φαινόμε-
 να τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν καὶ εἰδιμεύοντες ἐν συνεχείᾳ τὰς ἐξι-
 σώσεις διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν ἀσυμπιέστων ρευστῶν.

Ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν μηχανικὴν τῶν ρευστῶν στηριζόμεθα εἰς τὸ ὅ-
 τι οἱ νόμοι πού διέπουν τὴν δυναμικὴν καὶ κινητικὴν θεωρίαν τυχόν-
 τος ρευστοῦ ὑπαίουσιν εἰς τὰς αὐτάς ἀριβῶς γενικὰς ἐξισώσεις τῆς
 μιᾶς ἐν τῶν δύο μεγάλων ὑποδιαίρέσεων τῆς κλαστικῆς μηχανικῆς, ἥ-
 τοι τῆς μηχανικῆς τῶν συνεχῶν μέσων.

Αὕτη ἐτείνεται ἀπὸ τῆς μηχανικῆς τῶν ἰδεατῶν στερεῶν μέχρι
 τῆς τῶν πραγματικῶν ἀερρίων, μέ ὅλας τὰς μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν κα-
 ταστάσεων, ἐνδιαμέσους μορφὰς τῆς ὕλης. Ὑπὸ τὸ πρῶμα αὐτό, ἡ μη-
 χανικὴ τῶν ρευστῶν συνδέεται στενὰ μέ τὴν πηγὴν τῶν φαινομένων
 πού διέπουν τὴν μηχανικὴν ἐν γένει, προκύπτει δέ μέ συνέπειαν καὶ
 συνέχειαν, ὡς "εἰδιὴ περίπτωσις" ὠρισμένων γενικῶν νόμων.
 Ἡ στενὴ αὕτη σύνδεσις μιᾶς μεγάλης κατηγορίας φυσικῶν νόμων εἰς
 ὠρισμένας γενικὰς ἐξισώσεις ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς ἐπιτυχοῦς ἐμφρά-
 σεως τῶν φυσικῶν νόμων καὶ μίαν ἀπὸ τὰς αἰτίας τῆς ταχείας ἐκελίξε-
 ως τῆς ἐπιστήμης, διότι δίδει εἰς τὸν ἐρευνητὴν, φυσικόν ἢ μηχανι-
 κόν, τὴν δυνατότητα τῆς κατανόησεως τοῦ φυσικοῦ φαινομένου ἀπὸ τῶν
 "πηγῶν" του, ἐν συνεχείᾳ δέ τὴν ἐν τῶν πηγῶν ἀντλησιν νέων κατευ-
 θύνσεων ἐρεύνης.

Μέ βάσιν τὰς ἀνωτέρω ἀρχάς, διηρήσαμεν τὸ σύνολον τῆς ὕλης
 εἰς πέντε κύρια μέρη.

Τὸ πρῶτον μέρος ἀποτελεῖ τὸν συνδετικόν κρῖμον μεταξὺ τῆς
 κλαστικῆς μηχανικῆς καὶ τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν. Μετὰ μίαν σύντο-
 μον μαθηματικὴν προσαρμογὴν τῶν γενικῶν ἐννοιῶν τῆς ἀναλύσεως καὶ
 δὴ τῆς γραμμικῆς ἀλγέβρας καὶ τοῦ διανυσματικοῦ λογισμοῦ εἰς τὰς
 ἀνάγκας τῆς θεωρητικῆς ὑδραυλικῆς, ἀναφέρονται ἐν περιλήψει ὅλαι
 αἱ βασικαὶ ἀρχαὶ τῆς κλαστικῆς μηχανικῆς. Ἐπαυοῦσθε ἡ κατὰ στρω-

σις τῶν θεμελιωδῶν νόμων καὶ ἐξισώσεων τῆς μηχανικῆς τῶν συνεχῶν μέσων ὑπὸ ἀναλυτικὴν καὶ διανυσματικὴν μορφήν, ἀναπτύσσεται δὲ τέλος ἡ ἔννοια καὶ ἡ μορφή τοῦ τανυστοῦ τῶν τάσεων σημείου τινὸς διὰ τυχόν συνεχές ὑλικὸν σύστημα καὶ τοῦ τανυστοῦ τῶν παραμορφώσεων διὰ τὴν περίπτωσιν ὑλικοῦ συστήματος, ἱκανοποιοῦντος τὰς φυσικὰς καὶ μαθηματικὰς συνθήκας τῶν υλασσιμῶν ρευστῶν.

Εἰς τὸ δεῦτερον μέρος ἀναπτύσσονται αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις καὶ τὰ θεωρήματα τῆς στατικῆς καὶ δυναμικῆς τῶν ρευστῶν, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν θεμελιωδῶν νόμων καὶ ἐξισώσεων τοῦ πρώτου μέρους. Ἐπαυολοθεῖ ἡ εἰδίμευσις τῶν ἐξισώσεων ἀνά κατηγορίας υλασσιμῶν ρευστῶν καὶ ἐξετάζονται αἱ βασιώτεραι ἐφαρμογαὶ τῶν θεωρημάτων BERNOULLI καὶ ποσοτήτων κινήσεως διὰ τὴν μηχανικὴν τῶν ρευστῶν καὶ τὴν θεωρητικὴν ὑδραυλικὴν.

Τὸ τρίτον μέρος περιλαμβάνει τὴν μελέτην μιᾶς εἰδικῆς κατηγορίας κινήσεων, ἀπαντωμένων συχνότατα εἰς τὴν μηχανικὴν τῶν ρευστῶν καὶ εἰδικώτερον εἰς τὴν θεωρητικὴν ὑδραυλικὴν. Πρόκειται περὶ τῶν ἐπιπέδων κινήσεων τῶν τελείων ἀσυμπιέστων ρευστῶν, διὰ ροὴν μόνιμον καὶ ἀστρόβιλον, αἵτινες ἀποτελοῦν καὶ τὴν βάσιν διὰ τὴν μελέτην τῶν φαινομένων τῆς ὑπογείου ὑδραυλικῆς.

Εἰς τὸ μέρος αὐτὸ ἀναπτύσσεται ἐντὸς τῶν ἄλλων καὶ ἡ θεωρία τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων μιγαδικῆς μεταβλητῆς μετὰ τῆς συμμόρφου ἀπειμονίσεως καὶ τῶν κυρίων ἐφαρμογῶν τῆς εἰς τὸν τομέα τῆς ὑδραυλικῆς. Τέλος, εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον ἐξετάζονται αἱ μέθοδοι ἐπιλύσεως τῶν ἐπιπέδων κινήσεων διὰ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως, δίδονται δὲ καὶ ὠρισμένα βασιμὰ στοιχεῖα ἐπὶ τῶν ἡλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν διὰ μίαν πρώτην ἐξοικίωσιν ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς ἐφαρμογῆς των διὰ τὴν τελικὴν ἐπίλυσιν τῶν δι' ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως ἀντιμετωπιζομένων προβλημάτων τοῦ μηχανικοῦ.

Εἰς τὸ τέταρτον μέρος ἀναπτύσσεται ἡ γενικὴ θεωρία ὁμοιότητος ἐπὶ τῇ βάσει ὠρισμένων στοιχείων τῆς τοπολογίας, δίδονται δὲ καὶ αἱ γενικαὶ μέθοδοι εὐρέσεως τῶν νόμων ὁμοιότητος μιᾶς φυσικῆς περιοχῆς. Ἀκολουθεῖ ἡ εὕρεσις τῶν νόμων ὁμοιότητος τῆς θεωρητικῆς ὑδραυλικῆς διὰ τῆς ἀπ' εὐθείας μεθόδου, με ἀνάλυσιν καὶ ἐφαρμογὰς διὰ τὰς συνήθεις περιπτώσεις ροῆς τῶν μελετῶν ἐπὶ ὁμοιωμάτων ὑπὸ σμίμυρυνσιν.

Ἐν συνεχείᾳ δίδεται ἰδιαίτερα προσοχὴ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς διαστατικῆς ἀναλύσεως τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὑπολογισμοῦ διὰ μητρῶν καὶ εἰς τὴν δι' αὐτῆς συστηματικὴν εὕρεσιν τῶν φυσικῶν νόμων καὶ νόμων ὁμοιότητος ἐνός τυχόντος φαινομένου τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν.

Τέλος, ἀναλύονται τὰ κύρια χαρακτηριστικὰ καὶ αἱ συναντώμεναι δυσχέρειαι κατὰ τὰς μελέτας μεγάλων ὑδραυλικῶν ἔργων ἐν ὁμοιωματι, ἀναπτύσσεται ἡ θεωρία τῆς στρεβλῆς κλίμακος καὶ δίδεται ὁ τρόπος τῆς ἐφαρμογῆς ταύτης εἰς τὰς συνήθεις περιπτώσεις τῶν ἐργαστηριακῶν μελετῶν.

Τὸ πέμπτον μέρος ἀναφέρεται εἰς τὴν μελέτην τῶν φυσικῶν καὶ μαθηματικῶν χαρακτηριστικῶν τῆς στρωτῆς καὶ τυρβώδους ροῆς ὡς καὶ ὠρισμένων συνήθων περιπτώσεων στρωτῆς ροῆς τῶν ἀσυμπιέστων πραγματικῶν ρευστῶν, ἀποτελεῖ δὲ τὴν βάσιν διὰ τὴν ἐν συνεχείᾳ κατανόη-

σιν τῶν φαινομένων τῆς ἐφηρμοσμένης ὑδραυλικῆς.

Μετά τήν κατὰστρωσιν τῶν γενιῶν ἐξισώσεων καί τήν ἐφαρμογήν των εἰς ὠρισμένας ἀπλᾶς περιπτώσεις μινήσεως, δίδεται ἡ ἀνηγμένη μορφή τῶν ἐξισώσεων τῆς μονίμου ροῆς τῶν ἀσυμπιέστων πραγματικῶν ρευστῶν καί ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἡ φυσική σημασία τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ REYNOLDS εἰς τήν ὑδραυλικήν.

Ἀυολουθεῖ ὁ διαχωρισμός εἰς ροᾶς μέ μικροῦς καί μεγάλους ἀριθμούς REYNOLDS καί διά τήν δευτέραν περίπτωσιν προκύπτει ἡ μελέτη τῶν φαινομένων τῆς στρωτῆς ὀριαῖς στοιβάδος, τῇ βοηθείᾳ μαθηματικοῦ ὁμοιώματος. Τέλος δίδονται ὠρισμένα γενικά στοιχεῖα ἐπὶ τῶν θεωριῶν περὶ στρωτῆς καί τυρβώδους ὀριαῖς στοιβάδος.

Ἀντικειμενικὸς σκοπὸς τῆς παρούσης "Εἰσαγωγῆς εἰς τήν θεωρητικὴν ὑδραυλικήν" εἶναι ἡ ὑπεύθυνος παρουσίασις τῆς διδασκουμένης ὕλης εἰς τό Γ' ἔτος τοῦ τμήματος Πολιτικῶν Μηχανικῶν τῆς Πολυτεχνικῆς Σχολῆς τοῦ Α. Π. Θ. Ὑπεχρεώθημεν ὅμως νά ἐλευθερώμεν καί εἰς τομεῖς μὴ συμπεριλαμβανομένους εἰς τήν διδασκαλίαν ὕλην, μέ τήν πεποίθησιν ὅτι τοῦτο καθίσταται ἀπαραίτητον διά τήν πληρεστέραν κατάρτισιν τῶν ἐνδιαφερομένων σπουδαστῶν ἢ μηχανικῶν.

Ἡ ἀνάπτυξις τῶν ἐπὶ πλέον αὐτῶν θεμάτων λαμβάνει χώραν ὑπὸ τοῦ γράφοντος ἐντός τῶν πλαισίων εἰδικοῦ σεμιναρίου ὁργανωθέντος τῶν Φεβρουάριον 1965 καί λειτουργοῦντος ἔντοτε καλονικῶς μεταξύ τῶν ἐνδιαφερομένων σπουδαστῶν καί τοῦ προσωπικοῦ τῆς Ἑδρας Ὑδραυλικῆς καί Ὑδραυλικῶν Ἔργων, ὡς καί τῆς Ἑδρας Θεωρητικῆς Ὑδραυλικῆς.

Σημειοῦμεν τέλος ὅτι αἱ παράγραφοι 19.1, 19.2, 21.3, 21.4, 23.5, ἀποτελοῦν πρωτότυπον συμβολήν εἰς τόν τομέα τῆς θεωρητικῆς ὑδραυλικῆς, αἱ δέ παράγραφοι 5.1.3, 5.4, 6.4, 7.2, 9.1, 9.4, 10.1, 15.6, 16.5.3, 20.1, 20.2, 22.1, 22.3, 24.1, 26.1, 27.2, ἐμφανίζουν κάποιαν πρωτοτυπίαν ὡς πρός τήν διατύπωσιν γνωστῶν ἀρχῶν ἢ ἐξισώσεων, παρακαλοῦμεν δέ θερμῶς τοὺς Ἑλληνας καί ξένους εἰδικούς συναδέλφους ὅπως τὰς προσέξουν ἰδιαίτερος καί τὰς ὑποβάλουν εἰς τήν ἀνάλογον κριτικὴν.

Θ. Σ. Ξανθόπουλος

ΚΥΡΙΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Διά τῆς ἀνολουθούσης τετραγλώσσου ὁρολογίας δέν λαμβάνομεν θέσιν ὡς πρὸς τὴν ἐννοιολογικὴν ἢ γλωσσολογικὴν ἀπόδοσιν τῶν συνηθέστερον ἀπαντωμένων ὄρων εἰς τὴν θεωρητικὴν ὑδραυλικὴν.

Παραυαλοῦμεν ὅθεν τοὺς ἀξιοτίμους κ.κ. εἰδικοὺς συναδέλφους ὅπως γνωστοποιήσουν εἰς τὸν γράφοντα ὅσας παρατηρήσεις ἢ διορθώσεις ἤθελον θεωρήσει ἀναγκαῖας.

Μετὰ παρέλευσιν ἐξαμήνου ἀπὸ τῆς ἐκδόσεως τοῦ παρόντος τόμου θά διοργανωθῇ συζήτησις εἰς τό Τ.Ε.Ε. διὰ τὴν ὁριστικὴν μαθιέρωσιν ἐνιαίας ὁρολογίας εἰς τὴν θεωρητικὴν καὶ ἐφρμοσμένην ὑδραυλικὴν.

ἀδιαβατικὸς	adiabatic	adiabatisch	adiabatique
ἀδιάστατος	dimensionless	dimensionslos	adimensionnel
ἀνάλυσις ἀριθμητικὴ	numerical analysis	numerische Analyse	analyse numérique
ἀνάλυσις διαστατικὴ	dimensional analysis	dimensionale Analyse	analyse dimensionnelle
ἀναλυτικαὶ συναρτήσεις	analytic functions	analytische Funktionen	fonctions analytiques
ἀπεικόνισις σύμμορφος	conformal mapping	Konforme Abbildung	représentation conforme
ἀπώλυσις	divergence	Divergenz	divergence
ἀριθμὸς κρίσεως	critical number	kritische Zahl	nombre critique
ἀριθμὸς μιγαδικός	complex number	komplexe Zahl	nombre complexe
ἀσυμπιεστότης	incompressibility	Unzusammendrückbarkeit	incompressibilité
αὐτοπρογραμματισμὸς	autoprogramming	Selbstprogrammierung	autoprogrammation
βαθμὶς	gradient	Stufe	gradient
βαθμωτός	scalar	skalar	scalaire
γραμμὴ ἴσου δυναμιοῦ	equipotential line	equipotentielle Linie	ligne equipotentielle
γραμμὴ ροῆς	streamline	Stromungslinie	ligne de courant
γραμμικότης	linearity	Linearität	linéarité
δεδομένα	data	Daten	données
δείκτης	index	Index	indice
διάγραμμα λειτουργιῶν	block diagram	Betriebsdiagramm	organigramme de principe
ἢ γενικῶν			
διακύμανσις	fluctuation,	Schwingung	fluctuation

διανομή	distribution	Verteilung	distribution
διάρθρωσις	structure	Struktur	structure
διασπορά	variance	Zerstreuung	variance
διαφορικὸν ὀλκῶν	differential, total	totales Differential	differentielle totale
διάχυσις	diffusion	Diffusion	diffusion
διεύθυνσις ἐντολῆς	statement adress	Auftragsrichtung	adresse d'instruction
διεύρυνσις	expansion	Verbreiterung	élargissement
δύνη	tourbillon, vortex	Wirbel	tourbillon
δίπολον	doublet	Bipol, Doublet	doublet
δυναμική	dynamics	Dynamik	dynamique
δυναμικόν	potential	Potential	potentiel
δυναμικὸν μιγαδικόν	complex potential	komplexes Potential	potentiel complexe
ἐυτελεστής	operator	Operator	opérateur
ἐνεργείας ἀπώλειαι	energy losses	Energieverluste	pertes d'énergie
έντασις	intensity	Stärke	intensité
έντολή	instruction	Auftrag	instruction
ἐξίσωσις ἀνηγμένη	reduced equation	reduzierende Gleichung	equation réduite
εὐστάθεια	stability	Stabilität	stabilité
έξῶδες	viscosity	Zähigkeit, Viskosität	viscosité
ίσοθερμος	isothermal	isotherm	isotherme
ίσοτροπία	isotropy	Isotropie	isotropie
κινηματική	kinematics	Kinematik	cinétique
κινητική	kinetics	Kinetik	cinématique
κίνησις	movement	Bewegung	mouvement
κλάδοι ἐπαναληπτικοί	iterative branches	Wiederholungszweige	branches iteratives
κλίμαξ τυρβώδους	scale of turbulence	turbulenter Maßstab	échelle de turbulence
κλίμαξ στρεβλή	distorted scale	schiefer Maßstab	échelle distordue
κόμμα, κινητή	floating point	Komma schwebend	virgule flottante
κυκλοφορία	circulation	Zirkulation	circulation
κυματισμός	wave	Wellengang	onde, houle
κώδιξ δυαδικός	binary code	binäre Codex	code binaire
μέγεθος	quantity	Grösse	quantité, grandeur
μέθοδοι απ'εὐθείας	direct methods	direkte Methoden	méthodes directes
μέθοδοι ἐπαναληπτικαί	iterative methods	Iterationsmethoden	méthodes itératives
μέθοδοι πεπερασμένων διαφορῶν	finite differences methods	Methoden der endlichen differenzen	méthodes aux différences finies
μέθοδοι τριγωνοποιήσεως	triangularisation methods	Triangulationsmethoden	méthodes de triangulation
μέθοδοι χαλαρώσεως	relaxation methods	Relaxationmethoden	méthode de relaxation
μεταβλητή	variable	Veränderliche	variable
μεταβλητή ἀνηγμένη	reduced variable	reduzierende Veränderliche	variable réduite
μετάκεντρον	metacenter	Metazentrum	métacentre
μετασχηματισμός	transformation	Transformation	transformation
μετατροπή	conversion	Umwandlung	conversion
μητρώον	matrix	Matrix	matrice
μητρώον λωριδωτόν	matrix-band	Bandmatrix	matrice bande
μνήμη	memory	Speicher, Akkumulator	mémoire
μνήμαι ἀποθηκεύσεως	storage	Speicherplatz	mémoires de stockage

μνήμαι ταχείας προσπελάσεως	fast access storage	Speichern schneller Zugangs	mémoires d'accès rapide
μονώνυμον	mononym	Mononym	mononyme
νόρμα έρμητινή	hermetic norm	hermetische Norm	norme hermétique
νόρμα εύκλειδίου	euclidian norm	euklidische Norm	norme euclidienne
όμάς	group	Gruppe	groupe
όμογένεια	homogeneity	Homogenität	homogénéité
όμοιώματα άναλογικά	analog models	Äppliche Modelle	modèles analogiques
όμοιώματα μαθηματικά	mathematical models	mathematische Modelle	modèles mathématiques
όμοιώματα ρεοηλεκτρικά	rheoelectrical models	rheologische Modelle	modèles rhéoelectriques
όμοιώματα φυσικά	physical models	physikalische Modelle	modèles physiques
όμοιότης φυσική	physical similitude	natürliche Ähnlichkeit	similitude physique
όργανα είσόδου, έξόδου	device of input, output	Eingangsinstrumente	organes d'entrée, de sortie
έπεξεργασίας,	processing.	Ausgangsinstrumente	de traitement.
όριο	boundary	Limes, Grenze	limite
όριακά συνθήματα	boundary conditions	Grenzbedinzungen	conditions aux limites
Παράγωγος μερική	partial derivative	partielle Ableitung	derivée partielle
παράγωγος μοριακή	particle's derivative	molekulare Ableitung	derivée particulaire
παροχή	discharge	Abflußmenge	debit
πάχος μετατοπίσεως	displacement thickness	verschiebungsstärke	épaisseur de déplacement
πάχος όριακής στοιβάδος	thickness of boundary layer	stärke der Grenzschicht	épaisseur de couche limite
πάχος ποσότητας	momentum thickness	stärke der Bewegungsmenge	épaisseur de quantité de mouvement
υινήσεως			
πεδίων	field	Feld	champs
περιστροφή	rotation	Rotation	rotation
πηγή	source	Quelle	source
πίεσις	pressure	Druck	pression
ποσότης υινήσεως	momentum	Bewegungsmenge	quantité de mouvement
πρόγραμμα	program	Programm	programme
προώθησις	propulsion	Vorschub,	propulsion
πυκνότης	density	Dichte	densité
ρευστόν	fluid	Flüssigkeit	fluide
ρευστόν άσυμπιέστον	incompressible fluid	unzusammendrückende Flüssigkeit	fluide incompressible
ρευστόν συμπιεστόν	compressible fluid	zusammendrückende Flüssigkeit	fluide compressible
ρευστόν ιξώδες	viscous fluid	zähe Flüssigkeit	fluide visqueux
ρευστόν βαροτροπικόν	barotropic fluid	barotropische Flüssigkeit	fluide barotrope
ρευστόν υλασσικόν	classical fluid	klassische Flüssigkeit	fluide classique
ρευστόν νευτώνειον	newtonian fluid	newtonsche Flüssigkeit	fluide neutonien
ροή	flow	Strömung	écoulement
ροή άνευ τριβών	frictionless flow	Reibungslose Strömung	écoulement sans frottement
ροή άστρόβιλος	irrotational flow	wirbellose Strömung	écoulement irrotationnel
ροή μεταβαλλομένη ή άνομοιόμορφος	varie or non-uni- form flow	varierende Strömung	écoulement varié ou non- uniforme
ροή μόνιμος	steady flow	kontinuierliche Strömung	écoulement permanent
ροή όμοιόμορφος	uniform flow	gleichförmige Strömung	écoulement uniforme

ροή στάσιμος	stationary flow	stationäre Strömung	écoulement stationnaire
ροή στρωτή	laminar flow	laminare Strömung	écoulement laminaire
ροή τυρβώδης	turbulent flow	turbulente Strömung	écoulement turbulent
ροή δισδιάστατος	two-dimensional	zweidimensionale Strömung	écoulement bidimensionnel
στοιβάς όριαυή	boundary layer	Grenzschichte	couche limite
στροβιλισμός σημειαυός	vortex	Punktwirbel	tourbillon ponctuel
στροφεύς	torsor	Rotor	torseur
συμπιεστότης	compressibility	Kompressibilität	compressibilité
συνάρτησις	function	Funktion	fonction
συνολικός	total	gesamt	global
σύνολον	ensemble	Menge	ensemble
συντελεστής	coefficient factor	Koeffizient, Faktor	coefficient
συντεταγμένα	coordinates	Koordinaten	coordonnées
σύστημα δυαδωόν	binary system	Dualzahlensystem	système binaire
συστολή	contraction	Kontraktion	contraction
σωλήν	pipe, conduite, tube	Rohr, Röhre	tube de rotation
σωλήν περιστροφής	rotation tube	Rotationsrohr	tube de courant
σωλήν ροής	stream tube	Strömungsrohr	conduite, tube
τανυστής	tensor	Tensor	tenseur
τανυστής ανταλλοίωτος	tensor contravariant	contravarianter Tensor	tenseur contravariant
τανυστής συναλλοίωτος	tensor covariant	covarianter Tensor	tenseur covariant
τάσις	tension, stress	Spannung	tension
ταχύτης μιγαδυή	complex velocity	komplexe Geschwindigkeit	vitesse complexe
τριχοειδής	capillarity	Kapillar	capillarité
τροχιά	trajectory	Bahn	trajectoire
υποπρόγραμμα	subprogramm	Unterprogramm	sous-programme
υψος δυναμικόν	dynamic head	dynamische Höhe	hauteur dynamique
υψος κινητικόν	kinetic head	kinetische Höhe	hauteur cinétique
υψος πιεζομετρικόν	pressure head	piezometrische Höhe	hauteur piezométrique
φλέψ υδατίνη	water jet	wasservene	veine d'eau, jet
φράγμα	dam	Damm, Sperre	barrage
φρέαρ	well, sink	Brunnen	puits
χαραυτηρες άλφαριθ-	alphanumeric	alphanummerische	caractères alphanumé-
μητωοί	characters	Charakteren	riques
χρόνος προσπελάσεως	access time	Zugriffzeit	temps d'accès
χωρητωότης	capacity of computer	Rechnerkapazität	capacité du calculateur
χωρος	space	Raum	espace

ΠΙΝΑΞ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

V : ὄγκος

$\vec{V}$: διάνυσμα ταχύτητος

C : υαμπύλη

S : ἐπιφάνεια

t : χρόνος

$\rho(M, t)$: πυκνότης εἰς σημεῖον M καὶ χρόνον t

$x_i = x_1, x_2, x_3$: καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι σημείου M

T : θερμοκρασία

p : πίεσις στατιωή

$[\vec{R}]$: στροφεύς

$\text{grad} \varphi$ ἢ $\nabla \varphi$ ἢ $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$: βαθμὶς βαθμωτῆς συναρτήσεως φ (i : ἐλεύθερος δείκτης)

Γ : κυκλοφορία διανύσματος

$\text{div} \vec{A}$ ἢ $\nabla \cdot \vec{A}$ ἢ $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j}$: ἀπόκλισις διανύσματος $\vec{A}$ (j : ἄφωνος δείκτης)

$\text{rot} \vec{A}$ ἢ $\nabla \wedge \vec{A}$: περιστροφή διανύσματος $\vec{A}$

$\Delta \varphi$ ἢ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}$: λαπλασιανή τῆς βαθμωτῆς συναρτήσεως φ (j : ἄφωνος δείκτης)

E : σύνολον

δ_{ij} : συνιστώσαι τανυστοῦ KRONECKER

$[\vec{\Delta}]$: στροφεύς ποσοτήτων κινήσεως

$[\vec{E}]$: στροφεύς ποσοτήτων ἐπιταχύνσεως

$\mathcal{E}_x$: κινητική ἐνέργεια

P : ἰσχύς

$\vec{n}$: μοναδιαῖον διάνυσμα, κἀθετον εἰς σημεῖον ἐπιφανείας ἢ υαμπύλης

$\vec{T}(M, \vec{n})$: τάσις σημείου M κατά την διεύθυνσιν $\vec{n}$

$\vec{T}_n$: υάθετος τάσις

$\vec{T}_t$: τάσις έφαπτομενική ή όλισθήσεως ή διατμήσεως

σ_{ij} : συντεταγμέναι τανυστοῦ τάσεων

x_i°, t :: μεταβληταί LAGRANGE

x_i, t : μεταβληταί EULER

$\frac{df}{dt}$: μοριακή παράγωγος συναρτήσεως f

S_s : επιφάνεια έπαφής

$\text{grad} \vec{V}$: βαθμείς διανυσματιοῦ πεδίου $\vec{V}(M)$ (τανυστής β' τάξεως)

$(\text{grad} \vec{V})_\sigma$: συμμετρωόν τμήμα τανυστοῦ $\text{grad} \vec{V}$: (τανυστής παραμορφώσεων)

$(\text{grad} \vec{V})_\alpha$: άντισυμμετρωόν τμήμα τανυστοῦ $\text{grad} \vec{V}$

ε_{ij} : συντεταγμέναι τοῦ $(\text{grad} \vec{V})_\sigma$

ω_{ij} : συντεταγμέναι τοῦ $(\text{grad} \vec{V})_\alpha$

$E = \varepsilon_{xx} - \text{div} \vec{V} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$: άπόυλις ταχύτητος (j : άφωνος δείκτης)

$\vec{\omega}$: ταχύτης περιστροφής

$\vec{\gamma}$: επιτάχυνσις

$\vec{\gamma}_c$: επιτάχυνσις CORIOLIS

$m(V)$: μάζα όγμου τινός V

f_i : έξωτερικαί δυνάμεις είς την μονάδα τοῦ όγμου

μ : δυναμικός συντελεστής συνευτιμότητος ή ιξώδους

ν : κινηματικός συντελεστής συνευτιμότητος

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$: λόγος ειδυών θερμότητων

h : ύψος στήλης ρευστοῦ

$\vec{g}$: επιτάχυνσις βαρύτητος

n : συντελεστής άποδόσεως

$\psi(x, y)$: ροϊκή συνάρτησις έπιπέδου κινήσεως

$\varphi(x, y)$:: συνάρτησις δυναμιοῦ έπιπέδου κινήσεως

u : όριζοντία συνιστώσα ταχύτητος είς τας έπιπέδους κινήσεις

v : κατακόρυφος συνιστώσα ταχύτητος είς τας έπιπέδους κινήσεις

ds_ψ, ds_φ : στοιχειώδεις μετατοπίσεις σημείου κατά ίσοδυναμικήν καί ροηφόρον γραμμήν

z : μιγαδική μεταβλητή ή ύψος δυναμικής ένεργείας

$f(z)$: συνάρτησις μιγαδιου δύναμιοῦ

$W(z)$: συνάρτησις μιγαδικής ταχύτητος

v_r, v_θ : άκτινική καί έφαπτομενική συνιστώσα τής ταχύτητος είς κυλινδρωόν σύστημα συντεταγμένων

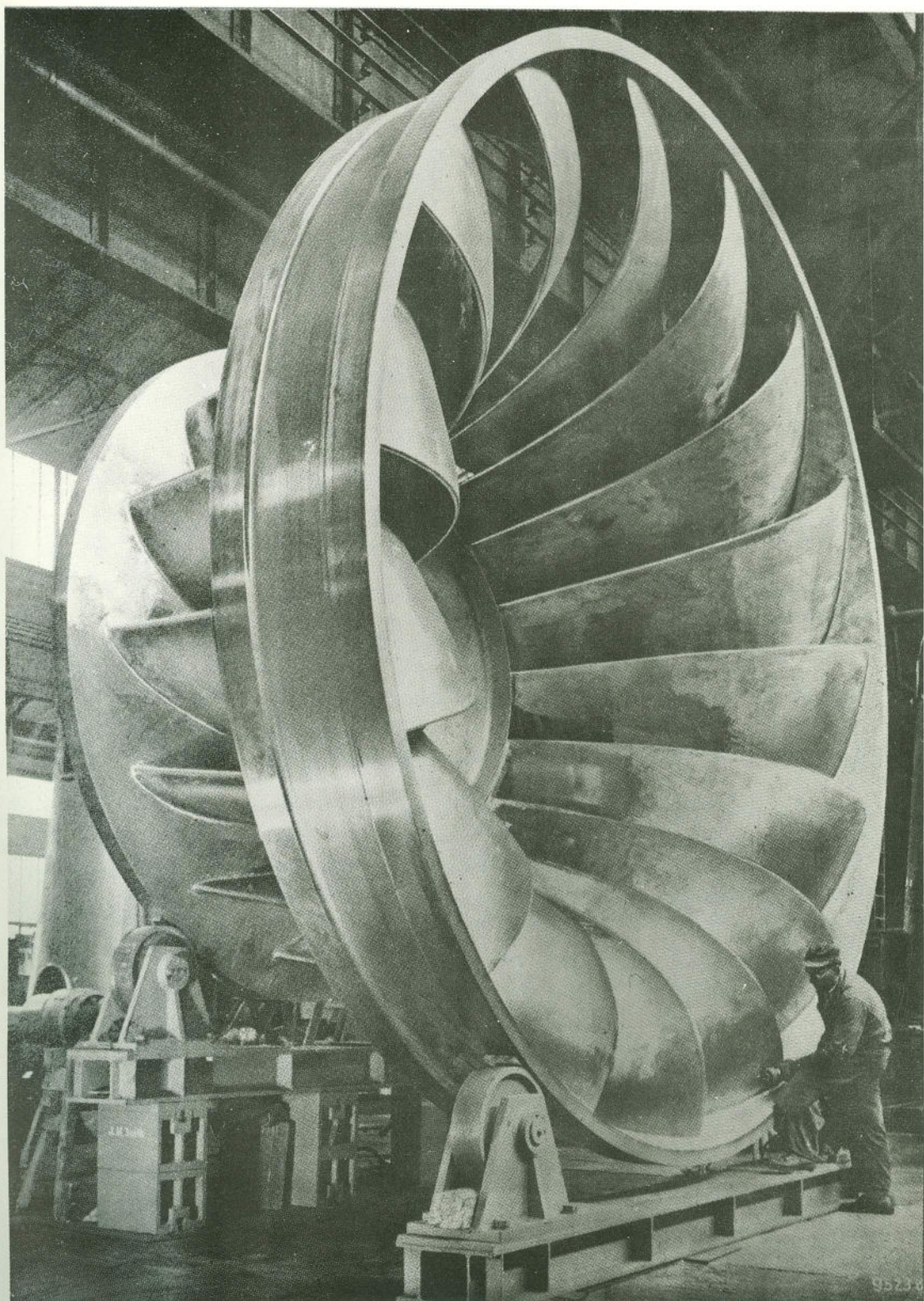
α_i : δεδομένα φυσικά μεγέθη

x_i : άγνωστα φυσικά μεγέθη

κ_i, η_i	: υλΐμαες όμοιότητος
X_i	: άνηγμένοι άγνωστοι
A_i	: άνηγμένα δεδομένα
K	: συντελεστής θερμικής άγωγιμότητας
L	: χαρακτηριστικόν μήκος
a	: ταχύτης ήχου
q	: τάξις διαστατιοῦ μητρώου
(A)	: διαστατικόν μητρώον
(K)	: μητρώον θεμελιώδους συστήματος λύσεων
E	: αριθμός EULER
F	: αριθμός FROUDE
M	: αριθμός MACH
P	: αριθμός PRANDTL
R	: αριθμός REYNOLDS
W	: αριθμός WEBER
$\bar{v}$	: μέση ταχύτης, άνηγμένη ταχύτης
t_c	: υλΐμαξ τυρβώδους
σ'_i	: διαυΐμανσις τής συνιστώσης τής ταχύτητος v_i
$\sigma(v_i)$	: τυπιμή άπόυλις τής v_i
ε	: συντελεστής τυρβώδους
τ_N	: τάσις λόγω ιξώδους
τ_R	: τάσις λόγω τυρβώδους

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ



Ύδροστρόβιλος FRANCIS

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ-ΟΡΙΑ-ΠΕΔΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

1.1 Η ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ἡ μηχανικὴ τῶν ρευστῶν ἀποτελεῖ κλάδον τῆς μηχανικῆς τῶν συνεχῶν μέσων, ἥτις εἶναι μία ἐκ τῶν δύο μεγάλων ὑποδιαίρέσεων τῆς υλασσιῆς ἢ νευτωνίου μηχανικῆς.

Ὀνομάζομεν υλασσικὴν μηχανικὴν, ὑπὸ τὴν εὐρυτέραν ἐννοίαν, τὴν δυναμικὴν καὶ κινητικὴν μελέτην τῶν σωμάτων, θεωρουμένων ὡς τμῆμα συνεχῶν ἢ ἀσυνεχῶν μέσων, ὑπὸ τὰς ἐξῆς δύο βασικὰς προϋποθέσεις.

α) αἱ σχετιμαὶ ταχύτητες τῶν σωμάτων θεωροῦνται ἀμελητέαι ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός ἐν τῇ κενῇ.

β) αἱ διαστάσεις τῶν μορίων θεωροῦνται ἀμελητέαι ἐν συγκρίσει πρὸς τὰς μεταξὺ των ἀποστάσεις.

Σαφὴς εἶναι ἐπομένως ἡ διάκρισις μεταξὺ τῆς υλασσιῆς ἢ νευτωνίου μηχανικῆς ἀφ' ἑνός καὶ τῆς σχετικῆς μηχανικῆς καὶ κβαντικῆς μηχανικῆς ἀφ' ἑτέρου.

Ὑπὸ τὸ πρῶτον αὐτὸ ἡ υλασσικὴ μηχανικὴ περιλαμβάνει τὴν θερμοδυναμικὴν, καθὼς καὶ τὰ φαινόμενα μεταβολῆς τῆς φυσικῆς καταστάσεως τῶν σωμάτων.

1.2 ΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

Ἡ υλασσικὴ μηχανικὴ διαφερεῖ τὰ ὑλικά σώματα εἰς δύο κατηγορίας: τὰ στερεά, τὰ ὁποῖα ὑποδιαιροῦνται εἰς διαφόρους τύπους καὶ τὰ ρευστά, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνουν τὰ ἀέρια καὶ τὰ περισσότερα τῶν ὑγρῶν.

Πρὸς καλυτέραν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τοῦ ρευστοῦ θά τὸ ὀρίσωμεν ἀπὸ ἀπόψεως φυσικῆς συμπεριφορᾶς ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς χαρακτηριστικῆς του ιδιότητος.

Θεωροῦμεν ἓν ὑλικὸν συνεχές καὶ ἰσοτροπὸν ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἀπομονώνομεν στοιχειώδη ὄγκον dV . Ἐστωσαν dS τὸ ἐμβαδὸν στοιχειώδους ἀνοικτῆς ἐπιφανείας ds περιβαλλούσης τμῆμα τοῦ ὄγκου

dV και $\overline{dF_s}$ ή κατά τον χρόνον t έλασσιουμένη στοιχειώδης δύναμις έν τού έξωτερικού ύλιου χώρου προς τον στοιχειώδη όγκον dV , διά μέσου της έπιφανείας $d\sigma$.

Δεχόμεθα ότι τό πληϊον $\frac{\overline{dF_s}}{dS}$ είναι πεπερασμένον και έμφράζει

τήν τάσιν κατά τον χρόνον t εις τό κέντρον βάρους της έπιφανείας $d\sigma$.

Έπί τη βάσει των άνωτέρω παραδοχών, δυνάμεθα έλ όρισμοϋ νά έμφράσωμεν την χαρακτηρίζουσαν τά ρευστά ιδιότητα ως άπολούτως.

"Εάν ή στοιχειώδης δύναμις $\overline{dF_s}$ αναλυομένη κατά την μάθετον, και τυχοϋσαν έφαπτομένην της στοιχειώδους έπιφανείας $d\sigma$, έχει έφαπτομενικήν συνιστώσαν διάφορον τού μηδενός, ή έσωτερική ίσοροπία τού ρευστού είναι άδύνατος."

Έπί τη βάσει της άνωτέρω έλ όρισμοϋ χαρακτηριστικής ιδιότητος, συνάγεται δι' άλλων πειραματισμών, ότι όλα τά άέρια είναι ρευστά, ένν άντιθέτως ώρισμένα υγρά δέν άνήκουν εις τά ρευστά (π.χ. διαλύσεις ζελατίνης).

Αί βασμαί ιδιότητες των ρευστών έξετάζονται λεπτομερώς εις τά κεφάλαια 6.(6.4, 6.5) και 7.

1.3 ΕΣΩΤΕΡΙΚΑΙ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ό στοιχειώδης όγκος dV , ύπόκειται εις την έπιρροήν δυνάμεων έλ άποστάσεως, ως ή βαρύτης και ή φυγόκεντρος δύναμις. Δεχόμεθα ότι αι δυνάμεις αϋται έχουν συνισταμένην $\overline{dF_a}$, και ότι ό λόγος $\frac{\overline{dF_a}}{dV}$ είναι πεπερασμένος.

Έάν θεωρήσωμεν άφ' ενός τον στοιχειώδη ύλιον όγκον dV , άφ' έτέρου δέ τον όγκον τού ύπολοίπου ρευστού V , όνομάζομεν έσωτεριας δυνάμεις επί τού όγκου dV , τάς όφειλομένας εις αιτια άνεξάρτητα τού ύπολοίπου ύλιου όγκου V , και έσωτεριας δυνάμεις επί τού όγκου dV , τάς όφειλομένας εις αϋτόν καθ' έαυτόν τον περιβάλλοντα ύλιν όγκον V .

Αί δυνάμεις βαρύτητος αποτελούν έπομένως είδιωήν περίπτωσιν έσωτερικών δυνάμεων, δέν πρέπει δέ νά συγχέωνται αι έσωτερικαί δυνάμεις μέ τάς δυνάμεις έπαφής, καθ' όσον αι τελευταίαι αϋταί δύνανται νά περιλαμβάνουν έσωτερικας και έσωτερικας δυνάμεις.

1.4 ΚΑΤΑΤΑΞΙΣ ΤΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Η σημασία των εφαρμογών της μηχανικής των ρευστών εις όλους τούς τομείς της τεχνικής και ένεργείας δημιουργεί την άνάγκην μιās πρώτης έποπτικής κατατάξεως των φαινομένων, επί τη βάσει

τῶν γενικῶν χαρακτηριστικῶν των ἢ τῶν περιοχῶν έπιρροῆς των.

Μιά πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τὰ προβλήματα τῆς στατικής τῶν ρευστῶν, μέ κυρίας έφαρμογάς τόν ὑπολογισμόν τῶν δυνάμεων πίεσεως εἰς έμβαπτισμένα τμήματα διαφόρων έργων, τὰ ὅργανα μετρήσεως πίεσεων, τοὺς πλωτῆρας, τήν μελέτην τῆς ἀτμοσφαίρας ἐν ἰσορροπίᾳ καί τὰ φαινόμενα τῶν ἐπιφανειακῶν τάσεων, ἀποτελοῦντα τήν βάσιν τῆς τροφοδοσίας τοῦ φυτικοῦ κόσμου.

Δυνάμεθα ἐν συνεχείᾳ νά θεωρήσωμεν τό σύνολον τῶν φαινομένων τῆς δυναμικῆς τῶν ρευστῶν, τὰ ὁποῖα ὑποδιαίροῦμεν εἰς δύο κατηγορίας, μέ βάσιν τήν διαφοράν τῶν συνθηκῶν των εἰς τὰ ὅρια. Οὕτω διαιρύνομεν

α) τὰ φαινόμενα τῆς ἐξωτερικῆς δυναμικῆς τῶν ρευστῶν, κατά τὰ ὁποῖα τό ρευστόν κινεῖται περί ὠρισμένου καί ἀπομεμονωμένου στερεοῦ, αἱ παρειαί τοῦ ὁποῖου ἀποτελοῦν καί τό ἐξεταζόμενον ὄριον, τό ὁποῖον εἶναι περιορισμένον καί κλειστόν, ἥτοι περιβάλλεται ὑπό τοῦ ρευστοῦ ὑλικοῦ χώρου. Εἶναι ἡ περίπτωση τῆς κινήσεως παντός στερεοῦ ἐντός ρευστοῦ (ὑποβρυχίων, πλοίων, αὐτοκινήτων, ἀεροπλάνων, πυραύλων, κ.λ.π.) μέ μελέτην τῆς ἀντιστάσεως ἥν ἀντιτάσσει τό ρευστόν, τῆς εὐσταθείας τοῦ κινουμένου στερεοῦ (ἰσορροπίαις ἀεροσκαφῶν), τῶν φαινομένων ὀριακῆς στοιβάδος καί ἀκκολλησεως τῆς ρευστῆς μάζης κ.λ.π.

β) τὰ φαινόμενα τῆς ἐσωτερικῆς δυναμικῆς τῶν ρευστῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ κίνησις τῶν ρευστῶν περιορίζεται μεταξύ στερεῶν παρειῶν, κινήτων ἢ ἀκινήτων, ἀποτελοῦντων τὰ ὅρια, τὰ ὁποῖα εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν εἶναι ἐτεταμένα καί ἀνοικτά, ἥτοι περιβάλλουν τόν ρευστόν ὑλικόν χώρον. Εἶναι ἡ περίπτωση τῆς ὑδραυλικῆς τῶν κλειστῶν ἢ ἀνοικτῶν ἀγωγῶν, τῶν ἀεροδυναμικῶν κωδῶνων καί ὄλων τῶν φαινομένων μεταφορᾶς θερμικῆς ἐνεργείας, ἅτινα ἀποτελοῦν σήμερον τήν βάσιν τῆς παραγωγῆς ἀτομικῆς ἐνεργείας.

Ἐτέρα κατηγορία φαινομένων τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν εἶναι ἡ ἀναφερομένη εἰς τὰς ὑδραυλικᾶς μηχανάς. Αὐολοθεοῦντες τήν γενικὴν διαίρεσιν τῶν μηχανῶν δυνάμεθα νά τὰς διαιρύνωμεν εἰς γεννητριάς, αἵτινες προσφέρουν ἔργον (συμπιέσεως ἢ ἐπιταχύνσεως) εἰς τό ρευστόν καί εἰς κινήτριους, αἵτινες δέχονται ἔργον ἀπό τό ρευστόν. Ἡ κυριώτερα κατηγορία ὑδραυλικῶν μηχανῶν εἶναι αἱ περιστροφικαί. Εἰς αὐτάς διακρίνομεν μηχανάς μέ σύστημα περιστροφῆς ἐντός ρευστοῦ ἀπεριορίστου (π.χ. ἀνεμόμυλοι, ἔλικες κ.λ.π.) καί μηχαναί μέ σύστημα περιστροφῆς ἐντός ρευστοῦ, περιορισμένου μεταξύ τῶν τοιχωμάτων ἐνός θαλάμου (κονίως καρτέρ, π.χ. κεντρώφuges ἀντλίας, ὑδροστρόβιλοι FRANCIS κ.λ.π.)

Τέλος δυνάμεθα νά περιλάβωμεν εἰς εἰδικήν κατηγορίαν τό σύνολον τῶν φαινομένων εἰς τὰ ὁποῖα λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ παραμόρφωσις τῶν στερεῶν σωμάτων κατὰ τήν ἐπαφήν των μέ τὰ κινούμενα ρευστά. Εἰς τήν κατηγορίαν αὐτήν διακρίνομεν τὰ φαινόμενα πλήγματος κριοῦ καί μεταδόσεως κινήτων εἰς κλειστούς ἀγωγούς ὑπό πίεσιν, τὰς δονήσεις καί παραμορφώσεις τῶν ἀεροσκαφῶν καί πολλὰ ἄλλα φαινόμενα ἀεροελαστικότητος.

1.5 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Μέ άντιμεπιενιών συοπόν τήν έξοιειώσιν τοῦ άναγνώστου μέ ώ-
ρισμένα συνήθη φυσικά μεγέθη τής μηχανικής τών ρευστών δίδομεν
τούς ιατωτέρω όρισμούς, χωρίζοντες τά μεγέθη είς συνολικά ιαί το-
πιά.

1.5.1 Συνολικά μεγέθη

Είς τήν έσωτερικήν δυναμικήν τών ρευστών διαιρίνομεν ώς πρῶ-
τον συνολιών μέγεθος τήν μάλαν τοῦ ρευστοῦ, ήτις διέρχε-
ται διά τινος διατομής είς τήν μονάδα τοῦ χρόνου.
τό μέγεθος δέ αυτό όνομάζομεν παροχήν - μάλης. Η έν-
νοια παροχή - όγιου, είναι προφανώς πολύ περιωρισμένης άξίας (άσυμ-
πίεστα ρευστά), άποτελεϊ δέ είδίωήν περίπτωση τής παροχής - μάλης.
Άλλο συνολιών μέγεθος είναι ή διαφορά πιέσεως μεταξύ δύο ση-
μείων μιās ροής.

Είς τήν έσωτερικήν δυναμικήν τών ρευστών τά συνολικά μεγέθη
είναι αι δυνάμεις, τās όποιās έλασει τό ρευστόν είς τό μεμονω-
μένον στερεόν ὄμα, ιαί ή διανυσματική ταχύτης $\vec{V}$ τοῦ στε-
ρεοῦ ὄματος ώς πρὸς αίνήτον ρευστόν είς τό άπειρον. Οὔτω είς τήν
άεροδυναμικήν, όνομάζομεν σύρσιν τήν συνιστῶσαν ὄλων τών δυνάμεων
ās έλασει τό ρευστόν επί τοῦ στερεοῦ ιατά τόν άξονα $\vec{V}$ ιαί άνάρ-
τησιν τήν συνιστῶσαν ιατά τόν ιάθετον πρὸς τήν διεύθυνσιν $\vec{V}$ άξο-
να. Επί τῇ βάσει τών δύο αὐτῶν δυνάμεων, τής ταχύτητος $\vec{V}$ ιαί τής
ροπής περιδυνήσεως M , ήτις έμφράζει τήν ροπήν τής γενικής συνι-
σταμένης ώς πρὸς τυχόντα άξονα ιάθετον είς τό επίπεδον συμμετρίας
τής ὄλης ιινήσεως, άντιμετωπίζονται τά γενικά προβλήματα τής ιλασ-
σιμής άεροδυναμικής.

1.5.2 Τοπικά μεγέθη

Τά τοπικά μεγέθη είναι τά ίδια δι' ὄλα τά προβλήματα τής Μη-
χανικής τών ρευστών. Διαιρίνονται είς τρία βαθμωτά μεγέθη, ήτοι τήν
ανά μονάδα όγιου μάλα ρ , τήν θερμοκρασίαν T ιαί τήν
πίεσιν p , άναφερόμενα είς τό σημείον (x_1, x_2, x_3) ιατά τήν χρο-
νικήν στιγμήν t , ιαί είς έν διανυσματιών μέγεθος, ήτοι
τήν ταχύτητα $\vec{V} (v_1, v_2, v_3)$ είς τό αυτό σημείον (x_1, x_2, x_3) ιαί
ιατά τήν αὐτήν χρονικήν στιγμήν t .

Η εύρεσις έξι σχέσεων τής μορφής

$$\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$T = T(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$p = p(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$u = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

θά έλυνε υατά τρόπον πλήρη υαί άποτελεσματοιών οιονόήποτε πρόβλη-
μα δυναμικής τών ρευστών. Δυστυχώς είς τās πλείστας τών περιπτώ-
σεων είναι άδύνατος ή εύρεσις τών άνωτέρω έξι σχέσεων υαί άρμού-
μεθα είς προσεγγιστιυάς λύσεις, στηριζόμενας είς άπλουστευτιυάς πα-
ραδοχάς.

1.6 ΤΑ ΛΕΠΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Είς ποία όμως πειραματιυά άποτελέσματα όδηγούν αι άπλουστα-
τευτιυαί παραδοχαί είς τήν θεωρίαν τής μηχανικής τών ρευστών ; 'Η
έμπειρία φέρει είς φώς ένα σοβαρόν άριθμόν υδροδυναμικών παραδόξων
ήτοι θεωρητιυών λύσεων έπιτευχθεισών υατόπιν σειρας λογιυών ά-
πλουστευτιυών παραδοχών, αίτινες λύσεις εύρίσινονται όμως
είς πλήρη άντίθεσιν μέ τά πειραματιυά άποτελέσματα. Οί περισσότεροι
συγγραφείς υαί έρευνηταί άποδίδουν τά πλείστα παράδοξα είς τήν ά-
πλουστευτιυήν ύπόθεσιν τών τελείων ρευστών, ήτοι τήν παραδοχήν μη-
δενιυής συνεντιυότητος. Πλήν όμως, νεώτεροι διαπρεπείς Μαθηματιοί
υαί φυσιοί ως ό G. BIRKHOFF είς τό έργον του "Hydrodynamics" έρ-
ριψαν νέον φώς είς τήν προέλευσιν αύτών τών παραδόξων υαταρρύπτον-
τες τās υλασσιυάς θεωρίας. 'Ηδη άπό τοϋ 1927 ό C. W. OSSEEN είς
τό έργον του "Neuere Methoden und Ergebnisse in des Hydrodynamik" εί-
χεν άποδείξει ότι, είς ώρισμένα συστήματα διαφοριυών έξισώσεων, ή ύ-
παρξίς άπειροστών άνωτέρας τάξεως άλλάζει τελείως τήν μορφήν τών
λύσεων. Οϋτω έχομεν μίαν υατηγορίαν παραδόξων όνομαζόμενων "παρά-
δοξα τών όρίων". Έξ άλλου, ύπάρχουν πολλαί περιπτώσεις, είς τās ό-
ποίας μία προφανής συμμετρία τών αίτίων ενός φαινο-
μένου δέν διατηρείται είς τά άποτελέσματα, υαί δημι-
ουργοϋνται τά όνομαζόμενα "παράδοξα συμμετρίας", τών όποίων τό φι-
λοσοφιυόν ένδιαφέρον είναι προφανές όσον άφορά τήν λογιυήν τής φυ-
σιυής. Εϋτυχώς τά συναντώμενα αύτά παράδοξα δέν άποτελοϋν τόν υα-
νόνα, αλλά τās έξαιρέσεις, διότι άλλως δέν θά ύπήρχε ούδεμία έλ-
πίς όρθής προβλέψεως τοϋ άποτελέσματος ενός πειράματος, δεδομένου
ότι έυσστον πείραμα έπηρεάζεται άπό άπειρίαν παραγόντων άμελητέας
τάξεως. Προϋπτει όμως τό έξής γενιυόν συμπέρασμα: Μόνον τό πεί-
ραμα είναι ιυανόν νά πιστοποιήση τά άποτελέσματα μιās θεωρίας, όσον-
όήποτε τελεία υαί άν είναι αύτή. Δέν νοείται είς τήν μηχανιυήν τών
ρευστών χωρισμός τής θεωρίας άπό τό πείραμα, υαί τό υδροδυναμιυόν
ή αεροδυναμιυόν έργαστήριον άποτελοϋν τήν βάση διά τήν προώθησιν
πάσης θεωρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ

ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Τό παρόν κεφάλαιον δέν ἀποτελεῖ ἀναλυτικὴν θεωρίαν Μαθηματικῶν θεμάτων, οὔτε ἐξαντλεῖ τὰ διὰ τὴν μηχανικὴν τῶν ρευστῶν ἀπαραίτητα μαθηματικὰ συμπληρώματα. Τὸν ἀναγνώστην, ὅστις ἤθελεν ἐνδιαφερθῇ εἰδικώτερον διὰ τὸ θεωρητικόν μέρος τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν, παραπέμπομεν εἰς τὰ ὑπ' ἀριθμὸν 3 ἕως 20 συγγράμματα τῆς βιβλιογραφίας.

Σκοπὸς μας εἶναι νὰ δώσωμεν εἰς περιλήψεις ὠρισμένα ἀπαραίτητα στοιχεῖα διὰ τὴν κατανόησιν ἐνὸς συγχρόνου συγγράμματος μηχανικῆς τῶν ρευστῶν ἢ θεωρητικῆς ὑδραυλικῆς, χωρὶς ἐπέυτασιν εἰς ἀποδείξεις πολυπλόκων θεωρημάτων. Μέρος ἄλλωστε τῶν ἀπαραιτήτων μαθηματικῶν βάσεων ἐντίθενται λεπτομερῶς καὶ εἰς τὰ ἐπὶ μέρους εἰδικὰ κεφάλαια.

2.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ὡς διάνυσμα θεωροῦμεν τὴν ἀφηρημένην μαθηματικὴν ἔννοιαν ἢ ὁποῖα συμβολίζει διὰ τὸ διανυσματικὸν μέγεθος ὃ, τι συμβολίζει ὁ ἀριθμὸς διὰ τὸ βαθμωτὸν μέγεθος· ὅπως ἡ μελέτη τῶν βαθμωτῶν μεγεθῶν ἀνάγεται εἰς λογισμὸν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, ὁμοίως ἡ μελέτη τῶν διανυσματικῶν μεγεθῶν ἀνάγεται εἰς λογισμὸν ἐπὶ τῶν διανυσμάτων.

Ἡ μελέτη τῶν νόμων, σύμφωνα με τοὺς ὁποίους τὰ διανύσματα συνδυάζονται μεταξύ των, ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τοῦ διανυσματικοῦ λογισμοῦ, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ὑποδιαίρῳμεν εἰς τρία μέρη: διανυσματικὴν ἀλγεβραν, διανυσματικὴν ἀνάλυσιν καὶ διανυσματικούς χώρους n διαστάσεων.

Θεωροῦμεν γνωστὰς, τὴν στοιχειώδη ἔννοιαν τοῦ διανύσματος, καθὼς καὶ τὰς ἐννοίας τῆς προσθέσεως, ἀφαιρέσεως ἐσωτερικοῦ, ἐξωτερικοῦ καὶ μιμοῦ γινομένου διανυσμάτων. Διευκρινίζομεν, ἀπλῶς, ἐν συντομίᾳ, μερικοὺς συμβολισμοὺς καὶ ὁρισμούς.

2.1.1 Διανυσματική άλγεβρα - Στροφεῖς

Ἐν διάνυσμα υαλεῖται έλεύθερον, όταν προσδιορίζεται πλήρως άπό τήν διεύθυνσίν του, τήν φοράν του καί τό μέτρον του.

Ἐν διάνυσμα υαλεῖται όλισθαῖνον, όταν προσδιορίζεται πλήρως άπό τόν άξονα όλισθήσεώς του, τήν φοράν του καί τό μέτρον του.

Ἐπομένως διά μέν τά έλεύθερα διανύσματα ἡ άρχή των εἶναι αὐθαίρετος εἰς τόν χῶρον, διά δέ τά όλισθαίνοντα ἡ άρχή των υινεῖται αὐθαίρετως ἐπὶ μιᾷ ὠρισμένης εὐθείας, τοῦ άξονος όλισθήσεως. Ἡ ίσότης δύο έλευθέρων διανυσμάτων διαφέρει έπομένως, ὡς έννοια, τῆς ίσότητος δύο όλισθαίνόντων. Λόγω τῆς φύσεώς των τά έλεύθερα διανύσματα ἔχουν έφαρμογάς υιρίως εἰς τήν γεωμετρίαν, ένῶ τά όλισθαίνοντα εἰς τήν υλασσιμήν μηχανικήν.

Ἐστωσαν τρία διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ έλεύθερα ἢ όλισθαίνοντα. Συμβολίζομεν:

τό έξωτερικόν γινόμενον διά τοῦ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ἢ $\vec{u} \wedge \vec{w}$,

τό έσωτερικόν γινόμενον διά τοῦ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ἢ $\vec{u} \cdot \vec{w}$,

τό μιαιτόν γινόμενον διά τοῦ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{v} \vec{w})$,

τό δίς έξωτερικόν γινόμενον διά τοῦ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

Ἐπενθυμίζομεν ὅτι:

α) Ἄν εἰς καρτεσιανόν σύστημα συντεταγμένων μέ μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ αἱ συνιστώσαι τῶν $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ εἶναι άντιστοιχῶς (x, y, z) , (x', y', z') , (x'', y'', z'') τότε θά ἔχωμεν τάς σχέσεις

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v} \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = D$$

β) Δεδομένων τῶν $\vec{u}$ καί $\vec{v}$ ζητοῦμεν τήν εὐρεσιν ενός τρίτου διανύματος $\vec{x}$, τοιούτου ὥστε $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$. Ἡ πράξις αὕτη υαλεῖται διανυσματική διαίρεσις διά νά εἶναι δέ δυνατή πρέπει $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Δι' απλῶν ὀντωματαστάσεων εὐρίσκομεν ὅτι τό ζητούμενον διανυσματικόν πηλίκον εἶναι

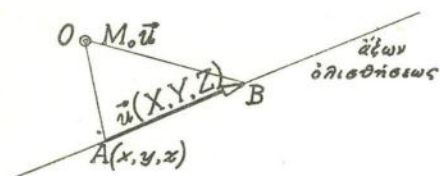
$$\vec{x} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{|\vec{u}|^2} + \lambda \vec{u},$$

ένθα λ αὐθαίρετος βαθμωτή παράμετρος.

γ) Καλοῦμεν ροπήν ενός όλισθαίνοντος διανύσμα-

τος $\vec{u}$ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O , τὸ διάνυσμα

$$M_o \vec{u} = \vec{OA} \wedge \vec{u} = \vec{OA} \wedge \vec{AB} = \vec{OA} \wedge \vec{OB}. \quad (2.1.1.a)$$



Σχ. 2.1.1.Α

Προφανῶς ἡ ροπή εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ διανύσματος

$\vec{u}$ ἐπὶ τοῦ ἄξονός του.

Ἄν θεωρήσωμεν τὸ O ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, ἡ ροπή λαμβάνει τὴν μορφήν

$$M_o \vec{u} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k},$$

ὅπου

$$L = yZ - zY, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX \quad (2.1.1.b)$$

Μεταξύ τῶν ἑξ βαθμωτῶν μεγεθῶν, X, Y, Z, L, M, N , ἰσχύει ἡ σχέση $LX + MY + NZ = 0$, (2.1.1.γ)

προϋπάρχουσα ἀπὸ τὴν μαθηματικὴν τῶν διανυσμάτων $M_o \vec{u}$ καὶ $\vec{u}$.

Τὰ ἑξ αὐτὰ μεγέθη προσδιορίζουν πλήρως τὸ ὁλισθαῖνον διάνυσμα $\vec{u}$, καὶ ὀνομάζονται πλουιερικαὶ συντεταγμέναι αὐτοῦ.

Ἐάν O' εἶναι τυχόν σημεῖον, καὶ $\vec{u'}$ διάνυσμα ὁμοπαράλληλον, πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{u}$, δηλαδὴ παραλλήλου διευθύνσεως, τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ τοῦ αὐτοῦ μέτρου μέ τὸ $\vec{u}$, ἀλλὰ μέ ἀρχὴν εἰς τὸ O , ἰσχύει ἡ σχέση

$$M_o \vec{u} = M_o \vec{u} + M_o \vec{u'}. \quad (2.1.1.δ)$$

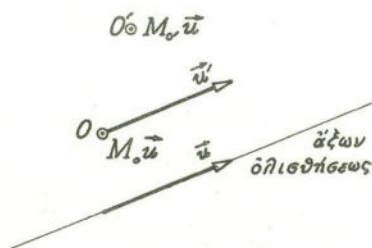
Ἀνάλογος τῆς ροπῆς ὡς πρὸς σημεῖον εἶναι καὶ ἡ ροπή ὡς πρὸς εὐθεῖαν ἢ ἄξονα.

Ὀνομάζομεν *στροφέα* $[\vec{R}]$ ἓνα σύνολον διανυσματικῶν αποτελούμενον ἀπὸ ἓνα πεπερασμένον ἀριθμὸν n ὁλισθαίνοντων διανυσμάτων, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ ἐχόντων ἑαστον πλουιερικὰς συντεταγμένας τὰς $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$, ($i=1$ ἕως n).

Ἐπομένως ὁ *στροφεὺς* ὀρίζεται ἀπὸ ἓν ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{R}$ μέ συντεταγμένας

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i, \quad Z = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i, \quad (2.1.1.ε)$$

καὶ μίαν ροπήν $M_o[\vec{R}]$ ὡς πρὸς ἓν σημεῖον O , μέ συν-



Σχ. 2.1.1.Β

τεταγμένος

$$L = \sum_{i=1}^{i=n} L_i, \quad M = \sum_{i=1}^{i=n} M_i, \quad N = \sum_{i=1}^{i=n} N_i \quad (2.1.1.ζ)$$

Τά έξ βαθμωτά μεγέθη X, Y, Z, L, M, N όνομάζονται πλουιερια -
ναί συντεταγμένοι του στροφέως $[\vec{R}]$. Τό σύνολον τών δύο ότ-
ανυσμάτων $\vec{R}$ και $M_o[\vec{R}]$, όνομάζεται άναγωγή του στροφέως $[\vec{R}]$
στό σημείον O .

Παρατηρούμεν ότι τό έσωτεριόν γινόμενον

$$M_o[\vec{R}] \cdot \vec{R} = LX + MY + NZ$$

είναι ανεξάρτητον του σημείου άναγωγής O και του συστήματος συν-
τεταγμένων. Άποτελεϊ έπομένως μίαν άναλλοίωτον του στροφέως
 $[\vec{R}]$. Αύτή είναι προφανώς μηδενική διά στροφέα παριστώντα όλισθαί-
νοντα διανύσματα διερχόμενα διά του αυτού σημείου.

Μία άλλη άναλλοίωτος είναι τό μέτρον

$$|\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Δύο στροφεΐς υαλοΰνται ίσοι όταν έχουν τήν αύτήν άνα-
γωγήν ως πρός τυχόν σημείον O ήτοι όταν έχουν τās
αύτās πλουιεριανάς σύντεταγμένας.

Όνομάζομεν έσωτεριόν γινόμενον δύο στροφέων $[\vec{R}]$
και $[\vec{R}']$ τό βαθμωτόν μέγεθος

$$[\vec{R}][\vec{R}'] = \vec{R} M_o[\vec{R}'] + \vec{R}' M_o[\vec{R}] \quad (2.1.1.η)$$

Τό έσωτεριόν γινόμενον είναι ανεξάρτητον του σημεί-
ου άναγωγής O και του συστήματος τών συντεταγμένων
άρα άποτελεϊ άναλλοίωτον. Αυτό συνάγεται ως προφανές συμπί-
ρασμα τής σχέσεως

$$M_o[\vec{R}] = M_o[\vec{R}] + \vec{OO'} \wedge \vec{R},$$

ήτις άποτελεϊ τήν ιυανήν και άναγμαίαν συνθήκην ήν
δέον νά πληροΐ έυσαστος στροφεΐς.

Η παράγωγος ενός στροφέως $[\vec{R}]$ έλартωμένου από μίαν πα-
ράμετρον t (π.χ. τόν χρόνον) είναι ό στροφεΐς μέ διανύσματα άνα-

γωγής είς O τά $\frac{d\vec{R}}{dt}$ και $\frac{dM_o[\vec{R}]}{dt}$. Άποδεικνύεται εύμόλως ό-

τι ὁ νέος αὐτός στροφεύς, συμβολιζόμενος διά τοῦ $\frac{d}{dt}[\vec{R}]$, εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου ἀναγωγῆς O .

Προφανές εἶναι ἡ ἐφαρμογή τῶν στροφῶν εἰς τήν υλασσιήν μηχανικήν αἱ ἀνάγκαι τῆς ὁποίας προεβίβασαν ἄλλωστε καί τήν γένεσίν των. Οὕτως ἡ δυναμική μελέτη ἑνός στερεοῦ, εἰς n σημεία $A_1, A_2, \dots, A_n$ τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ σύστημα δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, ἀνάγεται εἰς τήν μελέτην τοῦ στροφεύς $[\vec{R}]$, ἔχοντος διανύσματα ἀναγωγῆς ὡς πρὸς τυχόν σημεῖον O , τά

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad M_o[\vec{R}] = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i \quad (2.1.1.ε)$$

Ὁ άνωτέρω στροφεύς $[\vec{R}]$ γεννιέσεται καί εἰς τήν περίπτωση ἑνός πεδίου δυνάμεων $\vec{F}(M)$, ὠρισμένου εἰς ἕνα σπον σημεῖον M ἐνός χώρου (V) . Ὁ στροφεύς $[\vec{R}]$ ἔχει τότε ὡς διανύσματα ἀναγωγῆς ὡς πρὸς O τά

$$\vec{R} = \iiint_V \vec{F}(M) dV \quad \text{καί} \quad M_o[\vec{R}] = \iiint_V (\vec{OM} \wedge \vec{F}(M)) dV \quad (2.1.1.υ)$$

Ἡ στατιμή τῶν στερεῶν σωμάτων ἀνάγεται ἐξ ἄλλου εἰς τήν μελέτην τῶν συνθηκῶν ποῦ μηδενίζουν ἕνα στροφέα.

2.1.2 Διανυσματική ἀνάλυσις

Θεωροῦντες γνωστάς τὰς ἐννοίας παραγωγίσεως καί ὁλουληρώσεως διανύσματος, διανυσματικῆς ταχύτητος καί ἐπιταχύνσεως, τοὺς τύπους τοῦ FRENET καί τὰς ἐφαρμογὰς των εἰς τήν μελέτην τῶν ἐπιφανειῶν, εἰσερχόμεθα εἰς τό βασικόν διά τήν μηχανικήν κεφάλαιον τῶν διανυσματικῶν πεδίων.

Ἐάν εἰς ἕνα σπον σημεῖον μιᾶς περιοχῆς (V) τοῦ χώρου ἀντιστοιχίσωμεν μονοσημάντως μιάν συνεχή καί μέ συνεχεῖς παραγώγους συνάρτησιν, ἀριθμητικὴν ἢ διανυσματικὴν, λέγομεν ὅτι ἡ περιοχή (V) εἶναι ἀντιστοιχῶς ἕν βαθμωτόν ἢ διανυσματικόν πεδίον.

Ἐπὶ παραδείγματι, ἔστω ἕν στερεόν σῶμα τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης εἰς ἕνα σπον σημεῖον εἶναι βαθμωτὴ συνάρτησις τοῦ σημείου, ἥτοι, $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$. Τό βαθμωτόν αὐτό πεδίον τῆς πυκνότητος ἐυτείνεται εἰς τήν περιοχήν τοῦ χώρου τήν ὁποῖαν κατέχει τό στερεόν σῶμα.

Ἐάν τό στερεόν σῶμα κινεῖται, εἰς ἕνα σπον σημεῖον του κατὰ τήν χρονικήν στιγμήν t ἀντιστοιχεῖ μία ταχύτης, ἥτις εἶναι διανυσματικὴ συνάρτησις τοῦ σημείου, ἥτοι $\vec{V} = \vec{V}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \vec{V}(t)$. Τό διανυσματικόν αὐτό πεδίον τῆς ταχύτητος ἐυτείνεται κατὰ τήν στιγμήν t , εἰς τήν περιοχήν τοῦ χώρου ἣν κατέχει τό στερεόν σῶμα.

τά την χρονικήν αυτήν στιγμήν. t .

Δεδομένης μιᾶς συνεχούς συναρτήσεως ενός σημείου, βαθμωτῆς ἢ διανυσματικῆς, δύναμεθα, κατὰ ἀπειρίαν τρόπων, νά τήν συνδέσωμεν μέ τυχούσας ἄλλας συναρτήσεις. Τρεῖς εἰδικαί δυάδες συνδεδεμένων συναρτήσεων εἶναι ἐξαιρετικοῦ ἐνδιαφέροντος διὰ τὰς ἐφαρμογὰς τῆς φυσικῆς ἐν γένει· πρόκειται δέ διὰ τὰς ἐξῆς:

Ἡ βαθμῖς, συνάρτησις διανυσματικῆ, συνδεδεμένη μέ μιάν συνάρτησιν βαθμωτήν.

Ἡ ἀπόκλισις, συνάρτησις βαθμωτή, συνδεδεμένη μέ μιάν συνάρτησιν διανυσματικῆν.

Ἡ περιστροφή, συνάρτησις διανυσματικῆ συνδεδεμένη μέ μιάν συνάρτησιν ἐπίσης διανυσματικῆν.

Καί αἱ τρεῖς αὐταί συναρτήσεις εἶναι διαφοριμοί ἐυτελεσταί. Ἀποδεκνύεται ὅτι εἶναι συναρτήσεις ἀναλλοίωτοι ὡς πρός ἀλλαγὴν τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων, καί αὐτό ἐξηγεῖ τήν μεγάλην ἐφαρμογὴν των εἰς τήν φυσικὴν.

α) Βαθμῖς τῆς βαθμωτῆς συναρτήσεως φ , ἢ $\text{grad } \varphi$ ἢ $\nabla \varphi$.

Ἐστω ἡ συνεχὴς καί μέ συνεχεῖς παραγώγους συνάρτησις

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{ὅπου } x_1, x_2, \dots, x_n$$

εἶναι αἱ n συντεταγμέναι τοῦ σημείου M εἰς ἓνα ὡρον n διαστάσεων. Καλεῖται ἐξ ὀρισμοῦ βαθμῖς τῆς συναρτήσεως φ καί συμβολίζεται διὰ τοῦ $\text{grad } \varphi$ ἢ $\nabla \varphi$, ἓνα διάνυσμα τό ὁποῖον ἔχει συνιστώσας τὰς

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}.$$

Τό ὁλικόν διαφορικόν τῆς συναρτήσεως φ θά εἶναι:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n,$$

ὅπου τὰ διαφορικά $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ εἶναι αἱ συνιστώσαι τοῦ διανύσματος $d\vec{s}$. Προϋπτεῖ ἐπομένως ὅτι $d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\vec{s}$, καί ὅτι τό διάνυσμα $\text{grad } \varphi$ εἶναι ὠθετον εἰς τήν ἐπιφάνειαν $\varphi = c$ ἔνθα c εἶναι τυχούσα σταθερά, ὁπότε θά ἔχωμεν $d\varphi = 0$.

Ἐπίσης προϋπτεῖ ὅτι

ἐάν $\text{grad } \varphi_1 = \text{grad } \varphi_2$ τότε $\varphi_1 = \varphi_2 + c$.

Ἐάν ἰσχύει ἡ σχέσις $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(u_1, u_2, \dots, u_k)$ ὅπου $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τότε θά ἔχωμεν

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \text{grad } u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \text{grad } u_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \text{grad } u_k. \quad (2.1.2. a)$$

Ἐν τῆς (2.1.2.α) προϋπάρχουσιν ἀμέσως αἱ κατωθί τρεῖς ιδιότητες τοῦ διανύσματος βαθμῆς:

$$\text{grad}(\varphi_1 + \varphi_2) = \text{grad}\varphi_1 + \text{grad}\varphi_2, \quad (2.1.2.\beta)$$

$$\text{grad}(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \text{grad}\varphi_2 + \varphi_2 \text{grad}\varphi_1, \quad (2.1.2.\gamma)$$

$$\text{grad}\left[\int \varphi(t) dt\right] = \varphi(t) \text{grad}t. \quad (2.1.2.\delta)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τό σύμβολον grad , συμπεριφέρεται ὡς τό σύμβολον d τῆς διαφορίσεως, ἐξ οὗ καί ἡ ὀνομασία τοῦ διανύσματος grad ὡς διαφορικοῦ ἐντελεστοῦ.

Ἐστω τό διανυσματικόν πεδίον (V) ἐνός διανύσματος $\vec{X}(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ὀνομάζομεν γραμμᾶς τοῦ πεδίου ἡ γραμμᾶς ροῆς τᾶς ἐφαπτομένης εἰς τό διάνυσμα $\vec{X}$ τοῦ πεδίου. Ἡ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν αὐτῶν εἶναι προφανῶς

$$\vec{X} \wedge d\vec{l} = 0, \quad \eta \quad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}. \quad (2.1.2.\epsilon)$$

Ἐάν τό διάνυσμα $\vec{X}$ τοῦ πεδίου (V) , εἶναι βαθμῆς μιᾶς συναρτήσεως φ , δηλαδή ἐάν $\vec{X} = \text{grad}\varphi$, τότε τό διανυσματικόν πεδίον (V) καλεῖται δυναμικόν πεδίον, ἡ δέ συνάρτησις $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ εἶναι τό δυναμικόν τοῦ πεδίου.

Αἱ ἐπιφάνειαι τῆς μορφῆς $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \kappa$ καλοῦνται ἰσοδυναμικαί ἐπιφάνειαι, καί τέμνονται, προφανῶς, καθέτως ἀπό τᾶς γραμμᾶς ροῆς τοῦ πεδίου.

Ἡ κυκλοφορία τοῦ διανύσματος $\vec{X}$ κατά μήκος τῆς καμπύλης C ἐνός διανυσματικοῦ πεδίου εἶναι

$$\Gamma = \int_C \vec{X} d\vec{l} = \int_C (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n) \quad (2.1.2.\zeta)$$

Ἐάν τό πεδίον εἶναι δυναμικόν, ἡ σχέσις (2.1.2.ζ) λαμβάνει τήν μορφήν

$$\Gamma = \int_{\sigma \rightarrow \Lambda B} \text{grad}\varphi d\vec{l} = \int_{\sigma \rightarrow \Lambda B} d\varphi = \int_{\Lambda}^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A \quad (2.1.2.\eta)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κυκλοφορία τοῦ διανύσματος $\vec{X}$ δυναμικοῦ πεδίου ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τά δύο ἄκρα τῆς διανοσμένης τροχιάς καί

Αντίρ. (σελ. 43) 'Εάν $\vec{a}(x_i)$ είναι το γινόμενο διανυσματική συνάρτηση $\vec{a} \cdot \vec{r}$ είναι η προβολή του $\vec{a}$ ή εφαπτομένη της καμπύλης. Το $\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$ είναι η κυκλοφορία του $\vec{a}$ επί της C . $\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_C a_i(x_i(s)) \tau_i(s) ds$

2.1 'Ανασυστάσεις και συμπλήρωμα άνωτέρων μαθηματικών

29

όχι από την τροχιάν αυτήν καθ'εαυτήν.

β) 'Απόκλιση και περιστροφή.

'Εστω $\vec{A} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ ένα διάνυσμα εἰς καρτεσιανόν σύστημα συντεταγμένων, καὶ $M(x, y, z)$ ἡ ἀρχὴ τοῦ διανύσματος. Καλεῖται ἐξ ὀρισμοῦ ἀπόκλιση τοῦ διανύσματος $\vec{A}$ τὸ βαθμωτὸν μέγεθος

$$\nabla \vec{A} = \text{div} \vec{A} = \vec{i} \frac{\partial A}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial A}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (2.1.2.0)$$

καὶ περιστροφή τοῦ διανύσματος $\vec{A}$, τὸ διάνυσμα

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{A} = \text{rot} \vec{A} &= \vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \\ &= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (2.1.2.1) \end{aligned}$$

Ὡς ἀνεφέρθη αἱ συναρτήσεις αὐταὶ εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

'Εστώσαν $\vec{A}_1(M), \vec{A}_2(M)$ καὶ $\varphi(M)$ δύο διανυσματικαὶ καὶ μία βαθμωτὴ συνάρτησις τοῦ σημείου M , συνεχεῖς καὶ μέ συνεχεῖς παραγώγους. 'Επὶ τῇ βάσει τῶν ὀρισμῶν (2.1.2.0) καὶ (2.1.2.1) προκύπτουν αἱ σχέσεις

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) &= \text{div} \vec{A}_1 + \text{div} \vec{A}_2, \\ \text{div}(\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) &= \vec{A}_2 \text{ rot} \vec{A}_1 - \vec{A}_1 \text{ rot} \vec{A}_2, \\ \text{div}(\varphi \vec{A}_1) &= \varphi \text{ div} \vec{A}_1 + (\text{grad} \varphi) \cdot \vec{A}_1, \end{aligned} \quad (2.1.2.u)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) &= \text{rot} \vec{A}_1 + \text{rot} \vec{A}_2, \\ \text{rot}(\varphi \vec{A}_1) &= \varphi \text{ rot} \vec{A}_1 + (\text{grad} \varphi) \wedge \vec{A}_1, \\ \text{rot}(\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) &= (\vec{A}_2 \text{ grad}) \vec{A}_1 - (\vec{A}_1 \text{ grad}) \vec{A}_2 + \vec{A}_1 \text{ div} \vec{A}_2 - \vec{A}_2 \text{ div} \vec{A}_1, \end{aligned}$$

ἐνθα $(\vec{A} \text{ grad}) = (\vec{A} \cdot \nabla) = X \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + Y \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + Z \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$

Διὰ $\varphi = \kappa$ καὶ $\vec{A} = \kappa$ ἔχομεν $\text{grad} \varphi = 0, \text{div} \vec{A} = 0, \text{rot} \vec{A} = 0$

καὶ ἀντιστρόφως. Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ τὰ σύμβολα div , καὶ rot συμπεριφέρονται ὡς διαφοριμοὶ ἐυτελεστοί.

γ) Ἄλλοι διαφοριμοὶ ἐυτελεστοί.

Τῇ βοηθείᾳ τῶν τριῶν διαφορικῶν ἐυτελεστῶν grad , div καὶ rot δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν καὶ ἄλλους πέντε, τοὺς

$$\text{grad} \cdot \text{div}, \text{div} \cdot \text{grad}, \text{div} \cdot \text{rot}, \text{rot} \cdot \text{grad}, \text{rot} \cdot \text{rot}.$$

Δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὁρισμῶν προκύπτει ὅτι

$$\text{rot} \cdot \text{grad} \varphi = 0 \quad \text{καὶ} \quad \text{div} \cdot \text{rot} \vec{A} = 0.$$

Ἐπομένως διὰ τὰ δυναμιῶν πεδία διὰ τὰ ὁποῖα $\vec{V} = \text{grad} \varphi$ θά ἔχωμεν $\text{rot} \vec{V} = 0$. Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανή, δηλαδή ὅταν $\text{rot} \vec{V} = 0$ τὸ διανυσματικὸ πεδίον $\vec{V}$ εἶναι δυναμικόν καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέση $\vec{V} = \text{grad} \varphi$. Διὰ τὴν ἀπόδεικν παραπέμπομεν εἰς υλαστικά συγγράμματα διανυσματικοῦ λογισμοῦ.

Διὰ τὴν συμβολικὴν ἔκφρασιν τῶν τριῶν ἄλλων ἐυτελεστῶν εἰσάγεται τὸ σύμβολον Δ τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται λαπλασιανή, καλεῖται δὲ ἐξ ὁρισμοῦ λαπλασιανή τῆς βαθμωτῆς συναρτήσεως φ ἡ

$$\Delta \varphi = \nabla(\nabla \varphi) = \text{div} \cdot \text{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

καὶ λαπλασιανή τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\vec{A}$ ἡ

$$\Delta \vec{A} = \nabla(\nabla \vec{A}) = \text{grad} \cdot \text{div} \vec{A} - \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{A} = \Delta X \vec{i} + \Delta Y \vec{j} + \Delta Z \vec{k}.$$

δ) Ἐφαρμογαὶ τῶν ἀνωτέρω διαφορικῶν ἐυτελεστῶν.

Ὀνομάλομεν ροὴν ἑνός διανύσματος $\vec{A}(X, Y, Z)$ διὰ μέσου ἐπιφανείας S , ὀριζομένης ἀπὸ τὸ στοιχεῖον τῆς ds καὶ τὴν μοναδιαίαν ὑάθετον πρὸς αὐτὸ $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$, τὸ διπλοῦν ὀλουλήρωμα

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_S (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) ds = \iint_S (X dy dz + Y dz dx + Z dx dy).$$

Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι κλειστή, περιορίζουσα ὄγκον τινὰ V , τότε ἰσχύει τὸ θεώρημα τῶν GREEN - OSTROGRADSKI, ἐμφράζον ὅτι, ἡ ροὴ ἑνός διανύσματος διὰ μέσου κλειστῆς ἐπιφανείας S , ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλοῦν ὀλουλήρωμα τῆς ἀπουλίσεως τοῦ διανύσματος, ἐυτεινόμενον εἰς ὅλον τὸν ὄγκον V , ἥτοι

$$\Phi = \iiint_S (X dy dz + Y dz dx + Z dx dy) = \iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV. \quad (2.1.2.λ)$$

Εάν p και q είναι δύο συνεχείς βαθμωτά συναρτήσεις του πεδίου V , περιλειωμένου υπό της επιφανείας S , ισχύει ο τύπος του GREEN

$$\iiint_V (p \Delta q - q \Delta p) dV = \iint_S (p \operatorname{grad} q - q \operatorname{grad} p) \cdot \vec{n} ds \quad (2.1.2.μ)$$

Τέλος εάν η άνοικτή επιφάνεια S , περιλείεται υπό της κλειστής καμπύλης C , ισχύει ο τύπος του STOKES

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} ds, \quad (2.1.2.ν)$$

όστις έμφράζει ότι τό έργον ενός διανύσματος $\vec{A}$ κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης C ίσούται μέ τήν ροήν της περιστροφής του, τήν διερχομένην διά της επιφανείας S ήν περιλείει η καμπύλη C .

2.1.3 Διανυσματικοί χώροι ν διαστάσεων

Οί διανυσματικοί χώροι αποτελούν τμήμα της τοπολογίας της οποίας δίδομεν ώρισμένους στοιχειώδεις όρισμούς, παραπέμποντες τόν άναγνώστην εις τήν βιβλιογραφίαν (3,4,14,15,16) μέ τήν πεποίθησιν ότι είναι άπαραίτητος ή μήσης ενός έπιστήμονος εις τήν σύγχρονον αυτήν έυφρασιν και σιέψιν.

Καλοϋμεν σύνολον μίαν συνάθροισιν ύλικών ή άφηρημένων μαθηματικών έννοιών επί τη βάσει μιας κοινής ιδιότητός των. Τά γράμματα της άλφαβήτου, οί φυσικοί αριθμοί, τά σημεϊα ενός υλικου ή εύθείας, αποτελούν σύνολα.

Λέγομεν ότι εις ένα σύνολον E υπάρχει εις νόμος έσωτερικής συνθέσεως όταν εις ένα ζεύγος διατεταγμένων στοιχείων (α, β) του συνόλου δυνάμεθα κατά ένα και μόνον τρόπον νά αντιστοιχίσωμεν ένα άλλο στοιχείον γ , τό όποϊον νά άνήκει επίσης εις τό σύνολον E . Ο νόμος έμφράζεται μέ τήν γενικήν σχέση

$$\alpha * \beta = \gamma \quad (1)$$

(1) Τό * είναι τό σύμβολον μιας άριθμητικής πράξεως.

Ὁ ἐφοδιασμός ἐνός συνόλου μέ ἕναν ἢ περισσότερους ἐσωτερικούς νόμους σημαίνει πρόσδοσιν μιᾶς διαρθρώσεως εἰς τό σύνολον. Μιά διάρθρωσις προσδιορίζεται ἐπομένως ἀπό ἀξιώματα, καθορίζοντα τάς σχέσεις πού τήν χαρακτηρίζουν.

Θά ἐξετάσωμεν ἐν συνεχείᾳ τάς διαρθρώσεις τῶν θεμελιωδῶν συνόλων τῆς τοπολογίας, ἥτοι τῶν ὁμάδων, τῶν δαυτυλίων, τῶν σωμάτων καί τῶν διανυσματικῶν ἢ γραμμικῶν χώρων.

α) Διάρθρωσις μιᾶς ὁμάδος.

Ἐνα σύνολον E ἔχει διάρθρωσιν ὁμάδος ὅταν ὑπαιούη εἰς τά κατωθί ἀξιώματα:

1ο) Ὑπάρχει εἰς αὐτό εἷς νόμος ἐσωτερικῆς συνθέσεως.

2ο) Ὁ νόμος εἶναι προσεταιριστικός ἥτοι

$$\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * \beta * \gamma.$$

3ο) Ὑπάρχει ἓν οὐδέτερον στοιχεῖον e , καί ἐν μόνον εἰς τό σύνολον, τοιοῦτον ὥστε

$$e * \alpha = \alpha * e = \alpha.$$

4ο) Δι' ἕναστον στοιχεῖον α τοῦ συνόλου ὑπάρχει ἓν καί μόνον ἀντίστροφον στοιχεῖον α' , τοιοῦτον ὥστε

$$\alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = e.$$

Αἱ ὁμάδες διά τάς ὁποίας ὁ νόμος εἶναι καί ἀντιμεταθετικός (ἥτοι $\alpha * \beta = \beta * \alpha$) ὀνομάζονται ἀβελιαναί ὁμάδες.

Ἀναλόγως τῆς σημασίας τοῦ συμβόλου $*$, διακρίνομεν ὁμάδας προσθετικῆς ($*$ = $+$), καί ὁμάδας πολλαπλασιαστικῆς ($*$ = $\times$ ἢ $\cdot$). Κατά παραδοχήν αἱ προσθετικαί ὁμάδες εἶναι πάντοτε ἀβελιαναί. Προφανῶς, $\alpha' = -\alpha$ διά τάς προσθετικῆς ὁμάδας καί $\alpha' = \alpha^{-1}$ διά τάς πολλαπλασιαστικῆς. Οὕτως οἱ ἀιέριοι ἀριθμοί καί τά υἱάσματα ἀποτελοῦν ἀβελιανήν πολλαπλασιαστικήν ὁμάδα, εἰς τήν ὁποίαν $*$ = $\times$, $e = 1$, καί $\alpha' = \frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1}$.

Ὅμοιως, οἱ ἀιέριοι ἀριθμοί ἀποτελοῦν ἀβελιανήν προσθετικήν ὁμάδα, εἰς τήν ὁποίαν $*$ = $+$, $e = 0$ καί $\alpha' = -\alpha$.

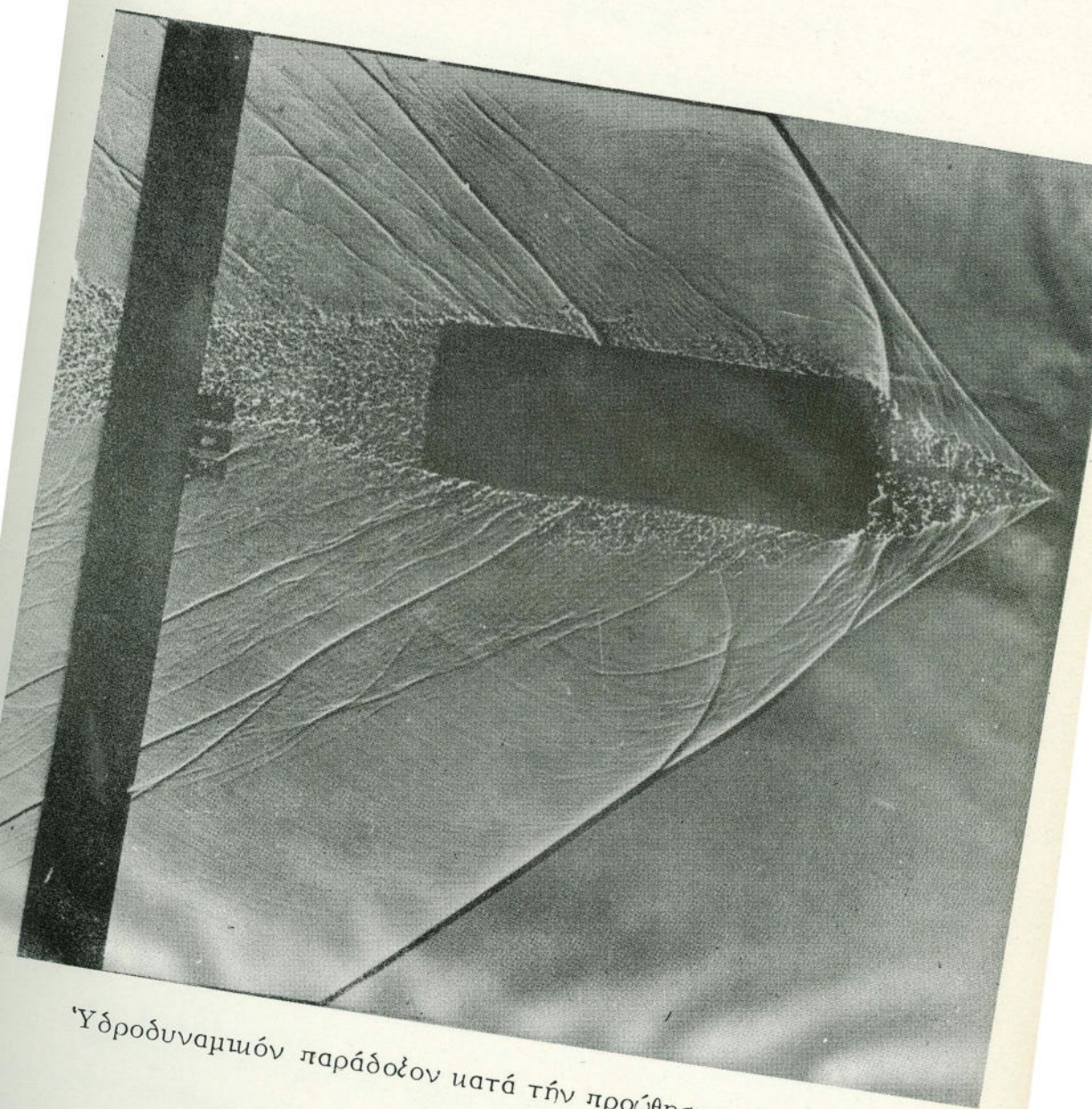
β) Διάρθρωσις ἐνός δαυτυλίου.

Ἐνα σύνολον E ἔχει διάρθρωσιν δαυτυλίου, ὅταν ὑπαιούη εἰς τά κατωθί ἀξιώματα:

1ο) Τό σύνολον ἀποτελεῖ ἀβελιανήν ὁμάδα προσθετικῆς, (ἐξ οὗ πηγάζουν πέντε σχέσεις ὡς προηγουμένως).

2ο) Ὑπάρχει καί δεύτερος νόμος ἐσωτερικῆς συνθέσεως, καλούμενος πολλαπλασιασμός, ἥτοι:

α) Εἰς ἕναστον λεῖγος διατεταγμένων στοιχείων α καί β , ἀντιστοιχεῖ



Υδροδυναμικὸν παράδοξον κατὰ τὴν προώθησιν σώματος

κατά ένα καί μόνον τρόπον έν έτερον στοιχείον του συνόλου γ , τοιούτον ώστε

$$\gamma = \alpha \cdot \beta.$$

β) Ό πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστιμός, ήτοι

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma.$$

γ) Ό πολλαπλασιασμός είναι διπλώς έπιμεριστιμός, ήτοι

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma,$$

$$(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha.$$

Ούτως οί άιέραιοι άλγεβρικοί άριθμοί αποτελούν σύνολον μέ διάθρwsιν δαυτυλίου.

γ) Διάθρwsis ενός σώματος.

Ένα σύνολον E έχει διάθρwsιν σώματος όταν έχη ήδη διάθρwsιν δαυτυλίου καί επί πλέον τά μή μηδενιύα στοιχεία του αποτελούν ομάδα πολλαπλασιαστικην. Είς τάς εφαρμογάς άντιμετωπίζεται συνήθως ή περίπτωση σωμάτων μέ άβελιανήν ομάδα πολλαπλασιαστικην, όνομάζονται δέ σώματα άντιμεταθετά.

Είς αυτά ισχύουν, επί πλέον τών σχέσεων διαρθρώσεως δαυτυλίου, αί σχέσεις:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad (\text{ισχύς άντιμεταθετικοῦ νόμου}),$$

$$e \cdot \alpha = \alpha \cdot e = \alpha \quad (\text{ὑπαρξίς οὔδετέρου στοιχείου}),$$

$$\alpha^{-1} \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha^{-1} = e \quad (\text{ὑπαρξίς άντιστρόφου διά } \alpha \neq 0).$$

Παράδειγμα συνόλου μέ διάθρwsιν άντιμεταθετοῦ σώματος αποτελούν οί ρητοί άριθμοί.

δ) Διανυσματικός ή γραμμικός χώρος ν διαστάσεων.

1). Διάθρwsis:

Καλούμεν διανυσματικόν χώρον ν διαστάσεων τό σύνολον E στοιχείων διανυσματικῆς μορφῆς $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}, \dots)$ είς τό όποϊον ισχύουν οί έξῆς δύο νόμοι συνθέσεως:

α) Είς έσωτερικός νόμος άβελιανῆς προσθετικῆς ομάδος. Άρα οί διανυσματικοί χώροι είναι άβελιαναί προσθετικά ομάδες.

β) Είς έξωτερικός νόμος πολλαπλασιασμοῦ μέ τό σκ-

μα K τῶν βαθμωτῶν μεγεθῶν (πραγματικῶν ἢ φανταστικῶν), ἥτοι ἂν α εἶναι στοιχεῖον τοῦ σώματος K , τό στοιχεῖον $\alpha \cdot \vec{X}$ ἀνήκει εἰς τό σύνολον K , καί ἐπὶ πλέον ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{X} = \alpha \cdot \vec{X} + \beta \cdot \vec{X}$$

$$\alpha \cdot (\vec{X} + \vec{Y}) = \alpha \cdot \vec{X} + \alpha \cdot \vec{Y}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{X}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{X}$$

$$e \cdot \vec{X} = \vec{X} \quad (e \text{ οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ } K).$$

2). Ἰδιότητες καί ὁρισμοί

Τά διανύσματα $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_p$, τά ὁποῖα εἶναι στοιχεῖα τοῦ διανυσματικοῦ χώρου, υαλοῦνται γραμμικῶς ἀνεξάρτητα ὅταν ἡ σχέση

$$a_1 \vec{X}_1 + a_2 \vec{X}_2 + \dots + a_p \vec{X}_p = 0 \quad (2.1.3. \alpha)$$

εἶναι δυνατή μόνον διὰ $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$.

Ἐπαστον σύστημα n γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ τοιοῦτον ὥστε νά μήν ὑπάρχη ἄλλο σύστημα $n + 1$ γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἰς τόν διανυσματικόν χώρον E , υαλεῖται βάσις ἡ ἴχνος τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E . Λέγομέν τότε ὅτι ὁ διανυσματικός αὐτός χώρος ἔχει n διαστάσεις καί τόν συμβολίζομεν ὡς χώρον, E_n .

Ἀποδεικνύεται ὅτι οἷονδήποτε διάνυσμα τοῦ χώρου E_n δύναται νά τεθῇ υατά ἓνα καί μόνον τρόπον, ὑπό τήν μορφήν

$$\vec{X} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n. \quad (2.1.3. \beta)$$

Τά βαθμωτά μεγέθη $x_1, x_2, \dots, x_n$ ἀνήκουν εἰς τό σῶμα K , καί ὀνομάζονται συνιστώσαι τοῦ διανύσματος $\vec{X}$ ὡς πρὸς τήν βάσιν $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Εἶναι προφανές ὅτι τά διανύσματα $\vec{e}_i$ εἶναι μοναδιαῖα ὡς πρὸς τήν βάσιν των, ἀλλά δέν εἶναι πλέον μοναδιαῖα ὡς πρὸς ἄλλην βάσιν $\vec{e}_i'$ υαθ' ὅτι ἐλήφθησαν τυχόντα.

3). Ἀλλαγὴ Βάσεως

Ἐστω μία νέα βάσις $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$, τῆς ὁποίας τά διανύσματα $\vec{e}_i'$ προσδιορίζονται ὡς πρὸς τήν παλαιάν βάσιν διὰ τῶν σχέσεων

$$\vec{\rho}_j = a_{j1}\vec{e}_1 + a_{j2}\vec{e}_2 + \dots + a_{jn}\vec{e}_n = \sum_{i=1}^n a_{ji}\vec{e}_i \quad (2.1.3.\gamma)$$

Η σχέση (2.1.3.γ) είναι η συμπυκνωμένη μορφή n σχέσεων ($j = 1, 2, \dots, n$), Έν τῶν δύο δευτεῶν (j, i), ὁ πρῶτος παριστᾷ μίαν τυχοῦσαν τῶν n σχέσεων, ἥτοι συμπυκνώνει συμβολικῶς n ἐξισώσεις εἰς μίαν καὶ καλεῖται ἐλεύθερος δείκτης, ἐνῶ ὁ δεύτερος συμβολίζει μίαν ἄθροισιν n μονωνύμων ὅρων καὶ καλεῖται ἄφωνος δείκτης.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ μὲν ἐλεύθερος δείκτης ἐμφανίζεται καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς σχέσεως (2.1.3.γ), ὁ δὲ ἄφωνος ἐμφανίζεται πάντοτε δύο φορές εἰς τὸ μονώνυμον $a_{ji}\vec{e}_i$. Τό μονώνυμον αὐτό καλεῖται ψευδομονώνυμον.

Σχηματίζομεν τὴν ὀρίζουσαν

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ἥτις εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός λόγω τοῦ γραμμικῶς ἀνεξαρτήτου τῶν βάσεων καὶ καλεῖται σχετιῶν μέτρον τῶν δύο βάσεων.

Ἐπιλύοντες τὸ σύστημα (2.1.3.γ) ὡς πρὸς $\vec{e}_i$ εὐρίσκομεν

$$\vec{e}_i = \beta_{i1}\vec{\rho}_1 + \beta_{i2}\vec{\rho}_2 + \dots + \beta_{in}\vec{\rho}_n = \sum_{j=1}^n \beta_{ij}\vec{\rho}_j \quad (2.1.3.\delta)$$

εἰς τὸ ὁποῖον οἱ συντελεσταὶ β_{ij} δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\beta_{ij} = \frac{A_{ji}}{A} \quad (2.1.3.\epsilon)$$

ὅπου A_{ji} εἶναι ὁ συντελεστής τοῦ ὅρου a_{ji} κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὀριούσης A , καὶ ὀνομάζεται ἀλγεβρικὸς ἐλάσσων τοῦ ὅρου a_{ji} .

Ἐν τῆς θεωρίας τῶν ὀριουσῶν συνάγομεν ὅτι ἡ ὀρίουσα τῶν συντελεστῶν β_{ij} εἶναι $B = \frac{1}{A}$ καὶ ὅτι

$$a_{\alpha\beta} = \frac{B_{\beta\alpha}}{B} \quad (2.1.3.\zeta)$$

Ἐπίσης ἂν γράψωμεν τὰς ν σχέσεις, ($j=1, 2, \dots, \nu$)

$$\delta_{xj} = a_{1j}\beta_{x1} + a_{2j}\beta_{x2} + \dots + a_{\nu j}\beta_{x\nu} = \sum_{i=1}^{i=\nu} a_{ij}\beta_{xi}, \quad (2.1.3.\eta)$$

εὐρίσκωμεν ὅτι διὰ $j \neq x$ εἶναι $\delta_{xj} = 0$ καὶ διὰ $j=x$, $\delta_{jx} = \delta_{xx} = 1$.
Ἡ σχέση (2.1.3.β) γράφεται ἐξ ἄλλου

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{i=\nu} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{i=\nu} \left(x_i \sum_{j=1}^{j=\nu} \beta_{ij} \vec{p}_j \right) = \sum_{j=1}^{j=\nu} \left(\sum_{i=1}^{i=\nu} x_i \beta_{ij} \right) \vec{p}_j, \quad (2.1.3.\theta)$$

ἢ, ἀλλάζοντες τὴν σειράν τῶν ἀθροισμάτων

$$\vec{X} = \sum_{j=1}^{j=\nu} \left(\sum_{i=1}^{i=\nu} \beta_{ij} x_i \right) \vec{p}_j = \sum_{j=1}^{j=\nu} \left(\vec{p}_j \sum_{i=1}^{i=\nu} \beta_{ij} x_i \right) = \sum_{j=1}^{j=\nu} y_j \vec{p}_j, \quad (2.1.3.\iota)$$

ἐνθα y_j εἶναι αἱ νέαι συνιστώσαι τοῦ διανύσματος $\vec{X}$ ὡς πρὸς τὴν νέαν βάση $\vec{p}_j$, συνδέονται δέ μέ τὰς παλαιὰς συνιστώσας, διὰ τῆς σχέσεως

$$y_j = \sum_{i=1}^{i=\nu} \beta_{ij} x_i \quad (2.1.3.\upsilon)$$

καὶ ἀντιστρόφως

$$x_i = \sum_{j=1}^{j=\nu} a_{ji} y_j. \quad (2.1.3.\lambda)$$

Συγκρίνοντας τὰς σχέσεις (2.1.3.γ), (2.1.3.υ) καὶ (2.1.3.δ), (2.1.3.λ) παρατηροῦμεν ὅτι ὁ νόμος μετατροπῆς τῶν συνιστωσῶν εἶναι τρόπον τινά ἀντίθετος τοῦ νόμου μετατροπῆς τῶν βάσεων. Αὐτό τό ἐμφράζομεν, λέγοντες ὅτι αἱ συνιστώσαι ἐνός διανύσματος ἀποτελοῦν ἕναν ἀνταλλοίωτον τανυστήν πρώτης τάξεως. Εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ τανυστοῦ θά ἐπανέλθωμεν κατωτέρω εἰς εἰδικὴν παράγραφον.

Μία σημαντικὴ ἀπλοποίηση εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀνωτέρω τύπων ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς παραδόχῃς τοῦ EINSTEIN συμφώνως πρὸς τὴν ὁποίαν παραλείπομεν τό σύμβολον $\sum$ τῆς ἀθροίσεως ὑπὸ τόν ὅρον νά χαρακτηρίζεται σαφῶς, ὡς ἀνωτέρω, ἡ διαφορὰ μεταξύ ἀφώνου καὶ ἐλευτέρου δεύτου.

Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις λαμβάνουν κατόπιν αὐτοῦ τὴν ἀπλουστέραν μορφήν

$$\vec{p}_j = a_{ji} \vec{e}_i \quad (2.1.3.\gamma)$$

$$\vec{e}_i = \beta_{ij} \vec{p}_j \quad (2.1.3.\delta)$$

$$y_j = \beta_{ji} x_i \quad (2.1.3. \alpha)$$

$$x_i = \alpha_{ji} y_j \quad (2.1.3. \lambda)$$

4). Γραμμιαί μορφαι

Μία βαθμωτή συνάρτησις $f(\vec{X})$ τής διανυσματικής μεταβλητής του πεδίου E_v ονομάζεται γραμμική μορφή όταν διά τυχόντα διανύσματα $\vec{X}, \vec{Y}$ του πεδίου E_v , ισχύουν αι σχέσεις

$$f(\vec{X} + \vec{Y}) = f(\vec{X}) + f(\vec{Y}),$$

$$f(a\vec{X}) = a f(\vec{X}),$$

ένθα a τυχόν στοιχείον του σώματος των πραγματιών ή φανταστιών αριθμών.

Έάν $\vec{X} = x_i \vec{e}_i$, θά έχωμεν $f(\vec{X}) = f(x_i \vec{e}_i) = x_i f(\vec{e}_i)$.

Καλοῦμεν τας ποσοτήτας $f(\vec{e}_i)$ συντεταγμένας τής συναρτήσεως $f(\vec{X})$. Παρατηρούμεν ότι η συνάρτησις $f(\vec{X})$ αποτελεί επίσης διανυσματιών ή γραμμιόν χώρον δεδομένου ότι επαληθεύει τούς νόμους διαρθρώσεως ενός τοιούτου χώρου. Αι ποσότητες x_i αποτελοῦν τήν βάσιν ή ἔχνος του νέου αυτού διανυσματιού χώρου τόν ὁποῖον ονομάλομεν δυαδιῶν χώρον του χώρου E_v .

Άλλάζοντες βάσιν εἰς τόν χώρον E_v , προϋπτει ότι

$$f(\vec{X}) = x_i f(\vec{e}_i) = a_{ij} y_j f(\vec{e}_i) = y_j [a_{ij} f(\vec{e}_i)] = y_j f'(\vec{e}_j)$$

Παρατηρούμεν ότι αι συντεταγμένα $f(\vec{e}_i)$, κατά τήν ἀλλαγὴν βάσεως μετατρέπονται συμφώνως τῇ σχέσει

$$f'(\vec{e}_j) = a_{ij} f(\vec{e}_i). \quad (2.1.3. \mu)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2.1.3.μ) μέ τόν παράγοντα β_{xi} έχομεν

$$\beta_{xi} f'(\vec{e}_j) = \beta_{xi} a_{ij} f(\vec{e}_i) = \delta_{xj} f(\vec{e}_i) \begin{cases} f(\vec{e}_i) & \text{διά } i=j \\ 0 & \text{διά } i \neq j \end{cases}$$

ὁπότε προϋπτει τελικῶς ἡ σχέση

$$f(\vec{e}_i) = \beta_{ji} f'(\vec{e}_j). \quad (2.1.3. \nu)$$

Παρατηρούμεν ότι εἰς τόν νέον αὐτόν διανυσματιόν χώρον, ὁ

νόμος μετατροπῆς τῶν συνιστωσῶν εἶναι ὁ αὐτός μέ τόν νόμον μετατροπῆς τῶν βάσεων. Λέγομεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι $f(\vec{e}_i)$ τοῦ χώρου $f(\vec{X})$ ἀποτελοῦν ἕναν συναλλοίωτον τανυστήν πρώτης τάξεως.

Καλοῦμεν ἐσωτερικόν ἢ βαθμωτόν γινόμενον δύο στοιχείων τοῦ χώρου E , τήν γραμμικήν μορφήν

$$\vec{X}\vec{Y}=x_i y_i.$$

Καλοῦμεν εὐκλείδιον νόρμαν, τό ἐσωτερικόν γινόμενον

$$\vec{X}\vec{X}=N(\vec{X})=(x_i)^2.$$

Καλοῦμεν βαθμωτόν ἐρμιτικόν γινόμενον τήν σχέσιν

$$\vec{X}\vec{Y}=x_i \bar{y}_i.$$

ὅπου $\bar{y}_i$ εἶναι ὁ μιγαδικός συζυγής τοῦ μιγαδικοῦ $y_i = \alpha_i + i\beta_i$ ἐνθα $i = \sqrt{-1}$ ἥτοι $\bar{y}_i = \alpha_i - i\beta_i$.

Προφανῶς $\vec{X}\vec{Y} = \overline{(\vec{Y}\vec{X})}$.

Καλοῦμεν ἐρμιτικήν νόρμαν τήν

$$\vec{X}\vec{X}=N(\vec{X})=x_i \bar{x}_i.$$

αὕτη εἶναι πάντοτε πραγματικός ἀριθμός.

Καλοῦμεν τέλος βάσιν ὀρθονορμισμένην, τήν βάσιν τῆς ὁποίας ὅλα τὰ διανύσματα εἶναι ὀρθογωνισμένα μεταξύ των, διά τήν ὁποίαν δηλαδή ἰσχύει ἡ σχέση

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{διὰ } i \neq j \\ 1 & \text{διὰ } i = j \end{cases}$$

Ὁ διανυσματικός χώρος εἰς τόν ὁποῖον ἐξελέγη μία βάση ὀρθονορμισμένη καλεῖται εὐκλείδιος χώρος. Εἰς τοὺς εὐκλείδειους χώρους ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύει τό ἀναλλοίωτον τοῦ ἐσωτερίου γινομένου.

2.2 ΜΗΤΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.2.1 Γενικότητες περὶ μητρῶν

Ὁ μητρώος λογισμός ἀνεπτύχθη εἰς τόσῃν ἔκτασιν κατὰ τήν τελευταίαν εἰσοσαετίαν, ἰδίως λόγω τῆς ἐξελίξεως τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ,⁽¹⁾ ὥστε ἡ ἔστω καὶ περιληπτική περιγραφή τῶν ἐννοιῶν του ἐμ-

(1) Ὁ ἀριθμητικός λογισμός εἶναι κλάδος μαθηματικῶν, τοῦ ὁποίου ἡ σύγχρονος ἐξέλιξις καὶ ἀνάπτυξις τὸν ἀνέμισε εἰς τὴν πρώτην θέσιν ἀπὸ ἀποψιν ἐρεύνης, δημοσιευμάτων καὶ ἐπαιρητικῆς. Ὡς ἐν τῆς φύσεώς του, ἀποτελεῖ μίαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ ἀσυνεχῆ. Ἦτοι ἐκκινουῖσα ἀπὸ τὰς ὁρισμέναις τιμὰς τῶν ἀσυνεχῶν μορφῶν, δηλαδή τῶν ἐξισώσεων, προσπαθεῖ νὰ ἐκφράσῃ ὅσον τό δυνατόν πληρέστερα τὰς

φεύγει τών σιοπών τοῦ παρόντος κεφαλαίου. Σημειοῦμεν ἐξ ἄλλου ὅτι δέν χρησιμοποιεῖται ἡ μητριή ἀλλά ἡ ψευδομνονυμιαυή μορφή εἰς τήν ἀνάπτυξιν τών μαθηματιών σχέσεων τῆς μηχανικῆς τών ρευστῶν, ἐν τῇ παρούσῃ συγγραφῇ. Περιοριζόμεθα ἐπομένως εἰς ὀλίγους ὁρισμούς, παραπέμπομεν δέ τόν ἀναγνώστην εἰς τά ὑπ' ἀριθμόν 5, 6, 7, 8, 9, 10 συγγράμματα τῆς βιβλιογραφίας.

Καλοῦμεν μητρώον διαστάσεων ν καί ρ , εἰς ἓνα σύνολον E , τόν ὀρθογωνιῶν πίνακα ν γραμμῶν καί ρ στηλῶν τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα προέρχονται ἀπό τό σύνολον E . Τό στοιχεῖον τό εὐρισκόμενον εἰς τήν x γραμμήν καί λ στήλην παριστῶμεν κατὰ παραδόχην μέ συμβολισμόν τῆς μορφῆς $a_{x\lambda}$.

Τά μητῶα πού μᾶς ἐνδιαφέρουν εἰς τήν φυσικήν παίρνουν τά στοιχεῖα των ἀπό σύνολα ἀποτελοῦντα σώματα ἀντιμεταθετά.

Όταν $\nu = \rho$ τό μητῶον καλεῖται τετραγωνιῶν, ἀποδεικνύεται δέ δι' ἐφαρμογῆς τῶν ιδιοτήτων τῶν μητῶων ὅτι τά τετραγωνιά μητῶα ἀποτελοῦν σύνολον σχηματίζον δαυτύλιον.

Ἐάν E καί E' εἶναι δύο σύνολα μέ στοιχεῖα ἀντιστοιχῶς X καί X' , ὀνομάζομεν ἐφαρμογήν τοῦ συνόλου E εἰς τό E' μίαν σχέσιν f , ἥτις εἰς ἕναστον στοιχεῖον X τοῦ συνόλου E ἀντιστοιχίζει τό στοιχεῖον X' τοῦ E' , ἥτοι τήν σχέσιν

$$X' = f(X).$$

Ἐάν ἡ ἐφαρμογή f ἰσχύει διά δύο διανυσματικούς χώρους E_ν, E_ρ , ὑπαικούς δέ ἐπιτέλειον εἰς τοὺς νόμους τῆς γραμμικῆς μορφῆς, ὀνομάζεται γραμμικός ἐυτελεστής. Οἱ γραμμικοὶ ἐυτελεσταὶ παριστῶνται ἐν γένει ἀπό ἓναν τανυστήν δευτέρας τάξεως εἰς τόν ὁποῖον ἡμποροῦμεν νά ἀντιστοιχίσωμεν ἓνα μητῶον τῆς μορφῆς

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2\nu} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & . & . & . & a_{\rho\nu} \end{pmatrix}.$$

Αἱ πράξεις ἐπὶ τανυστῶν δευτέρας τάξεως ἀνάγονται διά τοὺς εὐκλειδῆους χώρους, εἰς πράξεις μητριουῦ λογισμοῦ χωρίς νά σημαίνει μέ αὐτό ὅτι ὁ τανυστής εἶναι ἓν μητῶον.

2.2.2 Γενικότητες περὶ τανυστῶν

Εἰς ὠρισμένα φυσικά φαινόμενα ὡς εἰς τήν θεωρίαν τῆς ἐλαστικότητος, χρησιμοποιοῦμεν διά τήν παράστασιν τῶν τάσεων ἐντός παραμορφουμένου στερεοῦ, ἓν σύστημα ἑξὶ βαθμωτῶν μεταβλητῶν. Αἱ ἑξὶ αὐταὶ μεταβληταὶ συμπεριφέρονται ὡς ἓν σύνολον, ἀποτελοῦν ἓν νέ-

συνεχεῖς μορφάς, δηλαδή τὰς συναρτήσεις. Ἀποτελεῖ ἐπομένως τήν γέφυραν μεταξὺ ἀλγέβρας καί ἀναλύσεως. Λόγῳ τῆς φύσεως του αὐτῆς εἶναι τό ἀπαραίτητον μέσον ἐμφράσεως ἐνός προβλήματος διά τήν εἰσαγωγήν καί ἐπίλυσιν του ἀπὸ τοὺς ἡλεκτρονικοὺς ἀριθμητικούς ὑπολογιστάς.

ον μέγεθος εἰς τὸ ὁποῖον πρῶτος ὁ VOIGT ἔδωκε τὸ ὄνομα τανυσ-
στιμῶν μέγεθος. Ἐντοτε ὁ τανυστικὸς λογισμὸς ἀνεπτύχθη ὡς ἴ-
διος κλάδος καὶ ἀποτελεῖ μίαν ἐπέκτασιν τῆς θεωρίας τῶν διανυσμά-
των, εἰς χώρους μέ περισσοτέρας τῶν τριῶν διαστάσεις.

Ἡ ματανόησις τῆς ἐπεκτάσεως αὐτῆς διευκολύνεται ἐάν φαντα-
σθῶμεν τὸ διάνυσμα προσδιοριζόμενον ὄχι ἀπὸ τρία συγμεινυμένα με-
γέθη (διεύθυνσιν, φοράν καὶ μέτρον) ἀλλὰ ἀπὸ ἓν σύνολον τριῶν βα-
θμωτῶν μεγεθῶν διατεταγμένων κατὰ μίαν ὠρισμένην τάξιν. Ὁ τρόπος
αὗτός τοῦ ὁρισμοῦ εἰσάγει ἓν σύστημα συντεταγμένων, καὶ διὰ τὴν ἔ-
χουν αἱ εὐρισκόμεναι ιδιότητες γεωμετρικῆς ἔννοιαν, πρέπει νὰ εἶναι
ἀνεξάρτητοι τῆς ἐκλογῆς τοῦ συστήματος αὐτῶν τῶν συντεταγμένων,
ἥτοι νὰ παρουσιάζουν ἀναλλοιώτον μορφήν.

Τὸ ἀντιμέμενον τοῦ καθαροῦ τανυστικοῦ λογισμοῦ εἶναι ἐπομέ-
ως ἡ μελέτη τῶν μετασχηματισμῶν τῶν συντεταγμένων τῶν διαφόρου
φύσεως τανυστῶν, κατὰ τὴν ἀλλαγὴν συστήματος συντεταγμένων, καὶ ἡ
εὕρεσις τῶν ἀναλλοιώτων.

Ἡ αἴγλη τοῦ τανυστικοῦ λογισμοῦ ὀφείλεται ἰδίως εἰς τὴν γε-
νικὴν θεωρίαν τῆς σχετικτικότητος, τῆς ὁποίας ἀπετέλεσε τὸ
ἀπαραίτητον μαθηματικὸν μέσον ἐκφράσεως.

2.2.3 Τανυσταὶ ἐκ πολυγραμμικῶν μορφῶν

Εἰς τὰ κατωτέρω, πρὸς ἀπλούστευσιν, περιοριζόμεθα εἰς τοὺς
συναλλοιώτους τανυστάς.

Ἐστωσαν ρ διανύσματα $\vec{X}(x_1, x_2, \dots, x_r), \vec{Y}(y_1, y_2, \dots, y_r), \vec{Z}(z_1, z_2, \dots, z_r), \dots$
ἐνὸς διανυσματικοῦ χώρου E_r . Καλοῦμεν πολυγραμμικὴν μορ-
φήν, μίαν βαθμωτὴν συνάρτησιν τῶν ρ αὐτῶν διανυσμάτων, γραμμι-
κὴν δι' ἓν ἕναστον ἐξ αὐτῶν.

Ἐξετάζομεν κατ' ἀρχὴν τὴν περίπτωσιν μιᾶς τριγραμμικῆς μορφῆς

$$f(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}).$$

Ἐάν $\vec{X} = x_i \vec{e}_i$, $\vec{Y} = y_i \vec{e}_i$, $\vec{Z} = z_i \vec{e}_i$ θά ἔχωμεν

$$f(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) x_i y_j z_k = t_{ijk} x_i y_j z_k.$$

Συμβολίζομεν μέ $t_{ijk} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ τοὺς βαθμωτοὺς συντελεστάς,
οἱ ὁποῖοι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν ἐκλεγείσαν βάσιν.

Ἀλλάζοντες βάσιν μέ ἐφαρμογὴν τοῦ συστήματος (2.1.3.λ), καὶ
δεδομένου ὅτι ἡ τριγραμμικὴ μορφή παραμένει ἀναλλοιώτος, θά προ-
κύψῃ

$$f(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = f(\vec{\rho}_\alpha, \vec{\rho}_\mu, \vec{\rho}_\nu) x'_\alpha y'_\mu z'_\nu = x'_\alpha y'_\mu z'_\nu T_{\alpha\mu\nu},$$

ὁπότε ἐπειδὴ

$$f(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = t_{ijk} x_i y_j z_k = t_{ijk} \alpha_{ni} \alpha_{mj} \alpha_{rk} x'_n y'_m z'_r \quad (2.2.3. \alpha)$$

έχομεν ως προς $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ τήν ταυτότητα τής μορφής

$$T_{nm\mu\nu} x'_n y'_m z'_\mu z'_\nu = t_{ijk} \alpha_{ni} \alpha_{mj} \alpha_{rk} x'_n y'_m z'_r. \quad (2.2.3. \beta)$$

Λόγω τής ταυτότητος (2.2.3. β), καί μόνον, δυνάμεθα νά άπλοποιήσωμεν ως προς $x'_n y'_m z'_r$, όποτε προούπτει ή σχέσις

$$T_{nm\mu\nu} = \alpha_{ni} \alpha_{mj} \alpha_{rk} t_{ijk}.$$

Λέγομεν επομένως ότι ή τριγραμμιική μορφή $f(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ προσδιορίζει έναν συναλλοίωτον τανυστήν τρίτης τάξεως μέ συνιστώσας (ή συντεταγμένας) τούς συντελεστές t_{ijk} , μετατρεπομένους είς άλλαγήν βάσεως διά τής σχέσεως (2.2.3. γ).

Δυνάμεθα επομένως νά γεννιεύσωμεν καί νά δώσωμεν τόν όρισμόν του τανυστού ρ τάξεως ως έξης: "Εστω έν σύνολον ν^{ρ} βαθμωτών μεγεθών παριστωμένων υπό τής μορφής

$$t_{\underset{\rho \text{ δείκται}}{ijk\ell m \dots}}.$$

Τά βαθμωτά αυτά μεγέθη άποτελοϋν τās συνιστώσας ενός τανυστού ρ τάξεως, εάν, κατά μίαν άλλαγήν βάσεως, μετατρέπωνται συμφώνως τῇ σχέσει

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta\dots} = \alpha_{ni} \alpha_{bj} \alpha_{rk} \alpha_{sl\dots} t_{ijk\ell\dots}, \quad (2.2.3. \delta)$$

ήτις, ισχύουσα, διατηρεῖ τό αναλλοίωτον τής πολυγραμμιικής μορφής κατά τήν άλλαγήν βάσεως.

Τό σύστημα (2.2.3.δ) άποτελεῖ έξ άλλου τās σχέσεις άλλαγῆς βάσεως είς έναν διανυσματιόν χῶρον $E_{\nu^{\rho}}$, μέ ν^{ρ} διαστάσεις. Αἱ συνιστώσαι του τανυστού παριστοϋν έν τοιαύτη περιπτώσει τās συντεταγμένας ενός σημείου του διανυσματιοϋ αυτού χῶρου, ν^{ρ} διαστάσεων.

Οϋτω διά $\rho=0$ έχομεν τά βαθμωτά μεγέθη, άτινα δύνανται νά θεωρηθοϋν ως τανυσταί μηδενικής τάξεως.

Διά $\rho=1$ έχομεν τά διανύσματα του διανυσματιοϋ χῶρου E_{ν} , αἱ συνιστώσαι των οποίων άποτελοϋν τόν ανταλλοίωτον τανυστήν πρώτης τάξεως των σχέσεων (2.1.3.υ), (2.1.3.λ).

Διά $\rho=2$ έχομεν τόν συναλλοίωτον τανυστήν δευτέρας τάξεως μέ ν^2 συνιστώσας t_{ij} , προσδιοριζόμενας από τήν

διγραμμιικήν μορφήν $f(\vec{X}, \vec{Y})$, καί μετατρεπομένας συμφώνως προς τήν σχέσηιν

$$T_{\alpha\mu} = a_{\alpha i} a_{\mu j} t_{ij} . \quad (2.2.3. \epsilon)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν εὐκλειδίου χώρου τριῶν διαστάσεων αἱ συνιστώσαι t_{ij} δίδονται ἀναλυτικῶς ἀπὸ τὸ μητρῶν

$$A = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} .$$

Δεδομένου ὅτι διὰ εὐκλειδίου χώρους τανυσταὶ καὶ μητρῶα ὑπακούουν εἰς τοὺς αὐτοὺς νόμους τῶν γραμμικῶν ἐπιτελεστικῶν, ἀντιστοιχοῦμεν εἰς ἓνα ἕναστος ἐξ αὐτῶν ἓνα μητρῶν τῆς μορφῆς A .

Ἐπανερχόμενοι ἐξ ἄλλου εἰς τὴν σχέσιν (2.1.3.η) παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ποσότητες δ_{x_i} δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς συνιστώσαι τανυστοῦ ἔχοντος τὴν ιδιότητα νὰ παραμένῃ ἀναλλοίωτος διὰ πᾶσαν ἀλλαγὴν συντεταγμένων. Αὐτὸς καλεῖται τανυστὴς τοῦ KRONEC - KER, καὶ παριστᾷ τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν τανυστικῶν.

2.2.4 Συμμετρικοὶ καὶ ἀντισυμμετρικοὶ τανυσταὶ

Ἡ πολυγραμμικὴ μορφή $f(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ καλεῖται συμμετρικὴ ἐάν παραμένῃ ἀμετάβλητος διὰ τυχούσας μετὰθεσιν τῶν διανυσμάτων $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$.

Οὕτως εἰς τὴν περίπτωσιν διγραμμικῶν μορφῶν συμμετρικῶν θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$f(\vec{X}, \vec{Y}) = t_{ij} x_i y_j = f(\vec{Y}, \vec{X}) = t_{ji} y_i x_j , \quad (2.2.4. \alpha)$$

ἐπομένως, $t_{ij} x_i y_j = t_{ji} y_i x_j$ καὶ ἐναλλάσσοντες τοὺς ἀφώνους δείκτες τοῦ δευτέρου μέλους

$$t_{ij} x_i y_j = t_{ji} x_i y_j ,$$

ἢ

$$\boxed{t_{ij} = t_{ji}} . \quad (2.2.4. \beta)$$

Ἡ συνθήκη (2.2.4.β) εἶναι ἰσχυρὰ καὶ ἀναγκαία διὰ τὴν συμμετρικότητα ἐνός τανυστοῦ δευτέρας τάξεως. Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι οἱ συμμετρικοὶ τανυσταὶ παραμένουν συμμετρικοὶ διὰ τυχούσας ἀλλαγὴν βάσεως.

Ἐάν εἰς τὴν συμμετρικὴν μορφήν $f(\vec{X}, \vec{Y})$ θέσωμεν $\vec{X} = \vec{Y}$, προκύπτει ἡ τετραγωνικὴ μορφή

$$f(\vec{X}, \vec{X}) = t_{ij} x_i x_j , \quad (2.2.4. \gamma)$$

ίσχύει δέ καί τό αντίστροφον.

Μία πολυγραμμική μορφή $f(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}, \dots)$ υαλεΐται άντισυμμετριοιή έάν παραμένη άμετάβλητος διά πάσαν άρτίαν μετάθεσιν τών διανυσμάτων της, άλλάζει δέ σημείον διά πάσαν περιττήν μετάθεσιν αύτών. Ό έμ της μορφής αύτης προούπτων τανυστής υαλεΐται άντισυμμετριοιός.

Ούτως, είς τήν περίπτωση διγραμμικής μορφής, ό άντισυμμετριοιός τανυστής πληροΐ τάς σχέσεις

$$t_{ij} = -t_{ji} \quad , \quad t_{ii} = 0 \quad , \quad (2.2.4.δ)$$

αί όποΐαι εΐναι ίκαναΐ καί άναγκαΐαι συνθῆμαι διά τήν άντισυμμετριοιότητα ενός τανυστοΐ. Ό άντισυμμετριοιός τανυστής παραμένει άντισυμμετριοιός διά τυχούσαν άλλαγήν βάσεως. Άντιπροσωπευτιμόν παράδειγμα έφαρμογής τών άντισυμμετριοιών τανυστών άποτελεΐ τό έξωτεριοιόν γινόμενον $\vec{X} \wedge \vec{Y}$, προούπτον ώς γινόμενον διανύσματος επί άντισυμμετριοιόν τανυστήν, ἥτοι

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = t_{ik} y_k \quad . \quad (2.2.4.ε)$$

Οί άντισυμμετριοιό τανυσταΐ εύρίσκειν τήν μεγαλυτέραν έφαρμογήν των είς τήν παράστασιν τών ήλεκτρομαγνητιών πεδίων καί τάς θεωρίας σχετιότῃτος επί τοΐ ήλεκτρομαγνητισμοΐ. Ό μελέτη τών νόμων συνθέσεως τών άντισυμμετριοιών τανυστών άποτελεΐ ίδιον κεφάλαιον μαθηματιών, τήν έξωτεριοιήν άλγεβραν, ή μελέτη τών άρχών τῃς όποΐας έμφεύγει τών σιοσών τοΐ παρόντος κεφαλαΐου.

Έστω τ εΐς τανυστής δευτέρας τάξεως μέ συνιστώσας t_{ij} . Καλεΐται άνάστροφος τανυστής τ' τοΐ τανυστοΐ τ , ό έχων συνιστώσας πληρούσας τήν σχέσηιν

$$t'_{ij} = t_{ji} \quad .$$

Ό συμμετριοιός τανυστής τ_σ δίδεται έπομένως από τήν γενιοήν σχέσηιν

$$\tau_\sigma = \frac{1}{2}(\tau + \tau') \quad , \quad (2.2.4.ζ)$$

ἥτις γράφεται υπό μορφήν μητρώου

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2t_{11} & t_{12} + t_{21} & t_{13} + t_{31} \\ t_{21} + t_{12} & 2t_{22} & t_{23} + t_{32} \\ t_{31} + t_{13} & t_{32} + t_{23} & 2t_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11} & \frac{t_{12} + t_{21}}{2} & \frac{t_{13} + t_{31}}{2} \\ \frac{t_{21} + t_{12}}{2} & t_{22} & \frac{t_{23} + t_{32}}{2} \\ \frac{t_{31} + t_{13}}{2} & \frac{t_{32} + t_{23}}{2} & t_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.2.4.\eta)$$

Ὁ ἀντισυμμετρικὸς τανυστὴς τ_α δίδεται ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὴν σχέσηιν

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\tau - \tau'), \quad (2.2.4.\theta)$$

ἥτις ὑπὸ μορφήν μητρώου δίδει

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{t_{12} - t_{21}}{2} & \frac{t_{13} - t_{31}}{2} \\ \frac{t_{21} - t_{12}}{2} & 0 & \frac{t_{23} - t_{32}}{2} \\ \frac{t_{31} - t_{13}}{2} & \frac{t_{32} - t_{23}}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.4.\iota)$$

Αἱ μορφαὶ μητρώων (2.2.4.η) καὶ (2.2.4.ι) ἀποδίδουν παραστατικώτερον τὴν μορφήν τῆς διατάξεως τῶν ὄρων τῶν συμμετρικῶν καὶ ἀντισυμμετρικῶν τανυστῶν.

Ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν σχέσεων (2.2.4.ζ) καὶ (2.2.4.θ) προκύπτει ἡ σημαντικωτάτη ιδιότης τῶν τανυστῶν δευτέρας τάξεως

$$\boxed{\tau = \tau_\sigma + \tau_\alpha}, \quad (2.2.4.\upsilon)$$

ἥτις ἐμφράζει ὅτι ἕναστος τανυστὴς δευτέρας τάξεως ἀναλύεται εἰς ἕναν συμμετρικόν καὶ ἕναν ἀντισυμμετρικόν.

2.2.5 Γινόμενον τανυστῶν

Ἐστω ἡ τριγραμμικὴ μορφή $f(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = c_{ijk} x_i y_j z_k$ (τανυστὴς C) καὶ ἡ διγραμμικὴ μορφή $f'(\vec{U}, \vec{V}) = d_{\alpha\mu} u_\alpha v_\mu$ (τανυστὴς D). Τό γινόμενον $f(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) \cdot f'(\vec{U}, \vec{V})$ ἀποτελεῖ νέαν πολυγραμμικὴν μορφήν τῶν διανυσμάτων $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}, \vec{U}, \vec{V}$ προσδιορίζει δέ ἕναν τανυστὴν G πέμπτης τάξεως μέ συνιστώσας

$$g_{ijk\alpha\mu} = c_{ijk} d_{\alpha\mu}. \quad (2.2.\delta.\alpha)$$

Λέγομεν ὅτι ὁ νέος αὐτός τανυστής G εἶναι τὸ τανυστικὸν γινόμενον τῶν C καὶ D , σημειοῦται δέ συμβολικῶς

$$G = C \times D. \quad (2.2.5. \beta)$$

Ἐστωσαν, εἰς τανυστὴς τ τρεῖς φορές συναλλοίωτος μέ συνιστώσας t_{ijk} καὶ εἰς ἄλλος D δύο φορές ἀνταλλοίωτος μέ συνιστώσας $d_{p\theta}$. Ἐάν θέσωμεν $\rho=k$, τὸ τανυστικὸν γινόμενον $\tau \times D$ καλεῖται συσταλέν τανυστικὸν γινόμενον, παριστᾷ δέ ἓναν τανυστὴν τρίτης τάξεως (ἴδε (2.1.3.η), (2.1.3.θ)), μέ συνιστώσας $t_{ijk} d_{k\theta}$. Διὰ $\rho=k$ καὶ $\theta=j$ θά ἔχωμεν ἓναν τανυστὴν πρώτης τάξεως ἥτοι ἓν διάνυσμα. Οὕτω, τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 &= y_1 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + t_{23}x_3 &= y_2 \\ t_{31}x_1 + t_{32}x_2 + t_{33}x_3 &= y_3 \end{aligned} \quad (2.2.5. \gamma)$$

παρίσταται διὰ τοῦ συσταλέντος τανυστικοῦ γινομένου

$$\vec{Y} = \tau \cdot \vec{X},$$

γράφεται δέ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$y_i = t_{ik} x_k \quad (2.2.5. \delta)$$

Τά ἐυτεθέντα στοιχεῖα περί τανυστῶν ἐπαρμιοῦν διὰ τὰς μαθηματικὰς ἀπαιτήσεις τοῦ παρόντος συγγράμματος. Διὰ περισσότερα στοιχεῖα ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω, παραπέμπομεν εἰς τὰ ὑπ' ἀριθμὸν 6, 11 καὶ 20 συγγράμματα τῆς βιβλιογραφίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΡΧΩΝ

ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

3.1 Η ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Ἡ μινηματιυή έν γένει προϋπτεϊ από τήν γεωμετρίαν δι'είσαγωγής, μιās νέας έννοίας, τοῦ χρόνου. Ἡ υλασσιυή μινηματιυή προϋπτεϊ από είδιυήν γεωμετρίαν, τήν εὐυλείδιον υαί μέ τήν παραδόχην τοῦ ἀπολύτου χρόνου, ἥτοι τῆς έννοίας τοῦ ἀπολύτως συγχρόνου.

Ὅρισμός τῆς μινήσεως:

Ἐν ὑλυμόν σύστημα (Σ) εὐρίσμεται είς υίνησιν ὡς πρὸς τήν βάσιν (σύστημα συντεταγμένων) (B), εἰάν, θεωρουμένων τῶν θέσεων (Σ_0) υαί (Σ_t) τοῦ συστήματος υατά τās χρονιυās στιγμάς t_0 υαί t , ὑπάρχει μεταξύ τῶν σημείων A_0 υαί A_t τῶν δύο θέσεων ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία.

Ὁ γεωμετρυός τόπος τῶν θέσεων σημείου τινός A ὡς πρὸς τήν βάσιν (B) υαλεῖται τροχιά τοῦ σημείου A .

Ἐάν τό ὑλυμόν σύστημα (Σ) εἶναι τέλειον στερεόν έν μινῇσει πάντοτε ὡς πρὸς τήν βάσιν (B), τό πεδίον τῶν ταχυτήτων $\vec{V}(A)$ τῶν σημείων του A , δίδεται ἀνά πᾶσαν στιγμήν ἀπό τό πεδίον ροπῶν ενός στροφέως $[\vec{\omega}]$ ὁ ὁποῖος υαλεῖται στροφεύς διανομῆς τῶν ταχυτήτων τοῦ στερεοῦ (Σ) ὡς πρὸς τήν βάσιν (B). Ἰσχύουν τότε αἱ σχέσεις

$$\vec{V}(A) = \vec{V} + M_A[\vec{\omega}], \quad (3.1. \alpha)$$

ἐνθα $\vec{V}$ ἡ ταχύτης μεταφορᾶς, σταθερά διά δεδομένην στιγμήν t , υαί

$$\vec{V}(A') - \vec{V}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{AA'}, \quad (3.1. \beta)$$

ἐνθα A καί A' τυχόντα σημεία τοῦ στερεοῦ καί $\vec{\omega}$ ἡ γεννιῇ συνισταμένη τοῦ στροφέως $[\vec{\omega}]$, ἥτις ἀποτελεῖ τὸ διάνυσμα τῆς ταχύτητος περιστροφῆς τοῦ στερεοῦ ὡς πρὸς ἄξονα.

Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ἡ προσδιορίζουσα τὸν στροφέα εἶναι προφανῶς

$$M_{A'}[\vec{\omega}] = M_A[\vec{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \overline{AA'}. \quad (3.1. \gamma)$$

Λεδομένου ὅτι ὁ χρόνος εἰς τὴν υλασσιμὴν κινήματιν εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐυλεγείσης βάσεως ἰσχύει ἡ σχέσις ἀλλαγῆς βάσεως

$$\vec{V}_{B'}(A) = \vec{V}_B(A) + \vec{V}_e(A), \quad (3.1. \delta)$$

ἐνθα ἔχομεν

$$\vec{V}_{B'}(A) = \text{ταχύτης ὡς πρὸς τὴν νέαν βάσιν } (B'),$$

$$\vec{V}_B(A) = \text{ταχύτης ὡς πρὸς τὴν παλαιάν βάσιν } (B),$$

$$\vec{V}_e(A) = \text{ταχύτης ὡς πρὸς } (B') \text{ τοῦ σημείου } A, \text{ συνδεδεμένου ἀ-} \\ \text{υάμπτως μὲ τὴν παλαιάν βάσιν } (B).$$

Διὰ τὰς ἐπιταχύνσεις ἐξ ἄλλου θά ἰσχύη:

$$\vec{\gamma}_{B'}(A) = \vec{\gamma}_B(A) + \gamma_e(A) + \gamma_o(A), \quad (3.1. \epsilon)$$

ἐνθα ἔχομεν

$\gamma_o(A)$ = πρόσθετος ἐπιτάχυνσις ἡ καλουμένη ἐπιτάχυνσις CO-RIOLIS, ἥτις ἰσοῦται μὲ τὸ διάνυσμα $2\vec{\omega} \wedge \vec{V}(A)$, ὅπου $\vec{\omega}$ εἶναι ἡ ταχύτης περιστροφῆς τῆς παλαιᾶς βάσεως ὡς πρὸς τὴν νέαν.

3.2 Η ΚΙΝΗΤΙΚΗ

Ἡ κινήματιν προϋπτεῖ ἐν τῆς κινήματιν δι' εἰσαγωγῆς μιᾶς ἄλλης νέας ἐννοίας τῆς μάζης.

Ἐντὸς συνεχοῦς ὑλικοῦ χώρου θεωρεῖται ὡς πυκνότητα εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$ τὴν βαθμωτὴ συνάρτησιν $\rho(M, t)$, ἥτις ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τῆς μάζης $dm(M, t) = \rho dV$ ἀπειροστοῦ ὄγκου περιβάλλοντος τὸ σημεῖον M διὰ τοῦ ἀπειροστοῦ αὐτοῦ ὄγκου dV . Ὁρίζεται ὡς μάζα m ἐνός ὄγκου V τὸ τριπλοῦν ὀλοκληρῶμα

$$m_{(V)} = \iiint_V \rho(M, t) dV. \quad (3.2. \alpha)$$

Ὁ θεμελιώδης διὰ τὴν υλασσιμὴν μηχανικὴν νόμος τῆς διατηρήσεως τῆς μάζης ἐυφράζεται ὡς ἐξῆς: Ἡ μάζα τοῦ τμήματος ἐνός ὑλικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον ἀπολουθοῦμεν κατὰ τὴν κίνησίν του, παραμένει σταθερὰ ἐντὸς τοῦ

χρόνου.

Ἡ ποσότης μινῆσεως τοῦ τμήματος αὐτοῦ κατὰ τὴν κίνησιν του προσδιορίζεται ἀπὸ τὸν στροφέα $[\vec{D}]$ τῶν ποσοτήτων μινῆσεως, μέ στοιχεῖα ἀναγωγῆς του ὡς πρὸς τυχόν σημείον O

$$\vec{D} = \iiint_V \vec{V}(M) dm(M) \quad , \quad M_o[\vec{D}] = \iiint_V \vec{OM} \wedge \vec{V}(M) dm(M) \quad (3.2.β)$$

Ἡ ποσότης ἐπιταχύνσεως προσδιορίζεται ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὸν στροφέα $[\vec{E}]$ μέ στοιχεῖα ἀναγωγῆς του ὡς πρὸς O

$$\vec{E} = \iiint_V \vec{\gamma}(M) dm(M) \quad , \quad M_o[\vec{E}] = \iiint_V \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M) dm(M) \quad (3.2.γ)$$

Ἐν τῶν (3.2.β) καί (3.2.γ) συμπεραίνομεν ὅτι ὁ στροφεὺς $[\vec{E}]$ λαμβάνεται διὰ διαφορίσεως τοῦ $[\vec{D}]$, δηλαδή ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{d}{dt}[\vec{D}] = [\vec{E}] \quad (3.2.δ)$$

Τέλος ἡ κίνησις ἐνέργεια ἑνὸς τμήματος, ὅγκου V θά εἶναι

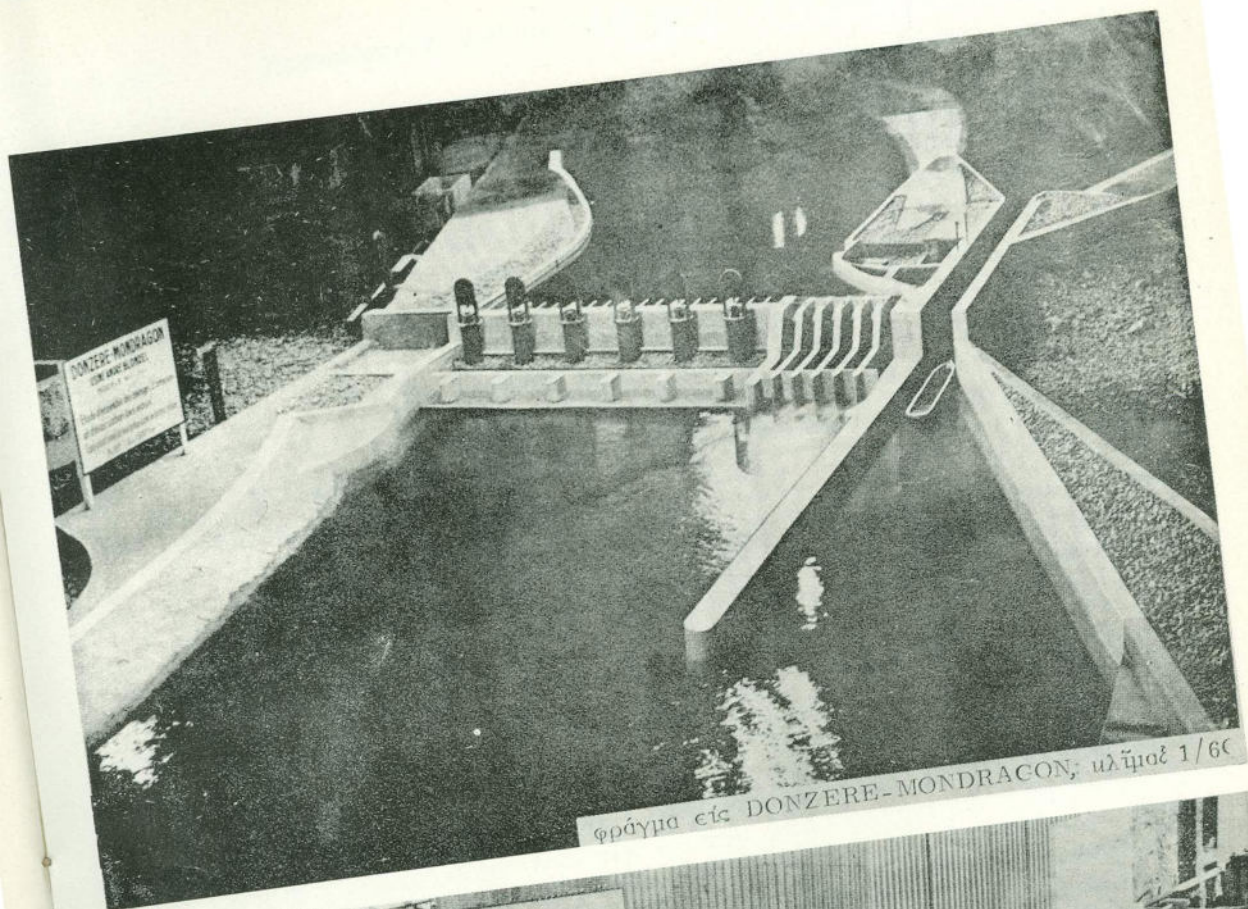
$$E_K = \frac{1}{2} \iiint_V |\vec{V}(M)|^2 dm(M) \quad (3.2.ε)$$

3.3 Η ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Ἡ δυναμικὴ προϋπτει ἐν τῆς κίνησεως δι' εἰσαγωγῆς ὡς νέας ἐννοίας τῆς δυνάμεως. Παραπέμπομεν εἰς τὸν διαχωρισμὸν τῶν ἐξωτερικῶν ἀπὸ τὰς ἐσωτερικῶν δυνάμεις (παράγρ. 1.3) καί ὑπενθυμίζομεν ὅτι μόνον αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις δύνανται νὰ ὁρισθοῦν ἐν γένει μαθηματικῶς. Οὕτως, ἐάν $\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}}{dV}$ παριστᾷ τὸ σύνολον τῶν στοιχειωδῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων $d\vec{F}$ τῶν ἐξασουμένων εἰς τὸν στοιχειώδη ὅγκον dV , διὰ τοῦ ὅγκου αὐτοῦ, τότε ὅλαι αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις αἱ ἐξασουόμεναι εἰς τὸ τμήμα τοῦ ὑλικοῦ χώρου, ὅγκου V , προσδιορίζουν τὸν στροφέα $[\vec{F}]$ μέ στοιχεῖα ἀναγωγῆς ὡς πρὸς O

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{f}(M) dV \quad , \quad M_o[\vec{F}] = \iiint_V \vec{OM} \wedge \vec{f}(M) dV \quad (3.3.α)$$

Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς δυναμικῆς ἐμφράζεται ὡς ἑξῆς: Δι' ἕνα σὺστημα σημείων, ὑπάρχει ἐν τουλάχιστον



φράγμα εις DONZERE-MONDRAGON, κλίμακῃ 1/60



ὑδροληψία εις COURBAISE, κλίμακῃ 1/30

Μελέται ἐπὶ ὁμοιωμάτων

στον σύστημα συντεταγμένων - υαλούμενον ἀπόλυτος βάσις - υαί εἷς τουλάχιστον τρόπος μετρήσεως τοῦ χρόνου - υαλούμενος ἀπόλυτος τρόπος μετρήσεως χρόνου - διὰ τὰ ὁποῖα εἰς υάθε στιγμήν υαί διὰ τυχόν τμήμα τοῦ ὑλικοῦ συστήματος, ὁ στροφεύς τῶν ποσοτήτων ἐπιταχύνσεως εἶναι ἴσος πρὸς τὸν στροφέα τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων τῶν ἐξασουμένων εἰς τὸ τυχόν αὐτὸ τμήμα.

Ἐπομένως ἰσχύει ἡ σχέσις

$$[\vec{E}] = \frac{d}{dt} [\vec{A}] = [\vec{F}] \quad (3.3. \beta)$$

Ἐν τοῦ θεμελιώδους αὐτοῦ νόμου, πηγάζουν ὡς φυσικὴ συνέπεια τὰ κάτωθι θεωρήματα:

α) Θεμελιώδης νόμος τῆς στατικῆς: Ἐάν τυχόν ὑλικὸν σύστημα (Σ) εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὡς πρὸς μίαν ἀπόλυτον βάσιν, ὁ στροφεύς τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων τῶν ἐφαρμοζομένων εἰς τὸ σύστημα (Σ) εἶναι ἴσος μέ μηδέν, ἥτοι

$$[\vec{F}] = 0 \quad (3.3. \gamma)$$

β) Ἀρχὴ δράσεως υαί ἀντιδράσεως: Ἐστω ὅτι τὸ ὑλικὸν σύστημα (Σ) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν ἔνωση δύο συστημάτων (Σ_i) υαί (Σ_j). Αἱ ἀμοιβαῖαι δυναμιχαὶ δράσεις, αἱ ἐξασουόμεναι ἀνά πᾶσαν στιγμήν μεταζὺ τῶν δύο συστημάτων (Σ_i), (Σ_j), ἀποτελοῦν ἓνα στροφέα ἴσον πρὸς μηδέν. Ἦτοι, ἐάν $[\vec{F}]_{ij}$ εἶναι ὁ στροφεύς τῶν δράσεων τῶν στοιχείων τοῦ (Σ_i) ἐπὶ τοῦ (Σ_j), υαί $[\vec{F}]_{ji}$ ὁ στροφεύς τῶν δράσεων τῶν στοιχείων τοῦ (Σ_j) ἐπὶ τοῦ (Σ_i), θά ἰσχύη ἀνά πᾶσαν στιγμήν ἡ σχέσις

$$[\vec{F}]_{ij} + [\vec{F}]_{ji} = 0 \quad (3.3. \delta)$$

γ) Ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ὑλικοῦ συστήματος: Ἐάν θεωρήσωμεν τὸ ὑλικὸν σύστημα (Σ) ὡς σύνολον n ὑλικῶν στοιχείων (Σ_1), (Σ_2) ... (Σ_n), ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος δίδει

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} [\vec{F}]_{ij} = 0 \quad (3.3. \epsilon)$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ ἐμφράζει ὅτι αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἐνὸς ὑλικοῦ συστήματος ἀποτελοῦν ἓναν στροφέα ἴσον πρὸς τὸ μηδέν.

3.4 Αἱ ΔΥΝΑΤΑΙ ΙΣΧΕΙΣ

Ἐστω τὸ ὑλικὸν σύστημα (Σ) θεωρούμενον ὡς πρὸς τὴν βάσιν

(B). Εἰς μίαν δεδομένην στιγμήν t , ἐφαρμόζομεν εἰς τὸ ὑλισιὸν σύστημα ἕν διανυσματικὸν πεδίου $\vec{V}(x, y, z) = \vec{V}(M)$ συνεχές διὰ πάθε σημεῖον M τοῦ ὑλισιοῦ συστήματος.

Λέγομεν τότε ὅτι, τὸ πεδίου $\vec{V}(M)$ προσδιορίζει κατὰ τὴν στιγμήν t , μίαν δυνατὴν μετατόπισιν ὡς πρὸς τὴν βάσιν (B). Τὰ διανύσματα $\vec{V}(M)$ εἶναι αἱ δυναταὶ ταχύτητες κατὰ τὴν δυνατὴν αὐτὴν μετατόπισιν. Κατὰ τὴν δυνατὴν αὐτὴν μετατόπισιν, αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις ἀναπτύσσουσιν μίαν ἰσχύν, ἥτις καλεῖται δυνατὴ ἰσχύς P καὶ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$P = \iiint_V \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M) dV. \quad (3.4. \alpha)$$

Ἐπομένως, ἕν πεδίου δυνάμεων ἀπομαθιστὰ μίαν γραμμικὴν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου $\vec{V}(M)$ καὶ τῶν βαθμωτῶν μεγεθῶν P . Δυνάμεθα οὕτω νὰ ὀρίσωμεν τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις ὡς μίαν γραμμικὴν καὶ συνεχῇ ἀντιστοιχίαν, συνδέουσαν ἕν βαθμωτόν μέγεθος μέ ἕναστον διανυσματικὸν πεδίου.

Ἐάν τὸ πεδίου $\vec{V}(M)$ εἶναι τὸ πεδίου τῶν ροπῶν ἐνός στροφέως $[\vec{C}]$, καλοῦμεν τὴν δυνατὴν μετατόπισιν στερεοποιούσαν τὸ σύστημα (Σ).

ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτάς προκύπτει ὅτι ἡ δυνατὴ ἰσχύς P , εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τοῦ στροφέως $[\vec{C}]$ ἐπὶ τὸν στροφέα $[\vec{F}]$ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ἥτοι

$$P = [\vec{C}][\vec{F}] = \vec{C} \cdot M_o[\vec{F}] + \vec{F} \cdot M_o[\vec{C}]. \quad (3.4. \beta)$$

Ἐπομένως, εἰς μίαν στερεοποιούσαν μετατόπισιν, ἡ δυνατὴ ἰσχύς P ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις, μηδενίζεται δέ ὅταν ὁ στροφεύς των $[\vec{F}]$ γίνη ἴσος μέ μηδέν.

Ἄν θεωρήσωμεν τὸ ὑλισιὸν σύστημα (Σ) ὡς σύνολον n ὑλισιῶν στοιχείων, ἡ ἐφαρμογὴ τῶν προηγουμένων δίδει τὸ κάτωθι θεώρημα:

Ἡ δυνατὴ ἰσχύς τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων ὑλισιοῦ συστήματος (Σ) εἶναι μηδενικὴ διὰ πᾶσαν στερεοποιούσαν δυνατὴν μετατόπισιν τοῦ (Σ).

Κατόπιν αὐτῶν δυνάμεθα νὰ ἐμφράσωμεν τὴν ἀρχὴν τῶν δυνατῶν ἰσχύων:

Εἰς πᾶν ὑλισιὸν σύστημα, ἡ ἰσχύς τῶν ποσοτήτων ἐπιταχύνσεως ἰσοῦται πρὸς τὴν ἰσχύν ὄλων τῶν δυνάμεων τῶν ἐφαρμοζομένων ἐπὶ τοῦ συστήματος, τὸσον ἐξωτερικῶν ὅσον καὶ ἐσωτερικῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4.

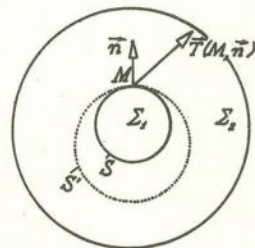
ΒΑΣΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

Ὁ βασικός σκοπός τῆς μηχανικῆς τῶν συνεχῶν μέσων εἶναι ἡ ἀναλήψις τῶν σχέσεων ποῦ συνδέουν τὰς ἐσωτερικὰς δυνάμεις, ἢ δυνάμεις συνοχῆς, μέ τὰς παραμορφώσεις ἐνός ὑλικοῦ συστήματος. Εἰς τό παρόν κεφάλαιον θά δοθῇ ἐπομένως ὁ ὁρισμός καί ἡ ἀνάλυσις τῶν ἐσωτερικῶν αὐτῶν δυνάμεων, ἥτις θά ἀποτελέσῃ τήν βάσιν διὰ τήν ἐν συνεχείᾳ δυνατότητα ἀναπτύξεως τῶν γενικῶν ἐξισώσεων τῆς μηχανικῆς τῶν συνεχῶν μέσων.

4.1 Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις συνοχῆς

Διὰ νά προσδιορισθοῦν αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἐνός ὑλικοῦ συστήματος (Σ), καί δεδομένου ὅτι μόνον αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις δύνανται νά προσδιορισθοῦν μαθηματικῶς, χωρίζεται ὁ χώρος (Σ) εἰς δύο τμήματα, ἀποτελούμενα ἀπό τοῦς (Σ_1) καί (Σ_2) ἀντιστοίχως, ὁπότε αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις μεταβάλλονται εἰς ἐξωτερικὰς δι' ἓνα ἕνα τῶν δύο τμημάτων (Σ_1) καί (Σ_2).

Ἐστωσαν τὰ εἰς τό Σχ. 4.1. Α παριστώμενα τμήματα (Σ_1) καί (Σ_2) διαχωρίζομενα ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας (S). Ἐστω $\vec{n}$ τό μοναδιαῖον καί κἀθετον εἰς τό σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας (S) διάνυσμα, διευθυνόμενον πρὸς τό ἐσωτερικόν τοῦ (Σ_2). Ἐξετάζομεν τὰς δράσεις τοῦ (Σ_2) πρὸς τό (Σ_1) καί δεχόμεθα ὡς ἀξιώματα, ὁδηγούμενοι ὑπὸ τῆς ἐμπειρίας, τὰ ἑξῆς:



Σχ. 4.1. Α

α) Αἱ δράσεις αὐταί εἶναι δράσεις ἐπαφῆς, τὰς παριστῶ-
μεν δέ μέ ἔν συνεχῆς καί μέ συνεχεῖς παραγώγους διανυσματικῶν
πεδίων τάσεων, (δύναμις διὰ ἐπιφανείας), ἔχον εἰς κἀθε σημεῖον
ἔν διάνυσμα, τήν τάσιν $\vec{T}(M, \vec{n})$, ἣτις καλεῖται τάσις
τοῦ σημείου M διὰ τήν διεύθυνσιν $\vec{n}$.

β) Τό διάνυσμα $\vec{T}$ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τό σημεῖον
 M καί τήν διεύθυνσιν $\vec{n}$. Οὕτως ἐάν ἀντί τῆς ἐπιφανείας (S)
ἔχομεν ἄλλην διάφορον (S'), ἀλλά μέ κοινήν κἀθετον εἰς τό M , τό
διάνυσμα $\vec{T}$ παραμένει τό αὐτό.

Ἐν συμπεράσματι, τό διάνυσμα $\vec{T}$, παριστάνει ἐν γέ-
νει τὰς ἐσωτερικᾶς δυνάμεις συνοχῆς ὑπό μορφήν
τάσεων, ἐξαρτᾶται δέ ἀπό πέντε παραμέτρους, ἥτοι
τρεῖς συντεταγμένας τοῦ σημείου M , καί δύο παραμέτρους, προσδι-
ορίζουσας τήν διεύθυνσιν $\vec{n}$.

Ἡ ἀρχή δράσεως καί ἀντιδράσεως δίδει

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = -\vec{T}(M, -\vec{n}) \quad (4.1. \alpha)$$

Ὀνομάζομεν κἀθετον τάσιν τήν

$$\vec{T}_n = (\vec{n} \vec{T}(M, \vec{n})) \vec{n} \quad (4.1. \beta)$$

καί ἐφαπτομένην τάσιν, ἥ τάσιν ὀλισθήσεως ἢ τάσιν
διατμήσεως τήν

$$\vec{T}_t = \vec{T}(M, \vec{n}) - \vec{T}_n. \quad (4.1. \beta)$$

4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΝΟΜΟΥ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Ἐστώσαν τὰ ὑλικά συστήματα ($\mathcal{S}_1$), ($\mathcal{S}_2$) τοῦ σχήματος 4.1. Α
θεωρούμενα ὡς πρὸς ἀπόλυτον βάσιν $Ox_1x_2x_3$ καί $\vec{\gamma}(M)$ καί $\vec{f}(M)$ αἱ
συναρτήσεις ἐπιταχύνσεως καί ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἀνά μονάδα ὄγκου
τοῦ σημείου M , θεωρούμεναι συνεχεῖς.

Ἐφαρμόζοντες τόν θεμελιώδη νόμον τῆς δυναμικῆς $[\vec{E}] = [\vec{F}]$,
διὰ τό τμήμα $\mathcal{S}_1$, θά ἔχωμεν τὰς σχέσεις:
ἰσότης γενικῆς συνισταμένης

$$\iiint_{\mathcal{S}_1} \vec{\gamma} dm = \iiint_{\mathcal{S}_1} \vec{f} dV + \iint_S \vec{T}(M, \vec{n}) ds, \quad (4.2. \alpha)$$

ἰσότης ροπῶν ὡς πρὸς τυχόν σημεῖον O

$$\iiint_{\Sigma_i} (\vec{OM} \wedge \vec{\gamma}) dm = \iiint_{\Sigma_i} (\vec{OM} \wedge \vec{f}) dV + \iint_S (\vec{OM} \wedge \vec{T}) ds. \quad (4.2. \beta)$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν σχέσεων (4.2. α) καὶ (4.2. β) προκύπτουν αἱ εἰδωαὶ συνθῆμαι, αἵτινες διέπουν τὰς τάσεις $\vec{T}(M, \vec{n})$.

4.3 ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΙΝΟΣ

Ἐστω τυχόν σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας S (Σχ. 4.1. Α) μέ υάθετον διεύθυνσιν $\vec{n}$, καὶ $\vec{T}(M, \vec{n})$ ἡ τάσις εἰς M κατὰ τὴν διεύθυνσιν $\vec{n}$.

Ἀναλύοντες τὴν $\vec{T}(M, \vec{n})$ κατὰ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων (Σχ. 4.3. Α) θά ἔχωμεν

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = T_i \vec{k}_i \quad (4.3. \alpha)$$

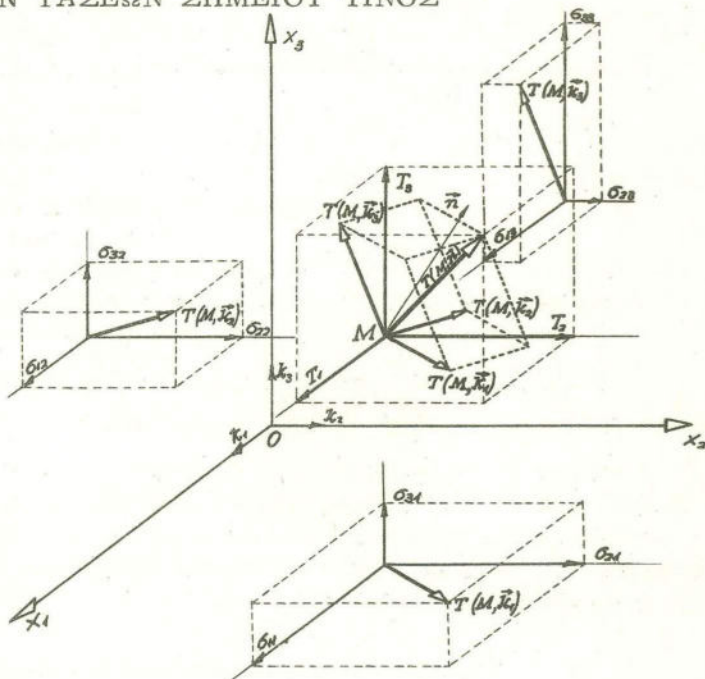
($i = 1, 2, 3$).

Λαμβάνομεν ἐπίσης τὰς τάσεις εἰς M , ὡς πρὸς τὰς τρεῖς κυρίας διευθύνσεις τῶν συντεταγμένων, ἥτοι τὰς τάσεις $\vec{T}(M, \vec{k}_j)$ διὰ ($j = 1, 2, 3$), ἀναλύομεν δέ ἐνᾷστην κατὰ τοὺς τρεῖς ἄξονας συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα 4.3. Α. Θά ἔχωμεν τότε

$$\vec{T}(M, \vec{k}_j) = \sigma_{ij} \vec{k}_i \quad (4.3. \beta)$$

Δι' εἰσαγωγῆς τῶν τάσεων (4.3. α), (4.3. β) εἰς τὴν σχέσιν (4.2. α) καὶ προβολῆς τῆς σχέσεως ταύτης εἰς ἕναν ἐν τῶν τριῶν κυρίων ἀξόνων, προκύπτει διὰ $M = O$ ἡ θεμελιώδης σχέσηις

$$\vec{T}_i = \sigma_{ij} \vec{n}_j \quad (4.3. \gamma)$$

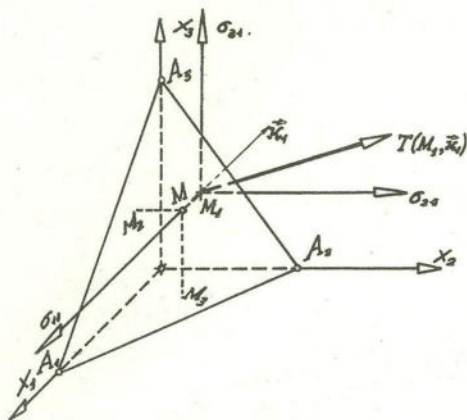


Σχ. 4.3. Α

ἔνθα n_j ($j=1,2,3$) αἱ συνιστώσαι τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\vec{n}$, ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κυρίους ἄξονας.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς (4.3.γ) ἔχει ὡς ἀπολούτως:

Ἐστω τὸ σημεῖον M καὶ ἡ



Σχ. 4.3. Β

διεύθυνσις $\vec{n}$ (n_1, n_2, n_3) ὀρίζουσα ἐπίπεδον, τέμνον τοὺς ἄξονας x_1, x_2, x_3 εἰς τὰ σημεῖα A_1, A_2, A_3 ἀντιστοίχως (Σχ. 4.3. Β). Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου $A_1 A_2 A_3$ θὰ εἶναι

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = h,$$

ἐάν εἶναι h ἡ ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων O ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $A_1 A_2 A_3$.

Ἐφαρμοζομεν τὴν σχέσηιν (4.2. α) εἰς τὸ τετράεδρον $O A_1 A_2 A_3$ καὶ τὴν προβάλλομεν εἰς ἓνα ἄξονα, ἔστω τὸν x_1 .

Τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους γίνεται

$$Y = \iint_S \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot d\vec{s} = \iint_{A_1 A_2 A_3} T_1 ds - \left[\iint_{O A_2 A_3} \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \iint_{O A_1 A_3} \sigma_{12} dx_3 dx_1 + \iint_{O A_1 A_2} \sigma_{13} dx_1 dx_2 \right].$$

Τὰ τέσσαρα ὁλοκληρώματα τοῦ δευτέρου μέλους δύνανται νὰ συγκεντρωθοῦν εἰς ἓν καὶ μόνον, ληφθέν ἐπὶ τῆς $A_1 A_2 A_3$, ἐάν ἀντιστοιχήσωμεν ἀμφιμονοσήμαντα, ἕνα στὸν σημεῖον τῶν πλευρῶν $O A_i A_j$, μὲ τὸ σημεῖον τῆς $A_1 A_2 A_3$ ἐν τοῦ ὁποίου προοίπτε, ὡς ὀρθογώνιος προβολή. Λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν καὶ ὅτι

$$dx_1 dx_2 = ds \cdot n_3, \quad dx_2 dx_3 = ds \cdot n_1, \quad dx_3 dx_1 = ds \cdot n_2$$

προοίπτε ὅτι

$$Y = \iint_{A_1 A_2 A_3} \left[T_1(M) - n_1 \sigma_{11}(M_1) - n_2 \sigma_{12}(M_2) - n_3 \sigma_{13}(M_3) \right] ds.$$

Δεδομένου ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας $A_1 A_2 A_3$ εἶναι ἴσον

πρὸς $\frac{h^2}{2(n_1 n_2 n_3)}$, θὰ ἔχωμεν ἐν γένει ὅτι διὰ $h \rightarrow 0$, ὁπότε τὰ σημεῖα $M, M_1, M_2, M_3 \rightarrow O$, ἰσχύει ἡ σχέσηιν

$$Y = \frac{h^2}{2(n_1 n_2 n_3)} \left[T_1(O) - n_i \sigma_{1i}(O) \right]. \quad (4.3. \delta)$$

Λόγω της (4.2.α) έχουμε έξ άλλου ότι

$$Y = \iiint_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} (\vec{\gamma} \vec{k}_i) d\alpha - \iiint_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} (\vec{f} \vec{k}_i) dV = \iiint_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} [(\vec{\gamma} \vec{k}_i) \rho - \vec{f} \vec{k}_i] dV.$$

Διά $h \rightarrow 0$ θα ισχύη η σχέση

$$Y = \frac{1}{6} \frac{h^3}{(n_1 n_2 n_3)} \left\{ [\vec{\gamma}(0) \vec{k}_i] \rho(0) - \vec{f}(0) \cdot \vec{k}_i \right\}. \quad (4.3.ε)$$

Δεδομένου ότι τό h γίνεται άπειροστόν όταν $h \rightarrow 0$, η έξίσω-
σις των (4.3.δ) και (4.3.ε) είναι δυνατή μόνον είς δύο περιπτώσεις

(1) Διά $\lim [T_i(0) - n_i \sigma_{ii}(0)] = 0$ όταν $h \rightarrow 0$.

(2) Διά $\lim [\vec{\gamma}(0) \vec{k}_i] \rho(0) - \vec{f}(0) \vec{k}_i = \infty$ όταν $h \rightarrow 0$.

Η περίπτωση (2) άπομειλείται διότι όδηγεϊ είς έπιταχύνσεις και
έξωτερικάς δυνάμεις άπείρους, φαινόμενον τό όποϊον είναι άπαράδεκτον
είς τήν υλαστικήν φυσικήν. Υπολείπεται επομένως μόνον η περίπτωση
(1), η όποία δίδει

$$T_i(0) - n_i \sigma_{ii}(0) = 0, \quad (4.3.ζ)$$

όποτε διά γενικεύσεως είς τούς τρεις άξονας προκύπτει η πρός από-
δείκν σχέσις (4.3.γ).

Ό τανυστής δευτέρας τάξεως μέ συντεταγμένας (σ_{ij}) καλείται
τανυστής των τάσεων είς τό σημείον 0, είναι δέ είς γραμ-
μιός έυτελεστής (ϊδε 2.2.1) άντιστοιχιζών είς έμάστην
διεύθυνσιν $\vec{n}$ μίαν τάσιν $\vec{T}(0, \vec{n})$.

Συμπεραίνομεν επομένως ότι αι έσωτερικά δυνάμεις ή τάσεις ύ-
λμου συστήματος, προσδιορίζονται πλήρως εάν δίδεται είς έναστον ση-
μείον τοῦ συστήματος ό τανυστής των τάσεων, ήτοι εάν είναι γνωστόν
τό διανυσματιόν πεδίο των τανυστών των τάσεων είς όλα τά σημεία
τοῦ ύλμου συστήματος.

4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΤΗΣ ΤΟΥ ΤΑΝΥΣΤΟΥ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

Έξετάζομεν κατ'άρχήν τήν περίπτωση ισορροπίας ύλμου συστή-
ματος, ($\vec{\gamma} = 0$), όποτε η σχέση (4.2.α) γράφεται

$$\iiint_V \vec{f}(M) dV + \iint_S \vec{T}(M, \vec{n}) ds = 0.$$

Προβάλλομεν τὴν σχέσιν αὐτὴν εἰς τὸν ἄξονα Ox_i , λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (4.3.γ). Προϋπτεῖ τότε ἡ σχέση

$$\iiint_{\Sigma_i} f_i dV + \iint_S (\sigma_{ij} n_j) ds = 0. \quad (4.4. \alpha)$$

Τό διπλοῦν ὁλοκληρώμα παριστᾷ τὴν ροὴν τοῦ διανύσματος σ_{ij} διὰ τῆς ἐπιφανείας S ἄρα μετασχηματίζεται εἰς τριπλοῦν διὰ τοῦ τύπου (2.1.2.λ) τῶν GREEN-OSTROGRADSKI καὶ ἡ σχέση (4.4.α) γίνεται

$$\iiint_{\Sigma_i} f_i dV + \iiint_{\Sigma_i} \operatorname{div} \sigma_{ij} dV = 0,$$

$$\text{ἢ} \quad \iiint_{\Sigma_i} (f_i + \operatorname{div} \sigma_{ij}) dV = 0, \quad (4.4. \beta)$$

$$\text{ὅπου} \quad \operatorname{div} \sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3}.$$

Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συναρτήσεων ὑπάρχει ἐξ ἄλλου τό θεώρημα:

" Ἐστω $\varphi(M)$ μία συνεχὴς συνάρτησις εἰς τὸν χώρον Σ καὶ ἔστω Σ_i εἷς χώρος ἐσωτερικὸς τοῦ χώρου Σ . Ἐάν ἰσχύῃ ἡ σχέση

$$\iiint_{\Sigma_i} \varphi(M) dV = 0$$

δι' οἰονδήποτε χώρον Σ_i , τότε ἡ συνάρτησις $\varphi(M)$ εἶναι ἐν ταυτοτήτος μηδενική εἰς τὸν χώρον Σ , ἥτοι $\varphi(M) \equiv 0$."

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ, προϋπτεῖ

$$f_i + \operatorname{div} \sigma_{ij} = 0$$

καὶ ἄλλαι δύο ἀνάλογοι σχέσεις ὡς πρὸς τοὺς ἄλλους δύο ἄξονας ἐμφραζόμεναι διανυσματικῶς διὰ τῆς σχέσεως

$$\boxed{f_i + \operatorname{div} \sigma_{ij} = 0} \quad (4.4. \gamma)$$

Ἡ σχέση (4.4.γ) ἐμφράζει τὰς τρεῖς ἐξισώσεις ἰσορροπίας τυχόντος σημείου ἐνός ὑλισμοῦ συστήματος Σ , τὰς προερχομένας ἀπὸ τὴν (4.2.α)

Εἰς τὴν περίπτωσιν μινήσεως ($\vec{\gamma} \neq 0$) θά ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{\rho \gamma_i = f_i + \operatorname{div} \sigma_{ij}} \quad (4.4. \delta)$$

ἥτις ἐμφράζει τὰς τρεῖς ἐξισώσεις μινήσεως τυχόντος σημείου, ἐνός ὑλισμοῦ συστήματος Σ .

Θά ἀποδείξωμεν αὐτόπιν αὐτῶν τήν συμμετριοῦτητα τοῦ τανυστοῦ τῶν τάσεων. Ὑποθέτομεν ἰσορροπίαν, δηλαδή $\vec{\gamma} = 0$, ἀλλά ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος καί διὰ περίπτωσιν υιήσεως.

Προβάλλομεν πρὸς τοῦτο τήν σχέσιν (4.2.β) εἰς τὸν ἄξονα Ox_i , ὁπότε προκύπτει ἡ σχέση

$$\iiint_{\Sigma_i} (x_2 f_3 - x_3 f_2) dV + \iint_S [x_2 (\sigma_{3j} n_j) - x_3 (\sigma_{2j} n_j)] ds = 0.$$

ἐφαρμόζοντες πάλιν τὸ θεώρημα GREEN-OSTROGRADSKI θά ἔχωμεν

$$\iiint_{\Sigma_i} [(x_2 f_3 - x_3 f_2) + \text{div}(x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j})] dV = 0.$$

Μετά τὰς πράξεις, καί δι' ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (4.4.γ) προκύπτει

$$\iiint_{\Sigma_i} (\sigma_{23} - \sigma_{32}) dV = 0,$$

ἥτοι θά ἔχωμεν $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ καί γενικώτερον

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

(4.4.ε)

Γενικὸν συμπέρασμα: Αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἢ τάσεις τυχόντος ὑλικοῦ συστήματος προσδιορίζονται πλήρως ἀπὸ τὸν τανυστὴν τῶν τάσεων, ἥτοι ἀπὸ τὰς ἐξ ἀγνώστους συντεταγμένους τοῦ σ_{ij} . Αἱ ἐξ αὐταῖ συναρτήσεις σ_{ij} συνδέονται μεταξύ των διὰ τῶν τριῶν σχέσεων (4.4.γ) ἢ (4.4.δ). Ὑπολείπεται ἐπομένως ἡ εὕρεσις ἄλλων τριῶν σχέσεων μεταξύ τῶν σ_{ij} , ὁπότε, μαθηματικῶς, τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τυχόντος ὑλικοῦ συστήματος, ἔχει καταστρωθῇ.

Αἱ ἄλλαι τρεῖς σχέσεις δίδονται ἐν γένει εἰς τὴν μηχανικὴν, ἀπὸ τοὺς νόμους τάσεων-παραμορφώσεων καί ἔχουν περὶωρισμένην ἰσχύν, διότι προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς φυσικὰς ιδιότητας ὠρισμένης ἢ ὠρισμένων κατηγοριῶν σωμάτων. Διὰ τὴν μηχανικὴν τῶν ρευστῶν αἱ σχέσεις αὐταὶ δίδονται εἰς τὸ κεφάλαιον 6, (σχέσεις (6.4.1.δ) ἢ (6.4.1.ζ) διὰ τὰ υλασσιμὰ ρευστά).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

5.1 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ

Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τῶν συνεχῶν μέσων δύνανται νά ἐμφρασθοῦν κατὰ πολλοὺς τρόπους, δύο δέ ἐξ αὐτῶν, τῶν ὁποίων τὰς ἀρχὰς δίδομεν κατωτέρω, ἐπευράτησαν εἰς τὴν μηχανικὴν.

5.1.1 Ἑκφράσεις κατὰ Lagrange

Ὁ φυσικώτερος τρόπος ἐμφράσεως τῆς κινήσεως ἑνός τυχόντος σημείου M , συντεταγμένων x_i κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t καὶ x_i^0 κατὰ τὴν $t=t_0$ (ἑναρξίς μετρήσεως τοῦ χρόνου) ἔγχειται εἰς τὴν ἀπλήν σκέψιν ὅτι γνωρίζομεν τὴν κίνησιν τοῦ συστήματος ἐάν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς συναρτήσεις

$$x_i = g_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \quad (5.1.1. a)$$

Ἐμφράζομεν δηλαδὴ τὰς συντεταγμένας x_i τοῦ σημείου M κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμήν t , συναρτήσει τῶν συντεταγμένων x_i^0 τῆς ἀρχῆς τῶν χρόνων καὶ τοῦ χρόνου t .

Αἱ συναρτήσεις g_i εἶναι αἱ πρὸς εὐρεσιν ἄγνωστοι συναρτήσεις, αἱ ἐμφράζουσαι τὴν κίνησιν καὶ τὰς θεωροῦμεν συνεχεῖς καὶ μέ συνεχεῖς παραγώγους. Αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ x_1^0, x_2^0, x_3^0, t καλοῦνται μεταβληταὶ τοῦ LAGRANGE.

Ἡ σχέση (5.1.1. a) ἀντιστοιχίζει ἀμφιμονοσήμαντα τὰ σημεῖα M^0 καὶ M . Εἶναι ἐπομένως δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος (5.1.1. a) κατὰ ἕναν καὶ μόνον τρόπον, ὡς πρὸς x_1^0, x_2^0, x_3^0 προκύπτει δέ τό σύστημα

$$x_i^0 = h_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (5.1.1. b)$$

Παρατηρούμεν ότι ή έυφρασις ιατά LAGRANGE είναι πολύ απλή διότι έπιτρέπει τήν παραιολούθησιν τής ιινήσεως ένός σημείου M , εάν ιρατηθοῦν σταθεραί αι συντεταγμέναι x_i^0 . Αι έξισώσεις (5.1.1.α) προσδιορίζουν έπομένως τās τροχιάς τών διαφόρων σημείων του ύλιου συστήματος, διά x_1^0, x_2^0, x_3^0 , σταθεράς.

Αι συνιστώσαι ταχύτητος ιαί έπιταχύνσεως έυφράζονται διά μεριής παραγωγίσεως ως πρós τόν χρόνον, τών συναρτήσεων $g_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$, δηλαδή θά είναι

$$\begin{aligned}x_i &= g_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \quad , \\v_i &= \frac{\partial g_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)}{\partial t} \quad , \quad (5.1.1. \gamma) \\j_i &= \frac{\partial^2 g_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)}{\partial t^2} \quad .\end{aligned}$$

5.1.2 Έκφρασις κατὰ Euler

Παρά τήν απλότητά της ή έυφρασις ιατά LAGRANGE δέν προσαρμόζεται ιαλώς εις τά προβλήματα δυναμικής, όπου π.χ. αι δυνάμεις επί τινος συστήματος έξαρτῶνται ιατ'εύθεϊαν από τήν θέσιν του συστήματος ιατά τήν χρονικήν στιγμήν t , όποτε ή χρήσις τών x_i^0 ως μεταβλητῶν περιιλέπει τό όλον πρόβλημα. Διά τόν λόγον αυτόν χρησιμοποιούνται διά τόν προσδιορισμόν τής ιινήσεως του ύλιου συστήματος αι σχέσεις

$$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad , \quad (5.1.2. \alpha)$$

προσδιορίζουσαι ανά πᾶσαν στιγμήν t ιαί εις τυχόν σημείον $M(x_1, x_2, x_3)$ τās συνιστώσας τής ταχύτητος $\vec{V}(M, t)$. Αι μεταβληταί x_1, x_2, x_3, t , ιαλοῦνται μεταβληταί του EULER.

Έάν γνωρίζωμεν τήν έυφρασιν τής ιινήσεως ιατά LAGRANGE, εύόλως εύρίσκομεν τήν έυφρασιν ιατά EULER, διότι

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial g_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)}{\partial t} = \frac{\partial g_i(h_1, h_2, h_3, t)}{\partial t} \quad .$$

Αι σχέσεις (5.1.2. α) προσδιορίζουν πλήρως τήν ιίνησην του συστήματος. Πράγματι, έξ αύτῶν προκύπτουν:

Τροχιαί τών σημείων M

Η τροχιά ένός ύλιου σημείου είναι ό γεωμετρικός τόπος τών θέσεών του ιατά τήν μεταβολήν του χρόνου t . Έπομένως αι

τροχιαί θά εἶναι αἱ καμπύλαι αἱ προϋπάρχουσιν δι' ὁλοκληρώσεως τοῦ συστήματος τῶν τριῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} = dt, (5.1.2\beta)$$

τό ὁποῖον προϋπτεῖ ἐν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ταχύτητος.

Τό σύστημα (5.1.1. α) παριστᾷ προφανῶς τήν λύσιν τοῦ (5.1.2. β) ὅπου αἱ x_i εἶναι αἱ σταθεραί τῆς ὁλοκληρώσεως.

Γραμμαί καί ἐπιφάνειαι ροῆς

Ὀνομάζομεν γραμμὰς καί ἐπιφανείας ροῆς κατὰ τήν ὁρισμένην στιγμὴν t , τὰς ἐχούσας τήν ιδιότητα νά δέχωνται ὡς ἐφαπτομένην εἰς οἷονδήποτε σημεῖον των τό διάνυσμα τῆς ταχύτητος (ἴδε 2.1.2).

Γενικῶς αἱ γραμμαί καί ἐπιφάνειαι ροῆς ἀλλάζουν, ἀνά πᾶσαν στιγμὴν, θέσιν εἰς τόν χώρον, δίδονται δέ ὡς λύσεις τοῦ συστήματος τῶν δύο διαφορικῶν ἐξισώσεων

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}, (5.1.2\gamma)$$

εἰς τό ὁποῖον ὁ χρόνος t , παῖζει ρόλον σταθερᾶς παραμέτρου (π.χ. $t = 15''$).

Ὀνομάζομεν σωληῖνα ροῆς, τήν εἰδικὴν περίπτωση ἐπιφανείας ροῆς, τήν ἀποτελουμένην ἀπὸ γραμμᾶς ροῆς μέ ὁδηγόν υλειαστήν καμπύλην.

Μόνιμοι κινήσεις

Ὀνομάζομεν μίαν κίνησιν μόνιμον ὅταν τό πεδῖον τῶν ταχυτήτων εἶναι μόνιμον, δηλαδή ὅταν ἡ ταχύτης σημείου τινός M δέν ἀλλάσσει μέ τόν χρόνον t . Αἱ συνιστώσαι v_i εἶναι συναρτήσεις μόνον τῶν συντεταγμένων x_1, x_2, x_3 .

Εἰς τήν περίπτωση μόνιμου κινήσεως αἱ τροχιαί συμπίπτουν μέ τὰς γραμμὰς ροῆς, καί κατὰ συνέπειαν, αἱ δύο πρῶται ἐν τῶν σχέσεων (5.1.2. β) συμπίπτουν μέ τὰς (5.1.2. γ), ἡ δέ τρίτη σχέσις (5.1.2. β) προσδιορίζει τόν χρονικόν νόμον κινήσεως ἐνός στοιχείου M ἐπὶ μιᾷ τροχίᾳ.

Γραμμαί καί ἐπιφάνειαι περιστροφῆς. Κυκλοφορία τῆς ταχύτητος

Ὀνομάζομεν περιστροφὴν τῆς κινήσεως εἰς τό σημεῖον M καί κατὰ τήν στιγμὴν t , τό διάνυσμα $\vec{\omega}$ τό προσδιοριζόμενον ἀπὸ τήν σχέσιν (ἴδε 2.1.2. ι)

$$2\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V} = \nabla \wedge \vec{V}. (5.1.2. \delta)$$

Κατ'ἐπέκτασιν τῶν ἐννοιῶν τῆς προηγουμένης παραγράφου, θά ἔχωμεν γραμμὰς καί ἐπιφανείας περιστροφῆς κατὰ τήν ὁρισμένην στιγμὴν t , τὰς ἐχούσας τήν ιδιότητα νά δέχωνται ὡς

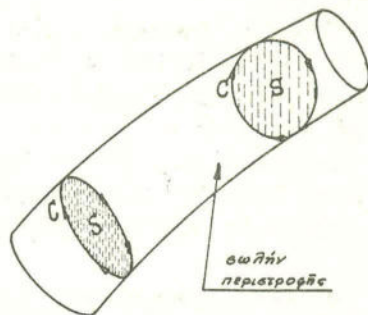
ἐφαπτομένην εἰς οἰονδήποτε σημεῖον των τό διάνυσμα $\vec{\omega}$.

Ὀνομάζομεν κυκλοφορίαν κατὰ μήκος τῆς καμπύλης C , τήν κυκλοφορίαν τοῦ διανύσματος τῆς ταχύτητος κατὰ μήκος τῆς C , ἥτοι (ἴδε 2.1.2.2)

$$\Gamma(C) = \int_C \vec{V} d\vec{l}. \quad (5.1.2.ε)$$

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τοῦ STOKES (2.1.2.ν), ἔχομεν τό θεώρημα (Σχ. 5.1.2.Α):

Αἱ κυκλοφορίαι κατὰ μήκος δύο κλειστῶν καμπύλων C καί C' εὐρισκομένων εἰς τήν ἐπιφάνειαν τοῦ αὐτοῦ σωληνός περιστροφῆς, καί διαγραφομένων κατὰ τήν αὐτήν φοράν, εἶναι ἴσαι μεταξύ των καλοῦνται δέ ἔντασις τοῦ σωληνός περιστροφῆς. Ἡ ἔντασις αὕτη ἰσοῦται πρός τό διπλάσιον τῆς ροῆς τοῦ διανύσματος $\vec{\omega}$ διά τῆς ἐπιφανείας (S) τήν ὁποίαν περιυλεῖται ἡ κλειστή καμπύλη, ἥτοι διά τοῦ σωληνός περιστροφῆς



Σχ. 5.1.2.Α

$$\int_C \vec{V} d\vec{l} = \iint_S \vec{n} \operatorname{rot} \vec{V} ds = 2 \iint_S \vec{\omega} \vec{n} ds. \quad (5.1.2.ζ)$$

5.1.3 Μοριακή παράγωγος

Ἡ φυσική ἔννοια τῆς μοριακῆς παραγώγου εἶναι ἡ ἑξής:

Ἐστω μία συνάρτησις $f(M, t)$ τοῦ σημείου M μέ ἐπί πλέον μεταβλητὴν τόν χρόνον t . Ἐάν ἀκολουθήσωμεν τό σημεῖον M εἰς τήν κίνησίν του, ἡ συνάρτησις $f(M, t)$ γίνεται ἐν ταυτότητος ἴση μέ τήν συνάρτησιν $g(t)$, ἥτις ἔχει ὡς μοναδικήν μεταβλητὴν τόν χρόνον t .

Ἐξ ὁρισμοῦ, ὀνομάζομεν μοριακὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως $f(M, t)$, κατὰ τήν στιγμὴν t , τήν παράγωγον τῆς $g(t)$ κατὰ τήν αὐτὴν στιγμὴν.

Ἡ ἔννοια τῆς μοριακῆς παραγώγου ἐφαρμόζεται δι' οἰονδήποτε βαθμικόν ἢ διανυσματικόν μέγεθος, προσδιοριζόμενον ἐπὶ τῇ βάσει ἐνός συστήματος, τό ὁποῖον παρακολουθοῦμεν εἰς τήν κίνησίν του.

Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ ἐπιτάχυνσις $\vec{\gamma}$ σημείου τινός εἶναι ἡ μοριακὴ παράγωγος τῆς ταχύτητος $\vec{V}$ τοῦ σημείου.

Ἐάν τό $\vec{V}$ παριστᾷ ἕναν ὄγκον καί ἡ συνάρτησις K προσδιορίζεται ἀπὸ τήν σχέσιν

$$K = \iiint_V f(M, t) dV,$$

τότε η μοριακή παράγωγος $\frac{dK}{dt}$ είναι η παράγωγος ως προς τον χρόνο της συναρτήσεως K , όταν ακολουθώμεν τον όγκον V εις την κίνησίν του.

Εν τῶν ἀνωτέρω φαίνεται σαφῶς ὅτι μέ τὰς μεταβλητάς τοῦ LAGRANGE, ὁ ὑπολογισμός τῶν μοριαῶν παραγῶγων ταυτίζεται μέ μίαν μεριμνήν παραγῶγισιν ὡς πρὸς τὸν χρόνον, ἐνῶ μέ τὰς μεταβλητάς τοῦ EULER, τὸ θέμα τοῦ ὑπολογισμοῦ περιπλέκεται. Θά τό ἐξετάσωμεν δέ κατωτέρω ἀναλυτικῶς, διότι ἀποτελεῖ βασικόν στοιχεῖον διὰ τήν εὑρεσιν τῶν γενικῶν ἐξισώσεων τῆς μηχανικῆς τῶν συνεχῶν ὑλικῶν χώρων.

α) Συναρτήσεις σημείου

Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(M, t) = f(x_1, x_2, x_3, t)$. Ἡ μοριακή παράγωγος, τήν ὁποίαν συμβολίζομεν ὡς $\frac{df}{dt}$, είναι ἡ παράγωγος ὡς πρὸς τὸν χρόνον τῆς συναρτήσεως

$$g(t) = f[x_1(t), x_2(t), x_3(t), t],$$

ἡ ὁποία δίδει τὰς τιμὰς τῆς $f(M, t)$ ὅταν ἀκολουθοῦμεν τὸ σημεῖον M εἰς τήν κίνησίν του. Θά ἔχωμεν ἐπομένως

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

ἢ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (5.1.2.β)

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \text{grad} f} \quad (5.1.3.α)$$

Ἐάν ἡ συνάρτησις εἶναι διανυσματικῇ, π.χ. ἡ $\vec{A}(M, t)$, θά ἔχωμεν ἀντιστοίχως τὰς τρεῖς σχέσεις

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \vec{V} \text{grad} A_i. \quad (5.1.3.β)$$

Ἐφαρμόζομεν τὰς σχέσεις (5.1.3.β) διὰ τήν περίπτωσιν τῆς ἐπιταχύνσεως, ὁπότε θά προκύψῃ ὅτι :

$$\gamma_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{V} \text{grad} v_i. \quad (5.1.3. \gamma)$$

Μία άλλη ισοδύναμος έκφρασις της έπιταχύνσεως υπό καθαρώς διανυσματικήν μορφήν είναι ή

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{V}^2) + (\text{rot } \vec{V}) \wedge \vec{V}. \quad (5.1.3. \delta)$$

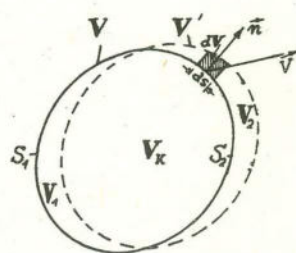
β) Όλουληρώματα όγμου
Έστω ή συνάρτησις

$$K = \iiint_V f(M, t) dV.$$

Ή μοριακή της παράγωγος είναι ή παράγωγος ως προς τόν χρόνον της συναρτήσεως $K(t)$ όταν άμολουθοϋμεν τόν όγμον V είς τήν κίνησίν του, δίδεται δέ από τήν σχέσηιν

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \iiint_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \vec{V}) \right] dV = \iiint_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + f \text{div} \vec{V} + \vec{V} \text{grad} f \right] dV = \\ &= \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f(\vec{n} \cdot \vec{V}) ds. \end{aligned} \quad (5.1.3. \epsilon)$$

Ή απόδειξις της σχέσεως (5.1.3. ε) στηρίζεται είς τήν έκφρασιν αυτής ταύτης της έννοίας της παραγωγού, παρατηροϋντες επί πλέον ότι ή μεταβολή dK της συναρτήσεως K , προέρχεται, άφ'ένός μέν από τήν μεταβολήν της προς όλουλήρωσιν συναρτήσεως f , άφ'έτέρου δέ από τήν μεταβολήν τοϋ όγμου V , κατά τόν χρόνον dt . Ήτοι, θά έχωμεν έξ όρισμοϋ



Σχ. 5.1.3. Α

$$\frac{dK}{dt} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{t' - t} \left[\iiint_{V'} f(M, t') dV - \iiint_V f(M, t) dV \right]. \quad (5.1.3. \zeta)$$

Δι' αναλύσεως των όλουληρωμάτων τοϋ δευτέρου μέλους της (5.1.3. ζ) είς όλουληρώματα επί των $V_k + V_z = V'$ καί $V_k + V_l = V$ (Σχ. 5.1.3. Α) προϋπτει ή σχέσηιν

$$\frac{dK}{dt} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{t' - t} \left[\iiint_{V_t} f'(M, t) dV - \iiint_{V_{t'}} f(M, t) dV \right] + \iiint_{V_t} \frac{\partial f}{\partial t} dV.$$

Έξ άλλου, κατά προσέγγισιν άπειροστού $(t' - t)$ πρώτης τάξεως, θά έχωμεν $dV_2 = (t' - t)(\vec{n} \cdot \vec{V}) ds = -dV_1$, όποτε

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{t' - t}{t' - t} \left[\iint_{S_2} (\vec{n} \cdot \vec{V}) f' ds + \iint_{S_1} (\vec{n} \cdot \vec{V}) f ds \right] = \\ &= \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{S=S_1+S_2} (\vec{n} \cdot \vec{V}) f ds = \iiint_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \cdot \vec{V}) \right] dV, \end{aligned}$$

διότι είς τό όριον θά έχωμεν $V_K \rightarrow V$ καί $f' \rightarrow f$.

Ή σχέση (5.1.3.ε) αποδεικνύεται καί αύστηρότερον μαθηματι-, υώς, διά της μετατροπής των μεταβλητών της του EULER είς μεταβλητάς LAGRANGE, όποτε ή εύρεσις της μοριακής παραγώγου ανάγεται είς απλήν παραγωγήσιν, καί έν συνεχεία διά δευτέρας μετατροπής καί έπαναφοράς είς τάς μεταβλητάς του EULER.

γ) Όλουληρώματα έπιφανειών

Τό τελευταίον παράδειγμα ύπολογισμοϋ μοριακής παραγώγου άφορᾷ τήν συνάρτησιν $\Pi = \iint_S (\vec{X} \cdot \vec{n}) ds$, διά τήν περίπτωσιν κατά τήν όποίαν $\text{div} \vec{X} = 0$. Θα ίσχύη τότε ή σχέση

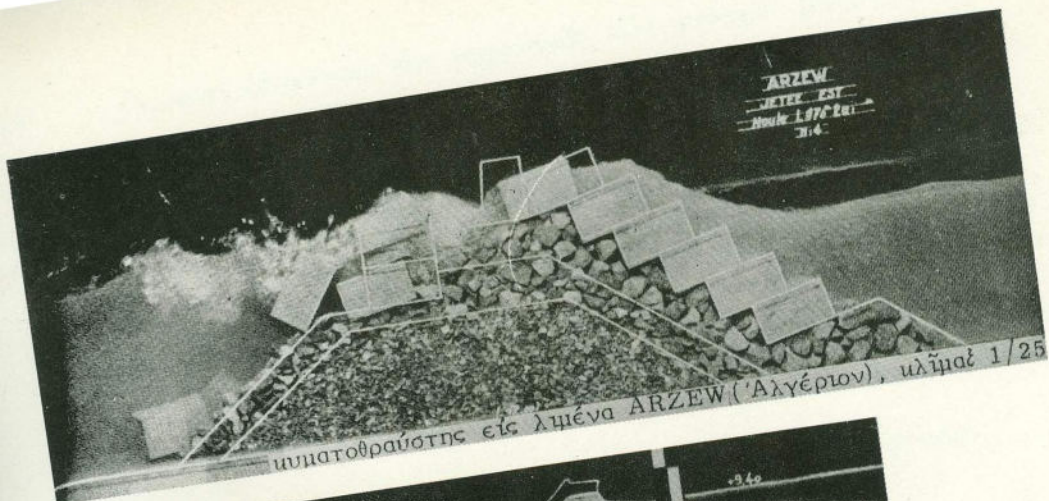
$$\frac{d\Pi}{dt} = \iint_S \left[\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{X} \wedge \vec{V}) \right] \vec{n} ds. \quad (5.1.3.η)$$

Ή απόδειξις της σχέσεως (5.1.3.η) είναι τελείως ανάλογος της προηγουμένης (5.1.3.ε) λαμβανομένου βεβαίως υπ' όψιν ότι $\text{div} \vec{X} = 0$.

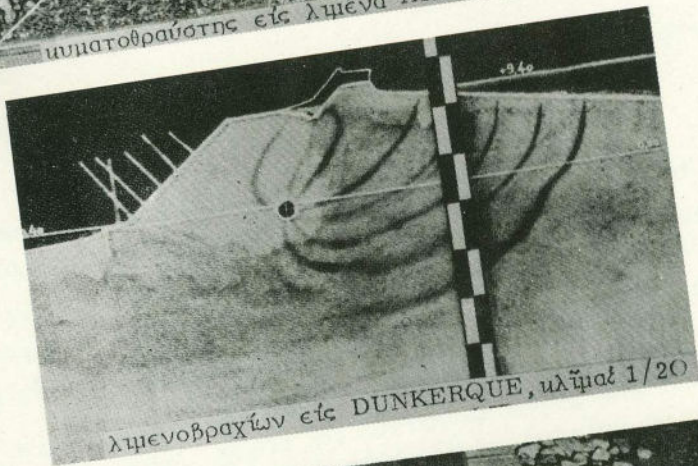
5.2 ΚΙΝΗΤΙΚΗ-NΟΜΟΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΜΑΖΗΣ

Συμφώνως πρός τάς αρχάς της υλασσιμής μηχανικής καί τήν σχέση (3.2.α), πρέπει νά έμφράσωμεν ότι δι' οίονδήποτε τμήμα (V) ένός υλικού συστήματος, τό όποϊον άμολουθοϋμεν είς τήν μίνησίν του, ή μᾶζα αύτοϋ m παραμένει σταθερά, ήτοι είναι ανεξάρτητος του χρόνου. Αυτό έμφράζεται μαθηματι-, ως έξής: Ή μοριακή παράγωγος της μᾶζης m τυχόντος υλικού όγμου V είναι μηδενική, ήτοι

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right] dV = 0.$$



υψατοθραύστης εἰς λιμένα ARZEW (Ἀλγέριον), κλίμακ 1/25



λιμενοβραχίων εἰς DUNKERQUE, κλίμακ 1/20



θερμιών ἐργαστάσιον εἰς CASABLANCA,
ἐξοπλισμὸς ἐντὸς θαλάσσης. κλίμακ 1/20

Μελέται ἐπὶ ὁμοιωμάτων: (λιμενιά)



Δεδομένου ότι ο όγκος V είναι τυχών, προκύπτει ότι

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0} \quad (5.2. \alpha)$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως *έξισωση συνεχείας*, δύναται δέ να γραφεί και ως

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (5.2. \beta)$$

δεδομένου ότι $\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \rho \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \operatorname{grad} \rho$ και $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{grad} \rho$.

5.2.1 Άσυμπίεστα υλικά συστήματα

Έν υλικόν σύστημα καλείται *έξ* όρισμοϋ άσυμπίεστον, όταν ή άπόμλισις της ταχύτητος, $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, τυχόντος σημείου του είναι έμ ταυτότητος ίση πρός τό μηδέν.

Έν της σχέσεως (5.2. β) προκύπτει τότε ότι $\frac{d\rho}{dt} = 0$, ήτοι υάθε

υλικόν σημείον διατηρεί σταθεράν πυκνότητα ρ κατά την υίνησίη του, χωρίς νά έπεται έξ αύτοϋ ότι ή πυκνότης όλων των σημείων τοϋ χώρου είναι ή αύτή, (π. χ. δοχείον περιέχον δύο ή περισσότερα μη μιγνύμενα υγρά).

Είς την συνέχειαν όμως έξαιρούμεν τάς είδιώας αύτάς περιπτώσεις και υποθέτομεν ότι τά άσυμπίεστα συστήματα έχουν σταθεράν και ίσην πυκνότητα είς όλα τά σημεία των. Θα έχωμεν έπομένως διά τά άσυμπίεστα υλικά συστήματα τάς έξισώσεις

Όρισμός άσυμπιεστότητος: $\rho(x_1, x_2, x_3, t) = \rho_0 = \text{σταθ.}$ (5.2.1α)

Έξισώσεις συνεχείας: $\nabla \vec{V} = \operatorname{div} \vec{V} = 0.$ (5.2.1. β)

5.2.2 Μόνιμοι κινήσεις

Η υινηματιή έννοια της μόνιμου υινήσεως, δοθεΐσα είς (5.1.2) έπυευτεΐνεται και είς την υινητιήν και δυναμιήν.

Όνομάζομεν οϋτω μίαν υίνησιν γεννιϋς μόνιμον, όταν όλα τά μεγέθη (υινηματιά, υινητιά ή δυναμιά) τά χαρακτηρίζοντα την κατάσταση των σημείων M τοϋ υλικοϋ συστήματος είναι ανεξάρτητα τοϋ χρόνου. Όλοι αΐ μερμαΐ παράγωγοι των μεγεθών αύτών ως πρός τόν χρόνο, (περιπτώσεις μεταβλητών EULER) θα είναι έπομένως μηδενμαΐ, όποτε ή έξίσωσις συνεχείας λαμβάνει την μορφήν

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (5.2.2. \alpha)$$

5.3 ΔΥΝΑΜΙΚΗ-ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Διά τας μέχρι τουδε σχέσεις μινηματικής και μινηματικής, ή βάσις (σύστημα συντεταγμένων) είναι τυχοῦσα και ως χρόνος δύναται να ληφθῇ οἰαδήποτε μεταβλητή $T = \varphi(t)$, αρμεῖ ή συνάρτησις $\varphi(t)$ να είναι αὔλουσα συνάρτησις τοῦ χρόνου t και μέ συνεχεῖς παραγώγους. Διά τήν δυναμικήν ὅμως, ή βάσις δέον να είναι ἀπόλυτος και ή μεταβλητή T δέον να παριστάνη μίαν ἀπόλυτον μέτρησιν τοῦ χρόνου, ἄλλως αἱ ἀμολουθοῦσαι έξιώσεις δέν ἰσχύουν. Διά να ἐφαρμοσθοῦν πρέπει να ληφθοῦν ἐπὶ πλέον ὑπ' ὄψιν αἱ δυνάμεις CORIOLIS.

5.3.1 Ἐξιώσεις ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου δυναμικῆς

Ὡς ἐδείχθη εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον, ή ἐφαρμογή τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς δυναμικῆς

$$[\vec{E}] = [\vec{F}]$$

δίδει τας τρεῖς έξιώσεις μινήσεως (4.4.δ) τυχόντος σημείου ἐνός ὑλικοῦ συστήματος. Ἀντικαθιστῶντες τήν τιμήν τῆς ἐπιταχύνσεως μέ τήν ἔκφρασίν της κατὰ EULER, ἐκ τῆς σχέσεως (5.1.3.γ), θά ἔχωμεν τας τρεῖς θεμελιώδεις έξιώσεις μινήσεως ἐνός σημείου ὑλικοῦ συστήματος μέ μεταβλητάς EULER

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{V} \text{grad} v_i \right) = f_i + \text{div} \sigma_{ij} \quad (5.3.1. a)$$

5.3.2 Ἐξιώσεις ἐκ τοῦ θεωρήματος ποσοτήτων κινήσεως

Αἱ θεμελιώδεις έξιώσεις (5.3.1. a) δύναται να γραφοῦν και ὑπό ἄλλην μορφήν δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς δυναμικῆς, ὑπό τήν μορφήν τοῦ θεωρήματος τῶν ποσοτήτων μινήσεως. Ἐφαρμόζομεν δηλαδή ἀντί τῆς σχέσεως

$$[\vec{E}] = [\vec{F}]$$

τήν σχέσιν

$$\frac{d}{dt} [\vec{A}] = [\vec{F}],$$

ή ὁποία ἐμφράζει ὅτι:

" Ἡ παράγωγος ως πρὸς τόν χρόνον τοῦ στροφέως τῶν ποσοτήτων μινήσεως τυχόντος ὑλικοῦ συστήματος τό ὁποῖον ἀμολουθοῦμεν εἰς τήν μίνησίν του, ἰσοῦται μέ τόν στροφέα τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων τοῦ συστήματος " (σχέσις 3.3.β).

Ἐφαρμόζομεν τήν ἰσότητα γεννικῆς συνισταμένης τῶν στροφέων λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν, ἀφ' ἐνός μέν τήν σχέσιν (3.2.β) κατὰ τήν ὁποίαν

$$\vec{A} = \iiint_V \vec{V} dm,$$

ή

$$\bar{D} = \iiint_V \bar{V} \rho dV,$$

άφ'ετέρου δέ τήν σχέσιν (4.4.β) διά τής όποίας προϋπτεϊ ή ό - νομαζομένη έξίσωσις διατηρήσεως τής ποσότητος υι - νήσεως

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial(\rho v_i v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho v_i v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_i v_3)}{\partial x_3} = f_i + \text{div } \sigma_{ij}, \quad (5.3.2a)$$

ή όποία είναι ισοδύναμος μέ τήν (5.3.1.α) ως φαίνεται μετά τας πρά - ζεις υαί τήν εφαρμογήν τής έξίσώσεως συνεχείας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{V}) = 0.$$

5.3.3 Έξισώσεις έκ τοῦ θεωρήματος τών δυνατῶν ισχύων

Μία ἄλλη μορφή τών θεμελιωδών έξισώσεων τής δυναμικής, δύναται νά προύπη δι'έφαρμογής τής αρχής τών δυνατῶν ισχύων, τής παρα - γράφου (3.4), ή όποία μέ τήν εισαγωγήν τής έννοίας τής μοριακής πα - ραγώγου έυφράζει ότι:

" Η μοριακή παράγωγος τής υινητικής ένεργείας ένός ύλιου ὄγμου V τόν όποϊον ἀνολοιθοῦμεν εἰς τήν υἴνησίν του εἶναι ἀνά πᾶ - σαν στιγμήν ἴση μέ τήν ισχύν ὄλων τών έσωτερικῶν υαί έξωτερικῶν δυ - νάμεων, τών εφαρμοζομένων ἐπὶ τοῦ ύλιου ὄγμου V ".

Ἡ ἄνωτέρω πρότασις έυφράζεται ἀπό τήν σχέσηιν

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iiint_V \rho v_i v_i dV \right) = \iiint_V f_i v_i dV + \iint_S \sigma_{ij} n_j v_i ds - \iiint_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV, \quad (5.3.3. a)$$

ή όποία μετά τας πράξεις υαταλήγει εἰς τήν σχέσηιν

$$\iiint_V \left(\rho \frac{dv_i}{dt} - f_i - \text{div } \sigma_{ij} \right) v_i dV = 0, \quad (5.3.3. β)$$

ήτις εἶναι ισοδύναμος τής (5.3.2.α).

5.3.4 Συνθήκαι εἰς τὰ ὅρια

Ὡς ἤδη έξετέθη εἰς τήν παράγραφον (4.1) αἱ τάσεις $\bar{T}(M, \bar{n})$ εἶναι συναρτήσεϊς συνεχεῖς έντός τοῦ πεδίου των.

Όνομάζομεν ἐξ ὁρισμοῦ ἐπιφάνειαν έπαφῆς (S_s) τήν έ - πιφάνειαν ήτις ἀνά πᾶσαν στιγμήν διαχωρίζει δύο έ - φαπτομένους ύλικούς χώρους υαί ή όποία δέν διασχί -

ζεται από υινούμενα στοιχεΐα έν τοῦ ένός χώρου πρὸς τόν άλλον.

Έάν υαλέσωμεν $\vec{V}_{n_1}$ καί $\vec{V}_{n_2}$ τάς υαθέτους συνιστώσας τής ταχύτητος τών στοιχείων ένός ευάστου τών υλικών χώρων, ὡς πρὸς τήν έπιφάνειαν έπαφής (S_s) θά έχωμεν έξ όρισμοῦ

$$\vec{v}_{n_1} = \vec{v}_{n_2} = 0. \quad (5.3.4. \alpha)$$

Έξ άλλου αὶ τάσεις $\vec{T}(M, \vec{n})$ εΐναι συνεχεΐς υατά τήν διέλευσιν τής έπιφανείας (S_s), ίσοῦνται δέ μέ τήν έπιφανειαυήν πυνότητα τών έξωτεριυών δυνάμεων (ήτοι μέ τήν μορφήν $\frac{\text{δύναμις}}{\text{έπιφάνεια}}$) τάς όποΐας άσυεΐ τό έτερον υλιυόν σύστημα έπί τής έπιφανείας S_s .

Έστω

$$F(x, y, z, t) = \text{σταθ} \quad (5.3.4. \beta)$$

ή έξίσωσις τής έπιφανείας (S_s).

Λαμβάνοντες τήν μοριαυήν παράγωγον τής έξίσωσας (5.3.4. β) προϋπτει ή έξίσωσις

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \text{grad} F = 0}, \quad (5.3.4. \gamma)$$

όπου $\vec{V}$ εΐναι ή ταχύτης σημείου τινός μέ μεταβλητάς EULER.

Η σχέσις αὐτή άποτελεΐ τήν υλασσιυήν διαφοριυήν έξίσωσιν τών συνθηυών εΐς τά όρια, υπό άναλυτιυήν δέ μορφήν γράφεται

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0. \quad (5.3.4. \delta)$$

Αὶ σχέσεις (5.3.4. γ) καί (5.3.4. δ) ίσχύουν καί διά τήν εΐδιυήν περιΰπτωσιν υατά τήν όποΐαν ή έπιφάνεια έπαφής (S_s) εΐναι ή παρειά όοχείου (υινητή ή άυΐνητος), μέ τό όποΐον ό υλικός χῶρος ευΐρίσυεται εΐς έπαφήν.

5.4 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Αὶ άνυέρβλητοι δυσιολΐαι μαθηματιυής έπιλύσας τών προβλημάτων τής μηχανιυής όδήγησαν καί όδηγοῦν εΐς πληθος άπλουστευτιυάς παραδοχάς. Συνήθως δΐδεταί υπό τών μελετητῶν ή συγγραφέων ή εΐδιυή παραδοχή ένός ευάστου θέματος χωρίς σύνδεσμον μέ άλλας περιπτώσεις μέ άποτέλεσμα μΐαν σχετιυήν σύγχυσιν διά τόν έπιθυμοῦντα νά ευλέξη μΐαν νέαν παραδοχήν πρὸς έπίλυσιν ένός θέματος μηχανι-

υής. Έν τούτοις, αϊ πλεΐσται τών χρησιμοποιουμένων παραδοχών άνή-
μουν εΐς δύο γεννάς ιατηγορίας, τήν ανάπτυξιν τών όποιων δίδομεν ια-
τωτέρω:

Σιοπός τής ανάπτυξεως αΐτης εΐναι ή θέσις τών γεννιών βάσεων
του θέματος, διά τών όποιων εύμδλως άντιμετωπίζεται έυ τών υστέρων
τό πρόβλημα έυλογής μιās άπλουστευτιμής όδοϋ διά τήν ύπερπήδησιν
τών μαθηματιών δυσχερεϊών τής μηχανικής τών ρευστών.

5.4.1 Άναγωγή τυχόντων μορφών εΐς γραμμικās

Εΐς τήν μηχανικήν παρατηρούμεν συχνά ότι πλεΐστα φαινόμενα ιι-
νηματιμής, ιινητιμής ή δυναμιμής διαφέρουν πολύ όλίγον μιās είδιμής
ιαταστάσεως του φαινομένου, τήν όποιαν ιαλουΐμεν άδιατάραυτον ιινη-
σιν ιαΐ τής όποιās γνωρίζομεν πλήρως τήν μαθηματιμήν λύσιν. Έξετά-
λομεν ιατ' άρχήν τόν τρόπον έυφράσεως τών έξισώσεων διά τά φαινόμε-
να του τύπου αΐτου, έν συνεχείᾳ δέ λαμβάνομεν τās συνθήμας εΐς τά
όρια.

Έξισώσεις

Έστω μία γνωστή άδιατάραυτος ιΐνησις τής όποιās συμβολίζομεν
διά τών $\varphi_i(M, t)$ τās συναρτήσεις τών δεδομένων, διά τών $X_j(M, t)$ τās
συναρτήσεις τών άγνώστων (ήτοι τās λύσεις), ιαΐ διά τών $f_x(\varphi_i, X_j) = 0$
τās έξισώσεις του φαινομένου τās συνδεούσας δεδομένα ιαΐ άγνώστους.

Εΐσάγομεν τās συναρτήσεις $\varphi_i^*(M, t)$ ιαΐ $X_j^*(M, t)$ ιαΐ έξετά-
λομεν τās συναρτήσεις

$$f_x(\varphi_i + n\varphi_i^*, X_j + nX_j^*). \quad (5.4.1. \alpha)$$

Δεδομένου ότι, έξ όρισμοϋ, ό αριθμός n εΐναι πολύ μιμρός, ιαΐ
ίσχυούσης τής $f_x(\varphi_i, X_j) = 0$, ή συνάρτησις (5.4.1. α) εΐναι άπειροστόν
πρώτης τάξεως ως προς n . Έστω ότι τό ιΐριον μέρος του άπειρο-
στοϋ εΐναι $n f_x^*$. Άπαλείφομεν τούς όρους δευτέρας ιαΐ πλέον τάξε-
ως, ήτοι τούς περιέχοντας δύναμιν του n διάφορον τής μονάδος, έξ οϋ
ή έννοια τής γραμμικής άπλοποιήσεως τών έξισώσεων.

Έξ όρισμοϋ, αϊ έξισώσεις

$$f_x^*(\varphi_i, \varphi_i^*, X_j, X_j^*) = 0 \quad (5.4.1. \beta)$$

άποτελοϋν τήν γραμμικήν προσέγγισιν τών έξισώσεων
του φαινομένου, τό όποϊον διαφέρει πάντοτε πολύ όλίγον τής ά-
διαταράυτου ιινησεως, εΐναι δέ γραμμιαΐ ιαΐ όμογενείς ως προς φ_i^* ιαΐ
 X_j^* .

Όνομάλομεν τās ποσοτήτας nX_j^* , διαταραχήν τής
ιινησεως, αϊ δέ ποσότητες $X_j + nX_j^*$ παριστοϋν τήν δι-
ατεταραγμένην ιΐνησιν.

Συνθήμας εΐς τά όρια

Η γνωστή άδιατάραυτος ιΐνησις έπαληθεϋει ώρισμένας συνθήμας

είς τά όρια, ήτοι είς ώρισμένας έπιφανείας (S) μέ παραμετριάς έξισώσεις

$$X_i = h_i(K_1, K_2, t). \quad (5.4.1. \gamma)$$

Αί συνθήμαι αύται θά είναι έπομένως τής μορφής

$$F[X_j, \varphi_i, \omega(h_i)] = 0. \quad (5.4.1. \delta)$$

Προφανώς $X_j = X_j(K_1, K_2, t)$ καί $\varphi_i = \varphi_i(K_1, K_2, t)$ είναι αί τιμαί τών άγνώστων καί δεδομένων είς τήν έπιφάνειαν (S), καί $\omega(h_i)$ είναι συναρτήσεις έξαρτώμεναι από τήν έπιφάνειαν (S).

Είσαγομεν ως καί προηγουμένως τάς συναρτήσεις

$$\varphi_i^* = \varphi_i^*(K_1, K_2, t), \quad X_j^* = X_j^*(K_1, K_2, t), \quad h_i^* = h_i^*(K_1, K_2, t)$$

καί έξετάζομεν τάς συναρτήσεις

$$F[X_j + nX_j^*, \varphi_i + n\varphi_i^*, \omega(h_i + nh_i^*)] \quad (5.4.1. \epsilon)$$

αί όποίαι έξ ύποθέσεως μηδενίζονται διά $n=0$.

Έστω nF^* τό υύριον μέρος τών (5.4.1.ε) ως πρός n . Έξ όρισμοϋ αί έξισώσεις

$$F^* = F^*(X_j, X_j^*, \varphi_i, \varphi_i^*, h_i, h_i^*) \quad (5.4.1. \zeta)$$

άποτελοϋν τάς συνθήμας είς τά όρια τής γραμμικής προσεγγίσεως τοϋ φαινομένου.

Πρίν δώσωμεν ώρισμένα παραδείγματα έφαρμογής τών άνωτέρω τινόμεν τήν έξής σοβαράν μαθηματικήν έπιφύλαξιν ως πρός τήν μέθοδον αύτήν: Δεδομένων τών συναρτήσεων h_i^* , φ_i^* εύρίσκομεν μίαν σειράν λύσεων X_j^* , έπαληθευουσών τάς (5.4.1.α) καί (5.4.1.ζ). Δέν δύναμεθα όμως νά βεβαιώσωμεν έν τών προτέρων ότι αί λύσεις $X_j + nX_j^*$ προσδιορίζουν, όμοιομόρφως καί δι'όλον τό πεδίο του φαινομένου, τάς γραμμιάς προσεγγίσεις τής άκριβοϋς λύσεως τοϋ φαινομένου, παρ'όλον ότι αί ποσότητες n είναι πολύ μικραί. Θά έπρεπε πρός τοϋτο νά μελετηθοϋν συγχρόνως τά παραλειπόμενα άπειροστά, διότι συχνά, άπειροστά άνωτέρας τάξεως αλλοιώνουν πλήρως τήν λύσιν τών διαφορικών έξισώσεων. Τό πρόβλημα περιπλέκεται οϋτω μαθηματικώς, συνήθως δέ παραλείπεται ή μελέτη αύτή τών "ύπολοίπων" από τούς έρευνητάς. Πλήν όμως, φαίνεται έν νέου ή βασική σημασία τών πειραματικών έφαρμογών δι'έπαλήθευσιν τών θεωρητικών αποτελεσμάτων.

5.4.2 Έφαρμογαί τών γραμμικών προσεγγίσεων

Έφαρμογή 1. Βραδείαι κινήσεις

Έξ όρισμοϋ, θεωροϋμεν ως άδιατάρακτον κίνησιν πάσης βραδείας κινήσεως

τ ή ν ά κ ι ν η σ ι α ν. Κατά συνέπειαν αί συνιστώσαι τής ταχύτητος τής διατεταραγμένης κινήσεως, θά παρασταθοῦν διά nv_i^* . Αί συνιστώσαι τής έπιταχύνσεως, δι' έφαρμογής τών σχέσεων (5.1.3.γ) θά εἶναι

$$n \frac{\partial v_i^*}{\partial t} + n^2 \bar{V}^* \text{grad} v_i^*$$

καί διά τής γραμμικής προσεγγίσεως, γίνονται

$$n \frac{\partial v_i^*}{\partial t} .$$

Αποδεικνύεται δέ εύκόλως ότι εἰς τās βραδείας κινήσεις, διά πᾶν έκ ταυτοδότητος μηδενικόν μέγεθος τής άδιαταράκτου κινήσεως, ή μοριακή παράγωγος αὐτοῦ εἰς τήν διατεταραγμένην γραμμικήν κίνησιν ἰσοῦται μέ τήν μερικήν του παράγωγον ὡς πρός τόν χρόνον.

Εάν γράψωμεν τήν έξισωσιν τής τροχιᾶς σημείου τινός ὑπό τήν μορφήν

$$x_i = x_i^0 + nx_i^*(x_1, x_2, x_3, t), \quad (5.4.2.a)$$

όπου x_i^0 εἶναι ή τετμημένη κατά τήν άρχικήν στιγμήν t_0 , θά ἔχωμεν

$$\frac{dx_i^*}{dt} = \frac{\partial x_i^*}{\partial t} = v_i^*,$$

όποτε

$$x_i^* = \int_{t_0}^t v_i^*(x_1, x_2, x_3, l) dl \quad (5.4.2.β)$$

καί δεδομένου ότι ή διαφορά $(x_i - x_i^0)$ εἶναι άπειροστών, δυνάμεθα νά γράψωμεν τās (5.4.2.a)

$$x_i = x_i^0 + nx_i^*(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t). \quad (5.4.2.γ)$$

Δυνάμεθα έπομένως νά ὑπολογίσωμεν τήν ταχύτητα σημείου τινός M δι' ὑπολογισμόῦ τών nv_i^* εἰς τυχόν σημείον τής τροχιᾶς του, καί όή εἰς τήν άρχικήν θέσιν, διά τήν όποίαν $t = t_0$.

Τό αὐτό ἰσχύει διά πᾶν ἄλλο μέγεθος συνδεδεμένον μέ τό κινούμενον ὑλικόν σημείον M , καί ἔχον τιμήν έκ ταυτοδότητος ἴσην πρός τό μηδέν εἰς τήν άδιατάρακτον κίνησιν.

Ἐξετάζομεν ἐν συνεχείᾳ τὰς ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια.
Ἐστω ὅτι τὸ κινούμενον σύστημα εὐρίσκεται εἰς ἐπαφὴν μὲ κινητὴν πα-
ρειάν, ἐξισώσεως

$$x_3 = nh^*(x_1, x_2, t,$$

Συμφώνως πρὸς τὴν γενικὴν θεωρίαν τῶν συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια, πα-
ράγραφος (5.3.4) θὰ ἰσχύῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἢ σχέσις

$$\frac{d}{dt}(nh^* - x_3) = n \frac{\partial h^*}{\partial t} + n^2 \left(v_1^* \frac{\partial h^*}{\partial x_1} + v_2^* \frac{\partial h^*}{\partial x_2} \right) - n v_3^*(x_1, x_2, nh^*, t) = 0,$$

ἢ ὅποια δι' ἀναγωγῆς εἰς γραμμικὴν μορφήν γίνεταί

$$v_3^*(x_1, x_2, 0, t) = \frac{\partial}{\partial t} h^*(x_1, x_2, t), \quad (5.4.2.δ)$$

ἀποτελεῖ δὲ τὴν τελικὴν συνθήκην, μὲ ὅριον κινητὴν παρειάν, διὰ τὴν
διατεταραγμένην κίνησιν.

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ἀδιαταράκτου κινήσεως, ἡ συνθήκη γί-
νεται

$$x_3 = 0.$$

Ἐφαρμογὴ 2. Κινήσεις παραπλήσιαι τῆς ὁμοιομόρφου κινήσεως

Ἐξ ὑποθέσεως, ὡς ἀδιατάρακτος θεωρεῖται ἡ ὁμοιομορφος κίνησις
μὲ πεδίον ταχυτήτων

$$v_1 = V_0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

Ἡ διατεταραγμένη κίνησις θὰ ἔχῃ τότε ὡς πεδίον ταχυτήτων

$$V_0 + n v_1^*, \quad n v_2^*, \quad n v_3^*.$$

Αἱ συνιστώσαι τῆς ἐπιταχύνσεως, κατόπιν τῶν ἀπλοποιήσεων λόγῳ
γραμμικῆς προσεγγίσεως, γίνονται

$$n \left(\frac{\partial v_1^*}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1} \right) \quad (5.4.2.ε)$$

καὶ γενικώτερον, ἡ μοριακὴ παρὰγωγὸς μεγέ-
θους τινος, μὲ μηδενικὴν μοριακὴν πα-
ρὰγωγὸν εἰς τὴν ἀδιατάρακτον κίνησιν,

5.4 Γενναίαι ἐξισώσεις τῆς μηχανικῆς τῶν συνεχῶν ὑλικῶν χώρων 73

εὐρίσκεται ὁ ἔφαρμογῆς τοῦ ἔκτελε-
στοῦ $\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$.

Ἐάν γράψωμεν τὰς γραμμικὰς προσεγγίσεις τῶν ἐξισώσεων τῶν γραμμῶν ροῆς κατὰ τὴν ὠρισμένην στιγμὴν t_1 , ὑπὸ τὴν μορφήν

$$x_2 = n\varphi_1(x_1) + x_2^0, \quad x_3 = n\varphi_2(x_1) + x_3^0,$$

προκύπτει ἀμέσως ὅτι

$$V_0 \frac{d\varphi_1}{dx_1} = v_2^*(x_1, x_2^0, x_3^0, t_1), \quad (5.4.2.ζ)$$

$$V_0 \frac{d\varphi_2}{dx_2} = v_3^*(x_1, x_2^0, x_3^0, t_1).$$

Ἀποδείκνυται, ὅτι αἱ τροχιαεὶ δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$x_1 = x_1^0 + V_0 t + n \int_{t_0}^t v_1^*(x_1^0 + V_0 s, x_2^0, x_3^0, s) ds,$$

$$x_2 = x_2^0 + n \int_{t_0}^t v_2^*(x_1^0 + V_0 s, x_2^0, x_3^0, s) ds, \quad (5.4.2.η)$$

$$x_3 = x_3^0 + n \int_{t_0}^t v_3^*(x_1^0 + V_0 s, x_2^0, x_3^0, s) ds.$$

Τέλος, διὰ τὰς αὐτὰς μὲ τὴν προηγουμένην παραγράφον συνθήκας ὁρίων, ἡ σχέση $\frac{d}{dt}(nh^* - x_3) = 0$ ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$v_3^*(x_1, x_2, 0, t) = \frac{\partial h^*}{\partial t}(x_1, x_2, 0, t) + V_0 \frac{\partial h^*}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0, t). \quad (5.4.2.θ)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἀνάγεται διὰ τὴν ἀδιατάρακτον κίνησιν εἰς

$$x_3 = 0.$$

5.4.3 Γεωμετρικαί άπλοποιήσεις ύλικών συστημάτων

Ο δεύτερος αυτός τύπος άπλοποιήσεως, τελείως διάφορος του πρώτου, ανάγεται εις άπλουστευτικιάς παραδοχάς ως προς τό γεωμετρικόν σχήμα τών ύλικών συστημάτων. Κατά ιανόνα εφαρμόζεται εις τάς περιπτώσεις όπου αι δύο διαστάσεις ενός ύλικού συστήματος εΐναι λίαν περιωρισμέναί έν σχέσει μέ τήν τρίτην διάστασιν. Τό ύλικόν σύστημα δύναται τότε νά θεωρηθῇ ως ύλική ιαμπύλη C , τής οποίας τά σημεία M προσδιορίζονται από τήν ιαμπυλόγραμμον συντεταγμένην z .

Η έπίλυσις γεννυών έξιώσεων μετά τήν άπλουστευτικίην αυτήν παραδοχήν έπιτυγχάνεται σχετικώς άπλά εις τάς περισσότερας τών περιπτώσεων.

Κλασσικόν παράδειγμα αυτού του τύπου άπλοποιήσεως άποτελεΐ ο προσδιορισμός τών έσωτερικών δυνάμεων ράβδου ύποκειμένης εις έξωτερικιάς ιαταπονήσεις. Δέν ύπεισερχόμεθα εις τό θέμα αυτό ιαθ' ότι άποτελεΐ άντιειμένον τής θεωρητικῆς ιαί έφηρμοσμένης στατικῆς. Άναφέρομεν άπλως ότι εις τήν μηχανικήν τών ρευστών συναντῶνται τελείως άνάλογοι περιπτώσεις, άπλοποιήσεως τών γεννυών έξιώσεων, ως εΐναι η έφαρμογή του θεωρήματος BERNOLLI εις δίπτυον ιλειστών άγωγών, υπό πίεσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6.

ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΣ ΝΟΜΟΙ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

6.1 ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΒΑΘΜΙΔΟΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΤΑΝΥΣΤΗΣ $\text{grad } \vec{V}$

Είς τήν παράγραφον (2.1.2) δίδεται ἡ ἔννοια τῆς βαθμίδος, ἥτις εἶναι συνάρτησις διανυσματικῆ συνδεομένη ἐξ ὁρισμοῦ μέ μιάν βαθμωτὴν συνάρτησιν φ , διὰ τῆς σχέσεως

$$\lim_{M' \rightarrow M} [\varphi(M') - \varphi(M)] = \vec{MM'} \text{grad} \varphi,$$

ἢ ἀπλούστερον

$$d\varphi = \vec{ds} \text{grad} \varphi.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἐυτελεστής $\text{grad} \varphi$, ἀντιστοιχίει εἰς ἓν ἔυαστον διάνυσμα $\vec{ds}$ μιάν βαθμωτὴν συνάρτησιν $d\varphi$, ἥτις ἀποτελεῖ τὸν ἓνα ἐκ τῶν δύο παραγόντων συσταλέντος τανυστικοῦ γινομένου, τὸ ὁποῖον, δεδομένου ὅτι τὸ διάνυσμα $\text{grad} \varphi$ εἶναι τανυστῆς πρώτης τάξεως, εἶναι τὸ γνωστὸν ἑσωτερικὸν γινόμενον.

Δι' ἐπευτάσεως τῆς ἐννοίας τῆς βαθμίδος $\text{grad} \varphi$, θεωροῦμεν μιάν διανυσματικὴν συνάρτησιν $\vec{V}(M)$, ὁρίζομεν δέ ὡς βαθμίδα τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου $\vec{V}(M)$ τὸν τανυστὴν δευτέρας τάξεως $\text{grad} \vec{V}$, ὁ ὁποῖος, διὰ συσταλέντος τανυστικοῦ γινομένου, ἀντιστοιχίει εἰς ἓν ἔυαστον διάνυσμα $\vec{ds}$, ἓν ἄλλον διάνυσμα $d\vec{V}$.

Τὰ ἀνωτέρω ἐμφράζονται ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\lim_{M' \rightarrow M} [\vec{V}(M') - \vec{V}(M)] = \vec{M'M} \text{grad} \vec{V},$$

ή

$$d\vec{V} = d\vec{s} \text{grad} \vec{V}. \quad (6.1. a)$$

Ο τανυστής $\text{grad} \vec{V}$ έχει συνιστώσας $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ αΐτινες δίδονται αναλυτικώς από τό μητρώον

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Τόν τανυστήν $\text{grad} \vec{V}$ αναλύομεν εἰς τό συμμετρίκον καί ἀντισυμμετρίκον τμήμα του [σχέσεις (2.2.4.ζ), (2.2.4.θ) καί (2.2.4.υ)], ὅτε προκύπτει

$$\text{grad} \vec{V} = (\text{grad} \vec{V})_s + (\text{grad} \vec{V})_a,$$

ἐνθα

$$\text{συντεταγμέναι τοῦ } (\text{grad} \vec{V})_s : \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

$$\text{συντεταγμέναι τοῦ } (\text{grad} \vec{V})_a : \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

6.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΑΝΥΣΤΟΥ ΤΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΣ

Ὁ προσδιορισμός τῶν παραμορφώσεων ἐνός ὑλικοῦ συστήματος εἶναι ἐν γένει δυνατόν νά ἐπιτευχθῇ δι' ἐνός μεγέθους, τό ὁποῖον νά ἐμφανίζη τās ἐξῆς δύο ιδιότητες:

α) Εἰς ἐν ἑαστον σημεῖον τοῦ ὑλικοῦ χώρου νά ὑπάρχη μία καί μόνη προσδιορισμένη τιμή τοῦ μεγέθους, συνδεομένη μέ τήν μετατόπισιν τοῦ σημείου.

β) Νά γίνεται ἐν ταυτότητος ἴσον μέ τό μηδέν εἰς τήν περίπτωσιν τῶν τελείων στερεῶν.

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά δείξωμεν διά δύο διαφόρων μεθόδων ὅτι ὡς ζητούμενον μέγεθος δύναται νά ληφθῇ ὁ συμμετρίυός τανυστής $(grad \vec{V})_s$, ἔνθα $\vec{V}(M)$ εἶναι τό τυχόν διάνυσμα τοῦ πεδίου ταχυτήτων τοῦ ὑλικοῦ συστήματος (ἴδε 3.1), διότι ἀνταποκρίνεται εἰς ἀμφοτέρας τās προαναφερθεῖσας ιδιότητες.

Τόν τανυστήν $(grad \vec{V})_s$ καλοῦμεν τανυστήν τῶν ταχυτήτων παραμορφώσεως.

6.2.1 Γεωμετρική μέθοδος

Ἀπό γεωμετρικῆς ἀπόψεως χαρακτηριζόμενον, ἐν τέλειον στερεόν διατηρεῖ κατά τήν κίνησίν του σταθεράς τās ἀποστάσεις μεταξύ δύο διαφόρων σημείων του M καί M' .

Ἐστω C τυχούσα καμπύλη ἐντός τοῦ στερεοῦ. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τό τυχόν σημεῖον αὐτῆς M , ἐάν λάβωμεν ὡς ἄξονα συντεταγμένων l αὐτήν ταύτην τήν καμπύλην, θά εἶναι

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial l}$$

καί διά νά εἶναι τό στερεόν τέλειον, πρέπει τό διάνυσμα $\vec{u}$ νά παραμένῃ ἐφαπτόμενον εἰς τό σημεῖον M κατά τήν κίνησίν του, ἥτοι πρέπει νά ἰσχύῃ ἡ σχέση

$$\vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt} = 0.$$

Δεδομένου ὅτι αἱ μεταβληταί l καί t , εἶναι ἀνεξάρτητοι, θά ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial l} \right) = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{d\vec{s}}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial l} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{|MM'|} grad \vec{V} = \vec{u} grad \vec{V} \quad (6.2.1.a)$$

καί δι' ἀντιματαστάσεως θά ἔχωμεν

$$|\vec{u}|^2 grad \vec{V} = 0. \quad (6.2.1.β)$$

Τό πρῶτον μέλος τῆς (6.2.1.β) εἶναι ἡ δευτεροβάθμιος μορφή, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τόν τανυστήν $(grad \vec{V})_s$ καί διά νά εἶναι μηδενική διά πᾶσαν τιμήν τοῦ $|\vec{u}|$, δεόν ὁ τανυστής $(grad \vec{V})_s$ νά εἶναι ἐν ταυτότητος μηδέν. Εἶναι ἐπομένως δυνατόν ὁ τανυστής αὗτός νά χαρακτηρίσῃ ἀνά πᾶσαν στιγμὴν τήν παραμόρφωσιν τοῦ τυχόντος σημείου M , ἥτοι νά ληφθῇ ὡς τανυστής τῶν ταχυτήτων παραμορφώσεως.

6.2.2 Κινηματική μέθοδος

Ἐν τέλειον στερεόν χαρακτηρίζεται κινηματικῶς διὰ τῆς σχέσεως (3.1.β), ἰσχυοῦσης διὰ τυχόντα σημεῖα M καὶ M' , καὶ κατὰ τὴν δεδομένην στιγμήν t , κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ διάνυσμα $\vec{\omega}$ εἶναι σταθερόν καὶ ἀνεξάρτητον τῶν σημείων M καὶ M' , ἥτοι

$$\vec{V}(M') - \vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'} . \quad (6.2.2.a)$$

Συγκρίνοντας τὰς σχέσεις (6.2.2.a) καὶ (6.1.a) προκύπτει ὅτι

$$d\vec{V} = \vec{\omega} \wedge d\vec{s} = \text{grad} \vec{V} d\vec{s} .$$

Στηριζόμενοι εἰς τὴν ιδιότητα (2.2.4.ε) τοῦ ἔξωτερικοῦ γινομένου συνάγομεν ὅτι, ἐάν αἱ συνιστώσαι τοῦ διανύσματος $\vec{\omega}$ εἶναι ω_{32} , ω_{13} , ω_{21} , ὁ τανυστής $\text{grad} \vec{V}$ εἶναι ἀντισυμμετρικὸς καὶ ἔχει συνιστώσας

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{21} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & -\omega_{32} \\ -\omega_{13} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} .$$

Μέ ἄλλους λόγους εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ τελείου στερεοῦ ὁ τανυστής $(\text{grad} \vec{V})_e$ γίνεται ἐν ταυτότητος μηδέν, ὁ δὲ τανυστής $(\text{grad} \vec{V})_e$ ἔχει σταθεράς συνιστώσας διὰ μίαν δεδομένην στιγμήν t . Καταλήγομεν ἐπομένως εἰς ἀποτέλεσμα ἀνάλογον μέ τὸ τῆς προηγουμένης παραγράφου.

6.3 ΦΥΣΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΝ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Ἡ μελέτη τῶν κεφαλαίων 4. καὶ 5. καὶ εἰδικώτερον τῶν σχέσεων (4.4.δ) καὶ (5.3.1.α) δεκνύει τὴν ἀνεπάρκειαν τῶν γενικῶν ἐξισώσεων διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τῆς μηχανικῆς. Ἡ ἀνεπάρκεια αὐτῇ ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονός ὅτι δέν ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν αἱ φυσικαὶ ιδιότητες, ἥτοι ἡ "συμπεριφορὰ" τῶν ἐιδόστοτε ἐξεταζομένων ὑλικῶν χώρων. Μία λεπτομερὴς πειραματικὴ ἐξέτασις τῆς φυσικῆς συμπεριφορᾶς τῶν διαφόρων ὑλικῶν χώρων ἐναντι τῶν δυναμικῶν καταπονήσεων εἰς τὰς ὁποίας ὑπόκεινται, ἐπιτρέπει τὴν ἔκφρασιν μαθηματικῶν σχέσεων, αἵτινες συνδέουν τὰ ἀποτελέσματα, δηλαδὴ τὰς παραμορφώσεις τῶν ὑλικῶν χώρων, μέ τὰ αἷτια, δηλαδὴ τὰς τάσεις αἱ ὁποῖαι τὰς προ-υαλοῦν.

Αἱ μαθηματικαὶ αὐταὶ σχέσεις ὀνομάζονται νόμοι συμπεριφορᾶς, ἢ νόμοι τάσεων-παραμορφώσεων, τῶν συν-

εχών ύλιων χώρων.

Θά έξετάσωμεν έν συνεχείᾳ τήν μορφήν τῶν νόμων αὐτῶν διά τήν περὶ τῆς τῶν ρευστῶν, ὡς αὐτά ὠρίσθησαν εἰς τήν παράγραφον (1.2).

Ἡ υατάστασις τῶν παραμορφώσεων τυχόντος ρευστοῦ προσδιορίζεται ἐξ ὁρισμοῦ ἀπό τόν τανυστήν ταχυτήτων παραμορφώσεως ($grad \vec{V}$). Ἐπομένως οἱ νόμοι τάσεων-παραμορφώσεων δέον νά συνδέουν ἀνά πᾶσαν στιγμήν καί διά πᾶν σημεῖον, τόν τανυστήν ($grad \vec{V}$) μέ τόν τανυστήν τῶν τάσεων τῆς παραγράφου (4.3), ἡ δέ σύνδεσις δέον νά εἶναι μονοσήμαντος.

6.4 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Διά τήν έν συνεχείᾳ μελέτην τῶν νόμων συμπεριφορᾶς διαφαινομένη ἐξ ὁρισμοῦ τά ρευστά εἰς δύο μεγάλας κατηγορίας, ἥτοι τά υλασσιμᾶ ἢ συνήθη καί τά μή υλασσιμᾶ ρευστά.

6.4.1 Κλασσικά ἡ συνήθη ρευστά

Ἐξ ὁρισμοῦ, εἰς τήν κατηγορίαν αὐτήν ἀνήκουσιν τά ρευστά ποῦ ικανοποιοῦν τάς ὑποθέσεις τῆς γραμμικότητος, ὁμογενείας καί ἰσοτροπίας, ὡς θά τάς ἐκθέσωμεν έν συνεχείᾳ.

Τά πλεῖστα τῶν ρευστῶν καί ὅλα τά συνήθη ἀέρια δύνανται μέ ἀρίστην προσέγγισιν νά συμπεριληφθοῦν εἰς τήν κατηγορίαν αὐτήν. Αἱ ὑποθέσεις αὐταί στηρίζονται εἰς τά πειράματα τοῦ COULOMB, ὁ ὁποῖος πρῶτος ἀπέδειξε ὅτι αἱ δυνάμεις τοῦ " ἰξώδους " εἶναι συναρτήσεις ὁμογενεῖς καί γραμμικαί τῶν ταχυτήτων παραμορφώσεως.

Γραμμικότης: Ὁ τανυστής τῶν τάσεων εἶναι συνάρτησις γραμμική καί μή ὁμογενής τῶν τανυστοῦ τῶν παραμορφώσεων. Ἦτοι, ἀναλυτικῶς, αἱ σχέσεις αἱ ἐμφράζουσαι τάς συντεταγμένας σ_{ij} συναρτῆσαι τῶν ε_{ij} εἶναι συναρτήσεις γραμμικαί ἀλλῶ ὄχι ὁμογενεῖς.

Ὁμογένεια: Ὁ νόμος τάσεων-παραμορφώσεων εἶναι ἐνιαῖος δι' ὅλον τόν ὑπό τοῦ ρευστοῦ κατεχόμενον χῶρον. Οὕτω, τό μῆγμα ὕδατος-σταγονιδίων ἐλαίου δέν εἶναι ὁμογενές, διότι ἰσχύει ἄλλος νόμος τάσεων-παραμορφώσεων διά τά σημεῖα τοῦ χῶρου τά κατεχόμενα ὑπό τῶν σταγονιδίων τοῦ ἐλαίου.

Ἰσοτροπία: Ἡ φυσική ἔννοια τοῦ ἰσοτρόπου ρευστοῦ ἐρμηνεύεται ἀπό τό γεγονός ὅτι, ἀπό ἀπόψεως μηχανικῆς συμπεριφορᾶς, δηλαδή τάσεων, τό ρευστόν δέν παρουσιάζει προνομιοῦχας διευθύνσεις.

Μαθηματικῶς, ἡ ἰσοτροπία ἐμφράζεται ἀπό τό ὅτι ἀφ' ἑνός μέν, ἕναστον ὑρίον σύστημα ἀξόνων τοῦ τανυστοῦ τῶν τάσεων εἶναι καί ὑρίον σύστημα ἀξόνων τοῦ τανυστοῦ τῶν παραμορφώσεων, ἀφ' ἑτέρου δέ ὅτι διά πᾶν τοιοῦτον ὑρίον σύστημα ἀξόνων ὁ νόμος τάσεων-παραμορφώσεων γράφεται

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i, \varepsilon_x, \varepsilon_y), \quad (6.4.1. \alpha)$$

ὅπου i, x, y εἶναι μία μετάθεσις τῶν δευτῶν 1, 2, 3, ἡ δέ συνάρτησις $f(\varepsilon_i, \varepsilon_x, \varepsilon_y)$ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς δύο τελευταίας μεταβλητάς, ἥτοι

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_x, \varepsilon_y) = f(\varepsilon_i, \varepsilon_y, \varepsilon_x).$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων γραμμιότητος καὶ ἰσοτροπίας, διὰ τυχόν σημεῖον M καὶ ὡς πρὸς ὑῤῃριον σύστημα ἀξόνων, αἱ ἀάθετοι ὑῤῃραι τάσεις σ_i εἶναι γραμμικαὶ συναρτήσεις τῆς μιᾶς ὑῤῃρας τιμῆς μοναδιαίας ἐπιμηκύνσεως ε_i καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἥτοι τῆς μιᾶς ε_i καὶ τῆς πρώτης στοιχειώδους ἀναλλοιώτου

$$E = 3e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

τοῦ τανυστοῦ $(grad \vec{V})_e$, ὁπότε θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$\sigma_i = \bar{\sigma} + 3\bar{\eta}e + 2\mu\varepsilon_i, \quad (6.4.1. \beta)$$

ἐνθα $\bar{\eta}$ καὶ μ εἶναι συντελεσταὶ καλούμενοι συντελεσταὶ τοῦ LAMÉ.

Αἱ σχέσεις (6.4.1. β) ἐμφράζουν τὸν νόμον τάσεων-παραμορφώσεων ἐνός υλασσιμοῦ ρευστοῦ ὡς πρὸς ὑῤῃριον σύστημα ἀξόνων.

Εἰσάγοντες τὰ σφαιρικὰ τμήματα καὶ τοὺς ἐντροπεῖς τῶν τανυστῶν, θὰ ἔχωμεν ὡς πρὸς τυχόν σύστημα ἀξόνων

$$s = \bar{\sigma} + (3\bar{\eta} + 2\mu)e, \quad s_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (6.4.1. \gamma)$$

Δεδομένου δέ ὅτι

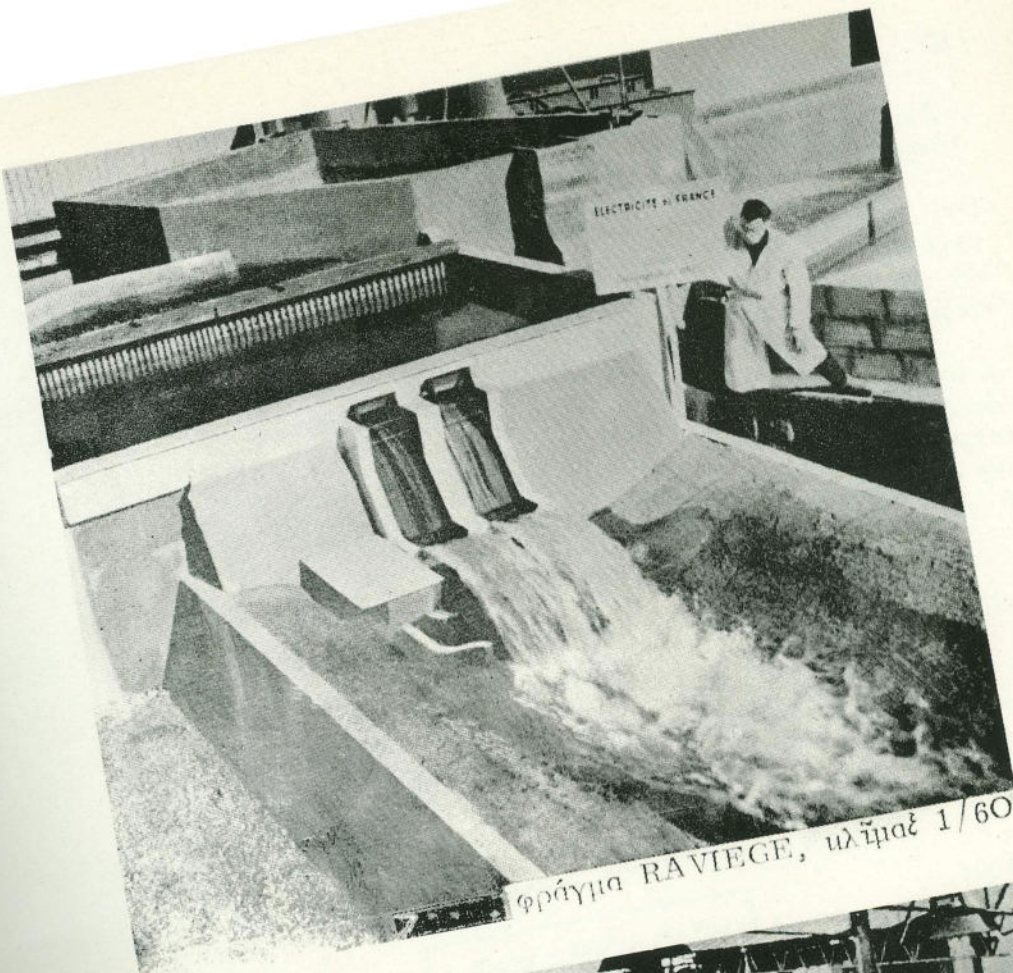
$$\sigma_{ij} = s\delta_{ij} + s_{ij}$$

(ἐνθα $\delta_{ij} = 0$ διὰ $i \neq j$ καὶ $\delta_{ij} = 1$ διὰ $i = j$, δηλαδή ὁ δ_{ij} εἶναι ὁ τανυστής τοῦ KRONECKER), θὰ ἔχωμεν

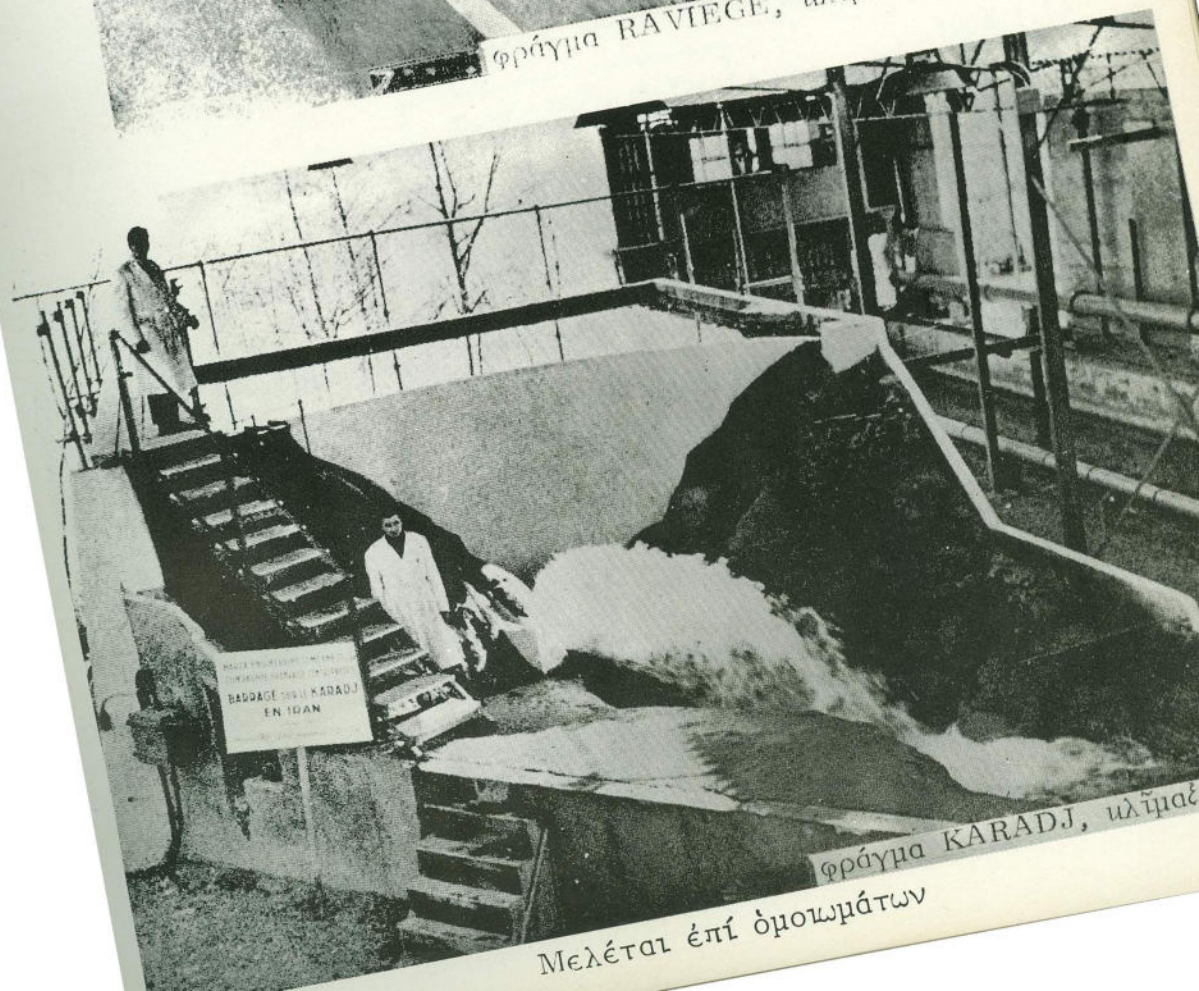
$$\sigma_{ij} = s\delta_{ij} + s_{ij} = (\bar{\sigma} + 3\bar{\eta}e)\delta_{ij} + 2\mu(e\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}),$$

ἢ

$$\sigma_{ij} = (\bar{\sigma} + \bar{\eta}\varepsilon_{xx})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (6.4.1. \delta)$$



φράγμα RAVIEGE, κλίμακ 1/60



φράγμα KARADJ, κλίμακ 1/60

Μελέται επί όμοιωμάτων

Αἱ σχέσεις (6.4.1.δ) ἐμφράζουν τόν νόμον τάσεων-παραμορφώσεων ἐνός υλασσιμοῦ ρευστοῦ ὡς πρός ἓν τυχόν σύστημα ἀξόνων.

Ἡ ὑπόθεσις τοῦ ὁμογενοῦς ρευστοῦ μαθιστᾷ τά βαθμωτά μεγέθη ϑ , λ , μ , ἀνεξάρτητα τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου M . Ἐνδεχομένως τά μεγέθη αὐτά νά ἐξαρτῶνται ἀπό τήν φυσικήν κατάστασιν τοῦ ρευστοῦ, ἥτοι τήν πυκνότητα ρ , καί τήν θερμικότητα T .

Εἰς τήν περίπτωσιν ρευστοῦ ἐν ἰσορροπία ὡς πρός ἓν ὠρισμένον σύστημα ἀξόνων, αἱ συντεταγμέναι ε_{ij} ὡς πρός τό αὐτό σύστημα ἀξόνων εἶναι μηδενισαί, (ὅποτε ὁ τανυστής τῶν τάσεων γίνεται σφαιρικός ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = s$)) καί ἐξαρτῶνται μόνον ἀπό τό βαθμωτόν μέγεθος ϑ , ὡς προκύπτει δι' ἐφαρμογῆς τῆς (6.4.1.δ). Θά προκύψῃ ἐπομένως ἡ σχέση

$$\sigma_{ij} = \vartheta \delta_{ij} . \quad (6.4.1.ε)$$

Ἐν τῆς ἐμπειρίας γνωρίζομεν ὅτι ἐν ρευστόν ἐν ἰσορροπία δέχεται μόνον συμπίεσεις. Θετόμεν ἐπομένως ἐν γένει $\vartheta = -p$ ὅπου p εἶναι θετικόν βαθμωτόν μέγεθος, καλούμενον πίεσις τοῦ ρευστοῦ εἰς τό σημεῖον M .

Ἡ σχέση (6.4.1.δ) γράφεται τότε

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} , \quad (6.4.1.ζ)$$

ὅπου

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{xx} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} . \quad (6.4.1.η)$$

Εἰσάγομεν οὕτως ἕναν νέον τανυστήν, μέ συντεταγμέναις τ_{ij} , τόν ὁποῖον καλοῦμεν τανυστήν τῶν τάσεων τοῦ ἰζώδους τοῦ ρευστοῦ.

Ἐπὶ τῆς φυσικῆς ἐννοίας τοῦ ἰζώδους θά ἐπανέλθωμεν ἐν ἐντάσει εἰς τό ἐπόμενον κεφάλαιον.

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τά ἀσυμπιεστά ρευστά θά ἰσχύῃ

$$\varepsilon_{xx} = \operatorname{div} \vec{V} = 0 ,$$

ὅποτε ἡ σχέση (6.4.1.η) γίνεται

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}$$

καί ἐμφράζει ὅτι ὁ τανυστής τῶν τάσεων τοῦ ἰζώδους εἶναι ἀνάλογος τοῦ τανυστοῦ τῶν παραμορφώσεων, ἰσοῦνται δέ ἐν ταυτότητος μέ τόν ἐντροπία τοῦ τανυστοῦ τῶν τάσεων.

Τέλος εἰς τήν περίπτωσιν ἀμελητέας ἐπιρροῆς τοῦ ἰζώ-

δους λέγομεν ότι τό ρευστόν είναι τέλειον. Ἐπί τῆς ἐννοίας τοῦ τελείου ρευστοῦ θά ἐπανέλθωμεν κατωτέρω ἐν ἐντάσει. Ἀπλῶς ἀναφέρομεν ὅτι διὰ τέλειον ρευστόν τὰ μεγέθη λ καί μ γίνονται μηδενικά, ὁ δέ νόμος τάσεων-παραμορφώσεων λαμβάνει τήν μορφήν τοῦ νόμου τῶν ρευστῶν ἐν ἰσοτροπίᾳ, ἥτοι

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (6.4.1.\theta)$$

6.4.2 Μὴ κλασσικὰ ρευστὰ

Αἱ τελευταῖαι ἐξελίξεις τῆς τεχνικῆς εἰς τόν τομέα τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν καί τῆς μαγνητοϋδροδυναμικῆς ὠδήγησαν εἰς τήν χρῆσιν ρευστῶν διὰ τὰ ὁποῖα αἱ ὑποθέσεις τῶν υλασσιμῶν ρευστῶν δέν ἐπαληθεύονται μέ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν. Εἰς πολλάς περιπτώσεις, τό ἴδιον ρευστόν ἱκανοποιεῖ πλήρως μίαν προσεγγιστικὴν ὑπόθεσιν δι' ἓναν ὠρισμένον υῦλον φαινομένων, ἐνῶ ὁδηγεῖ τήν θεωρίαν εἰς ἀπαράδεκτα σφάλματα διὰ τήν αὐτὴν ὑπόθεσιν καί δι' ἄλλον υῦλον φαινομένων.

Ὡς χαρακτηριστικὸν παράδειγμα ἀναφέρομεν τήν ὑπόθεσιν τοῦ ἀσυμπίεστου ρευστοῦ διὰ τό ὕδωρ. Εἰς τὰ φαινόμενα ροῆς εἰς ἀνοικτούς ἀγωγούς, ὑπερχειλιστάς κ.λπ., ἡ ὑπόθεσις αὕτῃ εἶναι ἀπολύτως παραδευτὴ καί ἡ πρᾶξις ἐπαληθεύει πλήρως τὰς διαφόρους θεωρίας τῶν ἀνοικτῶν ἀγωγῶν. Ἀντιθέτως, εἰς τὰ φαινόμενα πλήγματος υἱοῦ διὰ τοὺς ἀγωγούς ὑπὸ πίεσιν, ἡ συμπεστικότητα τοῦ ὕδατος παίζει τὸν θεμελιώδη ρόλον εἰς τήν διάδοσιν τῶν κυμάτων καί τήν ἐν γένει ἐξέλιξιν τῶν φαινομένων.

Λόγῳ τῆς τελείως εἰδιωκῆς μορφῆς τῶν φαινομένων εἰς τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται μὴ υλασσιμὰ ρευστὰ, δέν ὑπαισερχόμεθα εἰς τοὺς διαφορικούς νόμους τάσεων-παραμορφώσεων, οἵτινες τὰ διέπουν.

Ἀναφέρομεν πάντως ὑπὸ μορφήν παραδείγματος τήν περίπτωση ἄσυμπίεστου ρευστοῦ, ἱκανοποιούντος τὰς ὑποθέσεις γραμμικότητος καί ἰσοτροπίας καί διὰ τό ὁποῖον οἱ νόμοι τάσεων-παραμορφώσεων ἐμφράζονται κατ' ἀρχὴν ἀπὸ τὰς σχέσεις (6.4.1.ζ) καί (6.4.1.η) μέ συντελεστήν $\lambda=0$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅμως ὅτι ὁ συντελεστής μ δέν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τήν φυσικὴν κατάσταση τοῦ ρευστοῦ, ἀλλὰ ἐπὶ πλέον εἶναι συνάρτησις τοῦ τανυστοῦ τῶν παραμορφώσεων.

Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως τῆς ἰσοτροπίας, ὁ συντελεστής μ θά εἶναι συνάρτησις μόνον τῶν δύο στοιχειωδῶν ἀναλλοιώτων E_2 καί E_3 τοῦ τανυστοῦ τῶν παραμορφώσεων, δεδομένου ὅτι $E_1 = \text{div } \vec{V} = 0$.

Αἱ σχέσεις (6.4.1.ζ) καί (6.4.1.η) δέον ὅπως ὑποστοῦν μετασχηματισμούς, ἀναλόγως τῆς φύσεως τοῦ συντελεστοῦ μ , ἡ τελικὴ δὲ μορφή των θά ἀποτελῇ τὰς σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων μιᾶς εἰδιωκῆς περιπτώσεως ἐνός μὴ υλασσιμοῦ ρευστοῦ.

6.5 ΤΕΛΙΚΑΙ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΙΣ ΑΥΤΩΝ

Ἐξ ὅλων τῶν προαναφερθέντων δυνάμεθα νά συνοψίσωμεν ὅτι εἰς τήν μηχανικήν τῶν συνεχῶν ὑλικῶν χώρων, καί ἐπομένως καί εἰς τήν μηχανικήν τῶν ρευστῶν, ἔχομεν τās ἐξῆς τρεῖς κατηγορίας ἐξισώσεων:

α) Θεμελιώδεις ἐξισώσεις. Πρόκειται περί τῶν ἐξισώσεων καί συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια τῶν τριῶν πρώτων παραγράφων τοῦ κεφαλαίου 5.(5.1, 5.2, 5.3).

Ἐφαρμόζονται εἰς πᾶσαν θεωρίαν μηχανικῆς τῶν ρευστῶν, ὑφιστάμεναι βεβαίως τās σχετιᾶς ἀπλοποιήσεις, λόγῳ τῶν εἰδιῶν συνθηκῶν.

β) Νόμοι τάσεων-παραμορφώσεων. Πρόκειται περί τῶν νόμων ποῦ ἐμφράζονται ἀπό τās ἐξισώσεις τῆς παραγράφου (6.4.1).

Ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῶν μετατρέπονται αἱ τρεῖς θεμελιώδεις ἐξισώσεις ἐν τοῦ νόμου τῆς δυναμικῆς, δι' ἀντιματαστάσεως τῶν ἀγνώστων ἐσωτερικῶν τάσεων μέ τās γνωστὰς τιμὰς τῶν παραμορφώσεων. Ἐν σημείον σοβαρᾶς σημασίας ὡς πρὸς τὰ ἀποτελέσματα εἶναι ἡ εἰσαγωγή νέων συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια, λόγῳ ἀκριβῶς τῶν σχέσεων τάσεων-παραμορφώσεων. Εἰς τήν μελέτην τῶν ρευστῶν μέ ἰξῶδες θά συναντήσωμεν ἓν κλασικόν παράδειγμα νέας συνθήκης ὁρίων.

γ) Νόμοι κινησεως. Οἱ νόμοι τάσεων-παραμορφώσεων εἰσάγουν ὁρισμένα νέα μεγέθη, ὡς τὰ ρ , λ , μ , μὴ σταθερά ἐν γένει ἀλλὰ ἐξαρτώμενα ἀπὸ τήν φυσικὴν κατάσταση τοῦ ρευστοῦ, ἥτοι ἀπὸ μεγέθη ὡς ἡ πυκνότης ρ καί ἡ θερμοκρασία T . Αἱ σχέσεις αἱ ἐμφράζουσαι αὐτήν τήν ἐξάρτησιν λαμβάνουν γενικῶς τήν ὀνομασίαν: "Νόμοι κινησεως".

Ὡς παράδειγμα ἀναφέρομεν τήν περίπτωσιν τῶν ἀσυμπίεστον ἰξωδῶν ρευστῶν, εἰς τὰ ὁποῖα θεωροῦνται σταθεραὶ αἱ ποσότητες ρ , λ , μ . Αἱ ἀπλαῖ αὐταὶ ὑποθέσεις ἀποτελοῦν καί τοὺς νόμους κινησεως τῆς εἰδικῆς αὐτῆς περιπτώσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7.

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΙΞΩΔΟΥΣ ΚΑΤΑΤΑΞΙΣ ΤΩΝ ΥΠΟ ΜΕΛΕΤΗΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Ἡ ἔννοια τοῦ ἰξώδους εἰσήχθη τό πρῶτον εἰς τήν παράγραφον (6.4.1).

Ἀπό φυσικῆς ἀπόψεως ἐξεταζόμενον, τό ἰξῶδες χαρακτηρίζει τήν ἐσωτερικὴν τριβὴν τοῦ ρευστοῦ, ἥτοι τήν ἀντίστασίν του εἰς τὰς παραμορφώσεις καί τήν σχετικὴν μετατόπισιν τῶν διαδοχικῶν ρευστῶν στοιβάδων.

Πρῶτος ὁ COULOMB ἀπέδειξεν πειραματικῶς, ὅτι διὰ τὰ υἱασσιμὰ ρευστά, ὡς ὠρίσθησαν εἰς τήν παράγραφον (6.4.1), αἱ δυνάμεις τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς των, δηλαδή αἱ δυνάμεις τοῦ ἰξώδους, εἶναι συναρτήσεις γραμμικαί καί ὁμογενεῖς τῶν ταχυτήτων παραμορφώσεως.

Πρό αὐτοῦ ὁ NEWTON εἶχεν ἀποδείξει ὅτι αἱ δυνάμεις τοῦ ἰξώδους εἶναι ἀνάλογοι τῆς σχετικῆς ταχύτητος μετατοπίσεως μιᾶς ρευστῆς στοιβάδος ὡς πρὸς τήν γειτονικὴν της, μηδενίζονται δέ ὅταν μηδενισθῇ ἡ σχετικὴ αὐτῇ ταχύτης μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν στοιβάδων, καί ὅτι αἱ μεταβολαί τῆς ἐσωτερικῆς πίεσεως τοῦ ρευστοῦ ἐντὸς τῶν συνήθων ἐν τῇ πράξει ὁρίων ἐπηρεάζουν ἐλάχιστα τήν τιμὴν τοῦ ἰξώδους.

Εν τῶν ἀνωτέρω καθίστανται σαφέστεροι οἱ λόγοι διὰ τοὺς δυνάμεις ἢ ἐμλογή τοῦ $(grad \vec{V})_s$, ὡς τανυστοῦ τῶν παραμορφώσεων, εἶναι ἢ ἰδεώδης διὰ τὰ υἱασσιμὰ ρευστά.

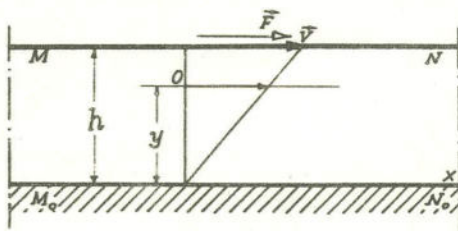
7.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ μ ΚΑΙ ν ΚΑΤΑ NEWTON.

Δεδομένου ὅτι αἱ τάσεις τοῦ ἰξώδους, δηλαδή αἱ τάσεις διατμήσεως τοῦ ρευστοῦ, εἶναι συναρτήσεις γραμμικαί καί ὁμογενεῖς τῶν ταχυτήτων παραμορφώσεως, θά συνδέωνται μέ αὐτάς δι' ἑνὸς συντελεστοῦ ἀναλογίας, ὀνομαζομένου "συντελεστοῦ τοῦ ἰξώδους".

Ὁ συντελεστής αὐτός ἀποτελεῖ τό βασικόν χαρακτηριστικόν ἑνός ἐυέστου ρευστοῦ, προσδιορίζεται δέ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ εἰζῆς ἀπλοῦ

θεωρητιού πειράματος.

Έστωσαν δύο επίπεδοι πλάκες MN και M_0N_0 , παράλληλοι καιείς απόστασιν h , με πλήρη ρευστού την μεταξύ των απόστασιν (Σχ. 7.1.Α). Η πλάξ M_0N_0 είναι ακίνητος ενώ η πλάξ MN , επιφανείας S , κινείται με σταθερά ταχύτητα $\vec{V}$ παράλληλα προς τον άξονα των x .



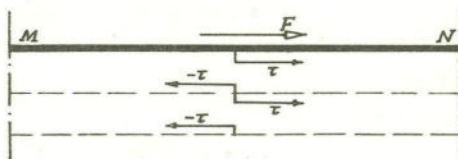
Σχ. 7.1.Α

Η κίνησης πλαιών-ρευστού παρουσιάζει πειραματικώς τά έξης χαρακτηριστικά:

α) Τό ρευστόν έχει ταχύτητα μηδέν είς την έπαφήν του με την ακίνητον πλάκα M_0N_0 , και $\vec{V}$ είς την έπαφήν του με την πλάκα MN .

β) Διά ταχύτητα $\vec{V}$ και απόστασιν h , άρμούντως μικράς, ώστε ή πίεσις μεταξύ των δύο πλαιών νά παραμένη ομοιόμορφος, ή μεταβολή της ταχύτητος κατά τον άξονα των y $\alpha = \frac{dV}{dy}$ είναι σταθερά, (τό μέγεθος α είναι μία από τάς έννέα συνιστώσας του ταυσοτού $grad \vec{V}$), ήτοι τό διάγραμμα της ταχύτητος του σχήματος 7.1.Α είναι εύθύγραμμον.

γ) Διά την διατήρησιν της κινήσεως, απαιτείται ή σταθερά έφαρμογή επί της πλαιός MN μιας δυνάμεως $\vec{F}$, ήτις αντιστοιχεί είς τάσιν διατμήσεως



Σχ. 7.1.Β

$$\tau = \frac{F}{S}, \text{ ή όποία μεταβιβάζεται}$$

είς τό έφαπτόμενον ρευστόν. Έξετάζοντες δηλαδή την ίσορροπία του συστήματος κατά στρώματα καταλήγομεν είς την μορφήν του σχήματος 7.1.Β.

Επί τη βάσει των άνωτέρω πειραματικών δεδομένων ό NEWTON έδωσε την σχέση

$$\tau = \mu \alpha$$

(7.1.α)

ή όποία συνδέει, διά μίαν ώρισμένην θερμοκρασίαν και πίεσιν, την βαθμίδα της ταχύτητος με την τάσιν διατμήσεως τ .

Ό συντελεστής της σχέσεως

$$\mu = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{\frac{dF}{ds}}{\frac{dV}{dy}} \quad (7.1. \beta)$$

υαλείται δυναμικός συντελεστής συνεπτιότητος εἰς τὴν συνήθη ἑλληνικὴν ὀρολογία, παρ' ὅλον ὅτι ἀπλουστέρα καὶ πλέον σύμφωνος μὲ τὴν διεθνή ὀρολογία θά ἦτο ἡ ὀνομασία δυναμικός συντελεστής τοῦ ιξώδους.

Εἰς τὰ υἱασσιὰ ρευστὰ ὁ συντελεστής μ παραμένει σταθερός διὰ δεδομένην θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν, διὰ τὸν λόγον δέ αὐτόν υαλοῦνται καὶ νευτώνεια ρευστὰ.

Πολλάκις εἰς τὰς ἐφαρμογὰς χρησιμοποιεῖται ὁ υἱηματικός συντελεστής συνεπτιότητος, προσδιοριζόμενος ἀπὸ τὴν σχέσηιν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (7.1. \gamma)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (7.1. β) καὶ (7.1. γ) προκύπτουν διὰ τὰ μεγέθη μ καὶ ν αἱ διαστάσεις: $[\mu] = L^{-1} M^{-1} T^{-1}$ Μονάς εἰς C.G.S. τὸ poise. Π.χ. διὰ τὸ ὕδωρ καὶ τὸν ἀέρα ὑπὸ υανονικῆς συνθήκας ἔχομεν

$$\mu_{\text{ὕδ.}} = \frac{1}{100} \text{ poise} , \quad \mu_{\text{ἀέρ.}} = \frac{1}{6500} \text{ poise}.$$

$[\nu] = L^2 M^{-1} T^{-1}$ Μονάς εἰς C.G.S. τὸ stokes. Π.χ. διὰ τὸ ὕδωρ καὶ τὸν ἀέρα ὑπὸ υανονικῆς συνθήκας ἔχομεν

$$\nu_{\text{ὕδ.}} = \frac{1}{100} \text{ stokes} , \quad \nu_{\text{ἀέρ.}} = \frac{13}{100} \text{ stokes}.$$

7.2 ΣΥΝΔΕΣΙΣ ΜΕ ΤΟΝ ΤΑΝΥΣΤΗΝ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΙΞΩΔΟΥΣ

Ὁ συντελεστής μ εἰσήχθη ἤδη εἰς τὴν παράγραφον 6.4.1. Θὰ τὸν συνδέσωμεν ἐπομένως μὲ τὰς ἐννοίας τῆς παραγράφου αὐτῆς, δίδοντες τὴν μαθηματικὴν ἐρμηνείαν τῆς ὑποστάσεώς του.

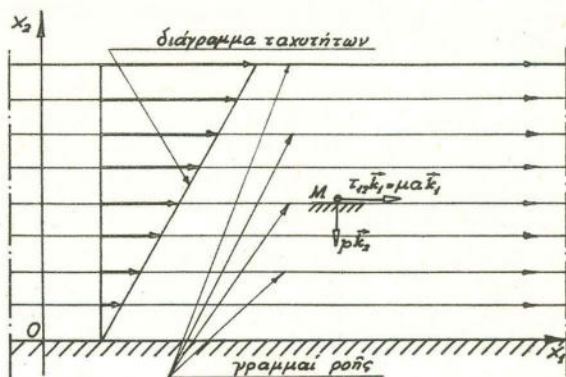
Ἐξετάζομεν πρὸς τοῦτο τὴν υαλουμένην μόνιμον ροὴν ἀπλῆς ὀλισθήσεως, (Σχ.7.2.Α) δι' ἀσυμπέστον ρευστόν μὲ ιξῶδες ἦτοι διὰ ρευστόν εἰς τὸ ὁποῖον $\rho = \text{σταθ.}$ καὶ $\text{div } \vec{V} = 0$. Αἱ ἐξισώσεις

υιήσεως κατά EULER θα είναι έξ ορισμού

$$v_1 = ax_2, v_2 = v_3 = 0, \quad (7.2. \alpha)$$

όπου a είναι μία σταθερά παράμετρος. Ο τανυστής των ταχυτήτων παραμορφώσεως έμφυλίζεται είς τανυστήν άπλής όλισθήσεως, ό δέ τανυστής των τάσεων του ιξώδους γίνεται

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (7.2. \beta)$$



Σχ. 7.2. Α

παρατηρούμεν όέ ότι έχει μίαν μόνον συνιστώσαν διάφορον του μηδένος, τήν

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \mu a.$$

Έφαρμόζομεν τήν σχέσηιν (6.4.1.ζ) του νόμου τάσεων- παραμορφώσεων διά τό τυχόν σημείον M_i , και θά έχωμεν, (ΐδε και σχέσηιν (4.3.β))

$$\bar{T}(M, \bar{k}_2) = \sigma_{i2} \bar{k}_i = \sigma_{12} \bar{k}_1 + \sigma_{22} \bar{k}_2 + \sigma_{32} \bar{k}_3$$

και δεδομένου ότι,

$$\sigma_{12} = -p\delta_{12} + \tau_{12} = \mu a$$

$$\sigma_{22} = -p\delta_{22} + \tau_{22} = -p$$

$$\sigma_{32} = -p\delta_{32} + \tau_{32} = 0$$

και $\delta_{12} = \delta_{32} = 0$, $\delta_{22} = 1$ θά προυΐψη ή σχέσηιν

$$\bar{T}(M, \bar{k}_2) = \mu a \bar{k}_1 - p \bar{k}_2. \quad (7.2. \gamma)$$

Έπομένως, τό ρευστόν της περιοχής $x_2 > x_2(M)$ έλασσει επί του ύπολοίπου, πλην της ιαθέτου πίεσεως $-p\bar{k}_2$, μίαν όριζοντίαν τάσιν $\mu a \bar{k}_1$, ανάλογον της βαθμίδος (ή υλίσσεως) της ταχύτητος $a = \frac{v_1}{x_2} = \frac{dv_1}{dx_2}$,

και του συντελεστού μ . Έπανευρίσκομεν έπομένως τήν σχέσηιν (7.1.α). Επί πλέον όμως βλέπομεν ότι λόγω του συντελεστού του ιξώδους μ

αί ταχύτεραι ρευσταί στοιβάδες τείνουν νά παρασύρουν τās βραδυτέρας, και αί βραδυτέραι τείνουν νά επιβραδύνουν (φρενάρουν) τās ταχύτερας. Ἡ μαθηματική και φυσική έννοια τοῦ συντελεστοῦ μ καθίσταται οὕτω πρόδηλος.

7.3 ΦΥΣΙΣ ΤΩΝ ΜΕΛΕΤΟΥΜΕΝΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Εἰς τήν ἐν συνεχείᾳ λεπτομερῇ ἀνάλυσιν τῆς συμπεριφορᾶς τῶν ρευστῶν θά περιορισθῶμεν εἰς τās ἐξῆς τρεῖς κατηγορίας ρευστῶν:

7.3.1 Τέλεια ἀσυμπίεστα ρευστά

Συμφώνως πρὸς τόν ὁρισμόν τῆς παραγράφου (5.2.1) τό ρευστόν εἶναι ἀσυμπίεστον, ἐάν, ἀνά πᾶσαν στιγμὴν t , τό πεδῖον τῶν ταχυτήτων $\vec{V}(x_1, x_2, x_3, t)$ πληροῖ τās σχέσεις

$$E = \epsilon_{xx} = \text{div } \vec{V} = 0, \quad (7.3.1. \alpha)$$

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) = \rho_0 = \text{σταθ.}$$

Λόγω τοῦ "τελείου ρευστοῦ" οἱ συντελεσταί λ και μ μηδενίζονται, ἔχομεν δέ τήν σχέσιν (6.4.1.θ), ἥτοι

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}. \quad (7.3.1. \beta)$$

7.3.2 Ἰξώδη ἀσυμπίεστα ρευστά

Λόγω τοῦ ἀσυμπίεστου, ἰσχύουν πάντα αί σχέσεις

$$\rho = \rho_0 = \text{σταθ.}, \quad (7.3.2. \alpha)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0.$$

Ἐξ ἄλλου, ὁ νόμος τάσεων-παραμορφώσεων γράφεται, (ἴδε (6.4.1.ζ) και (6.4.1.η)).

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (7.3.2. \beta)$$

$$\tau_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

ὅπου μ εἶναι ὁ δυναμικός συντελεστής συνευτιμότητος, ὅστις διὰ τὰ υλασσιὰ ρευστά εἶναι σταθερός διὰ σταθεράν θερμοκρασίαν και θετιμός.

7.3.3 Τέλεια συμπιεστά ρευστά

Είς την περίπτωση των συμπιεστών ρευστών, η εξέτασις και των πλέον απλών προβλημάτων, ως είναι τὰ προβλήματα της στατικής των ρευστών, αποδεικνύει ότι αι θεμελιώδεις εξισώσεις του υεφαλαίου 5., έν συνδυασμῷ μέ τās εξισώσεις τάσεων-παραμορφώσεων, δέν έπαρμούν διά τήν επίλυσίν των. Πρέπει επί πλέον νά ληφθῇ ύπ' όψιν ή θερμοδυναμική φύσις των μελετουμένων ρευστών. Έπομένως είναι αδύνατος ή εξέτασις των προβλημάτων τῆς μηχανικής των συμπιεστών ρευστών χωρίς προηγουμένην ανάπτυξιν των βασιμῶν άρχών τῆς θερμοδυναμικής.

Έν τούτοις είς ώρισμένες περιπτώσεις ροῆς συμπιεστών ρευστών δυνάμεθα νά μελετήσωμεν πλήρως τὰ φαινόμενα χωρίς ιδιαίτερας γνώσεις θερμοδυναμικής. Πρόκειται περί των τελείων βαροτροπιῶν ρευστών.

Οτανυστής των τάσεων δίδεται πάντα από τήν σχέση

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (7.3.3. \alpha)$$

Ο νόμος τῆς υαταστάσεώς των έμφράζει ότι ή πίεσις p και ή πυκνότης ρ είναι συνάρτησις ή μία τῆς άλλης, ήτοι έχομεν

$$p = g(\rho) \quad (7.3.3. \beta)$$

Δέν έπευτευνόμεθα είς τήν εξέτασιν των περιπτώσεων είς τās όποιās τὰ συμπιεστά ρευστά ύπαιούουν μέ ύμανοποιητηήν προσέγγισιν είς τās εξισώσεις των τελείων βαροτροπιῶν ρευστών. Άναφέρομεν άπλως ότι ή υατηγορία αύτή των συμπιεστών ρευστών έχει τεραότιαν έφαρμογήν είς τὰ φαινόμενα τῆς άεροδυναμικής.

Η συνάρτησις $g(\rho)$ πληροῖ τās υάτωθι τρεῖς άνισότητας

$$g > 0, \quad \frac{dg}{d\rho} > 0, \quad \frac{d^2g}{d\rho^2} \gg 0. \quad (7.3.3. \gamma)$$

Έξ αύτων συμπεραίνομεν ότι:

α) Η συνάρτησις $p=g(\rho)$ είναι θετική και επί πλέον αύξουσα συνάρτησις τῆς πυκνότητος ρ .

β) Θέτομεν $\frac{dg}{d\rho} = c^2$ Τό μέγεθος c έχει διαστάσεις ταχύτητος και τό υαλοῦμεν έξ όρισμοῦ ταχύτητα του ήχου έντός του ύπ' όψιν ρευστοῦ. Η τρίτη άνισότης δεικνύει τότε ότι ή ταχύτης του ήχου c είναι μή φθίνουσα συνάρτησις τῆς πυκνότητος ρ , και έπομένως και τῆς πίεσεως p .

Έξετάζομεν έν συνεχείᾳ δύο περιπτώσεις τελείων βαροτροπιῶν ρευστών.

Η πρώτη άντιστοιχεῖ είς νόμον υαταστάσεως

$$p = g(\rho) = K\rho, \quad (K = \text{σταθ}) \quad (7.3.3. \delta)$$

και παριστά την περίπτωση τελείου αερίου εις ισόθερμον μεταβολήν με σταθεράς ειδικιάς θερμότητας.

Ἡ δευτέρα ἀντιστοιχεῖ εἰς νόμον καταστάσεως

$$p = g(\rho) = K \rho^\gamma, (\gamma = \text{σταθ} > 1) \quad (7.3.3. \epsilon)$$

και παριστά την περίπτωση τελείου αερίου εις ἀδιαβατιαν μεταβολήν και με σταθεράς ειδικιάς θερμότητας.

Διά τόν ἀτμοσφαιρικόν αέρα τό γ λαμβάνεται ἴσον μέ 1,4.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ Π Ρ Ω Τ Ο Υ Μ Ε Ρ Ο Υ Σ

I.1) Θεωρούμεν μίαν μόνιμον κίνησιν ρευστοῦ μέ εξισώσεις κινήσεως κατά EULER ὡς πρὸς σύστημα ἀναφορᾶς R , τὰς $v_1 = -\alpha x_1, v_2 = \alpha x_2, v_3 = 0$, ἔνθα α εἶναι μία θετικὴ σταθερά.

Νά δειχθῇ ὅτι

α) τὸ ρευστὸν εἶναι ἀσυμπέστον καὶ νά εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν γραμμῶν ροῆς.

β) ὅλα τὰ ρευστὰ μόρια τὰ εὐρισκόμενα κατὰ τὴν στιγμὴν t_0 εἰς τὸ ἐπίπεδον $x_1 = \alpha$ θὰ εὑρεθοῦν κατὰ μίαν ἄλλην τυχούσαν στιγμὴν $t > t_0$ εἰς τὸ ἐπίπεδον $x_1 = \beta$.

Τὰ μόρια τὰ εὐρισκόμενα εἰς τὸ ἐπίπεδον $x_2 = 0$ εἶναι δυνατόν νά φθάσουν εἰς τὸ ἐπίπεδον $x_1 = 0$ ἐντὸς πεπερασμένου χρόνου;

I.2) Τὸ σύστημα ἀναφορᾶς R τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἔχει ὁμοιομορφον κίνησιν μεταφορᾶς κατὰ τὸν ἄξονα τῶν x_1 ἐνδὸς ἄλλου συστήματος ἀναφορᾶς R_1 .

Νά μελετηθῇ ἡ κίνησις ὡς πρὸς τὸ σύστημα R_1 καὶ νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις καὶ ἡ μορφή τῶν τροχιῶν τῶν ρευστῶν μορίων.

I.3) Τὸ πεδίον τῶν ταχυτήτων ἐνδὸς ρευστοῦ εὐρισκομένου εἰς μόνιμον κίνησιν δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $v_i = \alpha_{ij} x_j$, ἔνθα α_{ij} εἶναι τὰ στοιχεῖα ἐνδὸς δεδομένου ἀριθμητικοῦ μητρώου.

α) Ποία συνθήκη πρέπει νά πληροῦται οὕτως ὥστε τὸ σύνολον νά εἶναι ἀσυμπέστον καὶ ποῖα ἡ φύσις τῶν γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν περιστροφῆς;

β) Νά μελετηθῇ ἡ μορφή τῶν γραμμῶν ροῆς ὅταν $\alpha_{11}=1, \alpha_{12}=-\lambda, \alpha_{22}=\lambda-1$ μέ μηδενικοὺς τοὺς ὑπολοίπους συντελεστὰς.

γ) Νά ἐξετασθῇ ἡ εἰδικὴ περίπτωσις διὰ τὴν ὅποیان $\lambda=0,5$.

I.4) Θεωρούμεν μίαν μόνιμον κίνησιν ρευστοῦ μέ εξισώσεις κινήσεως κατά EULER, τὰς

$$v_1 = -g(r)x_2, \quad v_2 = g(r)x_1, \quad v_3 = h(r), \quad (r^2 = x_1^2 + x_2^2).$$

α) Νά δειχθῇ ὅτι τὸ ρευστὸν εἶναι ἀσυμπίεστον καὶ νά εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις καὶ ἡ μορφή τῶν γραμμῶν ροῆς.

β) Νά προσδιορισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις $\mathcal{X}$ καὶ ἡ περιστροφή ω εἰς τυχὸν σημεῖον, καὶ νά εὑρεθῇ ὑπὸ ποίας συνθήκας ἡ περιστροφή γίνεται ἐκ ταυτοῦτος ἴση πρὸς τὸ μηδέν.

γ) Νά μελετηθῇ ἡ εἰδικὴ περίπτωσις διὰ τὴν ὁποῖαν $h(r)=0$ καὶ $g(r)=ar$ διὰ $0 \leq r \leq \alpha'$ ἢ $g(r)=\frac{an^2}{\alpha}$ διὰ $r \geq \alpha'$.

Π α ρ α τ ῆ ρ η σ ι ς: Οἱ ὑπολογισμοὶ ἀπλοποιοῦνται ἀπὸ τὸ γεγονός ὅτι τὸ πεδῖον τῶν ταχυτήτων παραμένει ἀμετάβλητον διὰ περιστροφῆς περὶ τοῦ ἄξονος Ox_3 .

I.5) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ θεωρήματος τῆς διατηρήσεως τῆς μάζης, ὡς πρὸς μεταβλητάς LAGRANGE, γράφεται $\rho \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} = \rho_0$

ἐνθα $J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}$ εἶναι ἡ συναρτησιακὴ ὀρίζουσα καὶ ρ_0 ἡ πυκνότης εἰς τὴν χρονικὴν στιγμήν t_0 .

I.6) Ἐστω μία τυχοῦσα μόνιμος κίνησις ρευστοῦ.

Δείξατε ὅτι συνάμεθα νά εὕρωμεν δύο συναρτήσεις $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ καὶ $X(x_1, x_2, x_3)$ τοιαύτας ὥστε

$$\rho \vec{V} = \text{grad} \Psi \wedge \text{grad} X.$$

I.7) Εἰς ἓν ρευστὸν ἐν κινήσει, τὸ πεδῖον τοῦ τανυστοῦ ταχυτήτων παραμορφώσεως ἔχει ὅλας τὰς συντεταγμένας του μηδενικάς, ἐκτὸς τῶν ε_{13} καὶ ε_{23} ποὺ εἶναι συναρτήσεις μόνον τῶν x_1 καὶ x_2 .

α) Νά εὑρεθῇ ἡ γενικὴ μορφή τῶν ἐξισώσεων κινήσεως τοῦ ρευστοῦ κατὰ EULER.

β) Θεωροῦμεν μίαν εἰδικὴν μορφήν τῶν ἐξισώσεων κινήσεως, διὰ τὴν ὁποῖαν αἱ συνιστώσαι v_1 καὶ v_2 εἶναι μηδενικαὶ εἰς τὸν ἄξονα x_3 . Ὑποθέτοντες τὴν κίνησιν μόνιμον, νά εὑρεθοῦν αἱ γραμμαὶ ροῆς ὡς καὶ ὁ χρονικὸς νόμος κινήσεως τῶν μορίων κατὰ μῆκος τῶν τροχιῶν.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8.

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Μέ βάσιν τὰς γενικὰς ἀρχὰς καὶ ἐξισώσεις τῶν κεφαλαίων 1 ἕως 7, ἀντιμετωπίζεται μέ γενικότητα, σαφήνεια καὶ ταχύτητα ἐπιλύσεως οἰονδήποτε εἰδῶν κεφάλαιον τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν.

Συμφώνως πρὸς τὴν συνήθως ἀπολουθουμένην σειρὰν τῆς ἐλληνικῆς καὶ ξένης βιβλιογραφίας θὰ ἀναπτυχθοῦν πρῶτον αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις καὶ ἀρχαὶ τῆς στατικῆς τῶν ρευστῶν, ἡ ὁποία χωρίζεται εἰς δύο κλάδους λόγῳ τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν ρευστῶν εἰς ἀσυμπίεστα καὶ εἰς συμπίεστά.

Αἱ ἐξισώσεις καὶ αἱ ἀρχαὶ τῆς στατικῆς τῶν ἀσυμπίεστων ρευστῶν ἰσχύουν ἀπολύτως καὶ διὰ τὴν ὑδροστατικὴν ἥτοι τὴν στατικὴν τοῦ ὕδατος διὰ τὴν ὁποίαν συνήθως $\rho = \rho_0 = 1$. Ἐννοιολογικῶς ὅμως εἶναι γενικωτέρα ἡ ἔκφρασις "στατικὴ τῶν ἀσυμπίεστων ρευστῶν", ἀποφεύγονται δέ καὶ σχετιὰ λάθη, εἰς ὅσας περιπτώσεις ἡ εἰδικὴ πυκνότης τοῦ ὕδατος εἶναι αἰσθητῶς διάφορος τῆς μονάδος.

8.1 ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ἡ στατικὴ τῶν ρευστῶν ἐξετάζει τοὺς νόμους πού διέπουν τὰ ρευστά ἐν γένει, ὅταν εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ ὡς πρὸς μίαν ἀπόλυτον βάσιν ($Ox_1x_2x_3$).

Ἡ κατάστασις τῆς ἰσορροπίας τῶν ρευστῶν ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὸν περιορισμὸν τοῦ ἀντιμετιμένου τῆς στατικῆς εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν σχέσεων

$$p = p(x_i) \quad , \quad \rho = \rho(x_i) \quad , \quad T = T(x_i) \quad .$$

Ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν ἐμφράζει τὴν διανομὴν τῆς πιέσεως ἐντὸς τοῦ ρευστοῦ, εὐρίσκεται δέ ἀπὸ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς στατικῆς, ἴδε (3.3.γ)

$$[\vec{F}] = 0.$$

Αι ἄλλαι δύο σχέσεις ἐμφράζουν τὴν διανομὴν τῆς πυκνότητος καὶ τῆς θερμοκρασίας ἐντὸς τοῦ ρευστοῦ καὶ δίδονται ἀπὸ τοὺς νόμους ματαστάσεως (ἴδε παράγραφον 6.5). Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸν νόμον διανομῆς τῶν πιέσεων, καθ' ὅσον οἱ ἄλλοι δύο νόμοι διαφέρουν ἀνά κατηγορίαν ρευστῶν.

Εν τοῦ θεμελιώδους νόμου (3.3.γ) καὶ διὰ τυχόν ὑλισμὸν σύστημα, προκύπτουν αἱ σχέσεις (4.4.γ). Διὰ τὰ ρευστά ἐν ἰσορροπίᾳ ἔχομεν ἐξ ἄλλου, (παραγρ. 6.4.1), ὅτι

$$z_{ij} = 0 \text{ καὶ } \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{διὰ } i \neq j \\ -p & \text{διὰ } i = j \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

(Ἀπεδείξαμεν οὕτω τὴν σχέσιν τοῦ διανυσματικοῦ λογιμοῦ $\operatorname{div}(\delta_{ij} p) = \operatorname{grad} p$). Δι' ἀντιστάσεως εἰς τὰς γενικὰς ἐξισώσεις (4.4.γ), ἔχομεν τὰς ἐν τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς στατικῆς προκύπτουσας σχέσεις

$$\boxed{f_i(M) = \frac{\partial p}{\partial x_i}}, \quad (8.1. \alpha)$$

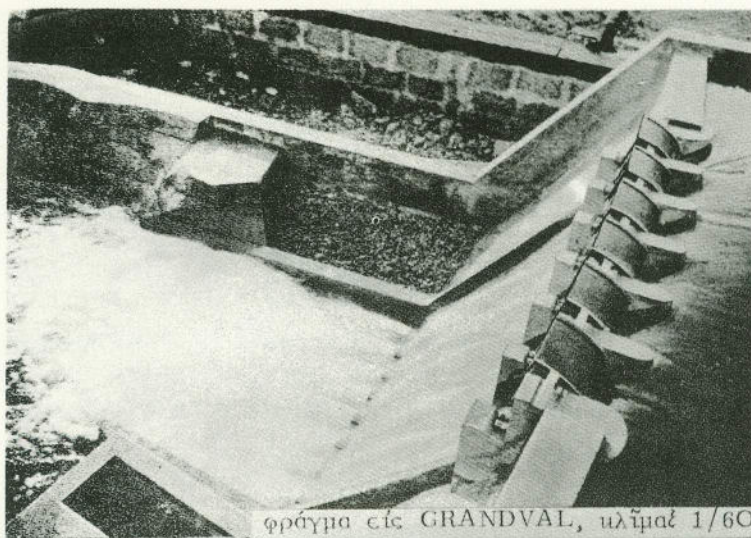
ἢ ὑπὸ διανυσματικὴν μορφήν

$$\boxed{\vec{f}(M) = \operatorname{grad} p}. \quad (8.1. \beta)$$

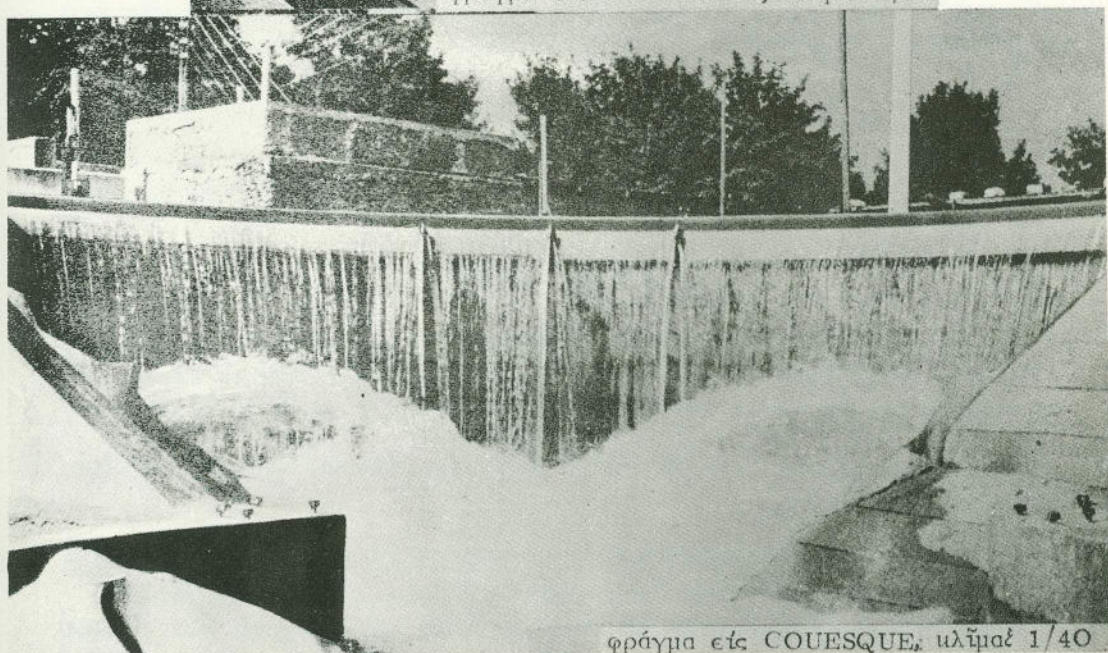
Αἱ σχέσεις (8.1.α) ἢ (8.1.β) ἐμφράζουν τὴν ζητούμενην ἀγνωστον συνάρτησιν τῆς πίεσεως p , συναρτήσκει τῶν γνωστῶν συναρτήσεων τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων f_i , ἐπομένως εἶναι αἱ ζητούμεναι σχέσεις διανομῆς τῶν πιέσεων. Ἐξ αὐτῶν ἐλέγχεται τὸ σοβαρώτατον συμπέρασμα ὅτι τὸ διανυσματικὸν πεδίου τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων $f(M)$ εἶναι ὑποχρεωτικῶς δυναμικὸν πεδίου διὰ νά ὑπάρχη ἰσορροπία, καὶ τοῦτο διότι εἶναι βαθμὶς τῆς συναρτήσεως p (ἴδε 2.1.2). Ἡ συνάρτησις $p = p(x_i)$ εἶναι ἡ συνάρτησις τοῦ δυναμικοῦ τοῦ πεδίου κατὰ προσέγγισιν μιᾶς σταθερᾶς.

Αἱ ἰσοδυναμικαὶ ἐπιφάνειαι τοῦ πεδίου ἔχουν ἐξίσωσιν $p = \text{σταθ.}$, καὶ ἐπομένως ταυτίζονται μὲ τὰς ἐπιφανείας ἴσης πίεσεως.

Εν τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι



φράγμα εις GRANDVAL, υλῆμα 1/60



φράγμα εις COUESQUE, υλῆμα 1/40



εὐχειλιότης φράγματος εις DAOURAT, υλῆμα 1/60

Μελέται ἐπὶ ὁμοιωμάτων

$$dp = d\vec{l} \cdot \text{grad } p = dx_i \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

καί ἐπειδὴ ἰσχύει ἡ (8.1. α), θά ἔχωμεν τελειῶς

$$\boxed{dp = dx_i \cdot f_i} . \quad (8.1. \gamma)$$

Ἡ σχέση (8.1. γ) δίδει τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς ζητουμένης πιέσεως p . Αἱ ἐπιφάνειαι ἰσης πίεσεως δίδονται ἀπὸ τὴν σχέσηιν $dp=0$, δηλ. ἔχουν ἐξίσωσιν

$$dx_i f_i = 0 . \quad (8.1. \delta)$$

Διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐν τοῦ πεδίου βαρύτητος, ἡ ὁποία καί τὸ συνηθέστερον ἐμφανίζεται ἐν τῇ πράξει, θά ἔχωμεν ὅτι

$$f_1 = f_2 = 0 , \quad f_3 = -\rho g ,$$

ὁπότε ἡ (8.1. γ) δίδει τὴν σχέσηιν

$$\boxed{dp = -\rho g dx_3} , \quad (8.1. \epsilon)$$

ἡ ὁποία καί ἀποτελεῖ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν πιέσεων, ὅταν τὸ δυναμιὸν πεδίου τῶν δυνάμεων εἶναι τὸ πεδίου βαρύτητος.

Ὁ ἄξων Ox_3 ἐλήφθη τῆς αὐτῆς διευσθύνσεως καί ἀντιθέτου φορᾶς μέ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος $\vec{g}$.

8.2 ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ—ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

Εἰς τὴν ὑδροστατικὴν θά ἰσχύη ἐπὶ πλέον τῶν προηγουμένων, ἡ σχέση (8.1. ε) ἀσυνπιέστων ρευστῶν (παράγραφος 5.2.1),

$$\rho = \rho_0 = \text{σταθ} .$$

Ἡ σχέση $d\vec{w}=0$ ἰσχύει πάντοτε εἰς τὴν στατικὴν, λόγω μηδενικῶν ταχυτήτων.

Θά ἐξετασθῶν ἐν συνεχείᾳ αἱ δύο συνηθέστεραι περιπτώσεις δυναμιοῦ πεδίου $\vec{f}(M)$:

α) $\vec{f}(M)=0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ (8.1. β) δίδει ὅτι ἡ πίεσις p εἶναι σταθερά καί ἐνιαία εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ὑγροῦ.

β) Ἐάν τὸ πεδίου τῶν δυνάμεων $\vec{f}(M)$ εἶναι τὸ δυναμιὸν πεδίου τῆς βαρύτητος, θά ἔχωμεν ἐν τῆς (8.1. ε) ὅτι

$$p = -\rho g x_3 + \kappa \quad (8.2. \alpha)$$

καί δεχόμενοι ὅτι ἡ πίεσις θά μηδενισθῇ διὰ τὴν τιμὴν

$$\kappa = \rho g h.$$

ὅπου h εἶναι μία νέα σταθερά μέ διαστάσεις μῆκους, θά ἔχωμεν τελικῶς τὴν ζητούμενην ἐξίσωσιν τῆς πίεσεως

$$p = \rho g (h - x_3) \quad (8.2. \beta)$$

Αἱ ἐπιφάνειαι ἴσης πίεσεως δίδονται διὰ $dp=0$ ἢ $dx_3=0$, ἥτοι

$$x_3 = \text{σταθ.},$$

ἄρα εἶναι ὀριζόντια ἐπίπεδα.

Διὰ τὴν περίπτωσιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐν πεδίου βαρύτητος δίδομεν τὰς ἐξῆς ἀπλὰς ἐφαρμογὰς:

α) Ἐπιφάνεια ἐπαφῆς δύο ρευστῶν

Ἐστωσαν δύο μὴ μιγνύμενα ἀσυμπίεστα ρευστά, πυκνοτήτων ρ καί ρ' , καί ἐν ἐπαφῇ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν S . Ἐάν p καί p' εἶναι αἱ συναρτήσεις πίεσεως τῶν δύο αὐτῶν ρευστῶν, θά ἔχωμεν

$$p = \rho g (h - x_3) \quad , \quad p' = \rho' g (h' - x_3). \quad (8.2. \gamma)$$

Εἰς τυχόν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ἐπαφῆς τῶν ρευστῶν S , ἡ πίεσις θά εἶναι ἡ αὐτή καί διὰ τὰ δύο ρευστά, ἥτοι θά ἔχωμεν

$$p = p' \quad \text{ἢ} \quad \rho h - \rho x_3 = \rho' h' - \rho' x_3$$

καί

$$x_3 = \frac{\rho h - \rho' h'}{\rho - \rho'} = \text{σταθ.} \quad (8.2. \delta)$$

Ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια ἐπαφῆς τῶν δύο ρευστῶν θά εἶναι ὑποχρεωτικῶς ὀριζόντιον ἐπίπεδον.

β) Περιστροφή ρευστοῦ περί ἄξονα μέ σταθεράν ταχύτητα

Ἐστω ἐν ρευστόν ἀσυμπίεστον, εὐρισκόμενον ἐντός κυλινδρικοῦ δοχείου. Τό σύστημα ρευστόν-κύλινδρος περιστρέφεται περί τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου μέ σταθεράν γωνιώδη ταχύτητα ω , καί ἐπομένως εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὡς πρὸς μίαν σχετικὴν βάσιν μέ ἄξονας κινουμένους μετ' αὐτοῦ. Λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ βάσις δέν εἶναι ἀπόλυτος,

πρέπει νά προστεθοῦν εἰς τὰς δυνάμεις $\vec{f}(M)$, αἱ δυνάμεις ἀδρανείας τῆς μορφῆς $\rho \vec{\gamma}_e(M)$, ἴδε (3.1.2).

Εἰς τὴν προειρημένην περίπτωσηιν αἱ δυνάμεις αὐταὶ ἔχουν τὴν τιμὴν $\vec{f}_e = \rho \omega^2 r \vec{i}$, ὁπό-
τε

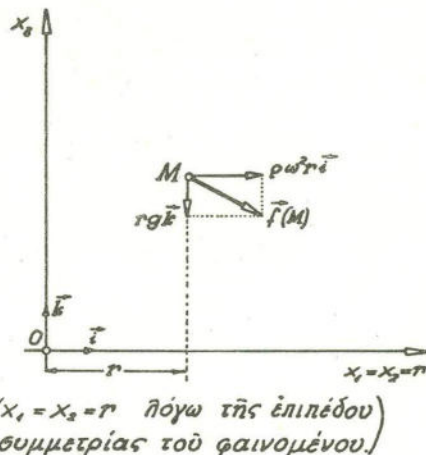
$$\vec{f} = -\rho g \vec{k} + \rho \omega^2 r \vec{i} \quad (8.2.ε)$$

καὶ ἡ (8.1.β) ἢ (8.1.γ) δίδουν ὅτι

$$\frac{\partial p}{\partial r} = f_r = \rho \omega^2 r,$$

(8.2.ζ)

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = f_s = -\rho g.$$



Σχ. 8.2. Α

Δι' ὁλοκληρώσεως τῶν (8.2.ζ) καὶ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν συν-
θημῶν εἰς τὰ ὅρια, ὅτι δηλαδὴ

$$\text{διὰ } \vec{p} = 0 \text{ εἶναι } p_r = 0 \text{ καὶ } p_s = \rho g h,$$

ἐνθα h εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφά-
νεια, θά προῦψῃ ἡ τελειή ἐξίσωσις τῶν πιέσεων

$$p = p_r + p_s = \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 + \rho g (h - x_3). \quad (8.2.η)$$

Αἱ ἐπιφάνειαι ἴσης πίεσεως δίδονται ἀπὸ τὴν σχέσιν (8.1.δ), ἥ-
τοι θά εἶναι

$$\rho \omega^2 r dr = \rho g dx_3,$$

ἢ

$$g x_3 - \frac{\omega^2 r^2}{2} = \text{σταθ.}, \quad (8.2.θ)$$

εἶναι δέ παραβολοειδῆ ἐν περιστροφῇ.

γ) Στατισταί πίεσεις ἐπὶ ἐπιφανειῶν

Τὰ περισσότερα προβλήματα ὑδροστατικῆς εἰς ἔργα πολιτικοῦ
μηχανικοῦ ἀνάγονται εἰς τὸν ὑπολογισμόν τῆς συνισταμένης τῶν πιέ-

σεων, ἐπὶ διαφορῶν μορφῆς ἐπιφανειῶν ἐμβαπτισμένων εἰς τὸ ὕδωρ, ἢ περιυλειτουργῶν ὑδατίνους ὄγκους ἐν ἡρεμίᾳ. Τὸ μαθηματικὸν μέρος τῶν προβλημάτων αὐτῶν εἶναι ἀπλούστατον καὶ στηρίζεται εἰς τὸ γεγονός ὅτι λόγῳ μὴ υπάρξεως διατμητικῶν τάσεων ($\tau_{ij}=0$), ἡ δύναμις ἐν πιέσεως, ἐπὶ στοιχειώδους ἐπιφανείας ds εἶναι ὑάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$d\vec{F} = \vec{p} ds = \rho \vec{g} z ds,$$

ἐνθα $z = h - x_g$ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφανείας ds ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ὅσον θεωρηθῇ αὐτὴ ὡς ἐπιφάνεια μηδενικῆς πιέσεως.

Τὸ σύνολον τῶν πιέσεων ἐπὶ τυχούσης ἐπιφανείας S , δίδεται ὑπὸ τοῦ στροφέως $[\vec{F}_p]$ μὲ στοιχεῖα ἀναγωγῆς του ὡς πρὸς τυχὸν σημεῖον O , τὰ ἐξῆς

$$\vec{F}_p = \int_S \rho \vec{g} z ds, \quad (8.2.1)$$

$$M_o[\vec{F}_p] = \int_S \vec{OM} \wedge (\rho \vec{g} z ds) \vec{n},$$

ἐνθα M εἶναι τὸ κέντρον βάρους τῶν στοιχειωδῶν ἐπιφανειῶν ds , καὶ $\vec{n}$ ἡ δι' αὐτοῦ διερχομένη μοναδιαία ὑάθετος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ds .
Εἰς τὴν εἰδιωὴν περίπτωση ἐπιπέδου ἐπιφανείας S θὰ ἔχωμεν

$$\vec{F}_p = \rho \vec{g} z_g S, \quad (8.2.2)$$

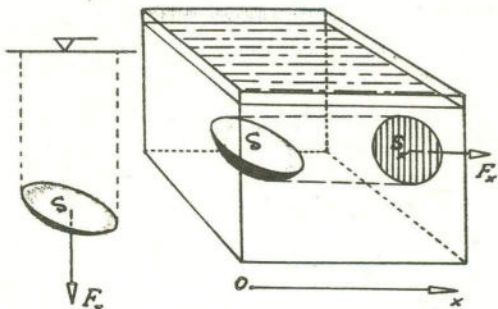
$$M_o[\vec{F}_p] = 0,$$

ἐνθα z_g εἶναι ἡ κατηγμένη τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφανείας S καὶ P τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος ὀλισθήσεως τῆς $\vec{F}_p$.

Ἐπομένως ὁ στροφεὺς ἀνάγεται εἰς ἓν ὀλισθαῖνον διάνυσμα $\vec{F}_p$, τοῦ ὁποίου τὸ ἵχνος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S , ἔχει κατηγμένην

$$z_p = \frac{\int_S z^2 ds}{\int_S z ds} = \frac{\int_S z^2 ds}{z_g S}. \quad (8.2.3)$$

Διὰ τυχούσαν ἐπιφάνειαν S ἔχομεν ἐν γένει καί συνισταμένην ροπήν. Διὰ τὰς ἐφαρμογὰς ἀναλύομεν τὸν στροφέα εἰς ἓν ὀλισθαῖνον διάνυσμα $\vec{F}_x$, προϋπτον ὡς συνισταμένη τῶν πιέσεων ἐπὶ τῆς προβολῆς S_x , τῆς ἐπιφανείας S ἐπὶ ἐπιπέδου καθετοῦ εἰς τὸν ἄξονα Ox , καὶ εἰς ἕτερον ὀλισθαῖνον διάνυσμα $\vec{F}_z$ προϋπτον ὡς συνισταμένη τοῦ βάρους στήλης ὑγροῦ περιοριζομένου μεταξύ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιφανείας S , (Σχ. 8.2. Β).



Σχ. 8.2. Β

δ) Θεώρημα τοῦ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Ἐστω εἷς χῶρος V , ἐντός ἐνός ρευστοῦ ἐν ἰσορροπίᾳ, ὑποκειμένου εἰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις $\vec{f}(M)$. Ὁ στροφεύς $[\vec{p}]$ τῶν πιέσεων τῶν ἐξασιοιζομένων εἰς τὴν περιορίζουσαν τὸν χῶρον V νοητὴν ἐπιφάνειαν S θὰ εἶναι ἴσος καὶ ἀντίθετος πρὸς τὸν στροφέα $[\vec{f}]$ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων τῶν ἐξασιοιζομένων ἐπὶ ὁλολήρου τοῦ χώρου V , (π.χ. δυνάμεις βαρύτητος, ἥτοι βάρος τοῦ ὅγκου V), συμφῶνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς στατικῆς.

Ἄς ἀντιματαστήσωμεν τὸν χῶρον V , διὰ στερεοῦ (Σ) ἔχοντος τὸ ἴδιον ἀκριβῶς περίβλημα S . Ὁ στροφεύς $[\vec{p}]$ τῶν πιέσεων παραμένει προφανῶς ἀμετάβλητος, ἄρα ἰσοῦται πάντοτε μέ τὸν στροφέα $[\vec{f}]$ τοῦ ἀντιματασταθέντος χώρου V , τοῦ ρευστοῦ. Ἐν τῶν ἀνωτέρω προϋπτεῖ ἡ ἀρχή: "Αἱ δυνάμεις πιέσεως, αἱ ἐξασιοούμεναι ἀπὸ ἓν ρευστόν ἐν ἰσορροπίᾳ εἰς τυχόν στερεόν ἐμβαπτισμένον εἰς αὐτό, σχηματίζουν στροφέα ἴσον καὶ ἀντίθετον πρὸς τὸν στροφέα τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἐξησίουντο ἐπὶ τοῦ ρευστοῦ ἐάν κατελάβανεν τὸν χῶρον τοῦ ἐμβαπτισμένου στερεοῦ".

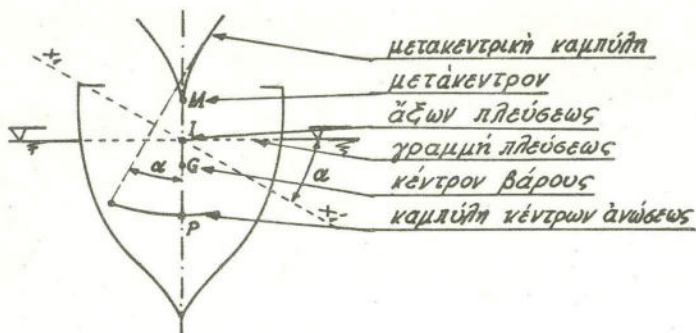
ε) Ἰσορροπία ἐπιπλεόντων σωμάτων

Θά ἀναφέρωμεν κατωτέρω ὠρισμένας ἀρχὰς τῆς ἰσορροπίας τῶν ἐπιπλεόντων σωμάτων, ἄνευ διερευνήσεως, καθ' ὅσον τὸ θέμα δέν ἀντιμετωπίζεται συνήθως εἰς ἔργα πολιτικοῦ μηχανικοῦ.

Διὰ πολὺ μικρὰς μετατοπίσεις τοῦ ἐπιπλεόντος σώματος ἡ γραμμὴ πλεύσεως αὐτοῦ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, καλούμενου κέντρον βάρους τῆς ἀρχικῆς γραμμῆς πλεύσεως. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων ἀνώσεως εἶναι μία καμπύλη, μέ ἐφαπτομένην εἰς ἕνα σπον σημεῖον τῆς, παράλληλον πρὸς τὴν ἀντίστοιχον τοῦ σημείου, γραμμὴν πλεύσεως.

Ἐάν τὸ ἐπιπλέον σῶμα ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας, αἱ τομαὶ τῶν

υαθέτων εἰς τὴν
υαμπύλην τῶν υέν-
τρων ἀνώσεως μέ-
τὴν εὐάστοτε θέ-
σιν τοῦ ἐπιπέδου
συμμετρίας δημι-
ουργοῦν υαμπύλην
υαλουμένην με-
τ α υ ε ν τ ρ ι-
υήν υαμπύλην.
Τό σημεῖον ἀναυάμ-
ψεως M τῆς υαμπύ-
λης υαλεῖται με-
τ α υ ε ν τ ρ ο ν.



Σχ. 8.2. Γ

Τό ἐπιυιλέ-
ον σῶμα εὐρίσεται εἰς εὐσταθῆ ἰσορροπίαν ὅταν τό υέντρον βάρους
του G εὐρίσεται υάτωθεν τοῦ μεταυέντρου M . Ἡ θέσις τοῦ με-
ταυέντρου προσδιορίζεται ἀπό τὴν σχέσηιν

$$PM = \frac{I}{V}$$

ἐνθα I εἶναι ἡ ροπή ἀδρανεῖας τῆς ἐπιφανείας πλεύσεως ὡς πρὸς
 $x_1 x_1'$ καὶ V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἐυτοπιζομένου ρευστοῦ.

8.3 ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Διὰ τὰ συμυιεστά ρευστά ἰσχύουν χωρὶς υαμίαν ἀπλοποίησιν, αἱ
ἐξισώσεις τῆς παραγράφου (8.1).

Θά ἐξετασθοῦν ὡς καὶ εἰς τὴν ὑδροστατικὴν αἱ ἀυόλουθοι περι-
πτώσεις

α) $f(M) = 0$. Ἡ πίεσις εἶναι πάλιν σταθερά καὶ ἐνιαία εἰς ὅλα
τὰ σημεῖα τοῦ ρευστοῦ καὶ εἶναι ἡ μόνη περίπτωση διὰ τὴν ὁποῖαν
εἴμεθα εἰς θέσιν νά μελετήσωμεν γενυιῶς τὴν διανομὴν τῆς πίεσεως,
ὁηλαδή τὴν υατάστασιν ἰσορροπίας τοῦ ρευστοῦ.

β) Διὰ πεδίου, δυνάμεων $\vec{f}(M)$, τό δυναμυιόν πεδίου τῆς βαρύ-
τητος ἰσχύει πάντοτε ἡ σχέση (8.1.ε), δέν ὁλουληροῦται ὁμως, διότι
ἡ πυυινότης ρ εἶναι τώρα συνάρτησις τῆς πίεσεως p . Πρέπει ἐπο-
μένωως νά γυωρίζωμεν τὴν σχέση (7.3.3.β) διὰ νά προχωρήσωμεν εἰς
τὴν εὐρεσιν τῆς διανομῆς τῆς πίεσεως ἐντός τοῦ ρευστοῦ.

Οὕτω, εἰς τὴν περίπτωση συντελείου ἀερίου διὰ ἰσόθερμον μετα-
βολήν, ἡ (8.1.ε) δίδει

$$k dp = -\rho g dx_3$$

$$\eta \quad p = p_1 e^{-\frac{g x_3}{k}} \quad (8.3. \alpha)$$

ἐνθα p_1 , εἶναι μία σταθερά μέ διαστάσεις πιέσεως. Ἡ σχέση (8.3. α) δίδει τόν νόμον μεταβολῆς τῶν πιέσεων δι' ἀτμόσφαιραν ἰσόθερμον.

Ἐάν p_0 καί ρ_0 εἶναι αἱ τιμαί πιέσεως καί πυκνότητος διά τόν ἀτμοσφαιρῶν ἀέρα εἰς τήν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους, διά τήν ὁποίαν θέτομεν $x_3 = 0$, ἡ (8.3. α) γράφεται

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g x_3} \quad (8.3. \beta)$$

καί δίδει τόν νόμον μεταβολῆς τῶν πιέσεων διά τόν ἀτμοσφαιρῶν ἀέρα, συναρτήσας τοῦ ὑψομέτρου x_3 .

Ἀπλή ἀριθμητική ἐφαρμογή ἐπὶ τῆς σχέσεως (8.3. β) δεῖνύει ὅτι ἡ πίεσις ἐλλαττοῦται κατὰ 0,1 χιλιοστόμετρον ὕψους στήλης ὑδραργύρου δι' αὐξήσιν τοῦ ὑψομέτρου κατὰ ἓν μέτρον μήκους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 9.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΕΙΣ ΤΑΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΕΙΔΙΚΑΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Συμφώνως πρὸς τὴν ἀναφερθεῖσαν κατὰ τὰς τῶν ἐξισώσεων τῆς παραγράφου 6.5, θὰ διαυρύνωμεν ἐν γένει τὰς θεμελιώδεις ἐξισώσεις, τοὺς νόμους συμπεριφορᾶς ἢ τάσεων-παραμορφώσεων καὶ τοὺς νόμους καταστάσεως.

Ἐξ ἄλλου αἱ πρὸς εὐρεσιν συναρτήσεως ἐνός τυχόντος φαινομένου τῆς δυναμικῆς, καὶ ἐπομένως καὶ τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν, εἶναι ἑξι συνολικῶς, ἥτοι, αἱ τρεῖς συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος, ἡ πυκνότης, ἡ πίεσις καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ τυχόντος σημείου M , διὰ δεδομένην χρονικὴν στιγμὴν t . Ἡ λύσις τυχόντος προβλήματος τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν θὰ ἔχῃ ἐπομένως τὴν γενικὴν μορφήν

$$\begin{aligned}v_i &= v_i(x_1, x_2, x_3, t), \\ \rho &= \rho(x_1, x_2, x_3, t), \\ p &= p(x_1, x_2, x_3, t), \\ T &= T(x_1, x_2, x_3, t).\end{aligned}\tag{9. a}$$

Ὅλα τὰ λοιπὰ μεγέθη, τὰ ὁποῖα ὑπεριέρχονται εἰς τὸ φαινόμενον, (ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, συντελεσταὶ LAMÉ κ.λπ.), ἀποτελοῦν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

Χρειαζόνται ἐπομένως ἐν γένει ἑξι ἐξισώσεις διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ γενικοῦ προβλήματος καὶ ἡ κατὰ στρωσίς των ἀποτελεῖ τὸ ἀντιμεῖμενον τῆς παρούσης παραγράφου.

9.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΚ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΝΟΜΟΥ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ

Ο θεμελιώδης νόμος τής δυναμικής έυφράζεται από τήν σχέση μεταξύ τών στροφών έπιταχύνσεως καί έξωτερικών δυνάμεων

$$[\vec{E}] = [\vec{F}] .$$

έν τής όποιας προϋπτουν αί σχέσεις

$$\rho \gamma_i = f_i + \text{div} \sigma_{ij}$$

ίσχουσαι μέ τούς αναφερθέντας περιορισμούς ως πρός τήν έμλογήν τής βάσεως καί τήν μέτρησιν τοῦ χρόνου (παράγραφοι 3.3 καί 5.3).

Οί νόμοι συμπεριφοράς μᾶς έπιτρέπουν τήν άντιματάστασιν τών άγνώστων τάσεων σ_{ij} , μέ τά λητούμενα μεγέθη (9. α), οὔτως ώστε εἰς τās προωητούσας σχέσεις νά υπάρχουν μόνον αἱ λητούμεναι άγνωστοί ἢ γνωσταί συναρτήσεις.

Θά έχωμεν έπομένως τά έξής:

Θεμελιώδεις σχέσεις έν τής δυναμικής

$$\rho \gamma_i = f_i + \text{div} \sigma_{ij} . \quad (9.1. α)$$

Άντιματάστασις τών έπιταχύνσεων

$$\gamma_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{V} \text{grad} v_i .$$

Άντιματάστασις τών τάσεων

Περιοριζόμεθα εἰς τά υλασσιυά ρευστά διά τά όποια οἱ νόμοι συμπεριφοράς έυφράζονται από τās σχέσεις (6.4.1. δ) ἢ (6.4.1. ζ). Αἱ σχέσεις αὐταί λαμβάνουν καί τήν μορφήν

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{V} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) . \quad (9.1. β)$$

Λαμβάνομεν τās άπουλίσεις καί τών δύο μελῶν τής (9.1. β) έχοντες υπ' όψιν ότι τό μέγεθος $\text{div} \sigma_{ij}$ είναι διανυσματικόν (δεδομένου ότι ό έυτελεστής div , έφαρμοζόμενος εἰς έν μέγεθος, υποβιβάζει τήν τάξιν του κατά μίαν μονάδα). Κρατεῖται δέ ως έλεύθερος δείκτης ό i , ώστε νά υπάρχει συμφωνία μέ τās σχέσεις (9.1. α).

Ο σαφής διαχωρισμός μεταξύ έλευθέρου καί άφώνου δείκτης είναι άπαραίτητος διότι, δι' έλεύθερον δείκτην i , έχομεν

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \text{grad} , \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \text{div} ,$$

$v_i \equiv \vec{V} \equiv$ διανυσματικόν μέγεθος ,

$v_j \equiv$ συντεταγμένη του $\vec{V}$ ως προς τόν άξονα $j \equiv$ βαθμωτόν μέγεθος ,
 ενώ δι' έλεύθερον δείκτην j , ισχύουν άριβώς τά αντίστοιχα.
 Προϋπεί έπομένως ή σχέση

$$\operatorname{div} \sigma_{ij} = \operatorname{div}(-p \delta_{ij}) + \lambda \operatorname{div}(\delta_{ij} \operatorname{div} \vec{V}) + \mu \operatorname{div} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \mu \operatorname{div} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.1. \gamma)$$

Υπολογίζομεν τούς όρους του δευτέρου μέλους:

$$\operatorname{div}(-p \delta_{ij}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\operatorname{grad} p$$

ως γνωρίζομεν έμ τής παραγράφου 8.1. Έξ άλλου

$$\operatorname{div}(\delta_{ij} \operatorname{div} \vec{V}) = \operatorname{div} \vec{V} \operatorname{div} \delta_{ij} + \delta_{ij} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V},$$

διότι γενικώς $\operatorname{div}(\varphi \vec{V}) = \varphi \operatorname{div} \vec{V} + (\operatorname{grad} \varphi) \vec{V}$ καί $\operatorname{div} \delta_{ij} = 0$, $\delta_{ij} \operatorname{grad} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \operatorname{grad} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$,

δεδομένου ότι έχομεν τόν αυτόν δείκτην j , είς τόν λόγον $\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$.

$$\text{έπίσης} \quad \operatorname{div} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} = \Delta v_i \quad \text{καί}$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V}.$$

Αντικαθιστώντες είς τήν (9.1. γ) θά έχωμεν

$$\operatorname{div} \sigma_{ij} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right). \quad (9.1. \delta)$$

Η μορφή αυτή είναι καθαρώς ψευδομονωνυμιακή, μέ έλεύθερον δείκτην τόν i .

Η σχέση (9.1. δ) γράφεται καί υπό τήν μιμήν μορφήν

$$\operatorname{div} \sigma_{ij} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V}. \quad (9.1. \epsilon)$$

Έχομεν δέ τέλος καί τήν καθαρώς διανυσματικήν μορφήν

$$\operatorname{div} \sigma_{ij} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta v_i + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V}. \quad (9.1. \zeta)$$

Δι' άντισταστάσεως του μέγους $div \sigma_{ij}$ έυ τών σχέσεων (9.1.δ) ή (9.1.ε) ή (9.1.ζ) είς τήν (9.1.α) προϋπτον αι λητούμεναι έξισώσεις κινήσεως έυ τής δυναμικής, μέ τας άμολούτους μορφάς

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right), \quad (9.1.η)$$

ή

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{V} \text{grad} v_i \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \vec{V}, \quad (9.1.θ)$$

ή

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \vec{V}^2 + (\text{rot} \vec{V}) \wedge \vec{V} \right] = \vec{f} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{V} + (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \vec{V}, \quad (9.1.ι)$$

ίσχουσαι διά τά υλασσιμά ρευστά καί έυπεφρασμέναί μέ μεταβλητάς EULER.

9.2 ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ Η ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΜΑΖΗΣ

Πρόκειται περί τής έξισώσεως (5.2.α), ήτις έυφράζει ότι ή μάζα m οίουδήποτε τμήματος V ενός ύλμου συστήματος, τό όποϊον άμολουθούμεν είς τήν κίνησίν του, παραμένει σταθερά, ήτοι $\frac{dm}{dt} = 0$ ή άόμνη

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0, \quad (9.2.α)$$

ή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (9.2.β)$$

Είς τήν άνωτέρω σχέσηιν ό j είναι άφωνος δείκτης.

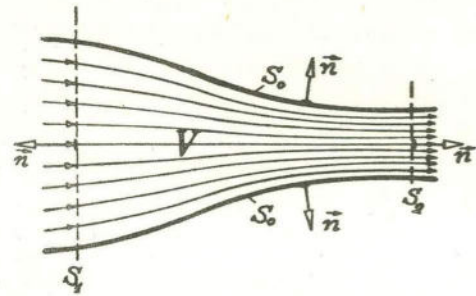
Είς τά πλείστα τών φαινομένων τής ύδραυλικής καί άεροδυναμικής ή έξίσωσις συνεχείας έφαρμόζεται είς τήν κίνησιν ρευστών έντός άγωγών τυχούσης μορφής (Σχ. 9.2.Α). Είς τας περιπτώσεις αυτές καί διά μόνιμον ροήν, έφαρμόζεται ή όλουληρωτική μορφή τής σχέσεως (9.2.α) εύρισσιμένη/δι' άπλής έφαρμογής του θεωρήματος τών GREEN-OSTROGRADSKI, ως άμολούτως: Έστω ή ροή του σχήματος 9.2.Α

δι' έυαστον σημείον τής όποίας ίσχύει ή σχέση $\text{div}(\rho \vec{V}) = 0$. Δι' όλον τόν όγκον V , τόν περιλειόμενον υπό τών έπιφανειών S_i, S_o, S_z , θά ίσχύη ή σχέση

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \iint_{S_1 + S_0 + S_2} \rho(\vec{V} \vec{n}) ds = 0,$$

ένθα $\vec{n}$ είναι τό μοναδιαϊον κάθετον διάνυσμα επί τής έπιφανείας ds . Έξ αúτης προκύπτει ότι

$$\boxed{\iint_{S_1} \rho(\vec{V} \vec{n}) ds + \iint_{S_2} \rho(\vec{V} \vec{n}) ds = 0} \quad (9.2.γ)$$



Σχ. 9.2.Α

διότι εις πάν σημείον τής S_0 ισχύει έξ όρισμοϋ ή σχέση $\vec{V} \vec{n} = 0$.

Ή (9.2.γ) έμφράζει πολύ παραστατικώτερον τήν άρχήν τής διατηρήσεως τής μάζης, διότι δι' αúτης φαίνεται ότι τό άλγεβριμόν άθροισμα τής εισερχομένης μάζης διά τής έπιφανείας S_1 , καί τής έξερχομένης μάζης διά τής έπιφανείας S_2 , ίσοϋται μέ τό μηδέν.

9.3 ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

Πρόκειται περί τών σχέσεων αι όποϊαι έμφράζουν τήν έξάρτησιν διαφόρων μεγεθών, ως τά ρ , λ , μ , από τήν πυκνότητα καί τήν θερμοκρασίαν.

Διά τά υλασσιμά ρευστά τά λ καί μ δύνανται νά θεωρηθοϋν ως σταθεραί, όποτε αι έξισώσεις καταστάσεως θά έμφράζουν σχέσεις μεταξύ τών ρ , p , T .

Άπό τάς έξι λητουμένης έξισώσεις (9.α) κατεστρώθησαν μέχρι τής στιγμής τέσσαρες, ήτοι τρεΐς έν τής δυναμικής καί μία έν τής διατηρήσεως τής μάζης. Έπομένως αι έξισώσεις καταστάσεως πρέπει νά δώσουν δύο άμόμη σχέσεις μεταξύ τών μεγεθών ρ , p , T .

Έπειράτησεν εις τήν μηχανικήν τών ρευστών, όπως ή πρώτη έν τών σχέσεων αúτων όνομάζεται χαρακτηριστική έξίσωσις. Αύτή ισχύει δι' ότιονδήποτε φαινόμενον μιās μελετουμένης κατηγορίας ρευστών έξαρτάται δέ άπουλειστικώς από τάς φυσικάς ιδιότητας τής κατηγορίας καί όχι από τό φαινόμενον. Ή γενική μορφή της είναι

$$f(\rho, p, T) = 0. \quad (9.3.α)$$

Ός παράδειγμα αναφέρομεν τήν χαρακτηριστικήν έξίσωσιν τών άσυμπιέστων ρευστών, διά τά όποϊα

$$\rho = \rho_0 = \text{σταθ}.$$

Ἡ δευτέρα τών έξισώσεων υαταστάσεως ονομάζεται συμπληρωματιυή έξίσωσις, έλαρτάται δέ μόνον από τήν μορφήν τοῦ φαινομένου μιᾶς υατηγορίας ρευστών.

Εἰς τήν μηχανικήν τών ρευστών έξετάζομεν συνήθως τρεῖς τύπους φαινομένων καί προυύπτουν οὔτως αἱ αντίστοιχοι συμπληρωματιυαί έξισώσεις:

1) Δι' ισόθερμον μεταβολήν

$$\frac{P}{\rho} = \text{σταθ.}$$

2) Δι' άδιαβατιυήν μεταβολήν

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{σταθ.}$$

Ένθα ο συντελεστής $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, έλαρτάται από τήν φύσιν τοῦ ρευστοῦ ὡς γνωστόν δέ διά τόν άέρα εἶναι $\gamma = 1,4$.

3) Δι' άνταλλαγήν θερμότητος

$$dq = -l ds \frac{dT}{dr} dt,$$

Ένθα $l = s \mu g c_p$, εἶναι ο συντελεστής θερμικής άγωγιμότητος καί r ή πολυή άυτίς τοῦ σημείου.

9.4 ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΕΙΣ ΤΑ ΟΡΙΑ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Αἱ προσδιοριθεῖσαι έυ τών προηγουμένων έξισώσεων έἰς συναρτήσεις u, ρ, p, T , δέον ὅπως ιυανοποιούν επί πλέον ὠρισμένες συνθήμας εἰς τά ὅρια.

Αἱ συνθήμαι αὔται χωρίζονται εἰς δύο υατηγορίας, άναλόγως τής φύσεως τών ὁρίων.

Ἡ πρώτη υατηγορία εἶναι ή γενική περίπτωσης, υατά τήν ὁποίαν τό ὅριον εἶναι μία έπιφάνεια έπαφής S_s (ἴδε παράγραφον 5.3.4). Αἱ συνθήμαι τότε άποτελοῦνται από τήν σχέσηιν (5.3.4.α) ήτις έυφράζεται καί ὑπό τήν μορφήν (5.3.4.γ) ή (5.3.4.δ), καί από δύο άλλας σχέσεις, έυ τών ὁποίων ή μία έυφράζει ὅτι ή συνάρτησις τοῦ διανύσματος τών τάσεων $\vec{T}(M, \vec{n})$ εἶναι συνεχής υατά τήν διέλευσιν τής S_s , καί ή άλλη, ὅτι αἱ σχετιυαί ταχύτητες ενός έυάστου τών ὑλινών χώρων ὡς πρός τήν S_s , εἶναι έπίσης συνεχεῖς υατά τήν διέλευσιν τής S_s .

Ἡ δευτέρα υατηγορία συνθημῶν εἰς τά ὅρια, ή ὁποία καί συνθηέστερον άπαντάται εἰς τήν μηχανικήν τών ρευστών, εἶναι ή περίπτωσης υατά τήν ὁποίαν τό ὅριον εἶναι μία στερεά παρειά, υινητή ή άυίνητος. Εἰς τήν περίπτωση αὔτην ή γενική έξίσωσις δίδεται πάλιν από τάς σχέσεις (5.3.4.γ) ή (5.3.4.δ) έυφράζει δέ ὅτι, διά τυχοῦσαν παρειάν $F(x_1, x_2, x_3, t) = \text{σταθ.}$, τά έν έπαφῇ μέ αὔτην

ρευστά μόρια έχουν σχετιμάς ταχύτητας, έφαπτομένας πρός αúτíην, ήτοι ή ιάθετος πρός τήν παρειάν συνιστώσα τής ταχύτητος τών έφαπτομένων αúτí μορίων είναι πάντοτε μηδενική.

Πλήν όμως τά πραγματικά ρευστά διαφέρουν ριζικώς τών τελείων ρευστών εις ό,τι άφορά τήν έπαφήν των μέ τάς παρειάς. Πράγματι, διαπιστοúται πειραματικώς ότι τό ρευστόν παραμένει προσευολλημένον εις τήν παρειάν, διότι εις τόν μηχανισμόν έπαφής μεταξύ τών μορίων τοú ρευστοú καί τής παρειάς υπεισέρχονται μοριακαί δυνάμεις συναφείας. Τά μόρια τής στερεάς παρειάς κατέχουν σταθεράς θέσεις κατά μέσον όρον καί ή έξωτερική έπιφάνεια τής παρειάς όμοιάζει μέ σφαιέραν, έχουσαν ιενά τετραγωνίδια, εις τό έσωτεριμόν τών όποιών ύπάρχει ίσχυρόν πεδίον μοριακών δυνάμεων.

Ωρισμέναί όριακαί στρώσεις τοú ρευστοú συγκρατοúνται τελείως άπό τάς μοριακάς αúτάς δυνάμεις καί άποτελοúν μίαν αίνιητον ως πρός τήν παρειάν ύγράν ταινίαν. Αί έπόμεναι στρώσεις ύφίστανται όλιγώτερον αúτíην τήν έλξιν, έπομένως ύπάρχει μεταξύ τής σταθεράς παρειάς καί τοú έλευθέρου ρευστοú μία λεπτή μεταβατική στοιβάς, έντός τής όποιας ή ταχύτης τοú ρευστοú μεταβάλλεται άπό τήν ιανονικήν ταχύτητα τοú ρευστοú μέχρι τοú μηδενός. Πρόκειται περί τής ιαλουμένης όριακής στοιβάδος. Λόγω τής άποτόμου αúτης μεταβολής τής ταχύτητος

ή μερική παράγωγος $\frac{d\vec{V}}{dy}$ λαμβάνει μεγάλας τιμάς, όποτε, ως φαίνεται

έν τής σχέσεως $d\vec{F} = \mu \frac{d\vec{V}}{dy} ds$ (ίδε 7.1. β), αί δυνάμεις τοú ιώδους $d\vec{F}$,

γίνονται σημαντικώταται.

Συνάγομεν έξ αúτοú ότι, ή παραδοχή τών τελείων ρευστών

$$\tau_{ij} = 0 \quad \eta \quad \mu = 0$$

ένω προσεγγίζει πολύ τήν πραγματικότητα διά πλείστας περιπτώσεις ιινήσεως, οúδέποτε ιιανοποιεί τάς πραγματικάς συνθήκας εις τά όρια.

Έπομένως δέν άρκει νά ύποθέσωμεν άπλως ότι $\mu = 0$, διά νά μεταπηδήσωμεν έν τών πραγματικών εις τά τέλεια ρευστά, διότι ιινδυνεύομεν νά έχωμεν έσφαλμένα άποτελέσματα, λόγω σφαλμάτων εις τάς συνθήκας τών όρίων.

Γενικώτερον, εις έν σύστημα διαφορικών έξισώσεων, ό μηδενισμός άπειροστών άνωτέρας τάξεως δύναται νά όδηγήση εις άποτελέσματα διάφορα έμείνων τά όποια θά προέκυπτον άπό τήν λύσιν τοú πλήρους συστήματος καί τόν έν συνεχεία μηδενισμόν τών άπειροστών άνωτέρας τάξεως εις τάς λύσεις, διότι παραλείπονται ώρισμέναί όριακαί συνθήκαι. Εύτυχως, αί περιπτώσεις αúταί άποτελοúν τάς έξαιρέσεις εις τά προβλήματα τής φυσικής.

Έν συμπέρασματι, διά τήν δευτέραν ιατηγορίαν μέ όριον στερεάν παρειάν, αί συνθήκαι (5.3.4. γ) ή (5.3.4. δ) δέν άρμοúν διά τά πραγματικά ρευστά. Άπαιτείται δέ καί μία πρόσθετος συνθήκη, έμφράζουσα

ὅτι καί ἡ σχετιῇ ἐφαπτομενική ταχύτης τοῦ ρευστοῦ ὡς πρὸς τήν παρειάν εἶναι ἐπίσης μηδενική.

Ἡ μαθηματικὴ μελέτη τοῦ ὅλου θέματος, ἀναγομένη εἰς τήν μελέτην τής ὁριαῆς στοιβάδος, ἐξετάζεται εἰς τό σχετιζόν μέ τήν υἱ-νῆσιν τών πραγματικῶν ρευστῶν V μέρος.

9.5 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ἀναλόγως τών εἰδιῶν συνθημῶν ἐυάστης μορφῆς ροῆς ἢ ἐυάστου ρευστοῦ, δυνάμεθα νά διαυρίνωμεν τὰς ἐλῆς συνήθεις περιπτώσεις εἰς τήν μηχανικήν τών ρευστῶν:

9.5.1 Ἐξωτερικαὶ δυνάμεις ἐκ πεδίου βαρύτητος

Εἰς τήν περίπτωση αὐτήν θά ἰσχύη ἡ σχέση

$$\vec{f} = \rho \vec{g}, \quad (9.5.1. \alpha)$$

ἐνθα $\vec{g}$ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τής βαρύτητος, θεωρουμένη συνήθως ὡς σταθερά.

Δι' ὅξονα Ox_3 τής αὐτῆς διευθύνσεως καί ἀντιθέτου φορᾶς μέ τήν ἐπιτάχυνσιν $\vec{g}$, θά ἔχωμεν ὅτι

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = -\rho g.$$

Διὰ τυχόντας ὁξονας, ἡ σχέση (9.1.1) δύναται νά γραφῇ

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \vec{V}^2 + (\text{rot} \vec{V}) \wedge \vec{V} \right] = \rho \vec{g} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{v}_i + (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \vec{V} \quad (9.5.1. \beta)$$

Αἱ λοιπαὶ ἐξισώσεις διατηροῦν τήν μορφήν τής παραγράφου 9.1.

9.5.2 Ἰξώδη ἢ πραγματικὰ ἀσυμπίεστα ρευστὰ

Διὰ τήν κατηγορίαν αὐτήν τών ρευστῶν, ἥτις περιλαμβάνει καί ὅλα τὰ πραγματικά ὑγρά, ἰσχύουν αἱ σχέσεις (7.3.2. α) καί (7.3.2. β). Αἱ ἐξισώσεις μετασχηματίζονται ἐπομένως ὡς ἀκολούθως:

Ἐξισώσεις ἐκ τής δυναμικῆς

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \vec{V}^2 + (\text{rot} \vec{V}) \wedge \vec{V} \right] = \vec{f} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{v}_i \quad (9.5.2. \alpha)$$

Αἱ ἐξισώσεις (9.5.2. α), ὑπὸ ἀναλυτικῆν μορφήν, ὀνομάζονται συνήθως ἐξισώσεις τοῦ NAVIER.

Ἐξίσωσις συνεχείας

$$\text{div} \vec{V} = 0, \quad (9.5.2. \beta)$$

ἢ

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

Ἡ σχέση (9.1.2.γ) λαμβάνει ἐξ ἄλλου τήν μορφήν

$$\iint_{\Sigma_1} (\vec{V} \vec{n}) ds + \iint_{\Sigma_2} (\vec{V} \vec{n}) ds = 0 \quad (9.5.2.γ)$$

Χαρακτηριστική έξίσωσις

$$\rho = \rho_0 = \text{σταθ.} \quad (9.5.2.δ)$$

Συμπληρωματική έξίσωσις

Τοιαύτη έξίσωσις τής μορφῆς (9.3.β) ἢ (9.3.γ) δέν ὑπάρχει, δεδομένου ὅτι ἡ πυκνότης εἶναι σταθερά καί ἀνεξάρτητος τής πιέσεως. Ἐάν εἰς τά φαινόμενα ὑπεισέρχονται ἀνταλλαγαί καί μεταβολαί θερμοτήτος, θά ἔχωμεν τήν συμπληρωματικήν έξίσωσιν (9.3.δ).

Συνθῆμαι εἰς τά ὅρια

Ἰσχύουν ἀπολύτως τά ἀναφερόμενα εἰς τήν παράγραφον 9.3. Συμπληρωματικῶς ἀναφέρομεν ὅτι αἱ συνθῆμαι ὀλισθήσεως τοῦ ρευστοῦ ἐπὶ τῶν παρεῶν πρέπει νά ἀντιματασταθοῦν ἀπό συνθήμας προσφύσεως. Μαθηματικῶς ἐπίσης προϋπτεῖ ἡ ἀνάγκη αὐτή τῆς προσθέτου συνθήμας λόγω τοῦ ὅτι αἱ διαφορμαί έξισώσεις τῶν ἰσῶδῶν ρευστῶν εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, ἐνῶ αἱ τῶν τελείων ρευστῶν εἶναι πρώτου.

9.5.3 Τέλεια ἀσυμπίεστα ρευστὰ

Ἡ φυσική καί μαθηματική ὑφή τῆς κατηγορίας αὐτῆς τῶν ρευστῶν προσδιορίζεται πλήρως ἀπό τὰς σχέσεις (7.3.1.α) καί (7.3.1.β). Ὁ νόμος τάσεων-παραμορφώσεων λαμβάνει τήν μορφήν τοῦ νόμου διὰ τυχόν υλασσιμόν ρευστόν ἐν ἰσορροπίᾳ. Ἐπὶ πλέον, λόγω μηδενισμοῦ τοῦ τανυστοῦ τοῦ ἰσῶδους δι' οἷανδήποτε παραμόρφωσιν, ἥτοι διὰ πᾶσαν τιμήν τοῦ τανυστοῦ τῶν παραμορφώσεων,

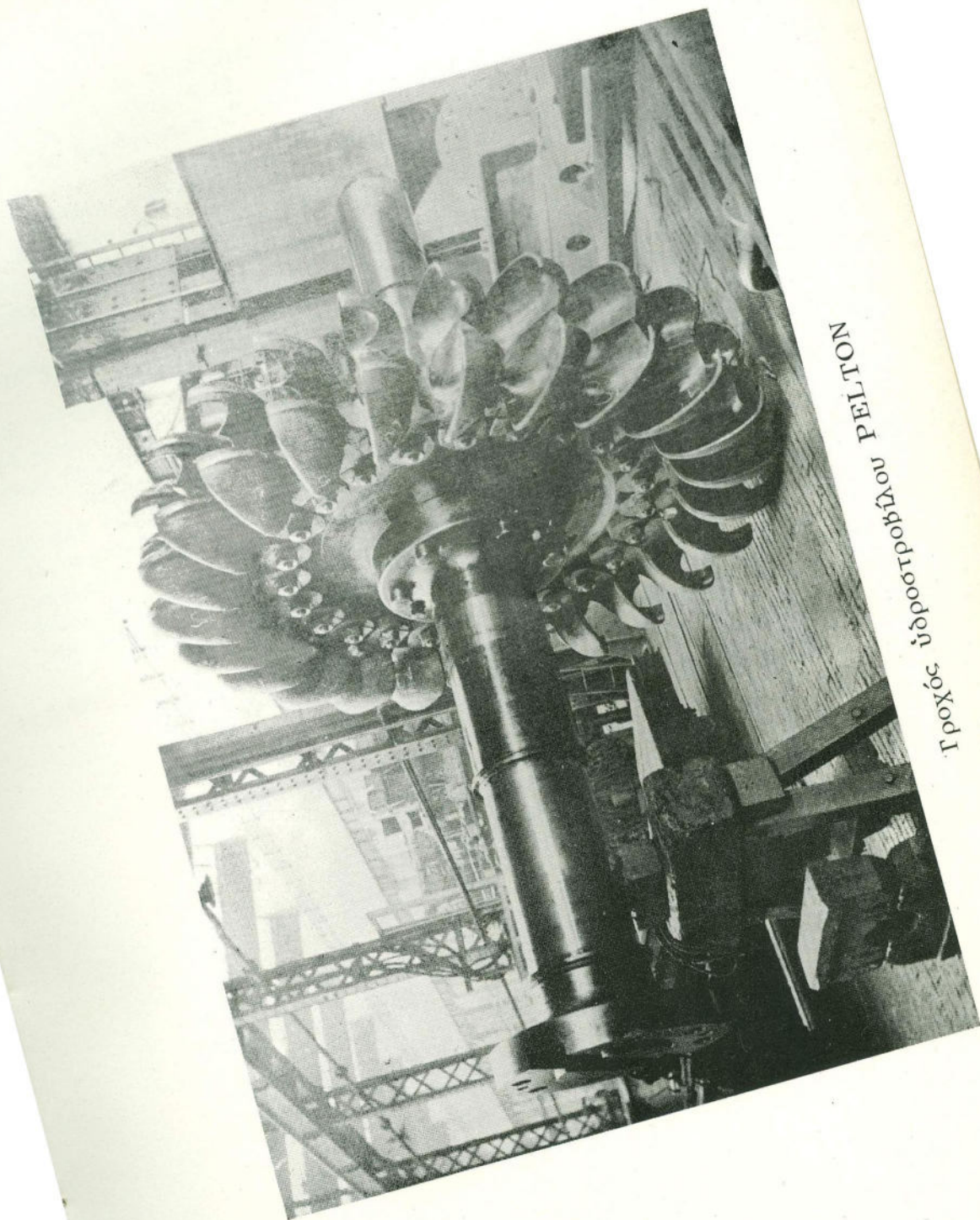
$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} = 0$$

προϋπτεῖ ὅτι $\mu = 0$ καί αἱ διαφορμαί έξισώσεις δευτέρας τάξεως (9.1.α) ἀπλοποιοῦνται εἰς έξισώσεις πρώτης τάξεως, λαμβάνουσαι τήν μορφήν

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \vec{V}^2 + (\text{rot} \vec{V}) \wedge \vec{V} \right] = \vec{f} - \text{grad} p \quad (9.5.3.α)$$

Αἱ έξισώσεις (9.5.3.α) ὑπὸ ἀναλυτικὴν μορφήν ὀνομάζονται συνήθως έξισώσεις τοῦ EULER.

Αἱ λοιπαί έξισώσεις παραμένουν αἱ αὐταί μέ τὰς τῆς προηγουμένης παραγράφου.



Τροχός υδροστρόβιλου PELTON

Ὡς πρὸς τὰς συνθήκας εἰς τὰ ὅρια, ἰσχύουν καὶ ἀρμοῦν αἱ σχέσεις (5.3.4.γ) ἢ (5.3.4.δ), μέ ὅλας τὰς ἐπιφυλάξεις τὰς ἀναπτυχθεῖσας εἰς τὴν παράγραφον (9.4).

9.5.4 Τέλεια συμπιεστά ρευστά

Αἱ ἐξισώσεις δυναμικῆς διατηροῦν τὴν μορφήν (9.5.3α), μέ μόνην οὐσιαστικὴν διαφορὰν εἰς τὴν πυκνότητα ρ , ἥτις εἶναι τώρα μεταβλητὴ συνάρτησις τῆς μορφῆς $\rho = \rho(M, t) = \rho(x_i, t)$.

Ἡ ἐξίσωσις συνεχείας ἔχει τὴν γενικὴν μορφήν τῆς παραγράφου 9.2.

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις ὡς καὶ ἡ συμπληρωματικὴ ἐξίσωσις ἔχουν τὰς γενικὰς μορφὰς τὰς δοθεῖσας εἰς τὴν παράγραφον (9.3), παραπέμπομεν δέ καὶ εἰς ὅσα ἀνεφέρθησαν εἰς (7.3.3) περὶ βαροτροπιῶν ρευστῶν.

Τέλος διὰ τὰς συνθήκας εἰς τὰ ὅρια ἰσχύουν ὅσα ἐλέχθησαν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον μέ τὴν ἐξῆς προσθήκην: Εἰς τὰ συμπιεστά ρευστά ἔχομεν, πλέον σύνητες, τὸ φαινόμενον τῶν σημαντικῶν ἀνταλλαγῶν θερμικῆς ἐνεργείας εἰς τὴν ὁριακὴν των στοιβάδα μέ ἀντίστοιχον εἰσαγωγὴν εἰδωῶν ἐξισώσεων, προϋπάρχουσιν ἀπὸ τὴν λεπτομερικὴν μελέτην τῆς ὁριακῆς στοιβάδος, αὐτῆς καθ' ἑαυτήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1Ο.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ BERNOULLI - ΑΣΤΡΟΒΙΟΙ ΡΟΑΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΩΛΗΝΩΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Ἡ ματάστρωσις τῶν ἐξιώσεων τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου θέτει ἀπλῶς μίαν πρώτην μαθηματικὴν βάσιν διὰ τὰ προβλήματα τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν. Ἡ προσπάθεια ἐπιλύσεώς των προσυροῦει τὰς περισσότεράς φορές εἰς ἀνυπερβλήτους δυσχερείας καὶ μόλις τώρα πλησιάζομεν πρὸς τὴν λύσιν τῶν ἐξιώσεων τοῦ NAVIER, τῇ βοηθείᾳ τῶν τελευταίων ἰσχυρῶν συγιροτημάτων ἡλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

Αἱ πρῶται προσπάθειαι τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν συνευεντρώθησαν ἐπομένως εἰς τὴν ἐπίλυσιν ὠρισμένων ἀπλῶν περιπτώσεων, δι' ὁλοκληρώσεως τῶν ἀντιστοιχῶν ἐξιώσεων καὶ ἐξ αὐτῶν προέκυψαν τὰ θεωρήματα BERNOULLI.

10.1 ΠΡΩΤΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BERNOULLI

Τὸ θεώρημα αὐτὸ εἶναι τὸ γνωστότερον καὶ τὸ πλέον ἐφαρμοζόμενον εἰς τὴν μηχανικὴν τῶν ρευστῶν. Ἐπὶ τοῦ πεδίου ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ὑπάρχει σύγχυσις εἰς τὴν συνήθη βιβλιογραφίαν λόγῳ τοῦ ὅτι αἱ πρὸς ἀπόδειξίν του ἀνιολογούμεναι μέθοδοι εἶναι περιορισμένης μαθηματικῆς ἰσχύος. Εἰς τὴν συνέχειαν θὰ δώσωμεν τὴν μόνην, καθ' ὅσον γνωρίζομεν, πλήρη ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ὀφειλομένην εἰς τὸν P. GERMAIN.

Αἱ ἀναγκαῖαι παραδοχαὶ διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς θεμελιώδους ἐξίσωσης τῆς δυναμικῆς, καὶ κατὰ συνέπειαν διὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ πρώτου θεωρήματος τοῦ BERNOULLI, εἶναι αἱ ἑξῆς:

1) Τὸ ρευστὸν εἶναι τέλειον.

2) Τὸ ρευστὸν εἶναι ἀσυμπιεστόν ἢ βαροτροπιόν (μέ νόμον καταστάσεως ἐκφραζόμενον ἀπὸ τὴν σχέσιν $dp = \rho dh$ ἔνθα h εἶναι νέα μεταβλητὴ μέ διαστάσεις πίεσεως ἀνά μονάδα μᾶζης. Ὁ νόμος αὗτός ἰσχύει διὰ τέλεια ἀέρια εἰς ἰσόθερμον μεταβολήν).

3) Αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις $\vec{f}$, προκύπτουν ἀπὸ δυναμιὸν πε-

δίου, μέ συνάρτησιν δυναμιού $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3)$. Διά δυνάμεις ἐν πεδίου βαρύτητος, θά εἶναι $\Phi = -gx_3 = -gz$.

Διά τήν ὁλουλήρῳσιν πολλαπλασιάζομεν ἐσωτερικῶς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (9.5.3.α) ἐπὶ τό διάνυσμα τῆς ταχύτητος $\vec{V}(M)$ τοῦ τυχόντος σημείου M . Δεδομένου ὅτι τό διάνυσμα $(\text{rot} \vec{V}) \wedge \vec{V}$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τό διάνυσμα $\vec{V}$, θά προύψῃ ἡ σχέση

$$\rho \vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \left(\text{grad} \frac{V^2}{2} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \frac{1}{\rho} \vec{f} \right) = 0. \quad (10.1.α)$$

Λόγῳ τῶν ἀρχικῶν παραδοχῶν θά ἔχωμεν ἐξ ἄλλου ὅτι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \text{grad} p &= \text{grad} h, \\ \vec{f} &= \rho \text{grad} \Phi, \end{aligned} \quad (10.1.β)$$

ὁπότε ἡ (10.1.α) λαμβάνει τήν μορφήν

$$\rho \vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + h - \Phi \right) = 0,$$

$$\eta \quad \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \rho \vec{V} \text{grad} H = 0, \quad (10.1.γ)$$

$$\text{ὅπου ἐτέθη } H = \frac{V^2}{2} + h - \Phi.$$

Ἡ σχέση (10.1.γ) δέν εἶναι εἰσέτι ὁλουληρώσιμος, ἐπομένως χρειάζεται μία ἐπὶ πλέον παραδοχή, ἡ

$$4) \text{ Ἡ ροή εἶναι μόνιμος, ὁπότε ὁ ὅρος } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) \text{ μηδενίζεται}$$

καί ἡ σχέση (10.1.γ) γίνεται

$$\vec{V} \text{grad} H = 0. \quad (10.1.δ)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τό πρῶτον μέλος τῆς (10.1.δ) ἰσοῦται μέ τήν μοριακὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως H τοῦ τυχόντος σημείου M , διότι $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \vec{V} \text{grad} H = \vec{V} \text{grad} H$, ἐπομένως ἡ (10.1.δ) εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} + h - \Phi \right) = 0} \quad (10.1.ε)$$

Λαμβανομένης υπ' όψιν τής έννοίας τής μοριακής παραγώγου, ή σχέση (10.1.ε) δίδει τήν πλήρη και γενική μαθηματική έκφραση, του πρώτου θεωρήματος του BERNOULLI διότι μεταφράζεται ως έξής:

" Διά μόνιμον ροήν και τέλειον ρευστόν άσυμπύεστον ή βαροτροπικόν μέ δυναμικόν πεδίον έξωτερικών δυνάμεων, ή συνάρτησις $H = \frac{V^2}{2} + h - \Phi$ παραμένει σταθερά κατά

τά μήκος μίας και τής αύτης τροχιάς ενός σωματιδίου του ρευστού και κατά συνέπειαν κατά μήκος μιάς και τής αύτης γραμμής ροής."

Μέ βάση τήν σχέση (10.1.γ) προκύπτει και μία άλλη όλουληρωτική μορφή του θεωρήματος του BERNOULLI, χρήσιμος δι' ώρισμένης εφαρμογής.

Λόγω του ότι ισχύει γενικώς ή σχέσις

$$\text{div}(\rho H \vec{V}) = H \text{div}(\rho \vec{V}) + \rho \vec{V} \text{grad} H,$$

δι' άντιμεταστάσεως των $H \text{div}(\rho \vec{V}) = -H \frac{\partial \rho}{\partial t}$, έκ τής έκτάσεως συνεχείας, και $\rho \vec{V} \text{grad} H = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right)$, έκ τής σχέσεως (10.1.γ), θα έχωμεν

$$\text{div}(\rho H \vec{V}) = -(h - \Phi) \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{V^2}{2} \right)$$

και δι' όλουληρώσεως είς τυχόντα ύψιόν όγκον V περιβαλλόμενον υπό τής υλειστής έπιφανείας S , επί τη βάσει του θεωρήματος GREEN-OSTROGRADSKI, προκύπτει ή σχέσις

$$\iint_S H \rho (\vec{V} \vec{n}) ds = - \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{V^2}{2} \right) + (h - \Phi) \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV. \quad (10.1.ζ)$$

Τό πρώτον μέλος τής σχέσεως (10.1.ζ) παριστά τήν ροήν τής συνάρτησεως $H \rho$ διά τής έπιφανείας S . Παρατηρούμεν ότι διά μόνιμον ροήν, ή (10.1.ζ) δίδει

$$\iint_S H \rho (\vec{V} \vec{n}) ds = 0 \quad (10.1.η)$$

υαί έμφράζει ότι ή παροχή μάλης τής συναρτήσεως H είς τήν περίπτωσιν μονίμου ροής ένός ρευστού διά μέσου τής υλειστής έπιφανείας S , είναι μηδενική.

Τά προβλήματα τών συμπιεστών βαροτροπιών ρευστών, μέ έξωτερικής δυνάμεις έν πεδίου βαρύτητος, αποτελοῦν τό υύριον άντιμεείμενον τής άεροδυναμικής. Είς αυτά χρησιμοποιείται ή σχέση (10.1.ε) υπό τήν μορφήν

$$VdV + \frac{dp}{\rho} + g dz = 0 \quad (10.1.θ)$$

είς τήν οποίαν τά διαφοριά του πρώτου μέλους έχουν τήν φυσικήν έννοϊαν μίας μικρής μεταβολής τής ταχύτητος τής πιέσεως υαί του ύψομέτρου υατά τήν χρονικήν εξέλιξιν του φαινομένου. Ούτως, είς φαινόμενα λαμβάνοντα χώραν είς τήν αúτην περίπου όριζοντίαν έπιφάνειαν, λαμβάνεται ό τρίτος όρος τής (10.1.θ) ως μέ τό μηδέν, άνάλογα δέ ίσχύουν υαί διά τούς άλλους δύο όρους.

10.2 ΜΟΡΦΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BERNOULLI ΕΙΣ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ

Ή υδραυλική είναι υλάδος τής μηχανικής τών ρευστών μέ άντιμεείμενον τά φαινόμενα τής κινήσεως του ύδατος έντός του πεδίου βαρύτητος.

Λόγω του πρακτικώς άσυμπιέστου του ύδατος υαί τών έξωτερικών δυνάμεων έν δυναμικου πεδίου βαρύτητος, θά έχωμεν

$$h = \frac{p}{\rho} \quad , \quad \Phi = -gx_z = -gz \quad ,$$

όπότε ή σχέση (10.1.ε) λαμβάνει τήν συνήθη, διά τά προβλήματα τής υδραυλικής, μορφήν

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{σταθ.} \quad (10.2.α)$$

υαί έμφράζει τήν διατήρησιν τής ένεργειακής συναρτήσεως H υατά μήκος μιας τροχιάς υπό τήν μορφήν $\frac{H}{g} = \text{σταθ.}$, ή οποία προσφέρεται υαλύτερον διά τας έφαρμογάς, διότι έχει διαστάσεις ύψους.

Παρατηρούμεν ότι είς τήν σχέση (10.2.α) τό σταθερόν ένεργειακόν ύψος $\frac{H}{g}$ έμφανίζεται ως σταθερόν άθροισμα τριών επίμέρους ένεργειακών ύψών. Έπευράτησαν είς τήν υδραυλικήν διά τά τρία αυτά ύψη αί άιόλουθοι όνομασίαι:

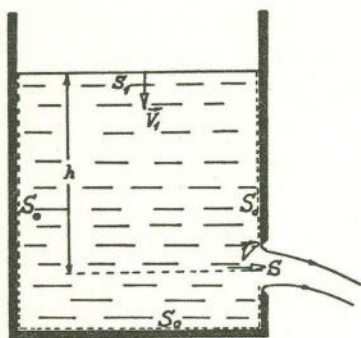
$\frac{V^2}{2g}$: υινητιυδόν ὕψος ἢ ὕψος υινητιυῆς ἐνεργείας τοῦ ρευστοῦ μορίου.

$\frac{p}{\rho g}$: πιεζομετριυδόν ὕψος ἢ ὕψος ἐνεργείας ἐν τῇς ὑδροστατιυῆς πιέσεως τοῦ ρευστοῦ μορίου.

z : δυναμιυδόν ὕψος ἢ ὕψος ἐνεργείας ἐν τῇς θέσεως τοῦ ρευστοῦ μορίου.

Διὰ τὴν πληρεστέραν υατανόησιν τῇς σημασίας τοῦ πρώτου θεωρήματος BERNOULLI εἰς τὴν ὑδραυλιυῆν, δίδομεν ὠρισμένας ἀπλὰς ἐφαρμογὰς.

10.2.1 Τύπος τοῦ Torricelli



Σχ. 10.2.1.Α

Ἐν ἀσυμπίεστον ἢ βαροτροπιυδόν ρευστόν, εὑρισυόμενον ἐντὸς δοχείου, διαρρέει μέσῳ μιυρᾶς ὀπῆς εὑρισυομένης εἰς τὴν παρειάν τοῦ δοχείου, διατομῇς S (Σχ. 10.2.1.Α) Ζητεῖται ἡ τιμή τῇς ταχύτητος τῇς ρευστῇς φλεβὸς εἰς τὴν διατομήν S .

Κατ' ἀρχήν, ἡ ροή δέν εἶναι ἀπολύτως μόνιμος. Πλήν ὁμως δεχόμεθα ὅτι ἡ παράγωγος ὡς πρὸς τὸν

χρόνον τῇς συναρτήσεως $\frac{V^2}{2}$ τείνει

πρὸς τὸ μηδέν, ἐφ' ὅσον ἡ διατομή S εἶναι πολὺ μιυρά ἐν σχέσει μέ τὴν διατομήν S_0 .

Διὰ τὴν εὑρεσιν τῇς ταχύτητος δέν θά ἐφαρμόσωμεν τὴν συνήθη μέθοδον τῇς θεωρήσεως μιᾶς τροχιᾶς ἐμυινούσης ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν S_0 υαί υαταληγούσης εἰς τὴν S , διότι αὐτὴ στηρίζεται εἰς ἀμφιβόλου ἀυριβεῖας φυσιαῶς παραδοχᾶς ἐπὶ τῇς ἐννοῖας τῇς τροχιᾶς.

Ἄν ἀντιθέτως ἐφαρμόσωμεν τὴν σχέσιν (10.1.η), δεχόμενοι ὅτι ἡ ταχύτης V υαί ἡ πίεσις p εἶναι ὁμοιομόρφως υατανεμημένα εἰς τὴν διατομήν S , θά ἔχωμεν ὅτι

$$\iint_{S_0} H_0 \rho (\vec{V} \vec{n}) ds + \iint_S H \rho (\vec{V} \vec{n}) ds = 0, \quad (10.2.1.α)$$

διότι, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν S_0 , τὸ ἐσωτεριυδόν γινόμενον $\vec{V} \vec{n}$ εἶναι ἐν ταυτότητος μηδέν.

Ἐξ ἄλλου $H_0 = \frac{p_0}{\rho}$ υαί $H = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gh$ ἐνθα p_0 εἶναι ἡ ἀτμοσφαιριυῆ πίεσις, μεταδιδόμενη ὁμοιομόρφως εἰς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν S . Ἐθεωρήθη δέ ὅτι υαί ἡ ταχύτης V_0 τείνει πρὸς τὸ μηδέν διότι ἡ διατομή S_0 υατέρχεται βραδύτατα.

Παρατηρούμεν άμέσως ότι ή έξίσωσις συνεχείας

$$\iint_{S_1} \rho (\vec{V} \vec{n}) ds + \iint_{S_2} \rho (\vec{V} \vec{n}) ds = 0$$

συμβιβάζεται μέ τήν (10.2.1. α), μόνον διά $H_1 = H_2$.

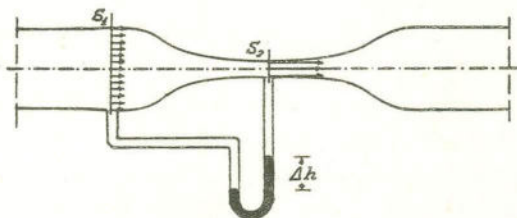
Έν τής ισότητος αυτής προκύπτει ή ζητούμενη ταχύτης

$$V = \sqrt{2gh} \quad (10.2.1. \beta)$$

ή σχέσις δέ αυτή είναι γνωστή ως τύπος του TORRICELLI

10.2.2. Μετρητής Venturi

Ο μετρητής VENTURI χρησιμοποιείται εύρύτατα είς τήν υδραυλικήν καί αεροδυναμικήν, διά τήν εύρεσιν τής παροχής έντός υλειστών άγωγών. Μέ τήν έννοιαν παροχή, ύπονοείται συνήθως ή παροχή όγμου (παράγραφος 1.5.1) καί παριστάνεται ό είς τήν μονάδα του χρόνου διερχόμενος όγμος ρευστου μέσφ μιας διατομής.



Σχ. 10.2.2. Α

Διά τήν έφαρμογήν του θεωρήματος BERNOULLI είς τόν μετρητήν VENTURI, γίνονται αι ακόλουθοι παραδοχαί:

1) Υποτίθεται άμελητέα ή επίδρασις των έξωτερικών δυνάμεων ($\vec{f} = 0$) καί ή υπόθεσις αυτή ίσχύει μέ ύανοποιητιμήν προσέγγισιν δι'όλας τας συνήθεις περιπτώσεις ροής υπό πίεσιν έντός υλειστών άγωγών.

2) Αι πιέσεις καί αι ταχύτητες (p, V) θεωρούνται σταθεραί ανά διατομήν. Η υπόθεσις αυτή δικαιολογείται επίσης πειραματικώς, διότι τό χαρακτηριστικόν μέγεθος μεταφοράς τής κινητικής ένεργείας είς τούς υλειστούς άγωγούς άντιπροσωπεύεται από τήν μέσην ταχύτητα τής διατομής.

Η έξίσωσις συνεχείας καί τό πρώτον θεώρημα BERNOULLI (σχέσις 10.2. α), δίδουν, ναότιπιν των άνωτέρω, τας σχέσεις

$$V_1 S_1 = V_2 S_2 ,$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} . \quad (10.2.2. \alpha)$$

Λύοντες τās σχέσεις (10.2.2.α) ως πρὸς V_1 , προϋπτεῖ

$$V_1 = \frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \sqrt{2g\Delta h},$$

δεδομένου ὅτι $\frac{P_2}{\rho g} - \frac{P_1}{\rho g} = \Delta h$.

Ἡ ζητούμενη παροχή θά εἶναι ἐπομένως

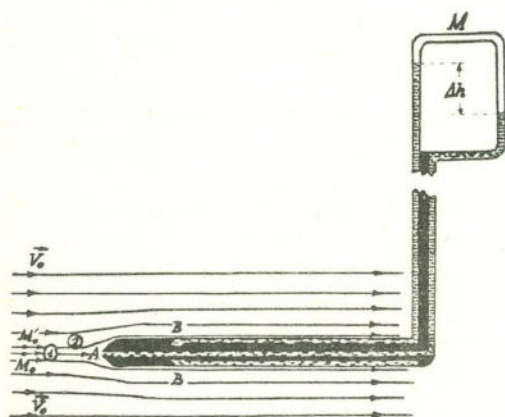
$$Q = V_1 S_1 = V_2 S_2 = K \sqrt{2g\Delta h},$$

ἐνθα

$$K = \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \quad (10.2.2.β)$$

Εἰς τὴν πρᾶξιν, ἀντὶ τοῦ συντελεστοῦ K , ὑπάρχει εἰς συντελεστής K' τῆς μορφῆς $K' = K_1 \cdot K$ ὅπου K_1 εἶναι ἐμπειρικός συντελεστής, διδόμενος ἀπὸ τοὺς πειραματιστάς τῶν σωλήνων VENTURI καὶ παραπλήσιος τῆς μονάδος. Ἐπ' αὐτῶν ὅμως θά ἐπανέλθωμεν εἰς τὴν ἐφερμοσμένην ὑδραυλικήν.

10.2.3. Σωλὴν Pitot



Σχ.10.2.3.Α

Ὁ σωλὴν PITOT ἀποτελεῖ τό συνηθέστερον χρησιμοποιούμενον ὄργανον διὰ τὴν μέτρησην τῆς ταχύτητος εἰς τό τυχόν σημεῖον τῆς ροῆς ἐνός συμπιεστοῦ ἢ ἀσυμπέστου ρευστοῦ, (Σχ.10.2.3.Α)

Ἐντός μονίμου ροῆς ἀσυμπέστου ἢ βαροτροπιμοῦ ρευστοῦ, μέ πεδῖον ταχυτήτων πέραν τοῦ A , τῆς μορφῆς $\vec{V}_0$ = σταθερά, παρεμβάλλεται τό ὄργανον τοῦ σχήματος, ἀποτελούμενον ἀπὸ διπλοῦν συναξονιμόν σωλήνα, συγμοιωννοῦντα μέ τό ρευστόν ἀπὸ τὴν ὀπήν A καὶ τὴν διαμετρηιὴν σχισμὴν B .

Οἱ χῶροι τῶν δύο σωλήνων ἐνοῦνται μέσῳ τοῦ κλειστοῦ σωλήνος M

Ἐφαρμόζομεν τό πρῶτον θεώρημα τοῦ BERNOULLI διὰ τās γραμμάς ροῆς ① καὶ ②, μεταξύ τῶν σημείων M_0, A καὶ M_0', B , θεωροῦντες τόν σωλὴνα ὀριζόντιον ἢ, γενικώτερον, ἀμελητέας τās ἐξωτερικὰς δυνάμεις, ὅποτε προϋπτοῦν αἱ σχέσεις

$$\frac{V_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\rho g} = \frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g}, \quad (10.2.3. \alpha)$$

$$\frac{V_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\rho g} = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g}.$$

Υποθέτοντες ότι $V_A = 0$, $p_o = p_o'$, και $V_B = V_o$, θα προκύψει η ζητούμενη ταχύτης της ροής εις την περίε του σημείου A περιοχόν,

$$\boxed{V_o = \sqrt{2g \Delta h}}, \quad (10.2.3. \beta)$$

δεδομένου ότι

$$\frac{p_A}{\rho g} - \frac{p_B}{\rho g} = \Delta h.$$

10.3 ΡΟΗ ΑΣΤΡΟΒΙΛΟΣ Ή ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BERNOULLI

Μία ροή υαλείται άστροβίλος ή μέ δυναμιόν πεδίον ταχυτήτων εις δεδομένην χρονιήν στιγμήν t , και έντός μιās περιοχής V , όταν ή περιστροφή $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$ είναι μηδενιή εις πάν σημείον της περιοχής V , διά την δεδομένην αύτήν χρονιήν στιγμήν.

Δεδομένου ότι έξ όρισμοϋ ίσχύει διά τάς άστροβίλους ροάς ή σχέσις $\text{rot } \vec{V} = 0$, έπεται ότι τό διανυσματιόν πεδίον τών ταχυτήτων $\vec{V}$ είναι δυναμιόν πεδίον (ϊδε 2.1.2) και έπομένως ότι ύπάρχει μία συνάρτησις $\varphi(x_i, t)$ διά την όποιαν ίσχύει ή σχέσις

$$\boxed{\vec{V} = \text{grad } \varphi}. \quad (10.3. \alpha)$$

Αι συνιστώσαι της ταχύτητος δίδονται από τάς σχέσεις

$$\boxed{v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}. \quad (10.3. \beta)$$

Η συνάρτησις $\varphi(x_i, t)$ είναι τό δυναμιόν του πεδίου τών ταχυτήτων διά την ύπ' όψιν άστροβίλον

ροήν.

Ἀπλή ἐφαρμογή τῆς σχέσεως (5.1.2.λ) δευνύει ἐξ ἄλλου ὅτι, διὰ πᾶσαν ἀστροβίλον ροήν, ἡ κυκλοφορία κατὰ μήκος τυχούσης καμπύλης C , ἀποληγούσης εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B , εἶναι

$$\Gamma = \int_C \vec{V} d\vec{l} = \varphi_B - \varphi_A \quad (10.3.γ)$$

καὶ διὰ τυχούσαν κλειστήν καμπύλην

$$\Gamma = 0. \quad (10.3.δ)$$

Ἐφιστῶμεν τὴν προσοχήν εἰς τὸ γεγονός ὅτι ἡ σχέση (10.3.δ) ἰσχύει ἐφ' ὅσον ἡ κλειστή καμπύλη C δέν διαπερᾶται ἀπὸ γραμμὴν ἀποτελοῦσαν γεωμετρικὸν τόπον ἀνωμάτων σημείων τῆς συναρτήσεως φ .

Ἄς ἐξετάσωμεν π.χ. τὴν συνάρτησιν $\varphi = \arctg \frac{x_1}{x_2} = \vartheta$. Ἀποδεωνύ-

εται εὐνόως ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ἀρμονικὴ ($\Delta\varphi=0$) καὶ ὁμαλὴ διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ χώρου ἐντός τῶν σημείων τοῦ ἄξονος x_3 , (διὰ τὸν ὁποῖον $x_1=0$, $x_2=0$)

Ἡ κυκλοφορία τῆς ταχύτητος μιᾶς ἀστροβίλου ροῆς, διὰ τὴν ὁποῖαν $\vec{V} = \text{grad} \left(\arctg \frac{x_1}{x_2} \right)$, θά εἶναι μηδενικὴ διὰ πᾶσαν κλει-

στήν καμπύλην, μὴ διαπερωμένην ἀπὸ τὸν ἄξονα τῶν x_3 . Ἀντιθέτως, διὰ πᾶσαν κλειστήν καμπύλην, διαπερωμένην ἀπὸ τὸν ἄξονα τῶν x_3 , θά ἰσχύῃ ἡ σχέση

$$\Gamma = \int_C d\vartheta = 2\pi k,$$

ἐνθα k εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν περιστροφῶν τοῦ διανύσματος $\vec{V}$.

Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν περίπτωσιν ἀστροβίλου ροῆς τελείου ἀσυμπιέστου ἢ βαροτροπιμοῦ ρευστοῦ μέ ἐξωτερικᾶς δυνάμεις προϋπάρχουσας ἀπὸ δυναμικὸν πεδίου τῆς μορφῆς (10.1.β).

Λόγω τοῦ ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial (\text{grad} \varphi)}{\partial t} = \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

ἡ πρώτη τῶν σχέσεων (10.1.γ) γίνεται

$$\rho \vec{V} \left[\text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + h - \Phi \right) \right] = 0 ,$$

$$\text{ή} \quad \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + h - \Phi \right) = 0 . \quad (10.3.ε)$$

Εν τῇς σχέσεως (10.3.ε) προϋπτεῖ ὅτι ἡ ἐντός παρενθέσεως συνάρτησις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου M , ἐξαρτωμένη μόνον ἀπὸ τὸν χρόνον t . Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως τὴν σχέσιν

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + h - \Phi = \mathcal{A}(t)} , \quad (10.3.ζ)$$

διὰ τῆς ὁποίας ἐμφράζεται τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ BERNOULLI ὡς ἐξῆς:

"Διὰ πᾶσαν ἀστροβίλον ροὴν τελείου ἀσυμπιέστου ἢ βαροτροπικοῦ ρευστοῦ, μέ ἐξωτερικῆς δυνάμεις προϋπτούσας ἀπὸ τὸ δυναμιὸν πεδίου τῆς συναρτήσεως Φ , τὸ πρῶτον μέρος τῆς σχέσεως (10.3.ζ) λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμὴν δι' ὅλα τὰ σημεία τῆς ἀστροβίλου ροῆς. Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν μὴ μόνιμου ροῆς, ἡ τιμὴ αὕτη μεταβάλλεται συναρτῆσαι καὶ μόνον τοῦ χρόνου".

Ἐάν ἡ ροὴ εἶναι μόνιμος, ἡ σχέση (10.3.ζ) λαμβάνει τὴν μορφήν

$$\boxed{\frac{V^2}{2} + h - \Phi = H = \text{σταθ.}} . \quad (10.3.η)$$

Ἐφιστῶμεν τὴν προσοχὴν εἰς τὴν θεμελιώδη διαφορὰν μεταξύ πρώτου καὶ δευτέρου θεωρήματος τοῦ BERNOULLI. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσηιν, (σχέσις (10.1.ε)), ἡ ποσότης H παραμένει σταθερὰ ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς τροχίᾳς, αὐτὸ δέ ἰσχύει διὰ τυχοῦσαν μόνιμον ροὴν. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν (σχέσις (10.3.η)), ἡ ροὴ εἶναι ἐπὶ πλέον ἀστροβίλος καὶ τότε ἡ ποσότης H γίνεται σταθερὰ δι' οἷονδήποτε σημεῖον τῆς ρευστῆς μάζης.

Σημειοῦμεν τέλος ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ἀστροβίλου ροῆς ἀσυμπιέστου ρευστοῦ, ἡ συνάρτησις δυναμιοῦ τοῦ πεδίου τῶν ταχυτήτων εἶναι ἐπὶ πλέον ἀρμονικῇ συνάρτησις ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς x_i , διότι ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0,$$

$$\vec{V} = \operatorname{grad} \varphi,$$

έπομένως

$$\operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = 0 \quad (10.3.0)$$

10.4 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΩΛΗΝΩΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Αι γενναιά έννοιαι επί τών γραμμών, έπιφανειών και σωλήνων περιστροφής έδόθησαν εις την παράγραφον 5.1.2.

Δεδομένου ότι διά τυχόν διάνυσμα $\vec{V}$, ήτοι διά τυχούσαν ροήν, ισχύει πάντοτε ή σχέσις $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{V} = 0$ (ϊδε παράγραφον 2.1.2) δυνατόν έσθι διά πάσαν ροήν νά θεωρήσωμεν τό διάνυσμα $\operatorname{rot} \vec{V}$ ως ταχύτητα μιās φανταστικής μονίμου κινήσεως ενός άσυμπιέστου ρευστού. Εξ αύτης τής παρατηρήσεως και μόνον συνάγεται τό άληθές του θεωρήματος (5.1.2.2) έπειδή ή έντασις παραμένει σταθερά καθ' όλον τό μήκος ενός σωλήνος περιστροφής, λόγω του ότι έμφράζει τό άναλλοίωτον τής παροχής μάλης, καθ' όλον τό μήκος του σωλήνος τής φανταστικής κινήσεως. Έπομένως και αι υνυλοφορίαι καθά μήκος δύο κλειστών αμπτυλών, εύρισκομένων εις την έπιφάνειαν του αύτου σωλήνος περιστροφής, θά είναι άμφοτέραι ίσαι πρός τό διπλάσιον τής σταθεράς αύτης έντάσεως.

Αναζητούμεν τώρα μιάν σχέσιν, έπιτρέπουσαν την μελέτην τής διανυσματικής συναρτήσεως $\vec{\omega}$. Πρός τουτο, ής έξετάσωμεν τάς κατωθι περιπτώσεις, μέ την προϋπόθεσιν πάντοτε ότι

$$\vec{f} = \rho \operatorname{grad} \Phi.$$

10.4.1 Ίξώδη άσυμπιέστα ρευστά

Έφαρμόζομεν τόν διαφορικόν έυτελεστήν $\frac{1}{2} \operatorname{rot}$ εις άμφοτέρα τά μέλη τής σχέσεως (9.5.2.α). Δεδομένου ότι διά τυχούσαν συνάρτησιν ω , θά έχωμεν $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \omega = 0$, θά προκύψη ή σχέσις

$$\rho \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{rot} (\vec{\omega} \wedge \vec{V}) \right] = \mu \Delta \omega. \quad (10.4.1.α)$$

Ἡ σχέση αὐτή ἔχει τὴν μορφήν τῆς ἐξισώσεως διαχύσεως τῆς θερμότητος, διότι ἐν γένει οἱ ἐν τῆς περιστροφῆς προϋπτοντες στροβιλισμοὶ διαχέονται ὅπως ἡ θερμότης.

10.4.2 Τέλεια ἀσυμπίαστα ἢ βαροτροπικά ρευστά

Ἐργαζόμεθα ὁμοίως μέ τὴν σχέσηιν (9.5.3.α) καὶ δεδομένου ὅτι διὰ τὰ βαροτροπικά ρευστά ἔχομεν $\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} h$ θά προκύψῃ ἡ σχέση

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = 0} \quad (10.4.2.α)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σχέση (10.4.2.α) παριστᾷ τὴν ἀπλοποιημένην μορφήν τῆς μοριακῆς παραγωγῆς μιᾶς συναρτήσεως ἐπιφανείας Π (ἴδε 5.1.3.η). Λόγῳ δέ τοῦ ὅτι ἡ μοριακὴ αὐτὴ παράγωγος εἶναι μηδενική, προϋπτει ἀμέσως τὸ θεώρημα:

"Ἡ ροὴ τοῦ διανύσματος τῆς περιστροφῆς $\vec{\omega}$, διὰ μέσου τυχούσης ἐπιφανείας Π , τὴν ὁποίαν ἀμολουθοῦμεν εἰς τὴν κίνησίν της, παραμένει σταθερά καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως".

Ἐξ αὐτοῦ προϋπτουν τὰ κατωθι πορίσματα:

α) Ἡ κυκλοφορία τῆς ταχύτητος $\vec{V}$ κατὰ μῆκος υλειστῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν ἀμολουθοῦμεν εἰς τὴν κίνησίν της καὶ ἡ ὁποία διέρχεται ἐπομένως πάντοτε διὰ τῶν αὐτῶν ρευστῶν μορίων, παραμένει σταθερά.

β) Ἐάν μία ἐπιφάνεια S εἶναι εἰς μίαν εἰδικὴν στιγμὴν t_0 ἐπιφάνεια περιστροφῆς, παραμένει τοιαύτη καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 11.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΚ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΕΩΣ

ΤΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Αἱ γενναί ἐξισώσεις τοῦ κεφαλαίου 9. ὁδηγοῦν εἰς τήν εὔρεσιν τῶν τοπιῶν μεγεθῶν ἑνός προβλήματος μηχανικῆς τῶν ρευστῶν, δηλαδή εἰς τήν εὔρεσιν τῶν μεγεθῶν u_i , p , ρ , T , τοῦ τυχόντος σημείου M , εἶδομεν δέ ὅτι ἡ ἐπίλυσίς των εἶναι εἰς τήν γεννιήν περιπτώσιν ἀδύνατος.

Εἰς ὠρισμένα ὅμως προβλήματα ἐνδιαφερόμεθα διὰ τήν εὔρεσιν συνολικῶν μεγεθῶν, ὡς εἶναι ἡ συνισταμένη δύναμις εἰς μακρύλον τμήμα ἀγωγοῦ, ἡ συνισταμένη ὥθις ρευστῆς φλεβός ἐπὶ παρεμβαλλομένου ἐμποδίου εἰς τήν ροήν της κ. ἄ. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς, ἡ εὔρεσις τῶν συνολικῶν μεγεθῶν ἐπιτυγχάνεται ἀπ' εὐθείας, χωρὶς προηγουμένην ἐπίλυσιν τῶν γεννιῶν ἐξισώσεων, χρησιμοποιεῖται δέ πρὸς τοῦτο ἡ ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς ποσότητος κινήσεως.

Ἡ γεννιῇ ἐξίσωσις τῆς δυναμικῆς (5.3.1.α), δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὑπὸ τήν μορφήν τῆς σχέσεως (5.3.2.α), ἥτις ἐμφράζει τήν διατήρησιν τῆς ποσότητος κινήσεως.

Ἡ σχέση αὕτῃ ἐνδιαφέρει τὰς ἀναφερθεῖσας ἐφαρμογὰς μέ τήν ὁλουκληρωτικὴν της μορφήν. Διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ ὁλουκλήρωσις γίνονται αἱ ἐξῆς παραδοχαί:

- 1) Δεχόμεθα ροήν μόνιμον καὶ τέλειον ρευστόν.
- 2) Θεωροῦμεν ἀμελητέας τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις ($f_i = 0$).

Αἱ ἀνωτέρω παραδοχαὶ ἀνταποκρίνονται εἰς ὅλας τὰς ἐν τῇ πράξει ἐφαρμογὰς τοῦ θεωρήματος τῶν ποσοτήτων κινήσεως.

Βάσει τῶν παραδοχῶν αὐτῶν, ἡ προβολὴ τῆς ὁλουκληρωτικῆς μορφῆς τῆς σχέσεως (5.3.2.α) εἰς τυχόντα ἄξονα x_i γράφεται

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div}(\rho u_i \vec{V}) dV = \iiint_V \operatorname{div} \sigma_{ij} dV}, \quad (11.α)$$

διότι

$$\frac{\partial(\rho v_i v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} = d_{iV}(\rho v_i \vec{V}).$$

Τό τριπλούν όλουλήρωμα της σχέσεως (11.α) έυτείνεται επί του όγμου V , τόν όποϊον άμολουθοΰμεν είς την μίνησίν του.

Έφαρμόζομεν την σχέσηιν (11.α) είς τās υάτωθι περιπτώσεις:

11.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΡΟΗΝ ΕΝΤΟΣ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΑΓΩΓΟΥ ΕΝ ΚΑΜΠΥΛΗ

Τό πρόβλημα αυτό άντιμετωπίζεται συνηθέστατα είς την ύδραυλικήν καί άεροδυναμικήν, ή δέ επίλυσίς του έχει πρωτεύουσαν σημασίαν διά την ματασμευήν καί στήρίξιν τών διαφόρων άγωγών.

Έξετάζομεν την γενιυήν περίπτωση του σχήματος 11.1.Α. καί μετασχηματίζομεν την σχέσηιν (11.α) επί τη βάσει του θεωρήματος τών GREEN-OSTROGRADSKI, όπότε προΰπτει ή σχέση

$$\iint_{S_0+S_1+S_2} \rho v_i (v_j n_j) ds = \iint_{S_0+S_1+S_2} (\sigma_{ij} n_j) ds$$

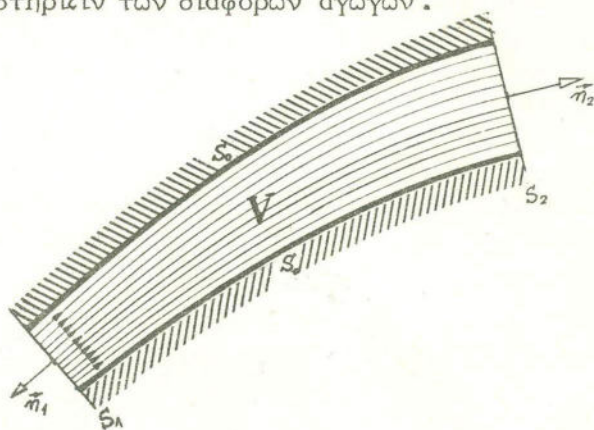
μέ έλεύθερον δείυτην τόν i .

Δεδομένου ότι

$v_j n_j = (\vec{V} \vec{n}) = 0$, διά πάν σημείον της S_0 ,

$\sigma_{ij} n_j = (-p \delta_{ij}) n_j = -p n_i$, διότι τό ρευστόν είναι τέλειον, προΰπτει ή σχέση

Σχ. 11.1.Α



$$\boxed{\iint_{S_1} [\rho v_i (v_j n_j) + p n_i] ds + \iint_{S_2} [\rho v_i (v_j n_j) + p n_i] ds = - \iint_{S_0} (p n_i) ds} \quad (11.1.α)$$

καί δι' αυτής έυφράζεται ή γενιυή έξίσωσις ίσορροπίας μεταξύ τών ποσοτήτων μινήσεως καί της συνισταμένης τών έσωτερικών δυνάμεων (πιέσεων), διά προβολήν είς τυχόντα άξονα x_i , ισχύουσα διά τυχόντα άγωγόν έν μαμπύλρ.

Είς τās έφαρμογάς, έμφανίζονται έλ άλλου κατά μανόνα αί άμολουθοι είδμαί συνθῆμαι έφαρμογής της (11.1.α).

1) Αί έπιφάνεια S_1 καί S_2 είναι έπίεδοι.

2) Αί πυκνότητες ρ_1, ρ_2 καί αί πιέσεις p_1, p_2 , είναι σταθεραί είς τās άντιστοίχους διατομάς S_1, S_2 .

3) Αί ταχύτητες $\vec{V}_1, \vec{V}_2$, είναι έπίσης σταθεραί καί υάθετοι επί τās άντιστοίχους διατομάς S_1, S_2 .

Υπό τας προϋποθέσεις αυτές, ή (11.1.α) λαμβάνει τήν πλέον εύχρηστον διά τας εφαρμογάς διανυσματικήν μορφήν

$$(\rho_1 + \rho_1/V_1^2) S_1 \vec{n}_1 + (\rho_2 + \rho_2/V_2^2) S_2 \vec{n}_2 = - \iint_{S_0} (p \vec{n}) ds \quad (11.1.β)$$

ένθα, τά δύο όλισθαίνοντα μοναδιαία διανύσματα του πρώτου μέλους εφαρμόζονται αντίστοιχως είς τά κέντρα άδρανεΐας τών επιφανειών S_1 καί S_2 .

Τό δεύτερον μέλος της (11.1.β) έυφράζει τόν στροφέα τών πιέσεων, τας όποίας έξασμεΐ τό ρευστόν επί της επιφανείας S_0 του άγωγοΰ.

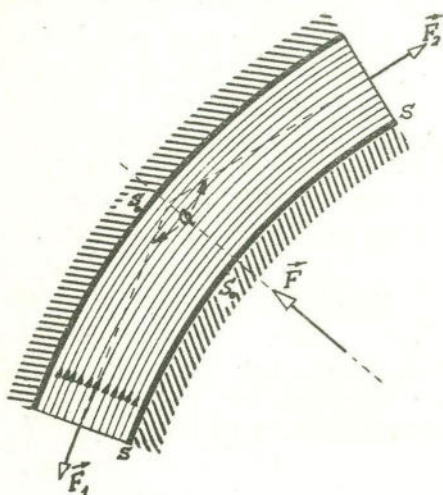
Η εφαρμογή της σχέσεως (11.1.β) είς πᾶσαν ροήν δι' άγωγών έν υαμπύλρ είναι προφανής, διότι άποτελεΐ τό μόνον μέσον διά τόν προσδιορισμόν της όλμής συνισταμένης τών πιέσεων επί τών παρεΰν του άγωγοΰ.

Είς τήν είδιμήν περίπτωση άγωγοΰ σταθεράς διατομής ($S_1 = S_2$), επιπέδου άξονος συμμετρίας, διά ροήν τελείου καί άσυμπέστου ρευστοΰ καί θεωρουμένης άμελητέας της ύψομετρικής διαφοράς μεταξύ τών κέντρων άδρανεΐας τών διατομών S_1 καί S_2 , θά έχωμεν ότι

$$V_1 = V_2 = V, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho, \quad p_1 = p_2 = p,$$

όπότε τελμΰς, ή συνισταμένη του στροφέως τών πιέσεων ανάγεται είς μίαν συνισταμένην δύναμιν $\vec{F}$, ίσην πρός $\vec{F} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$, ένθα $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = (\rho + \rho V^2) S$, όπότε

$$|\vec{F}| = 2(\rho + \rho V^2) S \cos \frac{\varphi}{2} \quad (11.1\gamma)$$



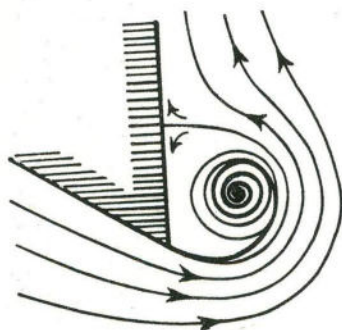
Σχ. 11.2.Α

Η σχέση (11.1.γ) δεικνύει ότι ή άπόλυτος τιμή $|\vec{F}|$ γίνεται μεγίστη διά $\varphi = 0$, ήτοι διά υαμπύλρν άλλαγήν διευθύνσεως ίσην πρός 180° .

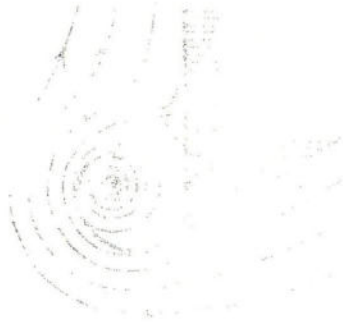
11.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΑΣ ΟΠΟΙΑΣ ΕΞΑΣΚΕΙ ΜΙΑ ΡΟΗ ΕΠΙ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΠΑΡΕΜΒΑΛΛΟΜΕΝΟΥ ΕΙΣ ΑΥΤΗΝ

Καί ή περίπτωση αυτή άποτελεΐ συνθηέστατον πρόβλημα του μηχανιμοΰ είς τήν έφρημοσμένην ύδραυλικήν καί άεροδυναμικήν.

Η έπίλυσίς της έπιτυγχάνεται δι' έφαρμογής της (11.1.α) είς



Ροή περί γωνίας
μετ' ἀποιολλήσεως τῆς ρευστῆς φλεβός



Handwritten text, possibly a signature or a date, located at the bottom center of the page. The text is written in a cursive or script style and is difficult to decipher.

τόν ὄγκον τόν εὐρισκόμενον μεταξύ τῆς ἐπιφανείας S_0 τοῦ στερεοῦ σώματος καί τυχούσης ἄλλης ἐπιφανείας S_1 , περικλειούσης τό στερεόν ὄμα. Θά προύψη τότε ἡ σχέση

$$\iint_{S_1} \rho v_i (v_j n_j) ds = \iint_{S_0 + S_1} (\sigma_{ij} n_j) ds$$

Δεδομένου ὅτι

$$v_j n_j = \vec{V} \cdot \vec{n} = 0$$

Σχ. 11.3. Α

διά πᾶν σημεῖον τῆς S_0 , ἡ ἀνωτέρω σχέση διαγράφεται

$$F_i = \iint_{S_0} (\sigma_{ij} n_j) ds = \iint_{S_1} [\rho v_i (v_j n_j) + p n_i - \tau_{ij} n_j] ds \quad (11.2. \alpha)$$

καί ἐμφράζει τήν προβολήν εἰς τυχόντα ἄξονα x_i τῆς γεννιῆς συνισταμένης $\vec{F}$ τοῦ στροφέως τῶν δυνάμεων τῶν ἐλασμουμένων ὑπό τοῦ ρευστοῦ ἐπὶ τοῦ στερεοῦ σώματος K .

Εἰς τήν περίπτωση τελείου ρευστοῦ, θά ἔχωμεν $\tau_{ij} = 0$ καί ἡ (11.2. α) λαμβάνει τήν μορφήν

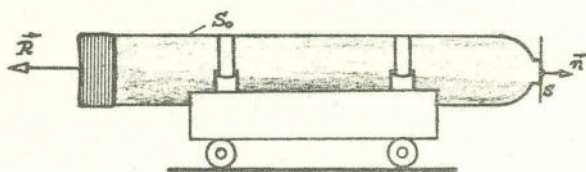
$$F_i = \iint_{S_1} (\sigma_{ij} n_j) ds = \iint_{S_1} [\rho v_i (v_j n_j) + p n_i] ds \quad (11.2. \beta)$$

11.3 ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΕΚ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Εἰς τά πλεῖστα τῶν προβλημάτων τῆς γεννιῆς καί ἐφαρμοσμένης ὑδραυλικῆς, ἡ ἐφαρμογή τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων δίδει λύσιν ἢ, συνηθέστερον, συμβάλλει εἰς τήν εὕρεσιν τῆς λύσεως. Θά τήν συναντήσωμεν ἐπομένως συχνά εἰς τά διάφορα εἰδιὰ κεφάλαια τοῦ δευτέρου τόμου. Διά τήν πληρεστέραν πάντως κατανόησιν τῶν τρόπων ἐφαρμογῆς των, δίδομεν ὠρισμένα ἀνεξάρτητα καί χαρακτηριστικὰ παραδείγματα, ἁπαντῶμενα τό συνηθέστερον ἐν τῇ πράξει.

11.3.1 Προώθησις δι' ἐκτονώσεως ἀερίου ἐξ ὀπῆς

Ἐστω ἡ μόνιμος ροή συμπιεστοῦ καί τελείου ρευστοῦ, εὐρισκόμε-



Σχ. 11.3.1.Α

ΠΤΕΙ

νου έντός υλειστού δοχείου S_0 , δι' όπής τοῦ δοχείου, έπιπέδου διατομής S , (Σχ. 11.3.1.Α).

Ένδιαφερόμεθα διά τήν εύρεσιν τής δυναμικής υαταστάσεως τής δημιουργουμένης είς τό όλον σύστημα λόγω τής έυτονώσεως τοῦ αέριου.

Δι' έφαρμογής τής σχέσεως (11.1.β) προϋ-

$$\vec{R} = \iint_{S_0} (p\vec{n}) dS = -(p + \rho V^2) S\vec{n} = -\rho V^2 S\vec{n}, \quad (11.3.1.a)$$

υπό τήν προϋπόθεσιν ότι ή ταχύτης έξόδου είναι υάθετος επί τήν διατομήν έξόδου. Υπετέθη επί πλέον ότι ή διατομή τής όπής έξόδου συμπίπτει μέ τήν διατομήν τής έξερχομένης ρευστής δέσμης, μέ άλλους λόγους τό στόμιον είναι υαταλλήλου μορφής ώστε νά μή προυαλή συστολήν τής έξερχομένης δέσμης. Τέλος ή πίεσις p είς τήν διατομήν έξόδου θεωρεΐται σταθερά είς όλην τήν διατομήν υαί έπομένως θά είναι ίση μέ τήν όριαυήν της τιμήν είς τήν έπαφήν δέσμης αέρος, ήτοι μέ τήν άτμοσφαιρικήν πίεσιν.

Είς τά προβλήματα τοῦ τύπου αὔτοῦ, ή άτμοσφαιρική πίεσις λαμβάνεται μηδενική, διότι άποτελεΐ τήν πίεσιν άναφοράς.

11.3.2. Δύναμις ώθήσεως ρευστής φλεβός επί έπιπέδου πλακός

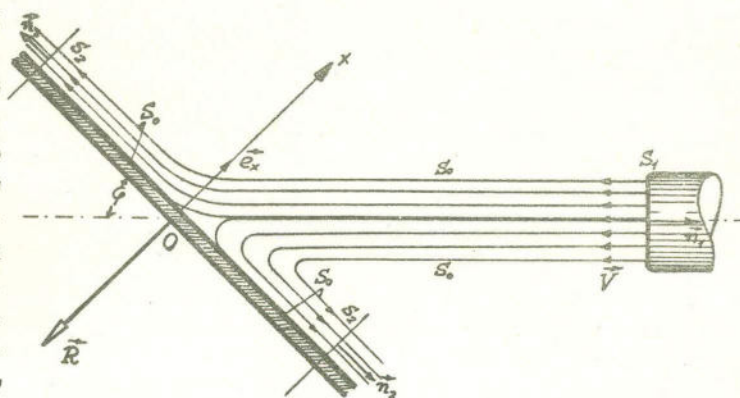
Η υίνησις πολλών τύπων υδροστροβίλων υαί αεροστροβίλων στηρίζεται είς τήν μετατροπήν τής πιελομετρικής ένεργείας τοῦ υδάτος είς υινητικήν διά τής όποίας υαί πραγματοποιεΐται ή περιστροφή τών στροβίλων.

Τό πρώτον στάδιον τής μετατροπής ένεργείας έπιτυγχάνεται εύυόλως δι' άυροφυσίου έυ τοῦ όποίου έυχύνεται μία ρευστή φλέψ, μέ μεγάλην ταχύτητα λόγω τής ύψηλής πίεσεως έντός τοῦ άγωγοῦ. Η τιμή τής ταχύτητος αὔτης θά είναι $V = \sqrt{2gh}$, ένθα h είναι έν γένει ή στατική πίεσις τοῦ ρευστοῦ είς τήν στάθμην τής έυροής, μετρουμένη είς ύψος στήλης τοῦ ρευστοῦ, (τύπος TORRICELLI).

Έν συνεχείᾳ, ή υινητική ένεργεια τής φλεβός μεταβιβάζεται είς τόν στροβίλον μέσω μιᾶς σειράς μικρῶν σιαφιδίων, ήτοι πλαυῶν υαμπύλης διατομής.

Τό φαινόμενον αὔτό θά μελετήσωμεν έν προϋειμένῳ, άρχίζοντες άπό τήν περίπτωση τής έπιπέδου πλαυός.

Έστω ή έν τῷ σχήματι 11.3.2.Α υάτοψις ρευστῆς δέσμη προσβαλλούσης επίπεδον κεκλιμένην πλάνα. Η υγρή δέση εύρίσκεται υπό ατμοσφαιρικήν πίεσιν έυτός από τήν πλησίον τής πλαυός περιοχήν της, ένθα αἱ τροχιαί καμπυλοῦνται, διά νά λάβουν έυ νέου διεύθυνσιν παράλληλον πρός τήν πλάνα.



Θεωρούμεν άμελητέας τάς τριβάς, όποτε ή συνισταμένη ώθησις επί τής πλαυός θά έχη τήν διεύθυνσιν τής $\vec{OR}$.

Προβάλλομεν τήν διανυσματικήν σχέσηιν (11.1.β) είς τόν άξονα Ox , όποτε προϋπτει ή ζητουμένη ώθησις

$$\vec{R} = \iint_S (\rho n_x) ds = -(\rho V^2 S_i \sin \varphi) \vec{e}_x = (-\rho Q V \sin \varphi) \vec{e}_x, \quad (11.3.2.a)$$

ένθα e_x είναι ή βάση του άξονος Ox , καί $Q = S_i V$ είναι ή παροχή όγμου τής ρευστῆς φλεβός.

Διά $\varphi = 90^\circ$ θά είναι προφανώς

$$\vec{R} = -(\rho V^2 S_i) \vec{e}_x = (-\rho Q V) \vec{e}_x. \quad (11.3.2.β)$$

Η ανά μονάδα έπιφανείας ώθησις τής δέσμησ θά έχη απόλυτον τμήν

$$\frac{R}{S_i} = \rho V^2 = 2 \left(\rho \frac{V^2}{2} \right),$$

ήτοι διπλασίαν του πελομετρουυ ύψους λόγω ταχύτητος.

Άς έξετάσωμεν τώρα τήν περίπτωση έπιπέδου πλαυός, κινουμένης κατά τήν διεύθυνσιν τής δέσμησ μέ σταθεράν ταχύτητα $\vec{V}_i$ (προφανώς $\vec{V}_i < \vec{V}$).⁽¹⁾

Ο υπολογισμός τής ζητουμένης ώθήσεως $\vec{R}$ θά υ-

(1). Έφιστῶμεν τήν προσοχήν είς τήν ανάλυσιν καί διερεύνησιν τής περιπτώσεως αυτής, διότι είς πλείστα δοα συγκρίματα άντικειμενικέται έσφαλμένως.

πολογισθῇ ως πρός σύστημα άξόνων, κινουμένων μετὰ τής πλαιός, διότι μόνον ως πρός τό σύστημα αυτό ή κίνησις είναι μόνιμος. Έξ άλλου, λόγω μηδενιού πεδίου έξωτερικών δυνάμεων, δέν υπεισέρχονται πρόσθετοι έπιταχύνσεις λόγω δυνάμεων CORIOLIS.

Η ζητουμένη δύναμις $\vec{R}$ θά δίδεται, κατόπιν τών άνωτέρω, υπό τής σχέσεως

$$\vec{R} = -[\rho Q (V - V_i) \sin \varphi] \vec{e}_x = -[\rho (V - V_i)^2 S_i \sin \varphi] \vec{e}_x, \quad (11.3.2. \gamma)$$

διότι $Q_i = (V - V_i) \cdot S_i$, είναι ή παροχή όγμου, τήν όποίαν πραγματικώς δέχεται ή πλάξ.

Η υπό τής πλαιός άπορροφουμένη ισχύς θά είναι

$$P = R V_i \sin \varphi = \rho (V - V_i)^2 V_i S_i \sin^2 \varphi, \quad (11.3.2. \delta)$$

λαμβάνει δέ τήν μεγίστην τιμήν της διά ταχύτητα V_i ίσην πρός $\frac{V}{3}$,

καθ' όσον $\frac{\partial P}{\partial V_i} = 0$, καί διά $\varphi = 90^\circ$ θά είναι

$$P_{max} = \frac{8}{27} \left(\frac{1}{2} \rho V^3 S_i \right) = \frac{8}{27} \left(\frac{1}{2} \rho Q V^2 \right). \quad (11.3.2. \epsilon)$$

Δεδομένου ότι ή κινήσις ενέργεια τής ρευστῆς φλεβός είναι ίση πρός $\frac{1}{2} \rho Q V^2$, ή θεωρητικώς μεγίστη δυνατή απόδοσις δι' επίπεδον

πλάνα θά είναι ίση πρός $\eta = \frac{8}{27}$.

Είς τήν περίπτωση κατὰ τήν όποίαν υπάρχει μία σειρά έπιπέδων πλαιών καί διά καταλλήλου συστήματος διαδέχονται άλλήλας είς μίαν ώρισμένην περιοχήν τής ρευστῆς φλεβός, σχετικώς μικράν, τότε είς τήν σχέση (11.3.2. γ) ή παροχή θά δύναται νά θεωρηθῇ κατὰ προσέγγισιν ίση πρός τήν παροχήν $Q = V S_i$, όποτε θά έχωμεν άντιστοίχως τās σχέσεις:

Δύναμις

$$\vec{R} = -[\rho Q (V - V_i) \sin \varphi] \vec{e}_x = -(\rho V (V - V_i) S_i \sin \varphi) \vec{e}_x. \quad (11.3.2. \zeta)$$

Άπορροφούμενη ίσχύς

$$P = \rho Q (V - V_1) V_1 \sin \varphi. \quad (11.3.2. \eta)$$

Μεγίστη ίσχύς, διά $\frac{\partial P}{\partial V_1} = 0$ ή $V_1 = \frac{V}{2}$, θά είναι δέ διά $\varphi = 90^\circ$

$$P_{\max} = \rho Q \frac{V^2}{4}.$$

Μεγίστη θεωρητική απόδοση $n = \frac{1}{2}$.

Παρατηρούμεν τήν σημαντικήν αύξεισιν τής απόδόσεως, λόγω τής έμμεταλλεύσεως τής μινητιμής ένεργείας όλουλήρου τής παροχής τής δέσμης.

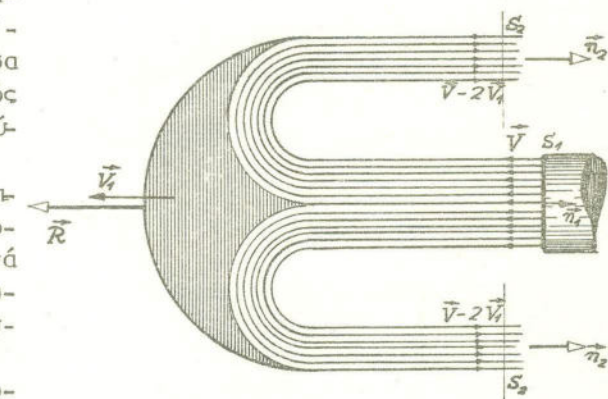
Η άρχή αυτή τής χρησιμοποιήσεως σειρας πλαυών διαδεχομένων αλλήλας εφαρμόζεται εις τά σιαφίδια τών στροβίλων, ή σχηματική μορφή τών οποίων έξετάζεται άμέσως έν συνεχεία.

11.3.3. Δύναμις ώθήσεως ρευστής φλεβός επί καμπύλης πλακός

Έστω ή έν τῷ σχήματι (11.3.3.Α) καμπύλη υυλινδρική πλάξ, παριστάνουσα σχηματικῶς τήν τομήν ενός σιαφιδίου ύδροστροβίλου τύπου PELTON.

Η προσβαλλομένη έπιφάνεια είναι τοιαύτης μορφής ώστε νά έυτρέπη κατά 180° τήν υγράν δέσμη, χωρίς αίσθητάς άπωλείας ταχύτητος λόγω τριβών.

Η εφαρμογή τής προηγούμενης παραγράφου δίδει

1) Δι' άμείνητον πλάα

Σχ. 11.3.3. Α

$$\vec{R} = -(2\rho V^2 S_1) \vec{n}_1. \quad (11.3.3. \alpha)$$

2) Διά μινουμένην πλάα μέ ταχύτητα V_1

$$\vec{R} = -[2\rho Q_1 (V - V_1)] \vec{n}_1 = [-2\rho (V - V_1)^2 S_1] \vec{n}_1.$$

(11.3.3. β)

$$P = 2\rho (V - V_1)^2 V_1 S_1.$$

$$P_{\max} = \frac{16}{27} \left(\frac{1}{2} \rho V^3 S_i \right) = \frac{16}{27} \left(\frac{1}{2} \rho Q V^2 \right), \text{ διὰ } V_i = \frac{V}{3},$$

(11.3.3.β)

$$n = \frac{16}{27}.$$

3) Διά σειράν υινουμένων πλαυῶν μέ ταχύτητα V_i καί διαδεχομένων ἀλλήλας

$$\vec{R} = [-2\rho Q(V-V_i)]\vec{n}_i = [-2\rho V(V-V_i)S_i]\vec{n}_i,$$

$$P = 2\rho Q(V-V_i)V_i,$$

(11.3.3.γ)

$$P_{\max} = 2\rho Q \frac{V^2}{4} = \frac{1}{2} \rho Q V^2, \text{ διὰ } V_i = \frac{V}{2},$$

$$n = 1.$$

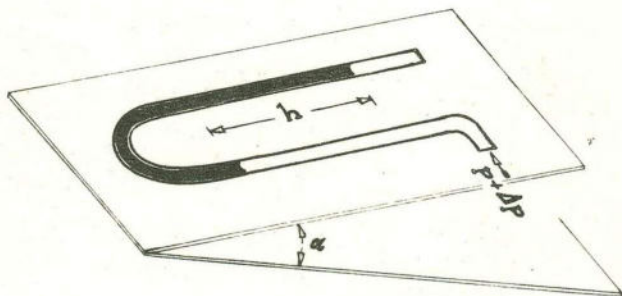
Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θεωρητικὴ ἀπόδοσις εἰς τὴν ἐν τῇ πράξει ἐφαρμοζομένην περίπτωσιν (3) δύναται νὰ φθάσῃ τὴν μονάδα. Εἰς τὴν πραγματικότητα παρεμβάλλονται ἀπώλειαι ἐν διαφορῶν αἰτίων, ἡ μελέτη τῶν ὁποίων γίνεται εἰς τὸ σχετικὸν κεφάλαιον τῶν ὑδροστροβίλων PELTON. Ἡ πραγματικὴ ἀπόδοσις παραμένει πάντως ὑψηλὴ, ὑπερβαίνουσα συνήθως τὸ 0,95.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

II.A ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

II.A.1) Κεκλιμένον μανόμετρον

Διά νά μετρηθῇ μία ἐλαφρᾶ ὑπερπίεσις Δp αέριου τινός χρησιμοποιοῖται ἓν ἀνοικτόν μανόμετρον σχήματος U περιέχον ἀλκοόλην πυκνότητος ρ_a . Τό ἐπίπεδον τοῦ μανομέτρου σχηματίζει μετά τοῦ καθεῖντου πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος γωνίαν α .



Σχ. II.A.1

Νά εὑρεθῇ τὸ ὕψος h' στήλης ὕδατος τὸ ἀντιπροσωπεῖον τὴν ὑπερπίεσιν Δp , τοῦτο δέ συναρτήσῃ τοῦ μήκους h μεταξὺ τῶν μηνίσκων τῶν ὁδῶ σκελῶν τοῦ μανομέτρου, μετρουμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς μεγαλυτέρας κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὀργάνου.

Ἐφαρμογή: $\rho_a = 0,78 \text{ gr cm}^{-3}$, $\alpha = \arcsin \frac{1}{20}$, $h = 0,45 \text{ m}$.

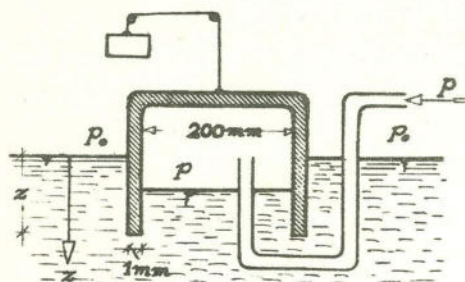
Λύσις

$$h' = \frac{\rho_a}{\rho_0} h \sin \alpha = 0,039 h = 1,75 \text{ cm ὕδατος} \quad (\rho_0 = 1 \text{ εἰδικὴ πυκνότης τοῦ ὕδατος})$$

II.A.2) Κωδωνοειδὲς μανόμετρον

Ἐν εὐαίσθητον μανόμετρον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓναν κυλινδρικὸν κώδωνα κατακορύφου ἄξονος, ἀκτίνος $R = 100 \text{ mm}$ καὶ πάχους $e = 1 \text{ mm}$ ἐφοδιασμένον μὲ ἀντίβαρον. Τὸ ἀνοικτὸν κάτω τμήμα τοῦ κώδωνος βυθίζεται εἰς ὕδωρ καὶ δε-

σμεύει έν άέριον, τοϋ όποιοϋ ζητεΐται ή μέτρησης τής πίεσεως p .



Σχ. II. A. 2

Κά ύπολογιστή ή κατακόρυφος μετατόπισις τοϋ κώδωνος όταν ή πίεσις τοϋ άέριου αύξάνεται κατά 1 mm ύδατος.

Λόγος:

$$dz = -\frac{R}{2e} \frac{dp}{\rho g}, \quad \text{όποτε όιά } \frac{dp}{\rho g} = 1 \text{ mm},$$

$$\text{θα εΐναι } dz = -\frac{R}{2e} = -50 \text{ mm}, \text{ καί έπομέ-}$$

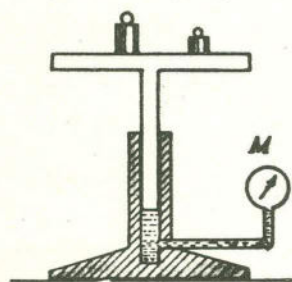
νως ό κώδων θα ένέλθη κατά 50 mm.

Καθίσταται οϋτω πρόδηλος ή μεγάλη εύαιεσία τοϋ μανομέτρου

$$\left(\frac{R}{2e} = 50\right).$$

II. A. 3) Πισστήριον ρυθμίσεως μανομέτρων

Διά νά ρυθμισή έν μανόμετρον M προετοιμασμενον είά ύψηλās πί-
έσεις χρησιμοποιεΐται τό πισστήριον τοϋ σχή-
ματος. II. A. 3



Σχ. II. A. 3

Ζητεΐται τό ύψος h στήλης ύδατος είς τό
όποϊον άντιστοιχεΐ ή μέτρησης τοϋ μανομέτρου
 M , γνωρίζοντες ότι ή ειίμετρος τοϋ βυθίζο-
μένου έμβόλου εΐναι $d = 1,14 \text{ cm}$, ότι ή μάζα
τοϋ όδσκου έν κενώ εΐναι $m' = 1340 \text{ gr}$ καί ότι έ-
τέση επί τοϋ όδσκου μάζα $m = 5430 \text{ gr}$.

Λόγος

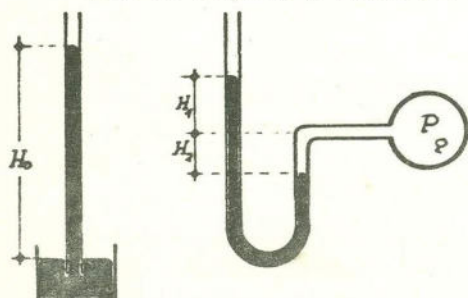
$$H = \frac{4(m+m')}{\pi d^2 \rho_0} = 5800 \text{ cm ύδατος}$$

II. A. 4) Πίεσις έντός άγωγού

Διά νά εύρεθΐ ή άπόλυτος στατική πίεσις είς τό έσωτερικόν ένδός
άγωγού όπου κυκλοφορεΐ έν υγρόν πυ-
κνότητος ρ , τοποθετοϋνται πλησί-
ον άλλήλων έν βαρόμετρον καί έν μα-
νόμετρον, άμφότερα πλήρη ύδαρργύ-
ρου πυκνότητος ρ_0 καί μετρώνται τά
ύψη H_0 , H_1 καί H_2 .

Κά ύπολογιστή ή πίεσις επί
τοϋ άξονος τοϋ άγωγού είς baryes ,
 kp/cm^2 καί kp/m^2 .

Έφαρμογή, είς τās περιπτώ-



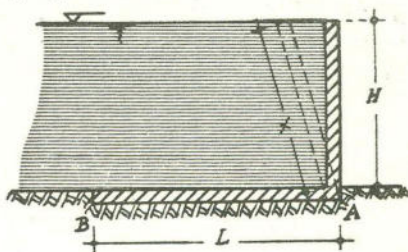
Σχ. II. A. 4

σεις κατά τās όποιās τó κυκλοφοροῦν ὑγρόν εἶναι ὕδωρ, ἡ ἀήρ καὶ διὰ
 $H_0 = 75,65 \text{ cm}$, $H_1 = 32,45 \text{ cm}$, $H_2 = 19,25 \text{ cm}$.

(Ἄήρ $\rho \approx 0$, ὕδωρ $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$, $\rho_v = 13,59 \text{ gr/cm}^3$, $g = 980,5 \text{ cm/sec}^2$)

II.A.5) Φράγμα σχήματος διέδρου

Ζητεῖται ἡ κατασκευὴ ἑνός μικροῦ φράγματος ὕψους H εἰς σχῆμα διέδρου, τελείως ἀκάμπτου ἐξ ὠπλισμένου σκυροδέματος ἢ μετάλλου, θεωρουμένου ἀμελητέου τοῦ βάρους, καὶ στηριζομένου τῇ βοηθεῖα τῶν δυνάμεων πίεσεως, αἱ ὁποῖαι ὁροῦν ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ διέδρου, ἐχούσης πλάτος L .



Σχ. II.A.5

α) Νά δειχθῇ ὅτι ἀπό ἀπόψεως εὐσταθείας εἰς ἀνατροπῇν, συμφέρει νά διατηρηθῇ κατακόρυφος ἡ πλευρὰ ἡ ἀποτελοῦσα τó φράγμα, τῆς βάσεως AB παραμενοῦσης ὁριζοντίως.

β) Νά ὑπολογισθῇ τó ἐλάχιστον ἀναγκαῖον πλάτος L διὰ τήν μὴ ἀνατροπῇν εἰς τήν περίπτωσιν ἐλλειψέως ὑποπλέσεων.

Ἄν δεχθοῦμε ὅτι ἡ ὑποπίεσις μεταβάλλεται γραμμικῶς κατὰ μήκος τῶν βάσεων μεταξὺ μιᾶς μεγίστης πίεσεως H εἰς τó σημεῖον B καί μιᾶς μηδενικῆς εἰς τó A , νά εὑρεθῇ τó νέον ἀναγκαῖον ἐλάχιστον πλάτος βάσεως L .

Λύσις

α) Ἡ ροπή ἀνατροπῆς τοῦ φράγματος ὡς πρὸς A ἰσοῦται πρὸς $\frac{\rho g H x^3}{6}$

Ἐπομένως θά γίνῃ ἐλάχιστη διὰ τήν ἐλάχιστην τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x , ἥτοι διὰ $x=H$.

β) Ἄνευ ὑποπλέσεων θά εἶναι $\frac{L}{H} = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

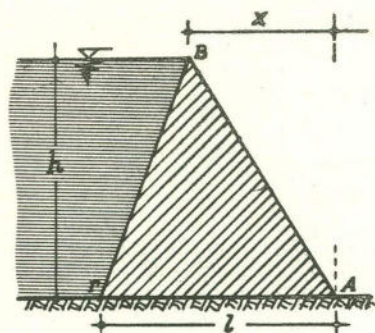
Μετὰ ὑποπλέσεων θά εἶναι $\frac{L}{H} = 1$.

II.A.6) Φράγμα βαρύτητος

Ζητεῖται ἡ κατασκευὴ ἑνός φράγματος βαρύτητος τριγωνικῆς διατομῆς ἐξ ὠπλισμένου σκυροδέματος εἰδικοῦ βάρους $\gamma = \rho g$. Τό ὕδωρ, εἰδικοῦ βάρους $\gamma_0 = \rho_0 g$ ἐβάπτεται τῆς κορυφῆς τοῦ φράγματος.

α) Νά εὑρεθῇ ἡ εὐνοϊκοτέρα διὰ τήν εὐστάθειαν τοῦ φράγματος θέσις τῆς κορυφῆς B , τῶν h καὶ l διατηρουμένων σταθερῶν.

β) Διὰ τήν εὐνοϊκοτέραν αὐτὴν θέσιν νά ὑπολογισθοῦν τó ἐλάχιστον ἀπαιτούμενον διὰ τήν εὐστάθειαν τοῦ φράγματος εἰς ἀνατροπῇν,



Σχ. II. A. 6

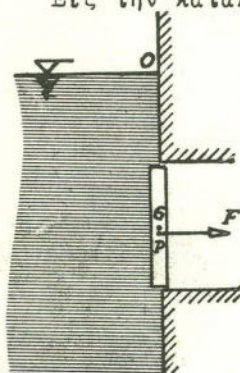
πλάτος l της βάσεως, ως και αἱ κλίσεις τῶν παρείων, διὰ τὰς ἀκολουθοῦσας δύο περιπτώσεις.

1) Ἄνευ ὑποπιέσεων.

2) Δι' ὑποπιέσεις μεταβαλλομένας γραμμικῶς, μεταξὺ μιᾶς μεγίστης τιμῆς h εἰς τὸ σημεῖον Γ , καὶ μιᾶς μηδενικῆς εἰς τὸ A .

II. A. 7) Ὑδροστατικὸν ζεύγος ἐπὶ βεβυθισμένης θυρίδος

Εἰς τὴν κατακόρυφον παρειάν ἑνὸς ὑδραυλικοῦ φράγματος ὑπάρχει ἓν ὀρθογώνιον ἄνοιγμα τοῦ ὁποῦ αἱ μεγάλαι πλευραὶ εἶναι ὀριζόντιοι. Τὸ ἄνοιγμα φράσσεται ὑπὸ θυρίδος περιστρεφομένης περὶ ὀριζόντιον ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους G τῆς θυρίδος.



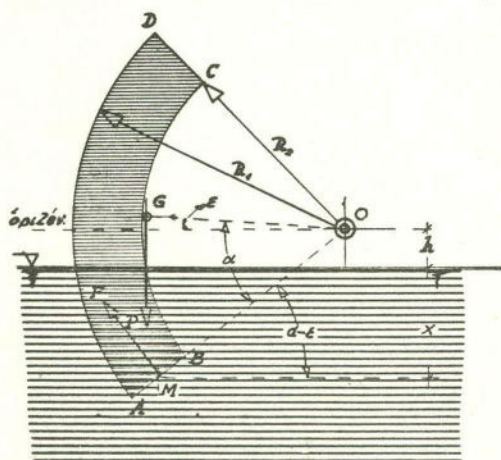
Σχ. II. A. 7

α) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἀπαραίτητον ζεύγος διὰ νὰ διατηρηθῇ κλειστὴ ἡ θυρίς εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ὕψους τοῦ ὕδατος, ἀρκεῖ ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια νὰ εὑρίσκεται ὑπεράνω τῆς ἀνωτέρας ἀκμῆς τῆς θυρίδος.

β) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ροπή τοῦ ζεύγους διὰ θυρίδα διαστάσεων $2 \times 3 \text{ m}$ (νὰ ληφθῇ $g=10 \text{ m/sec}^2$)

II. A. 8) Ὑδροστατικὸς πλωτήρ

Εἷς πλωτήρ ἀποτελεῖται ἀπὸ ὀριζόντιον κύλινδρον, τοῦ ὁποῦ ἡ ὀρθή τομὴ εἶναι τὸ τμήμα $ABCD$ ἑνὸς κυκλικοῦ δακτυλίου κέντρου O . Ὁ πλωτήρ εἶναι κνητὸς πέριξ τοῦ ἄξονος O . Τὸ κέντρον βάρους G τοῦ συστήματος εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν a ἀπὸ τοῦ O , καὶ ἔστω α ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν OG καὶ OA καὶ ε ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς OG καὶ τῆς ὀριζοντίας.



Σχ. II. A. 8

α) Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις ἡ προσδιορίζουσα τὴν θέσιν ἰσορροπίας τοῦ πλωτήρος συναρτήσει τῆς ἀποστάσεως h τοῦ O

ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν.

2) Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ $h=0$, ὁ πλωτήρ εὑρίσκεται εἰς ἀδιάφορον

ισορροπία, εάν $\alpha=90^\circ$ και δι'έν ωρισμέναν βάρος P του πλωτήρος το όποϊον νά υπολογισθῇ.

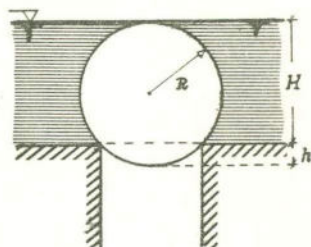
Υποτίθεται ὅτι ἡ πλευρά AB εἶναι ἀρκετά μικρά ἐν σχέσει με τὴν AO οὕτως ὥστε νά εἶναι δυνατὴ ἡ σύμπτωσις τοῦ κέντρου πίεσεως ἐπὶ τῆς AB με τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς. Υποτίθεται ἐπίσης ὅτι ἡ γωνία $\widehat{AOD}$ εἶναι ἀρκετά μεγάλη οὕτως ὥστε ἡ πλευρά CD νά εὐρυσκεται πάντοτε ἐκτός τοῦ ὕδατος.

(Ἡ διάταξις αὕτῃ χρησιμοποιεῖται εἰς ὠρισμένας δεξαμενάς σταθερᾶς στάθμης).

II.A.9) Σφαιρική βάννα (κοινῶς κλαπέτο)

Σφαιρικός στερεὸς πλωτὴρ ἀκτῖνος R , καὶ βάρους $P=mg$, φράσσει εἰς ὀριζόντιον πυθμένα ἐνδὸς δοχείου μίαν κυκλικὴν ὀπήν, ἐντὸς τῆς ὁποίας εἰσδύει εἰς βάθος h .

Μελετήσατε, συναρτήσῃ τοῦ βάρους H τοῦ ὕγρου ἐντὸς τοῦ δοχείου, τῆς πυκνότητος ρ τοῦ ὕγρου καὶ τοῦ βάρους P τοῦ πλωτήρος, τὰς συνθήκας ἐμφράξεως τῆς κυκλικῆς ὀπῆς.



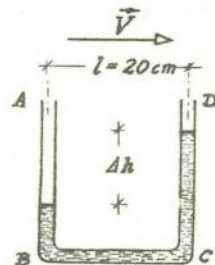
Σχ. II.A.9

II.A.10) Ὑδροστατικὸν ἐπιταχυνσιόμετρον

Διὰ νά ἐλεγχθῇ ἡ καλὴ λειτουργία τῶν ὀργάνων τροχοπεδήσεως ἐνδὸς αὐτοκινήτου, θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ ἓν ἐπιταχυνσιόμετρον, ἀποτελούμενον ἀπὸ ἑναν σωλῆνα $ABCD$ τοῦ ὁποῦ οἱ κλάδοι AB καὶ CD εἶναι κατακόρυφοι καὶ ὁ κλάδος BC ὀριζόντιος, μήκους $l=20\text{ cm}$ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν φορὰν κινήσεως.

Κατὰ τὴν δοκιμὴν τροχοπεδήσεως με σταθεράν ἐπιβράδυνσιν, ἡ διαφορὰ ὑψομέτρου ποῦ σχηματίζεται εἰς τοὺς κλάδους AB καὶ CD εἶναι $\Delta h=12\text{ cm}$.

Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς ἐπιβραδύνσεως.



Σχ. II.A.10

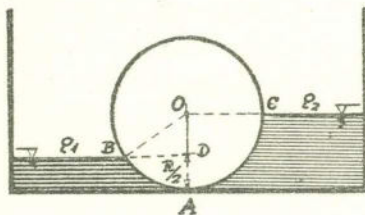
II.A.11.)

Ἐν ρευστῶν σταθερᾶς πυκνότητος εὐρίσκεται ἐντὸς βαγονίου ὀρθογωνικῆς κατῳφας, κυλιομένου χωρὶς ὀλίσθησιν εἰς ἓν κεκλιμένον ἐπίπεδον.

Νά εὐρεθῇ ἡ μορφή τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας καὶ ἡ διανομὴ τῶν πιέσεων ἐντὸς τοῦ ρευστοῦ καὶ ἐπὶ τῶν παρειῶν τοῦ βαγονίου.

II.A.12)

Κύλινδρος ακτίνας R , ύψους h και βάρους P ἐδράζεται εἰς τὸν πυθμένα δοχείου. Δύο ὑγρά πυκνοτήτων ρ_1 καὶ ρ_2 εὐρίσκονται ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ τοῦ κύλινδρου ὡς ἐν σχήματι.



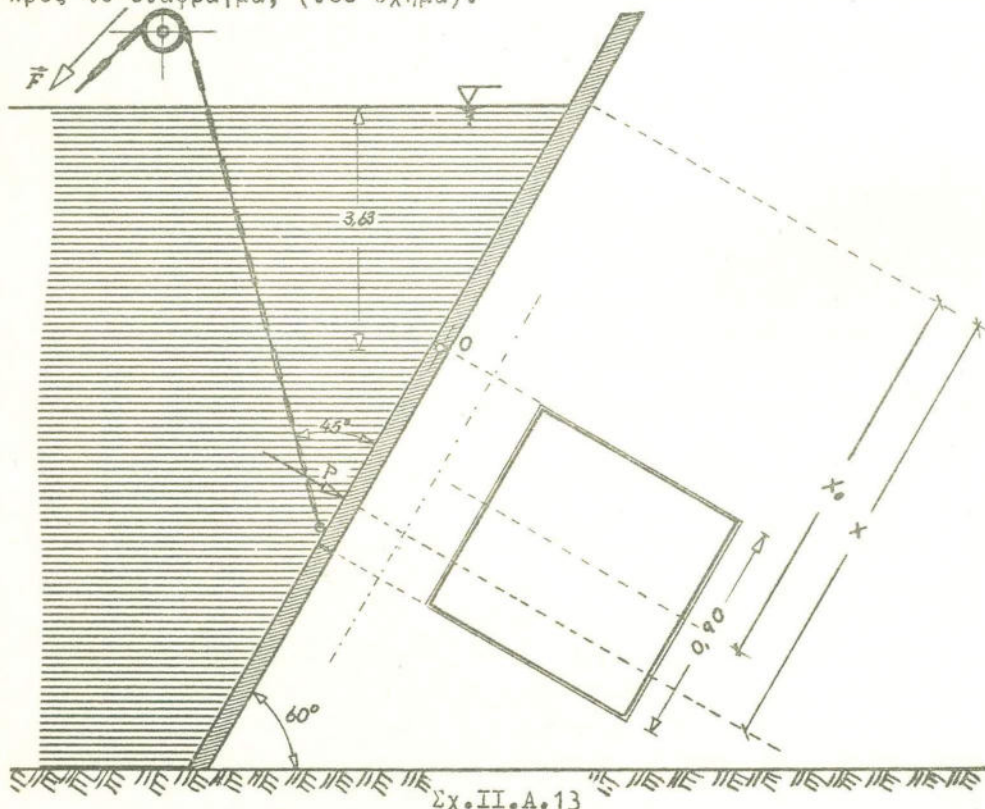
Σχ. II.A.12

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀριζοντία καὶ ἡ κατακόρυφος συνιστώσα τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ νὰ συγκρατηθῇ τὸν κύλινδρον ἐφαπτόμενον τοῦ πυθμένος εἰς τὸ A .

II.A.13)

Ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου διαφράγματος κεκλιμένου κατὰ 60° ὑπάρχει τετραγωνικὸν ἄνοιγμα, τοῦ ὁποίου ἡ θυρίς βάρους 180 kp δύναται νὰ περιστραφῇ περὶ τὸν ἄξονα O .

Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις F , ἡ ἀναγκαία διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θυρίδος καὶ ἡ ὁποία ἀσκεῖται διὰ μιᾶς ἀλυσέως κεκλιμένης κατὰ 45° , ὡς πρὸς τὸ διάφραγμα, (ἴδε σχῆμα).

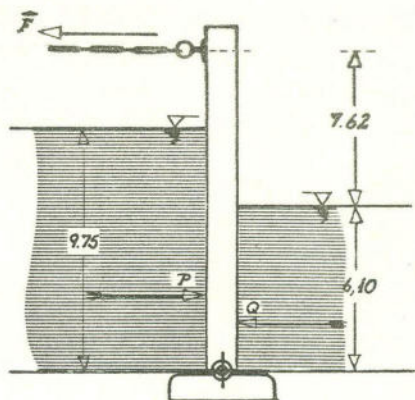


Σχ. II.A.13

II.A.14)

Ἐν διάφραγμα εἶναι κινητὸν δι' ἀρθρώσεως εὐρισκομένης εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον του καὶ συγκρατεῖται εἰς τὸ ἀνώτερον ἄκρον του δι' ἀλυσέως.

Δοθεισών τών δύο σταθμών του ύδατος (ύψηλοτέρας και χαμηλοτέρας) νά εύρεθῇ ἡ τάσις τῆς ἀλυσέως, ἐάν τὸ πλάτος τοῦ διαφράγματος εἶναι 3 m.

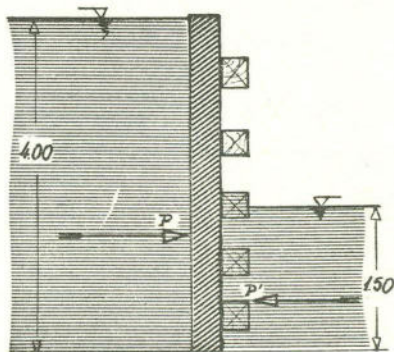


Σχ. II. A. 14

II. A. 15)

Δίδεται ἡ θυρίδα τοῦ σχήματος, στηριζομένη διὰ πέντε ἐγκαρσίων δοκῶν.

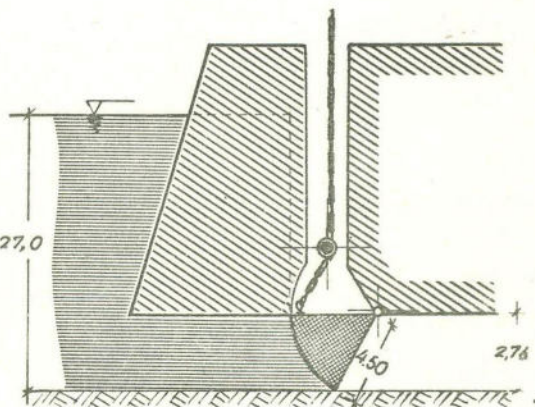
Ζητεῖται νά τοποθετηθοῦν αἱ δοκοί εἰς τρόπον ὥστε νά παραλαμβάνεται ὑπὸ ἐκάστης δοκοῦ τὸ ἓν πέμπτον τῆς ὁλικῆς φορτίσεως καὶ νά ὑπολογισθῇ ἡ φόρτισις αὐτή.



Σχ. II. A. 15

II. A. 16)

Νά εύρεθῇ ἡ ὁλική πίεσις καὶ αἱ συνιστώσαι αὐτῆς ἐπὶ ἑνὸς κυλινδρικοῦ διαφράγματος, κυκλικῆς διατομῆς, πλάτους 2,40 m καὶ λοιπῶν διαστάσεων ὡς ἐν σχήματι, φράσσοντος τὸν ἐκκενωτὴν μιᾶς δεξαμενῆς ἐξισορροπήσεως.

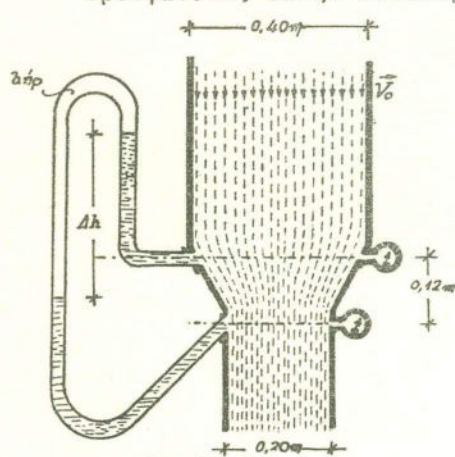


Σχ. II. A. 16

II. B ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ BERNOULLI ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

II. B.1) Έπίπεδος μετροπήτης VENTURI

Όρθογωνικός σωλήν κατακόρυφος, με κάθετον διατομήν ($0,50 \times 0,40 \text{ m}^2$) διαρρέεται υπό ύδατος ταχύτητος V_0 , απόληγει δε εἰς ἕτερον σωλήνα καθέτου διατομῆς ($0,50 \times 0,20 \text{ m}^2$). Εἰς τὰς τομὰς AA καὶ BB τῶν δύο σωλήνων εὐρίσκονται πιεζομετρικοὶ σωλήνες, συνδεδεμένοι διὰ δύο μεταλλικῶν μανομέτρων.



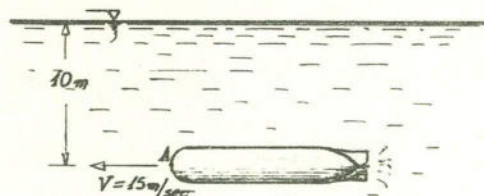
Σχ. II. B.1

τοὺς πιεζομετρικοὺς αὐτοὺς σωλήνας.

1) Ποῖαν διαφορὰν πίεσεως Δp δεικνύουν οἱ σωλήνες; Γνωρίζομεν ὅτι $V_A = 0,7 V_0$ καὶ $V_B = 2,3 V_0$ καὶ ὅτι ἡ ὁλικὴ παροχὴ εἶναι 600 lt/sec .

2) Ποῖα διαφορὰ στάθμης Δh δημιουργεῖται εἰς σωλήνα σχήματος U πεπληρωμένον δι' αἵρος καὶ συνδεδεόντα

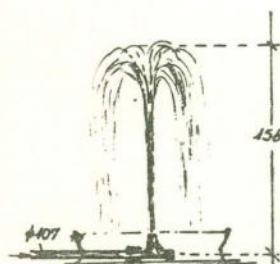
II. B.2) Πίεσις εἰς τὴν κεφαλὴν τορπίλλης



Σχ. II. B.2

Ποῖα εἶναι ἡ πίεσις ἥτις ἀσκεῖται εἰς τὸ κέντρον A τοῦ προσθίου μέρους μιᾶς τορπίλλης, ἡ ὁποία κινεῖται ἐντὸς ὕδατος εἰς βάθος 10 m μέ ταχύτητα 15 m/sec . ($\rho = 1,02 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$).

II. B.3) Μελέτη ὕδατινου πίδακος



Σχ. II. B.3

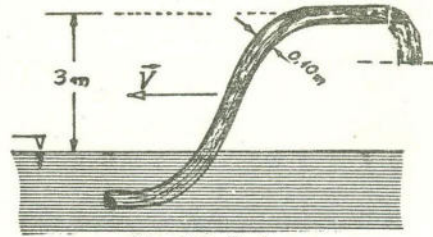
Νά ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις, ἡ παροχὴ καὶ ἡ ἀπαιτούμενη ὑδραυλικὴ ἰσχὺς διὰ τὴν τροφοδοσίαν ἐνδὸς ὕδατινου πίδακος, ὕψους 156 m καὶ ἀρχικῆς διαμέτρου 107 mm , θεωρουμένων ὡς ἀμελήτεων τῶν τριβῶν εἰς τὸν αἶρα.

II. B.4) Τροφοδοσία ἀτμομηχανῆς ἐν κινήσει

Διὰ νὰ τροφοδοτήσωμεν μέ ὕδωρ τὴν δεξαμενὴν μιᾶς ἀτμομηχανῆς ἐν κινήσει χρησιμοποιοῦμεν, ὡς ἐν σχήματι. ἕναν ἀκαμπτον σωλήνα διαμέτρου $0,10 \text{ m}$. Ὁ σωλήν βυθίζεται εἰς ἐπενδεδυμένον χάνδακα εὐρισκόμενον μεταξὺ τῶν σιδηροτροχιῶν καὶ ἐκβάλλει 3 m ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος τοῦ χάνδακος.

1) Διά ποσαν ταχύτητα της ατμομηχανής αρχίζει νά ρέη ύδωρ εἰς τὴν δεξαμενὴν.

2) Ποῖα ἡ παροχὴ διὰ ταχύτητα 72 km/h .



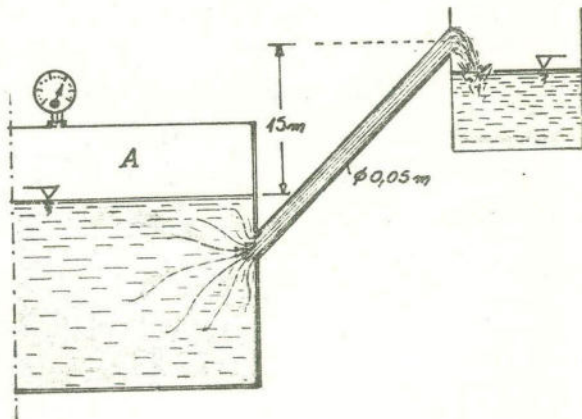
Σχ. II. B. 4

II. B. 5) Τροφοδοσία δεξαμενῆς λόγω διαφορᾶς πιέσεως

Μία αεροστεγῶς κλειστή εὐρεῖα δεξαμενὴ εἶναι μερικῶς πεπληρωμένη δι' ὕδατος, τοῦ αἵρος ἐντὸς αὐτῆς εὐρισκομένου ὑπὸ πίεσιν. Ἐξ αὐτῆς ἐκκινεῖ σωλὴν διαμέτρου $0,05 \text{ m}$, ὅστις ἐκφορτοῦται εἰς ἀνοικτὸν θάλαμον ὑδραγωγείου καὶ εἰς ὕψος 15 m ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐν τῇ δεξαμενῇ ὕδατος.

Αἱ ἀπώλειαι ἐνεργείας ἐκ τριβῶν εἶναι 540 ἑκατοστά στήλης ὕδατος.

Ποῖα ἡ ἔνδειξις τοῦ μανομέτρου εἰς τὸν θάλαμον A ἔνα ὁ σωλὴν παρέχῃ $12,35 \text{ lt/sec}$.

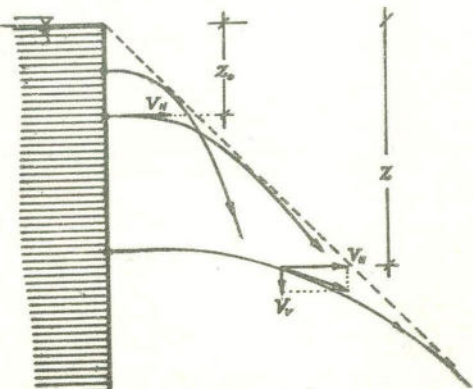


Σχ. II. B. 5

II. B. 6) Μελέτη οἰκογενείας ἑκροῶν ἐξ ὀπῶν

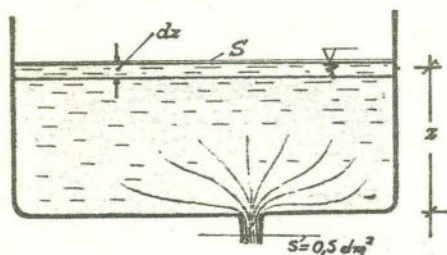
Ὑδατοδεξαμενὴ περιορίζεται ἀπὸ τὴν μίαν ὀψιν μὲ ἐπίπεδον κατακόρυφον παρειᾶν φέρουσαν ὀπὰς εἰς διάφορα ὕψη.

Δείξατε ὅτι ἡ περιβάλουσα τῆς οἰκογενείας τῶν καμπύλων τῶν ἑκροῶν ἀπὸ τὰς ὀπὰς αὐτὰς εἶναι εὐθεῖα μὲ κλίσιν 45° , συναντῶσα τὴν παρειᾶν εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν.



Σχ. II. B. 6

II. B. 7) Έκκένωσις πρισματικής δεξαμενής

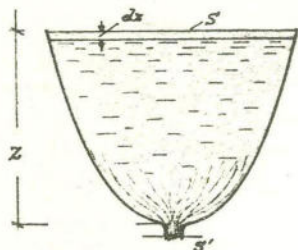


Σχ. II. B. 7

Δεξαμενή, σχήματος παραλληλε-
πιπέδου, μήκους 10 m, πλάτους 5 m
καί βάθους 2 m έκκενοῦται διὰ μιᾶς
ὀπῆς εὐρισκομένης εἰς τὸν πυθμένα
καί ἐκβαλλοῦσης εἰς τὸν ἐλευθέρου ἀ-
έρα καί τῆς ὀποίας ἡ συνεσταλμένη
διατομή εἶναι 0,5 dm².

Ποῦτος ὁ χρόνος ἐκκενώσεως;

II. B. 8) Έκκένωσις δεξαμενής, τυχούσης διατομῆς

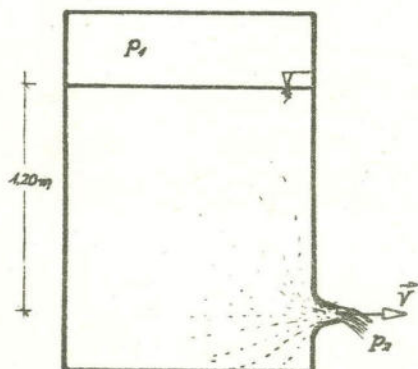


Σχ. II. B. 8

Δεξαμενή έκκενοῦται δι' ὀπῆς εὐρισκομέ-
νης εἰς τὸν πυθμένα αὐτῆς. Ἡ ὀριζοντία τομή
τῆς δεξαμενῆς μεταβάλλεται μετὰ τοῦ βάθους
κατὰ ἓνα νόμον μονωνύμου.

Ἐκφράσατε τὸν χρόνον ἐκκενώσεως μετα-
ξύ δύο ὠρισμένων τιμῶν τοῦ βάθους τῆς δεξα-
μενῆς.

II. B. 9) Έκροή ρευστοῦ ὑπὸ πλεσιν

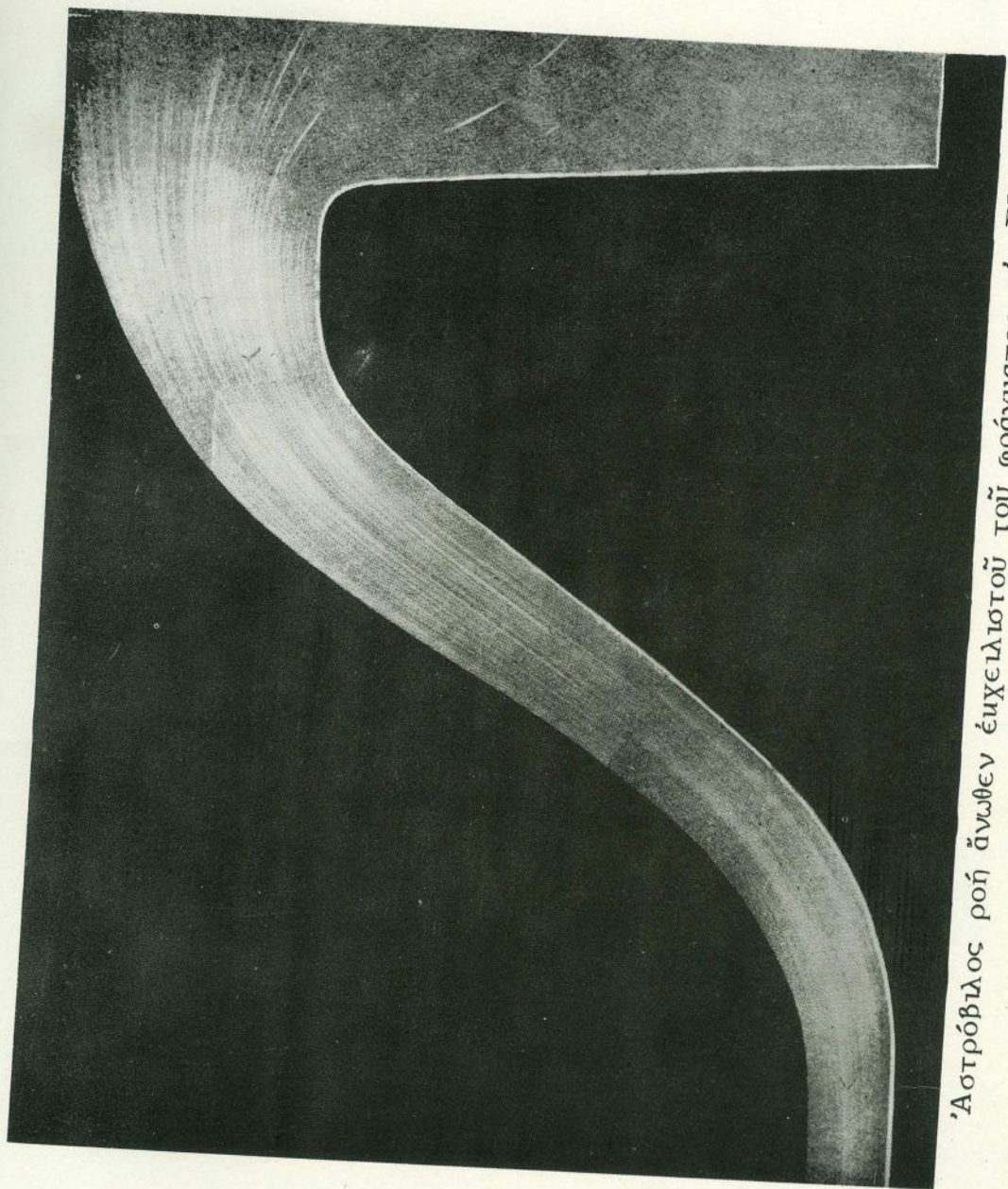


Σχ. II. B. 9

Ὁρθογωνική δεξαμενή μεγάλων
διαστάσεων περιέχει ὑγρόν, ὑπεράνω
τοῦ ὁποίου ὑπάρχει ἀήρ ὑπὸ πλεσιν
0,07 kp/cm². Εἰς βάθος 1,20 m ἀπὸ
τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν εὐρίσκεται
ὀπὴ μικρῶν διαστάσεων, διὰ τῆς ὁποί-
ας ἐξέρχεται τὸ ὑγρόν.

Ἰπολογίσατε τὴν ταχύτητα ἐκ-
ροῆς $\vec{V}$ εἰς τὰς ἀκολουθοῦσας περι-
πτώσεις:

1. Τὸ ὑγρόν εἶναι ὕδωρ.
2. Τὸ ὑγρόν εἶναι ἔλαιον πυκνότητος
0,7 gr/cm³.
3. Τὸ ὑγρόν εἶναι ἓν στρώμα ὕδατος
30 cm καλυπτόμενον μὲ ἓν στρώμα
ἔλαιου 90 cm.



Ἀστρόβιλος ροή ἄνωθεν ἐυχελιστοῦ τοῦ φράγματος εἰς PINET

II.Β.10) Μελέτη ενός σίφωνος

Διά του σίφωνος πραγματοποιείται ή έκροή ύδατος από δεξαμενήν μεγάλων διαστάσεων, αποφευγομένης της δημιουργίας όπών ή έκχειλιστών.

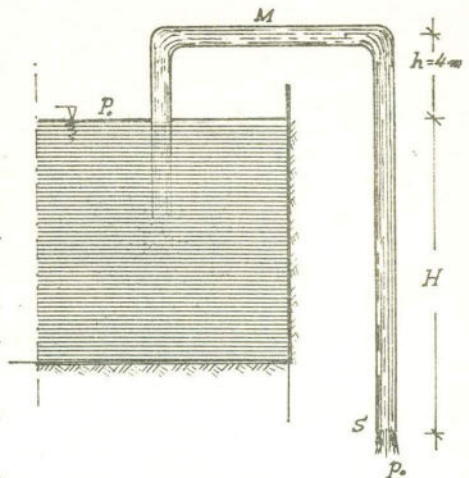
Είς τόν έν σχήματι σίφωνα μέδiameter 10 cm ό άξων του όριζοντίου σκέλους απέχει από την έλευθέραν επάνειαν του ύδατος κατά 4 m.

1) Ποία ή μέγιστη δυνατή παροχή του σίφωνος, θεωρουμένων ως άμελητέων τών διαφόρων άπωλειών.

2) Ποία είναι τότε ή στάθμη της διατομής έξόδου του ύδατος.

3) Νά χαραχθούν, ή γραμμή όλικής ένεργείας καί ή πιεζομετρική γραμμή της όλης έγκαταστάσεως.

Θά ληφθούν, $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $p_0 = 1 \text{ kp/cm}^2$, καί θά θεωρηθί άμελητέα ή τάσεις τών ύδρατμών.



Σχ. II.Β.10

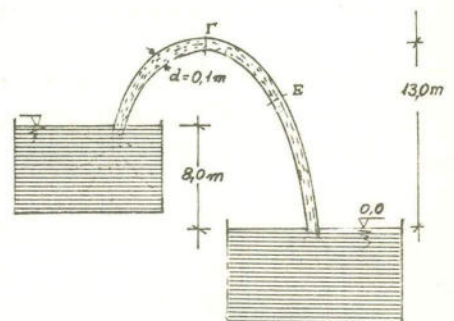
II.Β.11) Έφαρμογή σίφωνος

Είς τόν έν σχήματι σίφωνα, αί άπώλειαι ένεργείας είς την είσοδον

είναι $0,5 \frac{V^2}{2g}$, είς τό σημείον Β εί-

ναι $1,5 \frac{V^2}{2g}$ καί είς την έξοδον $\frac{V^2}{2g}$

Νά εύρεθί ή παροχή είς τόν σωλήνα καί ή πρeσις είς τό σημείον Γ, παραλειπομένων τών γραμμικών άπωλειών του σωλήνος.



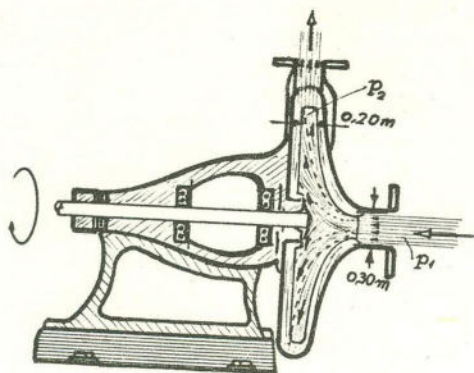
Σχ. II.Β.11

II.Β.12) Ίσχύς μιās άντλίας

"Εστω ή έν σχήματι άντλία, παροχής 9000 lt/min . 'Ο όριζόντιος άγωγός άναρροφήσεως έχει διάμετρον 30 cm, καί επί του άξονος έπικρατεί πρeσις p_1 χαμηλότερα της άτμοσφαιρικής κατά 20 cm στήλης ύδαργύρου. 'Ο όριζόντιος άγωγός έξόδου έχει διάμετρον 20 cm. 'Επί του άξονός του, κειμένου είς ύψος 1,22 m άνωθεν του προηγούμενου, έπικρατεί πρeσις p_2 άνωτέρα κατά $0,7 \text{ kp/cm}^2$ της άτμοσφαιρικής.

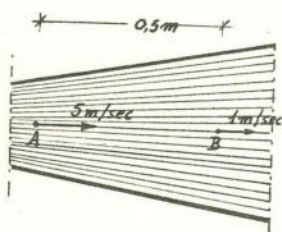
'Εάν δεχθώμεν ως άπόδοσιν της άντλίας $\eta = 0,80$, ποία ή απαιτούμενη μηχανική ίσχύς διά την κανονικήν λειτουργίαν της;

Νά ληφθί $g = 10 \text{ m/sec}^2$.



Σχ. II. B. 12

II. B. 13) Μεταβολή πίεσεως εἰς ἀποκλίνοντα ἄγωγόν



Σχ. II. B. 13

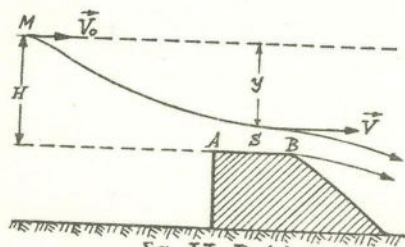
Δίδεται ὁ ἄγωγός τοῦ σχήματος μέ γραμμικῶς διευρυνομένην κάθετον διατομήν. Ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος τοῦ ἄγωγου, ἡ ταχύτης μεταβάλλεται γραμμικῶς ἀπὸ 5 m/sec εἰς 1 m/sec, εἰς διάστημα $AB = 0,5 \text{ m}$.

Διὰ τὴν περίπτωσιν ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους 800 kp/m^3 ,

- 1) καθορίσατε τὴν μεταβολὴν τῶν πιέσεων τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἐλάττωσιν τῆς ταχύτητός κατὰ 4 m/sec.
- 2) ὑπολογίσατε τὰς πιέσεις εἰς τὰ A καὶ B.

Νά ληφθῇ $g = 9,81 \text{ m/sec}$.

II. B. 14) Ἐκχειλιστὴς εὐρείας στέψεως



Σχ. II. B. 14

Τὸ κατώφλιον AB ἐκχειλιστοῦ εὐρους L εἶναι ἀρκούντως μεγάλον οὕτως ὥστε ἐντὸς τῆς διατομῆς S , τὸ ὕδωρ νά ρέῃ κατὰ ὀριζοντίους παραλλήλους στρώσεις καὶ ἡ ταχύτης V νά θεωρῇται ὡς σταθερά καὶ ὁμοιομόρφως κατανεμμένη εἰς τὴν διατομὴν.

- 1) Ὑπολογίσατε, συναρτήσῃ τῆς πτώσεως στάθμης y , τὴν παροχὴν τῆς

διατομῆς.

- 2) Διὰ ποῖαν τιμὴν τοῦ y ἡ παροχὴ γίνεται μεγίστη;
- 3) Τὸ πείραμα δεικνύει ὅτι ἡ μεγίστη αὐτὴ παροχὴ εἶναι καὶ ἡ πραγματικῶς διερχομένη ἐκ τοῦ ἐκχειλιστοῦ. Νά ὑπολογισθῇ αὐτὴ διὰ τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὅποian ἡ ταχύτης V_0 θεωρεῖται ἀμελητέα.

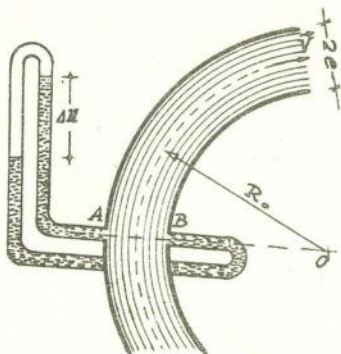
II. B. 15) Χρησιμοποίησις γωνίας ἄγωγου διὰ μέτρησιν παροχῆς

Ἄγωγος ὀρθογωνικῆς διατομῆς, πλάτους $2e$ σχηματίζει καμπύλην

μέσης ακτίνας R_0 , και διαρρέεται άνευ απωλειών υπό τελείου ρευστού.

Ποια είναι, συναρτήσει της μέσης ταχύτητας V , η διαφορά του πιεζομετρικού ύψους ΔH μεταξύ των σημείων A και B μιας κάθετου διατομής;

Εφαρμογή: $V = 3 \text{ m/sec}$, $e = 10 \text{ cm}$, $R_0 = 40 \text{ cm}$.



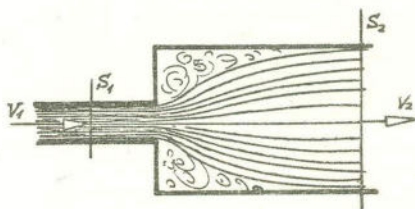
Σχ. II. B. 15

II. B. 16) Απώλειαι εἰς ἀπότομον διεγυρυνσιν κλειστοῦ ἀγωγοῦ ὑπὸ πίεσιν

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος ποσοτήτων κινήσεως νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀπώλειαι λόγω διεγυρυνσεως εἰς τὸν ἀγωγὸν τοῦ σχήματος μὲ ἀμελητέας ἐξωτερικὰς δυνάμεις (ἥτοι ὀριζόντιον ἄξονα ἀγωγοῦ).

Δύσιν

$$\Delta H = \frac{(V_2 - V_1)^2}{2g} \quad \text{εἶναι ὁ γνωστὸς τύπος τῶν BORDA-CARNOT.}$$



Σχ. II. B. 16

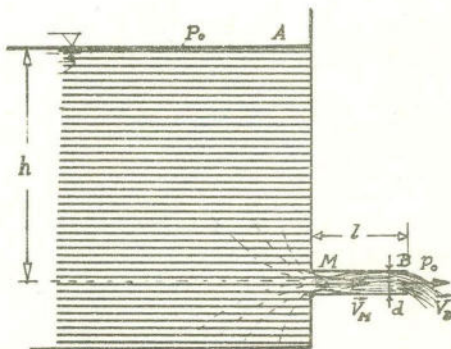
II. B. 17) Στόμιον τοῦ POLENI

Τὸ ὕδωρ δεξαμενῆς σταθερᾶς στάθμης ἐκρέει ἀπὸ τὸ στόμιον τοῦ σχήματος, διαμέτρου d καὶ μήκους l , ἔξου μὲ 2,5 ἕως 5 φορές τὴν διάμετρον. Δεχόμεθα ὅτι ὁ συντελεστής συστολῆς τῆς ὑδατίνης φλεβὸς εἰς M εἶναι ἴσος πρὸς $c = 0.62$, ἥτοι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν συντελεστὴν συστολῆς δι' ἐκροὴν ἐξ ὀπῆς δοχείου μὲ λεπτὰ τοιχώματα. Ὡς δὲ φαίνεται ἐν σχήματι, ἡ φλέψ ἐπανακολλᾶται εἰς τὴν παρεῖάν καὶ ἐξέρχεται ἐν πλήρει διατομῇ.

Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1) Ἡ ταχύτης ἐξόδου V_B καὶ τὸ

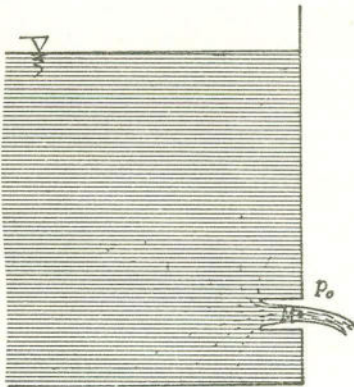
κινητικὸν ὕψος $\frac{V_B^2}{2g}$, συναρτήσει τῶν h καὶ c .



Σχ. II. B. 17

- 2) Ἡ παροχή τοῦ στομίλου καὶ ὁ συντελεστής παροχῆς K εἰς τὴν σχέσιν τῆς μορφῆς $q_v = K S \sqrt{2gh}$ καὶ νὰ γλῆν ἡ σύγκρισις μὲ τὴν παροχὴν ἐξ ὁπῆς μὲ λεπτὰ τοιχώματα.
- 3) Αἱ ἀπώλειαι μεταξὺ M καὶ B .
- 4) Ἡ ταχύτης καὶ ἡ πρῆσις εἰς τὴν διατομὴν M .

II. B. 18) Στόμιον BORDA

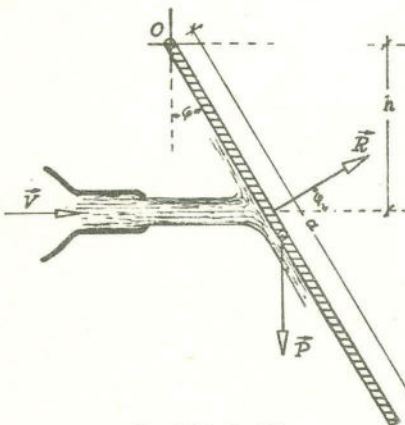


Σχ. II. B. 18

Τὸ ὕδωρ δεξαμενῆς σταθερᾶς στάθμης ἐκρέει ἀπὸ τὸ εἰσερχόμενον προ-στόμιον τοῦ σχήματος, μήκους ἴσου μὲ 1,5 ἕως 2 φορές τὴν διάμετρον τοῦ στομίλου.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστής συστολῆς c τῆς ἐξερχομένης δέσμης εἰς τὴν διατομὴν M .

II. B. 19) Ἴσορροπία πλακὸς προσβαλλομένης ἀπὸ ὀριζόντιον πίδακα



Σχ. II. B. 19

$$h = 60 \text{ cm}, \alpha = 90^\circ, P = 240 \text{ kp}, g = 10 \text{ m/sec}^2.$$

Ὁριζόντιος πίδαξ διατομῆς S καὶ ταχύτητος $\vec{V}$ προσβάλλει τετραγωνικὴν πλάκα πλευρᾶς a κινουμένην πέριξ ὀριζοντίου ἄξονος, διερχομένου διὰ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς πλακὸς.

Ἡ πλάξ σχηματίζει γωνίαν φ μετὰ τῆς κατακόρυφου.

Ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν φ συναρτήσει τῆς κατακόρυφου ἀποστάσεως h τοῦ πίδακος ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς τῆς πλακὸς καὶ τοῦ βάρους P τῆς πλακὸς.

Παραλείπεται ἡ ἐπιρροή τῶν τριβῶν, λαμβάνονται δὲ δι' ἀριθμητικὴν ἐφαρμογὴν αἱ τιμαὶ $S = 10 \text{ cm}^2$, $V = 30 \text{ m/sec}$,

II. B. 20) Δυνάμεις ἐπὶ ἐκτοξευτήρος πυρκαϊᾶς

Τὸ ἄκρον ἑνὸς ἐκτοξευτήρος πυρκαϊᾶς ἔχει ἐσωτερικὴν διάμετρον 3 cm καὶ κοχλιοῦται ἐπὶ κυλινδρικοῦ σωλήνος ἐσωτερικῆς διαμέτρου 8 cm

Όταν τὸ ἄκρον εἶναι ἀνοικτόν, ὁ ἐκτοξευτὴρ παρέχει 40 l/sec
Προσδιορίσατε:

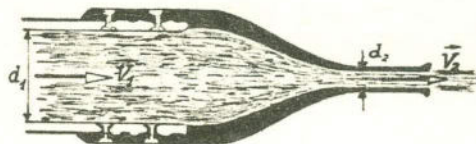
1) Τὸ φορτίον h εἰς μέτρα
ὑπὸ τὸ ὁποῖον ἐνεργεῖ.

2) Τὴν συνισταμένην τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν ἥλων.

α) ὅταν τὸ στόμιον εἶναι ἀνοικτόν

β) ὅταν τὸ στόμιον εἶναι κλειστόν.

Θεωροῦμεν διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀμελητέον τὸ βάρος τοῦ ὕδατος καὶ λαμβάνομεν $g = 10 \text{ m/sec}$.



Σχ. II. B. 20

II. B. 21) Περιστρεφόμενον δοχεῖον μέ ἐκτοξευτήρας

Δίδεται τὸ περιστρεφόμενον σύστημα τοῦ σχήματος, ἀποτελούμενον ἀπὸ κυλινδρικόν δοχεῖον, ἐφοδιασμένον εἰς τὴν βάσιν του μέ δύο συμμετρικοὺς βραχίονας μήκους l . Τὸ ὕψος πίεσεως h διατηρεῖται σταθερόν, ἡ δὲ ἐκρέουσα ὕδατινὴ δέσμη σχηματίζει γωνίαν φ μέ τὴν περιφέρειαν ἀκτῖνος l .

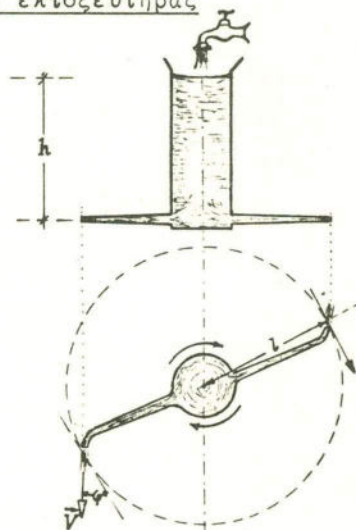
Ζητοῦνται:

1) Ἡ σχετικὴ ταχύτης ἐξόδου V τῆς δέσμης συναρτήσει τῶν h , l καὶ τῆς σταθερᾶς γωνιώδους ταχύτητος περιστροφῆς ω .

2) Ὑποτιθεμένου ὅτι δέν ὑπάρχουν τριβαί, ποῖαν μεγίστην ταχύτητα ω_{max} , θά ἀποκτήσῃ τὸ σύστημα; Δύναται ἡ ἀνωτέρω ταχύτης νά αὐξηθῇ

ἀπεριορίστως, ἢ ὄχι.

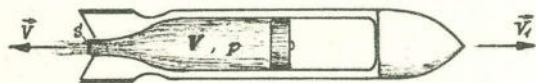
3) Εἰς τὴν γένικὴν περίπτωσιν τυχοῦσης γωνίας φ , νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐνεργειακὴ ἀπόδοσις τοῦ συστήματος. Νά ἐξετασθοῦν ἐν συνεχείᾳ αἱ περιπτώσεις $\varphi = 0$ καὶ $\varphi = \pi/2$.



Σχ. II. B. 21

II. B. 22) Προώθησις πυραύλου

Δίδεται ὁ πύραυλος τοῦ σχήματος, περιέχων κινητὸν ἔμβολον διὰ τοῦ ὁποῦ διατηρεῖται ὑπὸ σταθεράν πίεσιν p τὸ ρευστὸν πυκνότητος ρ , τὸ εὗρισκόμενον ἐντὸς τοῦ ὄγκου V . Ἐστώσαν S καὶ $\bar{V}$, ἡ διατομὴ ἐξόδου καὶ ἡ ταχύτης ἐξόδου τοῦ ρευστοῦ, $\bar{V}_2$ ἡ ταχύτης τοῦ πυραύ-



λου, m ἡ μάζα τοῦ πυραύλου ἄνευ ρευστοῦ, καὶ m_1 ἡ μάζα τοῦ ρευστοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ ἀνοίγματος τῆς διατομῆς ἐξόδου. Ἐπὶ πλέον θεωροῦμεν ὅτι ἡ κίνησις λαμβάνει χώραν ἐν τῷ κενῷ καὶ ἄνευ πεδίου βαρύτητος.

Ζητοῦνται :

- 1) Νά δεიχθῇ ὅτι ἡ ὥθησις $\vec{F}$ ἐπὶ τοῦ πυραύλου εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς πυκνότητος ρ τοῦ ρευστοῦ.
- 2) Νά ὑπολογισθῇ ἡ τελικὴ ταχύτης τοῦ πυραύλου, δι' ἀρχικὴν ταχύτητα ἴσην μὲ τὸ μηδέν.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΔΙΑ ΡΟΗΝ ΜΟΝΙΜΟΝ ΚΑΙ ΑΣΤΡΟΒΙΛΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 12

ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΑΡΑΔΟΧΑΙ ΚΑΙ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΥΠΟ ΜΕΛΕΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

12.1 ΟΡΙΣΜΟΙ-ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ-ΠΑΡΑΔΟΧΑΙ

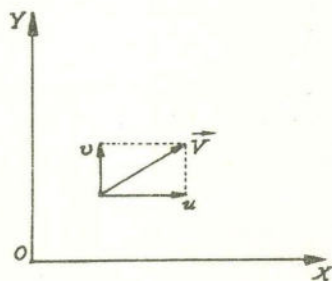
Μία υίνησις υαλεῖται γεννιῶς ἐπίπεδος, ἐάν εἰς πᾶσαν χρονι-
κὴν στιγμὴν t , αἱ ταχύτητες εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον Oxy
καὶ ἅπαντα τὰ μηχανικὰ μεγέθη παραμένουν ἀμετάβλητα διὰ τυχούσαν
παράλληλον μεταφορὰν ὡς πρὸς Oxy .

Εἰς τὴν συνέχειαν ἐργαζόμεθα εἰς τὸν δισδιάστατον
χώρον, καὶ διὰ τὴν ὑπάρχῃ συμφωνίαν μετὰ τὴν υλασσικὴν βιβλιογραφίαν,
χρησιμοποιοῦμεν διὰ τοὺς ἄξονας τοῦ
συστήματος ἀναφορᾶς καὶ τὰς συνιστώ-
σας τῆς ταχύτητος τοὺς συμβολισμοὺς
τοῦ Σχ. 12.1. Α.

Ἡ γεννιὴ μελέτη καὶ ἡ ὁλουλή-
ρωσις τῶν ἐξισώσεων μιᾶς ἐπιπέδου υι-
νήσεως, παρ' ὅλην τὴν ἀπαλοιφὴν μιᾶς
διαστάσεως, προσυροῦει εἰς σοβαρὰς
μαθηματικὰς δυσχερεῖας, ἀντιστοίχους
πρὸς τὰς τῶν ἐξισώσεων NAVIER, ἐπι-
τυγχάνεται δὲ πάλιν εἰς εἰδικὰς μό-
νον περιπτώσεις, στηριζόμενας εἰς ἀπλουστευτικὰς παραδοχὰς.

Εἰς τὰ πλεῖστα τῶν φαινομένων τῆς κινήσεως τῶν ἀσυμπιεστων
ρευστῶν μέσῳ πορωδῶν ἑδαφῶν, ἀλλὰ καὶ εἰς ἀρμετὰ ἄλλα φαινόμενα ὑ-
δραυλικῆς καὶ μηχανικῆς τῶν ρευστῶν, ἰσχύουν μετὰ μεγάλην προσέγγι-
σιν ὠρισμένοι ἀπλουστευτικαὶ παραδοχαί. Εἰς τὴν συνέχειαν τοῦ πα-
ρόντος τρίτου μέρους περιοριζόμεθα εἰς τὰς ἐπιπέδους κινήσεις, τὰς
ἀνταπουρινομένας εἰς τὰς παραδοχὰς αὐτάς, αἱ ὁποῖαι ἀναλυτικῶς ἔ-
χουν ὡς ἐξῆς:

α) Τὸ ρευστόν εἶναι ἀσυμπιεστόν. Ἐπομένως, ἰσχύει ἡ σχέση,
 $\epsilon_{xx} = \text{div} \vec{V} = 0$.



Σχ. 12.1. Α

— β) Η ροή είναι άστρόβιλος. (παράγραφος 10.3). Τοχύει έξ όρι-
 σμού ή σχέσεις $\omega = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = 0$, άρα τό διανυσματικόν πεδίων τών ταχυ-
 τήτων είναι δυναμικόν και ύπάρχει ή συνάρτησις δυναμικοῦ τοῦ πεδί-
 ου των ταχυτήτων $\varphi(x, y)$, διά τήν όποίαν ισχύουν αι σχέσεις $\vec{V} = \text{grad} \varphi$
 $(u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y})$, και $\Gamma = \int_A^B \vec{V} d\vec{l} = \varphi(B) - \varphi(A)$.

— γ) Η ροή θεωρείται συνήθως μόνιμος. Αυτό όμως δέν αποτελεί ά-
 παραίτητον προϋπόθεσιν διά τās γενικās έξισώσεις τής έπομένης παρα-
 γράφου.

12.2 ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Η έξισωσις συνεχείας διά τυχοῦσαν επίπεδον ροήν άσυμπέστου
 ρευστοῦ γράφεται

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (12.2. \alpha)$$

Παρατηροῦμεν ότι λόγω τής (12.2. α) και μόνον, ή συνάρτη-
 σις δυναμικοῦ $\varphi(x, y)$ είναι άρμονική διότι ή άντιματάστασις
 τών u και v εἰς τήν (12.2. α) δίδει

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta \varphi = 0. \quad (12.2. \beta)$$

Η διαφορική έξίσωσις (5.1.2. γ) τών γραμμών ροῆς, γράφεται έξ
 άλλου

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \eta \quad -v dx + u dy = 0. \quad (12.2. \gamma)$$

Τό πρώτον μέρος τής (12.2. γ) είναι όλκιμόν διαφορικόν μιās συν-
 αρτήσεως ψ , διότι λόγω τής (12.2. α) πληροῦται ή σχέσις $\frac{\partial(-v)}{\partial y} = \frac{\partial(u)}{\partial x}$.

Έπομένως ισχύει ή έξίσωσις

$$d\psi = -v dx + u dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0. \quad (12.2. \delta)$$

Διά τήν πλήρωσιν τής (12.2. δ) πρέπει και άρμεῖ ή ροή νά είναι
 επίπεδος και μόνιμος, ή ή ροή νά είναι επίπεδος και τό ρευστόν ά-
 συμπίεστον, δέν απαιτεῖται έπομένως ή ισχύς όλων τών παραδοχών τής

προηγούμενης παραγράφου.

Η άνωτέρω συνάρτησις ψ καλεΐται συνάρτησις ροής ή ροϊκή συνάρτησις διότι ή όλουλήρωσις τής (12.2.δ) δίδει μίαν σχέσην τής μορφής $\psi(x,y)=\text{σταθ.}$, ή όποία παριστάνει γράμμάς ροής τής έπιπέδου υινησεως.

Εν τών άνωτέρω προούπτουν διά τήν ταχύτητα αι σχέσεις

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (12.2.ε)$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

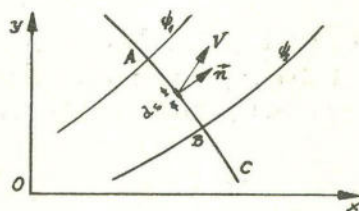
αι όποiai υπό διανυσματιήν μορφήν γράφονται

$$\vec{V} = \text{grad} \varphi = -\vec{k}_z \wedge \text{grad} \psi, \quad (12.2.ζ)$$

ένθα $\vec{k}_z$ είναι τό μοναδιαϊόν διάνυσμα του άξονος Oz (ή Ox_3). Εν τών (12.2.ε) ή (12.2.ζ) καθίσταται έμφανές ότι τό δίτυπον τό σχηματιζόμενον από τάς γραμμάς ροής καί γραμμάς ίσου δυναμιού είναι όρθογωνιόν, καθ' όσον τέμνονται αύταί μεταξύ των καθέτως.

Επί τή βάσει τών σχέσεων (12.2.δ) έμφράζεται πολύ απλά ή παροχή ή διερχομένη μεταξύ δύο γραμμών ροής ψ_1 καί ψ_2 καί διά μοναδιαϊόν πλάτος ροής κατά τόν άξονα τών z .

Εστωσαν πρός τουτο αι γραμμαί ροής ψ_1 καί ψ_2 καί τυχοῦσα καμπύλη C , τέμνουσα αύτάς εις τά A καί B . Η παροχή εις τόν σωλήνα ροής του περιλειωμένου από τάς ψ_1 καί ψ_2 θα είναι



Σχ. 12.2. Β

$$\begin{aligned} q &= \int_C \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = \rho \int_C \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(-\frac{dy}{ds} \right) + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{dx}{ds} \right] ds = \\ &= -\rho \int_C \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -\rho \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \rho (\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (12.2.η)$$

Παρατηρούμεν επίσης ότι ή συνάρτησις ροής ψ είναι άρμονική τουτο δέ διότι

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0, \quad (12.2.θ)$$

επομένως αι συναρτήσεις φ και ψ είναι συζυγείς αρμονικαί.

Έξ όλων των άνωτέρω συνάγεται ότι, εις την περίπτωση άστροβίλου ροής, η μελέτη πάσης έπιπέδου υινησεως ένός άσυμπιέστου ρευστοϋ ανάγεται εις την επίλυσιν μιās έξισώσεως LAPLACE εις τό επίπεδον

$$\Delta\varphi=0 \quad \eta \quad \Delta\psi=0,$$

όποτε προϋπτει η χάραξις των γραμμών ροής και των γραμμών ίσου δυναμιού διά την χρονικήν στιγμήν t εις την περίπτωση μή μονίμου ροής, η διά πάσαν χρονικήν στιγμήν εις την περίπτωση της μονίμου ροής.

Λόγω του ότι η έξισωσις LAPLACE είναι μερική περίπτωσηις γραμμικής διαφορικής έξισώσεως β' τάξεως μέ μερικας παραγωγους, παραθέτομεν έν συνεχεία ώρισμένους στοιχεώδεις όρισμούς επί των έξισώσεων αυτών.

12.3 ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Β' ΤΑΞΕΩΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Η γενική μορφή μιās διαφορικής έξισώσεως β' τάξεως μέ μερικας παραγωγους εις τό επίπεδον είναι

$$f(\varphi) = A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \Gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z\varphi + H = 0, \quad (12.3.a)$$

ένθα $A, B, \Gamma, \dots$ είναι γνωσταί συναρτήσεις των x και y η σταθεραί.

Η άνωτέρω έξισωσις καλεΐται έλλειπτική, υπερβολική η παραβολική, έφ' όσον αντίστοιχος η όρίζουσα

$$M = \begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}$$

είναι θετική, άρνητική, η ίση προς τό μηδέν.

Αι συνήθως άπαντώμεναι μορφαί διαφορικών έξισώσεων του τύπου αυτού, είναι αι έξης τρεΐς:

$$1) \quad f(\varphi) = \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

καλουμένη και έξισωσις του LAPLACE. Είναι έλλειπτικής μορφής, διότι $M = 1 \cdot 1 - 1 > 0$.

$$2) \quad f(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

καλουμένη και έξισωσις των έπιπέδων υυματισμών η των παλλομένων χορ-

δών. Είναι υπερβολιής μορφής, διότι $M = -\frac{1}{c^2} < 0$

$$3) \quad f(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

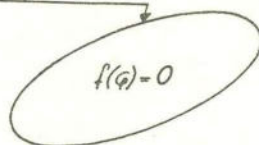
έφαρμοζόμενη εις τά φαινόμενα μεταδόσεως θερμότητας. Είναι παραβολιής μορφής, διότι $M = 0$.

Είς μίαν δεδομένην μορφήν έξισώσεως (12.3. α) ή έπίλυσις της έξαρτάται από τας τιμάς της έξισώσεως εις τά όρια του πεδίου έφαρμογής της έξισώσεως, ήτοι, από τας συνθήκας όρίων. Επί τη βάσει της μορφής υπό την όποιαν δίδονται αι συνθηκαι όρίων, διακρίνομεν τούς άμολούθους τύπους προβλημάτων (12.3. α).

Πρόβλημα του DIRICHLET

Έστω έν πεδίοη της διαφοριής έξισώσεως (12.3. α), περιοριζόμενον υπό της υλειστής υαμπύλης C Τά σημεία του πεδίου πληρούν έπομένως την σχέση $f(\varphi) = 0$, γνωρίζομεν δέ και τας τιμάς της συναρτήσεως φ εις την περιβάλλουσαν υαμπύλην C (Σχ. 12.3. Α). Η εύρεσις των τιμών της φ εις πών σημείον του πεδίου, επί τη βάσει των συνθηκών εις τά όρια, άποτελεϊ τό άντικείμενον του προβλήματος του DIRICHLET.

καμύλη C διά την
όποιαν $\varphi = \text{γνωστόν.}$



Σχ. 12.3. Α

Παρατηρούμεν έν γένει ότι έν φυσικόν πρόβλημα της μορφής $f(\varphi) = 0$, είναι ώρισμένον, τότε και μόνον όταν έχωμεν γνωστάς όριαυάς συνθήκας εις τό πεδίοη του προβλήματος, τουτο δέ διότι τότε και μόνον υπάρχει πιθανότης υπάρξεως μιās και μόνης λύσεως του προβλήματος.

Πρόβλημα του NEUMANN

Διαφέρει του προβλήματος DIRICHLET, μόνον ως προς την μορφήν της όριαυής συνθήκης.

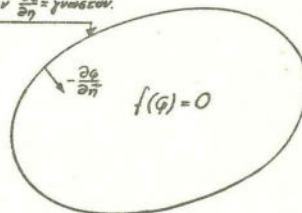
Είς πών σημείον της περιβαλλούσης υαμπύλης C , γνωρίζομεν εις την περίπτωση αυτήν τας τιμάς της παραγώγου ως προς την υάθετον διεύθυνσιν, (Σχ. 12.3. Β).

Η έπίλυσις του προβλήματος του NEUMANN είναι δυσκολωτέρα και πολλάκις άδύνατος. Πάντως, είναι άπαραίτητος ή γνώσις της τιμής της φ , εις έν τουλάχιστον σημείον της περιβαλλούσης υαμπύλης C , άλλως ή έπίλυσις θά ίσχύη κατά προσέγγισιν μιās σταθεράς.

Μιαιτόη πρόβλημα

Είς ώρισμένα τμήματα της περιυλειούσης υαμπύλης C πληροϋται ή συνθήκη του DIRICHLET και εις άλλα ή συνθήκη του NEUMANN.

καμύλη C διά την
όποιαν $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{γνωστόν.}$



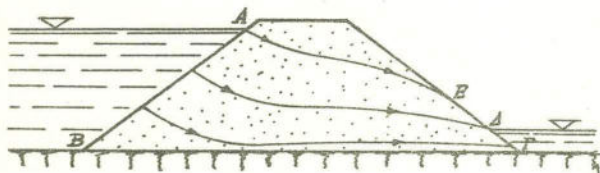
Σχ. 12.3. Β

Είς τά έν τῇ πράξει έμφανιζόμενα προβλήματα υπάρχουν συχνά άσάφειαί είς τάς όριακάς συνθήκας, π.χ. είς έν τμήμα τῆς περιλειπούσης κερπύλης C είναι άγνωστοί αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως φ ἢ τῆς

$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ Προσπαθοῦμεν τότε νά υπερπηδήσωμεν τήν δυσκολίαν αὐτήν διά τῆς εἰσαγωγῆς μιᾶς νέας συμπληρωματικῆς συνθήκης επί τοῦ τμήματος αὐτοῦ τῆς C . Τήν συμπληρωματικήν αὐτήν συνθήκην υπολογίζομεν προσεγγιστικῶς, ἢ εύρίσκομεν πειραματικῶς.

Έμφανίζονται επίσης πολλάκις άνώμαλα σημεῖα τῆς συναρτήσεως φ έντός τοῦ πεδίου εφαρμογῆς τῆς διαφορικῆς έξιώσεως.

Ός παράδειγμα άσάφειας όριακῶν συνθηκῶν αναφέρομεν τήν κίνησιν τοῦ ὕδατος μέσω χωματίου φράγματος. Όριακή κερπύλη C εἶναι ἡ $AEDGB$, καί είς τά τμήματα AE καί ED εἶναι τελείως άσάφεις αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως φ ἢ τῆς $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (Σχ.12.3.Γ)



Σχ.12.3.Γ

Διά τήν επίλυσιν τῶν έξιώσεων (12.3.α), υπάρχουν οἱ ακόλουθοι τρόποι:

1) Γραφική επίλυσις.

2) Αναλυτική επίλυσις, τῇ βοηθείᾳ τῶν

αναλυτικῶν συναρτήσεων μιγαδικῆς μεταβλητῆς.

3) Αναλυτική επίλυσις, τῇ βοηθείᾳ γραμμικοῦ συνδιασμοῦ τῶν αναλυτικῶν συναρτήσεων μιγαδικῆς μεταβλητῆς.

4) Αναλυτική επίλυσις, τῇ βοηθείᾳ μετασχηματισμῶν επί τῶν αναλυτικῶν συναρτήσεων μιγαδικῆς μεταβλητῆς, επιτυγχανομένων διά τῶν μεθόδων τῆς συμμόρφου άπειμονίσεως.

5) Αριθμητική επίλυσις τῇ βοηθείᾳ τῶν μεθόδων τῆς άριθμητικῆς αναλύσεως καί τῶν ηλεκτρονικῶν υπολογιστῶν αριθμητικοῦ τύπου.

6) Αναλογική επίλυσις, τῇ βοηθείᾳ τῶν ρεοηλεκτρικῶν μεθόδων.

Είς τά έπόμενα κεφάλαια θά έξετάσωμεν λεπτομερῶς τάς άνωτέρω μεθόδους ⁽¹⁾ καί τάς βασικάς εφαρμογάς των, έντός τῆς αναλογικῆς επίλύσεως, ἥτις καί έμφεύγει τῶν σιοπῶν τοῦ παρόντος συγγράμματος, έχει δέ έν πολλοῖς άντικατασταθῇ σήμεραν είς τόν τομέα τῆς ὕδραυλικῆς διά τῆς μελέτης επί φυσικῶν ὁμοιωμάτων.

(1) Ἡ αναλυτική επίλυσις τῶν έξιώσεων (12.3.α) επιτυγχάνεται καί διά τῆς άρμονικῆς αναλύσεως μέ άναπτύγματα είς σειράς, διά τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς συναρτήσεως GREEN, κ.ο.κ. Ἡ εφαρμογή τῶν μεθόδων αὐτῶν είς τάς επιπέδους κινήσεις εἶναι έν τούτοις περιωρισμένη, διότι ὕστερον ὡς πρός τήν ταχύτητα επίλύσεως, διά τοῦτο καί δέν έπυτείνόμεθα είς τήν ανάπτυξιν των.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 13.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΕΙΣ ΑΣΤΡΟΒΙΛΟΝ ΡΟΗΝ

13.1 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΙΣΩΣΙΣ

Ὡς ἤδη ἀνεφέρθη εἰς τὴν παράγραφον (12.2), τὸ δίσυτον τὸ σχηματιζόμενον ἀπὸ τὰς γραμμὰς ροῆς καὶ γραμμὰς ἴσου δυναμιμοῦ εἶναι ὀρθογωνιὸν

Ἄς μελετήσωμεν ἓν στοιχειῶδες ὀρθογώνιον ἑνὸς δισυτίου, (Σχ. 13.1. Α), εἰς τὸ ὁποῖον ds_ϕ καὶ ds_ψ εἶναι αἱ στοιχειώδεις μετατοπίσεις ἑνὸς σημείου M κατὰ μίαν γραμμὴν ἴσου δυναμιμοῦ καὶ μίαν τροχίαν του, καὶ $d\phi, d\psi$ αἱ ἀντίστοιχοι μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων ϕ καὶ ψ , κατὰ τὰς μετατοπίσεις αὐτὰς τοῦ σημείου.

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση

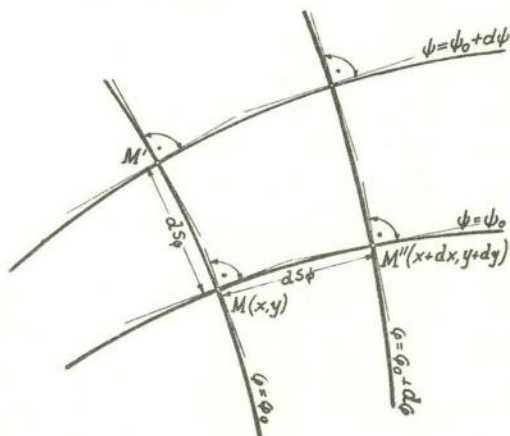
$$\boxed{\frac{ds_\psi}{ds_\phi} = \frac{d\phi}{d\psi}} \quad (13.1. a)$$

Πράγματι

$$d\phi = \text{grad} \phi \cdot \vec{ds}_\phi, \quad d\psi = \text{grad} \psi \cdot \vec{ds}_\psi,$$

ὁπότε

$$|ds_\psi| = \frac{d\phi}{|\text{grad} \phi|}, \quad |ds_\phi| = \frac{d\psi}{|\text{grad} \psi|},$$



Σχ. 13.1. Α

διότι τὰ $\text{grad}\varphi, \vec{ds}_\varphi$ καὶ $\text{grad}\psi, \vec{ds}_\psi$ εἶναι συγγραμμικά.

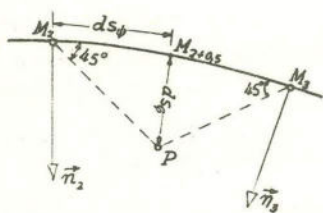
Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ἀμέσως ἡ ζητούμενη σχέση (13.1. α) διότι ἐπὶ πλέον $|\text{grad}\varphi| = |\text{grad}\psi|$, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν (12.2. ε).

Ἡ σχέση (13.1. α) ἀποτελεῖ τὴν βάση διὰ τὰς γραφικὰς ἐφαρμογὰς, διότι ἐπιτρέπει τὴν γραφικὴν κατασκευὴν τῶν γραμμῶν ροῆς καὶ τῶν γραμμῶν ἴσου δυναμιμοῦ μιᾶς ἐπιπέδου μινήσεως. Πράγματι, διὰ $d\varphi = d\psi$, θὰ ἔχωμεν καὶ $|ds_\varphi| = |ds_\psi|$, ὁπότε τὰ στοιχειώδη ὀρθογώνια τοῦ διωτύου (γραμμῶν ροῆς-γραμμῶν ἴσου δυναμιμοῦ), γίνονται τετράγωνα καὶ τὸ δίωτυον γίνεται τετραγωνιῶν.

Ὡς γραφικὴν μέθοδον κατασκευῆς ἀναφερόμεν τὴν συνηθέστερον ἐφαρμοζομένην μέθοδον τοῦ PRÁŠIL.

13.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ PRÁŠIL

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐπιτρέπει τὴν κατασκευὴν ἐνός διωτύου γραμμῶν ροῆς καὶ γραμμῶν ἴσου δυναμιμοῦ, ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς γραμμῆς ροῆς, κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας εἶναι γνωστὴ ἡ διανομή τῆς συναρτήσεως δυναμιμοῦ φ .



Ἐστω ἡ γραμμὴ ροῆς $\psi = \kappa$ τοῦ σχήματος 13.2. Α καὶ ἐπ' αὐτῆς τὰ σημεῖα $M_1, M_2, \dots, M_n$, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις δυναμιμοῦ ἔχει τὰς γνωστὰς τιμὰς $\varphi_1, \varphi_2 = \varphi_1 + a, \dots, \varphi_n = \varphi_1 + (n-1)a$.

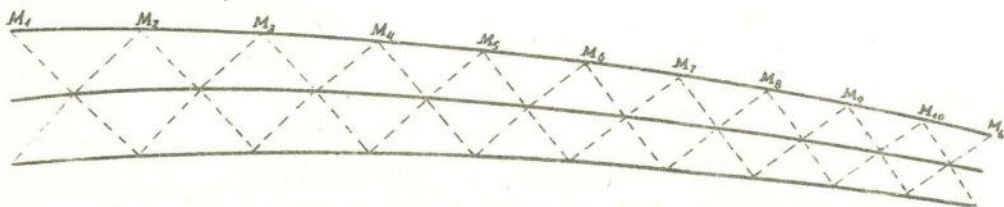
Ἡ σταθερά a λαμβάνεται ἀρμούντως μικρά, ὥστε τὰ σημεῖα M_i νὰ εὐρίσκονται πολὺ πλησίον ἀλλήλων.

Σχ. 13.2. Α

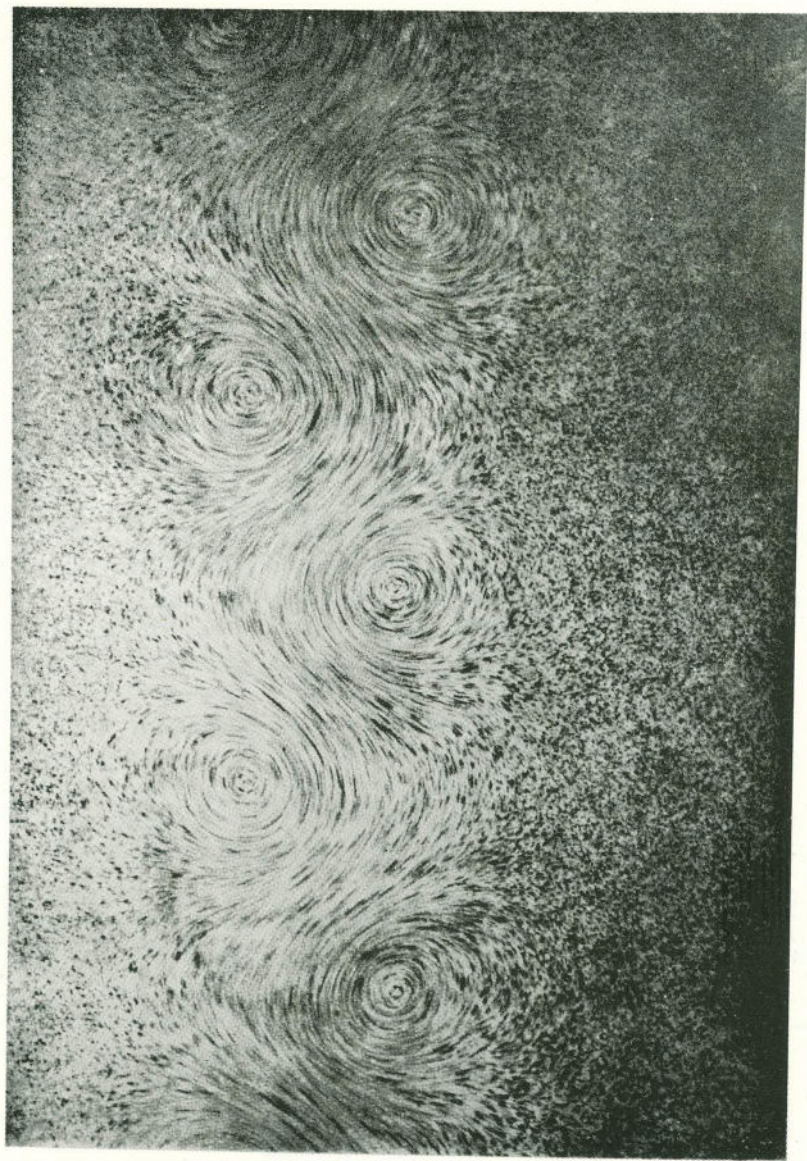
Ἐάν ἀπὸ δύο διαδοχικὰ σημεῖα π.χ. τὸ M_2 καὶ M_3 , ἀχθοῦν αἱ ἡμιμάθετοι $\vec{n}_2$ καὶ $\vec{n}_3$, καὶ ἐν συνεχείᾳ αἱ διχοτόμοι τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν, αὐταὶ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον P , καὶ τὸ τρίπλευρο $M_2 M_3 P$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς στοιχειῶδες τρίγωνον, ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές. Ἐάν ἀχθῇ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ἐκ τοῦ P πρὸς τὴν βάση $M_2 M_3$, αὐτὸ θὰ εἶναι καὶ διάμεσος, τὸ δέ σημεῖον $M_{2+0,5}$ θὰ ἔχῃ τιμὴν δυναμιμοῦ $\varphi_2 + \frac{a}{2}$ κατὰ προσέγγισιν γραμμικῆς παρεμβολῆς.

Τὴν αὐτὴν τιμὴν δυναμιμοῦ θὰ ἔχῃ καὶ τὸ σημεῖον P , δεδομένου ὅτι, ἐκ κατασκευῆς, ἡ γραμμὴ $M_{2+0,5} P$ εἶναι ἰσοδυναμικὴ. Ἐξ ἄλλου, $M_2 M_{2+0,5} = ds_\varphi$ καὶ $M_{2+0,5} P = ds_\psi$, ἄρα εἰς τὸ σημεῖον P ἡ ροικὴ συνάρτησις εἶναι

$$\kappa + d\psi = \kappa + d\varphi \frac{ds_\psi}{ds_\varphi} = \kappa + \frac{a}{2}, \quad \text{διότι } ds_\psi = ds_\varphi \text{ ἐκ κατασκευῆς καὶ } d\varphi = \frac{a}{2}.$$



Σχ. 13.2. Β



Διπλή σειρά σημειωμένων δυνάμεων εν μέσω ομοιομόρφου ροής



Ἐν συμπεράσματι, τό σημεῖον P ἀνήκει εἰς τήν γραμμὴν ροῆς $\psi = \kappa + \frac{a}{2}$ ἡ δέ θέσις του δέν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τό σημεῖον ἐμμινήσεως M .

Ἐπομένως, ἡ χάραξις τῆς γραμμῆς $\psi = \kappa + \frac{a}{2}$ ἐπιτυχάνεται εὐμόλως διὰ γενικεύσεως τῆς γραφικῆς κατασκευῆς καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς $\psi = \kappa + \frac{a}{2}$

χαράσσονται αἱ $\psi = \kappa + a$, $\psi = \kappa + \frac{3a}{2}$, κ. ο. κ., δηλαδή τό σύνολον τῶν γραμμῶν ροῆς.

Ὡς πρὸς τὰς γραμμὰς ἴσου δυναμιμοῦ, αὐταὶ χαράσσονται αὐτομάτως σὺν τῇ προόδῳ τῆς ὅλης γραφικῆς κατασκευῆς.

13.2.1 Ἐφαρμογή

Χάραξις διωτύου ροηφόρων καὶ ἰσοδυναμιῶν γραμμῶν εἰς ροὴν ὑπεράνω ἐυχειλιστοῦ φράγματος, παχείας στέψεως.

Δίδεται ὁ ἐν σχήματι ἐυχειλιστὴς ὡς καὶ ἡ θέσις τῆς γραμμῆς ροῆς OM , εὐρεθεῖσα πειραματικῶς.

Ζητεῖται ἡ χάραξις τῶν ροηφόρων καὶ ἰσοδυναμιῶν γραμμῶν τῆς ἐυχειλιζούσης φλεβός.

Δεχόμεθα ὅτι ἡ ροὴ πληροῖ τὴν προϋπόθεσιν τοῦ ἀστροβίλου, γεγονός τό ὁποῖον συμβαίνει κατὰ μεγάλην προσέγγισιν εἰς τὴν πραγματικότητα (ἐπιταχυνόμενη ροή).

Ἐφαρμόζομεν ἐν συνεχείᾳ τὴν ἐξίσωσιν BERNOLLI εἰς τὴν γραμμὴν ροῆς OM , ἔνθα

τό M εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς γραμμῆς, κατάντι τοῦ O , τό δέ σημεῖον O λαμβάνεται εἰς ἀριετὴν ἀπόστασιν ἀνάντι τῆς στέψεως τοῦ ἐυχει-

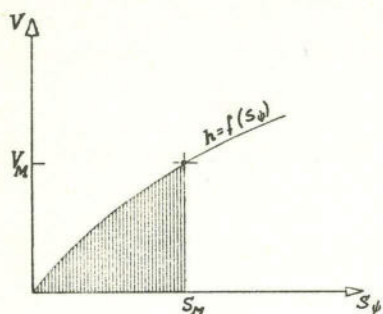
λιστοῦ. Θά προύψη ὅτι $\frac{V_o^2}{2g} + \frac{P_o}{\rho g} + z_o = \frac{V_M^2}{2g} + \frac{P_M}{\rho g} + z_M$, ἐξ οὗ ἔχομεν

$$V_M = \sqrt{2gh}$$

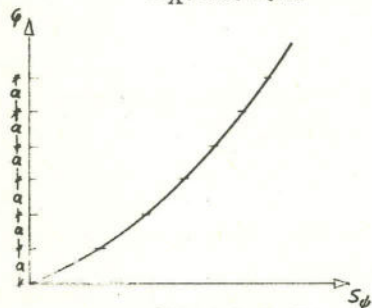
διότι ἡ ταχύτης προσπελάσεως V_o εἶναι μέ τιανὴν προσέγγισιν ἴση πρὸς τό μηδέν καὶ $z_o - z_M = h$.

Ἐξ ἄλλου $d\phi = \text{grad} \phi \, d\vec{s}_\phi$ καὶ $\vec{V} = \text{grad} \phi$, ἄρα $|V| = \frac{d\phi}{ds_\phi}$

Ἐν τῶν δεδομένων λαμβάνομεν γραφικῶς ἢ ἀναλυτικῶς τὴν σχέσιν $h=f(s_\psi)$ καὶ ἐν συνεχείᾳ χαράσσομεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 13.2.Δ, εἰς τὸ ὁποῖον ἐν τῶν s_ψ εὐρίσκειμεν τὰ ἀντιστοιχοῦντα h , καὶ ἐξ αὐτῶν τὰς ταχύτητας V_M .



Σχ. 13.2. Δ



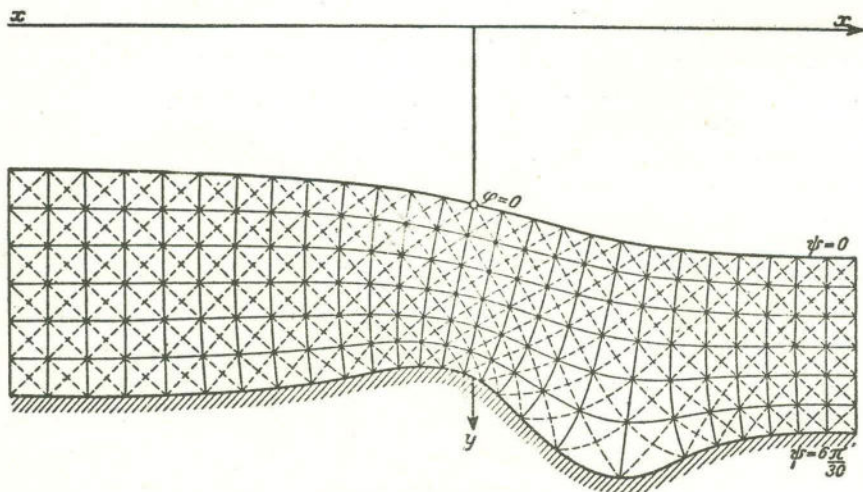
Σχ. 13.2. Ε

ὑπαρτίν ἡ μὴ ἀπουολλήσεως τῆς ὑπερχειλιδούσης φλεβός. Προφανῶς ἰδεώδης χάραξις ἐξωραχίου εἶναι αὐτὴ διὰ τὴν ὁποῖαν τὸ ἐξωράχιον ταυτίζεται μὲ αὐτὴν ταύτην τὴν τελευταίαν γραμμὴν ροῆς.

Τὸ διαγραμμισμένον ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος 13.2.Ε μᾶς δίδει ἀπ' εὐθείας τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως δυναμιμοῦ φ εἰς τὸ τυχόν σημεῖον M , διότι $\varphi = \int_0^{s_M} V ds_\psi$.

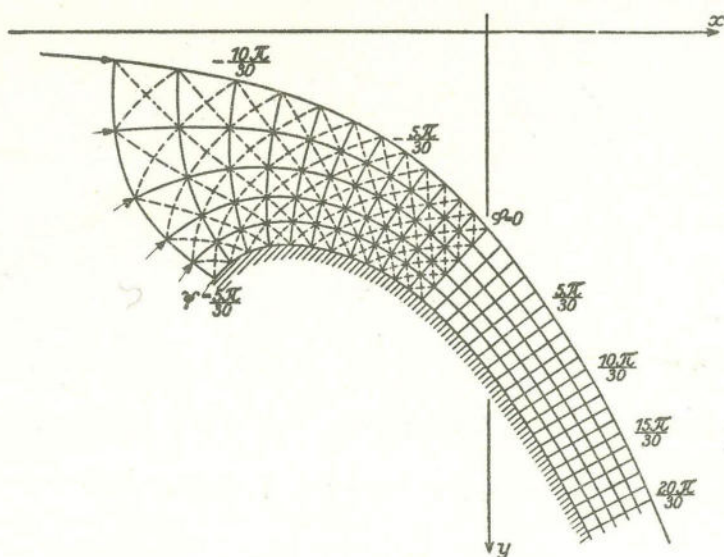
Ἐπομένως ἐν τοῦ διαγράμματος αὐτοῦ χαράσσεται τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 13.2.Ε. Ἐξ αὐτοῦ προκύπτουν αἱ τιμαὶ τῶν ds_ψ διὰ μιάν τυχούσαν μεταβολὴν δυναμιμοῦ $d\varphi = a$, καὶ ἐπομένως ὑπάρχουν πλέον τὰ ἀπαιτούμενα στοιχεῖα διὰ τὴν χάραξιν ἐνός διωτῆρος ροηφόρων καὶ ἰσοδυναμιῶν γραμμῶν.

Ἐν τῆς χάραξεως τοῦ διωτῆρος εὐρίσκειμεν τὰς ροηφόρους γραμμὰς τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα τοῦ ἐξωραχίου τοῦ ἐνχειλιστοῦ, καὶ προσδιορίζομεν οὕτω τὴν



Σχ. 13.2. Ζ

Εἰς τὸ σχῆμα 13.2.Ζ δίδεται ἡ γραφικὴ επίλυσις μιᾶς ἀστροβίλου ροῆς ἐντός ἀγωγοῦ μὲ μαμπυλόγραμμον μνηστομὴν πυθμένος, τῆς γραμμῆς $\psi=0$ εὐρεθείσης πειραματικῶς.



Σχ. 13.2. Η

ἐνῶ εἰς τό σχῆμα 13.2. Η δίδεται ἕν ὁλοκληρωμένον παράδειγμα γραφικῆς ἐπιλύσεως ροῆς ὑπεράνω ἐυχειλιστοῦ παχείας στέψεως, ἄνευ ἀποβολῆσεως τῆς ὑπερχειλιζούσης φλεβός.

Μία λεπτομερὴς σύγχρονος ἀνάλυσις τῶν πλεονεκτημάτων καὶ μειονεκτημάτων τῶν γραφικῶν μεθόδων ἐν γένει καὶ τῆς μεθόδου PRA-SIL εἰδιωότερον, ὁδηγεῖ εἰς τὰ ἀνύλιστα συμπεράσματα.

α) Ἡ σύγχρονος ἀνάπτυξις τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων καὶ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως ἔχει ἐπιβάλει ὡς ἀκριβεστέρας, ταχύτερας καὶ οἰκονομικτέρας τὰς εἰς αὐτὰς βασιζομένας μεθόδους, ἰδίως ὅσον ἀφορᾷ τὰς υινήσεις μέ πολυπλότους συνθήμας ὁρίων, αἱ ὁποῖαι ὁμως ἀποτελοῦν καὶ τὴν πλειονότητα τῶν συναντωμένων περιπτώσεων.

β) Ἡ ἀκρίβεια τῆς γραφικῆς κατασκευῆς εἶναι ἐντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ γραμμικοῦ μεγέθους ds_ϕ ἢ ds_ψ , καὶ τῆς αὐτῆς καμπυλότητος τῶν γραμμῶν ροῆς. Καὶ διὰ μὲν τὰ γραμμικά μεγέθη ἐπιδιώκεται ὁ σχηματισμός τῶν μικροτέρων δυνατῶν στοιχειωδῶν τετραγώνων, μέ βάσιν τὴν ἐπιδιωκομένην τελειὴν ἀκρίβειαν, καθ' ὅσον ἡ πύκνωσις τοῦ δικτύου πολλαπλασιάζει τὴν ἐργασίαν τῆς γραφικῆς κατασκευῆς, διὰ δέ τὰς αὐτῆς καμπυλότητος κατεβλήθη προσπάθεια ὅπως εἰσαχθοῦν εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου PRAŠIL, ἐπετεύχθη δέ οὕτω μία γενίκευσις τῆς μεθόδου, δίδουσα ἀκριβεστέρα ἀποτελέσματα ἀλλὰ αὐτάνουσα ἀντιστοίχως τὴν ὅλην ἐργασίαν (BARRILLON: Note sur les rayons de courbure intervenant dans la construction des reseaux hydrodynamiques, R.G.H. No 8 1936). Δέν θά ἐπευταῶμεν εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς γενικεύσεως αὐτῆς λόγῳ τοῦ πρώτου συμπεράματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 14.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

ΔΙΑ ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

14.1 ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

Ὡς βασικαί παραδοχαί διά τήν επίλυσιν τοῦ προβλήματος τῶν ἐπιπέδων κινήσεων τῇ βοήθειᾳ τῶν αναλυτικῶν συναρτήσεων μιγαδικῆς μεταβλητῆς, εἶναι αἱ τοῦ ἀσυμπίεστου ρευστοῦ καί τῆς ἀστροβίλου ροῆς. Εἰς τὰς πλείστας ὅμως τῶν ἐπιλυομένων περιπτώσεων, ὑπεσιέρονται αἱ ἐξῆς δύο συμπληρωματικαί παραδοχαί:

α) Ἡ ροή θεωρεῖται μόνιμος, δεδομένου ὅτι ἡ ἔννοια τῶν γραμμῶν ροῆς ταυτίζεται εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις μέ τήν ἔννοιαν τῶν τροχιῶν. Τουτέστιν, ἡ χάραξις ἐνός διωτύου ροηφόρων γραμμῶν ὑπονοεῖ σωπηλῶς τήν σταθερότητα τῶν γραμμῶν αὐτῶν ἐν τῷ χρόνῳ, καί ἐπομένως προὑποτίθεται ὅτι ἡ ροή εἶναι μόνιμος. Ἡ παραδοχή αὕτη εἶναι συνήθης, χωρίς νά εἶναι ἀναγκαία, διότι ἄνευ αὐτῆς τό χαραχθέν δίωτυον ἰσχύει ἀπλῶς διά μίαν συγμεινιμένην χρονικήν στιγμήν t .

β) Τό ρευστόν θεωρεῖται τέλειον. Αὐτό προϋπτεῖ ἀπό τό γεγονός ὅτι αἱ ὑπολογιζόμεναι ὀριακαί γραμμαί ροῆς ἀποτελοῦν τὰς στερεάς παρειάς σωμάτων περιβαλλόντων τήν ροήν ἢ ἐμβαπτισμένων εἰς αὐτήν. Δεχόμεθα ἐπομένως ὅτι τό ρευστόν ὀλισθαίνει κατά μῆκος τῶν παρειῶν (ἴδε 9.4) καί ἡ συνθήκη αὕτη ἀνταποκρίνεται μόνον εἰς τὰ τέλεια ρευστά, δεδομένου ὅτι εἰς τὰ πραγματικά ρευστά δέν ὑπάρχει ὀλίσθησις, ἀλλά πρόσφυσις εἰς τήν παρειάν.

Ἐπομένως ἡ παραδοχή τοῦ τελείου ρευστοῦ εἶναι ἀναγκαία δι' ὅλας τὰς αναλυτικὰς μεθόδους ἐπίλυσεως τῶν ἐπιπέδων κινήσεων, διά τὰς ὁποίας αἱ στερεαί παρειαί ἀποτελοῦν ὀριακήν γραμμὴν ροῆς. Τονίζομεν ὅμως τό γεγονός ὅτι αὕτη εἶναι ἀναγκαία μόνον διά τὰς ὀριακάς συνθήκας. Ἐπομένως, ἐάν κατὰ μίαν τυχοῦσαν μέθοδον, εὑρεθοῦν ἢ θεωρηθοῦν ὡς γνωσταί καί ἀκριβεῖς αἱ ὀριακαί συνθήκαι, ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος ἐν-

τός τοῦ ὑπ' αὐτῶν περιλειομένου χώρου, ἰσχύει ἀπολύτως δι' οἷονδήποτε πραγματικόν ἀσυμπίεστον ρευστόν εἰς ἀ-στρόβιλον ροήν.

14.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΟΣ

Ἐστω $z=x+iy$ μία μιγαδική μεταβλητή, παριστανομένη ἀπὸ τό σημεῖον M , συντεταγμένων (x, y) , τοῦ επιπέδου Oxy (Σχ. 14.2.Α) καί

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (14.2. \alpha)$$

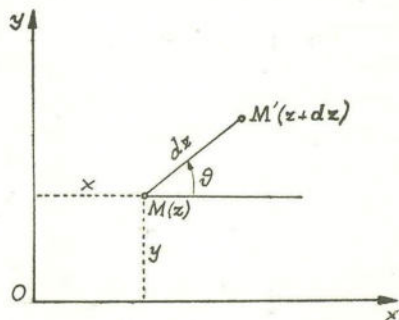
μία συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς, ἔνθα $\varphi(x, y)$ καί $\psi(x, y)$ εἶναι αἱ συναρτήσεις δυναμιοῦ καί ροῆς.

Μία συνάρτησις τῆς μορφῆς (14.2α) ὀνομάζεται ἀναλυτικὴ συνάρτησις τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z , ὅταν ἡ παράγωγός της ὡς πρὸς z εἶναι τελείως ὠρισμένη, διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ αὐτῆς.

Αἱ ἵκαναί καί ἀναγκαῖαι συνθῆμαι πρὸς τοῦτο (συνθῆμαι CAUCHY-RIEMANN) γράφονται ⁽¹⁾

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (14.2. \beta)$$

ἥτοι διανυσματικῶς προεῖπται ἡ σχέση (12.2.ζ). Συμπεραίνομεν ἐπομένως ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z , τό μέν πραγματικόν μέρος της παριστᾷ τήν συνάρτησιν δυναμιοῦ, ὁ δέ πραγματικὸς συντελεστής τοῦ φανταστικοῦ μέρους της παριστᾷ τήν συνάρτησιν ροῆς, μιᾶς ιννηματικῶς δυνατῆς ἀστροβίλου επιπέδου ιννήσεως, ἀσυμπίεστου ρευστοῦ. Τήν συνάρ-



Σχ. 14.2.Α

(1) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀναγκαίου καί ἱκανοῦ τῶν συνθῆμων (14.2.β) ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἐστω τό σημεῖον $M(x)$ τοῦ επιπέδου Oxy (Σχ. 14.2.Α) καί μία ἀπειροστή μετατόπισις αὐτοῦ εἰς τό $M(x+dx)$, προσδιορισμένη ἀπὸ τό διάνυσμα $\overline{MM'} = dx = dx + i dy$. Θά εἶναι

$$df(z) = d\varphi + i d\psi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) + i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy,$$

ὁπότε

$$\frac{df}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy}{dx + i dy} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx}}{1 + i \frac{dy}{dx}}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παράγωγος $\frac{df}{dz}$ εἶναι συνάρτησις τῆς $\frac{dy}{dx}$ καί ἐπομένως τό ὄριον αὐτῆς διὰ $dx \rightarrow 0$, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τήν διέυθυνσιν τήν ἀκολουθοῦμένην ἀπὸ τό M ὅταν αὐτό τείνει εἰς τό M' . Διὰ νά εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διευθύνσεως $\overline{MM'}$ καί τελείως ὠρισμένον πρέπει νά ἰσχύῃ ἡ ἰσότης

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}}{i} \quad \eta \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{ὁ. ἔ. ὁ.}$$

τησιν αὐτήν $f(z)$ θά υαλέσωμεν μιγαδιὸν δυναμιὸν τῆς παριστανομένης ἐπιπέδου μινήσεως.

Ἄλλη σημαντικὴ ἔννοια εἶναι ἡ τῆς μιγαδιῆς ταχύτητος. Ἐξ ὁρισμοῦ θά υαλέσωμεν μιγαδιὴν ταχύτητα τὴν ἐπίσης αναλυτικὴν συνάρτησιν

$$W = \frac{df}{dz}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}$, ὁπότε

$$\boxed{W = \frac{df}{dz} = u - iv}, \quad (14.2. \gamma)$$

διότι
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv.$$

Τό μέτρον καί τό ὄρισμα τῆς αναλυτικῆς συναρτήσεως W παριστοῦν ἀντιστοιχῶς τό μέτρον $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ τοῦ διανύσματος τῆς ταχύτητος καί τὴν γωνίαν πού σχηματίζει αὐτό μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x , εἰς τὴν ὑπ' ὅψιν ἐπίπεδον μίνησιν, διότι

$$\boxed{W = u - iv = \rho e^{-i\theta}}. \quad (14.2. \delta)$$

Ἐν συμπεράσματι, ἡ μινηματικὴ περιγραφή μιᾶς ἀστροβίλου ἐπιπέδου μινήσεως ἀσυμπιέστου ρευστοῦ (10.2) προϋπτεῖ πλήρως ἀπὸ μόνην τὴν αναλυτικὴν συνάρτησιν $f(z)$, ἥτις εἶναι καί τό μιγαδιὸν δυναμιὸν τῆς ὑπ' ὅψιν ἐπιπέδου μινήσεως.

Γεννᾶται ὁμως τό ἐξῆς βασικὸν ἐρώτημα: "Ποίας συνθήμας πρέπει νά πληροῖ μία αναλυτικὴ συνάρτησις $f(z)$ οὕτως ὥστε νά παριστάνῃ ὁπωσδήποτε μίαν πραγματικὴν ἐπίπεδον ροήν;"

Ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως ἡ ἀπάντησις εἶναι ἀπλῆ: "Ἡ πραγματικὴ ταχύτης $\bar{V}$ πρέπει νά εἶναι μονοτίμως ὠρισμένη εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῆς μινήσεως."

Αὐτό μεταφράζεται αναλυτικῶς ἀπὸ τὴν ἐξῆς συνθήμην: Ἡ μιγαδιὴ ταχύτης W πρέπει νά εἶναι μία συνάρτησις ὁλόμορφος δι' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιπέδου μινήσεως.

Εἰς τὴν ἐπομένην παράγραφον θά ἐξετασθοῦν αἱ συνέπειαι τῆς συνθήμας αὐτῆς ἐπὶ τῆς συναρτήσεως $f(z)$.

14.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ

Ἐστω ἡ αναλυτικὴ συνάρτησις $f(z)$ μέ πεδίων ὁρισμοῦ τὴν υλεστήν περιοχὴν S τοῦ ἐπιπέδου Oxy (Σχ.14.3.Α). Ἐάν τό πεδίων

S , εἰς τό ὁποῖον λαμβάνει χώραν ἡ ἐπίπεδος υῖνῃσις, εἶναι ἀπλῶς συνευτιῶν διά τήν $f(z)$, τότε αὕτη εἶναι ἐπὶ πλέον ὁμοιόμορφος. Μία συνάρτησις $f(z)$, ἀναλυτικὴ καὶ ὁμοιόμορφος, καλεῖται ὁλόμορφος συνάρτησις.

Ἐστω $f(z_0)$ μία γνωστὴ τιμὴ τῆς ὁλομόρφου συναρτήσεως $f(z)$ εἰς τό σημεῖον $M_0(z_0)$. Ἡ τυχούσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως $f(z)$ θά δίδεται προφανῶς ἀπὸ τήν σχέσιν

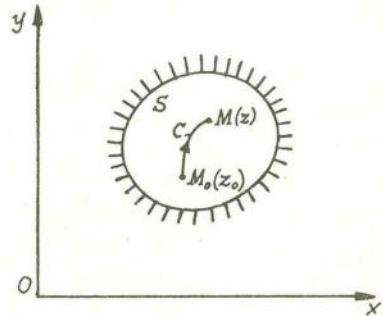
$$f(z) = f(z_0) + \int_{\gamma_0}^z W dz. \quad (14.3.a)$$

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι, συμφῶνως πρὸς τό θεώρημα τοῦ CAUCHY ⁽¹⁾, τό ἐπιωαμπύλιον ὁλομήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διαδρομῆς ποῦ ἡμολογήθη κατὰ τήν ὁλομήρωσιν, καὶ ἐξαρτᾶται ἀπολειστικῶς ἀπὸ τὰς ἀνταίμας τιμάς αὐτῆς. Ἐπομένως ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $f(z)$ θά εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἡμολοθουμένης αμπτύλης C .

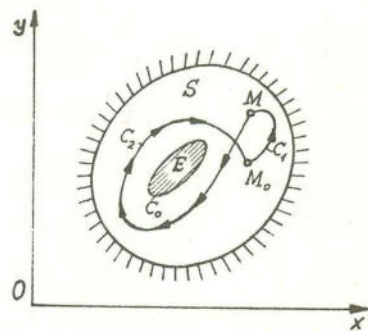
Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα τήν περίπτωση συνάρτησεως $f(z)$ ἀναλυτικῆς ἀλλὰ μὴ ὁλομόρφου, ἥτοι, ἐχούσης πεδῖον ὁρισμοῦ πολλαπλῶς συνευτιῶν.

Ἐπὶ παραδείγματι, ἔστω τό ἀπλῶς συνευτιῶν πεδῖον S , ἐντός τοῦ ὁποῖου ὑπάρχει τό πολλαπλῶς συνευτιῶν πεδῖον E (Σχ. 14.3. Β).

Ἄς πραγματοποιήσωμεν τήν ὁλομήρωσιν $\int_{\gamma_0}^z W dz$ πρῶτον κατὰ μῆκος τῆς αμπτύλης C_1 , καὶ κατόπιν κατὰ μῆκος τῆς αμπτύλης C_2 . Αἱ τιμαὶ τῶν δύο ὁλομηρωμάτων δέν εἶναι τώρα ἴσαι. Ἡ διαφορὰ των παριστᾷ τό ὁλομήρωμα κατὰ μῆκος τῆς υλειστικῆς αμπτύλης $C = C_1 + C_2$, κατὰ τήν φοράν τοῦ βέλους ⁽²⁾, καὶ εἶναι ἴση πρὸς



Σχ. 14.3. Α



Σχ. 14.3. Β

(1) **Θεώρημα τοῦ CAUCHY:** Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ὁλόμορφος συνάρτησις καὶ ἡ $W(z)$ ἀναλυτικὴ τοιαύτη, τό ἐπιωαμπύλιον ὁλομήρωμα $\int_{\gamma} f(z) dz$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς διαδρομῆς AB , καὶ διὰ $A=B$ ἔχομεν $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Ἀπόδειξις:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (\varphi + i\psi)(dx + i dy) = \int_{\gamma} (\varphi dx - \psi dy) + i \int_{\gamma} (\psi dx + \varphi dy).$$

Αἱ συναρτήσεις $\varphi dx - \psi dy$ καὶ $\psi dx + \varphi dy$ εἶναι τὰ ὁλικά διαφορικά dw_1, dw_2 δύο συναρτήσεων w_1, w_2 λόγῳ τῶν σχέσεων (12.2. η). Ἀρα αἱ τιμαὶ τῶν ἀντιστοίχων ὁλομηρωμάτων ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὰς τιμάς τῶν w_1 καὶ w_2 εἰς τὰ A καὶ B , ὁ. ἔ. δ.

(2) Τὸς θεωρίαν μιγαδῶν συναρτήσεων, θεωρήματα CAUCHY, LIOUVILLE, ἀναπτύγματα κατὰ TAYLOR καὶ MAC LAURENT καὶ θεωρήματα ὑπολοίπων.

$$\oint_C W dz = m(\Gamma + iQ), \quad (14.3. \beta)$$

ἔνθα

- m παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν τῆς καμπύλης C , περὶ τῆς περιοχῆς E . Ὁ ἀριθμὸς m θὰ εἶναι ἐπομένως ἀιέριος, θετικὸς, ἀρνητικὸς ἢ μηδέν, τὸ δέ σημεῖον τοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φοράν τῆς περιστροφῆς. Διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος 14.3. Β $m=-1$.
- $\Gamma+iQ$ παριστᾷ τὴν σταθεράν τιμὴν τοῦ ἐπιμαμπυλίου ὁλοκληρώματος διὰ μίαν ὀρθὴν περιφορὰν κατὰ μῆκος μιᾶς τυχούσης υλειστῆς καμπύλης C' , περιβαλλούσης τὴν περιοχὴν E , δίδεται δέ ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\Gamma + iQ = \oint_C W dz = \oint_C [u dx + v dy + i(u dy - v dx)].$$

Παρατηροῦμεν ἐξ ἄλλου ὅτι ἡ ποσότης Γ παριστᾷ τὴν κυκλοφορίαν τοῦ διανύσματος τῆς ταχύτητος κατὰ μῆκος τῆς υλειστῆς καμπύλης C_0 τῆς περιβαλλούσης τὴν περιοχὴν E κατὰ τὴν ὀρθὴν φοράν, ἥτοι

$$\Gamma = \int_{C_0} \vec{V} d\vec{l}.$$

Ἐπίσης ἡ ποσότης Q παριστᾷ τὴν παροχὴν ὄγ-
μου διὰ τῆς καμπύλης C_0 , ἥτοι $Q = \int_{C_0} (\vec{V} \vec{n}) ds.$

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τὴν συνάρτησιν

$$\frac{\Gamma + iQ}{2i\pi} \ln(z-a),$$

ἐνθα a εἶναι ἡ μιγαδική συντεταγμένη τυχόντος σημείου ἐντὸς τοῦ E . Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ἐπίσης ὁλόμορφος διὰ $z \neq a$ ἥτοι διὰ πᾶν σημεῖον τῆς ἐντὸς τῆς E , διότι εἰς τὴν περιοχὴν E εἶναι $z \neq a$.

Ἐπομένως, κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης C θὰ ἔχωμεν πάλιν ὡς τιμὴν τοῦ $\oint_C W dz$, τὴν $m(\Gamma + iQ)$ καί, κατὰ συνέπειαν, ἡ συνάρτησις

$$f(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2i\pi} \ln(z-a)$$

εἶναι ὁμοιόμορφος, ἄρα καί ὁλόμορφος ἐντὸς ὁλοκληρίου τοῦ πεδίου S .

14.4 ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΑΣ ΑΣΤΡΟΒΙΛΟΥΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΥΜΠΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὅσων ἐλέχθησαν προηγουμένως, εἴμεθα εἰς θέσιν νά "υατασιευάσωμεν" καὶ νά μελετήσωμεν ἐπιπέδους κινήσεις, χρησιμοποιοῦντες ἀναλυτικὰς συναρτήσεις ἱκανοποιούσας τὰς συνθήκας τῆς προηγουμένης παραγράφου.

Εἰς τὴν συνέχειαν θά μελετήσωμεν ὠρισμένας κινήσεις, προερχομένας ἀπὸ ἀπλὰς ὁλομόρφους συναρτήσεις $f(z)$.

14.4.1 Ὅμοιόμορφος ροή

Ἐστω ἡ ὁλομόρφος συνάρτησις :

$$f(z) = \varphi + i\psi = Az + B, \quad (14.4.1. a)$$

ἐνθα A καὶ B τυχοῦσαι μεταβληταὶ τῆς μορφῆς $A = \alpha + i\beta$ καὶ $B = \gamma + i\delta$.

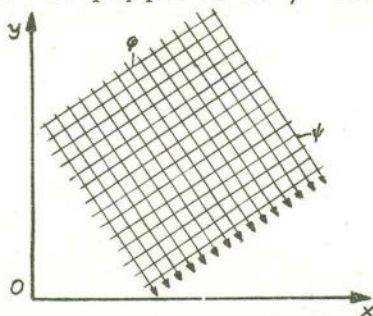
Θά ἔχωμεν

$$\begin{aligned} f(z) &= (\alpha + i\beta)(x + iy) + (\gamma + i\delta) \\ &= \alpha x - \beta y + \gamma + i(\beta x + \alpha y + \delta), \end{aligned}$$

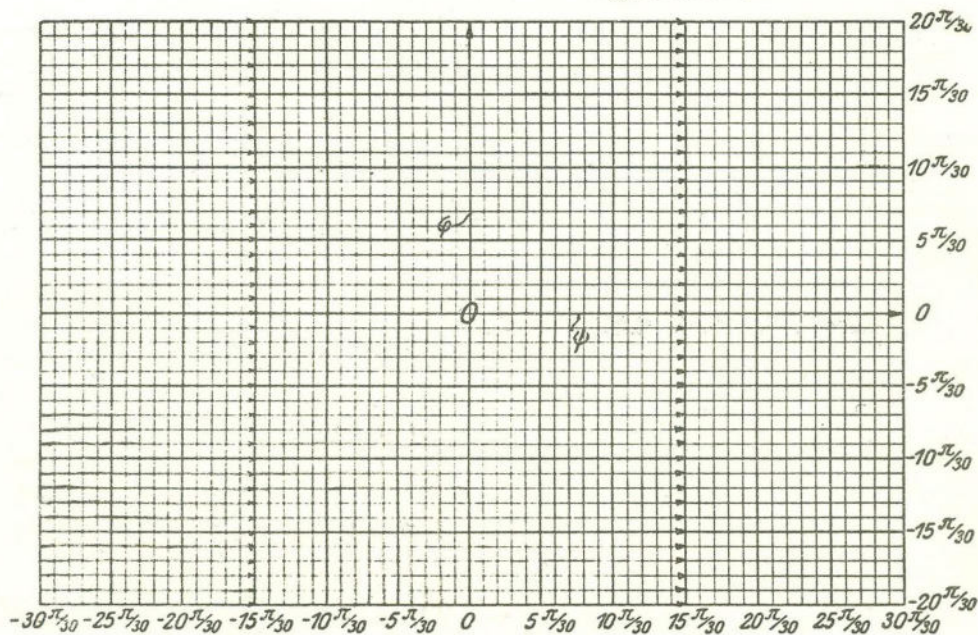
ὁπότε

$$\varphi = \alpha x - \beta y + \gamma$$

$$\psi = \beta x + \alpha y + \delta$$



Σχ. 14.4.1. A



Σχ. 14.4.1. B Ἐφαρμογή τῆς (14.4.1. a) διὰ $A=1$ καὶ $B=0$

Ἐξ ἄλλου $W = \frac{df}{dz} = A = \alpha + i\beta$ ὁπότε $u = \alpha, v = -\beta$ καὶ $|\vec{V}| = |A| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμοιόμορφος καὶ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν κλίσεως $-\frac{\beta}{\alpha}$ (Σχ. 14.4.1.Α)

Διὰ συντελεστὴν A πραγματικὸν ἔχομεν κίνησιν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x , μέ ταχύτητα $V = A_0 = V_0$. Διὰ συντελεστὴν A φανταστικὸν, ἡ κίνησις γίνεται παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y .

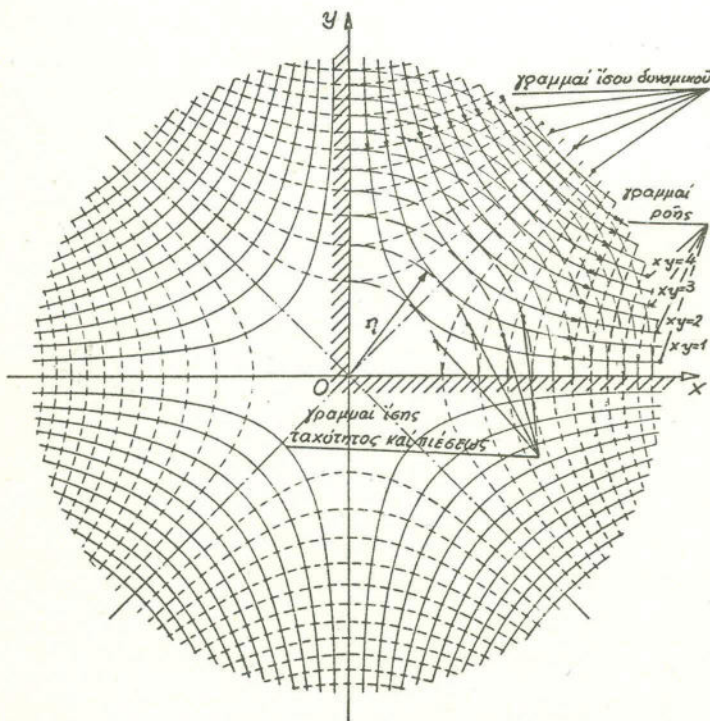
Ἐν γένει, πᾶσα ὁμοιόμορφος ροὴ παρίσταται ἀπὸ μίαν συνάρτησιν μιγαδικοῦ δυναμικοῦ, γραμμικὴν ὡς πρὸς z .

14.4.2 Ροὴ εἰς γωνίαν

Ἐστω ἡ ὁλόμορφος συνάρτησις

$$f(z) = \varphi + i\psi = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi. \quad (14.4.2.a)$$

Ἀμέσως προκύπτει ὅτι



Σχ. 14.4.2.Α

$$\varphi = x^2 - y^2$$

$$\psi = 2xy,$$

$$W = \frac{\partial f}{\partial z} = 2z = 2x + 2yi,$$

$$(u = 2x, v = -2y).$$

Αἱ γραμμαὶ ροῆς ἀποτελοῦν δέσμη ὁμοεστιασμένων ὑπερβολῶν, ἔχουσιν ὡς ἄξονας τὰς διχοτόμους καὶ ὡς ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων. Προφανῶς οἱ ἄξονες αὐτοὶ ἀποτελοῦν τὰς ὁριακὰς γραμμὰς ροῆς διότι διὰ $\psi = 0$ ἔχομε $xy = 0$, ἄρα ἢ $x = 0, y = \text{τυχόν}$, ἢ $y = 0, x = \text{τυχόν}$.

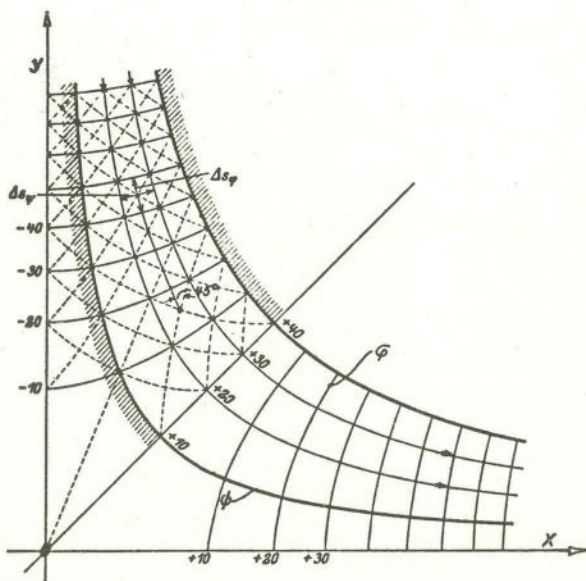
Αἱ γραμμαὶ ἴσου δυναμικοῦ ἀποτελοῦν δευτέραν δέσμη ὑπερβολῶν μέ ἄξονας τοὺς ἄξονας συντεταγμένων καὶ ἀσυμπτώτους τὰς διχοτόμους (Σχ. 14.4.2.Α).

Ἡ ἐξεταζομένη ροή ἀντιστοιχεῖ ἐπομένως εἰς ἀλλαγὴν κατευθύνσεως τῆς ροῆς ἐνός ρευστοῦ κατὰ $\frac{\pi}{2}$, καὶ δίδει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος μιᾶς ἀστροβίλου ροῆς, ἀσυμπιέστου ρευστοῦ, συναντώσεως ὀρθὴν γωνίαν καὶ ὑποχρεωμένης νὰ ἀλλάξῃ κατεύθυνσιν κατὰ $\frac{\pi}{2}$. Οἱ ἄξονες Ox καὶ Oy παριστοῦν τὰ τοιχώματα τῆς γωνίας.

Τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι $|\vec{V}| = |2z| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2r$. Ἐπομένως αἱ γραμμαὶ ἴσης ταχύτητος εἶναι περιφέρειαι, μέ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων O . Λόγῳ δέ τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ BERNOULLI καὶ τῆς σχέσεως (10.3.η), εὐρίσκωμεν καὶ τὰς ἐπιφανείας ἴσης πίεσεως. Διὰ συνάρτησιν Φ τοῦ δυναμιμοῦ ἐξωτερικῶν δυνάμεων, σταθεράν ἢ μηδενικὴν, αἱ ἐπιφάνειαι ἴσης πίεσεως εἶναι ἐπίσης περιφέρειαι μέ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

Ἡ ταχύτης μηδενίζεται διὰ $r=0$, ἥτοι εἰς τὸ O καὶ εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἔχομεν καὶ τὴν μεγίστην πίεσιν.

Ὁ μηδενισμὸς αὐτὸς τῆς ταχύτητος δημιουργεῖ μίαν νεκρὰν ζώνην παρά τὴν κορυφὴν O , μέ ἀποτέλεσμα τὴν δημιουργίαν στροβιλισμῶν, τὴν διαταραχὴν τῆς ὅλης ροῆς εἰς τὸν σωλῆνα, καὶ τὴν δημιουργίαν σοβαρῶν ἀπωλειῶν ἐνεργείας. Πρὸς ἀποφυγὴν αὐτῶν τῶν μειονετημάτων, οἱ καταςυευσταὶ ἀγωγὼν μέ γωνίας ἀνολουθοῦν δύο γραμμάς ροῆς διὰ τὴν χάραξιν τοῦ ἐξωραχίου καὶ



Σχ. 14.4.2. Β

ἐσωραχίου τοῦ ἀγωγοῦ (Σχ. 14.4.2. Β). Προϋπτεῖ οὕτω μία ἀλλαγὴ διευθύνσεως ροῆς ἄνευ σημαντικῶν διαταραχῶν καὶ ἀπωλειῶν.

Ἄς γεννιεύσωμεν τώρα τὰ προηγούμενα, ἐξετάζοντες τὴν ὁλόμορφον συνάρτησιν

$$f(z) = \varphi + i\psi = z^{\nu}. \quad (14.4.2. \beta)$$

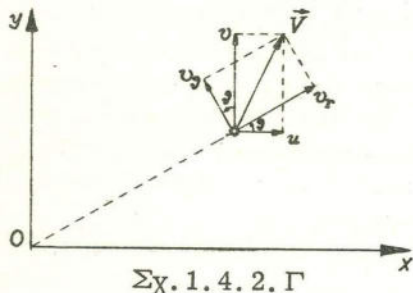
Διὰ $\nu > 1$ θά ἔχωμεν

$$f(z) = z^\nu = (re^{i\vartheta})^\nu = r^\nu (\cos \nu\vartheta + i \sin \nu\vartheta),$$

καί κατὰ συνέπειαν,

$$\varphi = r^\nu \cos \nu\vartheta, \quad \psi = r^\nu \sin \nu\vartheta.$$

Θά ἐμφράσωμεν τὰς συνιστώσας τῆς ταχύτητος εἰς πολικὰς συντεταγμένας (Σχ. 14.4.2. Γ). Ἡ λύσις αὕτῃ ἐπιβάλλεται ὡς συμφερωτέρα λόγῳ τῆς $f(z)$ καί τῶν φ καί ψ . Θά ἔχωμεν

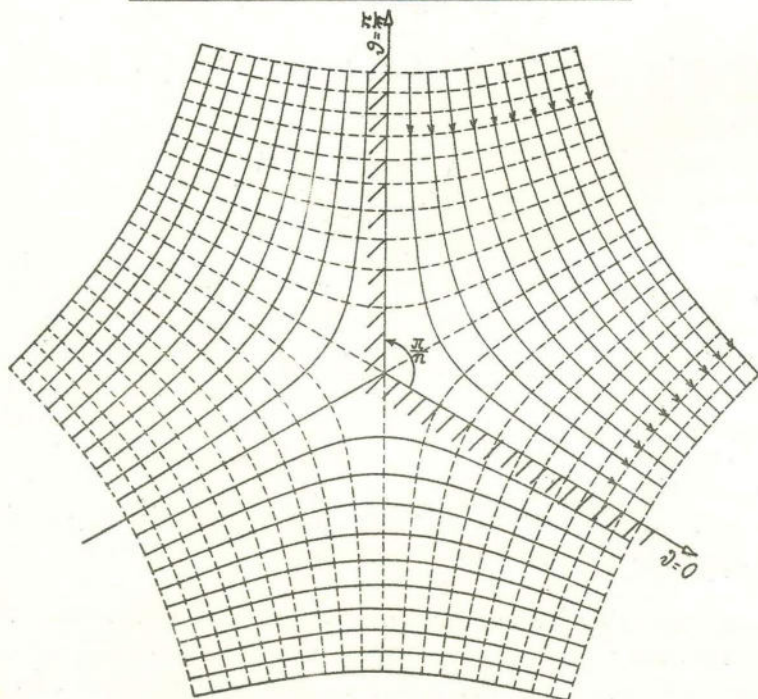


$$v_r = u \cos \vartheta + v \sin \vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \eta$$

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (14.4.2. \gamma)$$

$$v_\vartheta = -u \sin \vartheta + v \cos \vartheta = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} (-r \sin \vartheta) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} (r \cos \vartheta) \right], \quad \eta$$

$$v_\vartheta = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}. \quad (14.4.2. \delta)$$



Ἐξ αὐτῶν προκύπτει

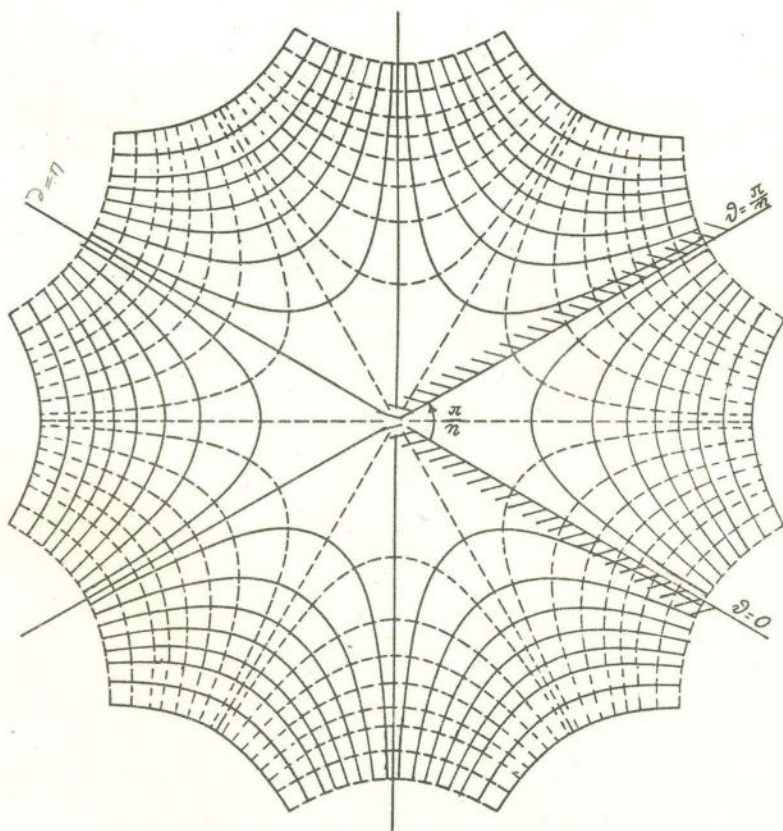
$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \nu r^{\nu-1} \cos \nu \vartheta, \\ u_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -\nu r^{\nu-1} \sin \nu \vartheta,$$

καί

$$|\vec{V}| = |\nu z^{\nu-1}| = \nu r^{\nu-1}.$$

Ἡ γραμμὴ ροῆς $\psi = 0$ ἔχει ὡς ἐξίσωσιν $\sin \nu \vartheta = 0$, ἄρα $\nu \vartheta = 0$ ἢ π , ὁπότε προκύπτουν αἱ λύσεις $\vartheta = 0$ καὶ $\vartheta = \frac{\pi}{\nu}$. Αἱ ὁριαφαὶ γραμμαὶ ροῆς ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας $\vartheta = 0$ καὶ $\vartheta = \frac{\pi}{\nu}$.

Ἡ παριστανομένη ροὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀλλαγὴν κατευθύνσεως κατὰ γωνίαν περιλαμβανομένην μεταξύ 0 καὶ π .



Σχ. 14.4.2. Ε

Διὰ $\nu=2$ ἔχομεν τὴν γνωστὴν ροὴν τοῦ σχήματος 14.4.2.Α.

Διὰ $\nu = \frac{3}{2}$ ἔχομεν τὴν ροὴν τοῦ σχήματος 14.4.2. Δ

Διὰ $\nu = 3$ ἔχομεν τὴν ροὴν τοῦ σχήματος 14.4.2. Ε

Διὰ $\nu = 1$ αἱ ὑπερβολαὶ ἐμφυλίζονται εἰς εὐθείας καὶ ἔχομεν τὴν ροὴν τοῦ σχήματος 14.4.1. Β

Ἡ ταχύτης εἰς τὸ σημεῖον O εἶναι ἴση πρὸς O , διότι $\nu - 1 > 0$ καὶ $r^{\nu-1} \rightarrow 0$ διὰ $r \rightarrow 0$.

Διὰ $\nu < 1$ ἡ συνάρτησις $W = \nu z^{\nu-1}$ ἔχει ἀνώμαλον σημεῖον εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων. Αἱ ἐξισώσεις συμπίπτουν μέ τὰς ἐξισώσεις τῆς περιπτώσεως $\nu > 1$,

πλὴν ὅμως διὰ $r \rightarrow 0$, $r^{\nu-1} \neq \frac{1}{r^{1-\nu}} \rightarrow \infty$,

ὁπότε καὶ ἡ ταχύτης $\bar{V} = \frac{\nu}{r^{1-\nu}}$ εἰς

τὸ σημεῖον O γίνεται ἀπειρος.

Ἡ μορφή τῆς ροῆς δίδεται εἰς τὸ (Σχ. 14.4.2. Ζ).

Εἰς τὴν πραγματικότητα, διὰ πᾶσαν ἀστροβίλον ροὴν τῆς περιπτώσεως αὐτῆς, δημιουργεῖται μυχρά ἀπουόλλησις τῆς ρευστῆς φλεβός παρὰ τὴν

ἀμμήν O . Ἡ ὁριακὴ γραμμὴ ροῆς δέν ἐμφανίζει πλέον ἀμμήν, ἀλλὰ σαμπύλην μυχρᾶς αὐτῆνος, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης λαμβάνει μεγάλας τιμὰς.

Σχ. 14.4.2. Ζ

14.4.3 Σημειακὴ πηγὴ ἢ φρέαρ

Ἐστω ἡ ἀναλυτικὴ συνάρτησις

$$f(z) = \varphi + i\psi = A \ln z = A \ln r e^{i\vartheta} = A(\ln r + i\vartheta), \quad (14.4.3. α)$$

ἐνθα A πραγματικὸς ἀριθμὸς.

Θά ἔχωμεν

$$\varphi = A \ln r, \quad \psi = A\vartheta,$$

$$W = \frac{df}{dz} = \frac{A}{z} = \frac{A}{r} e^{-i\vartheta}.$$

Αἱ γραμμαὶ ροῆς ($\vartheta = \text{σταθ.}$) εἶναι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ O . Αἱ γραμμαὶ ἴσου δυναμιοῦ ($r = \text{σταθ.}$) εἶναι περιφέρειαι μέ κέντρον

τό 0

Ἡ ταχύτης τοῦ ρευστοῦ εἶναι

$$V=v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{A}{r}, \quad \text{διότι} \quad v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0$$

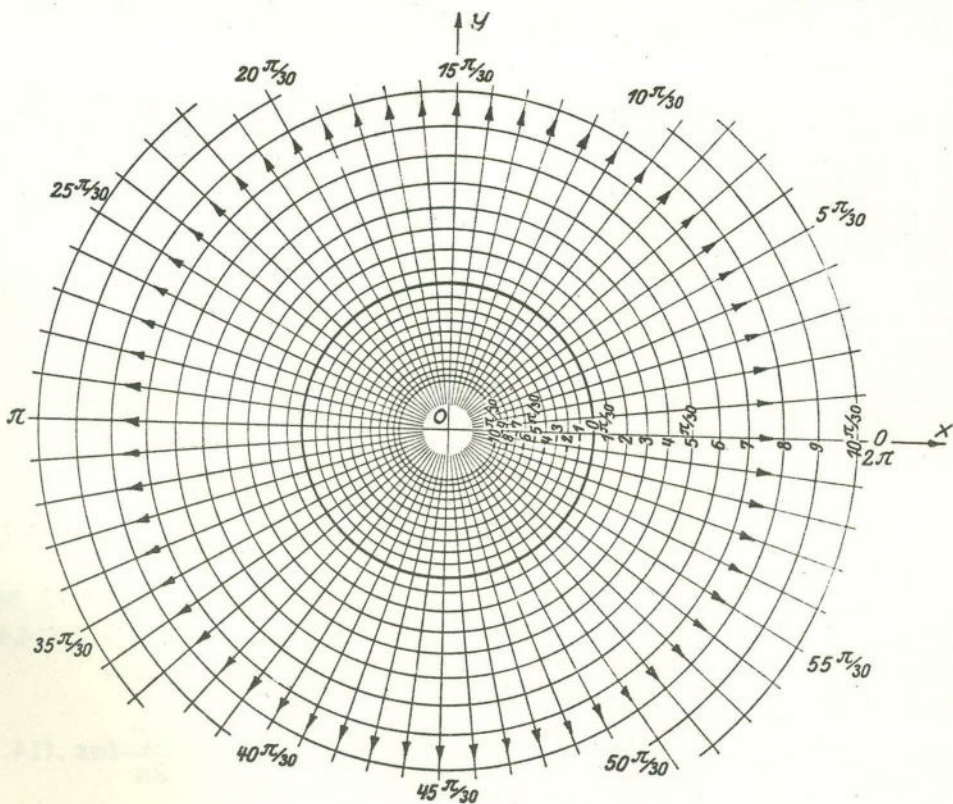
παρατηροῦμεν δέ ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος σημείου τινός εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεώς του ἀπὸ τῆς ἀρχῆς.

Ἡ παροχὴ ὄγιου, ἡ διερχομένη διά τῆς τυχοῦσης περιφερείας εἶναι

$$Q=2\pi r\frac{A}{2}=2\pi A, \quad (14.4.3. \beta)$$

ἐπομένως εἶναι σταθερά καὶ μαλεῖται παροχὴ ἢ ἔντασις τῆς πηγῆς ἢ τοῦ φρέατος.

Ἐάν $A > 0$, ὅπως εἰς τό σχῆμα 14.4.3.Α, ἔνθα $A=1$, ἡ παροχὴ διευθύνεται ἀπὸ τό κέντρον πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὁπότε ἔχομεν τὴν περίπτωση τῆς πηγῆς, ἐάν δέ $A < 0$ ἔχομεν τὴν περίπτωσιν φρέατος.



Σχ. 14.4.3.Α

Διά $z=0$, δηλαδή εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, ἔχομεν ἀνώμαλον σημεῖον, ὡς φαίνεται καὶ ἀπὸ τὴν μιγαδωτὴν ταχύτητα. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἡ ταχύτης γίνεται θεωρητικῶς ἀπειρος. Εἰς τὴν πραγματικότητα τὸ φρέαρ ἢ ἡ πηγὴ δέν εἶναι ποτέ σημεῖα ἀλλὰ περιφέρονται μὲ σχετικῶς μικρὰν αὐτῖνα.

Λόγῳ τῆς (14.4.3.β) ἢ (14.4.3.α) δίδεται συνήθως ὑπὸ τὴν μορφήν

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z. \quad (14.4.3.γ)$$

14.4.4 Σημειακὸς στροβιλισμὸς

Ἐστω ἡ ἀναλυτικὴ συνάρτησις

$$f(z) = \varphi + i\psi = -iA \ln z, \quad (14.4.4.α)$$

ἔνθα A πραγματικὸς ἀριθμὸς.

Θὰ ἔχωμεν

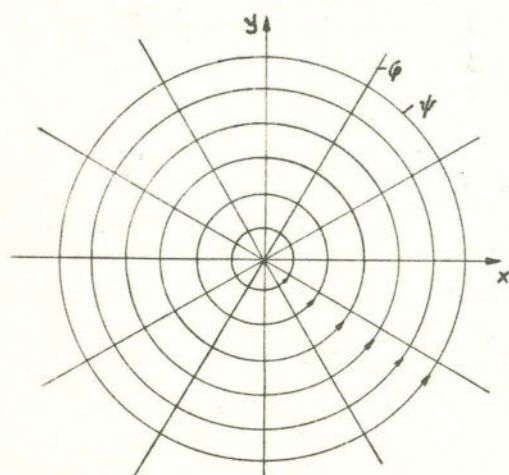
$$f(z) = -iA \ln r e^{i\vartheta} = -iA \ln r + A\vartheta,$$

$$\varphi = A\vartheta, \quad \psi = -A \ln r.$$

Αἱ γραμμαὶ ροῆς εἶναι περιφέρειαι μὲ κέντρον τὸ O αἱ δὲ γραμμαὶ ἴσου δυναμιμοῦ εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ O .

Ἡ ταχύτης τοῦ ρευστοῦ εἶναι

$$V = v_\vartheta = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{A}{r}, \quad \text{διότι} \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$



Σχ. 14.4.4. Α

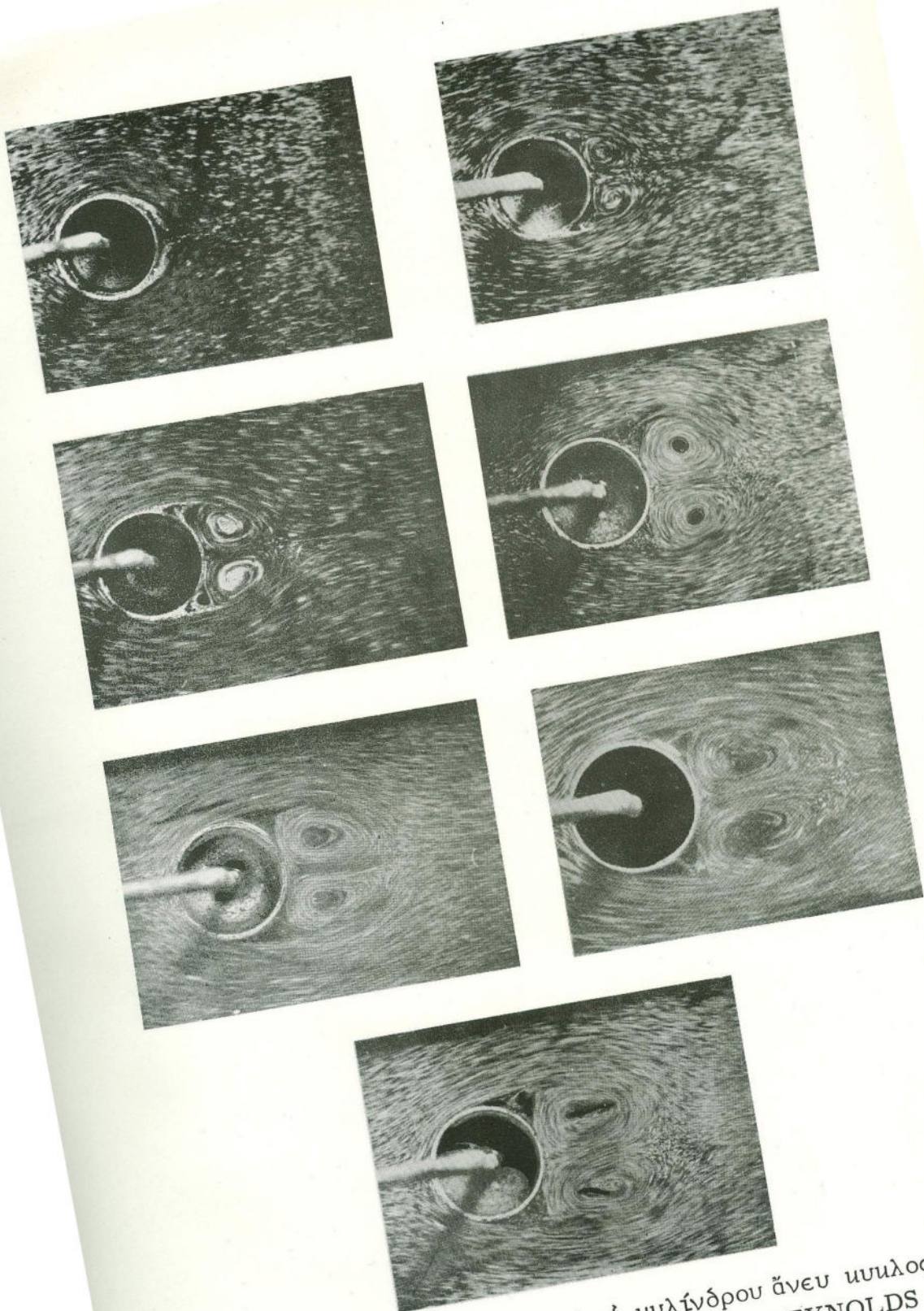
Ἡ κυκλοφορία τῆς ταχύτητος κατὰ μῆκος τυχούσης περιφερείας εἶναι

$$\Gamma = 2\pi r V = 2\pi A, \quad (14.4.4.β)$$

ἄρα εἶναι σταθερά, ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῆς σχέσεως αὐτῆς ἡ (14.4.4.α) λαμβάνει τὴν μορφήν

$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (14.4.4.γ)$$

Διά $z=0$ ἔχομεν, ὡς καὶ προηγουμένως, ἀνώμαλον σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ταχύτης V



'Ομαλῶς ἐπιταχυνομένη ροή πέρυ ὑλίνδρου ἄνευ συλλοφορίας
 ($V_0 = \sigma \tau a \partial$) δι' αὐξανόμενους ἀριθμούς REYNOLDS



14.4 Έπίλυσις ἐπιπέδων ινρήσεων διά τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων 177
γίνεται θεωρητικῶς ἀπειρος.

14.4.5 Ροή μέσω σχισμῆς

Ἐστω ἡ ἀναλυτικὴ συνάρτησις (1)

$$f(z) = \varphi + i\psi = \operatorname{arcsch} z. \quad (14.4.5. \alpha)$$

Θὰ ἰσχύη ἡ σχέσις

$$\begin{aligned} z = x + iy = \operatorname{ch} f &= \operatorname{ch}(\varphi + i\psi) = \operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} i\psi + \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} i\psi = \\ &= \operatorname{ch} \varphi \cos \psi + \operatorname{sh} \varphi (i \sin \psi), \end{aligned}$$

ὁπότε προκύπτουν αἱ σχέσεις

$$x = \operatorname{ch} \varphi \cos \psi, \quad (14.4.5. \beta)$$

$$y = \operatorname{sh} \varphi \sin \psi.$$

Ἐξ αὐτῶν, δι' ἀπαλοιφῆς τῆς φ προκύπτει

$$\frac{x^2}{\cos^2 \psi} - \frac{y^2}{\sin^2 \psi} = 1, \quad (14.4.5. \gamma)$$

καὶ συνεπῶς αἱ γραμμαὶ ροῆς εἶναι ὑπερβολαὶ (Σχ. 14.4.5. Α) μέ ἐστί-
ας τὰ F καὶ F' , εὐρισκόμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x , μέ τετμημένας

$$c = \pm \sqrt{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi} = \pm 1.$$

Αἱ γραμμαὶ ροῆς $\psi = 0$ καὶ $\psi = \pi$, ἀποτελοῦν καὶ τὰς ὁριακὰς γραμ-
μὰς ροῆς, συμπίπτουν δὲ μέ τὸν ἄξονα τῶν x , δεξιὰ καὶ ἀριστερά τῶν
ἐστῶν F καὶ F' .

Ἡ γραμμὴ ροῆς $\psi = \frac{\pi}{2}$ ἀποτελεῖ τὸν ἄξονα τῶν y ὁ ὁποῖος εἶ-
ναι καὶ ὁ ἄξων συμμετρίας τῆς ροῆς.

Ἐπομένως ἡ ἀναλυτικὴ συνάρτησις (14.4.5. α) παριστᾷ τὴν ροὴν
μέσω σχισμῆς, πλάτους 2, μέ παροχὴν

(1) Ἐκ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτὴν χρησιμοποιοῦμεν τὰς γνωστὰς σχέσεις:

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{ch} ia = \cos a, \quad \operatorname{sh} ia = i \sin a,$$

$$2 \operatorname{ch} x = e^x + e^{-x}, \quad 2 \operatorname{sh} x = e^x - e^{-x}, \quad 2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}, \quad 2 i \sin x = e^{ix} - e^{-ix},$$

$$\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1$$

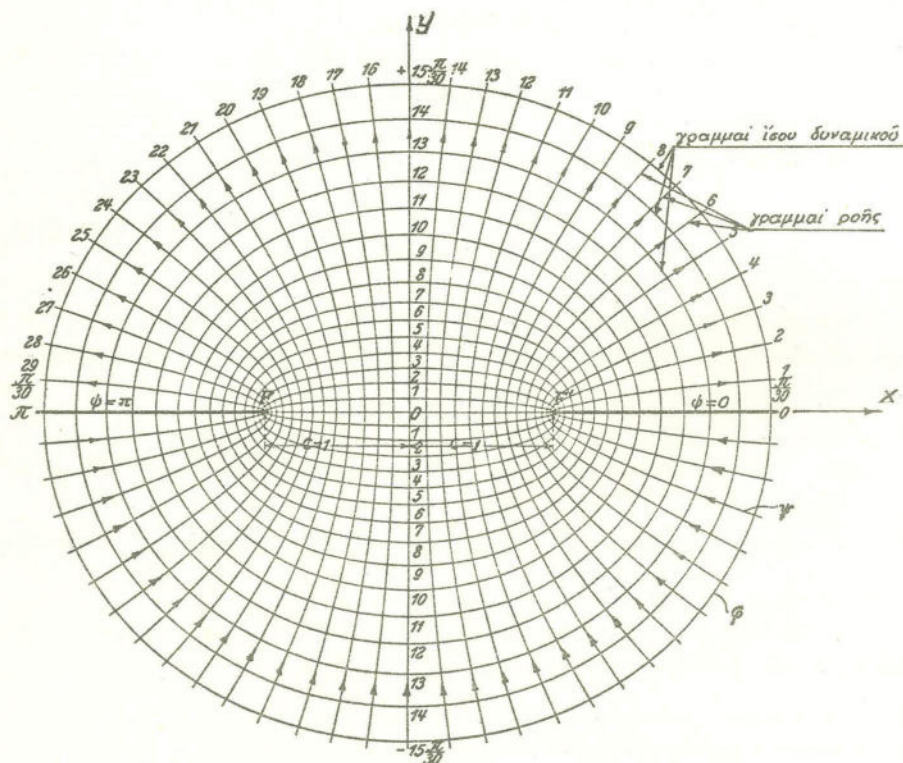
$$Q = \rho(\psi_1 - \psi_2) = \rho(\pi - 0) = \rho\pi. \quad (14.4.5. \delta)$$

Αἱ γραμμαὶ ἴσου δυναμικοῦ προϋπτουν ἐν τῶν (14.4.5. β) δι' ἀπαλοιφῆς τῆς $\psi(\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1)$ ὁπότε προϋπτει

$$\frac{x^2}{ch^2\varphi} + \frac{y^2}{sh^2\varphi} = 1, \quad (14.4.5. \epsilon)$$

πρόκειται δέ περί τῶν ἐλλείψεων τοῦ σχήματος 14.4.5. Α, ὁμοεστια-
ωὶν μέ τας ὑπερβολάς τῶν γραμμῶν ροῆς, διότι $c = \pm\sqrt{ch^2\varphi - sh^2\varphi} = \pm 1$
Ἡ μιγαδινή ταχύτης θά εἶναι

$$W = \frac{df}{dz} = \frac{1}{dz/df} = \frac{1}{shf} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad (14.4.5. \zeta)$$

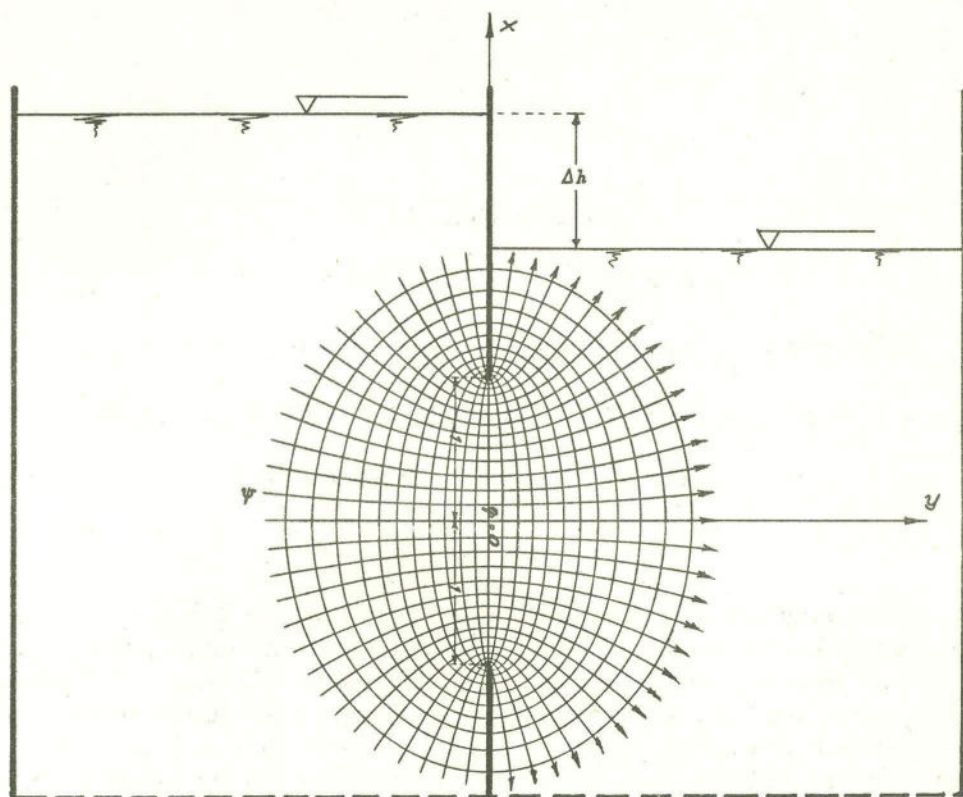


Σχ. 14.4.5. Α

Εἰς δέ τὰ σημεῖα F καὶ F' γίνεται $W = \frac{1}{0} = \infty$. Αὐτό ἀνεμένετο, διότι

μαθηματικῶς μέν τὰ F καὶ F' εἶναι ἀνώμαλα σημεῖα τῆς συναρτήσεως $W(z)$, φυσικῶς δέ αἱ γραμμαὶ ροῆς παρουσιάζουν εἰς τὰ σημεῖα αὐτά ἀνάμψιν.

Εἰς τὴν πραγματικότητα ἡ ρευστὴ φλέψ ἀπομολλᾷται ἀπὸ τὰς παρειάς τῆς σχισμῆς κατὰ τρόπον ἀνάλογον τοῦ ἐυτεθέντος εἰς τὴν ροὴν περίε γωνίας (ἴδε 14.4.2).



Σχ. 14.4.5. Β

Τό σχῆμα 14.4.5. Β δεικνύει μίαν περίπτωση δημιουργίας τῆς ροῆς τῆς παρούσης παραγράφου, ἐφ' ὅσον βεβαίως ἡ διαφορά δυναμιμοῦ Δh εἶναι μικρά, ἢ τό ἰσῶδες τοῦ ρευστοῦ νύημένον, ὥστε νά πληροῦται κατὰ προσέγγισιν ἡ παραδοχὴ τῆς ἀστροβίλου υἰνήσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 15.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΔΙΑ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΟΥ BLASIUS

Πᾶς γραμμικός συνδυασμός διαφόρων μιγαδίων δυναμιῶν δίδει νέον μιγαδιόν δυναμιόν, ἀντιπροσωπεῖον νέαν ἐπίπεδον ροήν, ἐντός τοῦ κοινοῦ πεδίου, διὰ τὸ ὁποῖον ὅλα τὰ μιγαδικὰ δυναμικὰ ἐπαληθεύουν τὰς συνθήκας τῆς παραγράφου 14.1. Ἐπομένως, δυνάμεθα ἐπὶ τῇ βάσει γνωστῶν ἐπιπέδων κινήσεων νά κατασκευάσωμεν καὶ νά μελετήσωμεν νέας ἐπιπέδους κινήσεις προσθέτοντες, ἀφαιροῦντες, καὶ ἐν γένει συνδυάζοντες γραμμικῶς τὰς γνωστὰς ἤδη περιπτώσεις ἐπιπέδων κινήσεων.

Κατωτέρω παραθέτομεν χαρακτηριστικὰς ἐφαρμογὰς ἀπαντωμένας συνήθως εἰς τὴν ἐφαρμοσμένην ὑδραυλικήν.

15.1 ΠΗΓΗ ΚΑΙ ΦΡΕΑΡ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΠΑΡΟΧΗΣ

Ἐστωσαν μία πηγή καὶ ἓν φρέαρ, μέ παροχὰς $+Q$ καὶ $-Q$ καὶ κέντρα $S_0(z_0)$ καὶ $S_1(z_1)$ (Σχ. 15.1. Α).

Τὸ μιγαδικόν δυναμιόν τῆς ἀστροβίλου αὐτῆς κινήσεως θὰ εἴναι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{Q}{2\pi} \ln(z-z_0) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z-z_1) = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z-z_1}{z-z_0} = \\ &= -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\rho_1 e^{i\alpha_1}}{\rho_0 e^{i\alpha_0}} = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} e^{i\vartheta} \end{aligned}$$

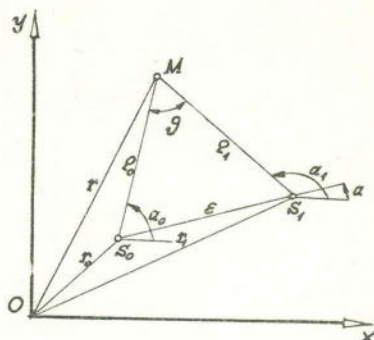
ένθα $\vartheta = \alpha_1 - \alpha_0$. Έπομένως

$$f(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} - i \frac{Q}{2\pi} \vartheta \quad (15.1.a)$$

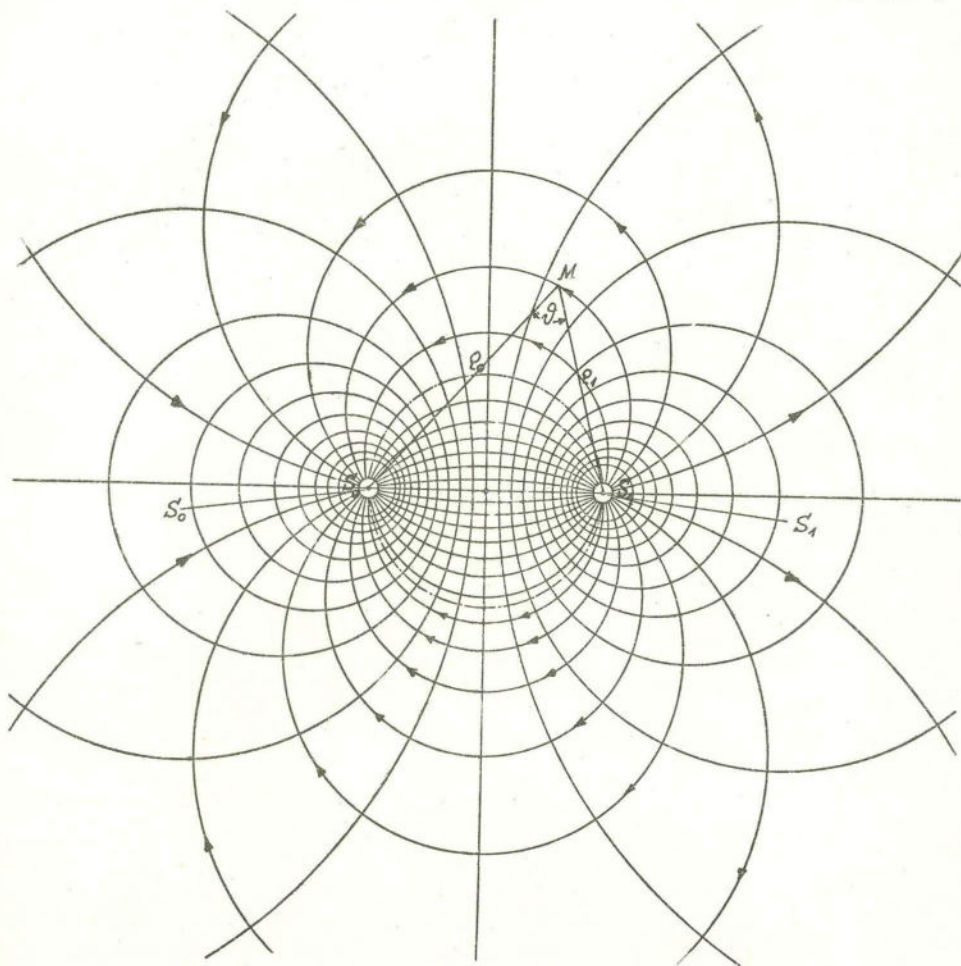
Αι γραμμαί ροής ($\vartheta = \text{σταθερά}$) είναι περιφέρειαι διερχόμενοι από τὰ S_1 και S_2 , αι δέ γραμμαί ἴσου δυναμικοῦ ($\frac{\rho_1}{\rho_0} = \text{σταθερόν}$) είναι επίσης πε-

ριφέρειαι ὀρθογωνιαί ὡς πρὸς τὰς προηγούμενας.

Διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ.15.1. Β, ὅπου ἡ πηγή και τό φρέαρ ἔχουν ἀντιστοιχῶς συντεταγμένας a και $-a$, ἔνθα ἡ παράμετρος a



Σχ. 15.1. Α



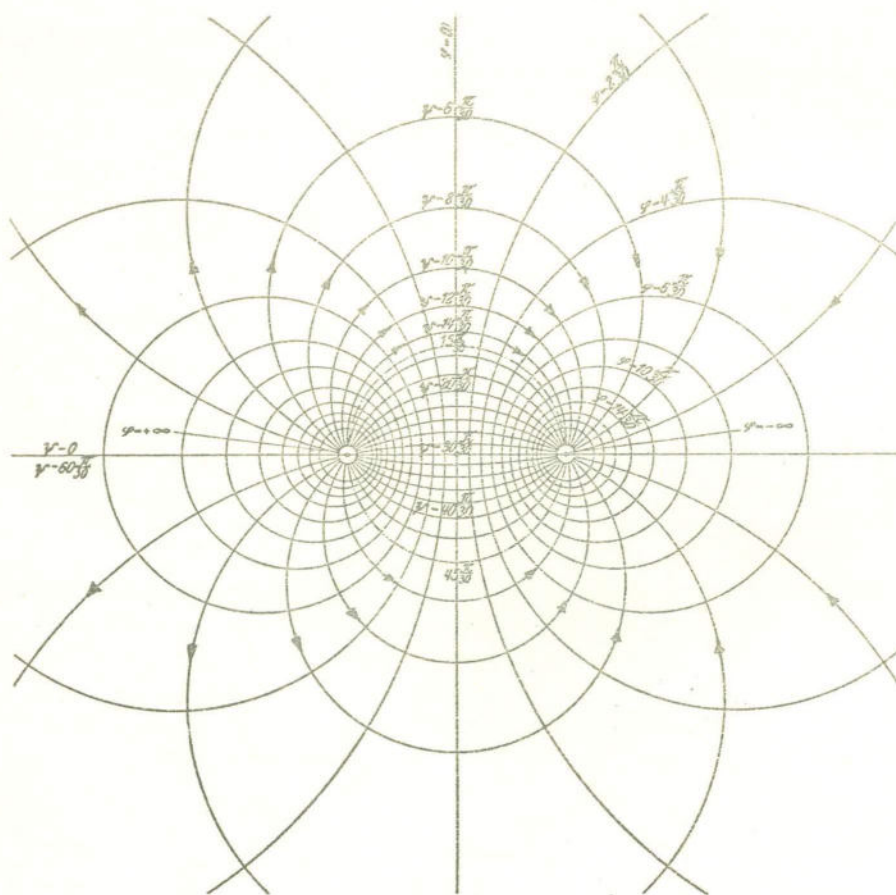
Σχ. 15.1. Β

είναι πραγματικός αριθμός, η συνάρτησις μιγαδικοῦ δυναμικοῦ γίνεται

$$f(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a} = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z-a}{z+a} = \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{\rho_1}{\rho_0} + i\vartheta \right)$$

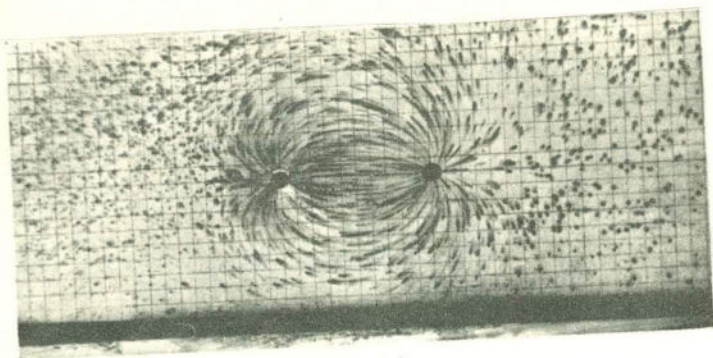
ὁπότε

$$W = \frac{df}{dz} = \frac{Qa}{\pi} \frac{1}{z^2 - a^2}$$



Σχ. 15.1. Γ

Εἰς τό σχῆμα 15.1. Γ δίδεται ἡ γραφικὴ ἐπίλυσις τῆς ἀνωτέρω ροῆς διὰ $Q = -2\pi$, εἰς δέ τό σχῆμα 15.1. Δ δίδεται ἡ φωτογραφία μιᾶς ἀναλόγου ροῆς, δημιουργηθεῖσης πειραματικῶς εἰς τό ἐργαστήριον μηχανικῆς τῶν ρευστῶν τῆς Τουλούζης.



Σχ. 15.1. Δ

Ἄς ἐπανέλθωμεν τώρα εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν καὶ ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον S_1 τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ S_0 , ἀκολουθοῦν τὴν σταθερὰν διεύθυνσιν $S_0 S_1$, γωνίας α μὲ τὸν ἄξονα τῶν x . Θὰ ἔχωμεν

$$z_1 = z_0 + \varepsilon e^{i\alpha}$$

ἐνθα $\varepsilon \rightarrow 0$ καὶ α σταθερόν, ὁπότε

$$f(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z - z_0 - \varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0} = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left(1 - \frac{\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0} \right)$$

Ἡ ἀνάπτυξις εἰς σειρὰν τοῦ $\ln \left(1 - \frac{\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0} \right)$ διὰ $\varepsilon \rightarrow 0$ δίδει

$$f(z) = -\frac{Q}{2\pi} \left(-\frac{\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0} \right) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0}$$

Ἐστω ὅτι ἐλλαττουμένου τοῦ ε αὐξάνεται ἀντιστοίχως τὸ Q , οὕτως ὥστε τὸ γινόμενον $Q\varepsilon$ νὰ τείνῃ πρὸς τὴν σταθερὰν παράμετρον N διὰ ε τείνον εἰς τὸ μηδέν. Θὰ ἔχωμεν τότε τὸ ὀνομαζόμενον δίπολον ἐντάσεως N , κέντρου S_0 καὶ ἄξονος σχηματίζοντος γωνίαν α μὲ τὸν ἄξονα Ox . Τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν τοῦ εἶναι

$$f(z) = \frac{N e^{i\alpha}}{z - z_0} \quad (15.1. \beta)$$

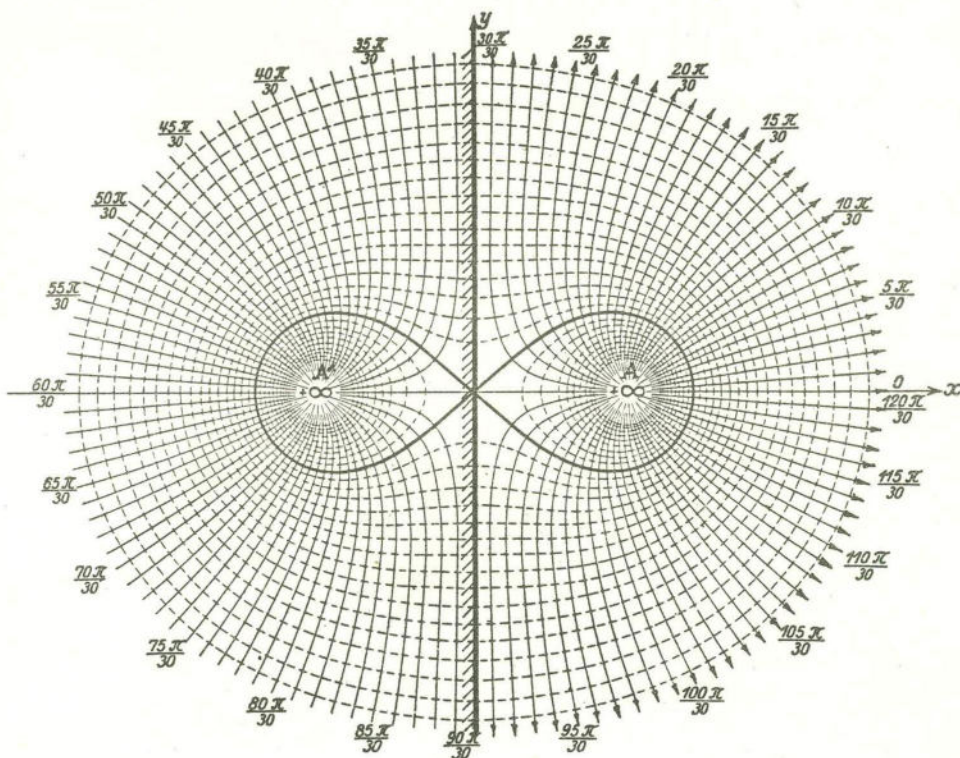
Αἱ γραμμαὶ ροῆς εἶναι περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ S_0 καὶ τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς καθετοῦ εἰς τὸν ἄξονα τοῦ δίπολου. Αἱ γραμμαὶ ἴσου δυναμικοῦ εἶναι ἐπίσης περιφέρειαι διερχόμεναι διὰ τοῦ S_0 , μὲ κέντρα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ δίπολου.

Διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν $S_0 \equiv 0$ καὶ $\alpha = 0$, θὰ ἔχωμεν μιγα-

ναπαράστασις δίδεται εἰς τὴν φωτογραφίαν 15.1.Ζ.

15.2 ΡΟΗ ΕΚ ΠΗΓΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΜΙΑΣ Η ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΑΡΕΙΩΝ

Ἐστωσαν αἱ πηγαί A καὶ A' τοῦ Σχ. 15.2. $A^{(1)}$ μέ συντεταγμέ-



Σχ. 15.2. Α

νας $+a$ καὶ $-a$ ἔνθα a πραγματικός ἀριθμός. Ἡ προκύπτουσα ροή θά ἔ-
χη μιγαδικὸν δυναμικόν

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z^2 - a^2) \quad (15.2. a)$$

καὶ μιγαδικὴν ταχύτητα

$$W = \frac{Q}{\pi} \frac{z}{z^2 - a^2}$$

Ἡ μελέτη τῆς ἀντιστοίχου ροῆς γίνεται ὡς καὶ προηγουμένως. Παρατηροῦμεν ἀπλῶς ὅτι ὁ ἄξων τῶν y ἀποτελεῖ συγχρόνως γραμμὴν

(1) Ἡ γραφικὴ ἐπίλυσις τοῦ σχήματος ἔγινε διὰ τὴν τιμὴν $Q=2\pi$.

ροής και άξονα συμμετρίας της ροής. Έπομένως διά $x > 0$ παριστάνεται η ροή έυ πηγής παρουσία μιᾶς έπιπέδου παρειᾶς.

Ας αναζητήσωμεν τώρα τό μιγαδικόν δυναμικόν τό προϋύπτον από μίαν άπειρίαν πηγών, παροχῆς Q , τοποθετημένων εἰς τά σημεῖα $z = nh$ (n : άιέριαιος) τοῦ άξονος τῶν x . Θά έχωμεν ότι

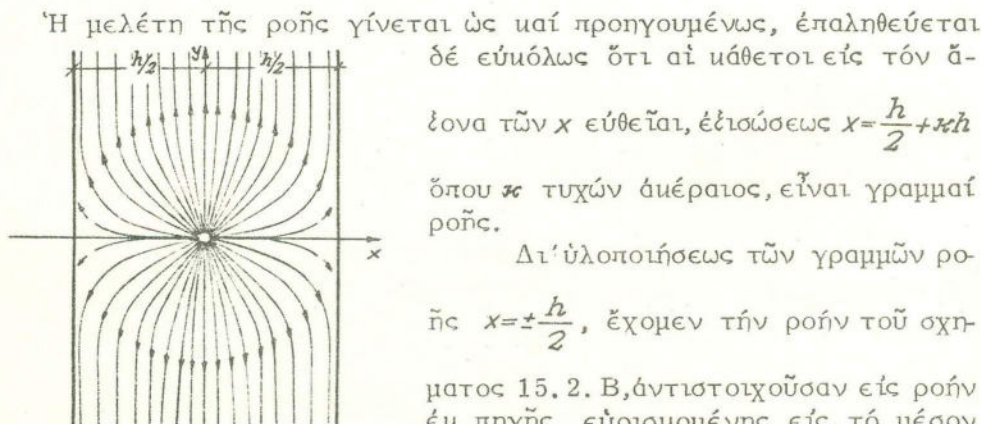
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{Q}{2\pi} \ln(z+nh) + \frac{Q}{2\pi} \ln[z+(n-1)h] + \dots + \frac{Q}{2\pi} \ln z + \dots + \frac{Q}{2\pi} \ln[z-(n-1)h] + \frac{Q}{2\pi} \ln(z-nh) = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \ln(z+nh)[z+(n-1)h] \dots z \dots [z-(n-1)h](z-nh) \end{aligned}$$

διά n έυτεινόμενον από $-\infty$ έως $+\infty$. Έπειδή όμως τό όριον τοῦ γινόμενου εἶναι τό $\sin \frac{\pi z}{h}$ θά έχωμεν

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{h} \quad (15.2. \beta)$$

και

$$W = \frac{Q}{2h} \cot g \frac{\pi z}{h}$$



Σχ. 15.2. Β

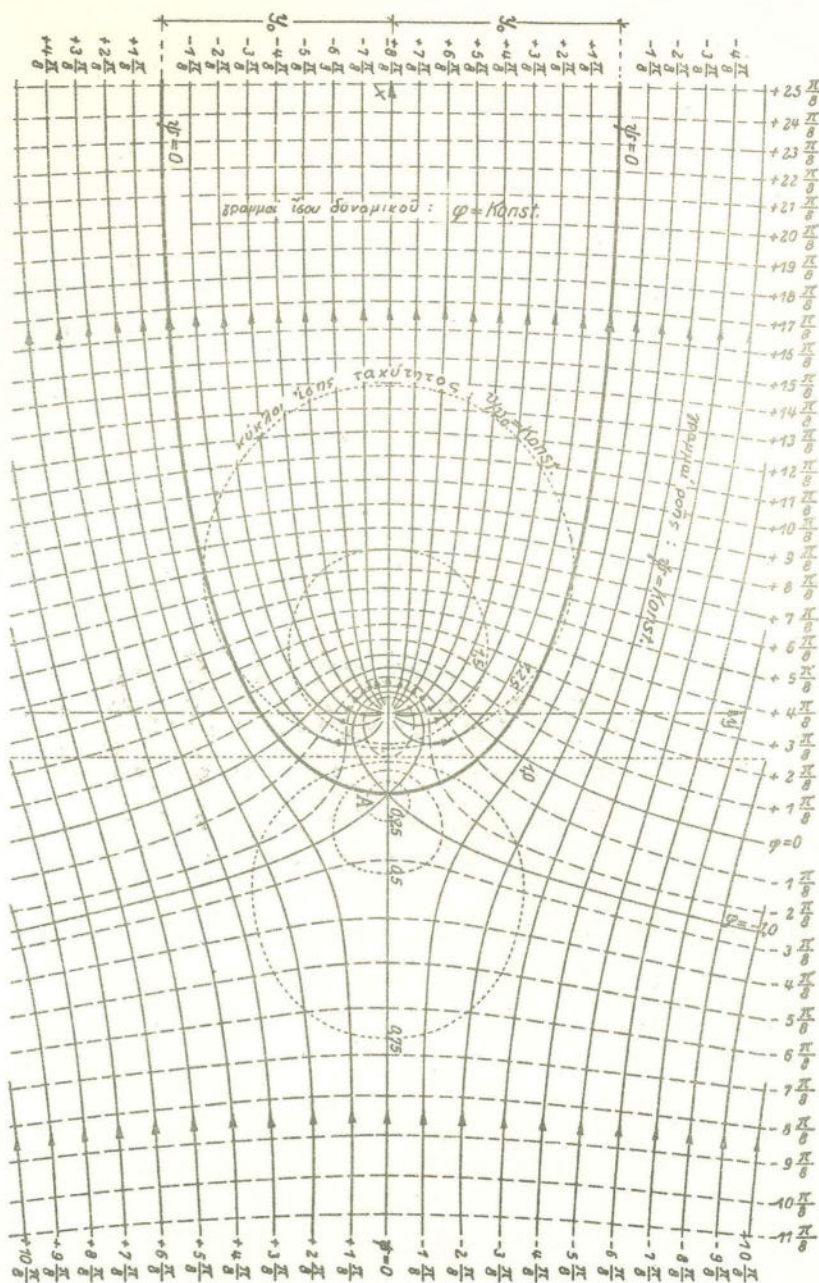
Η μελέτη της ροής γίνεται ως και προηγουμένως, έπαληθεύεται δέ εύκόλως ότι αι υάθετοι εἰς τόν άξονα τῶν x εύθεῖται, έξισώσεως $x = \frac{h}{2} + \kappa h$ όπου κ τυχών άιέριαιος, εἶναι γραμμαῖ ροής.

Δι'ύλοποίησεως τῶν γραμμῶν ροῆς $x = \pm \frac{h}{2}$, έχομεν τήν ροήν τοῦ σχηματος 15.2. Β, άντιστοιχοῦσαν εἰς ροήν έυ πηγῆς εύρισσομένης εἰς τό μέσον της άποστάσεως δύο έπιπέδων πλαυῶν.

15.3. ΠΗΓΗ ΕΝ ΜΕΣΩ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΡΟΗΣ

Η μελετουμένη σύνθετος ροή θά έχη μιγαδικόν δυναμικόν

$$f(z) = V_0 z + \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (15.3. \alpha)$$



Σχ. 15.3.Α

όποτε,

$$\varphi = V_0 x + \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

$$\psi = V_0 y + \frac{Q}{2\pi} \vartheta$$

$$W = V_0 + \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z}$$

Είς τό σχῆμα 15.3.Α ἡ ὑπ' ὄψιν ροή ἐπιλύεται γραφικῶς διά τὰς τιμὰς $V_0=1$ καί $Q=2\pi$.

Ἡ ταχύτης εἰς τό ἄπειρον θά ταυτίζεται ἐπομένως μέ τήν ταχύτητα V_0 τῆς ὁμοιομόρφου ροῆς.

Ἡ ταχύτης ἐξ ἄλλου μηδενίζεται εἰς τό σημεῖον Α ἐνθα $z = -a = -\frac{Q}{2\pi V_0}$

Ἡ ἀντίστοιχος γραμμή ροῆς, ἡ διερχομένη διά τοῦ Α, ἀποτελεῖ τρόπον τινά διαχωριστικὴν γραμμὴν μεταξύ τῆς ροῆς τῆς προερχομένης ἐκ τοῦ $-\infty$, καί τῆς ροῆς τῆς πηγῆς. Ἡ ἐξίσωσίς της εὐρίσκεται ἐκ τῆς γενικῆς ἐξίσωσεως τῶν γραμμῶν ροῆς διά προσδιορισμοῦ τῆς σταθερᾶς

ψ , λόγῳ τοῦ ὅτι εἰς τό Α ἔχομεν $y=0$ καί $\vartheta=\pi$, ὁπότε $\psi = \psi_0 = \frac{Q}{2}$ καί

$$V_0 y + \frac{Q}{2\pi} \vartheta = \frac{Q}{2} \quad \text{ἢ}$$

$$y = \frac{Q(\pi - \vartheta)}{2\pi V_0} \quad (15.3.β)$$

Πρόκειται περί παραβολῆς μέ ἀσυμπτώτους, διά $\vartheta \rightarrow 0$ τὰς εὐθείας $y_0 = \pm \frac{Q}{2V_0}$.

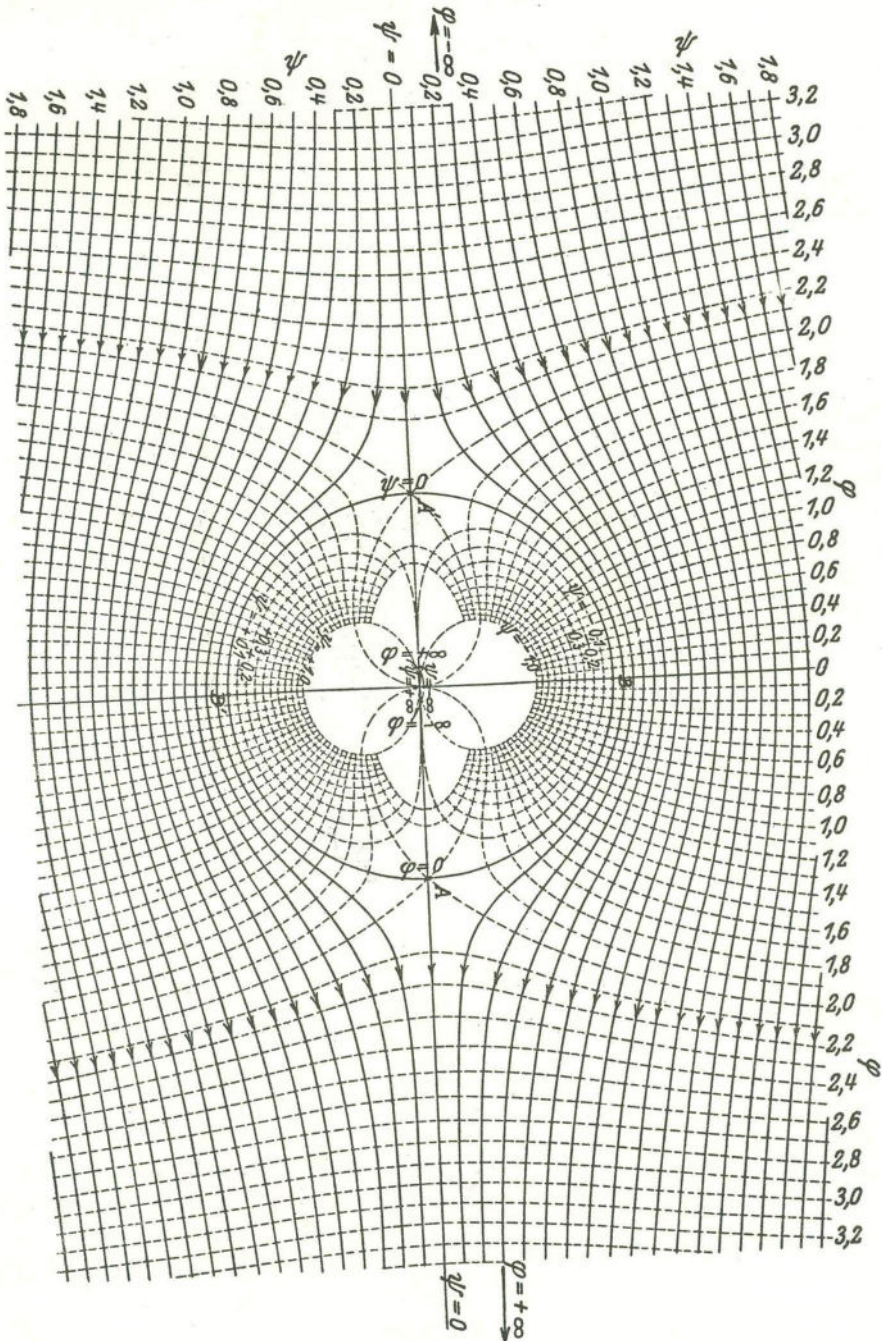
15.4. ΔΙΠΟΛΟΝ ΕΝ ΜΕΣΩ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΡΟΗΣ ἢ ΡΟΗ ΠΕΡΙΕ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΑΝΕΥ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ - ΠΑΡΑΔΟΞΟΝ ΤΟΥ D'ALEMBERT

Ἐς θεωρήσωμεν τήν ροὴν ἥτις προεκύπτει ἀπὸ τὸν συνδυασμὸν ὁμοιομόρφου ροῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καί διπόλου τῆς εἰδιῆς περιπτώσεως (15.1.γ) μέ ροπήν $N = V_0 R^2$. Θά ἔχωμεν τό μιγαδικὸν δυναμικόν

$$f(z) = V_0 z + \frac{V_0 R^2}{z} = V \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \quad (15.4.α)$$

ὁπότε

$$f(z) = V_0 \left(r e^{i\vartheta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\vartheta} \right) = V_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \vartheta + i V_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \vartheta$$



Σχ. 15.4.Α

υαί έξ αύτοϋ προϋύπτουν

$$\varphi = V_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \vartheta$$

$$\psi = V_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \vartheta$$

$$W = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

Παρατηρούμεν ότι ή ταχύτης είς τό άπειρον είναι πάντοτε V_0 , μηδενίζεται δέ όταν $z = \pm R$ ήτοι είς τά A' υαί A' (Σχ.15.4.Α).

Άς έξετάσωμεν την γραμμήν ροής $\psi = 0$. Θα έχωμεν

$$\left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \vartheta = 0$$

έπομένως αποτελείται από τόν άξονα τών x άφ'ένός, υαί από την περιφέρεια $r=R$ άφ'έτέρου. Η ύλοποίησης της γραμμής ροής $r=R$ ανάγει την όλην κίνησιν είς την περίπτωσιν μιās όμοιομόρφου ροής, συναντώσης υύλινδρον άνευ υυυλοφορίας είς την άρχήν τών συντεταγμένων (Σχ.15.4.Β, ροή διά $R=1$ υαί $V_0=1$).

Η διανομή τών ταχυτήτων υατά μήκος της περιφέρειας τοϋ υυλίνδρου προϋύπτει από τάς σχέσεις

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_0 \cos \vartheta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$u_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -V_0 \sin \vartheta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

Όπότε διά $r=R$ έχωμεν

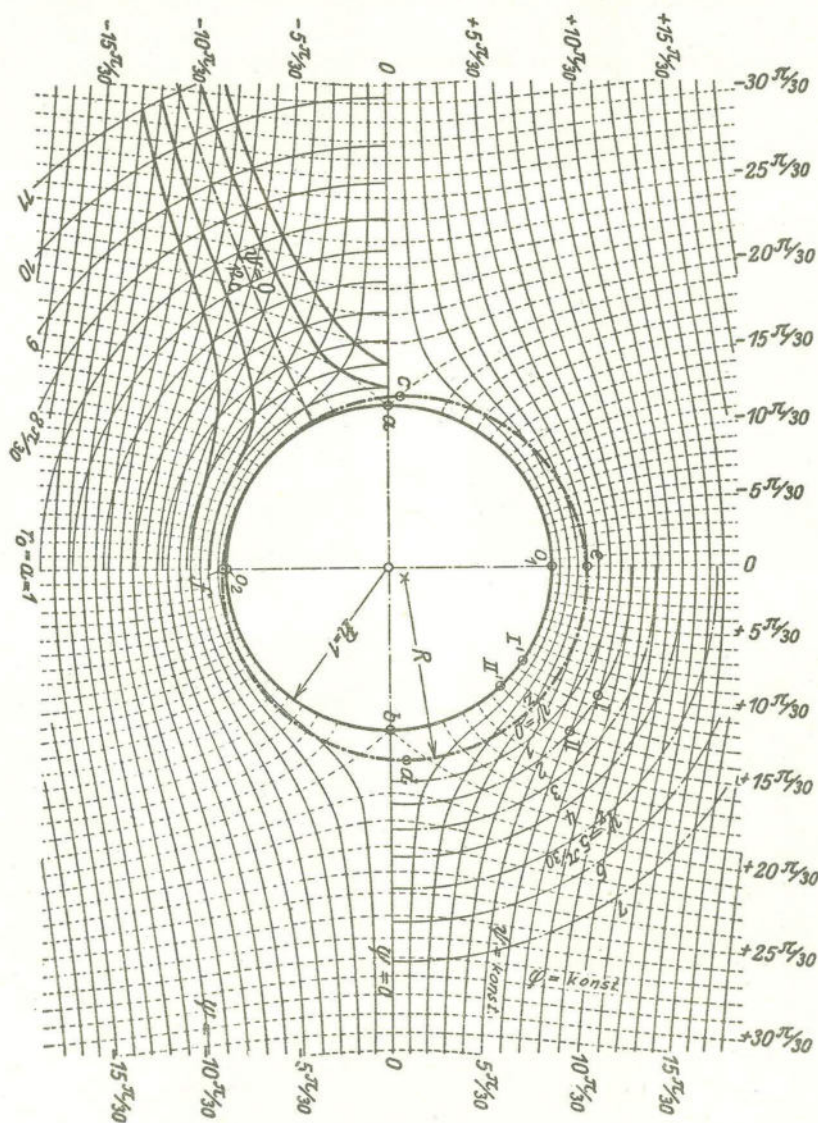
$$u_r = 0 \quad \text{υαί} \quad u_\vartheta = -2V_0 \sin \vartheta$$

Η ταχύτης γίνεται μεγίστη είς τά Β υαί Β' μέ τιμάς

$$V_B = -2V_0 \quad V_{B'} = +2V_0$$

Παρατηρούμεν άμέσως ότι ή διανομή τών ταχυτήτων είναι συμμετρία ής πρός τό κέντρον O τοϋ υυλίνδρου. Λόγω δέ τοϋ δευτέρου θεωρήματος τοϋ BERNOULLI υαί της σχέσεως (10.3.η) προϋύπτει ό-τι υαί ή διανομή τών πιέσεων επί τοϋ υυλίνδρου είναι συμμετρία ής πρός O (1).

(1) Έφ'όσον ή συνάρτησις Φ τοϋ δυναμιού τών έξωτερικών δυνάμεων είναι σταθερά ή μηδενική.



Σχ. 15.4. Β

Εύρισκόμεθα οὕτω ἐνώπιον μιᾶς εἰδιυῆς περιπτώσεως τοῦ παραδόξου τοῦ D'ALEMBERT, τό ὁποῖον ἐμφράζει ὅτι:

Ὁ στροφεύς τῶν πιέσεων τὰς ὁποίας ἐλάσειε μία ὁμοιόμορφος ροή ἐπὶ ἐνός κυλίνδρου εἶναι ἐν ταυτότητος ἴσος μέ τό μηδέν. Ἐπομένως ὁ κύλινδρος δέν παρεμβάλλει οὐδεμίαν ἀντίστασιν εἰς τήν ἀστρόβιλον κίνησιν τοῦ τελείου ἀσυμπέστου ρευστοῦ.

15.5. ΡΟΗ ΠΕΡΙΕ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΜΕΤΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ

Θά μελετήσωμεν τόν συνδυασμόν τῆς ροῆς τῆς προηγουμένης παραγράφου μετὰ τῆς ροῆς λόγῳ σημειαοῦ στροβιλισμοῦ, τῆς παραγράφου (14.4.4).

Τό προκύπτον μιγαδικόν δυναμικόν γράφεται

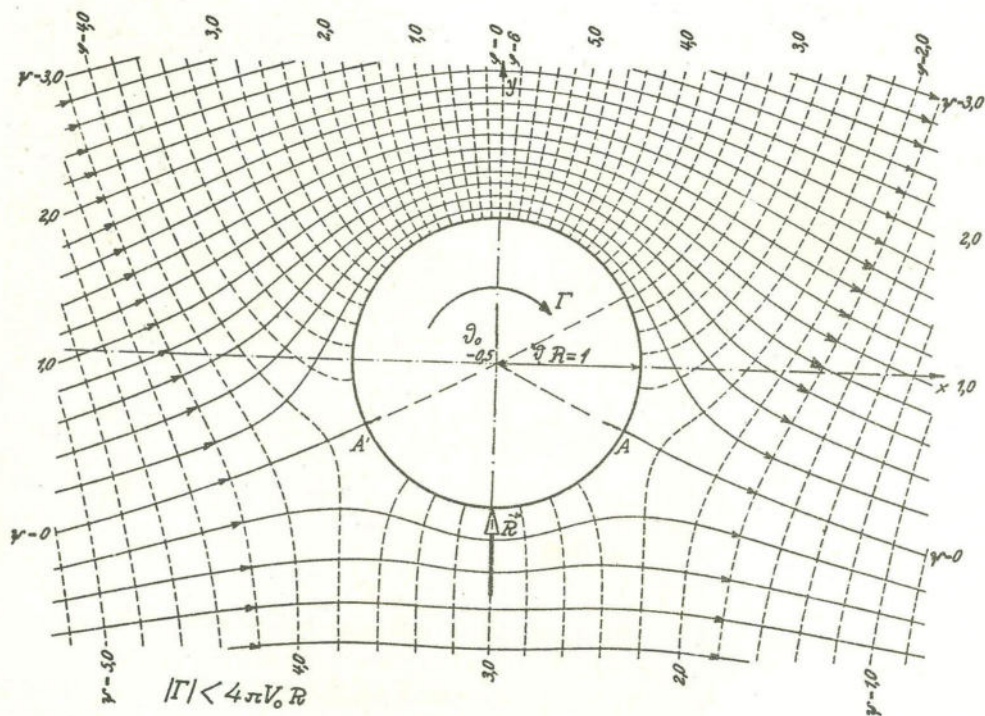
$$f(z) = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (15.5. a)$$

καί ἐξ αὐτοῦ ἔχομεν

$$\varphi = V_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta$$

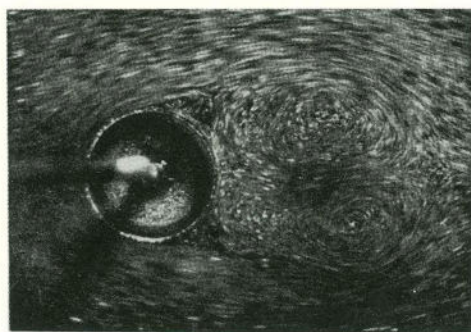
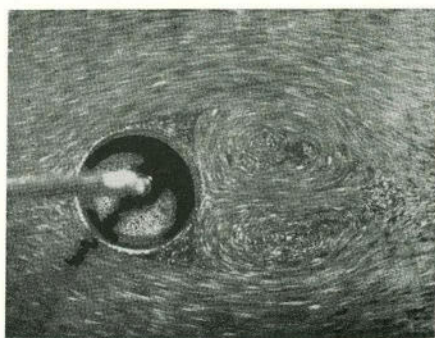
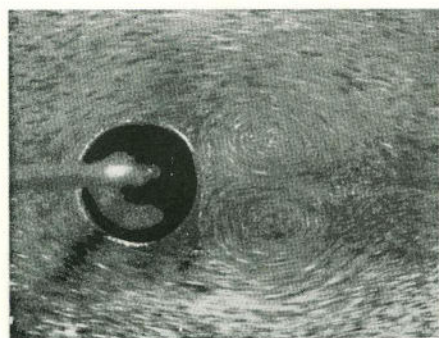
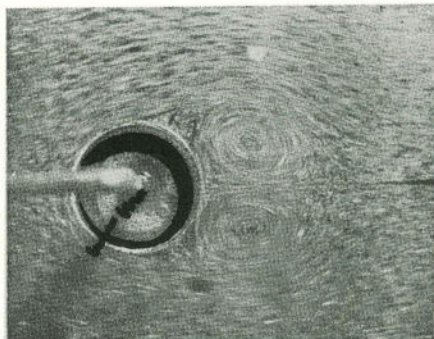
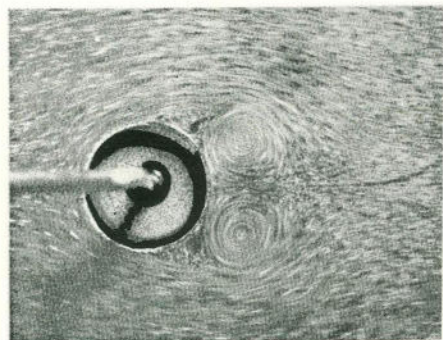
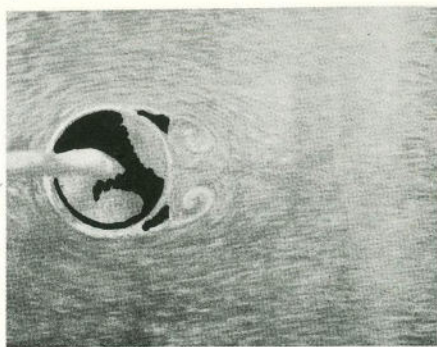
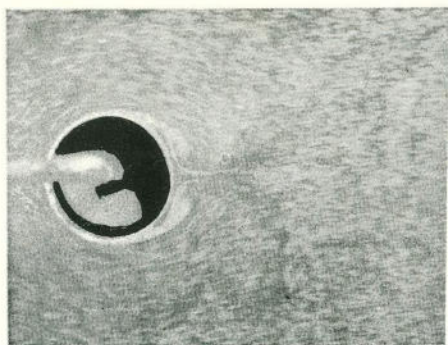
$$\psi = V_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \vartheta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$W = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi z}$$

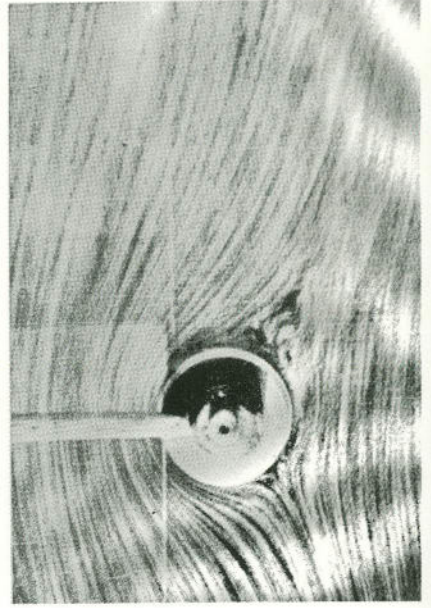


Σχ. 15.5. A

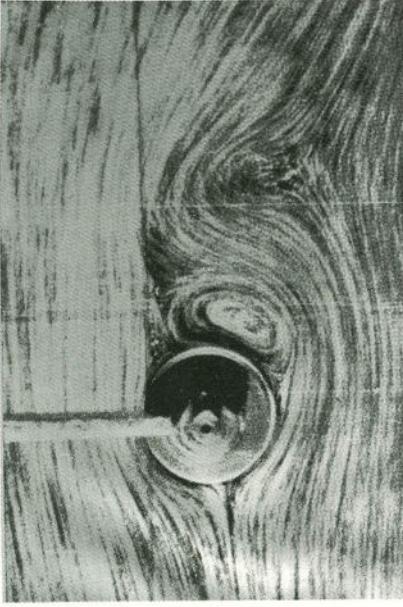
Ἡ ταχύτης εἰς τό ἄπειρον εἶναι πάντοτε ἴση πρὸς V_0 .



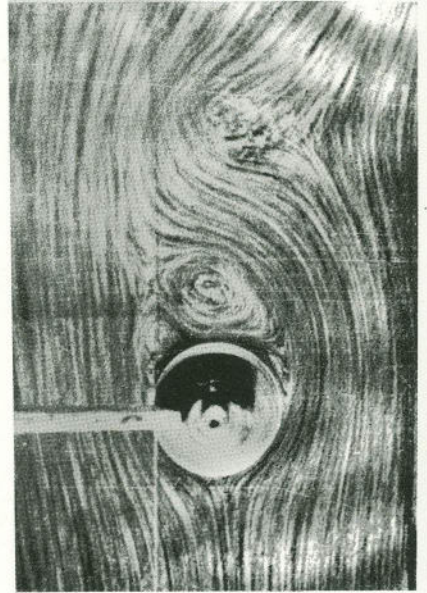
Ὁμοιόμορφος ροή πέραν κυλίνδρου ἄνευ κυκλοφορίας,
δι' αὐξανόμενους ἀριθμούς REYNOLDS



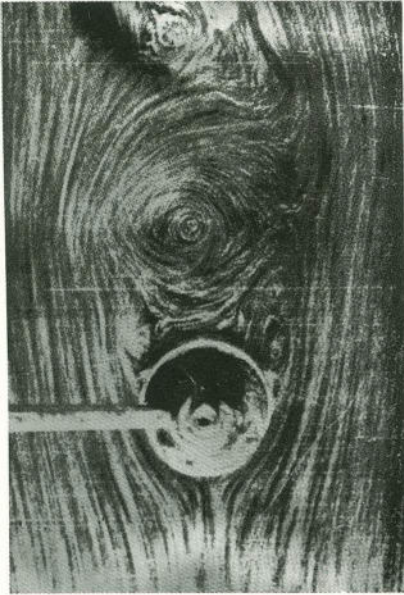
$$\frac{V}{U} = 2$$



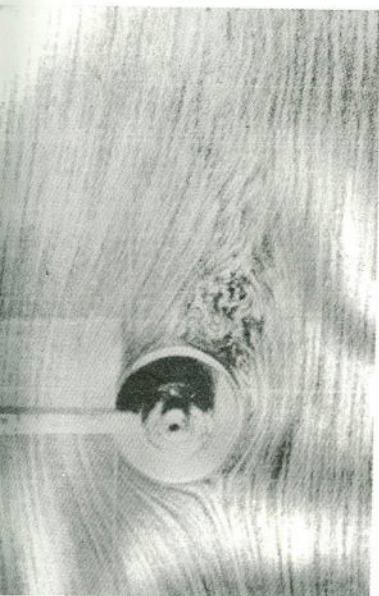
$$\frac{V}{U} = 1$$



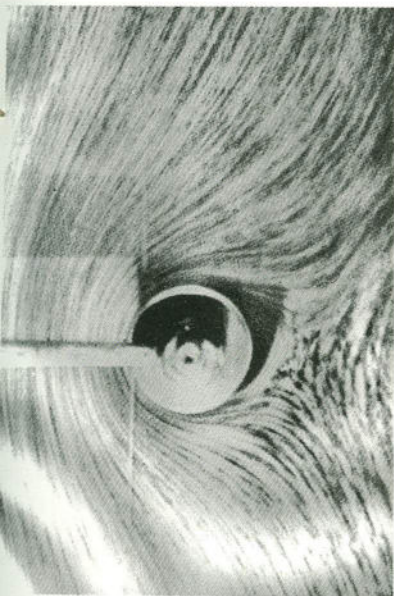
$$\frac{V}{U} = \frac{1}{2}$$



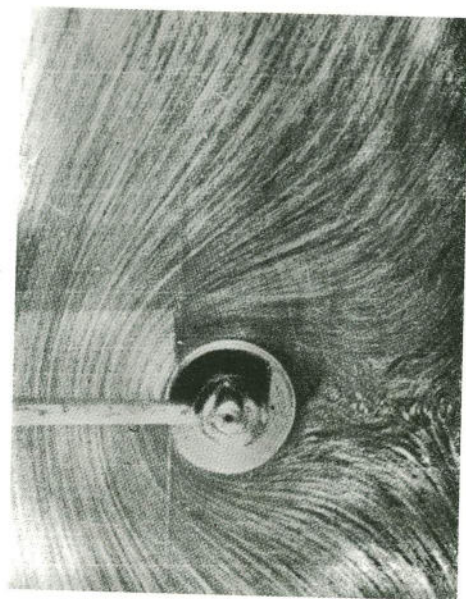
$$\frac{V}{U} = 0$$



$$\frac{V}{U} = 3$$



$$\frac{V}{U} = 4$$



$$\frac{V}{U} = 6$$

Ὁμοιόμορφος ροή περί τῷ κυλίνδρου μετὰ κυλιοφορίας δι' αὐξανόμενας τιμὰς τοῦ λόγου V/U
 V : ἐφαπτομενὴ ταχύτης περιστροφῆς κυλίνδρου, U ταχύτης ὁμοιομόρφου ροῆς

Ἄς ἐξετάσωμεν τὴν γραμμὴν ροῆς $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R$. Αὕτῃ προκύπτει

διὰ $r=R$ ἐπομένως ἡ περιφέρεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖ πάλιν μίαν ὀριζουμένη γραμμὴν ροῆς.

Διὰ τὴν εὐρεσιν τῆς διανομῆς τῶν ταχυτήτων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κυλίνδρου, εὐρίσκουμεν διὰ $r=R$ ὅτι

$$u_r = 0 \quad u_\theta = -2V_0 \sin \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

ὁπότε

$$u_\theta = 0 \quad \text{διὰ} \quad \sin \vartheta = \frac{\Gamma}{4\pi V_0 R}$$

ἥτοι διὰ δύο σημεῖα A^0 καὶ A' , μέ τιμᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς $z = Re^{i\vartheta}$ καὶ $z = -Re^{-i\vartheta}$, ἐφ' ὅσον βεβαίως $|\Gamma| < 4\pi V_0 R$ (Σχ. 15.5. Α, ροὴ διὰ $R=1$, $V_0=1$ καὶ $\Gamma=2\pi$).

Διὰ $|\Gamma| > 4\pi V_0 R$, ἡ ροὴ λαμβάνει τὴν μορφήν τοῦ σχήματος 15.5. Β.

Ἡ διανομὴ τῶν ταχυτήτων εἶναι συμμετρίκῃ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Oy , μέ ἀποτέλεσμα νὰ προκύπτῃ μηδενικὴ συνιστώσα τῶν πιέσεων ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὸν ἄξονα Ox . Κατὰ τὸν ἄξονα Oy , ἀντιθέτως, ὑπάρχει συνιστώσα τῆς πίεσεως, ἡ τιμὴ τῆς ὁποίας δίδεται διὰ μίαν γενικὴν περίπτωσιν εἰς τὴν ἐπομένην παράγραφον.

Ἄς ἐμφράσωμεν τέλος τὴν σχέσιν (15.5. α) διὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν ὁμοιομόρφου ροῆς, σχηματισμοῦ γωνίαν α μέ τὸν ἄξονα τῶν x . Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ

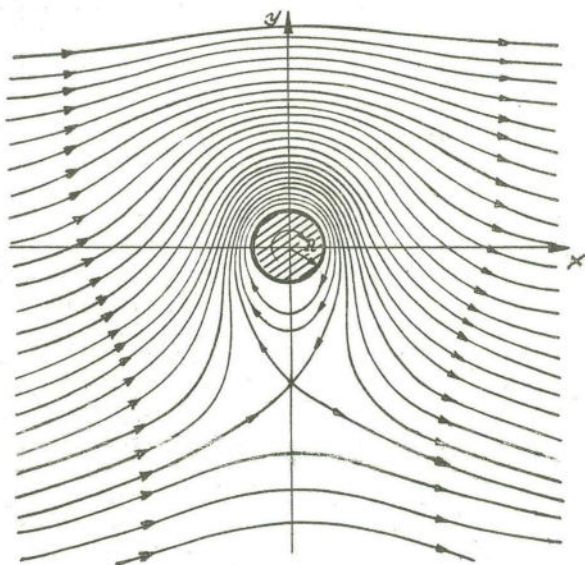
τεθῇ ὅπου z ἢ $\frac{z}{e^{i\alpha}} = ze^{-i\alpha}$,

τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ μέ περιστροφὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων. Θὰ ἔχωμεν τότε

$$f(z) = V_0 \left(ze^{-i\alpha} + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (15.5. \beta)$$

$$W = V_0 \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi z}$$

Διὰ z πολὺ μεγάλο, ἥτοι διὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου μαυρὰν τῆς ἀρχῆς O , θὰ εἶναι



Σχ. 15.5. Β

$$W = V_0 e^{-ia} \quad (15.3. \gamma)$$

ήτοι παύει ύφισταμένη ή έπιρροή του παρεμβαλλομένου κυλίνδρου εΐς τήν όμοϊομορφον ροήν.

Έξ άλλου κατά μήκος της περιφερείας καί διά τήν περίπτωσιν κυκλοφορίας ίσης προς

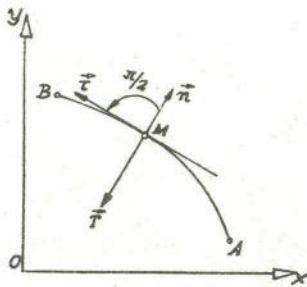
$$\Gamma = 4\pi V_0 R \sin \vartheta_0 \quad (15.5. \delta)$$

ή ταχύτης δίδεται από τήν σχέσηιν

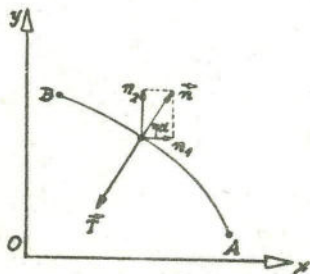
$$W = V_0 [e^{-ia} - e^{i(a-2\vartheta)} - i 2 e^{-i\vartheta} \sin \vartheta_0] = i 2 e^{-i\vartheta} V_0 [\sin(\vartheta - a) - \sin \vartheta_0] \quad (15.5. \epsilon)$$

15.6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΕΛΕΙΟΥ Α-ΣΥΜΠΙΕΣΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΕΠΙ ΣΤΕΡΕΟΥ ΔΙ' ΑΣΤΡΟΒΙΟΝ ΡΟΗΝ ΚΑΙ ΑΝΕΥ ΠΕΔΙΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ - ΣΧΕ-ΣΕΙΣ ΤΟΥ BLASIUS

Εΐς έμ των άντικειμενιων όμοιων της μηχανικής των ρευστων εΐναι ό υπολογισμός των συνολικων έλασσιουμένων δυνάμεων επί στερεας παρειας, βρεχομένης υπό του ρευστου. Τά θεωρήματα επί των ποσοτήτων κινήσεως δίδουν μίαν πρώτην μέθοδον υπολογισμού, εφαρμοζομένην εΐς πλείστας όσας περιπτώσεις. Διά τήν είδιμήν όμως περίπτωσιν της μελέτης των έπιπέδων κινήσεων διά των αναλυτικων συναρτήσεων, ή συνισταμένη δύναμις καί ροπή υπολογίζονται άπ' εύθείας ως κατωτέρω.



Σχ. 15.6. Α



Σχ. 15.6. Β

Έστω ή στερεά παρεία AB, $\vec{n}$ τό μοναδιαϊον κάθετον διάνυσμα καί $\vec{T}$ ή υπό του ρευστου άσσιουμένη τάσις επί της στερεας παρειας, εΐς τό τυχόν σημεϊον αυτής M.

Έάν n_1 καί n_2 αΐ συντεταγμένες του $\vec{n}$ επί των Ox καί Oy, θά έχωμεν $\vec{n} = n_1 - i n_2 = \frac{dy}{ds} + i \frac{dx}{ds}$ διότι έξ όρισμου εΐναι $n_1 = \cos \alpha = \frac{dy}{ds}$, $n_2 = \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}$

Έπομένως προϋΐπτει ή σχέση

$$\vec{n} = i \frac{dx - i dy}{ds} = i \frac{d\bar{z}}{ds} \quad (15.6. \alpha)$$

Εξ άλλου ἡ τάσις διὰ τέλειον ρευστόν θά εἶναι

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = -p \delta_{ij} n_j = -p n_i,$$

ἢ διανυσματικῶς

$$\vec{T} = -p \vec{n}. \quad (15.6. \beta)$$

Τό δεύτερον θεώρημα τοῦ BERNOULLI διὰ μηδενιόν πεδίων ἐξωτερικῶν δυνάμεων δίδει

$$p = p_1 - \frac{1}{2} \rho V^2, \quad (15.6. \gamma)$$

ἐνθα p_1 εἶναι μία σταθερά, ἡ δέ σχέσις (15.6. γ) ἰσχύει διὰ πᾶν σημεῖον τῆς ἀστροβίλου ροῆς. Δεδομένου ὅμως ὅτι $|V| = \left| \frac{df}{dz} \right|$, ἡ σχέσις αὕτη γράφεται

$$p = p_1 - \frac{1}{2} \rho \left| \frac{df}{dz} \right|^2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \quad (15.6. \delta)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν (15.6. α) καί (15.6. δ) εἰς τήν (15.6. β) θά ἔχωμεν

$$T_i = -i p_1 \frac{d\bar{z}}{ds} + i \frac{\rho}{2} \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{ds} \quad (15.6. \epsilon)$$

Ὁ στροφεύς $[\vec{T}]$ τῶν τάσεων ἐπὶ τῆς παρεῖδος AB ἔχει διανύσματα ἀναγωγῆς ὡς πρός O τά

$$\vec{T} = \int_{AB} T_i ds = -i p_1 [\bar{z}(B) - \bar{z}(A)] + i \frac{\rho}{2} \int_{AB} \frac{df}{dz} d\bar{f} \quad (15.6. \zeta)$$

$$M_o[\vec{T}] = \int_{AB} (O\vec{M} \wedge \vec{T}) ds$$

Ἄν συμβολίσωμεν μέ $R(A)$ τό πραγματικόν μέρος τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς A , θά ἔχωμεν ὅτι

$$M_o[\vec{T}] = \int_{AB} R(i\bar{z}\vec{T}) = R \left(p_1 \int_{AB} z d\bar{z} - \frac{\rho}{2} \int_{AB} z \frac{df}{dz} d\bar{f} \right)$$

ἢ

$$M_o[\vec{T}] = p_1 \frac{|z(B)|^2 - |z(A)|^2}{2} - \frac{\rho}{2} R \left(\int_{AB} z \frac{df}{dz} d\bar{f} \right) \quad (15.6. \eta)$$

Αί σχέσεις (15.6.ζ) και (15.6.η) επλύνουν την γενική περίπτωση της παρούσης παραγράφου.

Θά εὔρωμεν ἐν συνεχείᾳ τὴν μορφήν τῶν σχέσεων αὐτῶν διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ καμπύλη AB εἶναι μία κλειστή γραμμὴ ροῆς. Πράγματι ἡ περίπτωσις αὕτη ἐμφανίζεται εἰς τὰς περισσότερας μορφάς ροῆς, διότι ἀνταποκρίνεται εἰς κλειστὴν παρειάν περιβάλλουσαν ἓν ρευστόν, ἢ εἰς ὥμα τυχόντος σχήματος ἐμβαπτιζόμενον εἰς ρευστόν ἐν κινήσει. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι $df = d\varphi$, διότι $d\psi = 0$ λόγω τοῦ ὅτι ἡ συνάρτησις df λαμβάνεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ροῆς $AB = \text{σταθ.}$, ἐπομένως $d\bar{f} = df$ καὶ αἱ σχέσεις (15.6.ζ) καὶ (15.6.η) λαμβάνουν τὴν ἀπλουστεράν μορφήν

$$\begin{aligned}\bar{T} &= i \frac{\rho}{2} \int_C \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz \\ M_o[\bar{T}] &= -\frac{\rho}{2} R \left(\int_C z \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz \right)\end{aligned}\quad (15.6.\theta)$$

εὐρέθησαν δέ τὸ πρῶτον ἀπὸ τὸν BLASIUS.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἰσχυουσῶν παραδοχῶν διὰ τὸν προσανατολισμόν τῶν διανυσμάτων, τὰ ὀλουληρώματα θά λαμβάνωνται δεξιόστροφα ἐάν τὸ ρευστόν περιβάλλῃ τὸ ἐμβαπτιζόμενον ὥμα καὶ ἀριστερόστροφα ἐάν τὸ ρευστόν περιβάλλεται ἀπὸ τὴν κλειστὴν παρειάν.

Τὸ σοβαρόν πλεονέκτημα τῶν σχέσεων (15.6.θ) συνίσταται εἰς τὸ ὅτι τὰ ὀλουληρώματα ἐφαρμόζονται εἰς ὁλομόρφους συναρτήσεις. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ CAUCHY, ἡ τιμὴ τῶν ἀνωτέρω ὀλουληρωμάτων παραμένει ἀμετάβλητος, ἐάν ἡ καμπύλη C ἀλλάξῃ κατὰ τρόπον συνεχῆ, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτι ἡ ἀλλαγὴ αὕτη δέν προσθέτει ἀνῶμαλα σημεῖα εἰς τὰς πρὸς ὀλουλήρῳσιν συναρτήσεις.

Ἐν συνεχείᾳ θά δώσωμεν ὡς πορίσματα δύο βασικὰς ἐφαρμογὰς τῶν ἀνωτέρω.

15.6.1 Παράδοξον τοῦ d'Alembert

Θά ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν ὁμοιομόρφου ροῆς συναντώσης κυλινδρικοῦ ὥμα K τυχούσης καθέτου τομῆς ἄνευ κυκλοφορίας (Σχ. 15.6.1.Α). Σύμφωνα μέ τὰ λεχθέντα προηγουμένως, ἀλλάσομεν κατὰ τρόπον συνεχῆ τὴν ὁριαίαν γραμμὴν ροῆς C , μετατρέποντες αὐτὴν εἰς κύκλον αὐτῆνος R . Ἀναγόμεθα τότε εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ροῆς 15.4., διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν μιγαδικόν δυναμικόν

$$f(z) = V_o \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \quad (15.6.1.a)$$

καὶ μιγαδικὴν ταχύτητα

$$W = \frac{df}{dz} = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) \quad (15.6.1. \beta)$$

Ὡς ἤδη ἀπεδείχθη ἀναλυτικῶς εἰς τὴν σχετικὴν παράγραφον, ὁ στροφεὺς τῶν πιέσεων τῆς ἀνωτέρω μινήσεως εἶναι μηδέν καὶ ἐπομένως ἐφ' ὅσον τὸ παράδοξον τοῦ D'ALEMBERT ἰσχύει διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς 15.4, θὰ ἴσχύη καὶ διὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν τῆς παρούσης παραγράφου. Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ὅμως ἀποδεικνύεται ἀμέσως ἐπὶ τῇ βάσει τῶν σχέσεων (15.6.θ) καὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ CAUCHY.

Πράγματι, τὰ ὁλοκληρώματα τῶν σχέσεων (15.6.θ) μέ βάσιν τὴν τιμὴν τῆς μιγαδικῆς ταχύτητος

$$W = \frac{df}{dz} \text{ ἐν τῆς (15.6.1.α) εἶναι}$$

ἐν ταυτότητος μηδέν, διότι αἱ

Σχ.15.6.1.Α

συναρτήσεις $\left(\frac{df}{dz}\right)^2$ καὶ $z\left(\frac{df}{dz}\right)^2$ εἶναι ὁλόμορφοι καὶ ἄνευ ἀνωμάτων σημείων εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ των. Ἐπομένως, ὁ στροφεὺς τῶν συνολικῶν δυνάμεων τῶν ἐλασισοιμένων ἐπὶ τοῦ σώματος K εἶναι ἐν ταυτότητος ἴσος μέ τὸ μηδέν διὰ ροὴν ὁμοιόμορφον καὶ ἄνευ κυκλοφορίας.

Ἡ ἀπόδειξις αὕτη δεικνύει τὴν μεγάλην γενιμότητα καὶ τὰς ἐφαρμογὰς τῆς θεωρίας τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων εἰς τὰς ἀρχὰς τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν.

15.6.2 Θεώρημα τοῦ Joukowski

Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

" Ἐάν μία ὁμοιόμορφος καὶ ἀστρόβιλος ροὴ ἐνός τελείου ἀσυμπίεστου ρευστοῦ, ἄνευ πεδίου ἐξωτερικῶν δυνάμεων, συναντᾷ κυλινδρικοῦν σῶμα K τυχούσης καθέτου τομῆς, μέ κυκλοφορίαν Γ , ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\vec{R}$ ἐπὶ τοῦ σώματος εἶναι ἴση μέ τὸ γινόμενον $\rho \Gamma V_0$ ἔνθα ρ εἶναι ἡ εἰδικὴ πυκνότης τοῦ ρευστοῦ καὶ V_0 ἡ σταθερὰ ταχύτης τῆς ὁμοιομόρφου ροῆς μακρὰν τοῦ σώματος K . Ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης εὐρίσκεται διὰ περιστροφῆς κατὰ $\frac{\pi}{2}$ τοῦ διανύσματος $\vec{V}_0$

κατὰ φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κυκλοφορίας Γ ".

Κατ' ἀρχὴν μετατρέπομεν ὡς καὶ προηγουμένως τὴν τυχούσαν αμψύλην C εἰς κύκλον αὐτῆνος K κατὰ τρόπον συνεχῇ. Ἀναγόμεθα τό-

τε εἰς τὴν περίπτωση ῥοῆς τῆς παραγράφου 15.5 διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν

$$f(z) = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (15.6.2. \alpha)$$

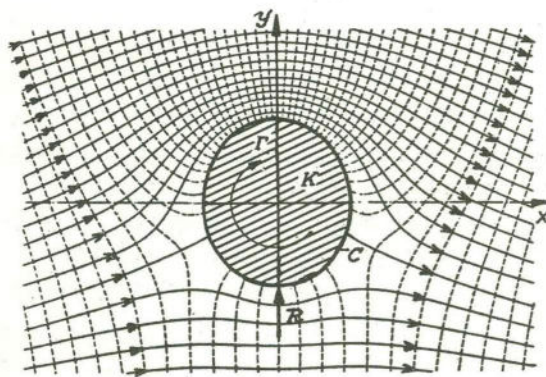
$$W = \frac{df}{dz} = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi z}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $\left(\frac{df}{dz} \right)^2$ καὶ $z \left(\frac{df}{dz} \right)^2$ εἶναι ὁλόμορφοι εἰς τὸ πεδίου ὁρισμοῦ των, μέ μόνον ἀνώμαλον σημεῖον τὴν πηγὴν O τοῦ σημειωτοῦ συμβολισμοῦ.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ὑπολοίπων (ἴδε θεωρία ἀναλυτικῶν συναρτήσεων) συνάγεται ἁμέσως ὅτι

$$\vec{R} = \vec{R}_y = \rho V_0 \quad (15.6.2. \beta)$$

$$M_o[\vec{R}] = 0$$



Σχ. 15.6.2. Α

Αὐτό προκύπτει καὶ ἀναλυτικῶς δι' ὑπολογισμοῦ τῶν ὁλοκληρωμάτων κατὰ τὸν ὀρθόδοξον τρόπον, μετὰ προηγουμένην ἔμφρασιν τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z εἰς πολικὰς συντεταγμένας $z = r e^{i\theta}$.

Εἰς τὸ ἐπόμενον κεφάλαιον δίδομεν καὶ μίαν ἄλλην ἀναλυτικὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀρχῶν τῆς συμμόρφου ἀπειμονίσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 16

Η ΣΥΜΜΟΡΦΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ

ΚΑΙ ΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΙΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

ΔΙΑ ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Εἰς τὰ κεφάλαια 14 καὶ 15 εἶδομεν τὸν τρόπον μελέτης ὠρισμένων ἐπιπέδων κινήσεων, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν στοιχειωδῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων. Παρ' ὅλας τὰς πολλὰς ἐφαρμογὰς τῆς μεθόδου αὐτῆς, ὑπάρχει συχνὰ ἡ ἀνάγκη τῆς μελέτης κινήσεων πλέον περιπλοκῶν, ἀνταποκρινομένων εἰς ὠρισμένας συνθήκας ὁρίων, δεδομένας ἐν τῶν προτέρων καὶ μὴ δυναμένας νὰ ἀποδοθοῦν ὑπὸ τῶν ἀπλῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων. Ἡ σύμμορφος ἀπεικονίσις δίδει τὴν δυνατότητα μιᾶς συστηματικῆς μελέτης εἰς πλείστας ὁσας ἐν τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων.

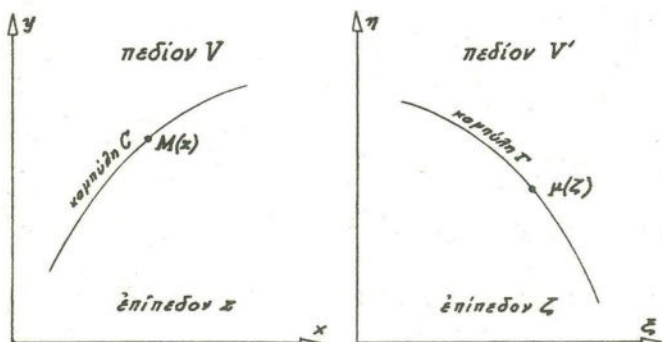
Δι' αὐτῆς, ἡ ζητούμενη μελέτη μιᾶς κινήσεως, μὲ πολυπλόκους συνθήκας ὁρίων, πραγματοποιουμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μεταβλητῆς x ἀνάγεται εἰς μίαν ἄλλην πολὺ ἀπλουστέραν καὶ γνωστὴν περίπτωσιν κινήσεως, πραγματοποιουμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἄλλης μεταβλητῆς z (ἢ καὶ ἀντιστρόφως) ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς σειρᾶς μετασχηματισμῶν τῶν ὁριαῶν συνθημῶν, καθοριζομένων ἀπὸ ὠρισμένους ικανόνας τοὺς ὁποίους καὶ θὰ ἀναπτύξωμεν ἐν περιλήψει.

Τονίζομεν ὅμως ἐπὶ πλέον ὅτι μία τυχούσα περίπτωση ἐπιπέδου καὶ ἀστροβίλου ροῆς, ἀσυμπιέστου ρευστοῦ, μὲ τυχούσας συνθήκας ὁρίων δύναται τελικῶς νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν ὁμοιόμορφον κίνησιν τῆς παραγράφου 14.4.1 ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς σειρᾶς συμμόρφων ἀπεικονίσεων καὶ κατὰ ἕναν καὶ μόνον τρόπον. Πράγματι, τὸ προκύπτον τελικὸν καὶ τὰ ἀρχικὰ δέμματα εἶναι ὀρθογωνικά (12.2.ζ) ἐπομένως εἶναι δέμματα συγγενῆ. Ἡ δυσχέρεια ἐγκρίνεται μόνον εἰς τὸν μεγάλον ἀριθμὸν τῶν ἀνα-

λυτικῶν ὑπολογισμῶν διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν ἀποτελεσμάτων ἀπὸ ἓν δί-
τυον εἰς τὸ ἀρχικόν τῆς ὁμοιομόρφου ροῆς.

16.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΟΡΦΟΥ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ

Ἐστωσαν δύο πεδία V καὶ V' , εὐρισκόμενα ἀντιστοιχῶς εἰς τὰ



Σχ. 16.1. Α

ἐπίπεδα τῶν μιγαδικῶν μεταβλητῶν $z = x + iy$ καὶ $\zeta = \xi + i\eta$ (Σχ. 16.1. Α). Εἰς πᾶν σημεῖον M τοῦ ἐπίπεδου z δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν ἓν σημεῖον μ τοῦ ἐπίπεδου ζ , ἐὰν συνδέσωμεν τὰς μιγαδικὰς μεταβλητὰς z καὶ ζ διὰ σχέσεων τῆς μορφῆς

$$z = F(\zeta) \quad \eta \quad \zeta = G(z).$$

Αἱ συναρτήσεις $F(\zeta)$ καὶ $G(z)$ ὀνομάζονται συναρτήσεις μετασχηματισμοῦ.

Ἄς περιορισθῶμεν πρὸς στιγμὴν εἰς τὴν συνάρτησιν $z = F(\zeta)$.

Λέγομεν ἓν γένηται ὅτι τὸ σημεῖον μ εἶναι τὸ μετασχηματισθέν τοῦ σημείου M . Τὰ σημεῖα μ καὶ M ἀποτελοῦν ζεύγος ὁμολόγων σημείων.

Ἐάν τὸ M διαγράφει μίαν καμπύλην C εἰς τὸ ἐπίπεδον z , τὸ σημεῖον μ διαγράφει μίαν ἄλλην καμπύλην Γ εἰς τὸ ἐπίπεδον ζ . Ἡ καμπύλη Γ ὀνομάζεται μετασχηματισθεῖσα τῆς καμπύλης C καὶ εἶναι ὁμολόγος αὐτῆς.

Ἐν γένηται δέ εἰς τυχόν σχῆμα τοῦ ἐπίπεδου z ἀντιστοιχεῖ ἓν μετασχηματισθέν σχῆμα τοῦ ἐπίπεδου ζ , τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν ἀπεικονίσιν τοῦ σχήματος τοῦ ἐπίπεδου z εἰς τὸ ἐπίπεδον ζ .

Λέγομεν ὅτι ἡ ἀπεικονίσις αὕτη εἶναι σύμμορφος, ὅταν αἱ συναρτήσεις μετασχηματισμοῦ $z = F(\zeta)$ καὶ $\zeta = G(z)$ εἶναι ὁλόμορφοι ἀντιστοιχῶς, εἰς τὸ πεδῖον V' τοῦ ἐπίπεδου ζ καὶ εἰς τὸ πεδῖον V τοῦ ἐπίπεδου z .

16.2 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΣΥΜΜΟΡΦΟΥ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ

Ἐν τῶν προηγουμένων ὁρισμῶν προκύπτει μίᾳ πρώτῃ σειρά ἰδιοτήτων μὲ ἀποδείξεις προφανεῖς.

1) Αἱ παράγωγοι $\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}$ εἰς τὸ πεδῖον V' καὶ $\frac{dG(z)}{dz}$ εἰς τὸ πεδῖον V

εἶναι πάντοτε διάφοροι τοῦ μηδενός, διότι ἐάν μία ἐξ αὐτῶν εἶναι μηδενική εἰς ἓν σημεῖον, ἡ ἄλλη εἰς τὸ ὁμολόγον σημεῖον θὰ εἶ-

ναι άπροσδιόριστος.

2) Ή σύμμορφος άπειμόνισις διατηρεϊτάς γωνίας μέ τήν φοράν των. Αυτό προϋπτει ώς άμεσος συνέπεια τής γεωμετρικής έρμηνείας τής μή μηδενικής παραγώγου μιάς όλομόρφου συναρτήσεως. Έπομένως ή σύμμορφος άπειμόνισις διατηρεϊ τήν γεωμετρικήν όμοιότητα είς τά άπειροστοϋ μεγέθους σχήματα (τοπιή γεωμετρική όμοιότης).

3) Οί έυ τών συμμόρφων άπειμονίσεων προϋπτοντες μετασχηματισμοί είναι μεταβατικοί. Έάν $\mathcal{A}=\Phi(z)$ είναι ή σύμμορφος άπειμόνισις τής περιοχής V είς μίαν άλλην περιοχήν V'' τοϋ έπιπέδου τής μιγαδικής μεταβλητής $\mathcal{A}$, ή συνάρτησις $\mathcal{A}=\Phi[F(Z)]$ πραγματοποιει τήν σύμμορφον άπειμόνισιν τής περιοχής V' είς τήν περιοχήν V'' .

Θά αναφέρωμεν έν συνεχείς καί δύο άλλας ιδιότητες έυ τής θεωρίας τών συμμόρφων άπειμονίσεων, άνευ άποδείξεως δεδομένου ότι έμφεύγουν τών πεδίων έφαρμογής τής θεωρητικής ύδραυλικής.

Θεώρημα ύπάρξεως καί μοναδιότητος διά χώρους άπλως συνευτι-
μούς

Έάν V είναι ό κύκλος διά τόν όποϊον $|z| < 1$, καί V' έν περριωρισμένον πεδϊόν, άπλως συνευτιμόν, περιέχον τό σημεϊόν $Z=0$ καί τοϋ όποϊου τό όριον δέν είναι έμφυλισμένον είς σημεϊόν, ύπάρχει μία σύμμορφος άπειμόνισις καί μία μόνη τοϋ V είς τό V' , ή $Z=G(z)$, τοιαύτη ώστε ή συνάρτησις $G(0)$ νά είναι μηδενική καί ή $G'(0)$ πραγματική

Άντιστοιχία μεταξύ τών όρίων

Ή σύμμορφος άπειμόνισις μεταξύ τών V καί V' δύναται νά έπευταθῇ κατά τρόπον συνεχῆ είς τά όρια αϋτῶν C καί C' καί ή σημειακή αϋτή άντιστοιχία μεταξύ τών C καί C' είναι συνεχής καί άμφιμο-νοσήμαντος.

16.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΟΡΦΟΥ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ ΔΙΑ ΤΑΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ ΕΚ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Έστω ότι είς τήν περιοχήν V τής μιγαδικής μεταβλητής z , ή άπλούστερον, είς τό έπίπεδον τών z , λαμβάνει χώραν μία γνωστή έπίπεδος ροή, μιγαδικοϋ δυναμικοϋ $f(z)$. Άς ύποθέσωμεν ότι γνωρίζομεν καί τήν όλόμορφον συνάρτησιν μετασχηματισμοϋ $z=F(Z)$, διά τής όποίας άπουαθίσταται ή σύμμορφος άπειμόνισις τοϋ έπιπέδου z είς τό έπίπεδον Z . Τότε ή συνάρτησις $\omega(Z)=f[F(Z)]$ είναι τό μιγαδικόν δυναμικόν μιάς νέας ροής είς τό έπίπεδον τών Z , ή όποία υαλειται έξ όρισμοϋ μετασχηματισθεϊσα ροή τής άρχικῆς ροής τοϋ έπιπέδου z .

Έπαληθεύεται εύμόλως ότι ή συνάρτησις $\omega(Z)=f[F(Z)]$ είναι μιγαδικόν δυναμικόν, διότι

$$\frac{d\omega(Z)}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{dF}{dZ} \quad (16.3. a)$$

καί έπομένως ή συνάρτησις $\frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta}$ είναι ολόμορφος είς τό επίπεδον ζ ,

έάν καί ή $W_z = \frac{df}{dz}$ είναι ολόμορφος είς τό επίπεδον z .

Έξ άλλου θά είναι

$$\omega(\zeta) = f(z)$$

διά δύο όμόλογα σημεία είς τήν θεωρουμένην σύμμορφον άπειμόνισιν. Έπομένως αί τιμαί τῶν συναρτήσεων δυναμιμοῦ καί τῶν συναρτήσεων ροῆς, είς όμόλογα σημεία είναι ίσαι.

Αί γραμμαί ροῆς καί ίσου δυναμιμοῦ τῆς κινήσεως είς τό επίπεδον z είναι όμόλογοι μέ τάς αντίστοίχους γραμμάς ροῆς καί ίσου δυναμιμοῦ τῆς κινήσεως είς τό επίπεδον ζ .

Αί κυκλοφορίαι κατά μήκος δύο όμολόγων γραμμῶν καί αί παροχαί διά μέσου δύο όμολόγων τόξων έχουν τάς αὐτάς τιμάς.

Έάν έξ άλλου ή ροή τοῦ έπιπέδου z παρουσιάζει έν άνώμαλον σημείον z_0 (π. χ. σημειωτήν πηγήν ή σημειωτόν στροβιλισμόν) ή μετασχηματισθεῖσα ροή τοῦ έπιπέδου ζ θά παρουσιάσῃ επίσης είς τό σημείοντό όμόλογον τοῦ z_0 , έν άνώμαλον σημείον, τῆς αὐτῆς φύσεως καί τῆς ίδίας έντάσεως.

Τέλος, αί ταχύτητες δύο όμολόγων σημείων δέν είναι ίσαι αλλά συνδέονται διά τῆς σχέσεως (16.3. α) ή όποία παραστατικώτερον γράφεται

$$W_z = W_\zeta \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \quad (16.3. \beta)$$

ένθα W_ζ καί W_z είναι αντίστοίχως αί μιγαδικαί ταχύτητες τῆς μετασχηματισθείσης καί τῆς άρχικῆς κινήσεως. Έπειδή δέ,ώς άνεφέρθη, ή πα-

ράγωγος $\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}$ είναι πάντοτε διάφορος τοῦ μηδενός, έπεται ότι έάν

ή ταχύτης μηδενίζεται είς έν σημείον τῆς ροῆς τοῦ ενός έπιπέδου, θά μηδενίζεται καί είς τό όμόλογον σημείον τῆς ροῆς τοῦ άλλου έπιπέδου. Τά σημεία μηδενισμοῦ τῆς ταχύτητος όνομάζονται καί κρίσιμα σημεία.

Μία άμεσος έφαρμογή τῶν άνωτέρω είναι ή έξῆς: Έστω ότι έχομεν είς τό επίπεδον τῶν z μιάν ροήν μέ συνάρτησιν δυναμιμοῦ $f(z) = -\varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, έχομεν δέ χαράζει τά δύτυτα γραμμῶν ροῆς καί ίσου δυναμιμοῦ, $\psi = \text{σταθ.}$, $\varphi = \text{σταθ.}$ (Σχ. 16.3. Α).

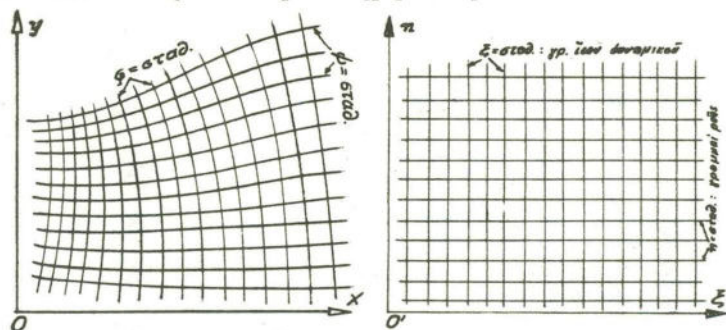
Ἄς ἐφαρμόσωμεν τὴν συνάρτησιν μετασχηματισμοῦ

$$\begin{aligned} \zeta = \xi + i\eta = G(z) = f(z) = \\ = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν ἄμέσως ὅτι

$$\xi = \varphi(x, y)$$

$$\eta = \psi(x, y)$$



Σχ. 16.3. Α

καὶ ἐπομένως τὸ πολὺπλοιοῦν δίκτυον τῶν γραμμῶν ροῆς καὶ ἴσου δυναμιμοῦ τοῦ ἐπιπέδου z μετατρέπεται εἰς τὸν ἀπλοῦν ὑάναβον $\eta = \eta_{\text{σταθ.}}$ καὶ $\xi = \xi_{\text{σταθ.}}$ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ζ

Ἐν συνεχείᾳ δίδομεν μίαν ἀπλὴν ἐφαρμογὴν πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀναφερθειῶν μέχρι στιγμῆς ἐννοιῶν.

Αἱ συναρτήσεις μετασχηματισμοῦ

$$z = F(\zeta) = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \quad \text{ἢ} \quad \zeta = G(z) = \frac{1 + z}{1 - z}$$

ἀποκαθιστοῦν μίαν σύμμορφον ἀπεικόνισιν εἴτε μεταξύ τοῦ ἡμιεπιπέδου εἰς τὸ ὁποῖον τὸ πραγματικὸν μέρος τῆς μεταβλητῆς z εἶναι μικρότερον τοῦ μηδενός, διὰ τὸ ὁποῖον ἐπομένως ἰσχύει ἡ σχέση $R(z) < 0$ καὶ τοῦ πεδίου $|z| < 1$ εἴτε μεταξύ τοῦ ἡμιεπιπέδου $R(z) > 0$ καὶ τοῦ πεδίου $|z| > 1$. Ἡ ἐπαλήθευσις εἶναι ἄμεσος λόγῳ τοῦ ἀμφιμόνοσημάντου χαρακτῆρος τοῦ μετασχηματισμοῦ.

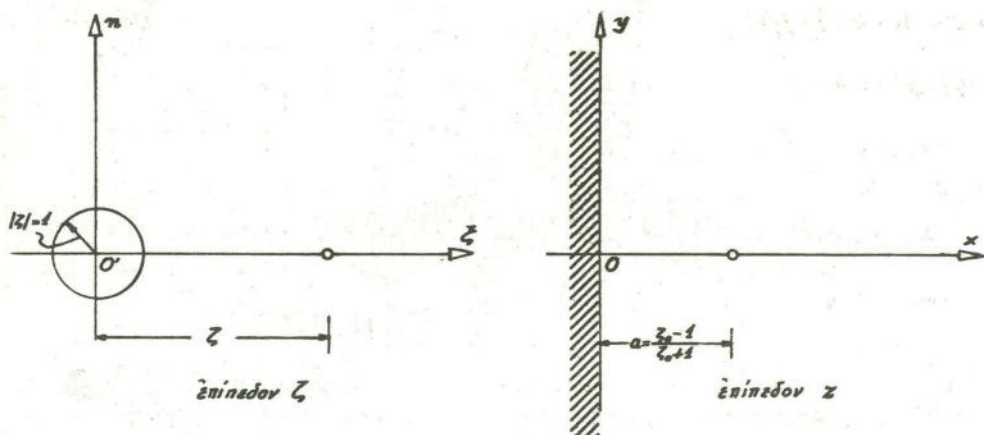
Ἄς χρησιμοποιήσωμεν τὴν σύμμορφον ἀπεικόνισιν $z = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$ (διὰ

τὴν ὁποίαν V εἶναι τὸ ἡμιεπίπεδον $R(z) > 0$ καὶ V' τὸ εἰνός τοῦ μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ ἐπίπεδον) διὰ νὰ μελετήσωμεν τὴν ροὴν περὶ τοῦ μοναδιαίου αὐτοῦ κύκλου λόγῳ τῆς ὑπάρξεως εἰς τὸ ἐπίπεδον ζ μιᾶς πηγῆς παροχῆς Q , τοποθετημένης εἰς τὸ σημεῖον $\zeta = \zeta_0$ ἔνθα ζ_0 πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ μεγαλύτερος τοῦ 1.

Ἡ σύμμορφος ἀπεικόνισις θὰ δώσῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον z μίαν πηγὴν τῆς αὐτῆς παροχῆς Q , τοποθετημένην εἰς τὸ σημεῖον $z = a = \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0 + 1}$. Ἐξ

ἄλλου ὁ κύκλος $|z| = 1$ μετασχηματίζεται εἰς τὴν ἐπίπεδον παρειάν $R(z) = 0$ ἥτοι εἰς τὸν ἄξονα Oy τοῦ ἐπιπέδου τῶν z (Σχ. 16.3. Β).

Ἐπομένως εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν z τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν ροὴν ἐκ πηγῆς παρουσίᾳ μιᾶς ἐπίπεδου παρειᾶς, περίπτωσιν ἣ ὁποία ἐμελετήθη ἤδη εἰς τὴν παράγραφον (15.2).



Σχ.16.3. Β

16.4 ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΔΙΑ ΤΗΣ ΣΥΜΜΟΡΦΟΥ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ

Εἰς τοὺς ἐν γένει τρόπους ἐφαρμογῆς τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως δυνάμεθα νά διακρίνωμεν τὰς ἀπ' εὐθείας μεθόδους, τὰς μεθόδους τῶν διαδοχικῶν δοσιμῶν καὶ τὰς μεθόδους τῶν διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν.

16.4.1 Ἀπ' εὐθείας μέθοδοι

Ἡ πρὸς μελέτην ροή τοῦ ἐπιπέδου τῶν z δέν ἐπιλύεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $y=h(x)$ μιᾶς ὁριακῆς συνθήκης τῆς ροῆς (π.χ. ὁριακῆς γραμμῆς ροῆς) εἶναι πολὺπλοος.

Αἱ ἀπ' εὐθείας μέθοδοι συνίστανται εἰς τὴν εὑρεσιν μιᾶς συναρτήσεως μετασχηματισμοῦ $z=F(\zeta)$ τοιαύτης ὥστε ἡ καμπύλη $y=h(x)$ νά μετασχηματίζεται εἰς εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς ἓνα ἐκ τῶν ἰσόνων $O\xi$ ἢ $O'\eta$ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ζ . Αὐτὸ ἐπιτυγχάνεται εἰς τὰς ἐλθῆς δύο καὶ μόνον περιπτώσεις:

1) Ἡ καμπύλη $y=h(x)$ ἐμφράζεται μὲ τὴν παραμετρικὴν μορφήν $x=\omega_1(\beta)$, $y=\omega_2(\beta)$. Τότε ἡ ζητούμενη συνάρτησις μετασχηματισμοῦ θά εἶναι

$$z=F(\zeta)=\omega_1(K\zeta)+i\omega_2(K\zeta) \quad (16.4.1.a)$$

ἐνθα K μία πραγματικὴ σταθερά. Πράγματι, διὰ $n=0$ (ὁπότε ἔχομεν τὸν ἄξονα $O'\xi$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν) ἡ (16.4.1.a) δίδει

$$z=x+iy=\omega_1(K\xi)+i\omega_2(K\xi)$$

είναι της οποίας προϋπείκει ότι $x = \omega_1(K\xi)$, $y = \omega_2(K\xi)$ και έπομένως ή κλημ-
 πύλη $y = h(x)$ του έπιπέδου των z μετεσχηματίσθη είς τόν άξονα $O\xi$ του έ-
 πιπέδου των ξ , ένθα $\lambda = K\xi$.

Ός παράδειγμα, έστω ή έλλειψις $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ του έπιπέδου των z ,
 ήτις υπό παραμετρικήν μορφήν γράφεται

$$x = a \cos t,$$

$$y = b \sin t.$$

Δι' έφαρμογής της συναρτήσεως μετασχηματισμού

$$z = a \cos \xi + i b \sin \xi \quad (K=1)$$

μετατρέπομεν την έλλειψιν του έπιπέδου των z είς τόν άξονα $O\xi$ του
 έπιπέδου των ξ , ένθα $t = \xi$.

2) Η κλημπύλη $y = h(x)$ είναι έν τυχόν κλειστόν ή άνοιχτόν πολύ-
 γωνον. Είς την περίπτωση αυτήν τό πρόβλημα έπιλύεται διά του με-
 τασχηματισμού του SCHWARTZ-CHRISTOFFEL, ώς θά είδωμεν κατωτέρω.

16.4.2 Μέθοδοι διαδοχικών δοκιμών

Είς όσας περιπτώσεις δέν δύναται νά εφαρμοσθούν αι άπ' εύθεί-
 ας μέθοδοι, εύλέγεται μέ βάση την μαθηματικήν έμπειρίαν μία συνάρ-
 τησης μετασχηματισμού και έξετάζεται έν συνεχεία κατά πόσον δίδει
 ικανοποιητικό αποτέλεσμα δι' ένα ώρισμένο τύπον ροής. Αύτή ή άρχι-
 κώς έπιλεγείσα συνάρτηση τροποποιείται, έως ότου έπιτευχθούν τά έν
 του μετασχηματισμού έπιδιωκόμενα αποτελέσματα, ήτοι ή άναγωγή είς
 γνωστήν μορφήν ροής.

16.4.3 Μέθοδοι διαδοχικών μετασχηματισμών

Δι' αύτών εφαρμόζεται ή άρχή της μεταβατικότητας των
 συμμόρφων άπειμονίσεων, της παραγράφου 16.2. Δυνάμεθα ούτω νά άνα-
 λύσωμεν ένα πολύπλοκον μετασχηματισμόν είς σειράν άλλων, άπλουστέ-
 ρων, τούς όποιους και εφαρμόζομεν διαδοχικώς.

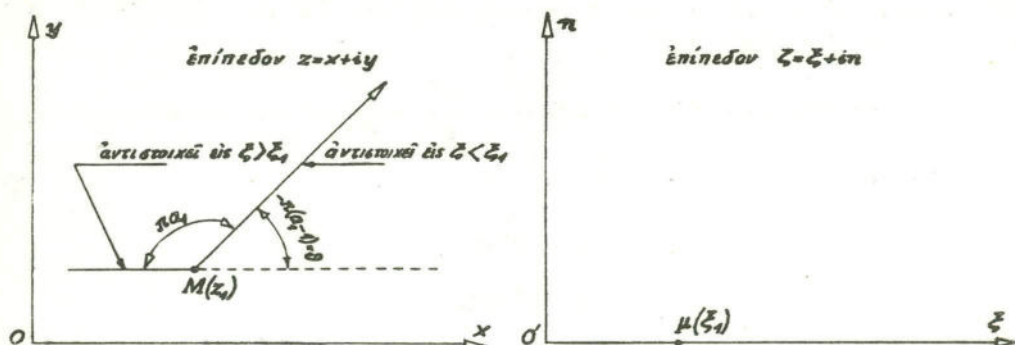
16.5 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ SCHWARTZ-CHRISTOFFEL

16.5.1 Είσαγωγή. Στοιχειώδης μετασχηματισμός

Έστω ή συνάρτηση $z = F(\xi)$ όρισμένη άπό την σχέση

$$\frac{dz}{d\xi} = (\xi - \xi_1)^{\alpha_1 - 1}$$

ένθα ξ_1, a_1 πραγματικοί αριθμοί.



Σχ. 16.5.1. Α

Έστω ότι τό σημείον $\mu(\xi)$ διαγράφει τόν άξονα $O'\xi$ τών πραγματιών αριθμών εις τό επίπεδον τών ξ . Θά ζητήσωμεν τόν γόπον τόν όποιον διαγράφει τό όμόλογον σημείον $M(z)$ εις τό επίπεδον τών z .

Έχομεν τας έξής δύο περιπτώσεις:

1) Νά είναι $\xi < \xi_1$ ή $\xi - \xi_1 < 0$ όποτε θά έχωμεν $\arg(\xi - \xi_1) = \pi$ ⁽¹⁾, άρα

$$\arg \frac{dz}{d\xi} = \arg(\xi - \xi_1)^{a_1-1} = (a_1-1) \arg(\xi - \xi_1) = \pi(a_1-1) = \sigma\tau\alpha\theta.$$

2) Νά είναι $\xi > \xi_1$ ή $\xi - \xi_1 > 0$, όποτε θά έχωμεν $\arg(\xi - \xi_1) = 0$, άρα

$$\arg \frac{dz}{d\xi} = 0 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Άλλά γνωρίζομεν ότι

$$\begin{aligned} \arg \frac{dz}{d\xi} &= \arg \frac{dx + i dy}{d\xi} = \arg \left(\frac{dx}{d\xi} + i \frac{dy}{d\xi} \right) = \\ &= \arctg \frac{dy/d\xi}{dx/d\xi} = \arctg \frac{dy}{dx} = \theta. \end{aligned}$$

Έπομένως

$$\arg \frac{dz}{d\xi} = \theta = \arg dz$$

όπου θ είναι ή γωνία τήν όποιαν σχηματίζει τό στοιχείον dz μέ τόν άξονα Ox . Έπομένως, $\tg \theta$ θά είναι ή υλίσις τής έφαπτομένης εις τό τυχόν σημείον τοῦ γεωμετριοῦ τόπου τών σημείων $M(z)$ εις τό επίπεδον τών z .

Συνεπώς συνοψίζοντες έχομεν

(1) Υπενθυμίζεται ότι άν $z = re^{i\theta}$, $\arg z = \theta$ = όρισμα τής μιγαδικής μεταβλητής z .

διά $-\infty < \xi < \xi_i$ θά εΐναι $\arg dz = \pi(\alpha_i - 1) = \vartheta$.

διά $\xi_i < \xi < +\infty$ θά εΐναι $\arg dz = 0 = \vartheta$.

Τό σημεΐον $\mu(\xi_i)$ τοῦ έπίπέδου ξ έχει ως όμόλογον έν σημεΐον $M(z_i)$ τοῦ έπίπέδου z . Παρατηρούμεν ότι όταν τό σημεΐον $M(z_i)$ διαγράφει τόν άξονα τών πραγματιών αριθμών $O'\xi$, είς τό έπίπεδον ξ , τό σημεΐον $M(z)$ διαγράφει είς τό έπίπεδον z δύο ήμιευθείας σχηματιζούσας μεταξύ των μίαν γωνίαν ίσην πρός $-\pi(\alpha_i - 1) = \pi(1 - \alpha_i)$.

Κατά συνέπειαν, τό άνω μέρος τοῦ έπίπέδου ξ μετασχηματίζεται είς τό έσωτερικόν τής γωνίας τών δύο ως άνω ήμιευθειών

16.5.2 Γενίκευσις. Μετασχηματισμός τών Schwartz-Christoffel

Ό μετασχηματισμός τών SCHWARTZ-CHRISTOFFEL δίδεται υπό τής αναλυτικῆς συναρτήσεως

$$z = F(\xi) = A \int \prod_{i=1}^{i=\nu} (\xi - \xi_i)^{\alpha_i - 1} d\xi + B, \quad (16.5.2. \alpha)$$

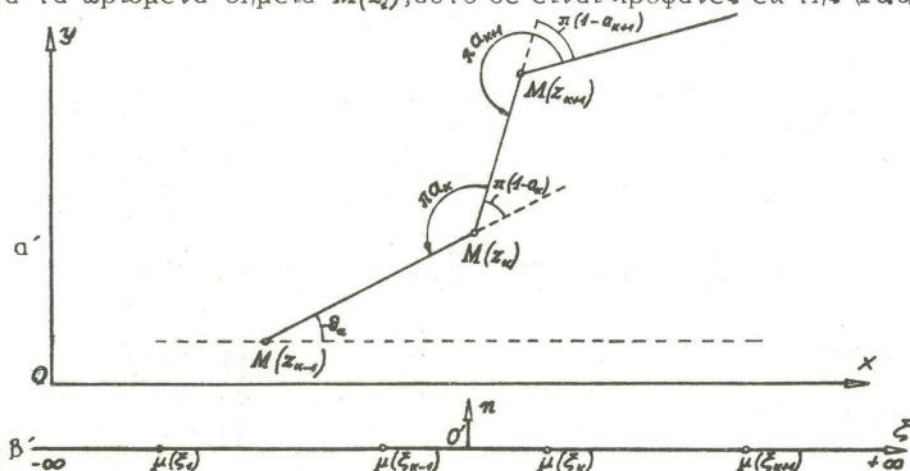
ένθα A, B μιγαδικοί αριθμοί, $\alpha_i (i=1, 2, \dots, \nu)$ πραγματικοί αριθμοί καί $\xi_i (i=1, 2, \dots, \nu)$ πραγματικοί αριθμοί τοιοῦτοι ώστε $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_\nu$.

Θά δείξωμεν ότι ή άπειμόνισις (16.5.2. α) μετασχηματίζει τό άνω τμήμα τοῦ έπίπέδου ξ , τό όποΐον περιορίζεται από τόν άξονα $O'\xi$, είς τό έσωτερικόν μέρος ενός πολυγώνου τοῦ έπίπέδου τών z , έχοντας ν κορυφάς.

Ή (16.5.2. α) δίδει

$$\frac{dz}{d\xi} = A \prod_{i=1}^{i=\nu} (\xi - \xi_i)^{\alpha_i - 1}, \quad (16.5.2. \beta)$$

υπενθυμίζομεν δέ ότι τά σημεΐα $\mu(\xi_i)$ τοῦ άξονος $O'\xi$ έχουν ως όμόλογα τά ώρισμένα σημεΐα $M(z_i)$, αυτό δέ εΐναι προφανές έμ τής (16.5.2. α).



Σχ. 16.5.2. Α

Πρέπει όμως νά αποδειχθῇ ἐπὶ πλέον ὅτι τοῦ $\mu(\zeta)$ μινουμένου ἀπὸ ξ_{x-1} πρὸς ξ_x , τὸ $M(z)$ διαγράφει τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $z_{x-1} z_x$.

Ἐστὼ ὅτι $\xi_{x-1} < \xi < \xi_x$.

Εἴτε θά εἶναι $\xi - \xi_i > 0$ διὰ $i=1, 2, \dots, (x-1)$, ὁπότε καὶ $\arg(\xi - \xi_i) = 0$ διὰ $i=1, 2, \dots, (x-1)$.

Εἴτε θά εἶναι $\xi - \xi_i < 0$ διὰ $i=x, (x+1), \dots, \nu$, ὁπότε καὶ $\arg(\xi - \xi_i) = \pi$ διὰ $i=x, (x+1), \dots, \nu$.

Ἐν τῆς (16.5.2.β) ἔχομεν ὅτι⁽¹⁾

$$\arg \frac{dz}{d\zeta} = \arg \left[A \prod_{i=1}^{i=\nu} (\zeta - \xi_i)^{a_i-1} \right] = \arg A + \sum_{i=1}^{i=\nu} (a_i-1) \arg(\zeta - \xi_i). \quad (16.5.2.γ)$$

Ἀλλὰ ὡς ἐδείχθη $\arg(\zeta - \xi_i) = 0$ διὰ $i=1, 2, \dots, (x-1)$ ὁπότε $\prod_{i=1}^{i=x-1} (a_i-1) \arg(\zeta - \xi_i) = 0$

καὶ ἡ (16.5.2.γ) δίδει

$$\begin{aligned} \arg \frac{dz}{d\zeta} &= \arg A + \sum_{i=x}^{i=\nu} (a_i-1) \arg(\zeta - \xi_i) = \\ &= \arg A + \sum_{i=x}^{i=\nu} \pi (a_i-1). \end{aligned} \quad (16.5.2.δ)$$

Ἀλλὰ $\arg \frac{dz}{d\zeta} = \vartheta = \arg dz$, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν (16.5.1.α)

ἐπομένως ἐν γένει

$$\arg \frac{dz}{d\zeta} = \arg dz = \vartheta_x = \sigma\tau\alpha\theta. \quad (16.5.2.ε)$$

Ἀπεδείχθη ἐπομένως τὸ ζητούμενον, ἥτοι ὅταν τὸ σημεῖον $\mu(\zeta)$ διαγράφει τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $\xi_{x-1} < \xi < \xi_x$, τότε τὸ $M(z)$ διαγράφει ἓν εὐθύγραμμον τμήμα $z_{x-1} z_x$ σχηματίζον γωνίαν ϑ_x μέ τὸν ἄξονα Ox .

Μόλις τὸ σημεῖον $\mu(\xi_x)$ εἰσέλθῃ εἰς τὸ τμήμα $\xi_x \xi_{x+1}$, τότε θά ἰσχύῃ ἡ νέα σχέση

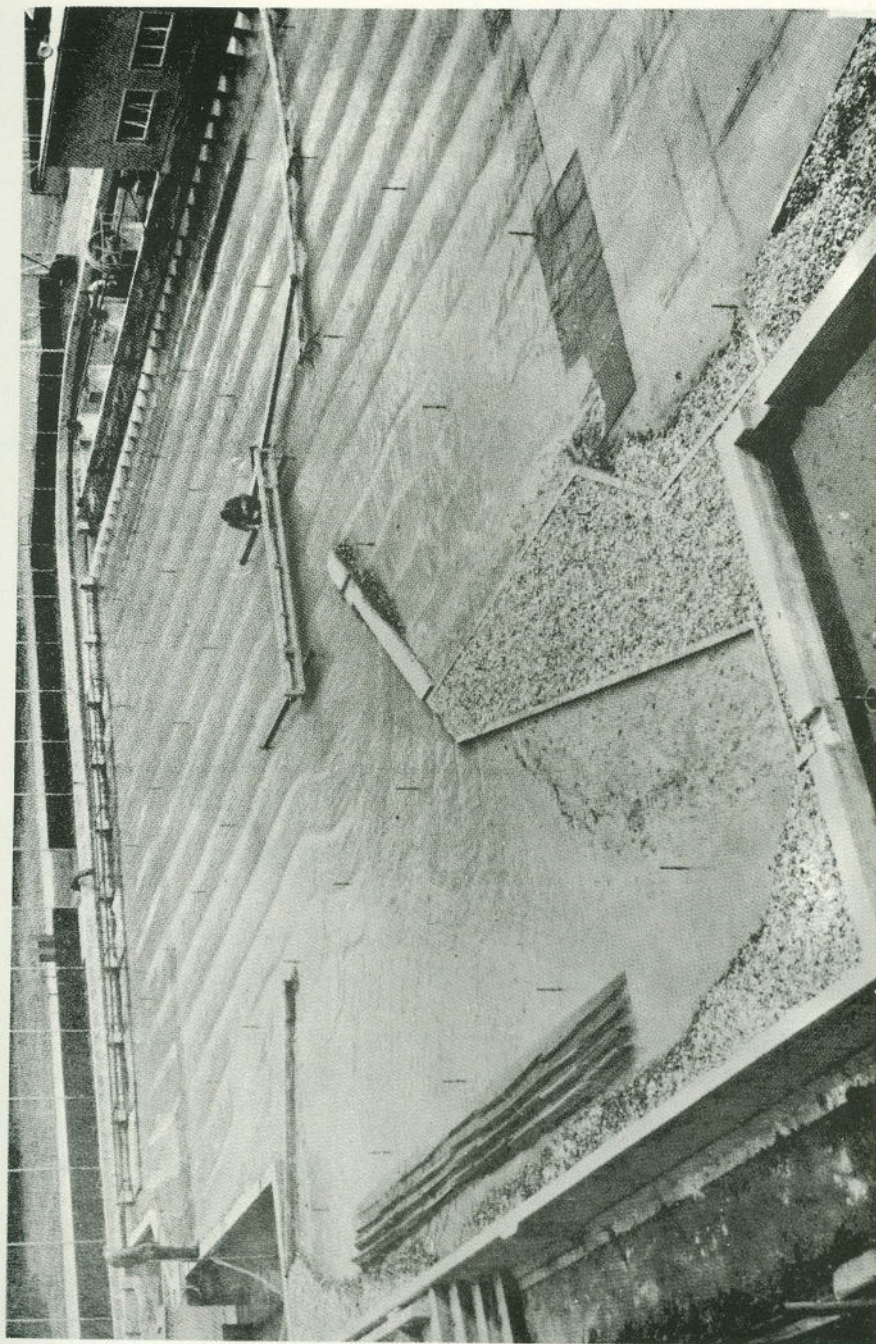
$$\arg \frac{dz}{dy} = \arg dz = \arg A + \sum_{i=x+1}^{i=\nu} (a_i-1) \arg(\zeta - \xi_i) = \vartheta_{x+1}.$$

Συνεπῶς τοῦ ζ μινουμένου εἰς τὸ τμήμα $\xi_x < \xi < \xi_{x+1}$, τὸ z διαγράφει τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $z_x z_{x+1}$, σχηματίζον γωνίαν ϑ_{x+1} μέ τὸν ἄξονα Ox .

Προφανῶς τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $z_{x-1} z_x$ καὶ $z_x z_{x+1}$ σχημα-

(1) Χρησιμοποιεῖται ἡ ταυτότης

$$\arg z_1 z_2 \dots z_r = \arg(z_1 e^{i\theta_1} z_2 e^{i\theta_2} \dots z_r e^{i\theta_r}) = \arg[z_1 z_2 \dots z_r e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_r)}] = \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_r$$



Μελέτη επί οριζώματος λιμένος εις ΤΕΕΣ
Στρεβλή ύψια: $\beta_H = 1/200$, $\beta_V = 1/60$



τίλουν μεταξύ των γωνίαν $\vartheta_{x+1} - \vartheta_x = \pi(1 - \alpha_x)$. Ούτω διαγράφεται εις τό επίπεδον z μία πολυγωνική γραμμή μέ έσωτεριας γωνίας $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_\nu$.

Δι'έν υλειστόν πολύγωνον πρέπει νά ίσχύη επί πλέον ή σχέσις

$$\pi \cdot \alpha_1 + \pi \cdot \alpha_2 + \dots + \pi \cdot \alpha_\nu = (\nu - 2)\pi$$

ή

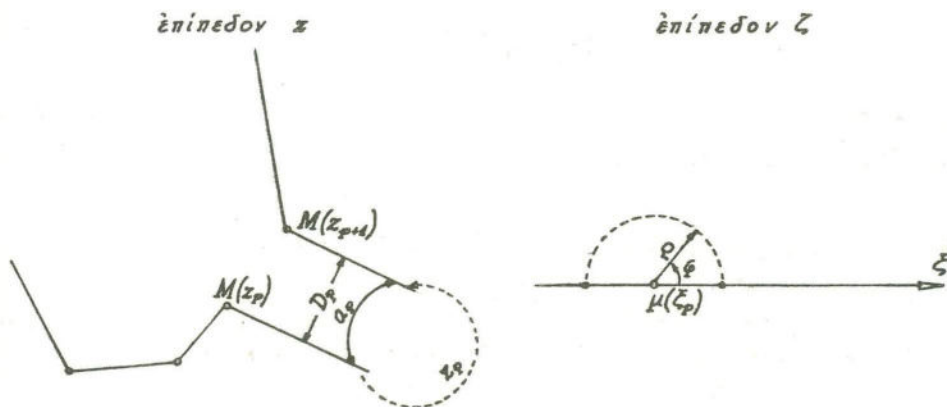
$$\prod_{i=1}^{i=\nu} (a_i - 1) = -2$$

(16.5.2.λ)

16.5.3 Ειδικαί περιπτώσεις έφαρμογής και τελικά συμπεράσματα

1. Κορυφή μέ μηδενική γωνία

Όταν $\alpha_p = 0$, τότε $\pi(1 - \alpha_p) = \pi$, όποτε ή αντίστοιχος κορυφή μεταφέρεται εις τό άπειρον υαί προϋπτουν δύο εύθειαι παράλληλοι.



Σχ.16.5.3.Α

Θά προσδιορίσωμεν την απόστασιν D_p των δύο παραλλήλων εύθειων. Πρός τοῦτο θά δείξωμεν ότι ο άξων διευθύνσεως της υαθέτου επί των παραλλήλων εύθειων είναι ή μετασχηματισμένη ενός ήμισυυλίου του έπιπέδου των ζ . Πράγματι, διά τιμάς του ζ πλησιαζούσας τό σημείον $\mu(\zeta_p)$, θέτομεν $\zeta - \zeta_p = \rho e^{i\varphi}$ όποτε προϋπτει έυ της (16.5.2.α)

$$z = A \left[\prod_{i=1}^{i=p-1} (\zeta_p - \zeta_i)^{\alpha_i-1} \cdot \prod_{i=p+1}^{i=\nu} (\zeta_p - \zeta_i)^{\alpha_i-1} \right] \int \rho e^{i\varphi} d\zeta + B. \quad (16.5.3.α)$$

Άλλά $d\zeta = d\rho \cdot e^{i\varphi} + \rho \cdot i e^{i\varphi} d\varphi = i \rho e^{i\varphi} d\varphi$, διότι $d\rho = 0$. Επομένως,

$$z = iA \cdot \varphi \left[\prod_{i=1}^{i=p-1} (\zeta_p - \zeta_i)^{\alpha_i-1} \cdot \prod_{i=p+1}^{i=\nu} (\zeta_p - \zeta_i)^{\alpha_i-1} \right] + B. \quad (16.5.3.β)$$

Πρόκειται περί της έξισώσεως μιās εύθείας. Τό σημείον $\mu(\zeta)$ διαγράφει την ήμπεριφέρεια, ή όποία περιβάλλει τό σημείον $\mu(\zeta_p)$ όταν τό σημείον $M(z)$ διαγράφει την εύθειαν (16.5.3. α). Λόγω του ότι ή ήμπεριφέρεια είναι υάθετος είς τόν άξονα $O\xi$ καί ή εύθεία (16.5.3.α) θά είναι υάθετος είς τάς δύο παραλλήλους εύθείας του έπιπέδου z . Συνεπώς τό ζητούμενον μήκος $|D_p|$ θά είναι τό μέτρον του μιγαδικου άριθμου

$$D_p = z_{(\varphi=0)} - z_{(\varphi=\pi)} = iA \left[\prod_{i=1}^{i=p-1} (\zeta_p - \zeta_i)^{a_i-1} \cdot \prod_{i=p+1}^{i=n} (\zeta_p - \zeta_i)^{a_i-1} \right] \quad (16.5.3. \gamma)$$

ή δέ διεύθυνσις των παραλλήλων εύθειων προκύπτει άντιστοιχώς από τό $\arg D_p$.

Διερεύνησις είς την περίπτωση κατά την όποιαν τό σημείον $\mu(\zeta_p)$ του άξονος $O\xi$ εύρίσκεται είς τό άπειρον

Είς τόν μετασχηματισμόν (16.5.2. α) δυνάμεθα νά θέσωμεν γενικώς

$$A = c \zeta_p^{-(a_p-1)} e^{i\theta}$$

ένθα $\theta = \arg A$ καί c ματάλληλος πραγματική σταθερά, τοιαύτη ώστε $|A| = c \zeta_p^{-(a_p-1)}$, όποτε ή σχέση (16.5.2. β) γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= c \zeta_p^{-(a_p-1)} e^{i\theta} (\zeta - \zeta_1)^{a_1-1} \dots (\zeta - \zeta_p)^{a_p-1} \dots (\zeta - \zeta_n)^{a_n-1} = \\ &= -c e^{i\theta} \left(\frac{\zeta_p - \zeta}{\zeta_p} \right)^{a_p-1} (\zeta - \zeta_1)^{a_1-1} \dots (\zeta - \zeta_{p-1})^{a_{p-1}-1} (\zeta - \zeta_{p+1})^{a_{p+1}-1} \dots (\zeta - \zeta_n)^{a_n-1}. \end{aligned}$$

Αν έλετάσωμεν την μορφήν της συναρτήσεως $\frac{dz}{d\zeta}$, όταν ή τετμημένη ζ_p τείνει είς τό άπειρον, θά έχωμεν ότι ο λόγος $\frac{\zeta_p - \zeta}{\zeta_p}$ τείνει είς την μονάδα, όποτε ο όρος $(\zeta - \zeta_p)^{a_p-1}$ απαλείφεται από την συνάρτησιν $\frac{dz}{d\zeta}$

Ας διερευνήσωμεν τώρα τόν ευθέτην a_p-1 , διαυρίνοντες τάς έξής περιπτώσεις

1) $a_p \neq 0$, όποτε είς τό επ' άπειρον σημείον $\mu(\zeta_p)$ άντιστοιχεϊ τό είς πεπερασμένην απόστασιν σημείον $M(\zeta_p)$.

2) $a_p = 0$, όποτε καί τό σημείον $\mu(\zeta_p)$ μεταφέρεται είς τό άπειρον.

Εάν θέλωμεν τώρα νά υπολογίσωμεν την απόστασιν D_∞ των δύο παραλλήλων εύθειων, θά θεωρήσωμεν ότι τά δύο σημεία $\pm \infty$ του άξο-

νος $O'ξ$ ένοϋνται μέ μίαν ήμπεριφέρεια, αϋτίνος $\varphi=\infty$, ή όποία κεί-
ται είς τό άνω τμήμα τοϋ έπιπέδου τών ζ ($n>0$), όποτε ό μετασχηματι-
σμός (16.5.2. β) δίδει τήν ζητουμένην απόστασιν, $D_\infty=i\pi A$.

Έξ όλων τών άνωτέρω καταλήγομεν είς τά άκόλουθα παραστατικά
συμπεράσματα επί τής χρήσεως τοϋ μετασχηματισμοϋ τών SCHWARTZ-
-CHRISTOFFEL.

α) Τό μέτρον τοϋ μιγαδικοϋ αριθμοϋ A άντιστοιχεί είς μίαν ό-
μοιοθεσίαν καί διά τής μεταβολής του διαστέλλομεν ή συστέλλομεν τό
πολύγωνον κατά βούλησιν.

β) Τό $arg A$ άντιστοιχεί είς μίαν περιστροφήν τοϋ πολυγώνου πέ-
ρι τοϋ σημείου του $M(z_4)$.

γ) Η μιγαδική μεταβλητή B άντιστοιχεί είς μίαν παράλληλον
μεταφοράν τοϋ πολυγώνου κατά μίαν έπιθυμητήν διεύθυνσιν καί από-
στασιν καί έπιτρέπει τήν τοποθέτησιν μις κορυφής τοϋ πολυγώνου είς
οιονδήποτε έπιθυμητόν σημείον τοϋ έπιπέδου τών z .

δ) Αί γωνίαι τοϋ πολυγώνου προσδιορίζονται πλήρως από τάς στα-
θεράς a_i καί, άντιστρόφως, δεδομένου ενός πολυγώνου προσδιορίζομεν
τάς a_i καί έπομένως τήν σχέση (16.5.2. α).

ε) Μένει τέλος νά προσδιορισθοϋν αί σχετιμαί άναλογίαι μεταξύ
τών διαφόρων τμημάτων τῇ βοηθεία τών n σταθερών ξ_i . Λόγω τοϋ ότι
ϋπάρχουν τόσαι άπροσδιόρισται τιμαί, όσαι αί πλευραί τοϋ πολυγώνου
μείον μία, προσδιορίζονται μονοσήμαντα αί άναλογίαι όλων τών πλευ-
ρών τοϋ πολυγώνου.

στ) Τό όλουλήρωμα (16.5.2. α) είται όλουλήρωμα επί πραγματι-
κων αριθμών, διότι λαμβάνεται κατά μήκος τοϋ άξονος $O\xi$.

16.6 ΑΡΧΑΙ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ "PROFILS"

Μία έμ τών σπουδαιοτέρων έφαρμογών τής συμμόρφου άπεικονί-
σεως είται ή μελέτη τών συνθηκών ροής περί τών διαφόρων profils
πτερύγων, μορφής κατά τό μάλλον πολυπλόμου (1). Η μελέτη αύτή έ-
πιτυγχάνεται διά μετασχηματισμοϋ τοϋ περιγράμματος τοϋ υϋλου τής
γνωστής ροής (10.7.5. α) είς profil πτέρυγος, τῇ βοηθεία μις καταλ-
λήλου συναρτήσεως μετασχηματισμοϋ. Η μαθηματική βάση τής θεωρίας
έχει ως άκοιούτως.

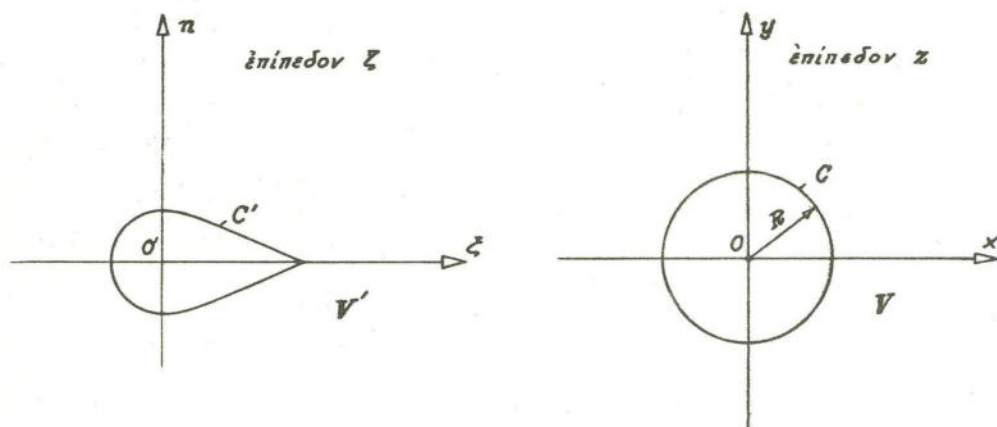
16.6.1 Κανονική σύμμορφος άπεικόνισις έκ τοϋ έξωτερικοϋ ένός κλειστοϋ περιγράμματος είς τό έξωτερικόν ένός κύκλου

Έστωσαν C' έν κλειστόν περίγραμμα είς τό έπίπεδον τών ζ καί
 S' τό έξωτερικόν τοϋ περιγράμματος πεδίο, C είς υϋλος αϋτίνος
 R είς τό έπίπεδον τών z μέ κέντρον τό O καί S τό έντός τοϋ υϋ-
λου πεδίο. Θέτομεν

(1) Διά τής λέξεως "profil" δεσινύεται ή τομή κατά τόν άξονα ένός στερεοϋ σχήματος, κατά κανόνα κυλινδρικοϋ
Είς τήν έλληνικήν όρολογίαν αποδίδεται μέ τήν λέξιν "κατομή".

$$\zeta_1 = \frac{1}{z} \quad , \quad z_1 = \frac{R}{z} \quad (16.6.1. \alpha)$$

ὁπότε εἰς τὰ πεδία S' καὶ S ἀντιστοιχίζομεν τὰ πεδία S'_1 , εὐρισκόμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν καὶ S_1 , προσδιοριζόμενον ἀπὸ τὴν σχέσηιν $|z_1| < 1$, διότι πάντοτε $|z| > |R|$.



Σχ.16.6.1.Α

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος ὑπάρξεως καὶ μοναδικότητος ὑφίσταται μία καὶ μόνη σύμμορφος ἀπεικονίσις τοῦ πεδίου S'_1 εἰς τὸ πεδίου S_1 , προσδιοριζόμενη ἀπὸ τὴν σχέσηιν $\zeta = G_1(z)$, ὁλόμορφος διὰ $|z_1| < 1$ καὶ τοιαύτης ὥστε εἰς τὴν περί τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων περιοχὴν νά εἶναι

$$\zeta_1 = m z_1 \left[1 + G_1(z_1) \right] , \quad (16.6.1. \beta)$$

ἐνθα m εἶναι μία πραγματικὴ σταθερά καὶ G_1 μία ὁλόμορφος συνάρτησις τοῦ z_1 παρά τὴν περιοχὴν $z_1 = 0$ καὶ μηδενική διὰ $z_1 = 0$. Κατὰ συνέπειαν, ἡ συνάρτησίς

$$\zeta = G(z) = \left[G_1 \left(\frac{R}{z} \right) \right]^{-1} \quad (16.6.1. \gamma)$$

πραγματοποιεῖ μίαν σύμμορφον ἀπεικονίσιν τοῦ πεδίου S εἰς τὸ S' . Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχέσεως (16.6.1.β) καὶ διὰ μέγανον $|z|$ δυνάμεθα νά γράψωμεν

$$G(z) = \frac{z}{mR} \left[1 + G_2 \left(\frac{R}{z} \right) \right] , \quad (16.6.1. \delta)$$

ἐνθα $G_2(z_1)$ εἶναι μία ὁλόμορφος συνάρτησις τοῦ z_1 , μηδενιζομένη διὰ $z_1 = 0$.

Εάν τώρα ευλέωμεν μίαν αὐτῖνα $R = \frac{1}{m}$ ἡ σχέση (16.6.5.γ) πραγματοποιεῖ ἐξ ὁρισμοῦ τὴν ικανονικήν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τοῦ πεδίου S' εἰς τὸ S , ἥτοι εἰς τὸ ἐξωτερικὸν ἑνὸς υἵυλου μέ κέντρον τὸ O . Προκύπτει ἐπομένως τὸ θεώρημα:

"Υπάρχει μία καὶ μόνη σύμμορφος ἀπεικόνις ἐν τοῦ ἐξωτερικοῦ πεδίου S' ἑνὸς κλειστοῦ περιγράμματος C' εἰς τὸ ἐξωτερικὸν ἑνὸς υἵυλου μέ κέντρον τὸ O , ὀνομάζεται δὲ ἐξ ὁρισμοῦ ικανονική ἀπεικόνις."

Ἡ συνάρτησις μετασχηματισμοῦ τῆς ικανονικῆς ἀπεικονίσεως $\zeta = G(z)$ δέχεται εἰς τὸ ἄπειρον μίαν ἀνάπτυξιν ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\zeta = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}. \quad (16.6.1.ε)$$

Ἡ αὐτίς R τοῦ υἵυλου εἶναι ἐπομένως ἓν μήκος κατ' ἀρχὴν ἄγνωστον, ἐξαρτῶμενον ὅμως ἀπὸ τὸ περίγραμμα C' .

16.6.2 Ροὴ περίξ ἑνὸς "profil" δεδομένων τῆς γωνίας προσπτώσεως καὶ τῆς κυκλοφορίας. Θεώρημα τοῦ Joukowski.

Ἐστω ὅτι ζητεῖται νὰ μελετηθῇ ἡ ροὴ περίξ ἑνὸς profil C' (σχῆμα 16.6.1.Α). Αἱ παραδοχαὶ μιᾶς τοιαύτης μελέτης εἰς τὴν μηχανικήν τῶν ρευστῶν συνίστανται εἰς ροὴν μόνιμον καὶ ἀστροβίλον ἑνὸς ἀσυμπιέστου καὶ τελείου ρευστοῦ προσβάλλοντος τὸ στερεόν C .

Ἡ ταχύτης τῆς ροῆς διὰ μεγάλα z θά εἶναι ἴση πρὸς $W = V_\infty e^{-i\alpha}$ ἡ δὲ γωνία α τῆς ταχύτητος τῆς ροῆς εἰς τὸ ἄπειρον μέ τὸν ἄξονα Ox καλεῖται καὶ γωνία προσπτώσεως τοῦ profil ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Ox . Ἐάν ἐπὶ πλέον ὑπάρχῃ μία κυκλοφορία ἴση πρὸς Γ περίξ τοῦ profil, ζητούμεν τὴν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν μιγαδικοῦ δυναμιμοῦ $\omega(\zeta)$ διὰ τὴν ὁποίαν

(α) Τὸ φανταστικὸν μέρος τῆς ω νὰ εἶναι σταθερὸν κατὰ μήκος τοῦ περιγράμματος C' .

(β) Ἡ συνάρτησις $\omega(\zeta) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \zeta$ νὰ εἶναι ὁμόμορφος εἰς τὸ πεδίου S'

(γ) Νὰ ἔχωμεν ὅτι $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{d\omega}{dz} = V_\infty e^{-i\alpha}$

Ἡ μετασχηματισθεῖσα ροὴ τοῦ επιπέδου τῶν z θά ἔχῃ ἓν μιγαδικὸν δυναμιμόν $f(z)$, συνδεόμενον μέ τὸ ζητούμενον μιγαδικὸν δυναμιμόν $\omega(\zeta)$ διὰ τῆς σχέσεως

$$\omega(\zeta) = f[\bar{F}(\zeta)] = f(z).$$

Πλὴν ὅμως, λόγῳ τῶν γενικῶν ἀρχῶν τῶν παραγράφων (16.1) καὶ (16.2) τὸ δυναμιμόν αὐτὸ πρέπει νὰ πληροῖ τὰς συνθήκας (α) καὶ (β).

Ός προς την συνθήμην (γ), αυτή επίσης θά πληροῦται διότι έμ τοῦ ό-
ρισμοῦ τής μανονιμής άπειμονίσεως

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{dz}{dz} = 1.$$

Έπομένως τό μιγαδιών δυνάμειών $f(z)$ θά είναι τό (15.5.β) ήτοι

$$f(z) = V_0 \left(z e^{-ia} + \frac{R^2 e^{ia}}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (16.6.2. a)$$

Τό γενιμιόν πρόβλημα τής θεωρίας τών profils ανάγεται έπομέ-
ως είς τήν εύρεσιν τής μανονιμής συμμόρφου άπειμο-
νίσεως τοῦ πεδίου S' είς τό έξωτεριμιόν πεδίον S έ-
νός υῦμλου άυτῖνος R .

Διά τήν εύρεσιν τών συνολιμῶν δυνάμειων επί τοῦ τυχόντος pro-
fil C' , τό μετασχηματίζομεν είς υῦμλον μέ κέντρον τό O καί άυτῖ-
να R άύθαιρέτως μεγάλην. Έξ άλλου διά μεγάλα $|z|$ αί σχέσεις (16.6.1.ε)
καί (16.6.2. a) δίδουν

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dz} = V_0 \left(e^{-ia} - i \frac{\Gamma}{2\pi V_0} \frac{1}{z} - \frac{R^2 e^{ia}}{z^2} \right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{z^{n+1}} \right)^{-1} =$$

$$V_0 e^{-ia} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} + \dots = V_0 e^{-ia} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}$$

παραλειπομένων τών όρων οἳτινες περιέχουν είς τόν παρανομαστήν δυ-
νάμεις τών z ή Z μεγαλυτέρας τής μονάδος. Έξ αῦτοῦ προϋπτει ότι

$$\left(\frac{d\omega}{dz} \right)^2 = V_0^2 e^{-2ia} - i \frac{\Gamma V_0 e^{-ia}}{\pi} \frac{1}{z}$$

όποτε ή σχέση (16.5.θ) τοῦ BLASIUS δίδει

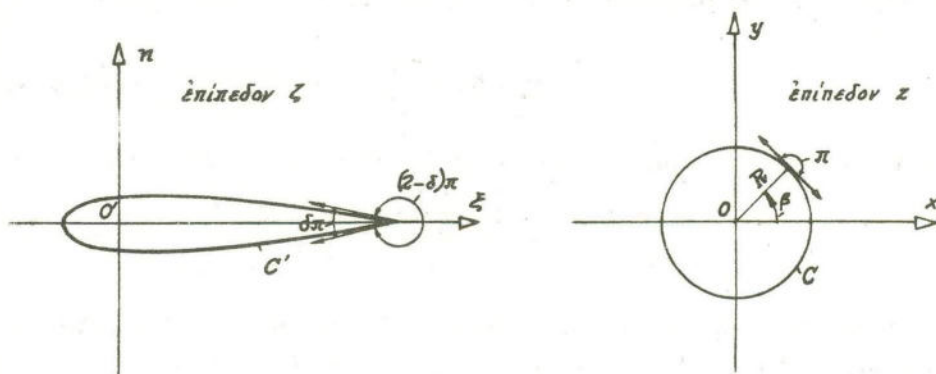
$$R = i \frac{\rho}{2} (2i\pi) \left(-i \frac{\Gamma V_0 e^{-ia}}{\pi} \right) = i \rho \Gamma V_0 e^{-ia}. \quad (16.6.2. \beta)$$

Η σχέση αυτή άποτελεῖ μιάν άλλην έυφρασιν τοῦ θεωρήματος
JOUKOWSKI (15.6.2), διότι ή $\vec{R}$ κείται επί ένός άξονος καθέτου προς
τήν ταχύτητα είς τό άπειρον, έχει δέ μέτρον ίσον προς $-\rho \Gamma V_0$.

16.6.3 "Profils" με άιχμήν. Υπόθεσις τοῦ Joukofski.

Τά άεροδυναμικά profils παρουσιάζουν είς τό όπισθεν μέρος των
μιάν άιχμήν, άποτελοῦσαν π.χ. τήν προβολήν τής γραμμής φυγής μιās
υυλινόρμιμής πτέρυγος άεροσιάφους.

Έστωσαν z_F ή μιγαδική τιμή της αίχμης αύτης καί $z_F = Re^{i\beta}$ ή τιμή του όμολόγου σημείου του υύλου C κατά την ιανονικήν σύμμορφον άπειμόνισιν της προηγουμένης παραγράφου.



Σχ.16.6.3. A

Η συνάρτησις $\zeta = G(z)$ είναι άνώματος είς την περί τό σημείον $z = z_F$ περιοχήν, έπαληθεύεται δέ ότι θά είναι της μορφής

$$\zeta - z_F = A(z - z_F)^p \quad (16.6.3. a)$$

παραλειπομένων των άπειροστών $(z - z_F)^n$ διά τιμάς του n μεγαλύτερας του p .

Επί τη βάσει της (16.6.3), εάν μία διεύθυνσις περί τό σημείον $z = z_F$ περιστραφή κατά γωνίαν α , ή όμολόγος διεύθυνσις περί τό σημείον $\zeta = z_F$ θά περιστραφή κατά γωνίαν pa .

Εάν $\delta\pi$ είναι ή γωνία των έφαπτομένων είς την αίχμήν του profil (ϊδε σχήμα 16.6.3.A) ό έυθέτης p της σχέσεως (16.6.3a) πρέπει νά είναι ίσος μέ $2 - \delta$. Έπομένως, περί τό σημείον z_F θά είναι

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_F = A(2 - \delta)(z - z_F)^{1 - \delta} \quad (16.6.3. \beta)$$

Παρατηρούμεν ότι ή παράγωγος αύτή μηδενίζεται διά $z = z_F$ όποτε ή σχέση (16.3.a) δεικνύει ότι ή μιγαδική ταχύτης παρά την περιοχήν της αίχμης άπουτā τιμήν τείνουσαν πρός τό άπειρον. Μόνον είς την περίπτωσην όπου τό σημείον $z = z_F$ είναι σημείον μηδενισμού της ταχύτητος (σημεία A καί A' σχήματος 15.5.A) δύναται ή ταχύτης είς την αίχμήν του profil νά λάβη πεπερασμένης τιμάς.

Πρός άποφυγήν υπάρξεως άπείρων ταχυτήτων είς τās αίχμάς των profils, αί όποιαί δέν έχουν νόημα είς την φυσικήν, ό JOUKOWSKI έδέχθη την άιόλουθον ύπόθεσιν:

Η σχηματιζομένη υυυλοφορία περίε ενός profil

μέ αίχμήν είναι τοιαύτη ώστε νά δημιουργήται πεπερασμένη ταχύτης είς τήν αίχμήν του *profil*.

Ή υυλοφορία θά προσδιορισθῇ αν έυφρασθῇ ότι τό σημείον $z_f = Re^{i\beta}$ αντιστοιχεῖ είς τό σημείον A' του σχήματος 15.5. Α. Ή σχέσις (15.5.2) δίδει τότε

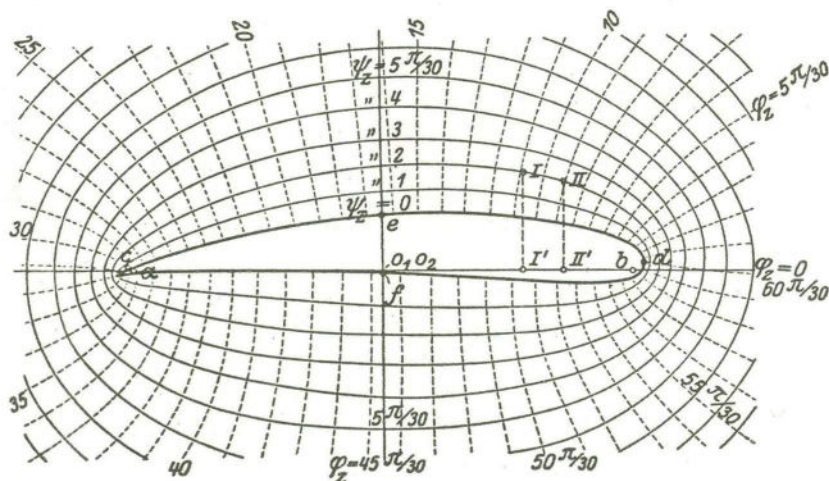
$$\boxed{\beta = \beta - \alpha}, \quad (16.6.3.\gamma)$$

όποτε ἡ ζητουμένη υυλοφορία, μέ βάσιν τήν σχέσιν (15.5.δ) γίνεται

$$\boxed{\Gamma = 4\pi V_o R \sin(\beta - \alpha)} \quad (16.6.3.\delta)$$

Ή γωνία β προσδιορίζει προφανώς τήν γωνίαν προσπτώσεως διά τήν όποίαν ἡ δύναμις $|\vec{R}| = \varrho \Gamma V_o$, ἡ όποία υαλειται ανάρτησις γίνεται μηδενιμή. Πράγματι διά $\beta = \alpha$, $\Gamma = 0$ καί ἡ ανάρτησις μηδενίζεται βάσει του θεωρήματος του JOUKOWSKI.

Μέ βάσιν τά ανωτέρω, ἡ θεωρητιμή μελέτη τῆς ροῆς πέριξ τῶν *profils* έπιτρέπει τήν εύρεσιν τῶν υαταλληλοτέρων μορφῶν διά υινούμενα σώματα έντός ὕδατος ἢ άέρος. Ή έμπειρία αποδεικνύει ότι παρά τάς σημαντιμιάς διαφοράς μεταξύ πράξεως καί θεωρίας, τάς προερχόμενας έυ τῶν ὑποθέσεων του τελείου ρευστου είς άστρόβιλον ροήν, τά θεωρητιμά αποτελέσματα αποτελοῦν πολύτιμον βάσιν διά τήν πρώτην χάραξιν ενός υαταλλήλου *profil* δι' έυάστην είδιμήν περιύπτωσιν.



Σχ. 16.6.3. Β

Είς τό σχῆμα 16.6.3. Β δίδεται ἡ πλήρης επίλυσις μιᾶς ροῆς πέριξ ενός (γραμμαί ίσης ταχύτητος καί ίσοδυναμιαί) διά μετασχηματισμοῦ του μοναδιαίου υύλου του σχήματος 15.4. Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 17.

Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

17.1 ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

Ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλυσις εἶναι, ὡς ἐν τῆς φύσεώς της, μία μέθοδος ὑπολογισμοῦ ἀσυνεχῆς. Πλὴν ὁμως, τὰ φυσικὰ μεγέθη ἐμφανίζονται ὑπὸ δύο διαφόρους μορφάς: Τὴν ἀσυνεχῆ (π.χ. ἡ ὕλη στὰ στοιχεῖα ἐνός συνόλου) καὶ τὴν συνεχῆ (π.χ. ἡ κίνησις). Ἐπομένως ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλυσις ἐφαρμόζεται ἀπολύτως μόνον εἰς τὴν πρώτην περίπτωσηιν τοῦ ἀσυνεχοῦς. Διὰ τὰς συνεχεῖς μορφάς, μόνη λύσις εἶναι ἡ προσεγγιστικὴ ἀναπαράστασις των διὰ μιᾶς ὀρισμένης σειρᾶς ἀσυνεχῶν μορφῶν. Ἐξ αὐτῶν καὶ μόνον ὀρίζονται τὰ πεδία ἐφαρμογῆς τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως:

Ἐνυινοῦσα ἀπὸ τὰς ὀρισμέναις τιμὰς τῶν ἀσυνεχῶν μορφῶν, δηλαδὴ τῶν ἐξισώσεων, προσπαθεῖ νὰ ἐμφράσῃ, ὅσον τὸ δυνατόν πληρέστερα, τὰς συνεχεῖς μορφάς, δηλαδὴ τὰς συναρτήσεις. Ἀποτελεῖ ἐπομένως τὴν γέφυραν μεταξὺ ἀλγέβρας καὶ ἀναλύσεως.

Καθίσταται λοιπὸν σαφές, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω, ἡ γενικὴ διὰ ἄρθρωσις μιᾶς μελέτης δι' ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως: Εἰς τὸ ἓν ἄκρον εὐρίσκονται αἱ ἐξισώσεις (ἢ ἀνισότητες). Εἰς τὸ ἄλλον δ' ὑπολογισμὸς συναρτήσεων καὶ κατὰ κανόνα διαφορικῶν ἢ ὀλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων. Μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν ἄκρων καὶ διὰ νὰ γίνῃ ὁμαλὴ ἡ μετάβασις ἀπὸ τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο, ὑπάρχει τὸ ἐντεταμένον κεφάλαιον τῶν προσεγγίσεων. Ἡ φορὰ μιᾶς τοιαύτης μελέτης θὰ εἶναι ἐπομένως ἀπὸ ἀσυνεχὲς πρὸς συνεχὲς καὶ θὰ ἔχῃ ὡς φάσεις τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεων, τὸν ὑπολογισμὸν προσεγγίσεων καὶ τὴν εὕρεσιν τῶν συναρτήσεων, χωρὶς νὰ εἶναι δυνατόν νὰ ἰσχύῃ καὶ τὸ ἀντίστροφον, διότι

ἀντίκειται εἰς τὴν φύσιν τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ.

Ὡς πρὸς τὰς μεθόδους τὰς ὁποίας θά ἀπολουθῇ ὁ ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς εἰς οἰανδήποτε φάσιν του, δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς δύο μεγάλας κατηγορίας:

α) Ἀπ' εὐθείας μέθοδοι, τῶν ὁποίων ἡ πορεία πρὸς τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι τρόπον τινὰ εὐθύγραμμος.

β) Ἐπαναληπτικαὶ ἢ μέθοδοι διαδοχικῶν προσεγγίσεων, τῶν ὁποίων ἡ πορεία πρὸς τὸ ἀποτέλεσμα δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ μιᾶς ἐλιμοειδοῦς καμπύλης, περιβαλλούσης τὸ ἀποτέλεσμα καὶ πλησιαζούσης πρὸς αὐτὸ ὁλονέν καὶ περισσότερο εἰς ἐκάστην περιστροφὴν της.

Ἡ ἐκλογή τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης μεθόδου ὅπου ὑπάρχει δυνατότης ἐκλογῆς, ἀποτελεῖ θέμα πολὺπλομον καὶ ἐξαρτᾶται ἀπὸ πλῆθος παραγόντων ὅπως, ἐπιζητούμενη ἀκριβεία, τύπος χρησιμοποιουμένου ἡλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ, κόστος προγραμματισμοῦ, κόστος ὥρας ὑπολογιστοῦ κ.λπ. ἀπαιτεῖ δὲ ἓν προχωρημένον στάδιον γνώσεων καὶ πείρας. Εἶναι δὲ τοσοῦτον μᾶλλον δύσκολη, καθ' ὅσον δὲν ὑπάρχει εἰσέτι μία ὀργανωμένη καὶ ἀπολύτως ἡλεγχμένη βιβλιογραφία. Διότι ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλυσις ἦτο μέχρι τοῦ δευτέρου παγκοσμίου πολέμου ἕνας τελείως παραμελημένος κλάδος τῶν μαθηματικῶν, μὲ μόνην ἴσως ἐξαίρεσιν τοὺς ἀστρονόμους, τῶν ὁποίων ὅμως αἱ ἐργασίαι εἰς τὸν τομέα αὐτὸν παρέμειναν εἰς τὴν ἀφάνειαν. Καὶ ὅπως αἰφνιδίως, ὅλοι οἱ κλάδοι τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν προσέτρεξαν εἰς αὐτήν. Ποία νέα ἐπιστημονικὴ κατὰκτησις προεκάλεσε τὴν ἀπότομον αὐτὴν μεταστροφὴν; Τὴν ἀπάντησιν ἔδωκεν ὁ FREDERIC JOIOT: "Ἡ σημαντικωτέρα κατὰκτησις τοῦ συγχρόνου ἀνθρώπου εἶναι ἡ ὑπολογιστικὴ μηχανή". Καὶ ἡ φράσις αὕτη, προερχομένη ἀπὸ ἕνα σοφὸν πού προσέφερε τὰ μέγιστα εἰς τὴν κατὰκτησιν τῆς ἀτομικῆς ἐνεργείας, ἐξ ἴσου ἐμπληρικτικῆς ἀνακαλύψεως, δεικνύει ἐμφανῶς ὅλην τὴν τεραστίαν σημασίαν τῶν ὑπολογιστῶν.

Ἡ ἀνάπτυξις τῆς υβαντικῆς καὶ πυρηνικῆς φυσικῆς, αἱ πρόοδοι τῆς στατιστικῆς καὶ τῶν πιθανοτήτων, ἡ τηλεκατεύθυνσις ἀεροσκαφῶν πάσης φύσεως, εἶχαν ἀνάγκην ἐπιτελέσεως πολυπλόκων ὑπολογισμῶν μέ μεγάλην ταχύτητα. Ἡ λογιστικὴ καὶ ἡ διεύθυνσις τῶν ἐπιχειρήσεων ἢ τῶν βιομηχανικῶν συγκροτημάτων ἀπῆλθον κατὰταξιν καὶ ἐπεξεργασίαν τεραστίου ὄγκου δεδομένων. Τέλος, ἡ τάσις αὐξήσεως τοῦ βαθμοῦ ἀποδόσεως παντός βιομηχανικοῦ ἢ οἰκονομικοῦ συγκροτήματος προσέειπε εἰς τὴν ἀδυναμίαν ἐπιτελέσεως ὅλων τῶν ἀπαραιτήτων μαθηματικῶν πράξεων διὰ τὴν εὑρεσιν τοῦ "optimum" συνδυασμοῦ τῆς ἐκμεταλλεύσεως. Τότε ἀκριβῶς ἡ ἀπότομος ἐμφάνισις τῶν συγχρόνων ἡλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, ἔδωκε τὴν δυνατότητα ἐπιδύσεως ὅλων αὐτῶν τῶν ἀναγκῶν, δημιουργῶντας ὅμως καὶ μίαν νέαν ἐπιτακτικὴν ἀνάγκην: Τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μεθόδων τῆς λογικῆς ἀλγέβρας (ἀλγεβρα BOOLE) τὴν τροποποιήσιν, ἐξέλιξιν καὶ ἐπέκτασιν τῶν μεθόδων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως καὶ τὴν εὑρεσιν νέων μεθόδων, διὰ τὴν ἐπίλυσιν ὅσον τὸ δυνατόν περιοσοτέρων προβλημάτων.

17.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (13.3. α) ἡ πλέον ἐν χρήσει μέθοδος ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως εἶναι ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων διαφορῶν.

Ἐστω τὸ περιωρισμένον πεδίον V τῆς συναρτήσεως $f(\varphi)$ μέ ὄριον τὴν κλειστὴν καμπύλην C (Σχ. 17.2. Α). Χαράσσομεν ἕναν ὑνάβον ἀποτελούμενον ἀπὸ ὁμοία πολύγωνα καὶ συνήθως τετράγωνα, μέ μέγεθος χαρακτηριστικῆς πλευρᾶς ἴσον μέ h .

Ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων διαφορῶν ἔχει ὡς συνοπὸν τὸν προσδιορισμὸν τῶν τιμῶν τῆς ζητουμένης συναρτήσεως φ εἰς τοὺς κόμβους τοῦ ὑνάβου, ὁπότε τοῦ h τείνοντος εἰς τὸ μηδέν θὰ ἔχωμεν τὰς τιμὰς τῆς φ εἰς ὅλον τὸ πεδίον V .

Ἐστωσαν M_s καὶ M_r δύο τυχόντες γειτονικοὶ κόμβοι τοῦ ὑνάβου (Σχῆμα 17.2. Β) καὶ $\varphi(M_s)$ $\varphi(M_r)$ αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως φ εἰς τοὺς κόμβους αὐτούς. Μεταξύ τῶν τιμῶν αὐτῶν θὰ ἰσχύη ἡ σχέση τοῦ TAYLOR

$$\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) = \varphi(x, y) + \Delta x \varphi'_x(x, y) +$$

$$+ \Delta y \varphi'_y(x, y) + \frac{1}{2} \Delta x^2 \varphi''_{xx}(x, y) +$$

$$+ \Delta x \Delta y \varphi''_{xy}(x, y) + \frac{1}{2} \Delta y^2 \varphi''_{yy}(x, y) + \dots$$

(17.2. α)

εἰς τὴν ὁποίαν τὰ $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi''_{xx}, \dots$ παριστοῦν τὰς μερικὰς παραγώγους

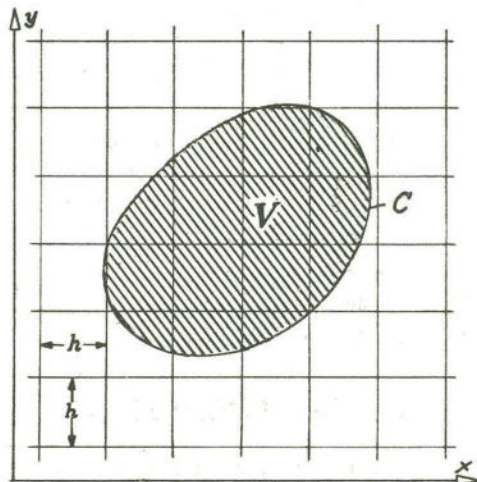
τῆς φ ἥτοι τὰς $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.

Ἐπομένως διὰ τὰ σημεῖα M_s καὶ M_r μέ $\Delta x = h, \Delta y = -h$ θὰ ἔχωμεν

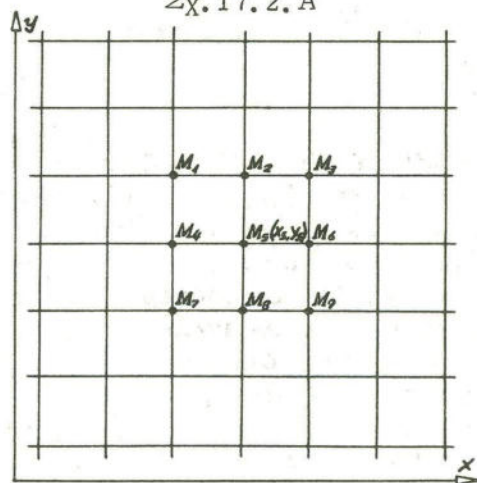
$$\varphi(M_r) = \varphi(M_s) + h \varphi'_x(M_s) - h \varphi'_y(M_s) + \frac{1}{2} h^2 \varphi''_{xx}(M_s) - h^2 \varphi''_{xy}(M_s) +$$

$$+ \frac{1}{2} \varphi''_{yy}(M_s) + \dots$$

(17.2. β)



Σχ. 17.2. Α



Σχ. 17.2. Β

Ἐάν παραλείψωμεν τὰ διαφοριῶν ἀπὸ μίαν ὠρισμένην τάξιν καὶ ἄνω (π.χ. ἀπὸ h^2 καὶ ἄνω, ὁπότε τὸ σφάλμα εἶναι ἀνάλογον τοῦ h^2) καὶ γράψωμεν ἓνα ὠρισμένον ἀριθμὸν σχέσεων τῆς μορφῆς (17.2.β) (π.χ. πέντε σχέσεις μεταξὺ τῶν $M_2-M_2, M_2-M_4, M_2-M_6, M_2-M_8, M_2-M_{10}$, διὰ παράληψιν ἀπὸ h^3 καὶ ἄνω, μέ βάσιν πάντοτε τὸ σημεῖον M_2) τότε δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν τὰς σχέσεις αὐτάς ὡς πρὸς $\varphi'_x(M_2), \varphi'_y(M_2), \dots$ συναρτήσει τῶν ἔξι $\varphi(M_i)$. Ἀντιμαθιστῶμεν ἐν συνεχείᾳ τὰς τιμὰς τῶν παραγώγων τῆς $\varphi(M_2)$ εἰς τὴν διαφοριωτὴν ἐξίσωσιν $f(\varphi)=0$ καὶ λαμβάνομεν οὕτω μίαν γραμμικὴν ἐξίσωσιν μεταξὺ τῶν ἔξι $\varphi(M_i)$.

Λαμβάνοντες ὡς σημεῖα βάσεως M_5 , διαδοχικῶς, ὅλους τοὺς υῶμβους τοῦ ιανάβου καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν ἐυτεθεῖσαν σειρὰν ἐργασιῶν, εὐρίσκωμεν ἓν γραμμικὸν σύστημα n ἐξισώσεων μέ n ἀγνώστους τιμὰς $\varphi(M_i)$, ($i=1, 2, \dots, n$). Ἡ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ δίδει τὰς ζητούμενας τιμὰς τῆς συναρτήσεως $\varphi(M)$ εἰς τοὺς n υῶμβους τοῦ ιανάβου. Τὸ μονοσήμαντον τῆς λύσεως δι' ἐυάστην εἰδιωὴν περὶπτωσησιν, ἐλασφαλίζεται ἀπὸ τὰς ὁριαίας συνθήκας, ἥτοι τὰς γνωστὰς τιμὰς $\varphi(M)$ εἰς τὴν περιβάλλουσαν ιαμπύλην C .

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀνωτέρω εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ LAPLACE δίδει ἐξισώσεις γραμμικοῦ συστήματος τῆς μορφῆς

$$\Delta\varphi = \varphi(M_2) + \varphi(M_4) + \varphi(M_8) + \varphi(M_{16}) - 4\varphi(M_5) = 0 \quad (17.2.\gamma)$$

μὰ σφάλμα ἀνάλογον πάντοτε τοῦ h^2 .

Ἡ σχέση (17.2.γ) ιαλεῖται καὶ τύπος τῶν πέντε σημείων, διότι ἐπεμβαίνουν εἰς αὐτὸν πέντε τιμαὶ τῆς φ σχηματίζουσαι σταυρόν.

17.3 ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν πεπερασμένων διαφορῶν ἡ ἐπίλυσις μιᾶς διαφοριωτῆς ἐξισώσεως β' τάξεως μέ μερικὰς παραγώγους, ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἐνὸς συστήματος n γραμμικῶν ἐξισώσεων.

Εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις αἱ γραμμικαὶ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ἔχουν ἀπλὴν μορφήν π.χ. (17.2.γ) πλὴν ὅμως ὁ ἀριθμὸς n τῶν ζητούμενων ἀγνώστων τιμῶν $\varphi(M)$ εἶναι μεγάλος. Ἡ δυναμιότης τῶν σημερινῶν ἡλετρονιῶν ὑπολογιστῶν ἐπιτρέπει τὴν ἐπίλυσιν συστημάτων μέ μέγιστον ἀριθμὸν ἐξισώσεων ἴσον πρὸς 100 ἕως 120.

Τὸ σύστημα τῶν (17.2.γ) γράφεται ἐξ ἄλλου ὑπὸ μορφήν μητρώων

$$A \cdot \Phi = B \quad (17.3.α)$$

ἐνθα A εἶναι τὸ μητρῶον τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων μέ στοιχεῖα a_{ij} , Φ τὸ μητρῶον-στήλη τῶν n ἀγνώστων $\varphi(M)$ καὶ B τὸ μητρῶον-στήλη τῶν γνωστῶν ὀρίων. Τὰ στοιχεῖα τοῦ B δὲν εἶναι ὅλα μηδενικά, ὡς θὰ ἐνομιζέτο ἐν πρώτῃς ὄψεως, διότι, λόγῳ γνωστῶν ὀριαίων συνθηκῶν, ὠρισμένοι ὅροι $a_{ij}\varphi(M)$ εἶναι μὴ μηδενικά στοιχεῖα τοῦ B . Παρατηροῦμεν ἐξ ἄλλου ὅτι εἰς τὸ μητρῶον A τὰ περισσότερα στοιχεῖα

εἶναι μηδενιᾶ, πλὴν μιᾶς στενῆς λωρίδος στοιχείων, παραλλήλου πρὸς τὴν κυρίαν διαγώνιον. Τὰ μητρώα τοῦ τύπου αὐτοῦ υαλοῦνται "λωριδωτά" καὶ ἔχουν σχετιῶς ταχύτεραν ἀντιστροφὴν.

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος (17.3.α) ἀνάγεται εἰς ἀπλὴν ἀντιστροφήν τοῦ μητρώου A , ὡς ἐμφαίνεται ἐν τῆς

$$\Phi = A^{-1}B \quad (17.3.β)$$

Τό ὅλον πρόβλημα τῆς ἀντιστροφῆς ἐνός μητρώου ἀποτελεῖ ἕν ἐυτεταμένον καὶ ἐν διαρμεῖ ἐξελεῖται κεφάλαιον τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως, ὑπάρχει δέ σήμερον εἰδιυή βιβλιογραφία ἐπὶ τοῦ θέματος.

Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θά ἀναφέρωμεν ἀπλῶς ὅτι αἱ μέθοδοι ἀντιστροφῆς ἀμολουθοῦν τὰς δύο μεγάλας ὑποδιαίρέσεις τῶν μεθόδων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως, ἥτοι διακρίνονται εἰς τὰς ἀπ' ἐυθέτας ἢ ἀμέσους καὶ εἰς τὰς ἐπαναληπτικὰς ἢ μεθόδους διαδοχικῶν προσεγγίσεων. Καὶ διὰ μὲν τὰς ἀμέσους μεθόδους, ὡς εἶναι ἡ μέθοδος GRAMMER, ἡ μέθοδος τῆς ἀπαλοιφῆς ἢ τριγωνοποιήσεως, ἡ μέθοδος ἀναλύσεως εἰς γινόμενον τριγωνικῶν μητρῶν κ.λπ., αἱ πράξεις δέν ἐπαναλαμβάνονται, ὁ δέ ἀριθμὸς των εἶναι γνωστός καὶ ὠρισμένος ἐν τῶν προτέρων. Διὰ τὰς ἐπαναληπτικὰς μεθόδους ὅμως, ὡς ἡ μέθοδος τῶν ταυτοχρόνων μετατοπίσεων, ἡ μέθοδος χαλαρώσεως, αἱ μέθοδοι τῶν GAUSS-SOUTHWELL ἢ τῆς ὑπερχαλαρώσεως κ.λπ., ἡ λύσις προκίπτει διὰ τῆς πολλαπλῆς ἐπαναλήψεως μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς σειρᾶς πράξεων.

Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς θεωρητικῆς ὑδραυλικῆς χρησιμοποιεῖται πολλάκις ἡ μέθοδος τῆς χαλαρώσεως, θά δώσωμεν δέ ἕν πληρὲς παράδειγμα εἰς τὸν τόμο II, ἐν σχέσει μὲ τὴν ροὴν κατὰ πλάτος ἐνός σώματος φράγματος, διὰ μέσου τοῦ πορώδους ὑπεδάφους καὶ μὲ γνωστὰς συνθηκὰς ὁρίων.

17.4 ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θά ἀσχοληθῶμεν ἀπουλειστικῶς καὶ μόνον μὲ τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογιστάς, θά τοὺς ἐξετάσωμεν δέ ἀπὸ ἄποψιν χρησιμοποιοῦσεως, χωρὶς νὰ ὑπεωρέλθωμεν εἰς ὅτι ἀφορᾷ τὴν τεχνολογίαν των.

17.4.1 Ἱστορικὸν

Ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας ἡ ἔννοια τοῦ αὐτοματισμοῦ εἶναι τόσον στενά συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς ἡλεκτρονικῆς, ὥστε δυσιδόλως φανταζόμεθα ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ ὑπαρξὶς σχεδίων αὐτομάτων ὑπολογιστικῶν μηχανῶν πρὸ τῆς ἀναπτύξεως τῶν ἡλεκτρονικῶν συστημάτων.

Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως ἡ τιμὴ τῆς συλλήψεως τοῦ πρώτου αὐτομάτου ὑπολογιστοῦ ἀνήκει εἰς τὸν CHARLES BABBAGE, ὁ ὁποῖος τὸ 1830 συνέθεσε καὶ τὰ πρῶτα σχέδια, εἰς μίαν ἐποχὴν κατὰ τὴν

ὁποῖαν ἡ ἡλετρονιῇ ἦτο ἄγνωστος. Τὰ σχέδια τοῦ BABBAGE οὐδέποτε ἐπραγματοποιήθησαν, λόγῳ τῆς ἀδυναμίας τῶν μηχανιῶν μέσων τῆς ἐποχῆς του. Πλὴν ὅμως αἱ ἀρχαὶ τὰς ὁποίας ὑλοποίησεν εἰς τὸ σχέδιόν του ἀποτελοῦν ἕως σήμερον τὴν βάσιν τῶν πλέον συγχρόνων ἡλετρονιῶν ὑπολογιστῶν.

Συνοπὸς τῆς προσπάθειας τοῦ BABBAGE καὶ ὠρισμένων ἄλλων συγχρόνων του ἦτο ἡ υατασμευὴ ἀριθμητικῶν πινάκων διαφόρων μαθηματικῶν συναρτήσεων. Οἱ σύγχρονοι ὑπολογισταὶ ἐφαρμόζονται καὶ σήμερον εἰς ἀναλόγους περιπτώσεις, πλὴν ὅμως ἡ ἀνάπτυξις των ὀφείλεται ἰδίως εἰς τὴν ἀνάγκην ἐπιλύσεως μαθηματικῶν θεμάτων στρατιωτικῆς φύσεως. Ἦδὴ ἀπὸ τὸ 1937 αἱ Η. Π. Α. ἐμελέτων θεωρητικῶς τὰς ἀρχὰς τοῦ αὐτομάτου ὑπολογισμοῦ, ἐνῶ συγχρόνως ὁ μαθηγητὴς Η. ΑΙΚΕΝ καὶ ἡ ἐταιρία BELL TELEPHONE ἤρχισαν τὴν κατὰστρωσιν τῶν πρώτων σχεδίων διὰ ἡλετρομηχανισμοῦς ὑπολογιστάς.

Ἡ πρώτη μηχανή, ὀνομασθεῖσα "MARK I" υατεσμευάσθη ὑπὸ τοῦ ΑΙΚΕΝ καὶ ἦτο ἤδη εἰς θέσιν νὰ ὑπολογίζῃ συναρτήσεις τῆς μορφῆς $e^{log x}$ καὶ $\sin x$ καὶ νὰ πραγματοποιῇ παρεμβολὰς εἰς τοὺς πίνακας τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν τιμῶν. Λόγῳ ὅμως τῆς παρεμβολῆς τῶν μηχανιῶν στοιχείων εἰς τὸν ὑπολογιστὴν, ἡ ταχύτης ἐιάστης πράξεως δέν ὑπερέβαινε τὸ δευτερόλεπτον κατὰ μέσον ὅρον.

Ὁ δεῦτερος παγιδόσιμος πόλεμος ἔδωκε νέαν ἐπιτάχυνσιν εἰς τὴν κατεύθυνσιν αὐτὴν καὶ ὁ δεῦτερος ὑπολογιστὴς MARK II, τοῦ ΑΙΚΕΝ, ἀπὸ τῆς ἀπλῆς ἀπὸ τὰ μηχανιὰ στοιχεῖα τοῦ πρώτου μέ ἀποτελέσμα τὸν πενταπλασιασμόν τῆς ταχύτητος τῶν πράξεων.

Σημειώνομεν τοὺς τρεῖς κυρίους τομεῖς ἐφαρμογῆς τοῦ MARK II

α) Ὑπολογισμὸς τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων

β) Ὑπολογισμὸς εἰδώλων εἰς τὴν ὀπτικὴν

γ) Ὑπολογισμὸς τροχῶν πυραύλων

Παρατηροῦμεν ὅτι κοινὸν χαρακτηριστικὸν καὶ τῶν τριῶν αὐτῶν ἐφαρμογῶν εἶναι ἡ ἐυτέλεισις ἐνὸς πολὺ μεγάλου ἀριθμοῦ πράξεων, σχετικῶς ἀπλῆς λογικῆς συνθέσεως. Μετὰ τὸ πέρας ἐιάστης σειρᾶς ὑπολογισμῶν ἀπολυνθεῖ ἡ ἐπομένη δι' ἀπλῆς ἀλλαγῆς τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος. Ἐχρειάσθη ἡ παρέλευσις μερικῶν ἐτῶν διὰ τὴν ἐπίτευξιν σοβαρῶν τεχνολογικῶν βελτιώσεων, αἵτινες ἐπέτρεψαν τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων κατὰ πολὺ συνθετωτέρων.

Δύο εἶναι αἱ κατευθύνσεις πρὸς τὰς ὁποίας ἐστράφησαν τότε οἱ τεχνικοί:

α) Αὐξήσις τῶν θέσεων μνήμης καὶ δὴ τῆς ταχείας μνήμης «1».

β) Αὐξήσις τῶν δυνατοτήτων λογικῆς συγυρίσεως, μέσο πόν τὴν λήψιν πολυπλόκων ἀποφάσεων ἐπὶ τῇ βάσει περνωρισμένου πλῆθους ἀρχικῶν ἐντολῶν.

Ἐξ μόνον ἔτη ἤρρεσαν διὰ τὴν ὑπερπήδησιν τῶν τεχνικῶν δυσκολιῶν καὶ τὸ πανεπιστήμιον τῆς Πενσυλβανίας παρουσίασε τὸν πρῶτον σύγχρονον ἡλετρονικὸν ὑπολογιστὴν, ὀνομασθέντα E.N.I.A.C, μέ

(1) Ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς μνήμης ἐπανερχόμεθα λεπτομερῶς εἰς τὴν 17.4.2

18.000 ἡλετρονιούς σωλήνας καί ταχύτητα 5.000 προσθέσεων τό δευτερόλεπτον.

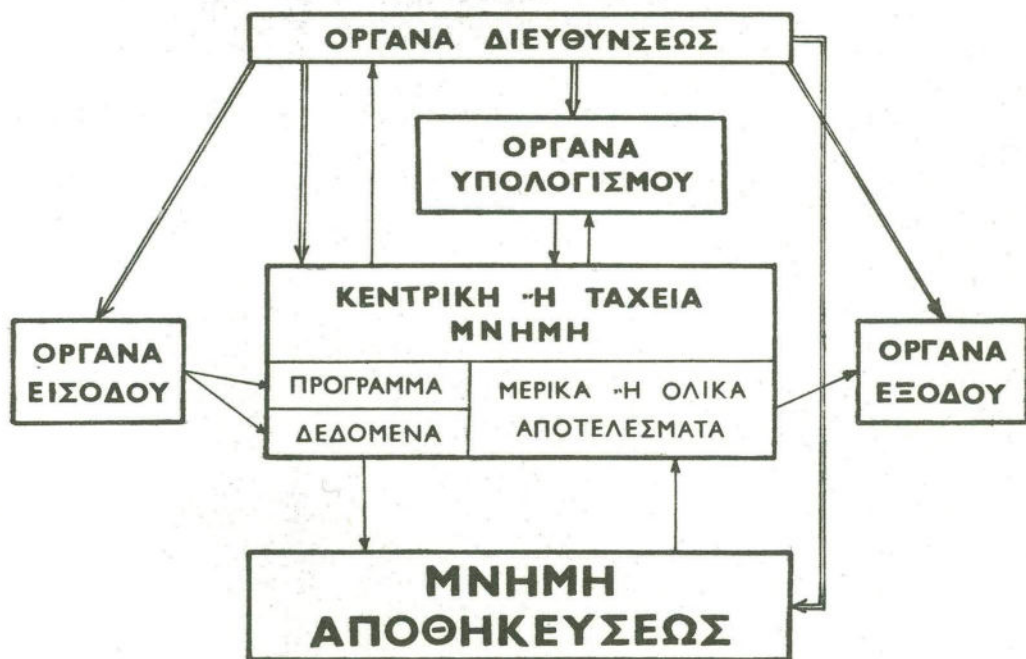
Ἦυολούθησεν ἡ ἐμφάνισις τοῦ τύπου E. D. V. A. C. καί τέλος τοῦ E. D. S. A. C., ὅστις ὑπῆρξε καί ὁ πρῶτος χρησιμοποιήσας ἐσωτερικόν πρόγραμμα ἤτοι πρόγραμμα ἐγγεγραμμένον εἰς τήν ταχεῖαν μνήμην. Δέν ἀπαιτεῖται οὕτως ἡ ἀνάγνωσις τοῦ προγράμματος εἰς ἐνιάστην ἐπανάληψιν μιᾶς σειρᾶς ὑπολογισμῶν.

Ἡ ἐν συνεχείᾳ ἐξέλιξις ὑπῆρξεν ταχυτάτη, χαρακτηρίζεται δέ ἀπό διαφόρους τεχνικὰς ἐφευρέσεις, ὅπως ἡ ματασιευή θέσεων μνήμης ἐν μαθοδικῶν σωλήνων, ἐν φερρίτου κ.λπ. Κατά τό 1946 ὅλαι αἱ βασικαί ἀρχαί τῶν σημερινῶν ὑπολογιστῶν ἦσαν πλέον γνωσταί. Ἡ ὁδός πρὸς τήν τεχνολογικὴν ἀξιοποίησίν των ἦνοιξεν εὐρυτάτη, διά νά εἰσαχθῇ ἡ ἐπιστήμη εἰς τόν αἰῶνα τῶν ἡλετρονιῶν ὑπολογιστῶν.

17.4.2 Γενική διάρθρωσις ἐνὸς ἡλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ ἀριθμητικοῦ τύπου

Εἰς ἕναστον ἡλετρονικόν ὑπολογιστὴν δυνάμεθα νά διαυρίνωμεν τέσσαρα κύρια μέρη ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ματασιευῆς του καί τοῦ τρόπου λειτουργίας του.

- α) Τά ὄργανα εἰσόδου-ἐξόδου.
- β) Τά ὄργανα μνήμης.
- γ) Τά ὄργανα διευθύνσεως.
- δ) Τά ὄργανα ἐπεξεργασίας ἢ ὑπολογισμοῦ.



Σχ.17.4.2.Α Γενική διάρθρωσις ὑπολογιστοῦ

Τό σχῆμα 17.4.2.Α δίδει μίαν πρώτην σχηματικὴν εἰκόνα ἑνός ὑπολογιστοῦ μεθ' ὅλων τῶν δυνατῶν υατευθύνσεων, αἱ ὁποῖαι ἀμολοιθοῦνται κατὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνός τυχόντος προβλήματος.

α) Ὅργανα εἰσόδου-ἐξόδου

Σκοπός των εἶναι ἡ ἀποματάστασις πλήρους ἐπιμοιωνίας μεταξύ ἐξωτερικοῦ υόσμου καὶ ἡλετρονικοῦ ὑπολογιστοῦ.

Ἐξωτερικός υόσμος: Ὁ ὑπολογιστής πρέπει νά εἶναι εἰς θέσιν νά λάβῃ ἀπὸ τόν ἐξωτερικόν υόσμον δύο εἰδῶν πληροφορίας. Τά δεδομένα καὶ τὸ πρόγραμμα, π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν ἑνός μαθηματικοῦ ὑπολογισμοῦ πρέπει νά δοθοῦν εἰς τόν ὑπολογιστήν ἀφ' ἑνός ἢ ἀμολοιθητέα σειρά τῶν πράξεων (πρόγραμμα) καὶ ἀφ' ἑτέρου τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα μέ τὰ ὁποῖα θά ἐργασθῇ.

Αἱ πληροφορίες αὐταί (δεδομένα-πρόγραμμα) μεταβιβάζονται στήν μηχανή μέσῳ διατρήτων καρτελλῶν ἢ ταινιῶν ἢ διὰ τῆς γραφομηχανῆς. Τά ἀποτελέσματα ἐξ ἄλλου μεταδίδονται ἀπὸ τὴν μηχανὴν πρὸς τόν ἐξωτερικόν υόσμον ὑπὸ μορφήν ἐντύπων, διαγραμμάτων, καρτελλῶν ἢ καὶ ταινιῶν.

Ὅργανα εἰσόδου: Εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν θά συναντήσωμεν:

- Ἀναγλωστήρας διατρήτων καρτῶν. Ἡ ταχύτης ἀναγνώσεώς των υημαίνεται ἀπὸ 150 εἰς 700 υάρτας ἀνά λεπτόν, ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἀνάγνωσιν 200 ἔως 900 ἀλφαριθμητικῶν χαραυτήρων, ἥτοι γραμμάτων ἀλφαβήτου, ἀριθμῶν ἢ σημείων, τὸ δευτερόλεπτον.

- Ἀναγλωστήρας διατρήτων ταινιῶν, μέ ταχύτητα ἀναγνώσεως περίπου τὴν αὐτὴν μέ τούς ἀναγλωστήρας διατρήτων καρτῶν.

- Γραφομηχανήν, ἐπιτρέπουσαν τὴν διὰ δαυτυλογραφήσεως εἰσαγωγὴν πληροφοριῶν ἢ ἐντολῶν εἰς τὴν μηχανήν.

- Ἀναγλωστήρας μαγνητικῶν ταινιῶν μέ ἐντολὰς ἐγγεγραμμένας διὰ γραφομηχανῆς.

Ὅργανα ἐξόδου: Εἰς ὅσας περιπτώσεις τὰ ἀποτελέσματα θά ἐπανεισυχθοῦν διὰ νέαν ἐπεξεργασίαν εἰς τὴν μηχανήν, χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν ἐξόδον:

- Διατρητῆρες καρτῶν.

- Διατρητῆρες ταινιῶν.

Εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν χρησιμοποιοῦνται:

- Ευτυπωτῆρες μικρᾶς ταχύτητος, ἐν εἴδει ἡλετριυῆς γραφομηχανῆς.

- Ευτυπωτῆρες μεγάλης ταχύτητος (150 ἔως 500 γραμμαὶ ἀνά λεπτόν) μέ 100 ἔως 120 ἀλφαριθμητικούς χαραυτήρας ἀνά γραμμήν.

- Καθοδικαὶ ὁθόνας διὰ τὰς ἀναπαραστάσεις τῶν υαμπύλων.

- Εἰδικαὶ διατάξεις ἀκίδων ἢ φωτογραφικῶν συστημάτων διὰ τὴν χάραξιν διαγραμμάτων.

β) Ὅργανα μνήμης

Τὰ ὅργανα ἐπεξεργασίας καὶ ὑπολογισμοῦ πρέπει νά εἶναι εἰς θέσιν νά τροφοδοτοῦνται ταχύτατα μέ ὅλας τὰς ἀπαραιτήτους πληροφορίες ἢ δεδομένα. Τὰ στοιχεῖα αὐτὰ εὐρίσκονται ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν μνήμην τοῦ ὑπολογιστοῦ, ἡ ὁποία πρέπει νά εἶναι εἰς θέσιν νά ἀποτυπῶνῃ, νά διατρηῇ καὶ νά μεταδίδῃ πληροφορίας ὑπὸ υωδιμοποιημένην



Συγκρότημα υπολογιστού I. B. M. 1620, τύπος II



μορφήν. Τὰ χαρακτηριστικὰ στοιχεῖα, τὰ ἐπιτρέποντα τὴν κατατάξιν τῶν διαφορῶν εἰδῶν μνήμης συνοψίζονται εἰς:

Χωρητικὸτητα: Χαρακτηρίζει τὸ ποσὸν τῶν πληροφοριῶν τὰς ὁποίας δύναται νὰ περιλάβῃ ἡ μνήμη. Ἐμφράζεται συνήθως μὲ ἀριθμὸν θέσεων μνήμης ἢ DIGITS, ἐκαστὴ δὲ ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ περιλάβῃ ἓν δεκαδικὸν ψηφίον καὶ ἀποτελεῖται συνήθως ἀπὸ ἐξ "BITS" (ἴδε δεκαδικὸν κώδικα κωδικοποιημένον εἰς δεκαδικὸν EM1248, παράγρ.(17.4.4)) Οἱ συνδυασμοὶ τῶν "BITS" προσδιορίζουν διαφοροὺς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν DIGITS. Οἱ ἀλφαριθμητικοὶ χαρακτήρες παρίστανται μὲ δύο DIGITS, ἢ τοὶ δύο δεκαδικὰ ψηφία.

Διὰ τὰς ἐπιστημονικὰς ἐφαρμογὰς τῶν ὑπολογιστῶν προτιμᾶται ἡ χρῆσις μιᾶς ἄλλης μονάδος διὰ τὴν χωρητικότητα, καλουμένης συνήθως λέξεως. Ἐκαστὴ λέξις ἀποτελεῖται ἀπὸ n θέσεις μνήμης ($n=6, 8, 10, 12$ κ.λπ. ἀναλόγως τοῦ κατασκευαστοῦ) καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μικροτέραν ποσότητα πληροφορίας, τὴν ἐπεξεργαζομένην ὑπὸ τοῦ ὑπολογιστοῦ εἰς ἐκαστὴν πρᾶξιν. Διὰ τὸν ὑπολογιστὴν I. B. M. 1620 εἶναι $n=12$.

Χρόνον προσπελάσεως: Πρόκειται περὶ τοῦ χρόνου ὁ ὁποῖος καταναλίσκεται ἀπὸ τὴν στιγμὴν ποὺ δίδεται ἡ ἐντολὴ νὰ ἀναγνωσθῇ μία μνήμη, μέχρι τῆς στιγμῆς κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ὑπολογιστὴς ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν του τὴν ζητουμένην λέξιν τῆς μνήμης.

Ἐντὸς ἐνὸς ἐκαστοῦ ὑπολογιστοῦ ὑπάρχουν διαφορῶν εἰδῶν μνημαί, ἀπὸ ἀπόψεως χωρητικότητος καὶ χρόνου προσπελάσεως. Δυνάμεθα νὰ τὰς διαχωρίσωμεν ἐν γένει εἰς δύο μεγάλας κατηγορίας:

- Μνημαὶ ταχείας προσπελάσεως ἀλλὰ περὶωρισμένης χωρητικότητος.
- Μνημαὶ ἀποθηκεύσεως, μὲ μεγάλην χωρητικότητα ἀλλὰ πολὺ βραδύτεροι, ἢτοι μὲ πολὺ μεγαλύτερον χρόνον προσπελάσεως.

Μνημαὶ ταχείας προσπελάσεως: Δυνάμεθα νὰ διαυρίνωμεν κατασκευαστικῶς τὰ ἐξῆς συστήματα:

- Ἡλεκτρονικὸς μετρητὴς, μὲ τριῶδια, τρανζίστορ ἢ decatrons.
- Κυκλώματα μὲ ἐπιβραδύνσεις. Εἰς τὸν τύπον αὐτὸν τῆς μνήμης αἱ πληροφορίες ἀποθηκεύονται ὑπὸ δυναμικὴν μορφήν: Εἰς συρμὸς ὠθήσεων υἱνεῖται κυκλικῶς ἐντὸς κλειστοῦ κυκλώματος. Ἡ ἐπιβράδυνσις ἐπιτυγχάνεται μὲ σωλῆνα νικελίου, ὑδραργύρου κ.λπ.
- Καθοδικοὶ σωλῆνες.
- Συμπυκνωταί.
- Μητρῶα ἐν μικροτόρων. Ἀποτελοῦνται ἀπὸ μαγνητικὸς πόρους μὲ τετραγωνικὸν κύβλον ὑστερήσεως. Χρησιμοποιοῦν τὰς δύο δυνατὰς τιμὰς τοῦ μαγνητισμοῦ (+ ἢ -).
- Κρυοτρόνια, λειτουργοῦντα ἐπὶ τῇ βάσει τῶν φαινομένων τῆς ὑπεραγωγιμότητος.

Λόγω ὑψηλοῦ κόστους καὶ περὶωρισμένου χώρου (διότι ἀπαιτεῖται πολὺς χώρος ἐν σχέσει μὲ τοὺς λοιποὺς τύπους μνήμης) ἡ χωρητικότης τῆς ταχείας μνήμης εἶναι περὶωρισμένη. Διὰ τοὺς μεγαλύτερους συγχρόνους ὑπολογιστὰς δὲν ὑπερβαίνει τὰς 400.000 θέσεις μνήμης. Εἰς τὴν I. B. M. 1620 δύναται νὰ ἀνέλθῃ εἰς 60.000 θέσεις μνήμης. Εἰς ὅλους τοὺς ἀνωτέρω τύπους ταχείας μνήμης ὁ ὑποδοχεὺς τῶν πληροφοριῶν εἶναι σταθερὸς καὶ ἐπομένως καὶ ὁ χρόνος προσπελά-

σεως εἶναι σταθερός. Μεταβάλλεται ἀπὸ τύπον εἰς τύπον μηχανῆς, ἀπὸ μεριῶς δευιάδας ἕως μεριῶς ἑκατοστά τοῦ μιροδευτερολέπτου (διὰ τὸν ὑπολογιστὴν I. B. M. 1620, II, εἶναι 10 μιροδευτερόλεπτα). Ἐνῶς-στη λέξις καταλαμβάνει μίαν ὠρισμένην θέσιν εἰς τὴν μνήμην, διὰ τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ μονίμως εἰς ἀριθμός, καλούμενος διεύθυνσις τῆς μνήμης. Ἡ ἔνδειξις τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ δεκνύει εἰς τὸν ἡλεκτρονιῶν ὑπολογιστὴν τὸ περιεχόμενον ποίας λέξεως μνήμης θὰ λάβῃ ὑπ' ὄψιν του κατὰ τὴν πορείαν τοῦ ὑπολογισμοῦ.

Ἡ ταχεία μνήμη εἶναι κατὰ κανόνα προσπελάσιμος, λέξιν πρὸς λέξιν.

Μνήμαι ἀποθημεύσεως: Εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν θὰ κατατάξωμεν τρεῖς τύπους μνήμης:

- Τὰ μαγνητιῶν τύμπανα, χωρητικότητος 1.000 ἕως 20.000 λέξεων.
- Τοὺς μαγνητιοὺς δίσκους. Μία σειρὰ ἐν 50 δίσκων δύναται νὰ περιλάβῃ περὶ τὰς 600.000 λέξεις.
- Τὰς μαγνητιῶν ταινίας, χωρητικότητος ἑνὸς ἑκατομμυρίου λέξεων περὶ τοῦ.

Εἰς τὰς κατηγορίας αὐτάς, ὁ ὑποδοχεὺς τῶν πληροφοριῶν εἶναι κινήσιμος καὶ ἐπομένως ὁ χρόνος προσπελάσεως εἶναι διάφορος διὰ τὴν αὐτὴν θέσιν μνήμης. Θεωροῦμεν ἐπομένως τὸν μέσον χρόνον προσπελάσεως, ὁ ὁποῖος κυμαίνεται ἀπὸ μεριῶν χιλιοστῶν τοῦ δευτερολέπτου διὰ τὰ τύμπανα, εἰς ὀλίγα δέματα τοῦ δευτερολέπτου διὰ τοὺς μαγνητιοὺς δίσκους. Διὰ τὰς μαγνητιῶν ταινίας τὸ θέμα εἶναι διάφορον: Ὁ μονοδιάστατος χαρακτήρ τῆς ἀποτυπώσεως ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν συνεχῆ παροχὴν πληροφοριῶν, ὁπότε εἶναι προτιμώτερον νὰ ὀμιλῶμεν περὶ τῆς παροχῆς ἐκτυλίζεως τῆς ταινίας. Αὐτὴ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πυκνότητα ἀποτυπώσεως (7.000 ἕως 20.000 χαρακτῆρες ἀνὰ μέτρον ταινίας) καὶ ἀπὸ τὴν ταχύτητα ἐκτυλίζεως (1,8 ἕως 3 m/sec). Θὰ κυμαίνεται ἐπομένως ἀπὸ 15.000 εἰς 60.000 ἀλφαριθμητιοὺς χαρακτῆρες ἀνὰ δευτερόλεπτον.

Ἡ μνήμη ἀποθημεύσεως δὲν εἶναι κατὰ κανόνα προσπελάσιμος λέξιν πρὸς λέξιν, διότι σκοπὸς τῆς εἶναι νὰ συγκεντρῶνῃ ὠρισμένα σύνολα πληροφοριῶν, μετὰ διάφορον ἀριθμὸν λέξεων.

Ἡ ἐπεξεργασία τῶν πληροφοριῶν αὐτῶν γίνεται ἀφοῦ πρῶτα μεταφερθοῦν εἰς τὴν ταχείαν μνήμην. Αἱ μεταφοραὶ αὗται, μεταξὺ ταχείας μνήμης καὶ μνήμης ἀποθημεύσεως, ἀναφέρονται ὅχι πλέον εἰς μίαν λέξιν ἀλλὰ εἰς ἓνα σύνολον λέξεων, σταθεροῦ ἢ μεταβαλλομένου μήκους, ἀναλόγως τοῦ χρησιμοποιουμένου συστήματος ἐσωτερικῆς ὁργανώσεως τοῦ ὑπολογιστοῦ.

Σημειοῦμεν ἐπὶ πλέον ὅτι αἱ μαγνητιαὶ μνήμαι διατηροῦν τὰς πληροφορίας καὶ μετὰ τὴν διακοπὴν φορτίσεως τοῦ ὑπολογιστοῦ. Αἱ πάσης φύσεως μνήμαι ἔχουν ἐξ ἄλλου τὴν ιδιότητα νὰ διαγράφουν αὐτομάτως τὰς περιεχομένας πληροφορίας, κατὰ τὴν πρόοδον τῆς ἐγγραφῆς νέων πληροφοριῶν εἰς αὐτάς. Εἰς εἰδιῶς περιπτώσεις ἀπουλείομεν δι' εἰδιῶν συνδυασμῶν τὴν ἐγγραφὴν νέων πληροφοριῶν εἰς ὠρισμένας μνήμας, τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ διατηρήσωμεν ἀνεπάφους καθ' ὅλην τὴν διάρκεια τῶν ὑπολογισμῶν. Ὡς ἀνάλογον περὶπτωσιν ἀναφέρομεν τὴν δια-

τήρησιν τῶν ἀρχιμῶν ἐντολῶν.

γ) Ὅργανα διευθύνσεως

Ἀποτελοῦν τρόπον τινά τό νευριμόν σύστημα τοῦ ὑπολογιστοῦ. Σκοπός των εἶναι νά ἀπουρπτογραφήσουν τās ὁδηγίας καί ἐντολās καί ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῶν νά ιατευθύνουν τὴν ἐργασίαν τῶν διαφόρων τμημάτων τοῦ ὑπολογιστοῦ,

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ εἶδους τῆς πράξεως, ἐυλέγουν τὰ ἀπαραίτητα στοιχεῖα διά τὴν ἐυτέλεσίν της, πολλάκις δέ ιαταλήγουν εἰς τὴν χρησιμοποίησιν ὁλουλήρου σειρᾶς βοηθητικῶν πράξεων, τās ὁποῖας εὐρίσκουν εἰς τὴν μνήμην ἀποθημεύσεως.

Συνήθως ζητῶμεν ἀπὸ τὰ ὅργανα διευθύνσεως ἢ ν' ἀμολουθήσουν μίαν πρὸς μίαν τās ἐντολās ἐνός προγράμματος ⁽¹⁾ καί νά τās ἐυτέλῃσιν, ἢ νά ἐπιβλέψουν ἀπλῶς τὴν ἐξέλιξιν ἐνός ἢ περισσοτέρων προγραμμάτων, ἐκασφαλίζοντας τὴν λογικὴν σειρὰν ἐυτελέσεως τῶν διαφορῶν πράξεων, καί διανέμοντας ὁμοιομόρφως τὴν ἐργασίαν εἰς τὸν ὑπολογιστὴν, οὕτως ὥστε νά ἐκασφαλισθῇ ἡ βελτίστη ἀπόδοσις τῶν διαφορῶν στοιχείων του.

δ) Ὅργανα ἐπεξεργασίας ἢ ὑπολογισμοῦ

Αἱ πράξεις ὑπολογισμοῦ ἢ ἐπεξεργασίας δύνανται ἀμέσως νά χωρισθοῦν εἰς δύο χωριστὰς ιατηγορίας ἥτοι τās ιυρῶς πράξεις ἐπεξεργασίας καί τās πράξεις διαυοπῆς τῆς συνεχείας ἐνός προγράμματος.

Κυρίως πράξεις ἐπεξεργασίας: Αἱ ιυριώτεραι ἐξ αὐτῶν εἶναι:

-Αἱ πράξεις μεταφορᾶς: Πρόιευται περὶ τῆς μεταφορᾶς πληροφοριῶν ἐξ ἐνός τμήματος τῆς μηχανῆς εἰς ἄλλο. Κατὰ ιανόνα ἡ μεταφερομένη σειρὰ πληροφοριῶν ὑπάρχει εἰς ἓν ἀιόμη ἀντίτυπον εἰς τὸν πομπὸν μεταδόσεως.

-Αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις: Εἰς ἔιαστον ὑπολογιστὴν ὑπάρχουν ιατ' ἀρχὴν αἱ τέσσαρες πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς: Πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμός, διαίρεσις. Ἐυτός αὐτῶν ὑπάρχουν καί ὠρισμένα ιαραλλαγαί των, ὅπως ἡ πρόσθεσις μετὰ ἢ ἀνευ στρογγυλεύσεως.

Ἡ βασιμὴ πράξις εἶναι εἰς τὴν πραγματιυότητα ἡ πρόσθεσις, ἡ δέ ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν διά τῆς ιάτωθι μεθόδου:

Ἐστῶ ὅτι ζητεῖται ἡ διαφορά 656-183. Λαμβάνεται τό συμπλήρωμα τοῦ 183 ὡς πρὸς τό 999 ἥτοι τό 816 καί προστίθεται τό στοιχεῖον τῶν χιλιάδων εἰς τās μονάδας (656+816=1472, 472+1=473).

Ὁ πολλαπλασιασμός ἀνάγεται εἰς μίαν σειρὰν προσθέσεων καί ἡ διαίρεσις εἰς σειρὰν ἀφαιρέσεων.

Ὡς πρὸς τὰ σημεία, ὑπάρχει εἰδιμόν ὅργανον διά τὴν ἐυτέλεσιν τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν σημείων, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν γνωστῶν ιανόνων τῆς ἀλγέβρας.

-Αἱ λογικαὶ πράξεις: Εἰς τὴν ιατηγορίαν αὐτὴν ὑπάγονται αἱ πάσις φύσεως συγυρίσεις μεταξύ ἀριθμῶν ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $=$, $\neq$). Τά

(1) Ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ προγράμματος ἴδε ἐυτενῶς εἰς 17.4.3.

ἀποτελέσματα ἀποτυπῶνται εἰς εἰδιμάς θέσεις μνήμης. Ἐχομεν ἐπίσης τὰς πράξεις ἀλληλοτομίας καὶ λογιῶς συναθροίσεως, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων γίνονται οἱ ὑπολογισμοὶ τῶν λογιῶν πολυωνύμων. Δίδεται ἔτσι ἡ δυνατότης τῆς ταχείας διερευνήσεως διά τὴν συνύπαρξιν ἐνός συνόλου συνθημῶν.

Πράξεις διαμοπῆς τῆς συνεχείας προγράμματος
Ὀνομάζονται ἐπίσης παραλλαγαί, πηδῆματα ἢ διαυλαδώσεις.

Ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῶν, ὁ ὑπολογιστὴς ἐυτελεῖ εἰδιμάς ἐντολάς ὅπως λογιμαὶ συγυρίσεις, μετάβασιν εἰς ἄλλην θέσιν μνήμης ἐντός τοῦ προγράμματος κ.λπ.

17.4.3 Ἡ ἔννοια τοῦ προγράμματος

Ὁρισμός: Ὀνομάζομεν πρόγραμμα τὴν σειράν τῶν ὑπὸ ἐυτέλεισιν ἀριθμητικῶν ἢ λογιῶν πράξεων κωδικοποιημένων εἰς μίαν γλῶσσαν ἀφομοιώσιμον ἀπὸ τὸν ὑπολογιστὴν.

Οὕτως, ἓν σύνολον στοιχειωδῶν πράξεων ἀποτελεῖ μίαν ἐντολήν τὸ δὲ πρόγραμμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν σύνολον ἐντολῶν. Διά τὴν κωδικοποιήσαν κατανοήσιν τῶν ἀνωτέρω, ἀναλύομεν πρῶτον τὴν ἔννοιαν τῆς ἐντολῆς.

Σύνθεσις μιᾶς ἐντολῆς

Αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:

- Ἐναν αὐξοντα ἀριθμόν, χαρακτηρίζοντα τὴν σειράν τῆς εἰς τὴν συνέχειαν τῶν ἐντολῶν.
- Τὸν τύπον τῆς ἀριθμητικῆς πράξεως ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ πραγματοποιηθῇ ἐπὶ ὠρισμένων λέξεων τῆς μνήμης (π.χ. ἡ πρόσθεσις κωδικοποιεῖται ὡς ADD ἢ 10).
- Τὴν διεύθυνσιν ἢ τὰς διευθύνσεις τῆς λέξεως ἢ τῶν λέξεων ἐπὶ τῶν ὁποίων θὰ ἐυτελεσθῇ ἡ πράξις.
- Τὸν αὐξοντα ἀριθμόν τῆς ἐντολῆς, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐυτελεσθῇ ἐν συνεχείᾳ. (Πρόγραμμα μὴ *sequentiel*, ὡς ἀναφέρεται κωδικοποιεῖται).

Ἐάν ὁ ὑπολογιστὴς εἶναι κωδικοποιημένος κατὰ τέτοιον τρόπον ὥστε μετὰ τὴν ἐυτέλεισιν τῆς ἐντολῆς N νὰ ἐυτελεῖ αὐτομάτως τὴν ἐντολήν N+1, τότε τὸ τελευταῖον στοιχεῖον τῆς ἐντολῆς παραλείπεται, τὸ δὲ πρόγραμμα κωδικοποιεῖται *sequentiel* καὶ ἐπὶ τῆς ἐννοίας αὐτῆς ἐπανερχόμεθα ἀμέσως κωδικοποιεῖται.

Εἶδομεν ἐξ ἄλλου ὅτι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν διεύθυνσιν ἢ τὰς διευθύνσεις. Αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ ὑπολογιστοῦ. Οἱ περισσότεροι ὑπολογισταὶ δέχονται ἐντολάς μιᾶς διευθύνσεως, ἀλλὰ ὑπάρχουν καὶ ὑπολογισταὶ μὲ ἐντολάς δύο, τριῶν ἢ καὶ περισσότερων διευθύνσεων. Ἡ I. B. M. 1620 ἔχει ἐντολάς δύο διευθύνσεων, μὲ σταθερόν μῆκος 12 θέσεων μνήμης.

Οἱ ὑπολογισταὶ μὲ ἐντολάς τριῶν διευθύνσεων ἐπιτρέπουν ἐπὶ παραδείγματι μὲ μίαν καὶ μόνην ἐντολήν, τὴν ἐυτέλεισιν τῆς πράξεως $\alpha + \beta = \gamma$ καὶ τὴν μεταφορὰν τοῦ ἐξαγομένου εἰς τὴν θέσιν μνήμης διά τὴν ὁποίαν προορίζεται, ἐνῶ ὁ ὑπολογιστὴς μὲ ἐντολάς μιᾶς διευθύνσεως

θὰ ἀπῆτει διὰ τὴν αὐτὴν πρᾶξιν τρεῖς ξεχωριστάς ἐντολάς.

Πρόγραμμα *sequentiel* ὡς *sequentiel*

Εἰς τὰς περισσότερας συγχρόνους μηχανάς τὸ πρόγραμμα ἀποτυπῶνται εἰς τὴν μνήμην τοῦ ὑπολογιστοῦ. Θέλομεν δέ ἐν συνεχείᾳ μέ τὴν ἀπλὴν ὑπόδειξιν εἰς τὸν ὑπολογιστὴν τῆς θέσεως τῆς πρώτης ἐντολῆς, νὰ εἶναι εἰς θέσιν αὐτός νὰ ἐυτελέσῃ ὅλο τὸ πρόγραμμα χωρὶς ἄλλην τινὰ ἐπέμβασιν. Τὸ ὅλον πρόβλημα συνίσταται ἐπομένως εἰς τὴν ἐξεύρεσιν τοῦ τρόπου μεταβάσεως τοῦ ὑπολογιστοῦ ἀπὸ μίαν ἐντολὴν εἰς μίαν ἄλλην.

Δύο λύσεις ἔχουν ἐξευρεθῇ πρὸς τοῦτο:

- Ὁ ὑπολογιστής εἶναι κατασκευασμένος κατὰ τέτοιον τρόπον ὥστε μετὰ τὴν ἐυτέλεσιν τῆς ἐντολῆς N , ἐυτελῇ τὴν ἀμέσως ἐπομένην ἐντολὴν $N+1$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ τελευταῖον στοιχεῖον τῆς ἐντολῆς (αὐτῶν ἀριθμός ἐντολῆς πού θὰ ἐυτελεσθῇ ἐν συνεχείᾳ) παραλείπεται καὶ τὸ πρόγραμμα καλεῖται *sequentiel*.

- Ὑπάρχει τὸ τελευταῖον στοιχεῖον τῆς ἐντολῆς, ὁπότε ὁ προγραμματισμός ὁρίζει τὴν ἐπομένην ἐντολὴν. Τὸ πρόγραμμα καλεῖται τότε μὴ *sequentiel*.

Πρόγραμμα μέ ὑπολογισμόν τῶν ἐντολῶν

Μετά τὴν ἐγγραφὴν τοῦ προγράμματος καὶ τῶν δεδομένων εἰς τὴν ταχεῖαν μνήμην ὑπάρχει τρόπος νὰ ὑπολογισθῇ ἡ σειρά τῶν ἐντολῶν πού θὰ χρησιμοποιηθοῦν ἐπὶ τῇ βάσει ἄλλου εἰδίου προγράμματος. Τὸ ὅλον πρόγραμμα καλεῖται τότε πρόγραμμα μέ ὑπολογισμόν τῶν ἐντολῶν.

Ἡ μέθοδος αὕτη χρησιμοποιεῖται κατὰ κανόνα ὅταν ἡ ἰδία σειρά ὑπολογισμῶν ἐφαρμόζεται εἰς μεγάλον ἀριθμὸν δεδομένων, τοποθετημένων κατὰ μίαν ὠρισμένην τάξιν εἰς τὴν μνήμην. Ἡ περίπτωσις δέ αὕτη ἐμφανίζεται συνήθως ὅταν εἰς τοὺς διαφορικοὺς μαθηματικοὺς τύπους χρησιμοποιῶνται δεῖνται.

Τὸ μειονέκτημα τῆς μεθόδου εἶναι ὅτι ἀπαιτεῖ περισσότερον χρόνον ὑπολογισμοῦ διότι ζητεῖται μεγαλύτερα ἐργασία ἀπὸ τὸν ὑπολογιστὴν. Ἐχει ὅμως τὰ ἐλθῆς σοβαρώτατα πλεονεκτήματα.

- Περιορίζει τὸν χρόνον προγραμματισμοῦ.

- Περιορίζει τὴν ἔκτασιν τοῦ προγράμματος.

- Δίδει ἓν πρόγραμμα πολὺ γεννωτέρας ἐφαρμογῆς.

Πράγματι, ἐπὶ τῇ βάσει ἐνός τοιούτου προγράμματος εἶναι δυνατόν νὰ ἐπεξεργασθῇ ὁ ὑπολογιστής ἓνα τυχόντα ἀριθμὸν δεδομένων, ἐγγεγραμμένων ἀπὸ μίαν τυχούσαν διεύθυνσιν μνήμης καὶ ἐυεῖθεν.

17.4.4 Ἀναπαράστασις καὶ ἐπεξεργασία τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς ἡλεκτρονικοὺς ὑπολογιστάς

Ὁ βασικός λόγος ἐπιμετρήσεως τῆς ἡλευτρονικῆς εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογιστάς εἶναι ἡ ταχύτης ἐυτελέσεως τῶν διαφορῶν πράξεων. Ἀλλὰ τὰ ἡλευτρονικά φαινόμενα, ὡς ἐν τῆς φύσεώς των, δύνανται νὰ χαρακτηρίσουν δύο μόνον καταστάσεις: ὑπαρξὶν ἢ μὴ μιᾶς ὠθήσεως, θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς μαγνητικῆς κατάστασιν ἢ ἡλευτρικῆς φόρτισιν ἐνός στοιχείου, ὑπαρξὶν ἢ μὴ μιᾶς διατρήσεως κ.λπ.

α) Κωδικοποιήσεις τῶν ἀριθμῶν

Διὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑπολογιστοῦ αἱ πληροφορίες κωδικοποιοῦνται εἰς ἓν σύστημα περιέχον δύο μόνον σύμβολα. Τὸ ἀριθμητικὸν αὐτὸ σύστημα εἶναι τὸ δυαδικόν.

Ὑπενθυμίζομεν τὴν ἔννοιαν τῆς βάσεως τῶν διαφορῶν ἀριθμητικῶν συστημάτων. Εἰς τὸ δευαδικὸν σύστημα ἡ ἀναπαράστασις ἐνός τυχόντος ἀριθμοῦ ἀπαιτεῖ ἐν γένει 10 διάφορα σύμβολα (0, 1, ..., 9) ἡ δὲ ἀριθμητικὴ παράστασις 2 4 5 1 3 συμβολίζει τὸν ἀριθμὸν

$$2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Ἐν γένει δέ, εἰς ἓν νυαδικὸν σύστημα, ἀπαιτοῦνται ν διάφορα σύμβολα διὰ τὴν ἀναπαράστασιν τυχόντος ἀριθμοῦ καὶ ἡ μετατόπισις ἐνός ἀριθμοῦ κατὰ μίαν θέσιν ἀριστερά, ἥτοι ἀπὸ τὴν θέσιν K-1 εἰς τὴν θέσιν K σημαίνει πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἐπὶ $v^{K/K-1}$

Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ὅτι δύο μόνον σύμβολα ἀρκοῦν διὰ τὴν ἀναπαράστασιν οἰουδήποτε ἀριθμοῦ εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα, τὸ ὁποῖον καὶ ὀνομάζεται συνηθέστερον κωδικὸς δυαδικὸς κωδὶξ, μέ χαρακτηριστικὰ:

-Δύο χρησιμοποιούμενα σύμβολα, 0, 1.

-Ταχύτητα ὑπολογισμῶν εἰς ὑπολογιστὴν.

-Μεγάλαν δυνατότητα συγκεντρώσεως πληροφοριῶν.

Πλὴν ὅμως, λόγῳ τοῦ ὅτι τὸ δυαδικὸν σύστημα εἶναι δύσχρηστον διὰ τὸν ἄνθρωπον, δίδονται αἱ πληροφορίες εἰς δευαδικὸν σύστημα καὶ ὁ μετασχηματισμὸς ἐκτελεῖται ἀπὸ τὸν ὑπολογιστὴν (δευαδικὸν εἰς δυαδικὸν κατὰ τὴν εἴσοδον τῶν πληροφοριῶν, δυαδικὸν εἰς δευαδικὸν κατὰ τὴν ἐξοδον τῶν ἀποτελεσμάτων). Ἐπειδὴ ὁ μετασχηματισμὸς αὐτὸς ἀπαιτεῖ πολὺν χρόνον, ἐπενοήθησαν ὠρισμένοι ἄλλοι κωδικὲς δυαδικοῦ συστήματος, οἱ ὁποῖοι καταλαμβάνουν μὲν μεγαλύτερον χωρὸν εἰς τὴν μνήμην, ἀλλὰ μετασχηματίζονται ταχύτερον εἰς δευαδικὸν σύστημα. Θὰ περιγράψωμεν τὸν συνηθέστερον ἐξ αὐτῶν, ὀνομαζόμενον "δευαδικὸν, κωδικοποιημένον εἰς δυαδικὸν", ἀναφέροντες δὲ ἐπίσης τοὺς κωδικούς "BIQUINAIRE", "MAJORE DE 3", "2421" κ.λπ.

Δευαδικός, κωδικοποιημένος εἰς δυαδικὸν

Χρησιμοποιοῦνται 4 δυαδικὰ σύμβολα διὰ τὴν ἀναπαράστασιν ἐκαστοῦ δευαδικοῦ, μέ ἀντίστοιχα "βάρη" 1, 2, 4, 8.

Μέ τὸ σύστημα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἀναπαραστήσωμεν 16 σύμβολα, διότι ὑπάρχουν 2^4 δυνατοὶ συνδυασμοὶ τῶν τεσσάρων δυαδικῶν συμβόλων. Διὰ τὰ δευαδικὰ ψηφία θὰ ἔχωμεν:

	1	2	4	8
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	1	1	0	0
4	0	0	1	0
5	1	0	1	0
6	0	1	1	0

Παρατηροῦμεν ὅτι συνήθως παραλείπεται καὶ τὸ σημεῖον + Δυνάμεθα οὕτω νά ἀναπαραστήσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμούς μεταξύ 10^{99} καὶ 10^{-99} , πρᾶγμα ἀπολύτως ἱκανοποιητικὸν εἰς τὰς περισσοτέρας τῶν περιπτώσεων.

γ) Ἀριθμητικαὶ πράξεις ἀπλῆς ἀυριβείας

Ἡ ἐυλογία δι' ἓνα δεδομένον ὑπολογιστὴν, τῆς χωρητικότητος ἐυάστως λέξεως, προσδιορίζει αὐτομάτως τὴν σχετικὴν ἀυρίβειαν τῶν ἀποτελεσμάτων ἐνὸς ὑπολογισμοῦ, μὴ λαμβανομένων φυσικῶν ὑπ' ὄψιν τῶν ασφαμάτων ἐξ αὐτῆς ταύτης τῆς χρησιμοποιουμένης ἀριθμητικῆς μεθόδου ἐπιλύσεως.

Λέγομεν ὅτι ὁ ὑπολογιστὴς ἐργάζεται μέ ἀπλὴν ἀυρίβειαν, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ τοὺς ὁποίους χειρίζεται ἔχουν μεγίστη χωρητικότητα μιᾶς ἢ δύο λέξεων, δηλαδὴ συνήθως 8 ἕως 12 χαρακτηριστικῶν ψηφίων (διὰ τὴν I. B. M. 1620 ἔχομεν εἰς τὴν ἀπλὴν ἀυρίβειαν οὕτω χαρακτηριστικὰ ψηφία).

Ἡ ἀπλὴ ἀυρίβεια δέν εἶναι ὅμως ἐπαριῆς εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις. Π. χ. ὅταν τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς ἀφαιρέσεως εἶναι πολὺ μικρότερον τῶν ὄρων τῆς ἀφαιρέσεως (λόγος 10^{-40}), ὡς συμβαίνει συχνά μέ τὸν ὑπολογισμόν μιᾶς ἐναλλασσομένης σειρᾶς διὰ τὰς μεγάλας τιμὰς τῆς τάξεως τῶν ὄρων αὐτῆς. Ἐπίσης ὅταν τὸ τελικὸν ἄθροισμα μιᾶς σειρᾶς ὄρων εἶναι πολὺ μεγαλύτερον ἐνὸς ἐυάστου. Εἰς δέ τοὺς ὑπολογισμούς μέ μητρῴα, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑπὸ ἐυτέλεισιν πράξεων εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς τάξεως τοῦ μητρώου καὶ αὐτὸ ἀπαιτεῖ μεγαλύτεραν ἀυρίβειαν ἐν μέρους τοῦ ὑπολογιστοῦ διὰ μεγάλης τάξεως μητρῴα.

δ) Ἀριθμητικαὶ πράξεις διπλῆς ἀυριβείας

Διὰ νά αὐξήσωμεν τὴν ἀυρίβειαν, διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν χρησιμοποιουμένων χαρακτηριστικῶν ψηφίων. Χρησιμοποιοῦμεν ἐπομένως δι' ἓναστον ἀριθμὸν τὴν χωρητικότητα δύο ἢ τεσσάρων λέξεων, δηλαδὴ συνήθως 16 ἕως 24 χαρακτηριστικὰ ψηφία. Αἱ ἀντίστοιχοι πράξεις ὀνομάζονται πράξεις διπλῆς ἀυριβείας καὶ ἐν γένει, διὰ νά ἐυτελεστοῦν ἀπὸ τὸν ὑπολογιστὴν, χρειάζεται εἰδικὸς προγραμματισμός. Ἡ συνήθως χρησιμοποιουμένη μέθοδος εἶναι ἡ ἐξῆς:

Ἐστῶσαν δύο ἀριθμοὶ x καὶ y , τῶν ὁποίων ἡ χωρητικότης ξεπερνᾷ τὰς δυνατότητας τῆς ἀπλῆς ἀυριβείας.

Τοὺς χωρίζομεν εἰς δύο (2) τμήματα, κατὰ τέτοιον τρόπον ὥστε τὸ δεῦτερον τμήμα νά περιέχῃ μόνον τὰ μικροῦ βάρους ψηφία, π. χ. τὸ 35 623,3256 χωρίζεται εἰς $x_1=35,623,0$ καὶ $x_2=0,3256$. Ἐχομεν ἐπομένως

$$x = x_1 + x_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

Αἱ πράξεις διπλῆς ἀυριβείας γίνονται κατὰ τὸν ἀνὸλουθον τρόπον:

-πρόσθεσις: $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$

-ἀφαίρεσις: $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$

-πολλαπλασιασμός: $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = (x_1 y_1) + (x_1 y_2) + (x_2 y_1)$

ὁ ὅρος $x_2 y_2$ παραλείπεται ἐνῶπιον τῶν τριῶν ἄλλων.

-διαίρεσις: $\frac{x}{y_1 + y_2} = \frac{x}{y_1} \left(\frac{1}{1 + y_2/y_1} \right) = \frac{x}{y_1} \left(1 - \frac{y_2}{y_1} \right)$

ε) Ἀριθμητικαὶ πράξεις μέ μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς

Ὅλοι οἱ σύγχρονοι ὑπολογισταὶ εἶναι εἰς θέσιν νά ἐπεξεργασθοῦν μιγαδικούς ἀριθμούς, ἀρκεῖ νά προβλεφθοῦν δύο λέξεις μνήμης δι' ἕνα στον ὅρον. Ἡ πρώτη λέξις περιέχει τό πραγματικὸν μέρος καὶ ἡ δευτέρα τό φανταστικόν.

Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν μιγαδικῶν ἔχουν ἀνάγκην εἰδικοῦ προγραμματισμοῦ, ὅπως καὶ αἱ πράξεις δυαδικῆς ἀριθμείας. Χρησιμοποιοῦνται κατὰ κανόνα οἱ ἀνωτέρω τύποι, διὰ

$$z = (x_1 + i x_2), \quad z' = (y_1 + i y_2)$$

$$(x_1 + i x_2) \pm (y_1 + i y_2) = (x_1 \pm y_1) + i(x_2 \pm y_2)$$

$$(x_1 + i x_2)(y_1 + i y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{x_1 + i x_2}{y_1 + i y_2} = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} [(x_1 y_1 + x_2 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)]$$

ζ) Στοιχεῖα ἀλγέβρας τοῦ BOOLE

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ δυαδικοῦ συστήματος λογισμοῦ ἀνεπτύχθη ἡ λογιμὴ ἀλγεβρα, καλουμένη ἐπίσης ἀλγεβρα τοῦ BOOLE, διὰ τῆς ὁποίας εἶναι δυνατόν νά θεωρῶμεν ὑπὸ μορφήν ἐξισώσεων μίαν σειρὰν λογικῶν συλλογισμῶν. Ἡ ἀλγεβρα αὕτη βασίζεται εἰς τήν ἀνωτέρω ἀρχήν:

-Ἐάν μία πρότασις εἶναι ἀληθής, παρίσταται μέ τό σύμβολον 1.

-Ἐάν δέν εἶναι ἀληθής, παρίσταται μέ τό σύμβολον 0.

Οἱ κανόνες τῆς ἀλγέβρας αὐτῆς χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα ἀπό τοὺς ἡλεутρονικούς ὑπολογιστάς, διότι εἰς τὰ περισσότερα προβλήματα ὑπάρχουν πολλαὶ λογικαὶ πράξεις καὶ διερευνήσεις ἐπὶ διαφόρων συνθημῶν.

17.4.5 Φάσεις προετοιμασίας ἐνὸς προβλήματος διὰ τὸν ἡλεκτρονικὸν ὑπολογιστὴν ἀριθμητικοῦ τύπου

Ὅταν ζητῆται ἡ ἐπίλυσις ἐνὸς προβλήματος ἀπὸ τὸν ἡλεутρονικὸν ὑπολογιστὴν ἀριθμητικοῦ τύπου, πρέπει νά ἀμολουθῇ μία ὀρισμένη σειρά ἐνδιαμέσων ἐργασιῶν, αἵτινες ἔχουν ὡς τελευταίαν φάσιν τὴν σύνταξιν τοῦ προγράμματος διὰ τὸν ὑπολογιστὴν. Δυνάμεθα ἐν γένει νά διαχωρίσωμεν τρεῖς κυρίως φάσεις ἐργασίας.

α) Ἀριθμητικὴ ἀνάλυσις

Πρόκειται διὰ τὴν ἐμλογὴν τῆς καταλληλοτέρας μεθόδου ἀριθμη-

τιμῆς ἀναλύσεως πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ ζητουμένου προβλήματος. Μὲ ἄλλους λόγους, δεδομένου ὅτι ὁ ὑπολογιστὴς εἶναι ἱκανὸς διά τὴν ἐυτέλειαν μόνον ὠρισμένων στοιχειωδῶν πράξεων (π.χ. τῶν τεσσάρων ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ συγκρίσεων) πρέπει τὸ ὅλον πρόβλημα νὰ ἀναχθῇ εἰς μίαν τοιαύτην σειρὰν στοιχειωδῶν πράξεων.

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα εἶναι πολλάκις δυνατόν νὰ λυθῇ μὲ πολλὰς μεθόδους ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως καὶ τότε ἡ δυσκολία ἔγκειται εἰς τὴν ἐξεύρεσιν τῆς καλλιτέρας, μὲ κριτήρια τὴν ταχύτητα ὑπολογισμοῦ, ἄρα οἰκονομίαν χρόνου μηχανῆς καὶ τὴν ἀκριβείαν τῶν ἀποτελεσμάτων.

Ἡ φάσις αὕτη περιλαμβάνει ὑπολογισμόν σφαλμάτων καὶ μελέτας συγκρίσεως, πρέπει δέ κατ' αὐτὴν νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὁ χρησιμοποιοῦμενος ὑπολογιστής, δηλαδή ἡ ἐσωτερικὴ του ὀργάνωσις καὶ χωρητικότης, ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἀκριβεία του.

β) Λογικὴ ἀνάλυσις

Μετά τὴν ἐυλογὴν τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως ἑνὸς προβλήματος καὶ τὴν πλήρη ἀριθμητικὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ, εὐρισκόμεθα ἐνώπιον ἑνὸς ὠρισμένου ἀριθμοῦ σχέσεων, διά τὴν ὁμαλὴν ἐπίλυσιν τῶν ὁποίων πρέπει νὰ προβλεφθοῦν ὅλαι αἱ δυνάμεναι νὰ προυψουν περιπτώσεις κατὰ τὴν πορείαν τῆς ἐπιλύσεως των καὶ νὰ δοθῇ εἰς ἐκάστην περίπτωσιν ἡ ἀπολουθητέα συνέχεια τῆς ἐπιλύσεως.

Διὰ τὴν παράστασιν τῆς λογικῆς αὐτῆς ἀλύσεως τῶν ὑπολογισμῶν χρησιμοποιεῖται ἓν σχετικὸν διάγραμμα, τὰ σύμβολα τοῦ ὁποίου εἶναι θέμα προσωπικῆς ἐυλογῆς τοῦ προγραμματιστοῦ. Τὸ διάγραμμα αὐτὸ καλεῖται λειτουργικὸν διάγραμμα ἢ γεννικὸν διάγραμμα.

Αἱ συγκρίσεις παρίστανται συνήθως διά υἱύλων, μὲ μίαν εἴσοδον καὶ δύο ἐξόδους, ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὰς ἐν τῆς συγκρίσεως προυπτούσας δύο δυνατάς κατευθύνσεις τῆς συνεχείας τῆς λύσεως. Εἰς τὴν συνέχειαν θὰ δώσωμεν παραδείγματα γεννικῶν διαγραμμάτων μετὰ τῶν συνηθεστέρων χρησιμοποιουμένων τρόπων συμβολισμοῦ. Ἐν γένει πάντως, ἓν τοιοῦτον διάγραμμα ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία εἶδη υἱάδων:

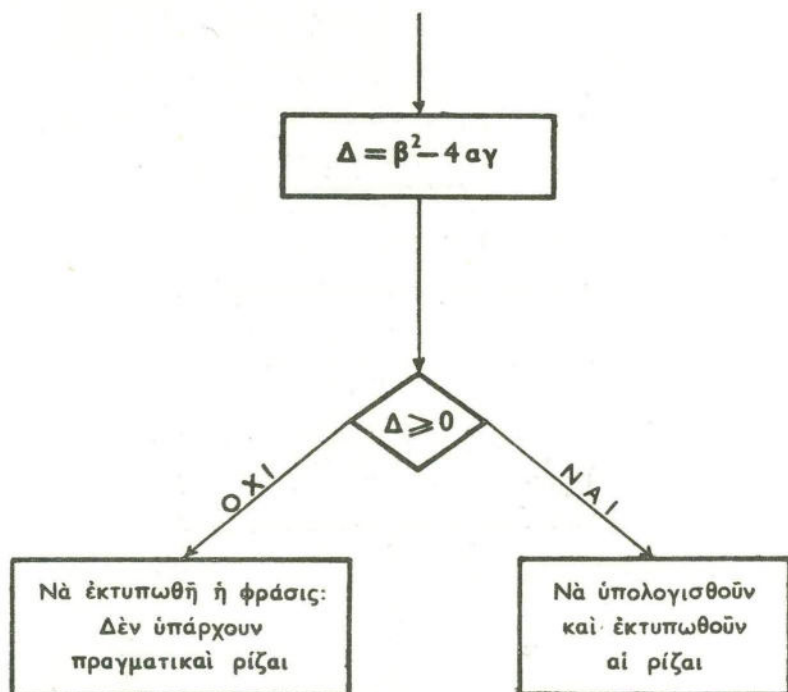
- Κυρίου υἱάδους: Εἶναι ἡ ἀπλουστέρα μορφή καὶ δίδει ἀπλῶς τὴν συνέχειαν τῶν ὑπολογισμῶν.

- Μεταβαλλομένων υἱάδους: Μία σειρά ὑπολογισμῶν Δ εὐρίσμεται ἐντὸς μεταβαλλομένου υἱάδου, ὅταν ἡ ἐυτέλεισις των ἐξαρτᾶται ἀπὸ λογικὰς πράξεις, δηλαδή ἐάν πραγματοποιῶνται ὠρισμέναι συνθῆμαι νὰ ἐυτελεσθοῦν οἱ Δ , ἐάν ὅχι νὰ μὴν ἐυτελεσθοῦν. Δυνάμεθα οὕτω νὰ ἔχωμεν πολλοὺς μεταβαλλομένους υἱάδους, περιλειομένους τοὺς μὲν ἐντὸς τῶν δέ, καὶ διευθυνομένους ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας λογικὰς συγκρίσεις.

Παράδειγμα:

Ζητοῦνται αἱ πραγματικαὶ ρίζαι τῆς ἐξίσσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Τὸ γεννικὸν διάγραμμα θὰ εἶναι:



- Ἐπαναληπτιμοὺς / υἱάδους: Ἡ περίπτωση αὐτὴ ἐμφανίζεται ἐπίσης συχνότατα. Μία σειρά ὑπολογισμῶν Δ πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ ἕνα ὠρισμένον ἀριθμὸν φορῶν, ἕως ὅτου ἐπιτευχθῇ ἡ ἐπικητουμένη ἀκρίβεια, ἢ ἕως ὅτου ἐξαντληθοῦν ὅλα τὰ ὑπὸ ἐπεξεργασίαν δεδομένα τῆς σειρᾶς. Τοποθετεῖται τότε ἡ Δ ἐντὸς ἐπαναληπτιμοῦ υἱάδου, ὁ ὁποῖος περατοῦται διά μιᾶς πράξεως διαμοπῆς τῆς συνεχεῖας, μέ ἀποστολὴν ματόπιν προηγουμένου ἐλέγχου μιᾶς ὠρισμένης συνθήκης ἢ συνθημῶν.

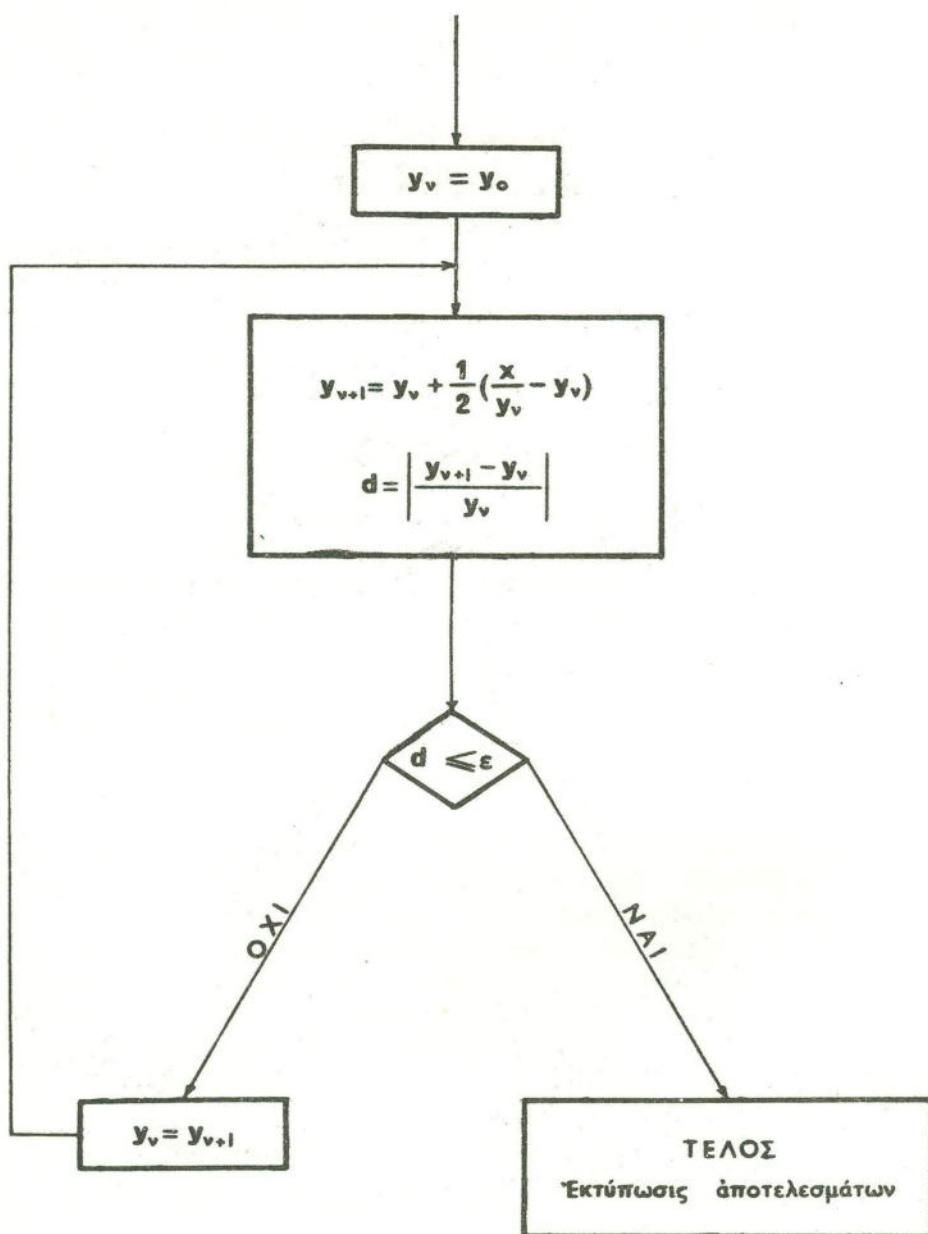
Παραδείγματα:

1) Ἐστω ὅτι ζητεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῆς τετραγωνιῆς ρίζης ἀριθμοῦ τινός x , ἥτοι ζητεῖται ὁ $y = \sqrt{x}$. Ἐφαρμόζεται ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Νεύτωνος

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y_n} - y_n \right)$$

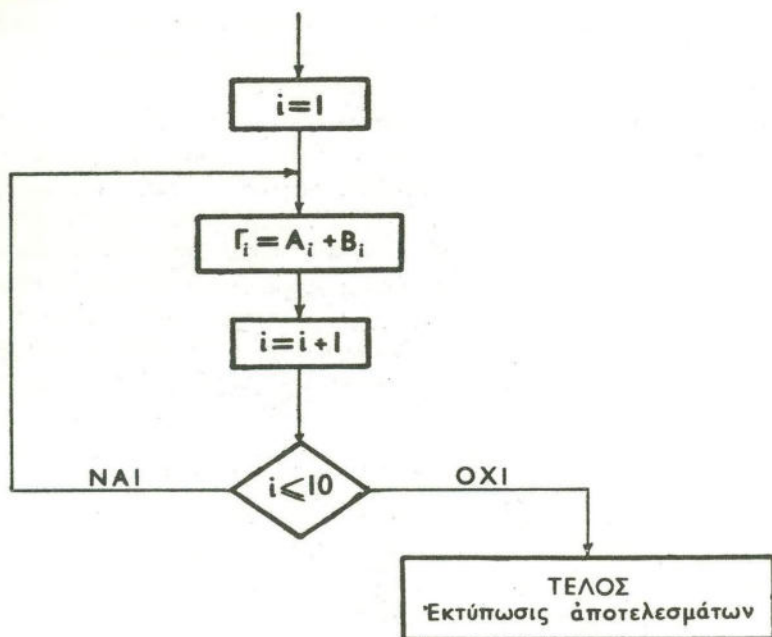
Ἐστω ε ἡ ζητουμένη σχετικὴ ἀκρίβεια καὶ y_0 ἡ ἐυλεγεῖσα ἀρχικὴ τιμὴ διά τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ρίζης.

Τὸ γενικὸν διάγραμμα θὰ εἶναι:



2) Ἐστω ὅτι θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν τήν $T_i = A_i + B_i$ διὰ i μεταβαλλόμενον ἀπό 1 ἕως 10.

Τό γενικόν διάγραμμα θά εἶναι:



γ) Προγραμματισμός

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ καταρτισθέντος λειτουργικοῦ ἢ γενικοῦ διαγράμματος, γράφεται ἐν συνεχείᾳ τὸ πρόγραμμα. Ἐπομένως ὁ προγραμματισμός ἀποτελεῖ τὸ ἐπόμενον τῆς καταρτίσεως τοῦ διαγράμματος στάδιον.

1) Γλῶσσα μηχανῆς

Ὁ ριζικώτερος τρόπος προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ἐγγραφή τῆς σειρᾶς τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας ὀφείλει νὰ ἐτελέσῃ ὁ ὑπολογιστής, εἰς γλῶσσαν ἀπ' εὐθείας κατανοητὴν ἀπὸ τὴν μηχανήν. Ἡ γλῶσσα αὕτη τοῦ προγραμματισμοῦ καλεῖται γλῶσσα μηχανῆς, εἶναι ἐν γένει ἀριθμητικὴ (δὲν περιέχει ἀλφαριθμητικούς χαρακτήρας) καί, συνήθως, δυαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως. Οἱ κώδικες τῆς γλώσσας μηχανῆς ἀναλύονται ἀπ' εὐθείας ἀπὸ τὰ ὄργανα διευθύνσεως.

2) Ὑποπρογράμματα

Ὑπάρχουν ὠρισμένα τμήματα μιᾶς σειρᾶς ὑπολογισμῶν, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται πολλές φορές κατὰ τὴν διάρθρωσιν ἐνός καὶ τοῦ αὐτοῦ προγράμματος, ἢ ἐμφανίζονται συχνὰ εἰς τὰ διάφορα προγράμματα. Αὐτὸ παρατηρεῖται ἰδίως εἰς τὰ ἐπιστημονικὰ προγράμματα, δηλαδὴ εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῶν ὑπολογιστῶν ἐπὶ τῶν προβλημάτων τῶν θεωρητικῶν ἐπιστημῶν. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς, τὰ ἐπαναλαμβανόμενα τμήματα ὑπολογισμῶν προγραμματίζονται ἅπαρ διὰ παντός καὶ ἀποθηκεύονται εἰς ἓν ὠρισμένον τμήμα τῆς μνήμης. Ὅσάκις δὲ ὑπάρχει ἀνάγκη χρησιμοποιεῖσθαι τῶν, τὸ κυρίως πρόγραμμα δι' εἰδικῆς ἐντολῆς μεταβαίνει πρὸς συνέχισίν του εἰς τὸ σχετιζόμενον ἀποθηκευμένον τμήμα ὑποπρογράμματος. Κερδίζεται οὕτω σημαντικὸς χῶρος εἰς τὴν μνήμην ὡς καὶ χρόνος προγραμματισμοῦ. Τὰ ἀποθηκευμένα αὐτὰ τμήματα ὑπολογισ-

σμῶν, υαλοῦνται ὑποπρογράμματα. Ἡ χρησιμοποίησις των δημιουργεῖ ὠρισμένα προβλήματα, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται ὡς συνθῆκαι χρησιμοποιοῦσας ἐνός ὑποπρογράμματος.

Τό πρόβλημα ἔχει ὡς ἐξῆς: Πρέπει νά καταστῇ δυνατή ἡ ἐπιμοιωνία δεδομένων καί ἀποτελεσμάτων μεταξὺ κυρίου προγράμματος καί ὑποπρογραμμάτων. Δύο λύσεις εἶναι δυναταί:

- Ὁργανώνομεν τόν ὑπολογιστήν οὕτως ὥστε τό κύριον πρόγραμμα νά ταυτοποιῇ τὰ δεδομένα εἰς ὠρισμένας, εἰδικῶς ἐυλεγείσας, θέσεις μνήμης καί νά ἀναζητῇ τὰ ἀποτελέσματα εἰς ὠρισμένας ἐπίσης διευθύνσεις μνήμης.

Ἡ λύσις αὕτη ἐφαρμόζεται ὅταν τὰ πρὸς ἐπιμοιωνίαν δεδομένα καί ἀποτελέσματα εἶναι μιῶς καί σχετικῶς σταθερᾶς ἐυτάσεως, π. χ. ὑπολογισμός στοιχειῶδων συναρτήσεων, ὅπως e^x , $\log x$, κ.λπ.

- Ὁρίζομεν ὠρισμένας μνήμας εἰς τὰς ὁποίας τό κύριον πρόγραμμα ταυτοποιεῖ καί καταγράφει ὄχι πλέον τὰ δεδομένα, ἀλλά τήν διεύθυνσιν τῆς ἀρχῆς των, τόν ὄγκον πού καταλαμβάνουν καί τήν διεύθυνσιν ἀπὸ τήν ὁποίαν καί ἐφεξῆς τό ὑποπρόγραμμα θά καταγράψῃ τὰ ἀποτελέσματα.

Ἡ λύσις αὕτη ἐφαρμόζεται ὁσάκις τὰ ὑποπρογράμματα υαλοῦν μέγαν ἀριθμόν δεδομένων καί ὑπολογίζουν πλῆθος ἀποτελεσμάτων (π.χ. πολλαπλασιασμός μητρώων) μέ ἐπὶ πλέον μεταβλητόν ὄγκον δεδομένων καί ἀποτελεσμάτων.

Ἡ δευτέρα αὕτη μέθοδος ἔχει γενικευθῇ εἰς ὠρισμένους ὑπολογιστάς διὰ τῆς χρήσεως εἰδικοῦ κώδικος, ὁ ὁποῖος συμβολίζει ὅτι ἡ σημειωμένη διεύθυνσις δέν εἶναι ἡ τοῦ δεδομένου, ἀλλά ἡ τῆς μνήμης τῆς περιεχοῦσης τήν διεύθυνσιν τοῦ δεδομένου. Αὐτό ὀνομάζεται ὑποκατεστημένη διεύθυνσις. Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἀποφεύγονται μεγάλες σειρές ὑπολογισμοῦ διευθύνσεων εἰς τὰ ὑποπρογράμματα, ἐξ οὗ προκύπτει ἓν σοβαρόν κέρδος χρόνου εἰς τόν προγραμματισμόν καί εἰς τήν ἐν συνεχείᾳ ἐμετάλλευσιν τοῦ προγράμματος.

3) Βιβλιοθήκη ὑποπρογραμμάτων

Κατ' ἀρχήν τίθενται ὡς ὑποπρογράμματα αἱ συνθέστερον χρησιμοποιοῦμεναι στοιχειῶδεις συναρτήσεις ὅπως:

- Ἐυθετιῇ συνάρτησις.

- Λογάρισμοι.

- Τετραγωνικαί καί κυβικαί ρίζαι.

- Κυκλικαί καί ὑπερβολικαί συναρτήσεις, ὡς καί αἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν.

- Συναρτήσεις BESSEL κ.λπ.

Ἄλλην κατηγορίαν ὑποπρογραμμάτων ἀποτελοῦν αἱ κλασσικαί πράξεις ἐπὶ τῶν μητρώων. Πολλαπλασιασμός, πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, ἀντιστροφή, κ.λπ.

Ὑπάρχουν ἐπίσης καί ὠρισμένα ἄλλα ἔτοιμα προγράμματα εἰς ἐκαστήν βιβλιοθήκην ὑποπρογραμμάτων, τὰ ὁποῖα δύνανται νά χρησιμοποιηθοῦν ἐντός τοῦ κυρίου προγράμματος, παρ' ὅλον ὅτι ἀποτελοῦν ὁλόκληρον πρόγραμμα, διότι διαθέτουν τὰς ἀπαραιτήτους πράξεις εἰσόδου καί ἐξόδου εἰς τό κύριον πρόγραμμα. Εἰς τήν κατηγορίαν αὐτὴν εὐρίσκομεν:

- Ὑπολογισμὸν υἰρῶν τιμῶν καὶ υἰρῶν διανυσμάτων ἐνός μητρώου.
- Ἐπίλυσιν γραμμικῶν συστημάτων.
- Ἐπίλυσιν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων.
- Ὑπολογισμὸν ὀλουληρωμάτων ἢ ὀλουλήρωσιν διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἂν καὶ διὰ τὰς περιπτώσεις αὐτάς ὁ προγραμματισμός τῆς πρὸς ὀλουλήρωσιν συναρτήσεως πρέπει νὰ ἐτελεῖται καθ' ἐνάστην φοράν.
- Γραμμικὸν προγραμματισμὸν.
- Στατιστικούς ὑπολογισμούς, ἥτοι συσχετίσιν κ.λπ.

Ἡ ἐπίλυσις ἐνός τεχνικοῦ προβλήματος ἀνάγεται οὕτω πολλάκις εἰς ἀπλὴν συγιέντρωσιν καὶ σύνθεσιν ἐτοιμῶν ὑποπρογραμμάτων καὶ προγραμμάτων ἐν τῆς βιβλιοθήκης τοῦ ὑπολογιστοῦ.

4) Τὰ συστήματα αὐτοπρογραμματισμοῦ

Ἡ κατάρτισις ἐνός προγράμματος εἰς γλῶσσαν μηχανῆς εἶναι μακρὰ καὶ ἐπιπλέον, λόγῳ τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ τῶν ἀπαιτουμένων ἐντολῶν καὶ τῆς χρήσεως πολυπλόκου κώδικος. Διὰ τοῦτο οἱ κατασκευασταὶ τείνουν νὰ ἀπλοποιήσουν τὸν προγραμματισμὸν, διὰ τῆς χρήσεως συμβολικῶν προγραμματισμῶν, οἱ ὅποιοι πλησιάζουν πολὺ περισσότερον τὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν καὶ γλῶσσαν. Ὁ τρόπος αὐτός προγραμματισμοῦ καλεῖται αὐτοπρογραμματισμός καὶ ὑπάρχουν διάφορα συστήματα καὶ μέθοδοι ἐφαρμογῆς του.

Τὰ πλεονεκτήματά του εἶναι πολλά: Ταχύτης προγραμματισμοῦ, εὐκολος ἐμμάθησις καὶ ἐπομένως δυνατότης κατάρτισεως προγραμμάτων ἀπὸ ἀνεξιδιευτούς μηχανικούς ἢ ἄλλους ἐπιστήμονας, ἐλάττωσις τῶν σφαλμάτων κ.λπ. Πλὴν ὅμως ἕνας κινδύνος προγραμματιστῆς εἰς γλῶσσαν μηχανῆς κερδίζει κατὰ κινδύνον εἰς χρόνον μηχανῆς ἐναντι ἐνός προγράμματος, συνταχθέντος εἰς σύστημα αὐτοπρογραμματισμοῦ καὶ αὐτὸ διότι ταυτοποιεῖ καλύτερον τὰς ἐντολάς εἰς τὴν μνήμην καὶ ἐπιτυγχάνει ταχύτεραν χρῆσιν των. Ἐνδεικτικῶς δίδομεν τὴν κατωτέρω παράθεσιν στοιχείων δι' ἓν μέσης ἐκτάσεως πρόγραμμα.

Γλῶσσα μηχανῆς

Διάρκεια προγραμματισμοῦ	3 μῆνες
Ἀριθμοὶ ἐντολῶν	8.000
Χρόνος μηχανῆς	T

Αὐτοπρογραμματισμός μέσης μορφῆς (π.χ. S. P. S).

Διάρκεια προγραμματισμοῦ	8 ἡμέρες
Ἀριθμὸς ἐντολῶν	500
Χρόνος Μηχανῆς	1,2 ἕως 1,4 T.

Αὐτοπρογραμματισμός ἐξελιγμένος (π.χ. FORTRAN).

Διάρκεια προγραμματισμοῦ	1 ἡμέρα
Ἀριθμὸς ἐντολῶν	30
Χρόνος μηχανῆς	1,6 ἕως 2 T.

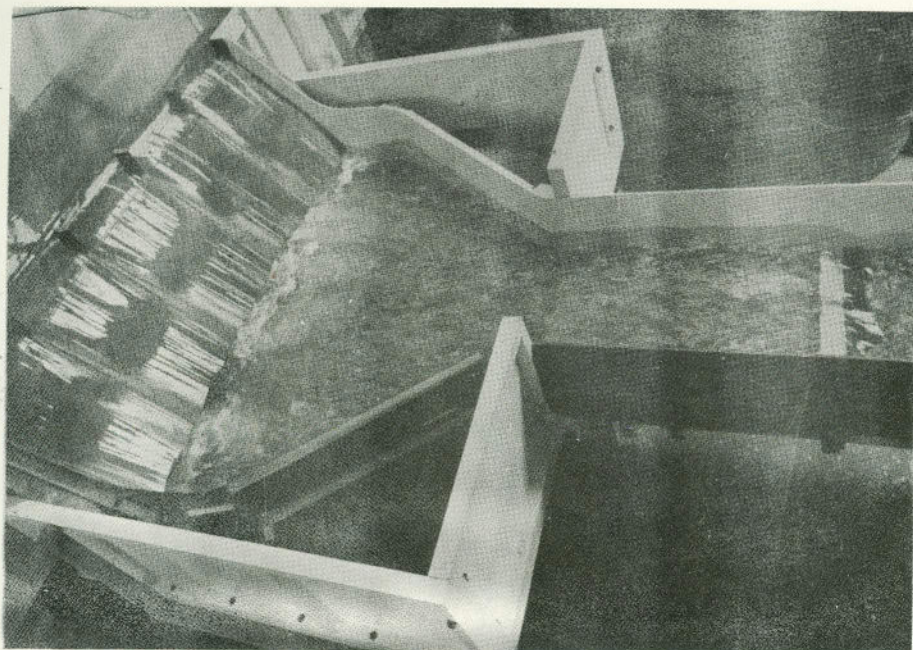
Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ὅτι ἐάν ἓν πρόγραμμα πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ συχνότατα (π.χ. ὑποπρογράμματα) εἶναι σιόπιμον νὰ συνταχθῇ ἀπ' ἐυθείας εἰς γλῶσσαν μηχανῆς. Εἰς ἐναντίαν περίπτωση, προτιμᾶται ἡ σύνταξις εἰς αὐτοπρογραμματισμὸν, ἐν γένει δέ ἡ ἐκλογὴ μεταξύ μεθόδων προγραμματισμοῦ εἶναι θέμα οἰκονομικῆς ἐκμεταλλεύσεως τοῦ προγράμματος.

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, τό πρόγραμμα εἰς σύστημα αὐτοπρογραμματισμοῦ μεταφράζεται ἀπό εἰδιόν τμήμα τοῦ ὑπολογιστοῦ, ὀνομαζόμενον "COMPILER" εἰς γλῶσσαν μηχανῆς.

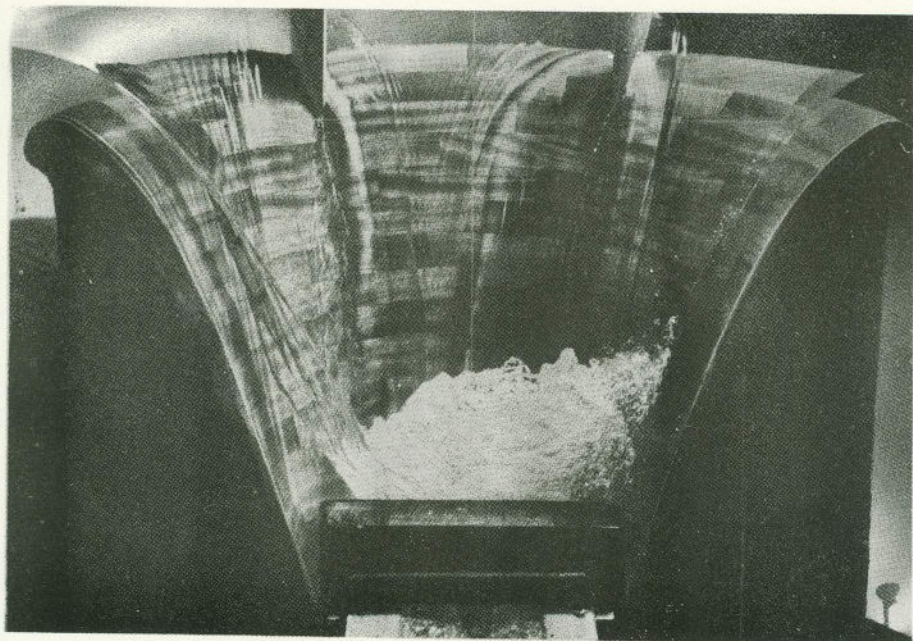
5) Τελιυή φάσις προγραμματισμοῦ. "Ἐλεγχος καὶ ἐμετάλλευσις.

Μετὰ τήν σύνταξιν ἑνός προγράμματος ἔπεται ἡ τελιυή ταυτοποίησις του, δηλαδή ἡ διόρθωσις τῶν διαφορῶν σφαλμάτων του. Ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι πολλάκις ἐπιτόνος, διὰ τόν λόγον δέ αὐτόν ὑπάρχουν εἰδιυά προγράμματα, ὀνομαζόμενα προγράμματα ἀναλύσεως τὰ ὁποῖα ἐυτελοῦν τὰς ἐντολάς μίαν πρὸς μίαν καὶ ἐυτυπῶνουν εἰς ἕναστον βῆμα ὑπολογισμοῦ τοὺς ὑπολογιστέους ὄρους, τὰ ἀποτελέσματα ὡς καὶ τήν νατάστασιν τοῦ ὑπολογιστοῦ μεθ' ἐυάστην πρᾶξιν. Τὰ προγράμματα αὐτά ἐπιτρέπουν ἐπίσης τήν ἄμεσον εὔρεσιν τῶν σφαλμάτων κῶδιος. Ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῶν εὑρίσκειται καὶ διορθοῦται τό μεγαλύτερον πληθος τῶν σφαλμάτων, ὑπολείπονται δέ μόνον τὰ σφάλματα εἰς τήν μαθηματιυήν ἐυφρασιν τοῦ προγράμματος (π. χ. πρόσθεσις ἀντὶ ἀφαιρέσεως) τὰ ὁποῖα δέν ἐμποδίζουν μὲν τήν ὁμαλήν ἐυτέλεσιν τοῦ προγράμματος, δίδουν ὁμως τελειῶς ἐσφαλμένα ἀποτελέσματα. Μόνος ἀσφαλῆς τρόπος διὰ τόν ἔλεγχον τῶν σφαλμάτων τοῦ τύπου αὐτοῦ εἶναι ἡ εὔρεσις ἑνός μεμονωμένου ἐξαγομένου, δι' ἄλλης μεθόδου ἔστω καὶ μικρότερας ἀκριβεῖας καὶ σύγυρισις του με τό ἀντίστοιχον ἐξαγόμενον τοῦ ὑπολογιστοῦ.

Μετὰ τό πέρας ὅλων τῶν ἐλέγχων τό πρόγραμμα εἶναι ἔτοιμον δι' ἐμετάλλευσιν. Αὕτη εἶναι θέμα ὀργανώσεως καὶ ἐυτάσεως τῆς ἐταιρίας τοῦ ὑπολογιστοῦ. Αἱ μεγαλύτεραι σῆμερον ἐταιρίαι ὑπολογιστῶν χρησιμοποιοῦν εὔρύτατα προγράμματα συνταχθέντα εἰς διαφορούς χώρας καὶ ἀπό διαφορούς ὁμίλους εἰδιυῶν, μέ σιοπόν, ὅσον τό δυνατόν μεγαλύτεραν ἀπόσβεσιν τῶν δαπανῶν διὰ τήν σύνταξιν αὐτῶν καὶ ἀποτελέσματα μίαν πλουσιωτάτην βιβλιοθήην προγραμμάτων δι' ἕνα ἕναστον τύπον ὑπολογιστοῦ.



Ροή άνωθεν έυχειλιστοῦ τοῦ φράγματος
εἰς CORNWALL, κλίμαξ 1/20



Ροή άνωθεν έυχειλιστοῦ τοῦ φράγματος
εἰς LAMABOARD, κλίμαξ 1/20

Μελέται επί όμοιωμάτων



Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ Τ Ρ Ι Τ Ο Υ Μ Ε Ρ Ο Υ Σ

III.1

Ἐπίπεδος ροή προκύπτει ἀπὸ τὴν συνύπαρξιν μιᾶς ὁμοιομόρφου ροῆς, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα Ox , μιᾶς πηγῆς, κειμένης εἰς τὸ A' ($x=-a, y=0$) καὶ ἑνὸς φρέατος ἀντιθέτου παροχῆς, κειμένου εἰς τὸ A ($x=a, y=0$) ἔνθα $a > 0$.

α) Δείξατε ὅτι ὑπάρχει μιὰ κλειστὴ γραμμὴ ροῆς ἐμφανίζουσα δύο ἄξονας συμμετρίας.

β) Ὑπολογίσατε τὸ μῆκος αὐτῶν τῶν ἄξωνων καὶ τὰς ταχύτητας εἰς τὰς κορυφὰς τῆς κλειστῆς αὐτῆς καμπύλης.

III.2

Θεωροῦμεν εἰς τὴν περιοχὴν $y > 0$ μίαν ροὴν καθοριζομένην ἀπὸ τὸ μιγαδικὸν δυναμικόν

$$f(z) = \alpha\pi V \coth \frac{\alpha\pi}{z}$$

α) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ροὴ εἶναι ὁμοιομορφος εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ὅτι ὁ κύκλος ἀκτῖνος α , ὁ ἐφαπτόμενος τοῦ ἄξονος Ox εἰς τὸ O καὶ ὁ ἄξων τῶν x εἶναι γραμμαὶ ροῆς.

β) Νὰ εὐρεθῇ ἡ διανομὴ τῶν ταχυτήτων κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν x .

γ) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης εἰς τὸ σημεῖον $x=0, y=2a$ καὶ νὰ ἐρμηνευθῇ ἡ προκύπτουσα ἐν γένει ροή.

III.3

Θεωροῦμεν δύο ἐπιπέδους κινήσεις ἑνὸς ἀσυμπίεστου ρευστοῦ μονόμους καὶ ἀστροβίλους, ὀριζόμενας εἰς τὴν ἰδίαν περιοχὴν (Δ) . Γνωρίζομεν τὰ δίκτυα τῶν γραμμῶν ροῆς $\psi_1 = \nu h$ καὶ $\psi_2 = \mu h$ ($h = \text{σταθ.} \nu$ καὶ μ ἀκέραιαι μεταβληταί) μιᾶς ἐκάστης τῶν δύο θεωρουμένων κινήσεων.

α) Πῶς θὰ σχεδιασθοῦν κατὰ τρόπον ἀπλὸν αἱ γραμμαὶ ροῆς τῆς συνισταμένης τῶν δύο θεωρουμένων κινήσεων;

β) Δείξατε ὅτι, ἂν h εἶναι ἀρκούντως μικρὸν, δυνάμεθα ἀπὸ τὴν χά-

ραξιν τῶν γραμμῶν ροῆς νά ἐκτιμήσωμεν εἰς πρώτην προσέγγισιν τὰς ταχύτητας τῆς κινήσεως.

γ) Νά γίνῃ ἐφαρμογή τῶν ἄνωτέρω διὰ τήν περίπτωσιν ροῆς συνισταμένης ἐκ μιᾶς πηγῆς καί μιᾶς ὁμοιομόρφου ροῆς.

III.4

Ἐξετάζομεν τήν ροήν τῆς ὁποίας τό μιγαδικόν δυναμικόν $f(z)$ καθορίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$z = f + e^f$$

α) Δείξατε ὅτι ὁ ἄξων τῶν x εἶναι γραμμῇ ροῆς καί μελετήσατε τήν μεταβολήν τῆς ταχύτητος κατὰ μήκος τοῦ ἄξονος αὐτοῦ.

β) Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν δύο γραμμαὶ ροῆς, ὀριζόμεναι ἀπὸ τὰς εὐθείας $y = \pm \pi$.

γ) Μελετήσατε συνοπτικῶς τήν ροήν καί ἐρμηνεύσατε αὐτήν ἐν γένει.

III.5

Μελετήσατε τήν ροήν τήν ὀριζομένην ἐκ τῆς συναρτήσεως

$$z = \frac{1-n}{n} (1 - e^{-nt}) + e^{(1-n)f}$$

ἐνθα $0 < n < 1/2$.

Πρὸς τοῦτο ἐξετάσατε κατ'ἀρχήν τὰς ὁριακὰς περιπτώσεις $n=0$ καί $n=1/2$ καί συγκρίνατε αὐτάς μὲ μελετηθείσας ἤδη γνωστὰς περιπτώσεις.

III.6

Θεωροῦμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν Z τήν ροήν (E) , προκύπτουσιν ἐκ τῆς συνθέσεως μιᾶς ὁμοιομόρφου ροῆς ταχύτητος V , παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα $O'Z$ καί μιᾶς πηγῆς κειμένης εἰς τήν ἀρχήν O' , τοιαύτης ὥστε τὸ σημεῖον B τεταγμένης $Z=-a, (a>0)$, νά εἶναι σημεῖον μηδενικῆς ταχύτητος.

Ὁ μετασχηματισμός $Z = z - 2a - \frac{a^2}{z}$ πραγματοποιεῖ τήν σύμμορφον ἀπει-

κόνισιν τοῦ ἐξωτερικοῦ κύκλου (C_0) ἀκτῖνος a , μὲ κέντρον εὕρισκόμενον εἰς τήν ἀρχήν O τοῦ ἐπιπέδου τῶν z πρὸς τὸ ἐπίπεδον Z τὸ ὁποῖον διασχίζεται ἀπὸ τήν λωρίδα $-4a \leq x \leq 0$, ἡ ὁποία χαράσσεται ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος τοῦ ἐπιπέδου τῶν Z .

α) Νά μελετηθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον z ἡ ροή E' , ὁμόλογος τῆς ροῆς (E)

β) Νά εὐρεθῇ ἡ διανομὴ ταχυτήτων καί πιέσεων κατὰ μήκος τοῦ κύκλου (C_0) καί ἡ μορφή τῶν γραμμῶν ροῆς καί ἡ ἐρμηνεία τῆς ροῆς ἐν γένει.

III.7

Μελετήσατε τήν ροήν, τήν ὀριζομένην ὑπὸ τοῦ μιγαδικοῦ δυναμικοῦ

$$f(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln th \frac{\pi z}{2h}$$

καὶ ἐρμηνεύσατε αὐτὴν ἐν γένει.

Δύσεις: Σημειακὸς στροβιλισμὸς μεταξύ τῶν ὀσὸ ἐπιπέδων $z = \pm \frac{h}{2}$

III.8

Νά μελετηθῇ ἡ ροή μιᾶς πηγῆς μεταξύ δύο παρειῶν Ox, Oy ('Αναχῶντε εἰς τήν περίπτωσιν μιᾶς ἐπιπέδου παρειᾶς τῇ βοήθειᾳ τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως).

Ἐν συνεχείᾳ νά μελετηθῇ ἡ περίπτωσις μιᾶς πηγῆς, κειμένης μεταξύ δύο παρειῶν σχηματιζουσῶν τυχούσαν γωνίαν.

Μελετήσατε ἐπίσης τήν περίπτωσιν μιᾶς σημειακῆς δυνῆς ἢ ἐνὸς διπόλου, κειμένου μεταξύ δύο παρειῶν, μέ ὁρθῇ ἢ τυχούσαν γωνίαν.

III.9

Νά μελετηθῇ ἡ ροή πέριξ ἑνὸς κύκλου, ἀκτῖνος a , τοῦ ὁποῦ τοῦ κέντρον συμπίπτει μέ τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων, παρουσίᾳ μιᾶς ὁμοιόμορφου ροῆς, ταχύτητος V_0 καὶ δύο σημειακῶν δυνῶν, κυκλοφορίας Γ καὶ $-\Gamma$, κειμένων ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεία μέ συντεταγμένας $be^{i\theta}, be^{-i\theta}(b > a)$

III.10

Μελετήσατε τήν ροήν πέριξ κύκλου ἀκτῖνος R τοῦ ὁποῦ τοῦ κέντρον εὑρίσκεται εἰς τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων, ὅταν ἡ μιγαδική ταχύτης τῆς ροῆς εἰς τὸ ἄπειρον εἶναι ἴση πρὸς $V_0 e^{-i\alpha}$ καὶ ἐπὶ πλεον μὲ πηγὴ ἢ ἓνα φρέαρ εὑρίσκονται εἰς τὸ σημεῖον συντεταγμένης $Re^{i\theta}$.

Ἐπολογίσατε τήν παροχὴν διὰ τήν ὁποῖαν τὸ σημεῖον μέ συντεταγμένην $Re^{i\theta}$ εἶναι σημεῖον μηδενικῆς ταχύτητος.

Ἐφαρμόσατε τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ BLASIUS διὰ τὸν καθορισμὸν τῶν συνολικῶν δυνάμεων.

III.11) Μετασχηματισμὸς τῶν KARMAN-TREFFTZ

Εἰσαγόμεν μεταξύ δύο ἐπιπέδων (p) καὶ (p') μίαν ἀντιστοιχίαν προσδιορίζομένην ἀπὸ τήν σχέσιν

$$z' = \frac{2a}{\pi} \ln \frac{z-1}{z+1}$$

ἔνθα a εἶναι μὲ θετικὴ σταθερὰ καὶ z, z' αἰίσυντεταγμένα τῶν σημείων

των δύο αὐτῶν ἐπιπέδων.

Ζητεῖται.

α) Ὁ τόπος τῆς εἰκόνας τοῦ z ὅταν τὸ z' διατηρῇ σταθερὸν πραγματικὸν καὶ σταθερὸν φανταστικὸν μέρος.

β) Ἐξ αὐτοῦ νὰ εὕρεθῇ μὲν σὺμμορφος ἀπεικόνισις τῆς περιοχῆς (Δ) τοῦ (P), ἐξωτερικῆς ὡς πρὸς τὸ κλειστὸν περιγράμμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ δύο τῶν κύκλου, τὰ ὅποια διέρχονται διὰ τῶν σημείων $z=+1$ καὶ $z=-1$ ἐπὶ μιᾶς ἀπλῆς περιοχῆς τοῦ (P'), ἐν συνεχείᾳ δὲ μὲν ἀπεικόνισις τῆς περιοχῆς αὐτῆς ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς περιοχῆς τυχόντος κύκλου ἐνὸς ἐπιπέδου P.

γ) Δείξατε ὅτι μὲν ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$\frac{z-1}{z+1} = \left(\frac{KZ-1}{KZ+1} \right)^K$$

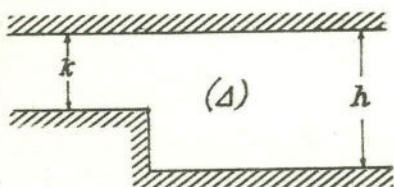
πραγματοποιεῖ μὲν τοιαύτην ἀπεικόνισιν.

δ) Προσδιορίσατε τὴν τιμὴν τοῦ K καὶ τὴν θέσιν τοῦ κύκλου εἰς τὸ ἐπίπεδον P.

Διὰ $K=2$ ὁ μετασχηματισμὸς εἶναι ἕνας μετασχηματισμὸς JOUKOWSKI.

III.12

Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $z(Z)$ ὀριζομένην ἀπὸ τὴν σχέσιν



$$\frac{dz}{dZ} = \frac{K(Z-1)^{1/2}}{Z(Z-a)^{1/2}} \quad z(a)=0$$

ἔνθα K εἶναι μὲν θετικὴ σταθερά καὶ a μὲν πραγματικὴ σταθερά μεγαλύτερα τοῦ 1.

Σχ. III.12

α) Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτὴ πραγματοποιεῖ μὲν σὺμμορφον ἀπεικόνισιν τοῦ ἡμιεπιπέδου $\Phi(Z)=0$ ἐπὶ μιᾶς περιοχῆς (Δ) ἀπλῶς συνεκτικῆς, εἰκονιζομένης εἰς τὸ σχῆμα III.12.Α, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $\Phi(Z)$ τὸ φανταστικὸν μέρος τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ Z

β) Προσδιορίσατε τὰ K καὶ a συναρτήσει τῶν h καὶ k .

γ) Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν Z μὲν ροὴν ἐκ πηγῆς, νὰ μελετηθῇ ἡ ὁμόλογος ροή, ἡ ὀριζομένη εἰς τὴν περιοχὴν (Δ).

III.13

Μελετήσατε τὴν ροὴν τῆς ὁποίας τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν καθορίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$f(z) = ch(Z-ia) \quad \text{ἐνθα} \quad z = -ichZ$$

Δείξατε ὅτι ἡ ταχύτης εἰς τὸ ἄπειρον εἶναι ὁμοειδμορφος μὲ τι-

μην $\nu=1$ και σχηματίζει γωνίαν $\alpha=\pi/2$ με τον άξονα των x , ή δε όλη κίνησης παριστά την ροήν περίεξ πλακός μήκους 2 , συμπίπτουσας με τον άξονα των y και συμμετρικής περί την άρχήν O .

III.14

Έστω ή συνάρτησις $z(Z)$ ώρισμένη είς τό ήμιεπίπεδον (P) ($0 < \arg Z < \pi$) από τάς σχέσεις

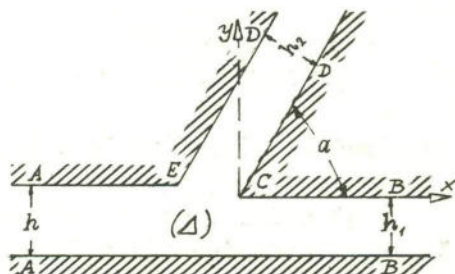
$$\frac{dz}{dZ} = \frac{e^{ia}}{\pi} \frac{Z^{1-\frac{a}{\pi}}}{(Z-a)(Z-b)(c-Z)} \quad , \quad z(0) = 0$$

Ένθα a, b, c θετικοί αριθμοί και $b < a$.

α) Δειξατε ότι ή συνάρτησις αύτή πραγματοποιειτ μίαν σύμμορφον άπεικονισιν του (P) είς τον χῶρον (Δ) του σχήματος III.14.

β) Θεωρούμεν είς τό (P) μίαν ροήν όριζομένην από την σχέσηιν

$$F(z) = -\frac{Vh}{\pi} \ln(Z+a) - \frac{V_1 h_1}{\pi} \ln(Z+b) - \\ - \frac{V_2 h_2}{\pi} \ln(Z-c)$$



Σχ. III.14

ώς και την όμολογον αύτης είς τον χῶρον (Δ) .

1) Ποίαν σχέσηιν E_1 πρέπει νά πληροῦν αἱ σταθεραί, αἱ όποῖαι υπεισερχονται είς τον καθορισμόν τῆς F , οὔτως ὥστε ή ροή νά περιβρέχη την παρειάν AED ;

Πῶς έρμηνεύεται ή ροή όταν δέν πληροῦνται ή σχέσεις E_1 ;

2) Ποίαν σχέσηιν E_2 πρέπει νά πληροῦν αἱ σταθεραί, οὔτως ὥστε ή ταχύτης είς τό C νά μήν εἶναι άπειρος;

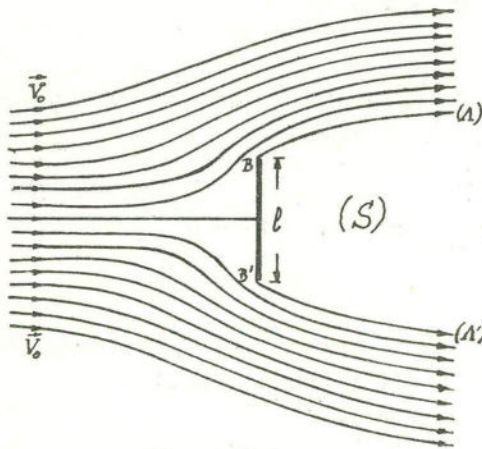
γ) Δίδονται τά h, h_1, h_2, a και V και πληροῦνται αἱ συνθήκαι E_1 και E_2 .

Ύπολογίσατε τά V_1 και V_2 σχηματίζοντες προηγουμένως μίαν έξ-
λωσην, έπιτρέπουσαν τον άρχικόν προσδιορισμόν τῆς ποσότητος $x = \frac{V_1 h_1}{Vh}$

III.15

Ἡ πλάξ BB' ($BB'=l$) του σχήματος III.15. A εἶναι κάθετος είς την έπ' άπειρον ταχύτητα V_0 τῆς ροῆς. Όποθεν τῆς πλακός υπάρχει χῶρος (S) είς τον όποῖον ή ταχύτης εἶναι μηδενική. Αἱ γραμμαί (Λ) και (Λ') εἶναι οὔσιαστικῶς έπιφάνειαι έπαφῆς (ΐδε 5.3.4) διαχωρίζουσαι την κυρίως ροήν από την νεκράν ζώνην (S) .

- α) Δείξατε ότι (Λ) και (Λ') είναι γραμμές ροής κατά μήκος των οποίων το μέτρον της ταχύτητος μένει ίσον προς την ταχύτητα V_0 εις το άπειρον.



Σχ. III.15

- β) Παραστήσατε την ροήν εις το επίπεδον της οδογράφου Z .

- γ) Εύρετε τὰς συνθήκας εις τὰ όρια, τὰς όποιας πρέπει να πληροῖ ή συνάρτησις $f(Z)$.

- δ) Μελετήσατε την συμπεριφοράν της $f(Z)$ πλησίον των σημείων $Z=0$ και $Z=V_0$.

ε) Δείξατε ότι $f = -\frac{(2\alpha q_1 Z)^2}{(Z^2 - q_1^2)^2}$

άνταποκρίνεται εις όλας τὰς αΐτουμένας συνθήκας.

- ζ) Ύπολογίσατε την x συναρτήσιν της μιγαδικής μεταβλητής S ,

την όποian όρίζει ή σχέσις $Z = q_1 th \frac{S}{2}$

- η) Δείξατε ότι ή σταθερά a όδίδεται από την σχέσιν $q_1 l = (4+\pi)a^2$ και ότι ή συνισταμένη των πιέσεων του ρευστου επί της πλακός είναι ίση

προς $\rho l q_1 \frac{\pi}{4+\pi}$

III.16

Καθορίσατε την έπίπεδον αστρόβιλον ροήν ένδς άσυμπιέστου ρευστου, εύρισκομένου έν ήρεμία εις το άπειρον, παρουσία μιās έλλειψως άκολουθούσης μιαν τυχούσαν κίνησιν, όταν ή κυκλοφορία πέριξ της έλλειψως είναι μηδενική.

(Έφαρμόζομεν την γενικήν θεωρίαν, άναφερόμενοι εις την άπολυτον κίνησιν μέ σύστημα άναφοράς το σύστημα άξόνων Ox, Oy της έλλειψως. Διά την λύσιν του προβλήματος πραγματοποιούμεν ένα μετα-

σχηματισμόν JOUKOWSKI, της μορφής $z = z' + \frac{k^2}{z'}$. Το μιγαδικόν δυναμικόν

είναι γραμμικόν συνδυασμός των $\frac{1}{z'}$ και $\frac{1}{z'^2}$)

III.17) Κίνησις των μεμονωμένων δυνών

Δέγομεν ότι μια ροή μιγαδικού δυναμικού $f(z, t)$ παρουσιάζει κατά την χρονικήν στιγμήν t εις το σημείον P κατηγμένης $x=a$ μιαν με-

μονωμένην σημειακήν δύσιν κυκλοφορίας Γ , εάν ή

$$g(z,t) = f(z,t) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z-a)$$

είναι ολόμορφος εις την γειτονίαν του σημείου $z=a$.

Λέγομεν ότι ή δύσιν είναι έλευθερα, όταν ή μιγαδική ταχύτης του

σημείου αυτού P διδομένη από την σχέσιν $\frac{dg}{dz}(a,t)$ είναι μηδενική και

τοῦτο διδοτι, υπό τας συνθήκας αυτές, το ρευστόν δεν έξασκεϊ καμμίαν δύναμιν επί του P .

Θεωρήσατε δύο έλευθέρας δύσιν εις τας θέσεις P_1 και P_2 με κυκλοφορίας Γ_1 και Γ_2 .

α) Δείξατε ότι διά την συνισταμένην των δύο αυτών ροών έν έκαστον σημείον P_1, P_2 , υπόκειται εις όμοιομορφον κυκλικήν κίνησιν και το κέντρον των κύκλων είναι δι'έκάστην στιγμήν το κέντρον βάρους των σημείων P_1 και P_2 των προσδιοριζομένων από τους συντελεστές Γ_1 και Γ_2 .

β) Έξετάσατε την μερικήν περίπτωσιν διά την οποίαν $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$.

III.18

Δείξατε ότι δυνάμεθα νά δημιουργήσωμεν μίαν στάσιμον έπίπεδον ροήν ως συνισταμένην μιᾶς όμοιομόρφου ροής, παραλλήλου προς τον άξονα Ox και δύο σταθερών έλευθέρων δυνών, συμμετρικών ως προς την άρχήν των συντεταγμένων.

Μελετήσατε την διάταξιν των γραμμών ροής.

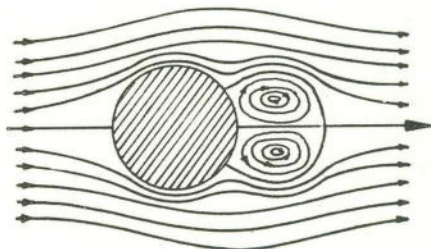
III.19

Έπανερχόμεθα εις το πρόβλημα III.9.

α) Νά δειχθῇ, ότι δεδομένου του b , δυνάμεθα νά έκλέξωμεν τά Γ και θ , οὔτως ώστε αί δύσιν νά είναι έλευθεραί.

β) Νά μελετηθῇ ή μορφή των γραμμών ροής.

Μία τοιαύτη ροή είναι μία καλή άπεικονισις ώρισμένων ροών έμφανιζομένων πειραματικώς εις έργαστήρια ή έν τῇ φύσει (Σχ. III.19)



(Σχ. III.19)

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΝ



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 18.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑΝ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

18.1 ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

Ἡ μελέτη ἑνός φυσικοῦ φαινομένου ἀνάγεται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς τὸν καθορισμὸν μιᾶς σειρᾶς σχέσεων μεταξὺ διαφόρων σταθερῶν καὶ μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι τὸ χαρακτηρίζουν. Αἱ σχέσεις αὗται, ὀνομαζόμεναι φυσικοὶ νόμοι, περιλαμβάνουν τὸ φαινόμενον εἰς ἓν περιορισμένον ἢ ἐτεταμένον πεδίου ἰσχύος καὶ, συνήθως, παρουσιάζονται μαθηματικῶς ὑπὸ τὴν μορφήν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

Μία καθαρῶς θεωρητικὴ ἀνάλυσις τοῦ φαινομένου βασίζεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν μαθηματικὴν μορφήν αὐτοῦ καὶ ἐξ αὐτῆς ἐξάγει τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν φυσικῶν νόμων ποὺ τὸ διέπουν. Πλὴν ὅμως, αἱ ἐφαρμοσμέναι ἐπιστῆμαι ἔχουν ἀνάγκην ποσοτικῶν αποτελεσμάτων, ἥτοι ἀκριβοῦς ἐπιλύσεως τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τῇ βάσει σαφῶς καθορισμένων συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια (ὅρια προβλήματος τύπου DIRICHLET, ἢ ἐν ἀνάγκῃ τύπου NEWMANN) αἱ ὁποῖαι εἰς τὰ πλεῖστα σύνθετα φαινόμενα εἶναι μερικῶς ἢ ὁλικῶς ἀπροσδιόριστοι. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις ὑπάρξεως σαφῶν συνθηκῶν ὁρίων, ἡ ἀκριβὴς ἐπίλυσις τῆς πλήρους μαθηματικῆς μορφῆς ἑνός φαινομένου, παρά τὰ ἐμπληρωτικά ἀποτελέσματα τῆς συγχρόνου ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως καὶ τῶν ἡλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, εὐρίσκεται πολλάκις εἰς ἀδυναμίαν νὰ προβλέψῃ ἀκριβῶς τὴν εἰς τὸ διάστημα καὶ τὸν χρόνον ἐξελίξιν ἑνός συνθέτου φαινομένου.

Ἡ ἀνάγκη ὑπερπηδήσεως τῶν ἀνωτέρω δυσχερεῶν ὠδήγησεν εἰς τὴν ἀιόλουστον λύσιν διὰ τὴν μελέτην ἑνός συνθέτου φαινομένου. Ἀναπαραγωγή τοῦ φαινομένου κατὰ τὸν πληρέστερον δυνατὸν τρόπον καὶ ὑπὸ τὴν κατὰλληλον κλίμακα, ἥτις καθιστᾷ δυνατόν τὴν εἰς τὸν χρόνον καὶ χῶρον μελέτην τῆς ἐξελίξεως τοῦ φαινομένου.

Αὕτη εἶναι ἡ γενικὴ ἀρχὴ τῶν μελετῶν ἐπὶ ὁμοιωμάτων ἥτοι καταλλήλων ἀναπαραστάσεων τοῦ φαινομένου. Καὶ ἐάν μὲν τὸ ὁ-

μοῖωμα ἀφορᾷ τὴν μαθηματικὴν μορφήν τοῦ φαινομένου, ἔχομεν τὰ μαθηματικὰ ὁμοιώματα, ἐάν δέ τὴν φυσικὴν μορφήν τοῦ φαινομένου ἔχομεν τὰ φυσικὰ ὁμοιώματα. Εἰς τὴν συνέχειαν, ἀσχολούμεθα ἀπουλειστικῶς μέ φυσικὰ ὁμοιώματα, τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ τὰ πλέον γνωστά διὰ τὴν μεγάλην συμβολὴν των εἰς τὴν ἐπίλυσιν πολλῶν προβλημάτων τοῦ συγχρόνου τεχνικοῦ.

Ἡ μορφή ὑπὸ τὴν ὁποῖαν ἐμφανίζεται ἓν φυσικὸν ὁμοῖωμα εἶναι πολυποῖμιλος. Ἀπὸ τὴν μαίεττα τοῦ ἀρχιτέκτονος, ἥτις προσδιορίζει τὸν ἀρμονικώτερον συνδυασμὸν τῶν μαζῶν ἐνὸς συνόλου κατασκευῶν μέχρι τοῦ ὑπὸ σμίρυνσιν ὁμοιώματος τοῦ ἀεροναυπηγοῦ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀντιστάσεως εἰς τὴν προώθησιν, ὡς καὶ τῆς ὀριακῆς στοιβάδος, σωμάτων ἐξαιρετικῶς πολυπλόκων διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ἀδύνατος, πολλάκις, καὶ αὕτη αὕτη ἡ καταστρωσις τῶν ἐξισώσεων μινῆσεως. Μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν ἄκρων χρησιμοποίησεως τῶν ὁμοιωμάτων, θὰ συναντήσωμεν αὐτὰ σχεδὸν παντοῦ. Ὡς ἀναφέρωμεν ἐπίσης μίαν ἐνδιάμεσον κατηγορίαν μεταξὺ μαθηματικῶν καὶ φυσικῶν ὁμοιωμάτων, τὰ ἀναλογικὰ ὁμοιώματα. Ὑπὸ τὴν μορφήν τῶν ρεοηλεκτρικῶν ὁμοιωμάτων χρησιμοποιοῦνται εὐρέως εἰς τὴν ὑδραυλικήν, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὁμοιότητος τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῶν ῥοῶν πρὸς ἡλεκτρικὰ πεδία. Αὐτό τό εἶδος ὁμοιωμάτων δίδει τὴν γένεσιν εἰς ἓνα νέον ὁρισμὸν τοῦ ὁμοιώματος ἐν γένει. Ὁμοῖωμα εἶναι μία ὑπολογιστικὴ μηχανή, ἥτις ἐπιτρέπει τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τῶν ὁμοίων τό πολὺπλοιοι τῶν συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια, ἢ ἡ ἀδυναμία καταστρώσεως τῶν ἐξισώσεων δὲν ἐπιτρέπουν μίαν μαθηματικὴν ἐπίλυσιν.

Ἐπὶ πλέον, δὲν ἀπαιτοῦμεν πάντοτε ἀπὸ τὴν ὑπολογιστικὴν αὐτὴν μηχανὴν τὴν εὕρεσιν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν διαφορῶν λύσεων. Ἀρμιοῦμεθα πολλάκις εἰς τὴν κατατάξιν τῶν διαφορῶν λύσεων ὡς πρὸς ἓν βασιμὸν κριτήριον τῆς μελέτης καὶ τὴν ἀναζήτησιν νέων λύσεων διὰ μεταβολῆς ὀρισμένων συνθηκῶν. Μεταξὺ αὐτῶν τῶν λύσεων ὁ μηχανικός θὰ εὐλέξη, βοηθούμενος ἀπὸ τὴν πείραν καὶ τὰς ὑπαρχούσας θεωρίας, τὴν καταλληλοτέραν διὰ τοὺς σκοποὺς τοῦ ὑπὸ μελέτην ἔργου.

Εἰς ὃ, τι ἀφορᾷ τὰς καθαρῶς ὑδραυλικὰς μελέτας, τὰ φυσικὰ ὁμοιώματα ὑπὸ σμίρυνσιν ἀποτελοῦν τὸν πλέον εὐγλωττον τρόπον διὰ τὴν ἀναπαράστασιν τῶν διαφορῶν φυσικῶν φαινομένων καὶ τῆς ἐπιρροῆς των εἰς τὰς κατασκευὰς (ὁμοιόμορφοι καὶ μεταβαλλόμενοι ῥοαί, κυματισμοί πάσης φύσεως, παλίρροιαι καὶ ρεύματα) καὶ διεμόρφωσαν μίαν τεχνικὴν, τῆς ὁποίας ἡ ἐξέλιξις κατὰ τὴν τελευταίαν εἰσοσαετίαν εἶναι τεραστία. Πρὶν ἀπὸ τὴν κατασκευὴν μεγάλων ὑδραυλικῶν ἔργων, ὡς φραγμάτων, λιμένων, διευθετήσεως χειμάρρων καὶ ποταμῶν, κατασκευάζονται ὑπὸ κατάλληλον κλίμακα τὰ ὑπὸ μελέτην τμήματα τοῦ ἔργου καὶ διὰ ποιμύλων τροποποιήσεων τῆς μορφῆς των ἐπιτυχάνεται τό ἐπιλητούμενον ἀποτέλεσμα. Εἰς τὸν τομέα τέλος τῶν ὑδραυλικῶν μηχανικῶν, αἱ ἀποδόσεις τῶν ὑδροτροβίλων ἢ ἀντλιῶν ὡς καὶ ὅλων τῶν ἐνδιαμέσων τύπων μηχανῶν, ἡ κατάλληλος μορφή τῶν ἐπὶ μέρους στοιχείων δι-

ἀποφυγὴν σπληαῖωσης καὶ ἡ χάραξις καὶ βελτίωσις τῶν διαγραμμάτων λειτουργίας, προσδιορίζονται ἀπουλειστικῶς διὰ δοσιμῶν ἐπὶ ὁμοιωμάτων ὑπὸ σμύρυνσιν καὶ εἰς αὐτάς καὶ μόνον ὀφείλεται ἡ μεγάλη τελειοποίησις των.

Ἡ εἰς οἰονδήποτε ὅμως τομέα ἐφαρμογὴ τῶν φυσικῶν ὁμοιωμάτων καὶ ἡ ἐπωφελὴς χρησιμοποίησις των ἀπαιτεῖ τὴν προγενεστέραν ἀρίστην γνῶσιν τῶν νόμων, οἱ ὅποιοι διέπουν εἰς ἐκαστὴν περίπτωσιν τὴν ὁμοιότητα τοῦ φυσικοῦ φαινομένου μέ τὸ φαινόμενον ἐν ὁμοιώματι.

Πλεῖστοι ἐρευνηταὶ ἀπειματέστησαν τοὺς βασικοὺς νόμους τῶν συνήθως μελετουμένων περιπτώσεων, Ἡ σύγχρονος ὅμως ἀνάπτυξις τῶν μαθηματικῶν, ἔχουσα ὡς τάσιν τὴν γενίμευσιν τῶν διαφορῶν μερικῶν περιπτώσεων καὶ τὴν συγυρότησιν των εἰς σύνολα διεπόμενα ὑπὸ γενικοῦ τινός νόμου, ὁδηγεῖ τὸν ἐρευνητὴν εἰς τὴν ἀναλήθησιν τῆς γενικῆς μορφῆς τῶν νόμων τῆς φυσικῆς ὁμοιότητος. Ἐπὶ τῇ βάσει ἐπομένως τῶν υλιστικῶν ἐννοιῶν τῆς ὁμοιότητος, γεννιέμεν τὴν θεωρίαν χρησιμοποιοῦντες τὸν λίαν συνεικτιμὸν τρόπον ἐμφράσεως τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν καὶ δὴ τῆς τοπολογίας. Ἀποτέλεσμα τῆς γεννιεύσεως αὐτῆς εἶναι ἡ δυνατότης τῆς συστηματικῆς ἐρεύνης τυχόντος νέου προβλήματος ὁμοιότητος, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν γενικῶν ἐξισώσεων καὶ ἡ ἔνταξις του εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, μέ πλεονέκτημα τὴν ἀποφυγὴν οἰονδήποτε λογιμοῦ ἢ μαθηματικοῦ σφάλματος καὶ τὴν πλήρη κατανόησιν τοῦ φαινομένου.

Ἡ κατὰ φύσιν ἐνός ὁμοιώματος ἐν ἐργαστηρίῳ βασίζεται εἰς τὰς περισσότερας τῶν περιπτώσεων εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς ἐξελίξεως ἐνός καὶ τοῦ αὐτοῦ φαινομένου, ὑπὸ δύο διαφορῶν, ποσοτικῶς, μορφῶς. Οὕτως, ἡ φυσικὴ ὁμοιότης δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία γενίμευσις τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιότητος.

Ὡς θὰ εἶδωμεν περαιτέρω, εἰς τὰ πλαίσια τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν, αἱ ὀνομαζόμεναι συνθήκαι ὁμοιότητος μεταφράζουν ὠρισμένας ἀναλογίας, αἱ ὅποια διέπουν τὴν πλήρη φυσικὴν ὁμοιότητα. Διὰ νὰ ἀναλυθῇ καλλίτερον τὸ γενικὸν αὐτὸ φαινόμενον τῆς φυσικῆς ὁμοιότητος, θὰ διακρίνωμεν κατὰ σειρὰν τὴν γεωμετρικὴν, τὴν κινηματομικὴν καὶ τὴν δυναμικὴν ὁμοιότητα.

18.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΜΟΙΟΤΗΣ

Δύο τριδιάστατοι γεωμετρικαὶ παραστάσεις εἶναι ὅμοιαι, εἴναι ὅμοιαι, εἴναι αἱ σχέσεις μητῶν, συνδεουσῶν ὁμόλογα σημεῖα, εἶναι σταθεραὶ. Προσδιορίσαμεν οὕτω τὴν γεωμετρικὴν ὁμοιότητα.

Ἐν τῇ πράξει, τὸ ὁμοίωμα εἶναι συνήθως γεωμετρικῶς ὅμοιον πρὸς τὸ πρωτότυπον. Εἰς ἀριετὰς ὅμως περιπτώσεις, ἡ συνθήκη αὐτὴ δέν τηρεῖται παρὰ μερικῶς. Οὕτως, εἰς ὁμοιώματα λιμένων καὶ ποταμῶν ἡ κατὰ φύσιν σμύρυνσις τῶν ὀριζοντίων διαστάσεων εἶναι διάφορος τῆς τῶν κατακόρυφων. Λέγομεν ὅτι τὰ ὁμοιώματα τοῦ τύπου αὐτοῦ εἶναι στρεβλῆς κλίμακος. Ἡ χρῆσις τῆς διπλῆς αὐτῆς κλίμακος κατέστη ἀναγκαία λόγῳ τῆς μεγάλης ἐκτάσεως τῶν ὑπὸ μελέτην ἔργων

καὶ τῆς κατ'ἀνάγκην μεγάλης σμικρύνσεως τῶν διαστάσεων των διὰ τὴν δυνατότητα μελέτης των ἐν ἐργαστηρίῳ. Ἡ σμίκρυνσις αὕτη, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ καὶ διὰ τὰς υαταυορύφους διαστάσεις, δίδει πολὺ μικρὰ ὕψος, μέγεθος, ἀποτέλεσμα, ἀφ' ἐνός τὴν ἀνεπίθύμητον ἐπιρροὴν τῶν ἐπιφανειαυῶν τάσεων εἰς τὸ ὁμοίωμα, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸν κίνδυνον εἰσαγωγῆς τῆς ροῆς ἐν ὁμοιώματι εἰς τὴν περιοχὴν τῶν ἀστροβίλων ροῶν. Μόνη λύσις εἶναι ἐπομένως ἡ ἐυλογὴ μεγαλυτέρας κλίμακος διὰ τὰς υαταυορύφους διαστάσεις, μέγεθος ἀντίστοιχον αὐξήσιν τοῦ ὕψους τῆς ροῆς (π. χ. κλίμαξ 1:500 διὰ τὰς ὀριζοντίους διαστάσεις, 1:100 διὰ τὰς υαταυορύφους).

18.3 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΟΜΟΙΟΤΗΣ

Ἐὰν εἰς δύο συστήματα γεωμετρικῶς ὅμοια παράγονται κινήσεις ἢ ροαὶ περιοδικοῦ ἢ μεταβαλλομένου χαρακτῆρος, καὶ ἐὰν ἐμφανίζονται βραδεῖαι παραμορφώσεις, εἶναι ἀπαραίτητος ἡ εἰσαγωγὴ δύο νέων ἐννοιῶν διὰ τὴν διατύπωσιν τῆς ὁμοιότητος. Πρόκειται περὶ τῶν ὁμολόγων (ἢ ἀντιστοιχείων) χρόνων, καὶ τῶν ὁμολόγων σωματιδίων.

Ὅταν δύο ὑλικά συστήματα εἶναι κινηματικῶς ὅμοια, τὰ ὁμόλογα σωματίδια αὐτῶν κατέχουν ὁμολόγους θέσεις εἰς τοὺς ὁμολόγους χρόνους. Εἶναι εὐκολον τότε νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ διανύσματα ταχύτητος καὶ ἐπιταχύνσεως δύο ὁμολόγων σημείων ἔχουν ὁμολόγους διευθύνσεις εἰς τοὺς ὁμολόγους χρόνους. Κατὰ συνέπειαν, αἱ τροχιααὶ δύο ὁμολόγων σωματιδίων ἀποτελοῦν ὁμολόγους καμπύλας. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσηι σταθερᾶς ροῆς, αἱ ὁμόλογοι γραμμαὶ ροῆς εἶναι καμπύλαι γεωμετρικῶς ὅμοιαι.

18.4 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΟΜΟΙΟΤΗΣ

Λέγομεν ὅτι δύο ὑλικά συστήματα εἶναι δυναμικῶς ὅμοια, ἐὰν τὰ ὁμόλογα σωματίδια τῶν συστημάτων αὐτῶν ὑπομείνεται εἰς ὁμόλογα συστήματα δυνάμεων.

Εἰδικώτερον, ἐὰν μεταξὺ δύο ὑλικῶν συστημάτων ἡ διανομὴ τῶν μαζῶν εἶναι ὁμοία, γεγονός τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν γεωμετρικὴν ὁμοιότητα, τότε, λόγῳ τῆς σχέσεως $\vec{F} = m\vec{g}$ ἡ κινηματικὴ ὁμοιότης ἔχει ὡς συνέπειαν καὶ τὴν δυναμικὴν ὁμοιότητα.

Ἡ ἔννοια τῆς ὁμοιότητος δύναται νὰ ἐπευταθῇ εἰς πλεῖστα ὅσα χαρακτηριστικὰ. Ἐφηρμόσθη πρό ὀλίγου εἰς μίαν διανομὴν μαζῶν: "ὁ λόγος τῶν μαζῶν ὁμολόγων σημείων δύο συστημάτων εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐυλογῆς τῶν σημείων". Εἰς τὰς μελέτας ἐπὶ τῶν ἐλαστικῶν παραμορφώσεων ἐφαρμόζομεν τὰ ἴδια διὰ τὰς ροπὰς ἀντιστάσεως: "Ὁ λόγος τῶν ροπῶν ἀντιστάσεως ὁμολόγων διατομῶν εἰς τὸ ὁμοίωμα καὶ τὸ πρωτότυπον δέον νὰ παραμένῃ σταθερός, καὶ ἡ σταθερά αὕτη πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἴδια τόσον διὰ τὴν ροπήν εἰς στρέψιν ὅσον καὶ διὰ τὴν ροπήν εἰς κάμψιν.

Μόνον μία λεπτομερὴς καὶ πλήρης μελέτη ἑνὸς ἐυάστου προβλήματος ἐπιτρέπει τὸν προσδιορισμὸν τοῦ εἴδους τῆς ὁμοιότητος ἢ ὁποία πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ μεταξύ ὁμοιώματος καὶ πρωτοτύπου. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν, δεδομένου ὅτι ἐνδιαφέρομεθα διὰ ὁμοιότητα μεταξύ δύο ρευστῶν ἐν κινήσει ἐντὸς τυχόντων ὑποδοχέων, δεόν νὰ ἔχωμεν συγχρόνως γεωμετρίαν, κινηματομικήν καὶ δυναμικήν ὁμοιότητα.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐδόθη μία παραστατικὴ εἰκὼν τῆς ἐννοίας τῆς ὁμοιότητος, ἢ ὁποία θὰ διευκολύνῃ τὴν κατανόησιν τῶν νέων ἐννοιῶν, τὰς ὁποίας εἰσάγομεν εἰς τὸ ἐπόμενον κεφάλαιον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 19.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

19.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Ὡς ἤδη ἀνεφέρθη καί εἰς τήν εἰσαγωγήν θά ὀνομάσωμεν φυσικήν περιοχὴν ἓν συγυεωροτημένον σύνολον φαινομένων, χαρακτηριζόμενον ἀπὸ ὠρισμένους νόμους ἐσωτερικῆς συνθέσεως.

Εἰς ἐυάστην φυσικήν περιοχὴν ὑπάρχει ἓν πεπερασμένον πλῆθος φυσικῶν μεγεθῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὠρισμένα εἶναι ποσοτικῶς γνωστά, υαλοῦνται δεδομένα καί συμβολίζονται ὡς $a_i (i=1, 2, \dots, \mu)$, τὰ ὑπόλοιπα δέ υαλοῦνται ἄγνωστοι καί συμβολίζονται ὡς $x_i (i=1, 2, \dots, \nu)$. Μία φυσική περιοχὴ εἶναι θεωρητικῶς γνωστὴ ὅταν ἐμφρασθοῦν εἰς αὐτήν ν τό πλῆθος σχέσεις, συνδέουσας τὰ δεδομένα μέ τὰς ἀγνώστους. Αὗται θά εἶναι τῆς μορφῆς

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_\nu, a_1, a_2, \dots, a_\mu) = 0 \quad (19.1. \alpha)$$

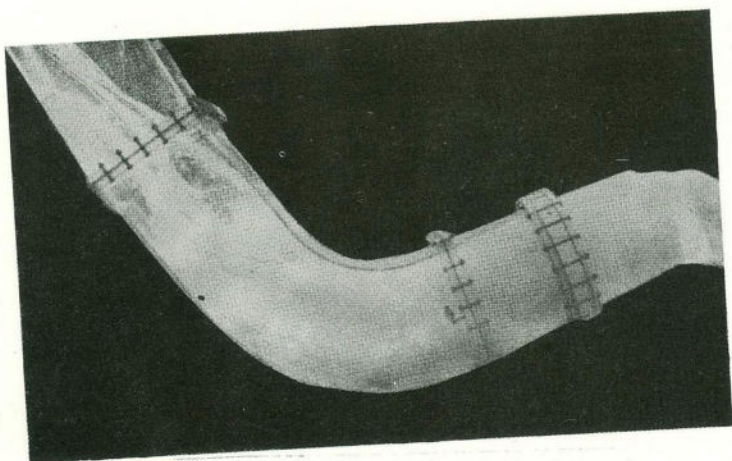
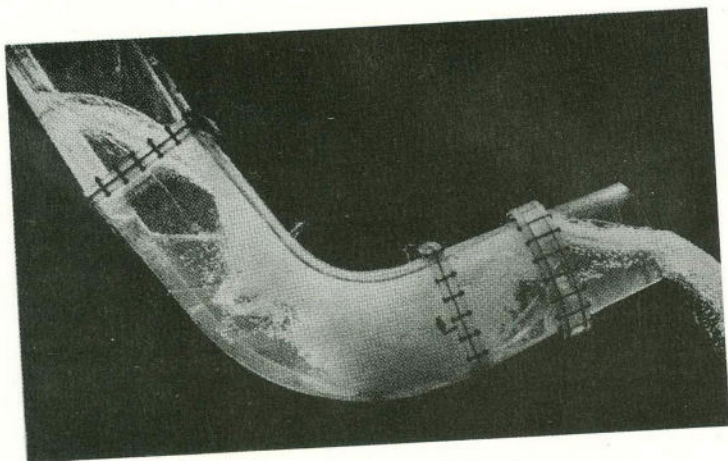
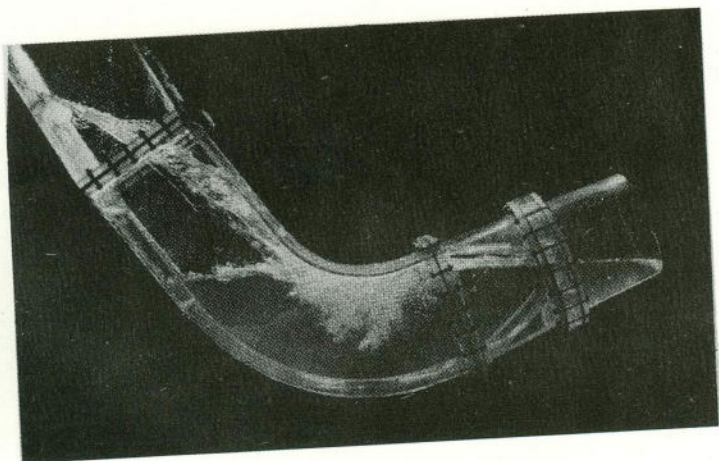
ἐνθα $(i=1, 2, \dots, \nu)$.

Ἐστὼ ἓν ἰδιαίτερον φαινόμενον τῆς περιοχῆς, διὰ τό ὁποῖον μία στήλη τιμῶν $(x_1, x_2, \dots, x_\nu, a_1, a_2, \dots, a_\mu)$ ἱκανοποιεῖ τὰς (19.1. α). Πολλαπλασιάζομεν ἓνα ἑαστον τῶν ὄρων τῆς στήλης αὐτῆς ἐπὶ συντελεστὰς τῆς μορφῆς $(x_1, x_2, \dots, x_\nu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu)$. Ζητοῦμεν δέ τὰς συνθήκας ποῦ ἀπαιτοῦνται, οὕτως ὥστε τό φαινόμενον τό ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ἡ νέα στήλη τιμῶν $(x_1, x_2, \dots, x_\nu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu)$ νά ὑπαγοῦν εἰς τοὺς νόμους ἐσωτερικῆς συνθέσεως τοῦ συνόλου, ὁδηγῶν νά ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_\nu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu) = 0 \quad (19.1. \beta)$$

δι' οἵανδήποτε ἀρχικήν στήλην τιμῶν $(x_1, x_2, \dots, x_\nu, a_1, a_2, \dots, a_\mu)$ τῆς (19.1. α).

Θέτομεν ἐξ ὀρισμοῦ ὅτι "Ἡ ὑπαρξίς τῶν συντελεστῶν $x_1, x_2, \dots, x_\nu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$ ἀποτελεῖ τήν ἱκανήν καί ἀναγκαίαν συνθήκην διὰ τήν ὑπαρξίν ὁμοιότητος εἰς τήν ὑπ' ὅψιν φυσικήν περιοχὴν.



Έργαστηριακή μελέτη σίφωνος δι' αύξανομένην φόρτισιν,
υλῆμαξ 1/12

Λόγω του ότι η στήλη των ανωτέρω συντελεστών δέον όπως ικανοποιεί την (19.1.β) διά πάσαν στήλην αγνώστων και δεδομένων, ικανοποιούσαν την (19.1.α), επιβάλλεται όπως αι ζητούμεναι συνθήκαι είναναι σχέσεις ανεξάρτητοι των δεδομένων και αγνώστων. Θα είναι επομένως της μορφής

$$\omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0 \quad \text{ένθα} \quad (i=1, 2, \dots, \pi) \quad (19.1.γ)$$

Επομένως αναλήθησις ύπαρχούσης ομοιότητος, σημαίνει αναλήθησιν σχέσεων της μορφής (19.1.γ), τοιούτων ώστε, η ισχύς των (19.1.γ) και (19.1.α) νά έχη ως συνέπειαν την ισχύν των (19.1.β).

Οι συντελεσταί $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ονομάζονται υλίμαες.

Αι σχέσεις (19.1.γ) μεταξύ υλιμάων ονομάζονται σχέσεις ομοιότητος. Έυτός της γενικής έννοίας την οποίαν δίδομεν ούτως εις την λέξιν ομοιότης, ονομάζομεν ειδικώτερον εφαρμογήν ομοιότητος, έυστον μετασχηματισμόν, διά του οποίου μεταβαίνομεν από έν φαινόμενον $(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_m)$ εις έν άλλον φαινόμενον της αύτης φυσικής περιοχής $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ υπό τας ανωτέρω προσδιορισθείσας συνθήκας. Τά φαινόμενα αυτά, προϋπτοντα έν μετασχηματισμού, ονομάζονται όμοια φαινόμενα.

Παρατηρούμεν ότι εις έυάστην φυσικήν περιοχήν, τό σύνολον των όμοιοτήτων αποτελεί όμάδα διότι ικανοποιεί τά άξιώματα της διαρθρώσεως των ομάδων (ϊδε 2.1.3) ως προϋπτει από τά έξής:

Αι όμοιότητες είναι μετασχηματισμοί. Έπομένως διά δύο μετασχηματισμούς M_1 και M_2 ύφίσταται μία μαθηματική πράξις. Πραγματοποιούμεν πρώτον τόν μετασχηματισμόν M_1 , έν συνεχεία δέ τόν μετασχηματισμόν M_2 . Έξ ου προϋπτει ό μετασχηματισμός M_3 διά μιās γενικευμένης πράξεως, (*) ήτοι

$$M_3 \equiv M_2(M_1) = M_2 * M_1$$

προσδιορίζεται δέ έν του ότι, εάν $\varphi(x)$ παριστᾷ τό πρός μετασχηματισμόν είδος και $M[\varphi(x)]$ τό αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού, θά ισχύη η ταυτότης

$$M_2[M_1(\varphi(x))] = M_3[\varphi(x)] \quad (19.1.δ)$$

Θά δείξωμεν τώρα ότι, εις την περίπτωση της ομοιότητος, τό προϋπτον έν της μαθηματικής πράξεως νέον στοιχείον είναι ανεξάρτητον παντός άλλου στοιχείου. Πράγματι, έυάστη ομοιότης χαρακτηρίζεται από μίαν στήλην συντελεστών, ήτοι η M_1 έν της στήλης $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ και η M_2 έν της $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m)$. Ό μετασχηματισμός M_3 χαρακτηρίζεται από την στήλην $(x_1 * x'_1, x_2 * x'_2, \dots, x_n * x'_n, \lambda_1 * \lambda'_1, \lambda_2 * \lambda'_2, \dots, \lambda_m * \lambda'_m)$, ήτις έξαρτάται μόνον από τας M_1 και M_2 ό. έ. ό.

Εξ άλλου τό αποτέλεσμα της μαθηματικής πράξεως ανήκει εἰς τό σύνολον. Πράγματι, ἐν τοῦ ὁρισμοῦ της ομοιότητας, ἐάν x παριστᾷ μίαν λύσιν της (19.1.α), αἱ στήλαι τῶν τιμῶν $M_1(x_i)$ καί $M_2[M_1(x_i)]$ εἶναι διαδοχικῶς λύσεις της (19.1.α). Ἐπομένως ἡ $M_2(x_i)$ εἶναι λύσις της (19.1.α) δι' οἵανδήποτε ἀρχικὴν λύσιν x_i . Ἐπὶ πλέον ἡ λύσις M_2 χαρακτηρίζεται ἀπὸ μίαν σειρὰν συντελεστῶν. Συνεπῶς ἡ M_2 ἀποτελεῖ νέαν ομοιότητα καί ἀνήκει εἰς τό σύνολον τῶν ομοιοτήτων της φυσικῆς περιοχῆς

Ἡ μαθηματική πράξις τοῦ συνόλου τῶν ομοιοτήτων ὑπαίουει εἰς τόν προσεταιριστικόν νόμον. Αὐτό προϋπτεῖ ὡς ἄμεσος συνέπεια της ταυτότητος (19.1.δ).

Υπάρχει ἐξ άλλου καί οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τό σύνολον τῶν ομοιοτήτων. Πρόκειται περὶ της στήλης τιμῶν $(1, 1, 1, \dots)$ ἥτοι μιᾶς ομοιότητος ἐμφυλισθείσης εἰς ταυτότητα.

Εἰς ἐκάστην ομοιότητα $(x_i, \mathcal{A}_i)$ ἀντιστοιχεῖ μία ἀντίστροφος ομοιότης $(1/x_i, 1/\mathcal{A}_i)$. Ἡ ἀντίστροφος αὕτη ομοιότης ἀνήκει εἰς τό σύνολον, διότι ἀποτελεῖ τὴν μετάβασιν ἐν τοῦ μετασχηματισθέντος φαινομένου $M_1(x_i)$ εἰς τό ἀρχικόν φαινόμενον x_i .

Θά ὀνομάσωμεν καθολικὴν ομοιότητα εἰς μίαν φυσικὴν περιοχὴν, ἡ ἀπλούστερον, ομοιότητα εἰς τὴν περιοχὴν, τὴν πλέον ἐτεταμένην ὁμάδα τῶν μετασχηματισμῶν ποῦ δίδουν ὅμοια φαινόμενα. Μίαν ἐκάστην τῶν ὑπο-ὁμάδων αὐτῆς θά τὴν καλέσωμεν μίαν ομοιότητα. Κατ' ἀνάλογον τρόπον, ὅταν μελετῶμεν τὴν συμμετρίαν μιᾶς εἰς ὁνός, πρέπει νά διακρίνωμεν τὴν γενικὴν ὁμάδα τῶν τρόπων μετασχηματισμοῦ διὰ τῶν ὁποίων δύναται νά ἀναπαραχθῇ ὁμοία εἰμῶν καί τοὺς εἰδικούς μετασχηματισμούς, τοὺς ἀπαιτούμενους διὰ μίαν καί μόνην ἀναπαράστασιν. Τὴν γενικὴν ὁμάδα θά ὀνομάσωμεν ὀλικὴν συμμετρίαν της εἰς ὁνός, τὰς δὲ ἐπὶ μέρους ὑπο-ὁμάδας, μίαν συμμετρίαν.

Θά καλέσωμεν ἐλευθερίαν ομοιότητος, τόν ἀριθμὸν τῶν αὐθαιρέτων κλιμάκων, ἥτοι τόν ἀριθμὸν τῶν κλιμάκων ποῦ παραμένουν αὐθαίρετοι μετὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν σχέσεων (19.1.γ).

Παρατήρησις 1: Εἰς τόν δοθέντα ἀνωτέρω ὁρισμὸν της φυσικῆς ομοιότητος, ὡρισμέναι ἐν τῶν μεταβλητῶν $(a_1, a_2, \dots, a_\mu)$ δύνανται νά εἶναι συντεταγμέναι ἢ χρόνος χωρὶς νά σημαίνει μέ αὐτό ὅτι τὰ φαινόμενα ἔχουν τοὺς αὐτοὺς ἄξονας ἀναφορᾶς ἢ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν χρόνων.

Παρατήρησις 2: Ἄπαντα τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν καί εἰς τὴν περίπτωσηὶ κατὰ τὴν ὁποίαν τό σύστημα (19.1.α) περιέχει καί διαφορικὰ ἐξισώσεις ἢ καί ἐξισώσεις μέ μερικὰς παραγώγους. Τό σύστημα (19.1.α) περιέχει τότε ἐπὶ πλέον, τὰς συνθήκας εἰς τὰ ὅρια καί μίαν λύσιν τοῦ (19.1.α) περιέχει μίαν στήλην συναρτήσεων ἀντὶ μιᾶς στήλης τιμῶν. Τούναντίον αἱ κλίμακες παραμένουν διὰ πᾶσαν ομοιότητα, μία ὡρισμένη στήλη τιμῶν, συνδεδεμένων μέ ἐκάστην τῶν μεταβλητῶν x_i, a_i .

19.2 ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ - ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Αἱ σχέσεις ομοιότητας (19.1.γ) χωρίζονται εἰς δύο κατηγορίας. Πράγματι, εἰς ἕναστον πρόβλημα ἐν τῇ πράξει ὑαλούμεθα νά προσδιορίσωμεν ποῖα μεγέθη ἀποτελοῦν τὰ δεδομένα καί ποῖα τοὺς ἀγνώστους. Ἐάν ὁ ἀριθμός π τῶν σχέσεων ομοιότητας εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ ν τῶν ἀγνώστων, θά παραμείνουν καί σχέσεις μεταξύ τῶν υλιμάμων τῶν δεδομένων καί μόνον αὐτῶν.

Ἐστω ὅτι ἔχομεν $\pi - \nu = \rho$ (θετικὸς ἀνέραιος). Τό σύστημα (19.1.γ) ἀντιστοιχεῖ τότε εἰς

$$x_i = f_i(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_\nu) \quad (i=1, 2, \dots, \nu) \quad (19.2. \alpha)$$

$$\phi_j(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_\mu) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, \rho) \quad (19.2. \beta)$$

Αἱ σχέσεις (19.2.β) ἐν τοῦ γεγονότος ὅτι περιέχουν μόνον τὰς υλίμαυας τῶν δεδομένων, ἐμφράζουν τὰς συνθήκας συμβιβαστότητος τὰς ὁποίας εἶναι ἀπαραίτητον νά πληροῦν αἱ υλίμαυες διὰ νά εἶναι δυνατὴ ἡ πραγματοποίησις ὁμοίων φαινομένων. Τὰς ὀνομάζομεν συνθήκας ομοιότητος.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐπὶ πλέον ὅτι εἰς ἕναστον σύστημα δεδομένων $(a_1, \dots, a_\mu)$ ἀντιστοιχεῖ ἓν καί μόνον φαινόμενον. Τότε ἡ στήλη (x_i, x_i) παριστᾷ τό φαινόμενον τό ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ δεδομένα $(\bar{\pi}_i, a_i)$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, αἱ σχέσεις (19.2.α) ἐμφανίζονται ὡς φυσικαὶ συνέπειαι τῶν σχέσεων (19.2.β). Θά ὀνομάσωμεν ἐπομένως τὰς (19.2.α) ἀποτελέσματα ομοιότητος.

Ὁ ὀρισμός τῆς ομοιότητος ὀδηγεῖ εἰς ἓν θεμελιῶδες θεώρημα, τό ὁποῖον δυνάμεθα νά ὀνομάσωμεν θεώρημα τῶν γινομένων τῶν δυνάμεων. Ἀποδεικνύεται δηλαδή ὅτι: "Αἱ σχέσεις ομοιότητος εἶναι ὑποχρεωτικῶς ἰσότητες μεταξύ γινομένων τῶν δυνάμεων τῶν υλιμάμων". Αὐτό ἐξεφράσθη τό πρῶτον ὑπὸ τοῦ BRIGMAN.

Θά δώσωμεν ἐν συνεχείᾳ μίαν γενικωτέραν ἀπόδειξιν, στηριζόμενοι εἰς τὰ θεωρήματα τοῦ CAUCHY, τοῦ DARBOUX καί τοῦ G. HAMMEL, σχετικῶς μέ τὰς προσθετικὰς συνεχεῖς καί ἀσυνεχεῖς συναρτήσεις.

Ἐστω ὅτι ἔχομεν ἐπιλύσει τὰς (19.1.α) ὡς πρὸς x_i ὁπότε θά ἔχωμεν

$$x_i = \omega_i(a_1, a_2, \dots, a_\mu) \quad (i=1, 2, \dots, \nu)$$

Ἐποθέτομεν ἐλ ἄλλου ὅτι ἔχομεν ἐπιλύσει τὰς (19.2.β) ὡς πρὸς $\bar{\pi}_\mu, \bar{\pi}_{\mu-1}, \bar{\pi}_{\mu-\rho+1}$.

$$\bar{\pi}_j = \phi_j(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_{\mu-\rho}) \quad (j=\mu, \dots, \mu-\rho+1) \quad (19.2. \gamma)$$

Ἡ ὑπαρξίς τῶν (19.2.β) ἔχει ὡς ἐπαυόλουθον τάς (19.2.α) αἱ ὁποῖαι γράφονται καί ὑπὸ τὴν μορφήν ἐνός λόγου, δύο τιμῶν, δύο ὁμοίων φαινομένων, ἥτοι

$$x_i = \frac{x_i}{x_i} = \frac{\omega_i(\tilde{\eta}_1 a_1, \tilde{\eta}_2 a_2, \dots, \tilde{\eta}_\mu a_\mu)}{\omega_i(a_1, a_2, \dots, a_\mu)} = f(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_\mu) \quad (19.2.δ)$$

Ἀπαλείφωμεν τὰ $\tilde{\eta}_j$ ἐκ τῆς (3.2.δ)

$$x_i = \frac{\omega_i(\tilde{\eta}_1 a_1, \dots, \tilde{\eta}_j' a_\mu)}{\omega_i(a_1, \dots, a_\mu)} = f'(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{\mu-j}) \quad (19.2.ε)$$

Θὰ δεῖξωμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις φ_j' καὶ f_j' εἶναι γινόμενα δυνάμεων, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν φ_j' . Χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ἀποδεικνύοντες κατ'ἀρχὴν τὸ ζητούμενον διὰ $\nu=1$, $\mu=3$ καὶ ἐλευθερίαν ὁμοιότητος ἴσην μὲ δύο. Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις γράφονται

$$x = \omega(a_1, a_2, a_3)$$

$$\tilde{\eta}_3 = \varphi'(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$$

$$x = \frac{x'}{x} = \frac{\omega(\tilde{\eta}_1 a_1, \tilde{\eta}_2 a_2, \tilde{\eta}_3 a_3)}{\omega(a_1, a_2, a_3)} = f(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3)$$

$$x = \frac{\omega(\tilde{\eta}_1 a_1, \tilde{\eta}_2 a_2, \varphi'_3 a_3)}{\omega(a_1, a_2, a_3)} = f'(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$$

Ἡ συνθήκη ὁμοιότητος (19.2.γ) ἐμφράζει ὅτι $\frac{a_3}{a_{o3}} = \varphi'\left(\frac{a_1}{a_{o1}}, \frac{a_2}{a_{o2}}\right)$ διότι

ἐν γένει $\tilde{\eta} = a/a_o$ ἐνθα a εἶναι μία τυχούσα τιμὴ καὶ a_o εἶναι μία ὠρισμένη τιμὴ, ἀντιστοιχοῦσα εἰς ὠρισμένον φαινόμενον τοῦ συνόλου. Ἡ σχέση αὕτη γράφεται ἐπίσης

$$a_3 = g(a_1, a_2) \quad (19.2.ζ)$$

Ἡ συνάρτησις g ἔχει ἐξ ἄλλου τὴν ιδιότητα

$$\frac{a'_3}{a_3} = \frac{g(a'_1, a'_2)}{g(a_1, a_2)} = \varphi'\left(\frac{a'_1}{a_1}, \frac{a'_2}{a_2}\right) \quad (19.2.η)$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς (19.2.η) γράφεται

$$\frac{g(a'_1, a'_2)}{g(a_1, a_2)} = \frac{g(a'_1, a_2)}{g(a_1, a_2)} \cdot \frac{g(a'_1, a'_2)}{g(a'_1, a_2)}$$

$$\eta \quad \varphi\left(\frac{a'_1}{a_1}, \frac{a'_2}{a_2}\right) = \varphi'\left(\frac{a'_1}{a_1}, 1\right) \cdot \varphi'\left(1, \frac{a'_2}{a_2}\right)$$

$$\eta \text{ απλούστερον} \quad \varphi'(\eta_1, \eta_2) = \varphi'(\eta_1, 1) \cdot \varphi'(1, \eta_2). \quad (19.2.\theta)$$

Έργαζόμενοι ὁμοίως διὰ $a'_1 = \mu \cdot \nu \cdot a_1, a_2 = a_2$ ἔχομεν

$$\eta \quad \frac{g(\mu \cdot \nu \cdot a_1, a_2)}{g(a_1, a_2)} = \frac{g(\mu a_1, a_2)}{g(a_1, a_2)} \cdot \frac{g(\mu \cdot \nu \cdot a_1, a_2)}{g(\mu a_1, a_2)}$$

$$\varphi'(\mu \cdot \nu, 1) = \varphi'(\mu, 1) \cdot \varphi'(\nu, 1) \quad (19.2.\iota)$$

Θέτομεν $\ln \mu = \sigma, \ln \nu = \tau$ καὶ λογαριθμίζομεν τὴν σχέσηιν (19.2.ι) ὁπότε διὰ $\varphi''(\sigma + \tau) = \ln \varphi'(\mu \cdot \nu, 1)$ προϋπτει

$$\varphi''(\sigma + \tau) = \varphi''(\sigma) + \varphi''(\tau) \quad (19.2.\upsilon)$$

Ἡ σχέσηιν (19.2.υ) ἀποτελεῖ ἐξ ὁρισμοῦ τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην διὰ νὰ εἶναι μία συνάρτησις φ'' προσθετικὴ, ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς σ, τ . Θὰ περιορισθῶμεν κατ' ἀρχὴν εἰς τὰς προσθετικὰς συνεχεῖς συναρτήσεις. Συμφῶνως πρὸς τὴν σχετικὴν θεωρίαν αἱ μόναι λύσεις τῆς (19.2.υ) θὰ εἶναι τότε τῆς μορφῆς

$$\varphi''(\sigma) = \beta \sigma \quad (\beta = \text{σταθ.}) \quad (19.2.\lambda)$$

Ἐπομένως προϋπτει ὅτι $\varphi'(\mu, 1) = \mu^\beta$ καὶ $\varphi'(\nu, 1) = \nu^\beta$. Ἡ σχέσηιν (19.2.θ) δίδει τότε

$$\varphi'(\eta_1, \eta_2) = \eta_2 = \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \quad (19.2.\mu)$$

ἐνθα β_1, β_2 εἶναι σταθεροὶ ἐυθέται. Ἀπεδείχθη ἐπομένως ὅτι ἡ συνάρτησις φ' εἶναι ἐν γινόμενον δυνάμεων. Ἀπλὴ ἐφαρμογὴ τῆς τελείας ἐπαγωγῆς δεικνύει ὅτι τὰ αὐτὰ θὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν τῆς σχέσεως (19.2.ε).

Ἄς ἐξετάσωμεν τέλος τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ προσθετικαὶ συναρτήσεις εἶναι ἀσυνεχεῖς. Ἐχει ἀποδειχθῇ ὅτι ἐάν μία προσθετικὴ συνάρτησις εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς ἓν σημεῖον τότε

α) Εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς (CAUCHY).

β) Διὰ τυχόν πεπερασμένον διάστημα δὲν ἔχει ὅρια (DARBOUX).

γ) Είς τυχόν πεπερασμένον διάστημα, λαμβάνει τιμές ὅσον θέλομεν πλησιαζούσας οἰανδήποτε τυχούσαν τιμήν (HAMEL).

Δι' ἓνα φυσικόν ἢ μηχανικόν, μία τοιαύτη ἀσυνεχὴς προσθετικὴ συνάρτησις δέν δύναται νά θεωρηθῇ ὡς χρησιμοποιοῦσιμος, τούλάχιστον διά τήν υλασσιήν μηχανικήν. Πράγματι, τὰ χρησιμοποιοῦμενα μεγέθη εἰς τήν φυσικήν ἔχουν ὅρια διά πᾶν πεπερασμένον διάστημα καί παρουσιάζουν πεπερασμένον ἀριθμόν ἀσυνεχειῶν.

Ἐπομένως ιάθε προσθετικὴ συνάρτησις, παρουσιάζουσα ἔστω καί μίαν ἀσυνέχειαν, εἶναι ἀπαράδεκτος διά τὰ προβλήματα τῆς υλασσιῆς φυσικῆς. Αἱ μόναι προσθετικαί συναρτήσεις ποῦ δεχόμεθα εἶναι εἰς πᾶν σημεῖον των συνεχεῖς.

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι αἱ μόναι δυνατόι σχέσεις ὁμοιότητος θά εἶναι ἰσότητες μεταξύ γινομένων τῶν δυνάμεων τῶν υλιμάμων.

19.3 ΑΝΗΓΜΕΝΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ-ΑΝΗΓΜΕΝΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ἐν τοῦ θεωρήματος τῶν γινομένων τῶν δυνάμεων προκύπτει κατὰ συνθετικόν τρόπον ἡ ἔκφρασις τῆς ὑπάρξεως ὁμοιότητος, ἥτοι δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν συγχρόνως τὰς συνθήκας καί τὰ ἀποτελέσματα τῆς ὁμοιότητος.

Ἀπεδείξαμεν ὅτι αἱ σχέσεις (19.2. α) καί (19.2. β) εἶναι μονώ-νυμοι, ἐπομένως δύνανται νά γραφοῦν ὡς ἑξῆς

$$x_i = \beta_i^{\beta_{i1}} \cdot \beta_i^{\beta_{i2}} \dots \beta_i^{\beta_{i\mu}} \quad (i=1, 2, \dots, \nu) \quad (19.3. \alpha)$$

$$\beta_i^{\gamma_{i1}} \cdot \beta_i^{\gamma_{i2}} \dots \beta_i^{\gamma_{i\mu}} = 1 \quad (i=1, 2, \dots, \rho) \quad (19.3. \beta)$$

Ἄν ἀντιταστασῶμεν ἐνᾶσθιν υλίμαα x_i, β_i διά τοῦ λόγου δύο τιμῶν, δύο ὁμοίων φαινομένων $x_i = \frac{x'_i}{x_i} = \frac{\alpha_i^{\beta_{i1}} \dots \alpha_i^{\beta_{i\mu}}}{\alpha_i^{\beta_{i1}} \dots \alpha_i^{\beta_{i\mu}}}$ αἱ σχέσεις (19.3. α) καί (19.3. β) λαμβάνουν τότε τήν μορφήν

$$\frac{x'_i}{\alpha_i^{\beta_{i1}} \dots \alpha_i^{\beta_{i\mu}}} = \frac{x_i}{\alpha_i^{\beta_{i1}} \dots \alpha_i^{\beta_{i\mu}}} \quad (19.3. \gamma)$$

$$\alpha_i^{\gamma_{i1}} \dots \alpha_i^{\gamma_{i\mu}} = \alpha_i^{\gamma_{i1}} \dots \alpha_i^{\gamma_{i\mu}} \quad (19.3. \delta)$$

Εἰς τήν περίπτωσιν ὑπάρξεως μίας καί μόνης λύσεως, τό σύστημα (19.3. γ) εἶναι συνέπεια τοῦ συστήματος (19.3. δ). Αὐτό σημαίνει ὅτι, ὅταν αἱ ποσότητες

$$A_i = \alpha_i^{\gamma_{i1}} \dots \alpha_i^{\gamma_{i\mu}} \quad (i=1, 2, \dots, \rho) \quad (19.3. \epsilon)$$

λαμβάνουν διαφόρους τιμές, αι ποσότητες

$$X_i = \frac{X_i}{a_1^{A_i} \dots a_\mu^{B_{\mu i}}} \quad (i=1,2,\dots,\nu) \quad (19.3.ζ)$$

λαμβάνουν άλλας αντίστοιχους τιμές και ισχύει και τό αντίστροφο, έπομένως αι X_i είναι συναρτήσεις των A_i , ήτοι

$$X_i = F(A_i) \quad (19.3.η)$$

Τά γενικευμένα μονώνυμα X_i, A_i ονομάζομεν άνηγμένας μεταβλητάς. Τά X_i είναι αι άνηγμέναι άγνωστοι, ένω τά A_i είναι τά άνηγμένα δεδομένα. Αι έξισώσεις (19.3.η) ονομάζονται άνηγμέναι έξισώσεις. Γενικώς δέ θά έχωμεν ότι

1) Ό αριθμός των άνηγμένων άγνωστων ίσοῦται πρός τόν αριθμόν των άγνωστων.

2) Ό αριθμός των άνηγμένων δεδομένων ίσοῦται μέ τόν αριθμόν των συνθηκών ομοιότητας, ή αιόμη μέ τόν αριθμόν των σχέσεων ομοιότητας μείον τόν αριθμόν των άγνωστων. Έπομένως θά είναι τό πολύ έσος μέ τόν αριθμόν των δεδομένων και εις τήν περίπτωση αυτήν όλαι αι υλίμαες των δεδομένων γίνονται μοναδιαίαι και ή ομοιότης εύφύλλεται εις ταυτότητα.

Τά πλεονεκτήματα των άνηγμένων έξισώσεων είναι κεφαλαίωδη διά τούς έξής λόγους:

1) Η άναπαράστασις των πειραματιών αποτελεσμάτων άπλοποιείται άπιστεύτως πολύ. Είς μίαν σελίδα δύναμεθα νά χαράξωμεν μίαν καμπύλην συνδέουσαν δύο μεταβλητάς ή τό πολύ έν διάγραμμα συνδέον τρεῖς μεταβλητάς. Έάν υπάρχουν $\nu=2$ άγνωστοι και $\mu=4$ δεδομένα και εάν θελήσωμεν νά έχωμεν όλα τά αποτελέσματα διά έῦοσι τιμάς μίας έυάστης έν των τριών επί πλέον μεταβλητών, θά έχρειάζοντο 8.000 διαγράμματα διά νά άναπαρασταθῇ πλήρως ή σχέσις $f(x,y,a,\beta,\gamma)=0$. Διά τῆς χρήσεως άνηγμένης έξίσωσεως και μεταβλητών, δύο μόνον διαγράμματα είναι άριετά.

2) Η σύγκρισις των πειραματιών αποτελεσμάτων είναι επίσης ταχυτάτη. Είς τό προηγούμενον παράδειγμα, μέ χρῆσιν άνηγμένων έξισώσεων, ή σύγκρισις των αποτελεσμάτων δύο έργαστηρίων γίνεται εύκολως, δι' άλλῆς έπιθέσεως των διαγραμμάτων, άδιαφοροῦμεν δέ διά τάς μονάδας μετρήσεως των δύο έργαστηρίων, δεδομένου ότι τά χρησιμοποιούμενα εις τάς άνηγμένας έξισώσεις μεγέθη είναι άδιάστατα.

19.4 ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Η αναζήτησις των νόμων τῆς φυσικής ομοιότητας ενός συνόλου φυσικών φαινομένων δύναται νά πραγματοποιηθῇ κατά δύο διαφόρους μεθόδους.

1) Μέθοδος απ'εύθείας αναλητήσεως. Στηρίζεται εις αυτόν ναθ' έαυτόν τόν όρισμόν της ομοιότητας. Διά νά τήν εφαρμόσωμεν αρχίζομεν γράφοντες τās έξισώσεις τών όμοίων φυσικών φαινομένων ναί έμφράζομεν τήν ταυτότητά των δι'οίανδήποτε τιμήν τών άγνώστων.

Ός πρώτον βασισμόν μειονέτημα της μεθόδου αυτής προούπτει έπομένως ή αναγκαιότητα γνώσεως όλων τών έξισώσεων τών φυσικών φαινομένων (εις πλείστα φυσικά φαινόμενα άγνοοῦμεν τās άκριβεῖς έξισώσεις, πλην όμως έχομεν άνάγκην της μελέτης των επί όμοιωμάτων, π.χ. μελέτη λιμένος, ρευμάτων κ.λπ.).

Έάν εις μίαν φυσικήν έξίσωσιν έχωμεν μόνον δύο μονώνυμα τμήματα, αι σχέσεις ομοιότητας θά εῖναι προφανώς ή έξίσωσις τών υλίσματων τών δύο τμημάτων. Έάν μία έξίσωσις περιέχη περισσότερα τών δύο, μονώνυμα τμήματα, πρέπει νά έξισωθούν αι υλίμαες όλων τών μονώνυμων όρων. Πράγματι, άς έξετάσωμεν τήν περίπτωση μιās έξισώσεως της μορφής.

$$X = A_1 + A_2 \quad (19.4. \alpha)$$

Θέλομεν νά επαληθεύεται ναί όταν πολλαπλασιασθῇ έναστος όρος δι'αύθαιρέτου παράγοντος. Π.χ., έάν μ, ν, ξ εῖναι τρεῖς αύθαιρέτοι παράγοντες, πρέπει νά ίσχύη

$$\mu X = \nu A_1 + \xi A_2 \quad (19.4. \beta)$$

Η σχέσις (19.4. α) δέον όπως έπισύρη τήν σχέσιν (19.4. β) διά τυχούσαν τιμήν τών μ, ν, ξ . Δέον έπομένως, διά καταλλήλου άφαιρέσεως, νά έχωμεν

$$(\nu - \mu)A_1 + (\xi - \mu)A_2 = 0 \quad (19.4. \gamma)$$

Η επαλήθευσις τών σχέσεων (19.4. γ) διά $A_1=0, A_2=1$ ναί $A_1=1, A_2=0$ δίδει τήν συνθήκη

$$\mu = \nu = \xi \quad (19.4. \delta)$$

Αι τρεῖς υλίμαες πρέπει έπομένως νά εῖναι ίσαι ναί ή συνθήκη αυτή εῖναι αναγκαία ναί ικανή.

2) Μέθοδος διαστατικής αναλύσεως. Η μέθοδος αυτή εῖναι πολύ γενικωτέρα της προηγουμένης, μάς έπιτρέπει δέ τήν εύρεσιν τών νόμων ομοιότητας ενός συνόλου φυσικών φαινομένων άνόμην ναί εις τήν περίπτωση νατά τήν όποιαν άγνοοῦμεν τās έξισώσεις, αι όποῖαι διέπουν τά φαινόμενα. Η ανάπτυξις της μεθόδου αυτής, επί τη βάσει νέων αρχών μαθηματικής αναλύσεως, άποτελεῖ τό άντικείμενον τοῦ κεφαλαίου 21.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 20.
ΝΟΜΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ
ΤΩΝ ΚΛΑΣΣΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

20.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΤΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ-ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εἰς τὴν παράγραφον 6.4.1 ὠρίσθη ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων τῆς γραμμικότητος, τῆς ὁμογενείας καὶ τῆς ἰσοτροπίας ἡ ἐξεταζομένη φυσικὴ περιοχὴ τῶν υλασσιμῶν ρευστῶν.

Τὸ σύνολον τῶν ἐξισώσεων τῆς ἀνωτέρω περιοχῆς διατρεῖται εἰς τρεῖς κατηγορίας:

1) Ἐξισώσεις ἐν τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς δυναμικῆς. Ἡ εὑρεσις τῆς γενικῆς των μορφῆς δίδεται εἰς τὴν παράγραφον 9.1, εἶναι δὲ αἱ τρεῖς ἐξισώσεις (9.1. θ)

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \bar{V} \text{grad} v_i \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + (\eta + \mu) \text{grad} \text{div} \bar{V} \quad (20.1. \alpha)$$

2) Ἐξισώσεις συνεχείας ἢ νόμος διατηρήσεως τῆς μᾶλης. Αὐτὴ ἐμφράζει (παράγραφος 9.2) ὅτι ἡ μᾶζα m τυχόντος τμήματος ἐνός ὑλικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον ἀμιολουθοῦμεν εἰς τὴν κίνησίν του, παραμένει σταθερά, προϋπτεῖ δὲ ἡ ἐξίσωσις (9.2. α), ἥτοι ἡ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{V}) = 0 \quad (20.1. \beta)$$

3) Ἐξισώσεις καταστάσεως. Πρόκειται περὶ τῶν σχέσεων (9.3. α) ἕως (9.3. δ) αἵτινες ἐμφράζουν τὴν ἐξάρτησιν τῶν μεγεθῶν p, η, μ ἀπὸ τὴν εἰδικὴν μᾶζαν ρ καὶ τὴν θερμοκρασίαν T (ἴδε παράγραφον (9.3)). Λόγῳ τοῦ ὅτι αἱ σχέσεις αὗται διαφέρουν ἀνά κατηγορίας υλασσιμῶν ρευστῶν, δὲν δυνάμεθα νὰ τὰς ἐμφράσωμεν διὰ μίαν γενικὴν περιπτώ-

σιν. Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον, δέν λαμβάνομεν ἐπομένως ὑπ' ὄψιν τοὺς νόμους φυσικῆς ὁμοιότητος τοὺς προϋπτοντας ἐν τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν. Καθίσταται οὕτω πρόδηλον ἔν μειονέυτημα τῆς ἀπ' εὐθείας μεθόδου ἔναντι τῆς διαστατικῆς ἀναλύσεως. Ἀναγκαζόμεθα δηλαδή νά περιορίσωμεν τὴν φυσικὴν περιοχὴν, οὕτως ὥστε εἰς τὸ νέον ὑποσύνολον τῶν φαινομένων τῆς "περιορισμένης περιοχῆς" νά γνωρίζωμεν ἅπαντας τοὺς φυσικοὺς νόμους.

Θά ἐξετάσωμεν ἐν συνεχείᾳ φαινόμενα ἀσυμπιέστων ρευστῶν ἄνευ μεταφορᾶς θερμικῆς ἐνεργείας.

Ἐξ ὁρισμοῦ, διὰ τὰ ἀσυμπιέστα ρευστά (παράγραφος 9.5.2) ἰσχύουν αἱ ἐξισώσεις

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \bar{V} \text{grad} v_i = \frac{1}{\rho} f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i \quad (20.1. \gamma)$$

$$\text{div } \bar{V} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (20.1. \delta)$$

Εἰς τὸ γενικὸν πρόβλημα τῶν υλασσιμῶν ρευστῶν ἔχομεν ἔξ ἀγνώστους συναρτήσεις, τὰς

$$\bar{V}(x_i, t), \rho(x_i, t), p(x_i, t), T(x_i, t) \quad (20.1. \epsilon)$$

έννέα δεδομένας συναρτήσεις ἢ γνωστὰς σταθεράς, τὰς

$$x_i, t, f_i, \nu = \mu/\rho, \bar{\rho} \quad (20.1. \zeta)$$

καὶ ἔξ ἐξισώσεις, τρεῖς ἐν τῆς δυναμικῆς, μίαν ἐν τῆς διατηρήσεως τῆς μάζης καὶ δύο ἐν τῶν νόμων μεταστάσεως τῶν ρευστῶν.

Εἰς τὴν ἐν συνεχείᾳ ἐξεταζομένην φυσικὴν ὑπο-περιοχὴν τῶν ἀσυμπιέστων ρευστῶν ἄνευ μεταβολῆς θερμικῆς ἐνεργείας, θεωροῦμεν τὰ φαινόμενα ἀνεξάρτητα τῆς ἀγνώστου μεταβλητῆς $T(x_i, t)$. Θεωροῦμεν ἐπίσης γνωστὴν τὴν συνάρτησιν $\rho = \rho_0$.

Ἐν συμπεράσματι, τὸ θέμα ἀνάγεται εἰς πρόβλημα τεσσάρων ἐξισώσεων, τῶν (20.1. γ) καὶ (20.1. δ) μέ τέσσαρας ἀγνώστους συναρτήσεις, τὰς $\bar{V}$ καὶ p , καὶ έννέα δεδομένας, τὰς x_i, t, f_i, ν, ρ . Ἡ σχέση (19.1. α) λαμβάνει κατόπιν αὐτῶν τὴν μορφήν

$$F_i(\bar{V}, p, x_i, t, f_i, \nu, \rho) = 0 \quad (20.1. \eta)$$

20.2 ΕΚΛΟΓΗ ΤΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Ἐστὼ ἐν ἰδιαίτερον φαινόμενον τοῦ ὑποσυνόλου τῶν ἀσυμπιέστων ρευστῶν, λαμβάνον χώραν ἐν τῇ φύσει, καὶ τὸ ὁποῖον προτιθέμε-

θα νά μελετήσωμεν ἐν ἐργαστηρίῳ. Δίδεται ἐπομένως μία στήλη τιμῶν $\bar{V}_1, p_1, x_{i1}=L_1, t_1, f_{i1}, v_1$, ὑανοποιοῦσα τὰς σχέσεις (20.1.η).

Ἐστὼ ὅτι τὸ φαινόμενον ἐν ἐργαστηρίῳ χαρακτηρίζεται ἀπὸ μίαν ἄλλην στήλην τιμῶν $\bar{V}_2, p_2, x_{i2}=L_2, t_2, f_{i2}, v_2$, προερχομένην ἐκ τῆς πρώτης διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ὠρισμένας σταθεράς, δηλαδὴ

$$L_2 = \alpha L_1, \quad t_2 = \beta t_1, \quad p_2 = \gamma p_1, \quad \rho_2 = \delta \rho_1, \quad (20.2.α)$$

$$v_2 = \varepsilon v_1, \quad \bar{V}_2 = \zeta \bar{V}_1, \quad f_{i2} = \eta f_{i1}.$$

Λόγω τοῦ ὅτι ἡ ταχύτης ἐν γένει εἶναι μῆκος διὰ χρόνου, καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις (π.χ. βαρύτης) προέρχονται κατὰ κανόνα ἀπὸ δυναμικῶν πεδίων ἐνεργόν ἀνά μονάδα μάζης, προϋπάρχουν ἀμέσως μεταξὺ τῶν διαφορῶν σταθερῶν αἱ σχέσεις

$$\zeta = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \eta = \delta \left(f = \frac{\text{δύναμις}}{\text{ὄγκος}} \right) \quad (20.2.β)$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὀρισμῶν τῆς παραγράφου 19.1, αἱ σταθεραὶ $\alpha, \beta, \dots$ αποτελοῦν τὰς κλίμακας ομοιότητος, τὰς ὀρίζομεν δὲ ἀκριβέστερον ὡς ἑξῆς

α : κλίμακ᾽ ὁμολόγων γραμμικῶν διαστάσεων

β : κλίμακ᾽ ὁμολόγων χρόνων

γ : κλίμακ᾽ ὁμολόγων πιέσεων

δ : κλίμακ᾽ ὁμολόγων εἰδωτῶν μαζῶν

ε : κλίμακ᾽ ὁμολόγων κινηματικῶν συντελεστῶν συνευτιμότητος

ζ : κλίμακ᾽ ὁμολόγων ταχυτήτων

η : κλίμακ᾽ ὁμολόγων δυνάμεων εἰς τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου

20.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ-ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Διὰ νά εἶναι τὸ φαινόμενον εἰς τὸ ἐργαστήριον ὅμοιον πρὸς τὸ εἰς τὴν φύσιν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ μία τυχοῦσα στήλη τιμῶν τῶν σταθερῶν καὶ μεταβλητῶν τοῦ νά ὑανοποιῇ τὰς (20.1.η). Ἐχομεν ἐπομένως τὰς ἐξισώσεις.

Φαινόμενον εἰς τὴν φύσιν. Ἐξισώσεις (20.1.γ) καὶ (20.1.δ) με δεύτην 1 (V_1, t_1 , κ.λπ.).

Φαινόμενον εἰς τὸ ἐργαστήριον. Ἐξισώσεις (20.1.γ) καὶ (20.1.δ) με δεύτην 2 (V_2, t_2 , κ.λπ.).

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ φαινομένου ἐν ἐργαστηρίῳ τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν τοῦ ἐκ τῶν σχέσεων (20.2.α) καὶ προϋπάρχουν τελικῶς αἱ σχέσεις

$$\frac{\zeta}{\beta} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \bar{V}_i \text{grad} v_i \right) = \frac{\eta}{\delta} \left(\frac{1}{\rho_1} f_{i1} \right) - \frac{\gamma}{\delta \alpha} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_{i1}} \right) + \frac{\varepsilon \zeta}{\alpha^2} \left(v_1 \Delta v_i \right), \quad (20.3.α)$$

$$\frac{Z}{a} \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (20.3. \beta)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σχέση (20.3.β) ἱκανοποιεῖται δι' οἵανδήποτε τιμὴν τῶν Z καὶ a . Ἐπομένως, δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις ροῆς τῶν ἀσυμπιέστων ρευστῶν οὐδεμίαν προσδίδει δέσμευσιν εἰς τὴν μελέτην τῶν δύο ὁμοίων φαινομένων. Αἱ σχέσεις ομοιότητος θὰ προϋψουν ἀπὸ τὰς σχέσεις (20.3.α) καὶ μόνον, ἐπὶ τῇ βάσει δέ τῶν ὅσων ἀναφέρονται εἰς τὴν παράγραφον 19.4, προϋπτοῦν αἱ ἀάτωθι ἐξισώσεις μεταξὺ υλίσμαων

$$\frac{Z}{\beta} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\gamma}{a \cdot \delta} = \frac{\varepsilon \cdot Z}{a^2} \quad (20.3. \gamma)$$

Αἱ ἐξισώσεις (20.3.γ) ἀποτελοῦν τὰς ζητούμενας σχέσεις ομοιότητος.

Δι' ἐφαρμογῆς τῶν (20.2.β) θὰ λάβουν τὴν μορφήν

$$\frac{a}{\beta^2} = 1 = \frac{\gamma}{\delta \cdot a} = \frac{\varepsilon}{a \cdot \beta} \quad (20.3. \delta)$$

Πρὸς διαχωρισμὸν τῶν εἰς συνθήκας καὶ ἀποτελέσματα ομοιότητος, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $Z = a/\beta$ καὶ γ εἶναι αἱ υλίσμαες τῶν ἀγνώστων καὶ δ, ε αἱ υλίσμαες τῶν δεδομένων.

Λόγῳ τοῦ ὅτι ἔχομεν τρεῖς σχέσεις ομοιότητος καὶ τρεῖς υλίσμαας ἀγνώστων, προϋπτοῦν μόνον συνθῆμαι ομοιότητος. Αὗται εἶναι

$$a = \beta^2$$

$$\gamma = a \cdot \delta \quad (20.3. \epsilon)$$

$$\varepsilon = a \cdot \beta = a^{\frac{3}{2}}$$

Σημειωτέον ὅτι αἱ σχέσεις (20.2.β) δύνανται νά θεωρηθοῦν ἀποτελέσματα ομοιότητος.

Ἐξ ἄλλου, δι' ἀπλῶν ἀντικαταστάσεων, αἱ τρεῖς συνθῆμαι ομοιότητος (20.3.ε) ἀνάγονται εἰς τὰς ἐξῆς

$$\frac{a}{\beta} = Z = \sqrt{a} \quad \text{Νόμος FROUDE}$$

$$\varepsilon = a \sqrt{a} = a Z \quad \text{Νόμος REYNOLDS} \quad (20.3. \zeta)$$

$$\gamma = Z^2 \delta \quad \text{Νόμος EULER}$$

Παρατηρούμεν ότι υφίστανται τρεῖς σχέσεις μεταξύ πέντε υλιμάων, ἐπομένως ἔχομεν θεωρητικῶς ἐλευθερίαν ὁμοιότητος ἴσην μέ 2. Ἐν τῇ πράξει εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νά ἐυλέξωμεν τήν υλίμαα τῶν γραμμικῶν διαστάσεων (διά νά ἐπιτύχωμεν τήν ζητουμένην σμίμυρυνσιν) ὡς καί τό ρευστόν, τό ὁποῖον θά χρησιμοποιηθῇ ἐν ἐργαστηρίῳ. Δεσμεύομεν οὕτω ὑποχρεωτικῶς τās υλίμαας α, δ καί ε ὁπότε αἱ σχέσεις (20.3.ε) δέν ἔχουν λύσιν ἐν γένει. Διά τήν περαιτέρω διερεύνησιν ὡς πρός τήν ὑπαρξίν ἢ μή δυνατότητος ἀναπαραγωγῆς ὁμοίων φαινομένων εἰς τήν μηχανικήν τῶν ρευστῶν, περιοριζόμεθα εἰς τās συνήεις περιπτώσεις ροῆς τῆς ὑδραυλικῆς.

20.4 ΡΟΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΑΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΝ

Πρόκειται διά τās περιπτώσεις ροῆς τοῦ ὕδατος ἐντός ἀνοικτῶν ἀγωγῶν, φυσικῶν ἢ τεχνητῶν. Ἡ κίνησις δημιουργεῖται ὑπό τήν ἐπήρεια τῆς βαρύτητος. Ἐπομένως αἱ ἐλῶτεριαι δυνάμεις θά εἶναι $\vec{f} = -g\vec{g}$.

Αἱ σχέσεις ὁμοιότητος δίδονται ἀπό τās (20.3.ζ), ἐπευράτησεν δέ εἰς τήν ὑδραυλικήν νά γράφωνται ὑπό τήν μορφήν

$$F = \frac{V_1}{\sqrt{gL_1}} = \frac{V_2}{\sqrt{gL_2}} = \sigma \tau a \theta. \quad \text{Νόμος FROUDE} \quad (20.4. \alpha)$$

$$R = \frac{V_1 \cdot L_1}{\nu} = \frac{V_2 \cdot L_2}{\nu} = \sigma \tau a \theta. \quad \text{Νόμος REYNOLDS} \quad (20.4. \beta)$$

$$E = \frac{P_1}{\rho_1 V_1^2} = \frac{P_2}{\rho_2 V_2^2} = \sigma \tau a \theta. \quad \text{Νόμος EULER} \quad (20.4. \gamma)$$

Τά μονώνυμα τῶν ἀνωτέρω σχέσεων εἶναι ἀδιάστατα καί ὀνομάζονται ἀντιστοίχως, ἀριθμός FROUDE, ἀριθμός REYNOLDS καί ἀριθμός EULER. Ἐπί τῆς φυσικῆς σημασίας τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμός τοῦ FROUDE παριστᾷ τόν λόγον τῶν δυνάμεων ἀδρανείας πρὸς τās δυνάμεις βαρύτητος, ὁ ἀριθμός REYNOLDS τόν λόγον τῶν δυνάμεων ἀδρανείας πρὸς τās δυνάμεις συνεπιμότητος καί τέλος ὁ ἀριθμός EULER τόν λόγον τῶν δυνάμεων ἐκ πίεσεων πρὸς τās δυνάμεις ἀδρανείας.

Ὡς ἤδη ἀνεφέρθη εἰς τήν παράγραφον 20.3, ἡ ὑποχρεωτική δέσμευσις τῶν υλιμάων α, δ καί ε ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν ἀδυναμίαν ἀναπαραγωγῆς ἐν ἐργαστηρίῳ ἐνός φαινομένου, ὁμοίου πρὸς τό πραγματιόν. Πράγματι, ἡ ἀναπαραγωγή ὁμοίων φαινομένων ἐπιβάλλει εἰς τόν λόγον τῶν κινήματιων συντελεστῶν συνεπιμότητος τήν σχέσιν

$$\varepsilon = \frac{V_2}{V_1} = \alpha^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (20.4. \delta)$$

Αὐτό, ὡς φαίνεται εἰς τό ἐπόμενον παράδειγμα, εἶναι πραυτιῶς ἀδύνατον νά ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰ ὁμοιώματα.

Ἐστὼ ὅτι πρόκειται νά μελετηθῇ ἐν ἐργαστηρίῳ ἡ ροή ὑπεράνω τοῦ ἐυχειλιστοῦ ἐνός φράγματος καί ὅτι ὁ ἐντός τοῦ ἐργαστηρίου διαθέσιμος χῶρος καί αἱ διαστάσεις τοῦ ἔργου ἐπέβαλλον μίαν κλίμακα ὁ-

μολόγων γραμμικῶν διαστάσεων $\alpha = \frac{1}{25}$.

Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτάς, θά ἔπρεπε νά χρησιμοποιηθῇ ἐν ἐργαστηρίῳ, ρευστόν συντελεστοῦ συνευτιμότητος ἴσου πρὸς τό $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{125}$

τοῦ συντελεστοῦ συνευτιμότητος τοῦ ὕδατος. Ἐν τῇ πράξει, δέν ὑπάρχει ρευστόν εὐχρηστον καί ὄχι πολὺ δαπανηρόν μέ συντελεστήν συνε-

υτιμότητος τῆς τάξεως τοῦ $\frac{1}{125}$, εἴμεθα δέ ὑποχρεωμένοι νά χρησιμο-

ποιῶμεν καί ἐν ἐργαστηρίῳ τό ὕδωρ, ὁπότε $\varepsilon = 1$ καί ἐπομένως δέν ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη (20.4.δ).

Ἐν συμπεράσματι, ἡ μελέτη ὑδραυλικῶν ἔργων δι' ὁμοιωμάτων ὑπὸ σμίρυκσιν εἶναι ἀδύνατος εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τῆς παρούσης παραγράφου.

Ἡ περαιτέρω ὁμῶς διερεύνησις τῶν εἰδιῶν νόμων, οἱ ὅποιοι διέπουν τὴν κίνησιν τοῦ ὕδατος καί δὴ ἡ ἔννοια τῆς "τυρβώδους ροῆς" ἀποδεικνύει ὅτι εἰς πλεῖστας τῶν περιπτώσεων δέν ἀπαιτεῖται ἡ πληρωσις τῆς συνθήκης (20.4.δ), ἡ ὁποία ἄλλωστε ἐμφράζει τὸν νόμον τοῦ REYNOLDS. Ἐπ' αὐτοῦ θά ἐπανέλθωμεν εἰς τὴν παράγραφον 24.5 ἀφοῦ πρῶτον μελετηθοῦν τὰ φαινόμενα τῆς κινήσεως τῶν πραγματικῶν ρευστῶν καί γίνῃ ὁ διαχωρισμός τῆς ροῆς εἰς στρωτὴν καί εἰς τυρβώδη.

20.5 ΡΟΗ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΑΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΝ

Ἡ κατηγορία αὕτη τῶν κινήσεων περιλαμβάνει τὰς περιπτώσεις ροῆς τοῦ ὕδατος τῆς προηγουμένης παραγράφου μέ τὴν ἀπλουστευτικὴν παραδοχὴν τῆς μηδενικῆς συνευτιμότητος.

Αἱ σχέσεις ὁμοιότητος θά εἶναι

$$\frac{Z}{\rho} = \frac{n}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta \cdot \alpha} \quad (20.5. \alpha)$$

καί ἐξ αὐτῶν προκύπτουν οἱ νόμοι FROUDE (20.4.α) καί EULER (20.4.γ).

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παραδοχὴ τοῦ τελείου ρευστοῦ μᾶς ἀπαλλάσσει ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ REYNOLDS καί ἐπομένως ὑπάρχουν δύο σχέσεις μεταξύ τεσσάρων κλιμάκων. Ἡ ἐλευθερία ὁμοιότητος εἶναι θεωρητικῶς ἴση μέ 2. Ἐπειδὴ ὁμῶς διὰ τὰς ὑδραυλικὰς μελέτας εἴμεθα ὑπο-

χρεωμένοι νά ἐυλέξωμεν, ὅπως καί προηγουμένως, τήν κλίμακα συμπίρυνσεως α καί νά χρησιμοποιήσωμεν εἰς τό ἐργαστήριον ὡς ὑγρόν τό ὕδωρ, ὁπότε $\delta = 1$, ἔχομεν τελικῶς δύο σχέσεις μεταξύ τῶν δύο κλιμάκων ζ καί γ .

Ἐν συμπεράσματι, διά τήν κατηγορίαν αὐτήν τῶν κινήσεων, ἡ μελέτη ἐπὶ ὁμοιώματος διά $\alpha \neq 1$ εἶναι δυνατή κατὰ ἓνα καί μόνον τρόπον, δηλαδή ὅλαι αἱ κλίμακες ὁρίζονται μονοσήμαντα ἀπό τὰς α καί δ .

Ἀναλυτικώτερον δέ θά ἔχωμεν διά τὰ διάφορα μεγέθη τὰς σχέσεις

-Πιέσεις ἐυπεφρασμένα εἰς ὕψος ὕδατος

$$\frac{P_2/\rho g}{P_1/\rho g} = \alpha$$

Αἱ πιέσεις εἰς τό ὁμοίωμα ἀνολοιθοῦν τήν σμίμυρυνσιν τῶν γραμμικῶν διαστάσεων.

Ἐφαρμογή: Διά $\alpha = \frac{1}{25}$ καί μετρηθεῖσαν εἰς τό ἐργαστήριον πίεσιν $\frac{P_2}{\rho g} =$

$= 0.50m$ στήλης ὕδατος, ἀντιστοιχεῖ εἰς τό πραγματικόν φαινόμενον πίε-

σιν $\frac{P_1}{\rho g} = \frac{0.50}{\alpha} = 12.5m$.

-Χρόνοι καί περίοδοι

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\alpha}$$

Ἡ χρονική διάρκεια ἐνός φαινομένου εἰς τό ὁμοίωμα (ἡ περίοδος ἐνός κυματισμοῦ κ.λπ.) συστέλλεται κατὰ τήν τετραγωνικήν ρίζαν τῆς γραμμικῆς σμίμυρυνσεως.

Ἐφαρμογή: Διά $\alpha = \frac{1}{25}$ καί μετρηθέντα χρόνον ἐνός φαινομένου εἰς τό

ὁμοίωμα $t_2 = 2^h 30'$, ἡ διάρκεια τοῦ πραγματικοῦ φαινομένου θά εἶναι

$t_1 = \frac{2^h 30'}{\sqrt{\alpha}} = 12^h 30'$.

-Ταχύτητες

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\alpha}$$

Αἱ ταχύτητες εἰς τό ὁμοίωμα σμίμυρύνονται κατὰ τήν τετραγωνικήν ρίζαν τῆς γραμμικῆς σμίμυρυνσεως.

Εφαρμογή: Διά $a = \frac{1}{25}$ καί μετρηθεῖσαν ταχύτητα εἰς τό ἐργαστήριον $V_2 = 15 \text{ m/sec}$, ἀντιστοιχεῖ εἰς τό πραγματιῶν φαινόμενον ταχύτης $V_1 = \frac{1,50}{\sqrt{a}} = 7,5 \text{ m/sec}$

Παροχαί ὄγκου διά μέσου ὁμολόγων ἐπιφανειῶν

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V_2 S_2}{V_1 S_1} = a^{\frac{3}{2}}$$

Ἡ σμίμυρσις τῶν παροχῶν εἰς τό ὁμοῖωμα εἶναι ἐυθετιῇ συνάρτησις τῆς γραμμικῆς σμίμυρσεως μέ ἐυθέτην $2/5$.

Εφαρμογή: Διά $a = \frac{1}{25}$ καί μετρηθεῖσαν παροχήν εἰς τό φαινόμενον $Q_1 = 1500 \text{ m}^3/\text{sec}$, ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ὁμοῖωμα παροχή $Q_2 = Q_1 a^{\frac{3}{2}} = \frac{Q_1}{3125} = 0,48 \text{ m}^3/\text{sec}$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σμίμυρσις τῶν παροχῶν εἶναι ἐξαιρετικῶς μεγάλη καί ἐπομένως εὐκόλως ἀναπαριστῶμεν εἰς τό ἐργαστήριον τὰς πλημμυρικῆς παροχᾶς τῶν ποταμῶν καί χειμάρων.

-Δυνάμεις καί ἰσχύες

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{p_2 S_2}{p_1 S_1} = a^3$$

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{F_2 V_2}{F_1 V_1} = a^{\frac{7}{2}}$$

Εφαρμογή: Διά $a = \frac{1}{25}$ καί μετρηθεῖσαν δύναμιν καί ἰσχύν ὑδροστροβί-

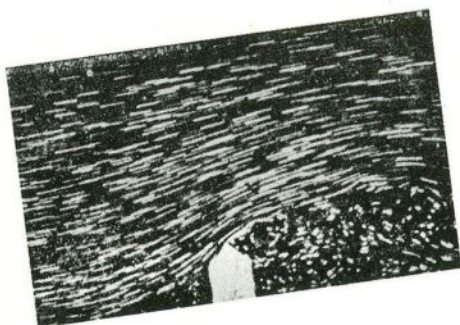
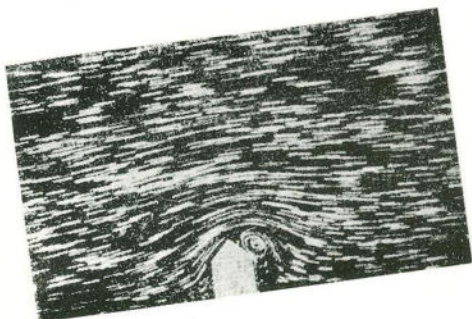
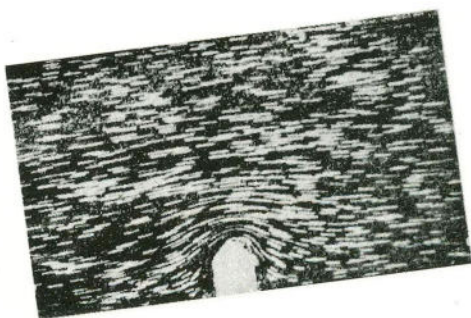
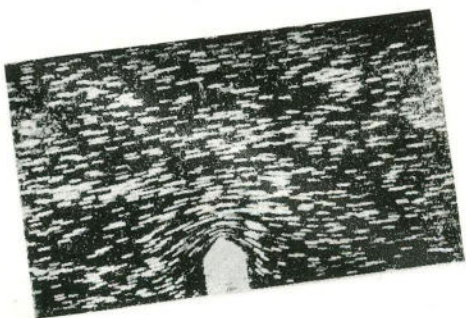
λου εἰς τό ὁμοῖωμα $F = 1 \text{ kp}$, $W_2 = 1,5 \text{ HP}$, ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν πραγματιῶν ὑδροστροβίλον δύναμιν $F_1 = 15625 \text{ kp} = 15,62 \text{ Mp}$ καί ἰσχύν $W_1 = 117187 \text{ HP}$

Παρατηροῦμεν γενικῶς ὅτι αἱ πλεῖσται τῶν περιπτώσεων ροῆς ὕδατος τῆς παραγράφου 20.4 ἀνάγονται εἰς τήν κατηγορίαν αὐτὴν τῶν τελείων ρευστῶν, διότι αἱ ροαὶ ἐν τῇ φύσει εἶναι κατὰ καινὸν τυρβώδεις.

20.6 ΡΟΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΥΠΟ ΠΙΕΣΙΝ

Πρόκειται διὰ τὰς περιπτώσεις ροῆς τοῦ ὕδατος ὑπὸ πίεσιν ἐντός τῶν διαφόρων υλειστῶν ἀγωγῶν. Ἡ ὅλη κίνησις δημιουργεῖται λόγω μιᾶς διαφορᾶς πιέσεων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ καί ἐπομένως τό πεδῖον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι μηδενικόν, διότι αἱ δυνάμεις βαρύτητος δέν ἐπηρεάζουν τήν ὅλην κίνησιν.

Εἰς τὰς σχέσεις (20.3.α) μηδενίζονται οἱ ὅροι $\frac{\pi}{\delta} \left(\frac{1}{\rho_i} f_{ii} \right)$ διότι $f_{ii} = 0$



Ροή περί τοπιῆς ἀνωμαλίας παρὰ τὴν παρεיאύ,
δι' αὐξανομένους ἀριθμούς REYNOLDS

όποτε προϋπτον αι σχέσεις όμοιότητας

$$\frac{Z}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta \cdot a} = \frac{\varepsilon Z}{a^2} \quad (20.6. a)$$

και έλ αύτών οι νόμοι REYNOLDS και EULER.

Παρατηρούμεν ότι ή έλλειψις πεδίου έλωτεριων δυνάμεων μās άπαλάσσει από τόν νόμον του FROUDE και έπομένως υπάρχουν δύο σχέσεις μεταξύ τών πέντε υλημάων α , β , γ , δ , ε (ή α , γ , δ , ε , Z , διότι $Z = \alpha/\beta$).

Η υποχρεωτική έυλογή τών υλημάων α , δ και ε δίδει τελιμώς δύο σχέσεις μεταξύ τών δύο υλημάων β και γ , όποτε ή όμοιότης είναι δυνατή ιατά ένα και μόνον τρόπον.

Αι σχέσεις διά τά διάφορα μεγέθη δίδονται συνοπτιμώς εις τόν πίνακα τής σελ.275.

Παρατηρούμεν όμως ότι ό νόμος του REYNOLDS δίδει διά τάς ταχύτητας τήν σχέσηιν

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\varepsilon}{a} = a^{-1} \quad (\text{διότι } \varepsilon=1)$$

όποτε διά $a = \frac{1}{25}$, θα πρέπη νά έχωμεν ταχύτητα εις τό όμοίωμα

$$V_2 = a^{-1} V_1 = 25 V_1$$

Αι προϋπτουσαι ταχύτητες εις τό όμοίωμα είναι πολύ μεγάλαι, και έπομένως πραγματοποιούνται δυσιόλως εις τό έργαστήριον.

Παρατηρούμεν όμως ότι διά τούς αναφερθέντας εις τήν παράγραφον 20.4 λόγους επί τών ειδύων νόμων, οίτινες διέπουν τήν ροήν τών πραγματιμών ρευστών, άπαλλασσόμεθα εις τάς πλειστος τών περιπτώσεων από τόν νόμον του REYNOLDS και αναγόμεθα εις τήν ιατηγορίαν τής έπομένης παραγράφου.

20.7 ΡΟΗ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΥΠΟ ΠΙΕΣΙΝ

Η σχέσις όμοιότητας θα είναι

$$\frac{Z}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta a}$$

και έυφράζει τόν νόμον του EULER.

Λόγω του ότι ύφίσταται μία μόνον σχέσηις μεταξύ τών υλημάων β και γ , δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν αυθαίρέτως και τήν υλίμαα τών όμολόγων πιέσεων γ .

Η όμοιότης θα ίσχύη πάντοτε, δι'οιανδήποτε τιμήν τής ιινητηρίου πιέσεως εις τό όμοίωμα και έπομένως ή γεωμετριική όμοιότης έλασφαλίζει πάντοτε διά τήν ιατηγορίαν τών ιινήσεων τής παραγράφου αυ-

τῆς τήν φυσικὴν ὁμοιότητα.

Διὰ τὰ διάφορα μεγέθη καὶ διὰ $\delta=1$ καὶ $\varepsilon=1$, θά ἔχωμεν ἐξ ἄλλου τὰς σχέσεις

-Χρόνοι καὶ περίοδοι

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{a}{\sqrt{\gamma}}$$

Ἐφαρμογή: Διὰ $a = \frac{1}{25}$, $\gamma = \frac{1}{9}$ καὶ χρόνον ἑνός φαινομένου εἰς τὸ ὁμοίωμα ἴσου πρὸς μίαν ὥραν, ἡ διάρκεια τοῦ πραγματικοῦ φαινομένου θά εἶναι $t_1 = \frac{25}{3} t_2 = 8,33 h$.

Ταχύτητες

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\gamma}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κλίμαξ τῶν ταχυτήτων ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν κλίμακα τῶν πιέσεων καὶ ἐπομένως δύναται νὰ καθορισθῇ αὐθαίρετως. Αἱ γραμμαὶ ροῆς παραμένουν σταθεραὶ διὰ τυχούσαν μεταβολὴν τοῦ διανύσματος τῆς ταχύτητος.

-Παροχαί, δυνάμεις, ἰσχύες

$$\frac{Q_2}{Q_1} = a^2 \sqrt{\gamma} ,$$

$$\frac{F_2}{F_1} = a^2 \gamma$$

$$\frac{W_2}{W_1} = a^2 \gamma^{\frac{3}{2}}$$

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ ΤΩΝ ΑΣΥΜΠΕΣΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ
(ἄνευ μεταφορᾶς θερμικῆς ἐνεργείας)

			ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ	
ροή με λευθέραν πιφάνειαν $f_1=f_2=0$ $f_3=-p g$	I	ΤΕΛΕΙΑ ΥΓΡΑ	Ἡ ὁμοιότης εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον Ἰσχύουν οἱ νόμοι FROUDE καὶ EULER	Πιέσεις (1)	a
				Ταχύτητες	$\sqrt{a}$
				Χρόνος	$\sqrt{a}$
ροαὶ ὑπὸ πίεσιν $\bar{p}=0$	II	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΥΓΡΑ ΕΙΣ ΣΤΡΩΤΗΝ ΡΟΗΝ ($R < R$ κρισίμου)	Ἡ ὁμοιότης εἶναι ἀδύνατος, ἐντός ἐάν πλη- ροῦται ἡ σχέση $\varepsilon = a^{\frac{1}{2}}$. Ἰσχύουν οἱ νόμοι FROUDE, REYNOLDS καὶ EULER.	Πιέσεις (1)	a
				Ταχύτητες	$\sqrt{a}$
				Χρόνος	$\sqrt{a}$
ροαὶ ὑπὸ πίεσιν $\bar{p}=0$	III	ΤΕΛΕΙΑ ΥΓΡΑ	Ἡ ὁμοιότης εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ ἐπὶ πλέον ἢ κλίμαξ τῶν κινήσεων δύναται νὰ ἐκλεγῇ αὐθαίρετως. Ἰσχύει ὁ νόμος EULER, ἡ δὲ γεωμετρικὴ ὁ- μοιότης ἐξασφαλίζει καὶ τὴν φυσικὴν ὁμοιότητα.	Παροχαί	$a^{\frac{1}{2}}$
				Δυνάμεις	δa^3
				Τοχύες	$\delta a^{\frac{3}{2}}$
ροαὶ ὑπὸ πίεσιν $\bar{p}=0$	IV	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΥΓΡΑ ΕΙΣ ΣΤΡΩΤΗΝ ΡΟΗΝ ($R < R$ κρισίμου)	Ἡ ὁμοιότης εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον. Ἰσχύουν οἱ νόμοι REYNOLDS καὶ EULER (Ἐν τῇ πράξει δυσκολία ἐφαρμογῆς τῆς φυ- σικῆς ὁμοιότητος λόγω τῆς σχέσεως $\frac{V}{V} = a^{\frac{1}{2}}$ ἢ ὁποῖα ἐ- πιβάλλει μεγάλας ταχύτητας εἰς τὰ ὁμοιώματα).	Πιέσεις (1)	a
				Ταχύτητες	$\sqrt{a}$
				Χρόνος	$\sqrt{a}$
ροαὶ ὑπὸ πίεσιν $\bar{p}=0$	IV	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΥΓΡΑ ΕΙΣ ΣΤΡΩΤΗΝ ΡΟΗΝ ($R > R$ κρισίμου)	Ἰσχύουν οἱ νόμοι ὁμοιότητος τῆς III (νόμοι τελεῶν ὑγρῶν)	Παροχαί	$a^2 \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}$
				Δυνάμεις	γa^2
				Τοχύες	$\delta \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$
ροαὶ ὑπὸ πίεσιν $\bar{p}=0$	IV	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΥΓΡΑ ΕΙΣ ΣΤΡΩΤΗΝ ΡΟΗΝ ($R < R$ κρισίμου)	Ἡ ὁμοιότης εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον. Ἰσχύουν οἱ νόμοι REYNOLDS καὶ EULER (Ἐν τῇ πράξει δυσκολία ἐφαρμογῆς τῆς φυ- σικῆς ὁμοιότητος λόγω τῆς σχέσεως $\frac{V}{V} = a^{\frac{1}{2}}$ ἢ ὁποῖα ἐ- πιβάλλει μεγάλας ταχύτητας εἰς τὰ ὁμοιώματα).	Κινητήριαι πιέσεις (1)	$\frac{\gamma}{\delta}$
				Ταχύτητες	$\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}$
				Χρόνοι	$a \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}$
ροαὶ ὑπὸ πίεσιν $\bar{p}=0$	IV	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΥΓΡΑ ΕΙΣ ΣΤΡΩΤΗΝ ΡΟΗΝ ($R < R$ κρισίμου)	Ἡ ὁμοιότης εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον. Ἰσχύουν οἱ νόμοι REYNOLDS καὶ EULER (Ἐν τῇ πράξει δυσκολία ἐφαρμογῆς τῆς φυ- σικῆς ὁμοιότητος λόγω τῆς σχέσεως $\frac{V}{V} = a^{\frac{1}{2}}$ ἢ ὁποῖα ἐ- πιβάλλει μεγάλας ταχύτητας εἰς τὰ ὁμοιώματα).	Παροχαί	$a^2 \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}$
				Δυνάμεις	γa^2
				Τοχύες	$\delta \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$
ροαὶ ὑπὸ πίεσιν $\bar{p}=0$	IV	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΥΓΡΑ ΕΙΣ ΣΤΡΩΤΗΝ ΡΟΗΝ ($R < R$ κρισίμου)	Ἡ ὁμοιότης εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον. Ἰσχύουν οἱ νόμοι REYNOLDS καὶ EULER (Ἐν τῇ πράξει δυσκολία ἐφαρμογῆς τῆς φυ- σικῆς ὁμοιότητος λόγω τῆς σχέσεως $\frac{V}{V} = a^{\frac{1}{2}}$ ἢ ὁποῖα ἐ- πιβάλλει μεγάλας ταχύτητας εἰς τὰ ὁμοιώματα).	Κινητήριαι πιέσεις (1)	$\varepsilon^2 a^{-2}$
				Ταχύτητες	εa^{-1}
				Χρόνοι	$\varepsilon^{-1} a^2$
ροαὶ ὑπὸ πίεσιν $\bar{p}=0$	IV	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΥΓΡΑ ΕΙΣ ΣΤΡΩΤΗΝ ΡΟΗΝ ($R < R$ κρισίμου)	Ἡ ὁμοιότης εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον. Ἰσχύουν οἱ νόμοι REYNOLDS καὶ EULER (Ἐν τῇ πράξει δυσκολία ἐφαρμογῆς τῆς φυ- σικῆς ὁμοιότητος λόγω τῆς σχέσεως $\frac{V}{V} = a^{\frac{1}{2}}$ ἢ ὁποῖα ἐ- πιβάλλει μεγάλας ταχύτητας εἰς τὰ ὁμοιώματα).	Παροχαί	εa
				Δυνάμεις	ρa^2
				Τοχύες	$\rho \varepsilon^2 a^{-1}$
ροαὶ ὑπὸ πίεσιν $\bar{p}=0$	IV	ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΥΓΡΑ ΕΙΣ ΣΤΡΩΤΗΝ ΡΟΗΝ ($R < R$ κρισίμου)	Ἡ ὁμοιότης εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ κατὰ ἓνα καὶ μόνον τρόπον. Ἰσχύουν οἱ νόμοι REYNOLDS καὶ EULER (Ἐν τῇ πράξει δυσκολία ἐφαρμογῆς τῆς φυ- σικῆς ὁμοιότητος λόγω τῆς σχέσεως $\frac{V}{V} = a^{\frac{1}{2}}$ ἢ ὁποῖα ἐ- πιβάλλει μεγάλας ταχύτητας εἰς τὰ ὁμοιώματα).	Ὁμόλογοι ἀπώλειαι φορτίου	$\varepsilon^2 a^{-2}$

(1) Αἱ πιέσεις μετρῶνται εἰς ὑψὺ ὑγροῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 21.

ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΙΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΜΙΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ

Ἡ διαστατική ἀνάλυσις, δίδουσα τὴν γενικὴν μορφήν τῶν ἐξισώσεων πού παριστάνουν σχηματικῶς τὰ φυσικὰ φαινόμενα, ἐφαρμόζεται σχεδόν εἰς ὁλόκληρον τὴν φυσικὴν. Δίδει μίαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ πολὺ ἀναλυτικωτέραν τοῦ ἀλγεβρικοῦ ὑπολογισμοῦ καὶ ἐπιτρέπει τὴν λήψιν πολυτίμων πληροφοριῶν ἐπὶ ἐνός φαινομένου, διότι περιγράφει τὸ φαινόμενον διὰ μιᾶς ἐξισώσεως ἀσφαλῶς ὁρθῆς ὡς πρὸς ὠρισμένας μεταβλητάς.

Ἡ γενικότης τῆς μεθόδου ἀποτελεῖ συγχρόνως τὴν δύναμιν καὶ τὴν ἀδυναμίαν της, διότι δίδει μίαν μερικὴν λύσιν ὅλων τῶν προβλημάτων χωρὶς νὰ δίδῃ πλήρεις ἐξισώσεις καὶ ἀφήνουσα εἰς τὴν κρίσιν τοῦ μηχανικοῦ τὴν ἐυλογίαν τῶν μεταβλητῶν πού ὑπεισέρχονται εἰς ἕναστον φαινόμενον.

Δεδομένου δέ ὅτι δίδει τὰς ἐξισώσεις ὑπὸ ἀνηγμένην μορφήν, ἔχει ὅλα τὰ ἀναφερθέντα ἤδη σχετικὰ πλεονεκτήματα. Τὰ προβλήματα τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν καὶ αἱ λύσεις των διὰ μελετῶν ἐπὶ προτύπων ἔδωσαν εἰς τὴν διαστατικὴν ἀνάλυσιν τὴν μεγάλην της σύγχρονον ἀνάπτυξιν. Ἐφαρμόζεται δέ τελευταίως καὶ εἰς τὸν τομέα τῆς ἀντοχῆς τῶν ὑλικῶν.

21.1 ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Γνωρίζομεν ὅτι οἰαδήποτε ἐπιστημονικὴ ἔκφρασις στηρίζεται εἰς ἕνα ὠρισμένον ἀριθμὸν φυσικῶν ἐννοιῶν διαφόρου μορφῆς, ὅπως τὸ μήκος, ὁ ὄγκος, ἡ μάζα κ.λπ., τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν ὀντότητας. Ἐκαστὴ φυσικὴ ὀντότης ἔχει ὠρισμένας ιδιότητας. Μεταξύ αὐτῶν, ἡ

χαρακτηριστικώτερα εἶναι τὸ μέγεθος καὶ ἐμφράζεται διὰ μιᾶς σχέσεως προσδιορισμοῦ τῆς μορφῆς

$$E_1 = f(E_2, E_3, \dots, E_p) \quad (21.1. \alpha)$$

εἰς τὴν ὁποίαν E_1 εἶναι τὸ μέγεθος τῆς φυσικῆς ὀντότητος, ἐμφραζόμενον συναρτήσῃ μιᾶς σειρᾶς μεγεθῶν $E_2, E_3, \dots, E_p$ ἅτινα ἐυλέγομεν ὡς θεμελιώδη μεγέθη.

Ἡ σχέσηις προσδιορισμοῦ πάσης φυσικῆς ὀντότητος ὀνομάζεται καὶ διαστατιωὴ ἐξίσωσις, διότι δίδεται πάντοτε ὑπὸ τὴν μορφήν ἐνός γινομένου τῶν δυνάμεων τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν, ἥτοι

$$E_1 = E_2^a \cdot E_3^b \cdot E_4^c \cdot E_5^d \cdots E_p^x \quad (21.1. \beta)$$

Οἱ ἐκθέται a, β, γ, δ , ὀνομάζονται διαστάσεις καὶ εἶναι τυχόντες ἀιέριοι ἢ υλασματοί ἀριθμοί. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ὑποχρεωτικοῦ τῆς μορφῆς (21.1. β) δι' οἵανδήποτε σχέσιν προσδιορισμοῦ εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποδείξεως τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς ὁμοιότητος (παράγραφος 19.2).

Ἡ ἐξέλιξις ἐνός φαινομένου εἶναι συνάρτησις ἐνός ὠρισμένου ἀριθμοῦ σταθερῶν ἢ μεταβλητῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα θὰ ὀνομάσωμεν ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς. Κατὰ τὴν διάρκειαν αὐτοῦ τοῦ φαινομένου, πολλὰ ἄλλα μεγέθη δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν καὶ νὰ ὑποστοῦν μεταβολάς, πλὴν ὅμως αἱ μεταβολαὶ τῶν συνδέονται μέ αὐτάς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Οἱ φυσικοὶ νόμοι, προερχόμενοι ἐκ τῆς θεωρίας ἢ καὶ κατ'εὐθεῖαν ἐκ τοῦ πειράματος, δίδουν τὴν μαθηματικὴν σχέσιν τῆς μορφῆς (18.1. α) μεταξύ τοῦ μεγέθους E_1 καὶ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $E_2, E_3, \dots, E_p$.

Δυνάμεθα δέ νὰ γράψωμεν τὴν (18.1. α) ὑπὸ τὴν μορφήν

$$f(E_1, E_2, \dots, E_p) = 0 \quad (21.1. \gamma)$$

Αἱ σχέσεις (18.1. α) ἢ (21.1. γ) ἐμφράζουν ἓνα φυσικόν νόμον. Πρέπει ἐπομένως νὰ ἔχουν τὴν βασικὴν ιδιότητα πού τὰς καθιστᾷ ἀνεξαρτήτους τῶν ἐυλεγιστῶν, διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαφορῶν μεγεθῶν, μονάδων. Ἡ ιδιότης αὕτη εἶναι τὸ ἀναλλοίωτον ὡς πρὸς τὴν ἀλλαγὴν τοῦ μεγέθους τῶν μονάδων.

Ἡ μαθηματικὴ συνθήκη, ἡ ἐμφράζουσα αὐτὴν τὴν ιδιότητα, συνίσταται εἰς τὸ ὅτι ἡ σχέσηις (21.1. γ) πρέπει νὰ εἶναι ὁμογενὴς ὡς πρὸς ἕναστον τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν.

Γενιωτέρον ἀποδεικνύεται εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν ὅτι μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$Z = a + \beta + \gamma + \dots + \nu$$

εἶναι διαστατικῶς ὁμογενής, ἐάν καὶ μόνον αἱ μεταβληταὶ $Z, a, \beta, \gamma, \dots$

ἔχουν ἅπασαι τὴν αὐτὴν διάστασιν. Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀναγκαία καὶ ἰανή. Ἐπιτρέπει δὲ μίαν πρώτην ἐπαλήθευσιν τοῦ ἀποτελέσματος ἐνὸς τυχόντος ὑπολογισμοῦ. Πλὴν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων ἐφαρμόζεται ἐξ ἄλλου εἰς τὰς διαφορὰς ἐξισώσεις καὶ τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν.

Ἐν συμπεράσματι, ἡ μαθηματικὴ ἔμφρασις ἐνὸς φυσικοῦ νόμου εἶναι ὁμογενὴς ὡς πρὸς τὰ θεμελιώδη μεγέθη. Ἐπομένως μία γενικὴ ἐξίσωσις φυσικῆς γράφεται ὑπὸ τὴν μορφήν ἐνὸς ἀθροίσματος πλήθους ὄρων, ἔχόντων τὸν αὐτὸν βαθμὸν ὡς πρὸς τὰ θεμελιώδη μεγέθη.

Πρόκειται βεβαίως διὰ μίαν ὁμογένειαν ὡς πρὸς ἕναστον τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν ἑκχωριστά. Ἐναστος ὅρος δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν ἐνὸς γινομένου δύο παραγόντων, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι γινόμενον τῶν δυνάμεων τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν καὶ ὁ αὐτός δι' ὅλους τοὺς ὅρους καὶ ὁ δεύτερος εἶναι μία συνάρτησις παραμέτρων ἄνευ διαστάσεων.

Πλὴν ὅμως, ἡ μελέτη τῶν ὁμογενῶν συναρτήσεων ἐπιτρέπει νὰ προχωρήσωμεν μαυρύτερον καὶ νὰ γράψωμεν αὐτὴν τὴν φυσικὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ μίαν μορφήν πλεον λεπτὴν καὶ ἀπλουστεράν. Ἡ ἀναζήτησις τῆς εἰδικῆς αὐτῆς μορφῆς ἀποτελεῖ ἓνα τῶν κυρίων σιοπῶν τῆς διαστατικῆς ἀναλύσεως καὶ περιλαμβάνεται ἐν περιλήψει εἰς τὸ θεώρημα τῆς ἐπομένης παραγράφου.

21.2 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ π (ἢ VASCHY-BUCKINGHAM)

Τὸ θεμελιώδες αὐτὸ θεώρημα ἔχει ὡς ἀκολούθως:

Ἡ γενικὴ μορφή οἷα σδῆποτε πλήρους ἐξισώσεως τῆς φυσικῆς (21.1.γ) δύναται νὰ γραφῇ

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{p-q}) = 0$$

Οἱ ὅροι π παριστάνουν μονώνυμα ἄνευ διαστάσεων, ἀνεξάρτητα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ σχηματισθοῦν ἐκ τῶν p θεωρουμένων φυσικῶν μεγεθῶν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μονωνύμων αὐτῶν εἶναι $p - q$ ἔνθα q εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν, ἅτινα ὑπεισέρχονται εἰς τὴν μέτρησιν τῶν p μεγεθῶν.

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος π εἶναι ἰδιαίτερος ἐνδιαφέρουσα εἰς τὰ προβλήματα μεγάλου πλήθους μεταβλητῶν. Χρησιμοποιοῦντες τὴν μορφήν (21.2.α), ἥτις ἀποτελεῖ ἀνηγμένην ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (19.3.η), ἀπαλείφομεν εἰς τὴν πραγματικότητα q μεταβλητάς. Ἡ μαθηματικὴ ἢ γραφικὴ παράστασις ἐμφανίζεται ὑπὸ ἀπλοποιημένην μορφήν. Ἡ πειραματικὴ ἔρευνα ἀπλοποιεῖται ἐπομένως τὰ μέγιστα.

Ἐπὶ πλέον, λόγῳ τοῦ ἀδιαστάτου τῆς μορφῆς των, οἱ ὅροι π , ἀπὸ πρᾶτικῆς ἀπόψεως, ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν εἰς οἷονδήποτε σύστημα ἀπολύτων μονάδων μετρήσεως, αὐτὸ δὲ ἀπλοποιεῖ τὴν διεθνῇ συνεργασίαν μεταξὺ ἐργαστηρίων.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τῶν π στηρίζεται εἰς τὸν ἀλγεβρι-

υὸν λογισμόν, ὑπάρχει δέ εἰς τὰ βασικά συγγράμματα διαστατιμῆς ἀναλύσεως (ἴδε ὑπ' ἀριθμ. 69, 70 συγγρ. βιβλιογραφίας).

21.3 ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΜΕΛΕΤΗΝ ΤΩΝ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ π

Διὰ τὴν υαλλιτέραν χρῆσιν τῶν μεθόδων τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως εἰς τὴν διαστατιμὴν ἀνάλυσιν, διατάσσομεν τὰς διαστάσεις τῶν φυσικῶν μεταβλητῶν ὑπὸ μορφήν μητρώου.

Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι ἐξετάζομεν τὰ φαινόμενα ροῆς εἰς σωλήνας καὶ ὅτι αἱ θεωρούμεναι μεταβληταὶ εἶναι ἡ πίεσις p τὸ μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ L , ἡ ταχύτης V , ἡ εἰδιυή μάζα ρ , ἡ υινηματιυή συννευτιυότης ν καὶ ἡ διάμετρος τοῦ ἀγωγοῦ D . Εἰς τὸ ἐπόμενον μητρώον, ἐυάστη στήλη δίδει τοὺς ἐυθέτας εἰς τὴν διαστατιμὴν ἐυφρασιν τῶν ἀντιστοιχῶν μεταβλητῶν

	p	ρ	V	L	D	ν
M	1	1	0	0	0	0
L	-1	-3	1	1	1	2
T	-2	0	-1	0	0	-1

Θά τὸ ὀνομάσωμεν διαστατιμὸν μητρώον τῶν μεταβλητῶν.

Ὡς γνωστόν, ἐάν ἔν μητρώον περιέχη μίαν ὀρίζουσαν ν τάξεως μὴ μηδενιυήν καὶ ἐάν ὅλαι αἱ δυναταὶ ὀρίζουσαι $\nu+1$ τάξεως εἶναι μηδενιυαί, ἡ τάξις τοῦ μητρώου θά εἶναι ν , ἐξ ὀρισμοῦ.

Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ ὀρίζουσα ἡ σχηματισθεῖσα ἐυ τῶν τριῶν τελευταῶν στηλῶν τοῦ ἐυτεθέντος προηγουμένως διαστατιμοῦ μητρώου τῶν μεταβλητῶν ἔχει ἀριθμητιυήν τιμήν 2 (διάφορον τοῦ μηδενός) καὶ εἶναι τρίτης τάξεως. Συνάγομεν ἐπομένως ὅτι τὸ διαστατιμὸν μητρώον τῶν μεταβλητῶν εἶναι τρίτης τάξεως.

Ἡ σημασία τῆς ἐννοίας τῆς τάξεως τοῦ διαστατιμοῦ μητρώου προυῦπτει ἀπὸ τὴν κατωθι πρότασιν:

Ὁ ἀριθμός τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων μιᾶς πλήρους σειρᾶς ἰσοῦται πρὸς τὸν ὀλιυὸν ἀριθμόν τῶν ἀνεξαρτήτων φυσικῶν μεταβλητῶν, μεῖον τὴν τάξιν τοῦ διαστατιμοῦ των μητρώου τῶν μεταβλητῶν.

Ἡ σημασία τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι μεγίστη, διότι προσδιορίζει μέ μαθηματιυήν ἀριβείαν καὶ ἀσφαλῶς τὸν ἀριθμόν τῶν γινομένων, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν ἀντίστοιχον πρότασιν τῆς παραγράφου (21.2) εἰς τὴν ὀποίαν ὁ ἀριθμός τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν q δύναται νά ἐυτιμηθῇ ἐσφαλμένως.

Διὰ τὸ παράδειγμα τῆς παρούσης παραγράφου, δεδομένου ὅτι ἔχομεν ἔξ ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς καὶ μητρώον τρίτης τάξεως, θά προυῦ-

ψουν τελικῶς τρία μονώνυμα π . Πράγματι, ὁ ἀριθμὸς REYNOLDS, ὁ ἀριθμὸς D/L καὶ ὁ συντελεστὴς πίεσεως ἢ ἀριθμὸς EULER ἀποτελοῦν μίαν πλήρη σειρὰν μονωνύμων π , διὰ τὰς δοθεῖσας ἔξ φυσικᾶς μεταβλητάς.

Ἀποδεικνύεται εὐκολῶς εἰς τὸν ὑπολογισμὸν διὰ μητρώων τὸ κατωθι θεώρημα, ἔχον σχέσιν μέ τὴν γραμμικὴν ἐξάρτησιν:

Αἱ γραμμαῖ ἐνὸς μητρώου εἶναι γραμμικῶς ἐξηρητημέναι, ἐάν καὶ μόνον ἡ τάξις τοῦ μητρώου εἶναι μιοροτέρα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γραμμῶν του.

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ, ἡ τάξις ἐνὸς μητρώου δέν ἀλλάσσει, ἐάν ἀπαλειφθοῦν αἱ γραμμικῶς ἐξηρητημέναι γραμμαῖ του. Συνήθως δι' ἀπλῆς ἐποπτείας ἐνὸς μητρώου εὐρίσκονται αἱ περισσότεραι τῶν γραμμικῶς ἐξηρητημένων γραμμῶν, ὁπότε εὐκολύνεται πολὺ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς τάξεως τοῦ μητρώου, διὰ τῆς ἀπαλειφῆς των.

Ἄς ἐπανέλθωμεν τώρα εἰς τὰς μεταβλητάς $\rho, \varrho, V, L, D, \nu$.

Ἡ γενικὴ μορφή τοῦ μονωνύμου π θά εἶναι

$$\pi = \rho^{x_1} \varrho^{x_2} V^{x_3} L^{x_4} D^{x_5} \nu^{x_6}$$

Δι' οἰασοδήποτε δέ τιμὰς τῶν ἐπιθετῶν καὶ διαστάσεις τοῦ μονωνύμου π θά εἶναι

$$\pi \equiv (M^0 L^0 T^0) \equiv (M^1 L^{-1} T^{-2})^{x_1} (M^1 L^{-3})^{x_2} (L^1 T^{-1})^{x_3} (L)^{x_4} (L)^{x_5} (L^2 T^{-1})^{x_6}$$

Ἐν τῆς σχέσεως αὐτῆς προκύπτει τὸ σύστημα

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - 2x_6 = 0 \quad (21.3.a)$$

$$2x_1 + x_3 + x_6 = 0$$

Κάθε λύσις τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν δίδει μίαν σειρὰν ἐπιθετῶν x καὶ ἐπομένως ἓν μονώνυμον π .

Παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ὄρων x ἐνιάστης γραμμῆς τοῦ συστήματος (21.3.a) εἶναι αἱ γραμμαῖ τοῦ διαστατικοῦ μητρώου. Ἐπομένως τὸ σύστημα (21.3.a) δύναται νά γραφῇ ἀπ' εὐθείας, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ διαστατικοῦ μητρώου.

Ἄς γενικεύσωμεν τώρα τὸ προηγούμενον παράδειγμα καὶ ἔστω ὅτι θέλομεν νά σχηματίσωμεν τὰ μονώνυμα π , εἰς τὴν περίπτωσιν ν φυσικῶν μεταβλητῶν. Ὡς ἐδείχθη προηγουμένως, οἱ ἐπιθέται $x_1, x_2, \dots, x_\nu$, τοῦ τυχόντος μονωνύμου ἀποτελοῦν μίαν λύσιν ἐνὸς συστήματος ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, τὸ ὁποῖον ὑπὸ μορφήν μητρώου δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$a_{ij} \cdot x_j - y_i = 0, \quad (\text{ἐνθα } i=1 \div q: \text{ἐλευθέρος δείκτης}, j=1 \div n: \text{ἄφωτος δείκτης})$$

ἢ ἀπλούστερον

$$A \cdot K = Y = 0$$

(21.3.β)

ἐνθα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι q εἶναι ἡ τάξις τοῦ διαστατικοῦ μητρώου, συμπίπτουσα συνήθως μέ τόν ἀριθμόν τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν καί n τό πλῆθος τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Παρατηροῦμεν δέ ὅτι τό μητῶν A εἶναι αὐτό τοῦτο τό διαστατικόν μητῶν τῶν μεταβλητῶν, θεωρούμενον ὡς q τάξεως, ἥτοι μέ γραμμικῶς ἀνεξαρτήτους γραμμάς. Εἰς τό σύστημα (21.3.β) διαυρίνομεν τάς ἐξῆς περιπτώσεις:

α) $n \leq q$ Τό σύστημα δέν ἔχει λύσιν ἐν γένει, ἐυτός τῆς μηδενιῆς. Ἡ περίπτωση αὕτη δέν ἐμφανίζεται, ὡς εἶναι προφανές, ποτέ ἐν τῇ πράξει.

β) $n > q$ Εἰς τὴν περίπτωσιν αὕτην, συμφώνως πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ὁμογενῶν συστημάτων, τό σύστημα (21.3.β) ἔχει ἀκριβῶς $n-q$ γραμμικῶς ἀνεξαρτήτους λύσεις, τό σύνολον τῶν ὁποίων υαλοῦμεν θεμελιῶδες σύστημα λύσεων. Τό θεμελιῶδες τοῦτο σύστημα λύσεων προϋπτει ἀπὸ τὴν διάσπασιν τοῦ συστήματος (21.3.β) τό ὁποῖον γράφεται ὡς ἐξῆς

$$A_1^{n-q} \cdot K_1^{n-q} + A_{n-q+1}^n \cdot K_{n-q+1}^n = 0$$

ἢ

$$A_{n-q+1}^n \cdot K_{n-q+1}^n = -A_1^{n-q} \cdot K_1^{n-q}$$

(21.3.γ)

ἐνθα

$$A_i^j = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{qi} & a_{q(i+1)} & \dots & a_{qj} \end{pmatrix} \quad \text{καί} \quad K_i^j = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix}$$

Δι' ἐυάστην σειράν ἀριθμητικῶν τιμῶν τοῦ μητρώου K_1^{n-q} προϋπτει μία καί μόνη λύσις τῆς σχέσεως (21.3.γ) ὡς πρὸς K_{n-q+1}^n τῆς μορφῆς

$$K_{n-q+1}^n = - (A_{n-q+1}^n)^{-1} \cdot (A_1^{n-q} K_1^{n-q}) \quad (21.3.δ)$$

Οὕτω διὰ $\nu - q$ σειρὰς ἀριθμητικῶν τιμῶν τοῦ μητρώου $K_j^{\nu-q}$ θὰ προ-
υῦσιν $\nu - q$ λύσεις τῆς (21.3.δ), ἥτοι $\nu - q$ σειραὶ ἀριθμητικῶν τιμῶν
τοῦ μητρώου $K_{\nu-q+1}^{\nu}$. Πλὴν ὅμως, ζητοῦμεν λύσεις πληρούσας τὰς ἐξῆς
ἀπαραιτήτους προϋποθέσεις

α) Νά δίδουν μίαν πλήρη σειρὰν ἀνεξαρτήτων μο-
νωνύμων π , ἥτοι ἕναστον μονώνυμον νά μὴν προϋπτεῖ ἀπὸ πολ-
πλασιαστικὸν συνδυασμὸν τῶν ἄλλων. Δεδομένου ὅτι ἡ γενική μορ-
φή τῶν μονωνύμων εἶναι

$$\Pi_j = \prod_{i=1}^{i=\nu} X_i^{x_{ij}} \quad \text{ἐνθα} \quad \begin{pmatrix} j=1 \div \nu-q \\ X_i = \text{ἀνεξάρτητοι μεταβληταί} \end{pmatrix} \quad (21.3.ε)$$

διὰ λογαριθμώσεως τῶν σχέσεων (21.3.ε) προϋπτεῖ τό γραμμικὸν σύ-
στημα

$$\log \Pi_j = \kappa_{ij} (\log X_i)$$

$$\text{ἐνθα} \quad j=1 \div \nu-q \quad \text{καί} \quad i=1 \div \nu$$

ἢ ἀπλούστερον

$$\Pi = K \cdot M \quad (21.3.ζ)$$

$$\text{ἐνθα} \quad \Pi = \begin{pmatrix} \log \pi_1 \\ \log \pi_2 \\ \vdots \\ \log \pi_{\nu-q} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \log X_1 \\ \log X_2 \\ \vdots \\ \log X_\nu \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1\nu} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(\nu-q)1} & x_{(\nu-q)2} & \dots & x_{(\nu-q)\nu} \end{pmatrix}$$

Προφανῶς αἱ σχέσεις (21.3.ζ) δίδουν τὰς λύσεις τῶν $\nu - q$ ζητου-
μένων μονωνύμων. Διὰ νά εἶναι δέ τὰ μονώνυμα αὐτὰ ἀνεξάρτητα με-
ταξὺ των πολλαπλασιαστικῶς, πρέπει καί ἀρμεῖ τό μητρῶον K νά εἶναι
 $\nu - q$ τάξεως, ἥτοι νά ἔχη γραμμικῶς ἀνεξαρτήτους γραμμάς.

Ἀπεδείξαμεν οὕτω τὴν ἐξῆς θεμελιώδη πρότασιν:

Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη διὰ νά προϋψῃ μί-
α πλήρης σειρὰ ἀνεξαρτήτων μονωνύμων π , εἶναι ἡ ὑ-
παρξίς εἰς τὴν σχέσιν (21.3.ζ) ἐνός μητρώου K , $\nu - q$
τάξεως. Τό μητρῶον αὐτό K καλοῦμεν μητρῶον τοῦ
θεμελιώδους συστήματος λύσεων.

β) Ἡ προϋπτούσα πλήρης σειρὰ τῶν ἀνεξαρτήτων μονωνύμων π
νά εἶναι ἡ ἀπλουστέρα δυνατὴ ἀπὸ ἄποψιν ἀριθμητι-
κῶν καί ἐργαστηριακῶν ἐφαρμογῶν.

Πράγματι, ἓν ἕναστον τῶν μονωνύμων ἀποτελεῖ νόμον ὁμοι-
ότητος, ὑπάρχει δέ ἀνάγκη ὅσον τό δυνατόν ἀπλουστέρας ἐφαρμο-
γῆς του εἰς τὰς ἐργαστηριακὰς ἐρεῦνας. Ἐπομένως δέον ὅπως περιέ-
χη τὸν μικρότερον δυνατόν ἀριθμὸν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν μέ τοὺς

ἀπλουστέρους δυνατοὺς ἐπιθέτας x_i . Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν κριτηρίων αὐτῶν θὰ ἐπιλέξωμεν τὴν κατάλληλον μορφήν τοῦ μητρώου τῶν λύσεων K .

Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχὴν ὅτι τὸ μητρῶον K εἶναι ὀρθογωννικόν, $n-q$ γραμμῶν καὶ n στηλῶν. Αἱ $n-q$ πρώται στηλαὶ τοῦ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ $n-q$ μητρώα K_i^{n-q} τῆς σχέσεως (21.3.δ) εἰς τὰ ὁποῖα δίδομεν $n-q$ αὐθαίρετους τιμὰς, τοιαύτας ὥστε νὰ προκύψουν αἱ $n-q$ λύσεις τῆς (21.3.δ) αἱ δίδουσαι ἀνεξάρτητα μονώνυμα π . Συμφώνως δέ πρὸς τὴν προηγουμένην παράγραφον, αἱ προκύπτουσαι $n-q$ λύσεις δέον ὅπως ἀποτελέσουν μητρῶον $n-q$ τάξεως.

Ἡ ἀπλουστέρα δυνατὴ ἐπιλογή τιμῶν, διὰ τὰς $n-q$ πρώτας στηλάς τοῦ μητρώου K , αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τετραγωννικόν μητρῶον, εἶναι τὸ μοναδιαῖον στοιχείον τοῦ συνόλου τῶν τετραγωννικῶν μητρώων (τὸ ὁποῖον σύνολον ἔχει διάρθρωσιν δαυτυλίου) δηλαδὴ τὸ διαγώνιον μητρῶον $n-q$ τάξεως, μέ στοιχεῖα $x_{ij}=0$ διὰ $i \neq j$ καὶ $x_{ij}=1$ διὰ $i=j$ (ἀντίστοιχον μέ τὸν τανυστὴν KRONECKER εἰς τὸν δαυτύλιον τῶν τανυστῶν β' τάξεως). Τὸ προκύπτον οὕτω μητρῶον K πληροῖ ὅλας τὰς τεθείσας προϋποθέσεις εἰς τὰς παραγράφους α καὶ β.

Τὸ γενικὸν ἀντιτιθέμενον τοῦ παρόντος κεφαλαίου ἔχει ἐπιτευχθῆ ἀπομένει δέ μόνον ἡ συστηματοποίησης τῶν ἀνωτέρω, ἀποτελοῦσα τὸ ἀντιτιθέμενον τοῦ ἐπομένου κεφαλαίου.

21.4 ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ π

Ἐστω ὅτι ζητοῦνται τὰ ἀδιάστατα μονώνυμα π φυσικοῦ τινός φαινομένου μέ μεταβλητάς X_i τῶν ὁποίων τὸ διαστατικὸν μητρῶον εἰς τὸ σύστημα C. G. S. εἶναι τὸ ἑξῆς

	X_1	X_2	X_3	.	.	.	X_{n-1}	X_n
M	a_{11}	a_{12}	a_{13}	.	.	.	$a_{1(n-1)}$	a_{1n}
L	a_{21}	a_{22}	a_{23}	.	.	.	$a_{2(n-1)}$	a_{2n}
T	a_{31}	a_{32}	a_{33}	.	.	.	$a_{3(n-1)}$	a_{3n}

Τὸ πρῶτον βῆμα εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῆς τάξεως τοῦ μητρώου. Ὑπολογίζομεν τὴν πρώτην ἐν δείξων ὀρίζουσαν τοῦ μητρώου. Αὕτη εἶναι

$$\begin{vmatrix} a_{1(n-2)} & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{2(n-2)} & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{3(n-2)} & a_{3(n-1)} & a_{3n} \end{vmatrix} = \beta$$

Ἐφ' ὅσον ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ β εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἡ τάξις τοῦ μητρώου εἶναι 3. Ἐάν ἦτο μηδέν, θὰ ἐξετάσαμεν διαδοχικῶς ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν ὀριζουσῶν τρίτης τάξεως τοῦ μητρώου, μέσσιον τὴν εὕρεσιν τοῦλάχιστον μιᾶς διαφορῆς τοῦ μηδενός. Εἰς τὴν περίπτωσιν μεγάλων μητρώων ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι ἐξαιρετικῶς μαυρά καὶ ἐπίπονος. Χρησιμοποιοῦνται τότε ἡλεκτρονικοί ὑπολογισταί, δίδοντες ταχύτατα ὅλας τὰς τιμὰς τῶν ὀριζουσῶν, ἐπὶ τῇ βάσει ἐτοιμῶν προγραμμάτων.

Διὰ τὸ συστηματικόν τοῦ ὑπολογισμοῦ, φροντίζομεν ὥστε ἡ μὴ μηδενικὴ ὀρίζουσα τάξεως q νὰ ἀποτελῇται ἀπὸ τὰς πρὸς τὰ δεξιὰ q στηλάς τοῦ μητρώου. Εἰς ἐναντίαν περίπτωσιν, ἀναματατάσσομεν τὰς στηλάς τοῦ μητρώου, οὕτως ὥστε νὰ πληροῦται τὸ μὴ μηδενικὸν τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ ὀρίσεως.

Μετά τὸν ὑπολογισμόν τῆς τάξεως τοῦ μητρώου, εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων π , διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς τάξεως q ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταβλητῶν. Εἰς τὸ προεῖμενον παράδειγμα θὰ ἔχωμεν $\nu-3$ ἀδιάστατα μονώνυμα π .

Γράφομεν ἐν συνεχείᾳ τὸ σύστημα (21.3.β) εἰς τὸ ὁποῖον $q=3$, καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ (21.3.γ), τὸ ὁποῖον εἶναι τώρα γραμμικὸν σύστημα 3 ἐξισώσεων, ἐπιλύεται δέ εύιδως, δι' ἀναστροφῆς τοῦ μητρώου $A_{\nu-q+1}^{\nu}$ μέτους ὑλασσιμῶς τύπους τοῦ GRAMER. Προϋπτει οὕτω τὸ σύστημα (21.3.δ) δίδον τὰς τιμὰς τῶν $x_{\nu-2}, x_{\nu-1}, x_{\nu}$, συναρτῇσει τῶν συντελεστῶν a_{ij} τοῦ μητρώου

$$N = -(A_{\nu-q+1}^{\nu})^{-1} (A_i^{\nu q})$$

καὶ τῶν ὑπολοίπων συντελεστῶν x_i ἔως $x_{\nu-3}$.

Τὸ μητρῶον N εἶναι ὀρθογωνικόν, q γραμμῶν καὶ $\nu-q$ στηλῶν, ἥτοι ἐν προεῖμένῳ 3 γραμμῶν καὶ $\nu-3$ στηλῶν ὡς προϋπτει ἀπὸ τούτων ἀνόνας πολλαπλασιασμοῦ τῶν μητρώων.

Οἱ τελευταῖοι q ὅροι τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ μητρώου τῶν λύσεων προϋπτουν διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ N ἐπὶ τὸ μητρῶον

$$K_i^{\nu q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Τὸ ἐξαγόμενον εἶναι προφανῶς ἡ πρώτη στήλη τοῦ μητρώου N . Ἐπειδὴ δέ ἐν γένει ὁ πολλαπλασιασμός ἐνός μητρώου x γραμμῶν καὶ β στηλῶν ἐπὶ μητρώον β γραμμῶν καὶ μιᾶς στήλης μέ μηδενικὰ ἅπαντα τὰ στοιχεῖα τοῦ πλην ἐνός μοναδιαίου τῆς q στήλης, δίδει μητρῶον μιᾶς στήλης καὶ x γραμμῶν, μέ στοιχεῖα, τὰ τῆς q στήλης τοῦ πρώτου μητρώου, προϋπτει ἡ ἐξῆς σημαντικωτάτη πρότασις:

"Αἱ ζητούμεναι q τελευταῖαι στηλαὶ τοῦ μητρώου K τοῦ θεμελιώδους συστήματος λύσεων ἀποτελοῦν μητρῶον ἐν ταυτότητος ἴσον μέ τὸ

ἀντιμεταθετόν μητρώον τοῦ N ."

Τουτέστιν, τό ὑπομητρώον τῶν q τελευταίων στηλῶν τοῦ K προ-
κύπτει δι' ἀναστροφῆς γραμμῶν μέ στήλας τοῦ μητρώου N .

Ἐν συμπεράσματι, ὁ ὑπολογισμός τοῦ μητρώου N δί-
δει ἀπ' εὐθείας τὰ ἐλλείποντα στοιχεῖα τοῦ μητρώου
 K καί λύει πλήρως τό τεθέν πρόβλημα τῆς εὐρέσεως
μιας πλήρους σειρᾶς ἀνεξαρτήτων μονωνύμων π .

Βλέπομεν τέλος ὅτι δυνάμεθα νά εὕρωμεν διάφορους σειράς μο-
νωνύμων π , διατάσσοντες διαφορετικὰ τὰ $X_1, X_2, \dots, X_r$. Πρέπει ἐπομένως
νά ἐυλέξωμεν τὴν προσφορωτέραν διὰ τὰς ἐφαρμογὰς σειράν π , ὁ τρό-
πος δέ τῆς ἐυλογῆς ταύτης ὀρίζεται μαθηματικῶς διὰ τῆς αὐτῇ συν-
θήκης:

Εἰς τό διαστατιυόν μητρώον, θέτομεν ὡς πρώτην
μεταβλητὴν, τὴν ζητούμενην μεταβλητὴν τοῦ πρὸς με-
λέτην φυσικοῦ φαινομένου. Ὡς δευτέραν μεταβλητὴν
θέτομεν αὐτὴν τὴν ὁποῖαν δυνάμεθα νά μεταβάλωμεν
περισσότερον πειραματικῶς, ὡς τρίτην αὐτὴν τῆς ὁ-
ποίας ἡ εὐνομία μεταβολῆς ἔρχεται εἰς δευτέραν θέ-
σιν, *u. o. u.*

Ἡ τήρησις τῆς συνθήκης αὐτῆς διευκολύνει πολὺ τὴν ἐν συνεχεῖ
 q μελέτην τοῦ φαινομένου ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων.
Φυσικαί μεταβληταί, δυνάμεναι νά ὑποστοῦν πολὺ μικράν μεταβολήν,
ὡς ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος *u. λπ.*, τίθενται εἰς τό δεξιόν μέρος
τοῦ διαστατιοῦ μητρώου, ὁπότε ἔχουν μὲν τοὺς μεγαλυτέρους ἐυθέ-
τας, ἀλλάζουν ὅμως ἐλάχιστα ἢ καὶ καθόλου, ὁπότε ὑπολογίζονται ὀλί-
γας ἢ καὶ διὰ μίαν μόνον φοράν.

Αἱ μεταβαλλόμεναι περισσότερο μεταβληταί εἰσέρχονται οὕτω
εἰς τὴν περιοχὴν ἀπὸ x_1 ἕως x_{r-q} , ὁπότε ἐμφανίζονται εἰς τὴν πρῶ-
την δύναμιν καὶ ἀνά μίαν μόνον εἰς ἕνα στον μονώνυμον.

Ἡ ἐξαιρετικὴ πειραματικὴ ὠφέλεια ἐν τῇ διατάξεως αὐτῆς εἶναι
πρόδηλος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 22.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΙΝ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Μετά τήν εὑρεσιν δι' ἓν φαινόμενον μιᾶς πλήρους σειρᾶς ἀδιαστάτων μονωνύμων, διὰ τῆς συστηματικῆς μεθόδου τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου, τό πρόβλημα τῆς εὐρέσεως τῶν νόμων τῆς φυσικῆς ὁμοιότητος ἔχει αὐτομάτως ἐπιλυθῆ. Πράγματι, αἱ σχέσεις ὁμοιότητος προκύπτουν ἀπ' εὐθείας διὰ τῆς ἐξισώσεως τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων τῶν δύο φαινομένων, πραγματικοῦ καί ἐν ὁμοκώματι. Ἐπομένως ὁ ἀριθμός τῶν σχέσεων ὁμοιότητος εἶναι ἴσος πρὸς τόν ἀριθμόν τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων π τοῦ φυσικοῦ φαινομένου.

Τήν ὅλην μέθοδον τῶν δύο προηγουμένων κεφαλαίων, θά ἐφαρμόσωμεν εἰς τήν εὑρεσιν τῶν νόμων ὁμοιότητος τυχόντος φαινομένου τῆς μηχανικῆς τῶν υλασσιῶν ρευστῶν, χρησιμοποιοῦντες αὐτὴν τήν φοράν ὅχι τὰς ἐξισώσεις, ἀλλὰ τήν φύσιν τῶν συναντημένων μεταβλητῶν.

Θεωροῦμεν τήν γενικὴν περίπτωσιν τυχόντος υλασσιοῦ ρευστοῦ, (συμπιεστοῦ ἢ ἀσυμπιέστου) εἰς τυχούσαν ροὴν καί μέ μεταφοράν θερμικῆς ἐνεργείας. Θά δεῖξωμεν οὕτω, ὅλην τήν γενικότητα καί τὰς μεγάλας δυνατότητας τῆς διαστατικῆς ἀναλύσεως, διὰ τήν εὑρεσιν τῆς μορφῆς τῶν φυσικῶν νόμων καί τῶν νόμων ὁμοιότητος. Ἀπολουθοῦμεν δέ τήν συστηματικὴν μέθοδον τῆς παραγράφου (21.4).

22.1 ΕΚΛΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Διὰ νά ἐυλέξωμεν ὅλας τὰς ἀπαραιτήτους μεταβλητάς, αἵτινες ὑπεισέρχονται εἰς τήν φυσικὴν περιοχὴν τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν, ἀπαιτεῖται πλήρης ποιοτικὴ γνῶσις τῶν ἐξισώσεων τῶν φαινομένων, τῶν ἀρχιῶν συνθηκῶν καί τῶν συνθηκῶν εἰς

τά όρια.

Αι θεμελιώδεις έξισώσεις και ή πειραματική έμπειρία δίδουν ως πρώτην σειράν ανεξαρτήτων φυσικών μεταβλητών τάς

F : δύναμις

V : ταχύτης

ρ : ειδική μάζα

μ : δυναμικός συντελεστής συνεισμιότητας

g : επιτάχυνσις της βαρύτητος

C_p, C_v : ειδικαί θερμότητες

Αι άρχικαί συνθήκαι και συνθήκαι εις τά όρια μας δίδουν έξ άλλου τάς κάτωθι μεταβλητάς

a : ταχύτης ήχου

L : χαρακτηριστική γραμμική διάστασις (π. χ. διάμετρος άγωγού).

σ : επιφανειακή τάσις

K : συντελεστής θερμικής άγωγιμότητος

Θά έχωμεν επομένως έν συνόλφ ένδεκα ανεξαρτήτους μεταβλητάς και ή γενική έξίσωσις τυχόντος φαινομένου της μηχανικής των ρευστών λαμβάνει την μορφήν

$$\varphi(F, V, L, \rho, \mu, g, C_p, C_v, a, \sigma, K) = 0 \quad (22.1. a)$$

22.2 ΕΚΛΟΓΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΟΝΑΔΩΝ-ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΟΝ ΜΗΤΡΩΟΝ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Είς τά πλεϊστα των προβλημάτων της μηχανικής των ρευστών, μέ μετάδοσιν θερμότητος, τό πλέον πρόσφορον σύστημα μονάδων είναι τό Μ. Λ. Τ. Θ. όπου Θ είναι ή νέα θεμελιώδης μονάς διά την θερμοκρασίαν. Διά την περίπτωσην μας, έυλέγομεν επομένως τό σύστημα αυτό, όποτε τό διαστατικόν μητρώον λαμβάνει την μορφήν

	F	V	L	ρ	μ	g	C_p	C_v	a	σ	K
M	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
L	1	1	1	-3	-1	1	2	2	1	0	1
T	-2	-1	0	0	-1	-2	-2	-2	-1	-2	-3
θ	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	-1

Διά νά προσδιορίσωμεν την τάξιν του μητρώου υπολογίζομεν την προς τά δεξιά όρίζουσαν αυτού

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Επαναδιατάσσομεν τὰς στήλας τοῦ μητρώου διὰ νά ὑπάρχη μία πρὸς τὰ δεξιὰ ὀρίζουσα μὴ μηδενική, ὁπότε τὸ διαστατικὸν μητρῶον λαμβάνει τὴν μορφήν

	F	V	L	ρ	μ	σ	C_p	C_v	a	g	K
M	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
L	1	1	1	-3	-1	0	2	2	1	1	1
T	-2	-1	0	0	-1	-2	-2	-2	-1	-2	-3
θ	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	-1

Ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ ὀρίζουσα εἶναι τώρα διάφορος τοῦ μηδενός ($=1$), ὁπότε τὸ μητρῶον εἶναι τετάρτης τάξεως, ἥτοι $\rho = 4$. Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως μία πλήρη σειρὰν ἐξ $11-4=7$ μονωνύμων γινομένων τῆς γενικῆς μορφῆς

$$\pi = F^{x_1} V^{x_2} L^{x_3} \rho^{x_4} \mu^{x_5} \sigma^{x_6} C_p^{x_7} C_v^{x_8} a^{x_9} g^{x_{10}} K^{x_{11}}$$

22.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΟΝ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Αἱ ἐξισώσεις τῶν συντελεστῶν θὰ εἶναι

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_8 + x_5 + x_4 &+ x_{11} &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 &+ 2x_7 + 2x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} &= 0 \\ -2x_1 - x_2 &- x_5 - 2x_7 - 2x_8 - x_9 - 2x_{10} - 3x_{11} &= 0 \\ &- x_7 - x_8 &- x_{11} &= 0 \end{aligned}$$

Ἐπιλύομεν τὸ ἀνωτέρω σύστημα ὡς πρὸς x_8, x_9, x_{10}, x_{11} διὰ τὰς ὑάτωθι τιμὰς τῶν $x_1, x_2, \dots, x_7$.

$x_i = 0$ διὰ $i \neq 1$ (ἥτοι $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \dots = x_7 = 0$).

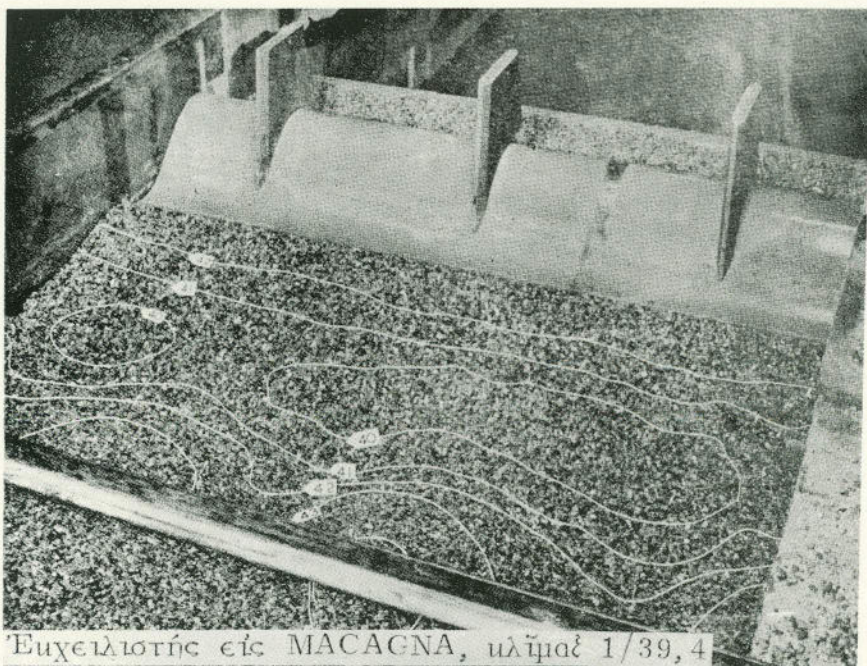
$x_i = 0$ διὰ $i \neq 2$

$\vdots$

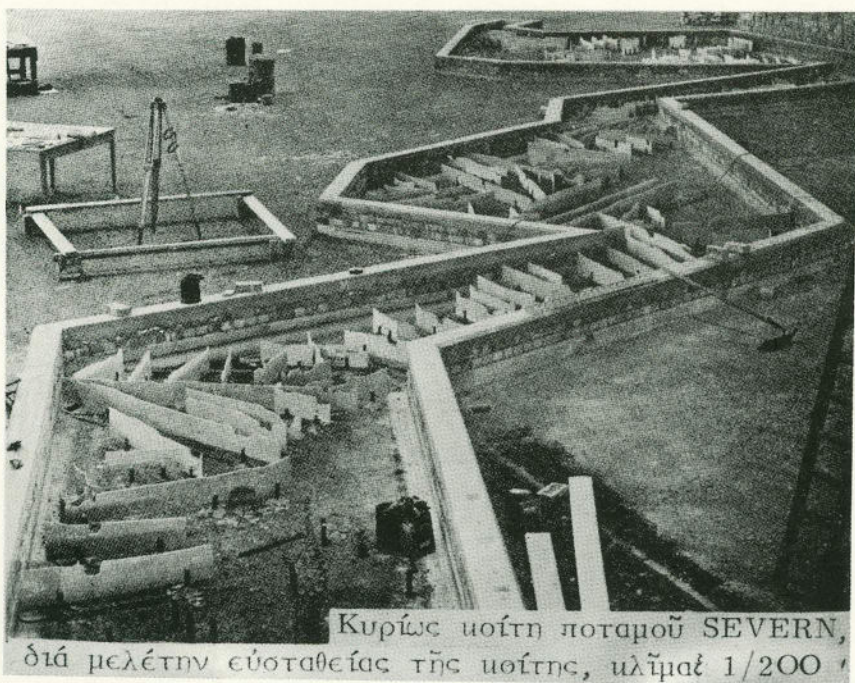
$x_i = 0$ διὰ $i \neq 7$

Αἱ λύσεις τῶν προϋπάρχοντων ἑπτὰ συστημάτων δίδονται εἰς τὸ ὑάτωθι μητρῶον τῶν λύσεων

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
	F	V	L	ρ	μ	σ	C_p	C_v	a	g	K
π_1	1	0	0	0	0	0	0	1	-3	1	-1
π_2	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
π_3	0	0	1	0	0	0	0	0	-2	1	0
π_4	0	0	0	1	0	0	0	1	3	-1	-1



Ευχειλιωτής εἰς MACAGNA, ὑλῆμαξ 1/39,4



Κυρίως νοίτη ποταμοῦ SEVERN,
διά μελέτην εὐσταθείας τῆς νοίτης, ὑλῆμαξ 1/200

Κατασκευὴ ὁμοιωμάτων

π_3	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1
π_4	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	-1
π_7	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0

22.4 ΜΟΝΩΝΥΜΑ π , ΜΕΤΑΤΡΟΠΑΙ ΚΑΙ ΤΕΛΙΚΗ ΤΩΝ ΜΟΡΦΗ. ΤΕΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ.

Η πλήρης σειρά των άδιαστάτων μονωνύμων π προκύπτει άμέσως έυ του μητρώου των λύσεων, είναι δέ

$$\pi_1 = F C_v a^{-3} \sigma K^{-1}$$

$$\pi_2 = V a^{-1}$$

$$\pi_3 = L a^{-2} g$$

$$\pi_4 = \rho C_v a^3 g^{-1} K^{-1}$$

$$\pi_5 = \mu C_v K^{-1}$$

$$\pi_6 = \sigma C_v a^{-1} K^{-1}$$

$$\pi_7 = C_p C_v^{-1}$$

Μεταξύ των έπτά αύτων μονωνύμων αναγνωρίζομεν ήδη τούς αριθμούς του MACH, του PRANDTL καί τόν συντελεστήν γ , είς τά μονώνυμα π_2 , π_5 καί π_7 . Θά πραγματοποιήσωμεν ώρισμένους μετασχηματισμούς είς τά ύπόλοιπα μονώνυμα διά νά τούς δώσωμεν τήν συνήθη μορφήν ύπό τήν όποίαν άπαντώνται είς τήν μηχανικήν των ρευστών. Ούτω έχομεν

$$\frac{\pi_2^2}{\pi_3} = \frac{V^2}{L g}$$

$$\frac{\pi_1}{\pi_2^2 \pi_3 \pi_4} = \frac{F}{\rho L^2 V^2}$$

$$\frac{\pi_2^2 \pi_3 \pi_6}{\pi_5} = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$

$$\frac{\pi_2 \pi_3 \pi_4}{\pi_5} = \frac{V L}{\mu / \rho}$$

Μέ τούς άνωτέρω μετασχηματισμούς προκύπτει ή πλήρης σειρά των άδιαστάτων μονωνύμων π , ώς άπολούθως

$$\text{Αριθμός του REYNOLDS} \quad \frac{VL}{\mu/\rho} = \frac{VL}{\nu} = R$$

$$\text{Αριθμός του FROUDE} \quad \frac{V^2}{Lg} = F$$

$$\text{Αριθμός του EULER ή συντελεστής πίεσεως} \quad \frac{F}{\rho L^2 V^2} = \frac{p}{\rho V^2} = E$$

$$\text{Αριθμός του WEBER} \quad \frac{\rho V^2 L}{\sigma} = W$$

$$\text{Αριθμός του MACH} \quad \frac{V}{a} = M$$

$$\text{Αριθμός του PRANDTL} \quad \frac{\mu C_p}{K} = P_1 \quad \text{ή} \quad \frac{\mu C_p}{K} = P_2$$

$$\text{Λόγος των ειδικών θερμοτήτων} \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

Ἡ γενική ἐξίσωσις (22.1. α) τῶν νόμων τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν λαμβάνει τὴν ἀπλουστευμένην μορφήν

$$\Phi(R, F, E, W, M, P, \gamma) = 0 \quad (22.4. \alpha)$$

Ἀντὶ ἔνδεα ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῆς (22.1. α) ἔχομεν εἰς τὴν (22.4. α) μόνον ἑπτὰ ἀδιάστατα μονώνυμα. Αἱ μεγάλοι θεωρητικαὶ καὶ πειραματικαὶ ὠφέλειαι ἐν τῇ ἀπλοποιήσεως αὐτῆς εἶναι προφανεῖς.

Μία πρόχειρος ἐξέτασις τῶν ἑπτὰ ἀδιαστάτων μονωνύμων τῆς προηγουμένης παραγράφου δεικνύει ὅτι ἡ ὁμοιότης εἶναι ἀδύνατος εἰς τὴν γενικήν περίπτωσιν τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν. Πράγματι, θά ἔπρεπε νά ἔχωμεν ταυτότητα μεταξύ ὅλων τῶν μονωνύμων τῶν δύο ὁμολόγων φαινομένων καὶ αὐτό ὁδηγεῖ ἀναγκαστικῶς εἰς ταυτότητα αὐτῶν τούτων τῶν φαινομένων.

Εὐτυχῶς διὰ τοὺς ἐρευνητάς, εἰς ἕναστον εἰδικόν ὑποσύνολον φαινομένων τῆς μηχανικῆς τῶν ρευστῶν πολλαὶ ἐν τῶν ἔνδεα ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῆς (22.1. α) οὐδόλως ὑπερσέρχονται. Εἰς τὰ εἰδικὰ αὐτὰ φαινόμενα, τὰ ἀδιάστατα μονώνυμα π περιορίζονται πολὺ καὶ φθάνομεν εἰς σχέσεις ὁμοιότητος ἐφαρμοσίμους ἐν τῇ πράξει.

Ἐάν π. χ. ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις εἶναι ἀμελητέα, θά παραληφθῇ ὁ ἀριθμὸς WEBER, ἐάν ἡ βαρύτης δέν ἔχῃ ἐπίδρασιν θά παραληφθῇ ὁ ἀριθμὸς FROUDE ἢ ο. ἢ. Φθάνομεν οὕτω εἰς χαρακτηριστικὰς περιπτώσεις τῶν παραγράφων 20.4 ἕως 20.7 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι καταλήγομεν εἰς τὰ αὐτὰ συμπεράσματα πολὺ ταχύτερον καὶ ἐπὶ τῇ βάσει "φυσικῆς μορφῆς" κριτηρίων.

22.5 ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ ΑΝΕΥ ΜΕΤΑΔΟΣΕΩΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΥ ΕΙΔΙΚΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

Είς την μεγάλην αυτήν κατηγορίαν τῶν φαινομένων ἀπαλείφωμεν ἤδη τόν ἀριθμόν PRANDTL, τόν συντελεστήν γ , ὡς καί τόν ἀριθμόν τοῦ MACH, δεδομένου ὅτι ἡ ταχύτης "πυκνοῦ" ρευστοῦ εἶναι πάντοτε ἀσήμαντος συγκρινομένη μέ τήν ταχύτητα τοῦ ἡχου ἐντός τοῦ αὐτοῦ ρευστοῦ.

Θά ὑποδιαιρέσωμεν ἐξ ἄλλου καί τήν κατηγορίαν αὐτήν εἰς τās κατωθι εἰδιώκας περιπτώσεις, ὥς ἀπαντῶμεν καί τό συνηθέστερον ἐν τῇ πράξει:

α) Ροαί μέ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν. Τέλεια ρευστά ἢ ρευστά μέ ἰζῶδες ἀλλά εἰς τυρβώδη ροήν. Ἀμελητέα ἐπιφανειαυή τάσις

Δεδομένου ὅτι $\mu=0$ διά τὰ τέλεια ρευστά καί ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(R)$ εἶναι σταθερά διά τὰ ρευστά μέ ἰζῶδες εἰς τήν περιοχὴν τῆς τυρβώδους ροῆς (ἴδε κεφάλαιον 24) ἀπαλείφωμεν καί τόν ἀριθμόν τοῦ REYNOLDS. Δέν λαμβάνεται ἐξ ἄλλου ὑπ' ὄψιν καί ὁ ἀριθμός WEBER τῶν ἐπιφανειαυῶν τάσεων. Παραμένουν ἐπομένως διά τήν κατηγορίαν αὐτήν τῶν ροῶν οἱ νόμοι ὁμοιότητος τοῦ EULER καί τοῦ FROUDE. Τά δύο ὁμόλογα φαινόμενα εἶναι φυσικῶς ὅμοια, ἐφ' ὅσον οἱ ἀριθμοί EULER καί FROUDE εἶναι καί διά τὰ δύο οἱ αὐτοί εἰς πᾶσαν ὁμόλογον στιγμήν.

β) Ροαί μέ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν. Ρευστά μέ ἰζῶδες εἰς στρωτήν ροήν.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, ἐντός τῶν νόμων ὁμοιότητος τοῦ EULER καί τοῦ FROUDE, ὑπάρχει καί ὁ νόμος ὁμοιότητος τοῦ REYNOLDS, διότι εἰς τήν στρωτήν ροήν, ἡ συνάρτησις $\varphi(R)$ δέν εἶναι σταθερά ἀλλά μεταβάλλεται συναρτήσῃ τῆς ταχύτητος.

Παρ' ὅλον ὅτι ἀπαιτεῖται ἡ πλήρως τριῶν μόνον ἐν τῶν ἐπτά νόμων ὁμοιότητος, εἰς τήν πρᾶξιν ἡ πραγματοποιήσις ὁμοιωματος ὑπὸ τās συνθήκας αὐτάς εἶναι εἰς τās πλείους τῶν περιπτώσεων ἀδύνατος (ἴδε παράγραφον 20.4).

γ) Ροαί ὑπὸ πίεσιν. Ρευστά μέ ἰζῶδες εἰς τυχοῦσαν ροήν.

Μή ὑπαρχούσης ἐλευθέρως ἐπιφανείας, ἡ βαρύτης δέν ἐπηρεάζει πλέον τήν ροήν. Ἐπομένως ἀπαλείφεται ὁ ἀριθμός FROUDE καί μόνοι δυνατοί νόμοι ὁμοιότητος μεταξύ τῶν ὁμολόγων φαινομένων εἶναι οἱ τοῦ REYNOLDS καί EULER. Ἡ διερεύνησις τῶν περιπτώσεων αὐτῶν ἔγινε εἰς τās παραγράφους 20.6 καί 20.7.

22.6 ΣΥΜΠΙΕΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ ΑΝΕΥ ΜΕΤΑΔΟΣΕΩΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΜΙΚΡΟΥ ΕΙΔΙΚΟΥ ΒΑΡΟΥΣ (ΑΕΡΙΑ)

Εἰς τήν σημαντικὴν αὐτήν κατηγορίαν φαινομένων θά ἀπαλείψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν PRANDTL, FROUDE καί WEBER ὡς καί τόν συντελεστήν γ , δεδομένου ὅτι δυνάμεθα νά ἀμελήσωμεν τās δυνάμεις βαρύτητος καί τās ἐπιφανειαυὰς τάσεις ἐνώπιον τῶν ἄλλων ἐνεργουσῶν δυνάμεων. Ἐξ ἄλλου αἱ μεταβληταὶ p , ρ καί a συνδέονται διά τῆς σχέσεως

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad \text{ή} \quad p = \frac{\rho a^2}{\gamma}$$

Εξ αυτού συνάγομεν ότι δυνάμεθα νά παραλείψωμεν καί τόν αριθμόν τοῦ EULER $E = p/\rho V^2$, διότι μεταπίπτει εἰς τόν ἀριθμόν MACH κατὰ προσέγγισιν σταθερᾶς γ .

Θά ἔχωμεν ἐπομένως ἐν τέλει νά τηρήσωμεν δύο μόνον νόμους ὁμοιότητος: τοὺς νόμους REYNOLDS καί MACH.

Ἐν τῇ πράξει ἡ ὁμοιότης αὐτή τῶν συμπιεστῶν ρευστῶν ἔχει τὰς μεγαλυτέρας ἐφαρμογὰς της εἰς τὰς δοκιμὰς ὁμοιωμάτων ἀεροσκαφῶν ἐντὸς ἀεροδυναμικῶν κωδῶνων. Εἰς τὰς δοκιμὰς αὐτάς χρησιμοποιοῦμεν κατ'ἀνάγκην εἰς τό ὁμοίωμα τό αὐτό ἀέριον πού ὑπάρχει εἰς τό φυσικόν φαινόμενον, ἥτοι τόν ἀτμοσφαιρικόν ἀέρα. διότι, ἐάν χρησιμοποιήσωμεν ἄλλο ἀέριον, αἱ δοκιμαὶ καθίστανται ἀπραγματοποίητοι λόγῳ ὑψηλοῦ κόστους.

Οἱ νόμοι ὁμοιότητος γίνονται:

α) REYNOLDS

$$\frac{V_1 L_1}{\nu_{\text{ἀέρος}}} = \frac{V_2 L_2}{\nu_{\text{ἀέρος}}}$$

δηλαδή

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_2}{L_1} = R$$

καί διὰ κλίμακα $R = 1/20$ ἀπαιτεῖται ταχύτης εἰς τόν κώδωνα εἰσοσπλάσια τῆς τοῦ φυσικοῦ φαινομένου ἥτοι $V_2 = 20 V_1$

β) MACH

$$\frac{V_1}{a_{\text{ἀέρος}}} = \frac{V_2}{a_{\text{ἀέρος}}}$$

δηλαδή

$$V_1 = V_2$$

Ἀντιλαμβανόμεθα ἀμέσως ὅτι οἱ δύο νόμοι συμβιβάζονται μόνον διὰ $R=1$, δηλαδή διὰ ὁμοίωμα κατὰσκευασθέν εἰς φυσικόν μέγεθος καί αὐτό εἶναι κατὰ κανόνα ἀπραγματοποίητον. Εὐτυχῶς ἡ ἐμπειρία δεικνύει ὅτι, διὰ ροὰς μικρᾶς ταχύτητος ($M < 0,4$) ἡ συμπίεστος εἶναι ἀσήμαντος, δηλαδή ὁ ἀήρ συμπεριφέρεται ὡς ἀσυμπιεστόν ρευστόν. Περιοριζόμεθα ἐπομένως εἰς τήν τήρησιν ἑνός μόνου νόμου, τοῦ REYNOLDS. Διὰ μεγάλας ἐξ ἄλλου ταχύτητας ($M > 0,6$) ἡ ἐπίδρασις τῆς συνεπιδιότητος γίνεται ἀμελητέα, ἐν

ώπιον της σημασίας του νόμου του MACH και τότε τηρείται μόνον ο νόμος του MACH, με την μορφήν $V_1 = V_2$, ήτοι με την αυτήν ταχύτητα εν ομοιώματι και εν τῇ φύσει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 23.

ΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΜΕΓΑΛΩΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

ΕΠΙ ΤΗΣ ΣΤΡΕΒΛΗΣ ΚΛΙΜΑΚΟΣ

23.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΑΣ ΜΕΛΕΤΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

Εἰς τὰ προηγουμένα κεφάλαια 18 ἕως 22 δίδομεν τὰς γενικὰς γραμμὰς τῆς θεωρίας τῶν ὁμοιωμάτων, διὰ νὰ θίξωμεν τώρα τὸ σοβαρώτατον θέμα τῶν ἐφαρμογῶν. Διότι, αὐταὶ καὶ μόνον αἱ ἐφαρμογαί, ἀποτελοῦν μίαν ἄνωρως ἐξελιγμένην τεχνικὴν, παρὰ τὴν ὀλιγόχρονον παράδοσίν της, καὶ μόνον μία μακρὰ πρακτικὴ ἐξάσκησις εἰς ἐργαστήριον δύναται νὰ μορφώσῃ μηχανικοὺς καὶ τεχνικοὺς ἱκανοὺς νὰ ἀντιμετωπίσουν προβλήματα ὑάποιας σχετικῆς δυσκολίας.

Δύο βασικά μειονεκτήματα ἐμποδίζουν ἐξ ἄλλου τὴν διάδοσιν τῶν γνώσεων εἰς τὸν τομέα αὐτόν καὶ τὴν γενίκευσίν των. Τὸ πρῶτον ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονός ὅτι πλεῖστα ἐργαστήρια διατηροῦν τὸ μυστικὸ ὠρισμένων ἐπιτευξέων των, ἢ ἀποφεύγουν ἀναλυτικὰς δημοσιεύσεις ἐπὶ τῶν μελετῶν των. Τὸ δεύτερον, καὶ ἴσως καὶ τὸ σοβαρώτερον, ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι αἱ μελέται περιορίζονται συνήθως εἰς τὴν ἄμεσον οἰκονομικὴν ἀπόδοσίν των καὶ παραμελοῦν τὴν καθαρῶς ἐπιστημονικὴν ἔρευναν ὠρισμένων θεμάτων, τὰ ὁποῖα, ἐάν ἐμελετῶντο ἐν συνεργασίᾳ μὲ ἄλλα ἐργαστήρια, θὰ ἀπέδιδον σημαντικώτατα ὀφέλη εἰς τὸν ἐν γένει τομέα τῶν ὁμοιωμάτων.

Σκοπὸς ἐπομένως τοῦ παρόντος κεφαλαίου εἶναι ἡ ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν θεωρίαν συστηματικὴ ἀνάλυσις τῶν βασικῶν δυσκολιῶν τῶν συνήθως ἐργαστηριακῶν ἐφαρμογῶν καὶ ἡ ἀναζήτησις τοῦ ὀρθότερου τρόπου ἐπιλύσεώς των. Θὰ ἐξετάσωμεν πρὸς τοῦτο τὴν γενικὴν περίπτωσιν, μελέτης μεγάλης ἐκτάσεως ὑδραυλικῶν ἔργων, ὅπου ἡ πραγματοποίησις ἐνιαίας κλίμακος σμικρύνσεως καθίσταται ἀδύνατος. Θὰ ἀναλύσωμεν δὲ τὰς τρεῖς κατηγορίας ἔργων εἰς τὰς ὁποίας παρουσιάζεται αὕτη ἡ ἀδυναμία καὶ τὸν θεωρητικὸν καὶ πρακτικὸν τρόπον ὑπερπηδήσεώς της.

23.2 ΜΕΛΕΤΑΙ ΠΡΟΣΤΑΣΙΑΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΛΙΜΕΝΩΝ ΑΠΟ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

Συμπός του τύπου αυτού των μελετών είναι ο προσδιορισμός των απαραίτητων έξωτερικών λιμενικών έργων διά την υαλήν προστασίαν του λιμένος από έξωτεριμους κυματισμους. Ζητείται δηλαδή η βελτίστη διάταξις των έργων αυτών ωστε να επιτυγχάνωνται αι ζητούμεναι συνθήκαι ήρεμίας καί λειτουργίας του λιμένος (είσόδου, έξόδου) μέ τό ελάχιστον υόστος έργαιων.

Ενώπιον των θεωρητικών δυσχερεών επίλύσεως του προβλήματος, τό μελετῶμεν επί ομοιώματος υπό ομίμυρυνσιν, καί άνευ ούδεμιάς έξαιρέσεως τά σημαντικά λιμενικά συγμυροτήματα μελετῶνται σήμερον είς εργαστήρια υδραυλικής.

Δεδομένου ότι τά φυσικά φαινόμενα πού λαμβάνουν χώραν είναι ροαί μέ έλευθέραν έπιφάνειαν καί τυρβώδους διαίτης, όφείλομεν να ύπαιούσωμεν είς τούς νόμους ομοιότητας FROUDE καί EULER.

Η ταχύτης του κυματισμού έυφράζεται μέ υπερβολικιάς συναρτήσεως του λόγου H/L , ένθα H είναι τό βάθος της υδατίνης μάλης καί L τό μήκος ύμματος του κυματισμού. Θα πρέπη έπομένως ή υλῖμα έμψων ύμματος να είναι ή αυτή μέ την υλῖμαυα ύψων, έστω λ . Διά τούς γεννιους όμως λόγους, τούς έυτεθέντας είς την παράγραφον (18.2) έπιβάλλεται ή χρῆσις διαφόρου υλῖμαυος μψων καί ύψων. Ιδιαίτέρως άναφέρομεν ότι, τά δευτερεύοντα φαινόμενα τά διαταράσσοντα την λειτουργίαν του ομοιώματος είναι είς την συγμυερψμένην αυτήν περίπτωση ή έπιφανειαυή τάσις, ή όποία υαθίσταται πρωταρχικῆς σημασίας όταν ή περίοδος κυματισμού γίνη της τάξεως μερικών δευάτων του δευτερολέπτου, ό υίνδυνος άνωμάλου άποσβέσεως των κυματισμών, όφειλόμενος είς την άλληλοεπίδρασιν των όριαων στοιβάδων έπιφανείας καί πυθμένος καί ό αριθμός του REYNOLDS είς τό ομοίωμα, ό όποιος, γυνόμενος έξαιρετικῶς μψρός, έγγίζει τά όρια των στρωτών ροών, όπότε ένεργεί πλέον ή συννευτιμότης του ύδατος.

Δι' όλους αυτούς τούς λόγους άπαιτείται πραυτικῶς έν ελάχιστον βάθος ύδατος, τό όποιον υατά γυνιμόν υανόνα είναι της τάξεως των 5-6 *cm* διά τά ένεργά μέρη του ομοιώματος. Δεδομένου δέ ότι διά μεγάλους λιμένες έχομεν ελάχιστα βάθη ένεργου λιμένος 10-12 *m*, έπεται ότι ή υλῖμα έψων θα είναι τουλάχιστον $\lambda=1/200$.

Ός πρός την υλῖμαυα μψων, διά να υαλυφθούν έν ομοίωματι μήυη 10 έως 20 χιλιομέτρων μέ άπασχόλησιν είς τόν χῶρον του έργαστηρίου, διαστάσεων υατωτέρων των 20 έως 25 μέτρων, έπιβάλλεται χρῆσις υλῖμαυος 1/500 έως 1/1000. Έξ ου, ή συχνή χρῆσις διυλης υλῖμαυος είς τά ομοιώματα του τύπου αυτού.

23.3 ΜΕΛΕΤΑΙ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΦΕΡΤΩΝ ΥΛΩΝ ΕΙΣ ΛΙΜΕΝΑΣ ΚΑΙ ΠΟΤΑΜΟΥΣ

Αί μελέται υινήσεως φερτών ύλων ως υρουμαλῶν, άμμου υ.λπ είς τό έργαστήριο, άποτελούν την τελευταίαυ λέξιν της έξελίξεως των μελε-

τῶν ἐπὶ ὁμοιωμάτων. Ἡ ἐφαρμογή τῶν ραδιενεργῶν δειψτῶν ἀνοίγει ἐξ ἄλλου νέους ὁρίζοντας εἰς τὸ πεδῖον αὐτὸ καὶ ἐπιτρέπει τὴν ἐπίλυσιν ἐξαιρετικῶς πολυπλόων προβλημάτων.

Διὰ τὰς μελέτας αὐτάς, ἡ ἀναπαράστασις τῶν χονδρῶν υροισά-λων -διαστάσεων μεταξύ 20 καὶ 50 *cm* - δύναται κάλλιστα νά πραγμα-τοποιηθῇ, διατηρουμένης τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιότητος, διότι διὰ $\lambda=1/200$ αἱ διαστάσεις τῶν ὑλκῶν εἰς τὸ ὁμοῖωμα εἶναι τῆς τάξεως τῶν 1 ἕως 2,5 *mm* καὶ αἱ ὑδροδυναμικαὶ δυνάμεις ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν ὑλκῶν ὁμοιώματος καὶ πρωτοτύπου εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως.

Πλὴν ὅμως ἡ υοίτη ἐν χονδρῶν υροισάλων δέν εἶναι ὁ υανῶν. Ἀν-τιθέτως μάλιστα, συνήθως περὶπτωσις εἶναι ἡ ἀναπαράστασις λεπτῶν ὑ-λκῶν. Εἰς τὴν περὶπτωσιν αὐτήν, ἡ διατήρησις τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιό-τητος θά ἐπέβαλλε τὴν ἀναπαράστασιν μιᾶς ἄμμου δι' ἱλύος καὶ θά ὠδή-γη εἰς πλήρως ἐσφαλμένα ἀποτελέσματα, διότι αἱ ὑδροδυναμικαὶ δυ-νάμεις εἶναι τελείως διαφόρου φύσεως εἰς τὴν περὶπτωσιν τῆς ἱλύος.

Πράγματι, εἰς τὴν περὶπτωσιν αὐτήν, μία ἐν τῶν παραμέτρων πού ὁπωσδήποτε ἀναπαρίσταται εἰς τὸ ὁμοῖωμα εἶναι ἡ ὁμοιότης τῶν ταχυ-τήτων πτώσεως τῶν μεμονωμένων υοικων. Τὰ δέ φαινόμενα θρομβώσεως, τὰ ὁποῖα παράγονται πάντοτε εἰς τὰ ἱλυώδη ὑλικά, αὐξάνουν τὴν ταχύ-τητα πτώσεως, εἰς σημεῖον ὥστε νά γίνεται αὐτὴ μεγαλύτερα τῆς τῶν υοικων ἄμμου. Ἡ ὁμοιότης FROUDE υαταστρέφεται εἰς τὴν περὶπτω-σιν αὐτήν τελείως. Δύο λύσεις εἶναι δυναταὶ διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν καὶ ὑπερπήδησιν αὐτῆς τῆς δυσκολίας.

α) Διὰ τὰς πολὺ μιμράς ταχύτητας πτώσεως, δεδομένου ὅτι αἱ τα-χύτητες πτώσεως εἶναι ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, δέον νά αὐξήθωῦν τὰ υατα-υόρυφα μεγέθη εἰς τὸ ὁμοῖωμα, οὕτως ὥστε νά ἐπιτευχθῇ ἡ ἐπιθυμητὴ σχέσις ταχυτήτων (ὑπὸ μορφὴν μῆκος/χρόνος) εἰς τὸ ὁμοῖωμα καὶ εἰς τὸ πρωτότυπον. Καταλήγομεν ἐπομένως εἰς τὴν στρεβλὴν υλῖμαα τῆς προηγούμενης παραγράφου.

β) Ἐυλογὴ εἰδωῶν ὑλκῶν διὰ τὸ ὁμοῖωμα, ἐχόντων υοικους μέ εἰδωὸν βάρος πολὺ υατώτερον τοῦ τῶν πραγματικῶν υοικων, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐπιτρέπει νά δοθῶν εἰς τοὺς υοικους αὐτοὺς διαστάσεις πο-λὺ μεγαλύτεραι ἀπὸ τὰς ἐπιβεβλημένας ἐν τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιότη-τος. Ἡ λύσις αὐτὴ θά ἐξετασθῇ ἐυτενέστερον εἰς τὴν παράγραφον 23.5

23.4 ΜΕΛΕΤΑΙ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ-ΥΠΟΣΚΑΦΑΙ

Εἰς τὰς προμελέτας ὑδραυλικῶν ἔργων, οἱ ὑδραυλισοὶ ὑπολογισμοὶ πολλῶν τμημάτων τῶν ἔργων παρουσιάζουν μίαν μεγάλην ἀσάφειαν, ἐρ-μηνευομένην συνήθως μέ ἓνα ἐμπειρικὸν συντελεστήν, ἀσαφῆ ἐπίσης ὡς πρὸς τὴν ἐυλογὴν, καὶ τὰ υριτήρια αὐτοῦ. Οἱ ἐυχειλισταὶ φραγμάτων, αἱ ροαὶ διὰ μέσου βάθρων γεφυρῶν, αἱ ὑπεριρρίσμοι ροαὶ μεταβαλλομένης διατομῆς, παρουσιάζουν ἤδη διὰ τὴν θεωρητικὴν των ἐπίλυσιν μίαν ἀσά-φειαν, ὀφειλομένην εἰς διαφόρους ἀπλουστευτικὰς παραδοχάς. Εἰς τὴν ἀσάφειαν αὐτὴν προστίθενται καὶ ἄλλοι σοβαροὶ παράγοντες. Θά ἀναφέ-ρομεν ὡς χαρακτηριστικὸν παράδειγμα τὸν συντελεστήν τραχύτητος, τῶν παρειῶν ἐνός ἀγωγοῦ, ὁ ὁποῖος μετρεῖται μέ μίαν ἀσάφειαν $\pm 5\%$ καὶ ἐπὶ

πλέον μεταβάλλεται εύρύτατα σύν τῷ χρόνῳ, ὅπως ἀπέδειξαν τελευταῖαι ἔρευναι τοῦ ἐργαστηρίου Τουλούζης. Συμπεραίνεται ἐπομένως ὅτι διὰ ἔργα μίας υάποιας σημασίας ἡ πειραματικὴ ἐπαλήθευσις τῶν ὑπολογισμῶν εἶναι ἀπαραίτητος, αὐτός δέ εἶναι καὶ ὁ σκοπὸς τῶν μελετῶν ἐπαληθεύσεως.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δοκιμῶν τοῦ ἐργαστηρίου, διορθοῦται ἡ προμελέτη καὶ δίδεται εἰς τὴν μελέτην τοῦ ἔργου ἡ ὀριστικὴ τῆς μορφῆς. Προσδιορίζονται ἐξ ἄλλου αἱ ἐπὶ τοῦ ἔργου ἐφαρμοζόμεναι δυνάμεις, διὰ μετρήσεως τῆς πιέσεως ἐπὶ διαφόρων σημείων τοῦ ὁμοιώματος καὶ ἐξ αὐτῶν ὑπολογίζονται μέ ἀσφάλειαν αἱ διαστάσεις τοῦ πραγματικοῦ ἔργου καὶ ὁ ὀπλισμός του. Δι' ὅλας τὰς μελέτας ἐπαληθεύσεως εἶναι προφανές ὅτι ἀποφεύγεται εὐνόως ἡ χρῆσις διπλῆς υλῖματος.

Μία ἄλλη σοβαρωτάτη κατηγορία μελετῶν ἀναφέρεται εἰς τὴν εὐστάθειαν τῶν υδραυλικῶν ἔργων. Διὰ ταύτης ὑπονοεῖται ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ἀντοχῆς ἐνός τμήματος ἔργου, φυσικοῦ ἢ τεχνητοῦ, ἐντεθειμένου εἰς ἰσχυράς ὑδροδυναμικὰς δυνάμεις, ὡς εἶναι τὰ ἐξωτερικὰ λιμενικὰ ἔργα, ἡ ἐπενδεδυμένη ἢ ἀνεπένδυτος κοίτη κατάντη ἐυχελιστοῦ ὑλπ. Καὶ διὰ τὰς μελέτας αὐτάς ἀποφεύγεται ἡ διπλὴ υλῖμαξ, ἐντός ἐάν μελετᾶται συγχρόνως τὸ πρόβλημα ὑποσημαφῶν κατάντη ὑδραυλικοῦ τινός ἔργου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ θέμα μινήσεως φερτῶν ὑλῶν καὶ τὸ ἐπιλύομεν συνήθως διὰ διαστολῆς τῆς υλῖματος τῶν υόκων.

23.5 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΕΠΙ ΤΗΣ ΣΤΡΕΒΛΗΣ ΚΛΙΜΑΚΟΣ

Εὐρισκόμεθα πάντοτε εἰς τὴν περίπτωσιν τυρβώδους ροῆς μέ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν -ὁμοιότης FROUDE καὶ EULER-καὶ τίθεται εὐθύς ἐξ ἀρχῆς τὸ ἐρώτημα: Τί χαρακτηριστικὸν μῆκος πρέπει νά χρησιμοποιηθῇ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ νόμου τοῦ FROUDE;

Ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως ὑπεριέρχεται κατ'ἀρχὴν ἡ καταιόρυφος ταχύτης, διότι αὐτὴ καὶ μόνον προσδιορίζει τὴν ταχύτητα μεταδόσεως τῶν κυματισμῶν.

Ἐστωσαν l_1 καὶ l_2 τὰ ὁμόλογα καταιόρυφα μήκη καὶ L_1 , L_2 τὰ ὁμόλογα ὀριζόντια μήκη.

Θά ἔχωμεν

Καταιόρυφος υλῖμαξ

$$\lambda_1 = \frac{l_2}{l_1} \quad (23.5. \alpha)$$

Ὁριζοντία υλῖμαξ

$$\lambda_H = \frac{L_2}{L_1} \quad (23.5. \beta)$$

Στρέβλωσις

$$D = \frac{\beta_v}{\beta_H} \quad , \quad (D > 1) \quad (23.5. \gamma)$$

Ο νόμος ομοιότητας FROUDE δίδει

$$\frac{V_1^2}{l_1 g} = \frac{V_2^2}{l_2 g}$$

Εξ ἄλλου ὁ λόγος ταχυτήτων θά εἶναι ἴσος πρὸς

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1/T_1}{L_2/T_2}$$

ὅπου T_1 καί T_2 εἶναι οἱ ὁμόλογοι χρόνοι.

Θά ἔχωμεν ἐπομένως τελικῶς

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{L_1/L_2}{\sqrt{l_1/l_2}} = \frac{\sqrt{\beta_v}}{\beta_H} \quad (23.5. \delta)$$

Θά προσδιορίσωμεν ἐν συνεχείᾳ τὸν λόγον τραχύτητος τῶν παρειῶν.

Ἐμφράλομεν πρὸς τοῦτο τὴν ταχύτητα δι' ἐνός ἐν τῶν υλασσι-
ωῶν τύπων, τῶν συνδεόντων τὰς ταχύτητας μέ τὰς ἀπωλείας λόγω τρι-
βῶν εἰς τὰς παρειάς (π.χ. μέ τὸν τύπον MANNING)

$$V = KR^{\frac{2}{3}} J^{\frac{1}{2}}$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι $\frac{J_2}{J_1} = \frac{\beta_v}{\beta_H}$, θά προκύψῃ

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\beta_v} = \frac{K_2 R_2^{\frac{2}{3}}}{K_1 R_1^{\frac{2}{3}}} \sqrt{\frac{\beta_v}{\beta_H}}$$

ἢ τέλος

$$\frac{K_2}{K_1} = \sqrt{\beta_H} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (23.5. \epsilon)$$

Ἡ σχέση (23.5.2) δίδει εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τὸν συντε-
λεστήν K_2 τοῦ ὁμοιώματος.

Εἰς τὰς πλείους τῶν ἐν τῇ πράξει συναντωμένων περιπτώσεων,
ἡ υδραυλικὴ αὐτὴς R εἶναι περίπου ἴση μέ τό μέσον ὕψος ροῆς h ὁ-
πότε

$$\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{\frac{2}{3}} = \beta_v^{-\frac{2}{3}}$$

υαί επομένως θα προκύψει

$$\frac{K_2}{K_1} = \beta_H^{\frac{4}{3}} \beta_0^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \beta_0^{-\frac{1}{3}} \quad (23.5.ζ)$$

Φαίνεται πλέον άμέσως, ότι διά τας συνήθεις αριθμητικάς εφαρμογάς (π. χ. $\beta_0 = 1/20$, $\beta_H = 1/100$, $D = 5$) θα έχωμεν $K_2 < K_1$.

$$(\text{π. χ. } K_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt[4]{20}}{1} K_1 = 0,7 K_1)$$

Επομένως ή τραχύτης του όμοιώματος πρέπει νά είναι μεγαλύτερα τής του πραγματιου έργου είς τας συνήθεις περιπτώσεις.

Διά $D = 1$, ήτοι ένιαίαν υλίμαα, θα έχωμεν έξ άλλου

$$\frac{K_2}{K_1} = \beta^{-\frac{1}{3}} \quad (23.5.η)$$

Δηλαδή ή τραχύτης όμοιώματος είναι μιμροτέρα, είς τήν περίπτωση αύτήν, τής του πραγματιου έργου, αυτό δέ είναι φυσική συνέπεια τής πλήρους γεωμετρίως όμοιότητος όμοιώματος υαί πρωτοτύπου.

Θά εξέτάσωμεν τέλος τήν περίπτωση τών προβλημάτων φερτών υλών, περιοριζόμενοι είς τήν συνήθως έμφανιζομένην περίπτωση τών δυνάμεων είς άς υποβάλλονται οί μεμονωμένως παρασυρόμενοι υόμιοι.

Έστω είς μεμονωμένος υόμιος, όγμου V υαί είδιμου βάρους $d \cdot g g$, όλμιου δέ βάρους υπό τό ύδωρ ίσου πρός P , προσβαλλόμενος υπό ρεύματος ταχύτητος V , υαί αντιτάσων είς τό ρεύμα τήν χαρακτηριστικήν έπιφάνειαν S . Η υδροδυναμική δύναμις ή εφαρμοζομένη είς τόν υόμιον αύτόν, θα είναι τής μορφής

$$F = \pi_0 S V^2 \varphi(R) \quad (23.5.θ)$$

ένθα $\pi_0 = 1$ είναι τό είδιμόν βάρος του ύδατος υαί R ό αριθμός του REYNOLDS ως πρός μίαν χαρακτηριστικήν γραμμικήν διάστασιν του υόμιου.

Διά τούς λόγους τής προηγουμένης παραγράφου (23.3) άς δεχθώμεν ότι υποχρεώθημεν νά χρησιμοποιήσωμεν είς τό όμοίωμα ένα υόμιον μέ γραμμιάς διαστάσεις K φορές μεγαλυτέρας τών έπιβεβλημένων έυ τής γεωμετρίως όμοιότητος β . Θά έχωμεν είς τήν περίπτωση αύτήν τας σχέσεις

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(d_1 - \pi)}{(d_2 - \pi)} \cdot \frac{l_1^3}{l_2^3} = \frac{(d_1 - \pi)}{(d_2 - \pi)} \cdot \frac{h^3}{h^3 (\beta K)^3} = \frac{(d_1 - \pi)}{(d_2 - \pi)} \cdot \frac{1}{\beta^3 K^3} \quad (23.5.ι)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \frac{\varphi(R_1)}{\varphi(R_2)}$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι διὰ τυρβώδεις ροὰς εἶναι

$$\frac{\varphi(R_1)}{\varphi(R_2)} = 1$$

Ἐπιπλέον δέ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\beta^2 K^2}$, τελειῶς προϋπτεῖ ἡ σχέση

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{\beta^2 K^2} \quad (23.5. \alpha)$$

Γράφοντες τὴν ἰσότητα $\frac{P_1}{P_2} = \frac{F_1}{F_2}$, θά ἔχωμεν τελειῶς τὴν ζητουμένην συνθήκην ὁμοιότητος

$$\frac{d_1 - \pi}{d_2 - \pi} = K \quad (23.5. \lambda)$$

Ἐν τῇ πράξει ἔχομεν συνήθως ἀνάγκην χρησιμοποίησεως ἐνός K τῆς τάξεως τῶν 10. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, διὰ νόμιμους εἰδιμοῦ βάρους ἴσου πρὸς $d_1 = 2,6$ (τό ὁποῖον εἶναι καὶ τό συνηθέστερον ἐν τῇ φύσει) θά ἔχωμεν

$$\frac{2,6 - 1}{d_2 - 1} = 10 \quad \text{ἄρα} \quad d_2 = 1,16.$$

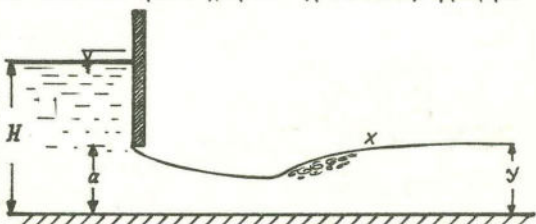
Ὑλικά ἔχοντα τὰς ιδιότητες αὐτάς εἶναι κυρίως τὰ πλαστικά υλικά: Plexiglas, βαμελίτης, πολυστερίνη, ὡς καὶ ὠρισμένοι μορφαὶ ἄνθρακος, ἐλαφρόπετρας ἢ ρινιδίων ἔυλου. Αὐτά δέ καὶ μόνον χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰς μελέτας ἐπὶ ὁμοιωμάτων μέ μεταμινήσεις φερτῶν ὑλῶν καὶ ὑποσφαῖας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

IV.1

Νά μελετηθῇ με διαστατικήν ἀνάλυσιν μία χαρακτηριστική γραμμική διάστασις x ἐνδὸς ἄλματος σχηματιζομένου ἀπὸ τὴν ροὴν ὑγροῦ, κατ'ωθὲν ὑδατοφράκτου, ὕψους a ὑποβαλλομένου εἰς φορτισιν ὕψους H καὶ βάθους ροῆς εἰς τὰ κατάντη ἴσου πρὸς y .

Θεωροῦνται ἀμελητέαι ἡ συνεκτικότης καὶ ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις.



Σχ. IV.1

IV.2

Εὑρετε με διαστατικήν ἀνάλυσιν τὴν σχέσιν ἣ ὁποῖα δίδει τὴν παροχὴν ἐκχειλιστοῦ λεπτῆς ὀριζοντίας στέφους (Συνεκτικότης ἀμελητέα).

IV.3

Εὑρετε με διαστατικήν ἀνάλυσιν τὴν παροχὴν τριγωνικοῦ ἐκχειλιστοῦ λεπτῆς στέφους, τυχοῦσης γωνίας α , θεωρουμένης ὡς ἀμελητέας τῆς συνεκτικότητος καὶ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως.

IV.4

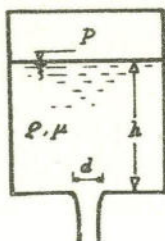
Δεχόμεθα ὅτι ἡ μόνιμος ὑπερῶψις h τῆς στάθμης μιᾶς λίμνης λόγῳ ἀνέμου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέσον βάθος D τῆς λίμνης, τὸ μήκος L αὐτῆς, τὸ εἶδ. βάρος τοῦ ὕδατος d καὶ τὴν ἐφαπτομενικὴν τάσιν τ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τῆς λίμνης λόγῳ τοῦ ἀνέμου.

Εὑρετε γενικὴν σχέσιν ἐκφράζουσαν τὴν ὑπερῶψιν h .

IV.5

Δοχεῖον περιέχει μέχρις ὕψους h ὑγρὸν πυκνότητος ρ καὶ ἐξώδους μ , ἄνωθεν δὲ αὐτοῦ ἐπικρατεῖ πρῆσις p . Ἀπὸ μιαν ὀπὴν ἄνευ προσ-
αρμογῶν, διαμέτρου d ῥεει παροχὴ q_0 πρὸς τὰ ἔξω, ὅπου ἡ πρῆσις θεω-

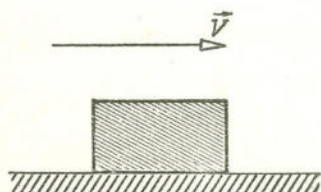
ρεῖται μηδενική. Τοῦ d θεωρουμένου μικροῦ ἐν σχέσει με τὸ h , εὑρετε τὴν μορφήν τῆς σχέσεως, τῆς ἐκφραζομένης τὴν παροχὴν q_0 .



Σχ. IV.5

IV.6

Λέγεται ὁ κυβόλιθος τοῦ σχήματος, βάρους 100 kp καὶ σχετικῆς πυκνότητος $2,5$ ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ, εὑρισκόμενος εἰς τὸν ὀριζόντιον πυθμένα φυσικοῦ ρευματος καὶ παρασυρόμενος εὐθύς ὡς ἡ ταχύτης ὑπερβῇ τὰ 3 m/sec .



Σχ. IV.6

κυβόλιθους.

Διὰ ποῖαν ταχύτητα τοῦ ἰδίου ρευματος θὰ παρασυρῇ κυβόλιθος βάρους 150 kp καὶ σχετικῆς πυκνότητος $3,5$, ἂν ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως εἶναι ὁ αὐτὸς διὰ τοὺς δύο

IV.7

Εἰς ὑδραυλικὸν ἐργαστήριον μελετᾶται ὁ κυματοθραύστης τοῦ σχήματος, ἡ ἐξωτερικὴ παρειὰ τοῦ ὁποῦ προσατεθεταὶ ἀπὸ κυβικοὺς λίθους βάρους 1 kp . Παρατηρήθη ὅτι οἱ ὀγκολίθοι δὲν παρασύρονται ἐφ' ὅσον τὸ ὕψος H τοῦ τεχνητοῦ κυματισμοῦ δὲν ὑπερβαίνει τὰ $0,30 \text{ m}$.



Σχ. IV.7

Ποῖον θὰ πρέπη νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον βάρος ὀγκολίθων τῆς αὐτῆς συστάσεως με τοὺς τεχνητοὺς, εἰς τὸ πραγματικὸν λιμενικὸν ἔργον, οὕτως ὥστε νὰ ἀντέχουν εἰς γεωμετρικῶς καὶ ὑδροδυναμικῶς ὅμοιον κυματισμὸν ὕψους 6 m ;

Αἱ δυνάμεις, λόγῳ κυματισμοῦ, ὁρίζονται ἀπὸ τὴν σχέσιν $F = KSV^2$ ἔνθα S ἡ προσβαλλομένη ἐπιφάνεια καὶ V ἡ ταχύτης τοῦ κυματισμοῦ.

IV.8

Ἐπὶ διανοιγέλης γαλαρίας διὰ τὴν μεταφορὰν ὕδατος ὑπὸ πλεσιν, θέλομεν νὰ εὑρωμεν ἐκ τῶν προτέρων τὰς γραμμικὰς ἀπώλειας ἐνεργείας τῆς ροῆς. Πρὸς τοῦτο μετρώμεν τὰς ἀπώλειας μιᾶς ροῆς δι' ἄερος μετ-

σχύοντα νόμον όμοιότητας τόν τοῦ REYNOLDS.

α. Ποία θά εἶναι ἡ απαιτουμένη παροχή Q_a αἲρος, διά παροχήν ὕδατος ἴσην πρός $Q_v = 7,5 \text{ m}^3/\text{sec}$.

β. Ἐπὶ τμήματος 500 m τῆς γαλαρίας ἐμετρήθη μέ τήν παροχήν αἲρος Q_a ἀπώλεια 120 mm . Ποῖαι θά εἶναι αἱ ἀπώλειαι διά παροχήν ὕδατος, ὅταν τὸ μήκος τῆς γαλαρίας εἶναι 6.050 m ;

Συνεκτικότης αἲρος $14,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$ ὕδατος $1,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$

Πυκνότης αἲρος $1,25 \text{ kg/m}^3$ ὕδατος 1000 kg/m^3

IV.9

Όμοῖωμα, προοριζόμενον διά τήν μελέτην παλίρροιας, ἔχει κατασκευασθῇ ὑπὸ κλίμακα ὀριζοντίων διαστάσεων $1:500$ καὶ κατακορύφων $1:80$

Ποῖα θά πρέπει νά εἶναι ἡ διάρκεια τῆς παλίρροιας εἰς τὸ ὁμοῖωμα, ὅταν ἡ περίοδος τοῦ φαινομένου εἰς τήν φύσιν εἶναι ἴση πρός 12 h καὶ 25 min ;

Νά ἐπαναληφθῇ ἡ ἄσκησης διά κλίμακας ὀριζοντίων διαστάσεων $1:50.000$ καὶ κατακορύφων $1:500$.

IV.10

Διά μικροὺς ἀριθμοὺς REYNOLDS τὸ πείραμα δεικνύει ὅτι ἡ ἀντίστασις μιᾶς σφαίρας εἰς τήν ροήν εἶναι ἀνάλογος τῆς ταχύτητος τῆς ροῆς. Ποία ἡ σχέση, ἡ ἐκφράζουσα τήν ἀντίστασιν R ;

Εἰδικώτερον, εὐρέθη ὅτι διά σφαῖραν διαμέτρου D , ἐντὸς ρευστοῦ πυκνότητος ρ , καὶ κινηματικοῦ ἰξώδους ν , ἡ ἀντίστασις εἶναι

$$R = K \cdot u \quad \text{διὰ} \quad u < u_1.$$

Νά προσδιορισθῇ ἡ εὐρεθεῖσα προηγουμένως σχέση, διά

$$D_1 = 0,1 \text{ mm} \quad , \quad \nu_1 = 14,6 \text{ mm}^2/\text{sec} \quad , \quad \rho_1 = 1,21 \text{ M.K.S.A.}$$

$$u_1 = 73 \text{ mm/sec} \quad , \quad K = 167 \cdot 10^{-10} \text{ M.K.S.A.}$$

IV.11

Μετρώμεν τήν ἀντίστασιν R ὀρθογωνικῆς ἐπιπέδου πλακῶς, παραλλήλου πρός τήν ροήν ἰξώδους ἀσυμπιέστου ρευστοῦ καὶ εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι ἀνάλογος τῆς $1,8$ δυνάμεως τῆς ταχύτητος

$$R = K u^{1.8}.$$

Δεχόμεθα ότι αἱ δοκιμαὶ γίνονται μέ τῆς συνθήκας μιᾶς ροῆς εἰς δύο διαστάσεις (ταχύτητες u καὶ v). Ἡ πλάξ ἔχει πλάτος b_1 καὶ μῆκος L_1 (κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἁέρος). Τὸ ρευστὸν ἔχει πυκνότητα ρ_1 καὶ κινηματικὸν ἰξῶδες ν_1 . Ἡ ταχύτης μεταβάλλεται ἀπὸ u_1 εἰς u_2 .

Ποία εἶναι, βάσει τῆς θεωρίας τῆς ὁμοιότητος, ἡ ἔκφρασις τῆς R καὶ ποῖα τὰ ὅρια τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐκφράσεως αὐτῆς, εἴαν τὸ πείραμα ὁ-
δει:

$$\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3, \quad b_1 = 0.5 \text{ m}, \quad L_1 = 1 \text{ m}, \quad \nu_1 = 15 \text{ mm}^2/\text{sec},$$

$$u_1 = 5 \text{ m/sec}, \quad u_2 = 100 \text{ m/sec}, \quad K = 0.0048 \text{ MKS.A.}$$

Ποῖα ἡ R διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν

$$\rho = \rho_1, \quad b = b_1, \quad \nu = \nu_1, \quad L = L_1, \quad u = 30 \text{ m/sec}.$$

καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν

$$\rho = \rho_1, \quad b = b_1, \quad \nu = \nu_1, \quad L = 0.2 \text{ m}, \quad u = 50 \text{ m/sec}.$$

IV.12

Διὰ νὰ καθορίσωμεν τὴν ἀντίστασιν R ἑνὸς ἀεροπλάνου ταχύτητος $u = 80 \text{ m/sec}$ εἰς τὸν ἁέρα (πρὸς $p = 0.8 \cdot 10^{-5} \text{ MKS.A.}$) ἐκτελοῦμεν δοκιμὰς μέ ταχύ-

τητα $u' = \frac{u}{2}$, ἐπὶ ὁμοιώματος κατασκευασθέντος ὑπὸ κλίμακα 1:10.

Βάσει τοῦ σχετικοῦ πρὸς τὴν συνεκτικότητα νόμου τῆς ὁμοιότητος ποῖαν πρὸς p' πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ ποῖος θὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν δύο ἀντιστάσεων;

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν δοκιμὰς εἰς τὸ ὕδωρ ($\nu = 1 \text{ mm}^2/\text{sec}$), ποῖαν ταχύτητα u'' πρέπει νὰ προσδώσωμεν διὰ τὸ αὐτὸ ὁμοίωμα;

Ἡ κινηματικὴ συνεκτικότης τοῦ ἁέρος εἶναι $13.2 \text{ mm}^2/\text{sec}$.

IV.13

Μία μελετουμένη πτέρυξ ἀεροπλάνου ἔχει πλάτος $b = 10 \text{ m}$ καὶ θὰ ἱ-
πταται εἰς ἓν ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πρὸς $p = 0.4 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$ καὶ ἡ
θερμοκρασία $T = -30^\circ \text{C}$, μέ ταχύτητα $u = 265 \text{ m/sec}$.



Μελέτη επί όμοιώματος ποταμού TRENT
Στρεβλή υλῖμα: $\beta_H = 1/200$, $\beta_V = 1/50$

Θελομεν νά ἐκτελέσωμεν δοκιμὴν ἐντὸς ἀεροδυναμικοῦ κώδωνος εἰς ὁμοῖωμα ὑπὸ κλίμακα 1:50 χωρὶς νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἐπήρρειαν τοῦ ἰξώδους.

Ποία ἡ ταχύτης τὴν ὅποσαν θά ἀναπτύξωμεν εἰς τὸν κώδωνα, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι $T = 15^{\circ}\text{C}$ καὶ ἡ πίεσις $p' = 0.55 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$;

IV.14

Πλοῖον ὑπὸ μελέτην, μήκους $L = 200 \text{ m}$, πρέπει νά ταξιδεύῃ με ταχύτητα $u = 40 \text{ km/h}$. Ἡ δοκιμὴ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ πλοῦ θά γίνῃ εἰς δεξαμενὴν.

Ποῖον μῆκος L' θά δόθῃ εἰς τὸ ὁμοῖωμα, ὅταν ἡ ἀναπτυσσομένη ταχύτης εἰς τὴν δεξαμενὴν εἶναι $u' = 6 \text{ km/h}$.

Τὸ πείραμα δίδει $R' = 3000 \text{ N}$.

Νά ὑπολογισθοῦν ἡ ἀντίστασις R καὶ ἡ δύναμις P τοῦ πλοῦ, ἐὰν θεωρήσωμεν ἀμελητέαν τὴν ἐπιρροὴν τῆς συνεκτικότητος τοῦ ὕδατος.

IV.15

Δεχόμεθα ὅτι ἡ δύναμις P , ἡ ἀναγκαία διὰ τὴν περιστροφὴν τῶν ἐντὸς ἐνὸς ἀσυμπίεστου ρευστοῦ ἑλικῶν προωθήσεως, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πυκνότητα ρ τοῦ ρευστοῦ, τὴν συχνότητα περιστροφῆς N , τὴν διάμετρον D τῆς ἑλικος καὶ τὴν ταχύτητα u τοῦ ἀεροπλάνου, τοῦ συρομένου ὑπὸ τῆς ἑλικος,

$$P = f(\rho, N, D, u).$$

Νά εὑρεθῇ ἡ ἀνηγμένη ἐξίσωσις, ἥτις θά πρέπει νά ἐφαρμόζεται εἰς δοκιμὰς ἐντὸς ἀεροκώδωνος, ὅταν μετρώμεν τὴν δύναμιν P συναρτῇσι τῆς ταχύτητος u .

Εἰδικώτερον, δι' ἑλικά διαμέτρου $D = 3 \text{ m}$ καὶ προωθήσεως $N = 3000$ στρ/μιν, $\rho = 0.5 \text{ kg/m}^3$, $u = 300 \text{ km/h}$, ἐκτελοῦμεν δοκιμὴν ἐπὶ ὁμοιώματος με διάμετρον $D' = 0.3 \text{ m}$, συχνότητα $N' = 15000$ στρ/μιν καὶ πυκνότητα $\rho' = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

Ποία ἡ ἀπαραίτητος συνθήκη διὰ νά εἶναι ἡ δοκιμὴ σωστή;

Μετρώμεν ἐπὶ τοῦ ὁμοιώματος τὴν ἰσχύν $P' = 1.8 \text{ kW}$. Τί συμπερα-
νομεν διὰ τὴν πραγματικὴν ἑλικά;

IV.16

Ἔστωσαν διάφοροι ἀεροσυμπιεσταί, γεωμετρικῶς ὅμοιοι, λειτουργοῦντες με τέλεια ἀέρια τοῦ ἰδίου λόγου εἰδικῶν θερμοτήτων, γ .

Δεχόμεθα ὅτι ὁ λόγος $\frac{P_2}{P_1}$ τῆς πίεσεως εἰς τὴν εἴσοδον εἶναι

συνάρτησις τοῦ ἐμβαδοῦ S_1 τῆς διατομῆς εἰσόδου τοῦ ἀεροσυμπιεστοῦ, τῆς περιφερικῆς ταχύτητος u τοῦ τροχοῦ, τῆς πίεσεως εἰς τὴν εἴσοδον p_1 , τῆς πυκνότητος εἰς τὴν εἴσοδον ρ_1 καὶ τῆς παροχῆς μάζης q , ἥτοι

$$\frac{p_2}{p_1} = f(S, u, p, \rho, q) .$$

α) Νά ἐξαχθῇ μία σχέσις, εἰς τὴν ὅποσαν νά ἐμφανίζεται ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου u εἰς τὴν εἴσοδον.

β) Νά γίνῃ ἡ ἀλλαγὴ μεταβλητῶν, διὰ τὴν ὅποσαν αἱ μεταβληταὶ u καὶ q ἐμφανίζονται εἰς ἓν μόνον ἐκ τῶν μονωνύμων τῆς f .

γ) Νά δοθῇ ἐν συνεχείᾳ ἡ μορφή τῆς σχέσεως, ἡ ὅποια θά χρησιμποιηθῇ διὰ τὴν μελέτην ἑνὸς ἀεροσυμπιεστοῦ, ἐργαζομένου πάντοτε μὲ τὸ αὐτὸ τέλειον ἀέριον.

Θά εἰσαχθῇ ἡ πίεσις p_1 καὶ ἡ θερμοκρασία T_1 εἰς τὴν εἴσοδον.

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΔΙΑΙΤΑΙ ΡΟΗΣ

ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ
ΤΩΝ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 24.

ΑΙ ΔΙΑΙΤΑΙ ΡΟΗΣ

ΕΙΣ ΤΑΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

24.1 ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩ- ΔΟΥΣ ΡΟΗΣ ΔΙΑ ΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΝ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΙΣΧΥ- ΟΣ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙ- ΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Ἡ μηχανική τῶν υλασσιῶν ρευστῶν, ὅπως καί ὅλαι αἱ θεωρίαι τῆς υλασσιῆς μηχανικῆς, κατεστρώθη ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς ὠρισμένης σειρᾶς θεωρητικῶν παραδοχῶν, αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ἀπὸ πολυάριθμα πειραματι-
κά δεδομένα.

Αἱ παραδοχαὶ αὐταὶ περιέχονται εἰς τὸν ὅρισμόν τῶν υλασσιῶν ρευστῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων γραμμικότητος, ὁμογενείας καὶ ἰσοτροπίας (παράγραφος 6.4.1) καὶ ἐμφράζονται μαθηματικῶς ἀπὸ τοὺς νόμους συμπεριφορᾶς ἢ τάσεων-παραμορφώσεων, ἥτοι περιλαμβάνονται εἰς τὰς σχέσεις (6.4.1.δ). Ἐν τῶν σχέσεων αὐτῶν προκύπτουν ὅλαι αἱ ἐξισώσεις τῆς στατικῆς καὶ δυναμικῆς τῶν ρευστῶν, καὶ δὴ αἱ τρεῖς ἐξισώσεις (9.1.1), αἱ διέπουσιν τὴν κίνησιν τυχόντος πραγματικοῦ ρευστοῦ.

Ἐπομένως, διὰ τῆς καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν, εἶναι δυνατὴ, τουλάχιστον θεωρητικῶς, ἡ εὑρεσις τῶν χαρακτηριστικῶν μιᾶς κινήσεως ἑνὸς πραγματικοῦ ρευστοῦ.

Γεννᾶται ὁμως τὸ ἀνόλουθον βασικὸν ἐρώτημα: Τὰ πειραματικὰ δεδομένα, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων κατεστρώθησαν αἱ θεωρητικαὶ παραδοχαί, ποίας κατηγορίας κινήσεων καλύπτουν; Μὲ ἄλλους λόγους, ἰσχύουν δι' οἵανδήποτε δίαίταν ροῆς ἢ εὐρέθησαν διὰ μίαν ὠρισμένην δίαίταν καὶ μόνον;

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ βασικὸν αὐτὸ ἐρώτημα στηρίζεται εἰς τὴν ἀναλυτικὴν διερεύνησιν τῶν διαφορῶν πειραματικῶν δεδομένων.

Ὡς ἤδη ἀνεφέρθη εἰς τὸ 7ον κεφάλαιον, τὰ πειράματα τοῦ COU-

LOMB, έμ των οποίων προέκυψεν ή παραδοχή της "γραμμιότητας" έπραγματοποιήθησαν διά ροήν άπλης όλισθήσεως, ήτοι δι' όλίσθησιν των έπαλλήλων ρευστών στοιβάδων, χωρίς διείδουσιν καί άνάμειν της μίας στοιβάδος έντός των άλλων. Η ροή αυτή όμως δέν είναι καί ή μόνη έμφανιζόμενη είς την φύσιν. Πράγματι, τό θεωρητιμόν πείράμα του NEWTON (παράγραφος 7.1), πραγματοποιηθέν μέ ώρισμένας τροποποιήσεις υπό του COULOMB, έμ του οποίου προούπτει ή έπαλήθευσις του νόμου τάσεων-παραμορφώσεων διά τά υλασσιμά ρευστά, ίσχύει μόνον έφ' όσον ή μεταξύ των δύο πλαιών απόστασις h είναι πολύ μικρά, δηλαδή έφ' όσον αυτή δέν υπερβαίνει μίαν ώρισμένην τιμήν h_0 . Διά $h > h_0$ υαταργείται ή παράλληλος κίνησις των μορίων, αρχίζει μία άνάμεις των ρευστών στοιβάδων μεταξύ των, δέν έπαληθεύεται πλέον πειραματιώς ή σχέσις $\tau = \mu \alpha$, καί έπομένως παύει νά ίσχύη καί ή υπόθεσις της γραμμιότητας. Έξ αυτού του πειραματιού γεγονότος καί μόνον δυνάμεθα νά διαχωρίσωμεν την διάτταν της κινήσεως των ρευστών έν γένει είς δύο μεγάλας κατηγορίας:

α) Τήν στρωτήν ροήν

β) Τήν τυρβώδη ροήν

Επί τη βάσει της άνωτέρω διερευνήσεως προούπτει τό άιόλου-θον θεμελιώδες συμπέρασμα: Αί θεωρητικά παραδοχαί της μηχανικής των υλασσιμών ρευστών καί αί έξ αυτών προούπτουσαι γενικάί έξισώσεις (9.1.1) ίσχύουν διά μίαν ώρισμένην διάτταν ροής την οποίαν, ως έμ της φύσεώς της, θά υαλέσωμεν στρωτήν ροήν.

Διά νά προσδιορίσωμεν υαλλίτερον τάς έννοίας στρωτής καί τυρβώδους ροής, θά δώσωμεν πρῶτον μίαν σύντομον περιγραφήν των υλασσιμών πειραμάτων του REYNOLDS (1883), έμ των οποίων προούπτει μία παραστατική είών των φυσικών χαρακτηριστικών της διαίτης των ροών αυτών, έν συνεχείᾳ δέ θά έξετάσωμεν τά γενικά μαθηματικά χαρακτηριστικά, τά όποια διαχωρίζουν την στρωτήν από την τυρβώδη ροήν.

24.2 ΦΥΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΣΤΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ. ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΟΥ REYNOLDS ΔΙΑ ΡΟΗΝ ΕΙΣ ΣΩΛΗΝΑΣ

Περιγράφομεν τό πείραμα του REYNOLDS.

Έστω ύάλινος σωλήν B , μήμους 1 m καί διαμέτρου 2 cm τροφοδοτούμενος από δοχείον A , σταθεράς στάθμης (Σχ. 24.2.Α). Η παροχή έντός του σωλήνος, έπομένως καί ή ταχύτης των κινουμένων μορίων, ρυθμίζεται υπό της στρόφιγγος E , μετρεΐται δέ από τό όγκομετριμόν δοχείον Γ , τη βοηθείᾳ καί ένός χρονομέτρου. Τό στόμιον είσόδου είς τόν σωλήνα B είναι συγυλινον. Τη βοηθείᾳ ένός λεπτοτάτου σωλήνος Δ , εισάγεται περί τόν άξονα του στομίου είσόδου του B έν λεπτότατον νήμα χρωματισμένου ύδατος.

Διά μεταβολής της παροχής έντός του σωλήνος B (μεταβολή του άνοίγματος της στρόφιγγος E) σχηματίζομεν δύο διαφόρους χαρακτηριστικής διαίτης ροής:

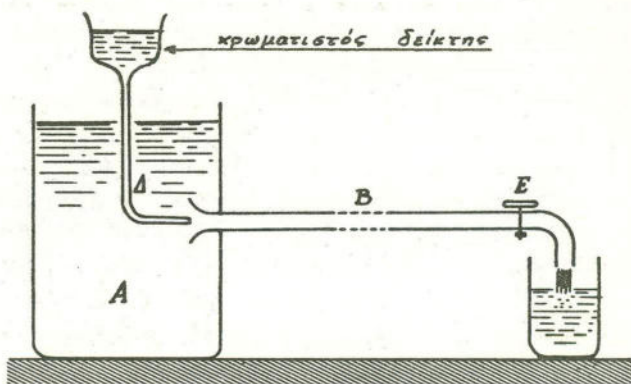
Όταν η μέση ταχύτης $\bar{V}$ ⁽¹⁾ εντός του σωλήνος είναι μικρά,

$$\left(\bar{V} = \frac{Q(\text{παραχή όγκου})}{S(\text{διατομή σωλήνος})} \right)$$

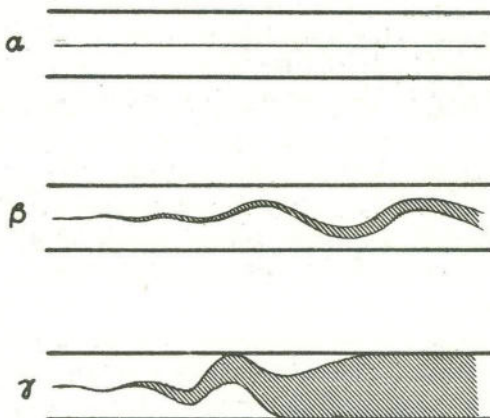
τό χρωματισμένο νήμα είναι τελείως ευθύγραμμον καί παράλληλον προς τόν άξονα του σωλήνος, χωρίς νά διαπλατύνεται. Ή ροή λαμβάνει χώραν διά μινήσεως των μορίων παραλλήλως προς τόν άξονα του σωλήνος καί επομένως δι' όλισθήσεως των συναζοντων κυλινδρικών στοιβάδων μεταξύ των, είναι δέ τελείως ανεξαρτητος του χρόνου (Σχ. 24.2. Β. α).

Δι' αύξήσεως της μέσης ταχύτητος πέραν μιας ώρισμένης τιμής, τό χρωματισμένο νήμα γίνεται ήμιτονοειδές, ταλαντεύεται καί διαπλατύνεται (Σχ. 24.2. Β. β). Ή ροή δέν είναι πλέον ανεξάρτητος του χρόνου, λόγω της άμανονίστου ταλαντώσεως του νήματος.

Διά της περαιτέρω αύξήσεως της ταχύτητος, τό νήμα διαπλατύνεται ταχέως καί τά χρωματισμένα μόρια αυτού διαχέονται άμανονίστως εντός όλης της μάζης του ύδατος (Σχ. 24.2. Β. γ) Διά νά γίνη όρατή ή τροχιά τυχόντος μορίου, εισάγομεν έν άώρησει έντός του σωλήνος διαευρημένους υόιους, π. χ. υόιν άλουμινίου καί φωτίζομεν ναταλλήλως τόν σωλήνα. Παρατηρούμεν τότε ότι αι τροχιαί είναι



Σχ. 24.2. Β. α



Σχ. 24.2. Β. β

(1) Συμβολίζομεν διά του $\bar{V}$ την μέσην τιμήν του μεγέθους V ως προς τόν χῶρον της διατομής του σωλήνος, όποτε εις την προειμένην περίπτωσην τό $\bar{V}$ παριστά την μέσην ταχύτητα της διατομής.

ἀμυνόνιστοι καί οὕτως εἶπεῖν ἀπρόβλεπτοι, τὰ δέ μόρια διαχέονται πρὸς πᾶσαν κατεύθυνσιν.

Ἡ ροή 24.2. Β. α ἀποδίδει πλήρως τὰ φυσικὰ χαρακτηριστικὰ τῆς στρωτῆς ροῆς διὰ τὴν ὁποῖαν ἰσχύει ὁ νόμος $\tau = \mu a$ τοῦ NEWTON καί τὰ πειράματα τοῦ COULOMB.

Μία βαθύτερα φυσικὴ ἀνάλυσις τῆς στρωτῆς ροῆς δεικνύει ὅτι τὸ τυχόν ὑδάτινον νῆμα ὑφίσταται πάντοτε μίαν διάχυσιν, ἀλλὰ βραδυτάτην, καί ὀφειλομένην εἰς τὰς μοριακὰς μετακινήσεις τοῦ νήματος. Ἡ διανομὴ ταχυτήτων καί πιέσεων ἐμφανίζεται τελείως ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου, ἐφ' ὅσον αἱ μαυροσοπιμαὶ ὅρια καὶ συνθῆκαι παραμένουν σταθεραί. Ἡ ροή ἐμφανίζει ἀπόλυτον συμμετρίαν ὡς πρὸς τὰ μαυροσοπιμαὰ δεδομένα. Ἐάν δέ τὸ ὑγρὸν ἐυτοξεύεται ἐκ τοῦ σωλῆνος ὑπὸ μορφὴν πίδακος, ἡ ἐλευθέρη ἐπιφάνεια τοῦ πίδακος ἔχει τὴν μορφήν μιᾶς τελείως λεῖας ἐπιφανείας ὑάλου.

Ἡ ροή 24.2. Β. γ χαρακτηρίζεται πλήρως τὴν μορφήν τῆς τυρβώδους ροῆς, διὰ τὴν ὁποῖαν δὲν ἐπαληθεύεται πλέον ὁ νόμος τοῦ NEWTON. Ἡ διάχυσις τῶν νημάτων εἶναι ταχυτάτη. Αἱ πιέσεις καί αἱ ταχύτητες σημείου τινὸς ἀλλάσσουν συνεχῶς παρ' ὅλην τὴν σταθερότητα τῶν μαυροσοπιμῶν ὁριακῶν συνθηκῶν. Ἡ ροή δὲν ἐμφανίζει πλέον συμμετρίαν ὡς πρὸς τὰ μαυροσοπιμαὰ δεδομένα, μέ ἄλλους λόγους, περιλαμβάνει ἓν πλῆθος ἀπὸ τοπιμὰς ἀσταθείας. Ἡ ἐλευθέρη ἐπιφάνεια ἐνὸς πίδακος ἐμφανίζεται ὡς μία ἀαυτέργαστος ἐπιφάνεια ὑάλου μέ κινητὰς ἀνωμαλίας.

Μεταξὺ τῆς πρώτης καί τῆς δευτέρας διαίτης ὑπάρχει μία ἐνδιάμεσος κατάστασις ἀσταθῆς ὡς πρὸς τὴν μορφήν τῆς καί χαρακτηριστιζομένη ἀπὸ τὴν ροὴν 24.2. Β. β.

Διὰ τὴν εὗρεσιν ἐνὸς κριτηρίου διὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τὴν στρωτὴν εἰς τὴν τυρβώδη ροὴν, ὁ REYNOLDS μετέβαλε, ὅχι μόνον τὴν μέσην ταχύτητα $\bar{V}$ τῆς ροῆς, ἀλλὰ ἐπίσης τὴν διάμετρον D τοῦ σωλῆνος καί τὸν κινηματικὸν συντελεστήν συννευτιμότητος τοῦ ρευστοῦ, διὰ τῆς μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας τοῦ σωλῆνος.

Τὸ πείραμα ἔδειξεν ὅτι ἡ διάτα ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὸν ἀδιάστατον ἀριθμὸν $R = \frac{\bar{V} D}{\nu}$, τῶν ἄλλων πειραματικῶν συνθηκῶν διατηρουμένων σταθερῶν. Πρόκειται περὶ τοῦ γνωστοῦ ἀριθμοῦ τοῦ REYNOLDS (παράγρ. 20.4) εἰς τὸν ὁποῖον ἐλήφθη ὡς χαρακτηριστικὴ ταχύτης ἡ μέση ταχύτης τοῦ σωλῆνος, καί ὡς χαρακτηριστικὴ γραμμικὴ διάστασις, ἡ διάμετρος τοῦ σωλῆνος, ὀνομάζεται δέ καὶ ἀριθμὸς τοῦ REYNOLDS διὰ σωλῆνας.

Ἐάν ἀρχίσωμεν τὸ πείραμα ἀπὸ τὴν στρωτὴν πρὸς τὴν τυρβώδη ροὴν, θά προύψῃ ὅτι ἡ ροή ἐντὸς σωλῆνος κυκλικῆς διατομῆς παραμένει στρωτὴ διὰ μικροὺς ἀριθμοὺς REYNOLDS, γίνεται δέ τυρβώδης, ὅταν ὁ ἀριθμὸς REYNOLDS ὑπερβῇ μίαν τιμὴν R'_c τὴν ὁποῖαν θά καλέσωμεν ἀνώτερον κρίσιμον ἀριθμὸν τοῦ REYNOLDS. Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι τῆς τάξεως τῶν 2500, ἐάν δὲν ληφθῇ οὐδεμία εἰδικὴ πρόνοια διὰ τὸ πείραμα, καί ἐάν δὲν ὑπάρχει τὸ συγκλινόν προστόμιον εἰς τὴν εἰσοδὸν τοῦ σωλῆνος B. Δυνάμεθα ὁμῶς νὰ ἐπιτύχωμεν καί τι-

μάς R_c' προσεγγιζούσας τās 100 000, έφ'όσον χρησιμοποιήσωμεν σωλήνα μέ πολύ λείας παρείας και έτεταμένον συγυλίνον προστόμιον, τό δέ ρευστόν είς A είναι έν άπολύτῃ ήρεμίᾳ και ή όλη έγκατάστασις προφυλάσσεται πλήρως από τυχόν δονήσεις. Υπό τās συνήθεις πειραματικάς συνθήκας, ό αριθμός R_c κυμαίνεται μεταξύ 2 500 και 4 000

Έάν τό πείραμα άρχίση από μίαν πλήρως άνεπτυγμένην τυρβώδη ροήν μέ προσδευτινήν έλλάττωσιν τής μέσης ταχύτητος, ή διάκειτα θά μεταπέση είς τήν στρωτήν ροήν, όταν ό αριθμός REYNOLDS γίνη μιρότερος μιās τιμής R_c , τήν όποιάν θά υαλέσωμεν υατώτερον υρίσιμον αριθμόν τοῦ REYNOLDS. Ό αριθμός αυτός προσδιορίζεται πολύ σαφέστερον από τόν προηγούμενον R_c' , ή δέ τιμή του κυμαίνεται περί τοῦ 2 000.

Σημειώτέον ότι αι πλεῖσται τῶν έν τῇ πράξει συναντωμένων ροῶν είς σωλήνας είναι τυρβώδεις. Π.χ. διά συνήθεις συνθήκας θερμουρασίας και πιέσεως, ή τιμή $R = 100\ 000$ πραγματοποιεῖται, διά μέν τό ὕδωρ, μέ σωλήνα διαμέτρου 10 cm και μέσην ταχύτητα 1 m/sec, διά δέ τόν άέρα μέ σωλήνα διαμέτρου 30 cm και ταχύτητα 5 m/sec.

24.3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

Είς τήν τυρβώδη ροήν και διά μαυροσοπιωῶς σταθεράς όριακάς συνθήκας, παρατηροῦμεν ότι υπάρχει σταθερότης τής μέσης τιμής τῶν διαφορών μεγεθῶν σημείου τινός ως πρός τόν χρόνον, υπό τόν όρον ότι ή μέση αυτή τιμή λαμβάνεται είς χρόνον άρριούντως μεγάλον. Παρατηροῦμεν επίσης ότι υπάρχει σταθερότης τής μέσης τιμής τῶν διαφορών τοπιμῶν μεγεθῶν ως πρός τόν χῶρον, έφ'όσον αυτή λαμβάνεται είς χῶρον άρριούντως έτεταμένον.

Θά μελετήσωμεν έν συνεχείᾳ τό πρόβλημα τής μέσης τιμής ως πρός τόν χρόνον, διότι αυτό κυρίως ένδιαφέρει είς τās συνήθεις περιπτώσεις τυρβώδους ροῆς.

Έστω $v_i(M, t) = v_i(t)$ μία συνιστώσα τής ταχύτητος είς δεδομένον σημείον τής ροῆς M και Δv_i ή απόλυτος άβεβαιότης είς τήν μέτρησην τής $v_i(t)$. Συνήθως υπάρχει μία χαρακτηριστική χρονική διάρκεια t_c , υαλουμένη συνήθως υλῖμαξ τοῦ τυρβώδους, τοιαύτη ώστε ή μέση τιμή τής ταχύτητος μεταξύ τῶν χρονιμῶν στιγμῶν t_1 και $t_2 = t_1 + t'$

$$\overline{v_i} = \frac{1}{t'} \int_{t_1}^{t_2} v_i(t) dt = \overline{v_i}(t', t_1) \quad (24.3. \alpha)$$

νά είναι μία σταθερά $\pm \Delta v_i$, δι'οίανδήποτε άρχιμην στιγμήν t_1 και διάρκεια t' , άρκει νά ίσχύη ή σχέση

$$t' > t_c \quad (24.3. \beta)$$

Έν οίονδήποτε τοπιμόν μέγεθος, ως ή $v_i(t)$, έμφανίζον μεταβολάς, άσχετους έυ πρώτης όψεως μέ τās τυχόν μεταβολάς τῶν όριαμῶν

συνθημῶν, ὀνομάζεται τυρβῶδες μέγεθος. Τό μέγεθος αὐτό ὀνομάζεται ἐπί πλέον στάσιμον, ἐφ' ὅσον ἡ μέση τιμή του εἶναι σταθερά, ὑπό τήν ἔννοϊαν ἡ ὁποία ἐμφράζεται ἀπό τās σχέσεις (24.3.α) καί (24.3.β).

Ἡ τιμή τῆς υλῆματος τοῦ τυρβώδους t_c ἐξαρτᾶται ἀπό τήν μορφήν τοῦ φαινομένου καί ἀπό τό πρίσμα ὑπό τό ὁποῖον ἐξετάζεται τό φαινόμενον.

Οὕτω, διά τήν μετεωρολογίαν εἰς τήν ὁποίαν ἐξετάζονται μινῆσεις μεγάλων ὄγκων ἀέρος, ἡ μέση μίνησης ὑπολογίζεται εἰς χρόνον πολλῶν μηνῶν (π.χ. περιοδικοί ἄνεμοι) αἱ δέ διακυμάνσεις ἀπό τās μέσας τιμὰς ὑπολογίζονται εἰς χρόνον πολλῶν ὥρῶν.

Ἀντιθέτως, διά τήν ἀεροδυναμικήν, εἰς τήν ὁποίαν αἱ ταχύτητες εἶναι μεγάλαι καί ἡ περιοχή μινῆσεως περὶωρισμένη, ἡ υλῆμας τοῦ τυρβώδους υψαίνεται ἀπό ὀλίγα δέυατα εἰς μερῖα ἐνατοστά τοῦ δευτερολέπτου.

Θά δώσωμεν ἐν συνεχείᾳ ὠρισμένους ὁρισμούς καί χαρακτηριστικὰς ιδιότητας ἐπὶ τῶν μέσων τιμῶν τῶν διαφορῶν μεγεθῶν, λαμβανομένων εἰς ἓν δεδομένον διάστημα ἢ, γενικώτερον, εἰς ἓν δεδομένον σύνολον.

Ὅρισμοί: Καλοῦμεν,

α) διακυμάνσιν v'_i τοῦ μεγέθους v_i , τήν μεταβλητὴν ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ τήν διαφοράν μεταξὺ τῆς στιγμιαίας τιμῆς τοῦ μεγέθους καί τῆς μέσης τιμῆς του, δηλαδή τήν

$$v'_i(t) = v_i(t) - \bar{v}_i \quad (24.3.γ)$$

β) διασποράν, τήν μέσην τιμὴν τοῦ τετραγώνου τῆς διακυμάνσεως v'_i , δηλαδή τήν

$$\sigma^2(v_i) = \overline{v_i'^2} = \overline{[v_i(t) - \bar{v}_i(t)]^2} = \frac{1}{t} \int_{t_1}^{t_2} [v_i(t) - \bar{v}_i(t)]^2 dt \quad (24.3.δ)$$

γ) τυπιὴν ἀπόκλισιν, τήν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς διασπορᾶς, δηλαδή τήν

$$\sigma(v_i) = \sqrt{\overline{[v_i(t) - \bar{v}_i(t)]^2}}$$

δ) συνδιασποράν τῶν μεταβλητῶν v_i καί v_j , τήν μέσην τιμὴν τῶν γινομένων τῶν διακυμάνσεών των, δηλαδή τήν

$$\overline{v'_i \cdot v'_j} \quad (24.3.ε)$$

Ιδιότητες:

α) Ἡ μέση τιμή τῆς διασπορᾶς εἶναι ἴση πρὸς τό μηδέν, δηλαδή

$$\bar{\sigma}_i = 0$$

Πράγματι η σχέση (24.3.α) γράφεται

$$v_i = \frac{1}{t'} \int_{t_i}^{t_2} (\bar{v}_i + v'_i) dt = \frac{1}{t'} \int_{t_i}^{t_2} \bar{v}_i dt + \frac{1}{t'} \int_{t_i}^{t_2} v'_i dt$$

άλλα

$$\frac{1}{t'} \int_{t_i}^{t_2} \bar{v}_i dt = \bar{v}_i$$

άρα

$$\bar{v}_i = \bar{v}_i + \bar{v}'_i$$

ή

$$\boxed{\bar{v}'_i = 0} \quad (24.3.ζ)$$

β) Η μέση τιμή ενός γινομένου διαφέρει εν γένει του γινομένου των μέσων τιμών, δηλαδή

$$\overline{v_i v_j} \neq \bar{v}_i \bar{v}_j$$

Πράγματι θά είναι

$$\overline{v_i v_j} = \overline{(\bar{v}_i + v'_i)(\bar{v}_j + v'_j)} = \overline{\bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{v}_i v'_j + v'_i \bar{v}_j + v'_i v'_j}$$

έπειδή δέ η μέση τιμή ενός άθροίσματος είναι ίση προς τό άθροισμα των μέσων τιμών και η μέση τιμή ενός γινομένου σταθεράς επί μεταβλητήν ίσοῦται μέ την σταθεράν επί την μέσην τιμήν της μεταβλητής, θά έχωμεν

$$\overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} = \bar{v}_i \bar{v}_j, \quad \overline{\bar{v}_i v'_j} = \bar{v}_i \bar{v}'_j = 0, \quad \overline{v'_i \bar{v}_j} = 0$$

και επομένως

$$\overline{v_i v_j} = \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v'_i v'_j} \quad (24.3.η)$$

Έάν θέσωμεν $j=i$ θά προκύψη ότι

$$\sigma^2(v_i) = v_i^2 - (\bar{v}_i)^2 \quad (24.3.θ)$$

γ) Η μέση τιμή της μερικής παραγώγου μιās μεταβλητής ως προς μίαν συντεταγμένην, ίσοῦται μέ την μερικήν παράγωγον της μέσης τιμής, δηλαδή

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} \quad (24.3.ι)$$

Πράγματι

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{t'} \int_{t_1}^{t_2} v_i dt \right) = \frac{1}{t'} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dt$$

διότι οι χρόνοι t_1 και t_2 είναι ανεξάρτητοι της μεταβλητής x_i ως προς την οποία γίνεται η παραγωγή.

δ) Η μέση τιμή της παραγωγής μιας μεταβλητής ως προς τον χρόνο, δύναται να θεωρηθεί ως μηδενική, ως συνάγεται έμ της σχέσεως

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} = \frac{1}{t'} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial v_i}{\partial t} dt = \frac{1}{t'} [v_i(t_2) - v_i(t_1)]$$

Κατά κανόνα η διαφορά $v_i(t_2) - v_i(t_1)$ είναι πολύ μικρή, οπότε διαιρούμενη διά του χρόνου t' δύναται να θεωρηθεί ως αμελητέα και θα προκύψει

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} \approx 0.$$

Επί τη βάσει όλων των ανωτέρω θα δώσωμεν τον ορισμόν της στασιμότητας τυρβώδους ροής εν γένει διά την οποία εξετάλομεν και τας τρεις συνιστώσας της ταχύτητος εις ένασπον σημείον M .

Μία ροή εις τυρβώδη δίδεται να λέγεται στάσιμος όταν είναι συγχρόνως στάσιμα όλα τα τυρβώδη μεγέθη $v_i(M)$, τα τετράγωνα $v_i^2(M)$ των διακυμάνσεων των και όλα τα γινόμενα $v_i'(M) \cdot v_j'(N)$ των διακυμάνσεων εις δύο τυχόντα σημεία M και N . Μέ άλλους λόγους, τα μεγέθη $\overline{v_i}$, $\overline{v_i^2}$ και $\overline{v_i'(M) \cdot v_j'(N)}$ είναι σταθερά, υπό την έννοιαν η οποία ευφράζεται από τας σχέσεις (24.3. α) και (24.3. β).

24.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ BOUSSINESQ ΔΙΑ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗΝ

Διά την επέκτασιν της ισχύος της εξίσωσης συνεχείας (9.2. α) και των θεμελιωδών εξισώσεων έμ της δυναμικής (9.1. θ) εις την τυρβώδη δίδεται πρώτος ήργασθη ο BOUSSINESQ. Ούτος έστηρίχθη εις την σχέση (24.3. ζ) και εις την παραδοχήν ότι ο νόμος του Νεύτωνος δύναται να γραφεί

$$\overline{\tau} = (\mu + \epsilon) \overline{a} \quad (24.4. α)$$

ένθα ϵ είναι ένας συντελεστής του τυρβώδους αζάνων με την αύξησιν του τυρβώδους της ροής και τείνων εις τό μηδέν διά στρωτήν δίδεται.

Μέ ἄλλους λόγους, ὁ BOUSSINESQ δέχεται ὅτι ὁ νόμος τάσεων-παραμορφώσεων (6.4.1. δ) ἰσχύει καί διὰ τήν τυρβώδη διάτταν με-
ταξύ τῶν μέσων τιμῶν τῶν διαφορῶν μεγεθῶν, μέ τήν ἀντιματάστασιν τοῦ
συντελεστοῦ μ διὰ τοῦ $\mu + \varepsilon$.

Μέ βάσιν τά ἀνωτέρω, προϋπτουν ἀμέσως αἱ σχέσεις

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{V}}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho' \bar{\mathbf{V}}) &= 0\end{aligned}\quad (24.4. \beta)$$

ὁπότε ἡ ὅλη κίνησις δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα μιᾶς μέσης καί
μιᾶς διατεταραγμένης κινήσεως.

Αἱ μέσαι τοπικαί ἐπιταχύνσεις δίδονται ἐξ ἄλλου ἀπό τὰς σχέ-
σεις

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \operatorname{grad} \bar{v}_i \quad (24.4. \gamma)$$

Τέλος αἱ ἐξισώσεις τοῦ NAVIER (9.5.2. α) λαμβάνουν τήν μορ-
φήν

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = f_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \Delta \bar{v}_i \quad (24.4. \delta)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τά τέλεια ρευστά ($\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$) δέν θά μη-
δενισθῇ μόνον ὁ συντελεστής μ τῶν σχέσεων (24.4. δ) ἀλλά ὅλος ὁ ἀν-
τίστοιχος ὅρος, δεδομένου ὅτι $\tau_{ij} = 0$. Ἐπομένως θά προϋψουν αἱ σχέ-
σεις

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = f_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \quad (24.4. \epsilon)$$

καί ἐξ αὐτῶν συνάγεται ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν τελείων ρευστῶν διὰ στρω-
τήν ροήν ἰσχύουν καί διὰ τήν τυρβώδη, δι' ἀπλῆς ἀντιματαστάσεως τῶν
διαφορῶν μεγεθῶν μέ τὰς μέσας τιμὰς των.

Διὰ τήν τιμήν τοῦ συντελεστοῦ ($\mu + \varepsilon$) εἰς τό τυχόν σημεῖον (x_1 ,
 x_2) τῆς διατομῆς ἐνός ἀγωγοῦ, ὁ BOUSSINESQ δίδει τήν σχέσιν

$$\mu + \varepsilon = \rho g A_0 V_0 \frac{S}{\Pi} f \left(\frac{\Pi x_1}{S}, \frac{\Pi x_2}{S} \right) \quad (24.4. \zeta)$$

ἐνθα

A_0 εἶναι συντελεστής ἐξαρτώμενος ἀπό τήν φύσιν τοῦ ρευστοῦ καί τῶν
παρεῶν, ἀλλά μέ μιᾶς διακυμάνσεως περίε μιᾶς μέσης τιμῆς (O, O64
εἰς τό σύστημα C. G. S.).

V_0 εἶναι ἡ μέση ταχύτης τῆς διατομῆς

S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς

Π ἡ βρεχομένη περίμετρος αὐτῆς

f εἶναι μία θετικὴ συνάρτησις ἔχουσα ὠρισμένην ἔμφρασιν δι' ἐυάστην μορφήν διατομῆς

π.χ. διὰ κυκλικήν διατομὴν ἀγωγοῦ μεταφορᾶς ὕδατος αὐτῆνος r_0 ἡ (24.4.ζ) γίνεται

$$\mu + \varepsilon = \rho g A_0 V_0 \frac{r_0}{2} \cdot \frac{r_0}{r}$$

ἐνθα r εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου (x_1, x_2) ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς διατομῆς.

Σημειωτέον ὅτι ὁ συντελεστής ε εἶναι πολὺ μεγάλος συγκρινόμενος μὲ τὸν συντελεστήν μ . Οὕτω δι' ὀρθογωνιὸν ἀγωγὸν μεγάλου πλάτους, μὲ ὕψος ὕδατος 1 m καὶ ταχύτητα 1 m/sec , ἡ μέση τιμὴ τοῦ ε εἶναι $\varepsilon = 5\,000\ \mu$

Ἐξ αὐτοῦ συνάγεται ὡς συμπέρασμα ὅτι ἡ κυρία αἰτία τῶν ἀπωλειῶν ἐνεργείας εἰς τὰς κινήσεις τῶν πραγματικῶν ρευστῶν εἶναι ἡ τυρβώδης δίατα τῆς ροῆς των.

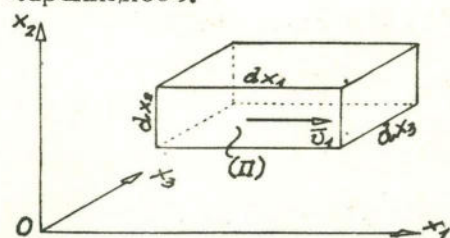
Διὰ στρωτὴν δίατα τὰ ἀπώλειαι ἐνεργείας εἶναι πραυτικῶς ἀσήμαντοι.

24.5 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΕΙΣ ΣΤΑΣΙΜΟΝ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗΝ

Διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῆς στασίμου τυρβώδους ροῆς δεχόμεθα τὴν ἀνύλουθον ὑπόθεσιν τοῦ REYNOLDS:

Ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμικότητος τοῦ Νεύτωνος $\tau = \mu a$ ἡ ὁποία δέν ἰσχύει διὰ τὰς μέσας τιμὰς τῶν διαφορῶν μεγεθῶν (μαυροσοπιᾶς τιμὰς) ἰσχύει πάντοτε διὰ τὰς στιγμιαίας τοπιᾶς τιμὰς καὶ ἐπομένως πᾶσα τυρβώδης ροὴ εἶναι μιυροσοπιῶς στρωτή.

Θὰ προσδιορίσωμεν ἓν συνεχεῖα τὰς διατμητικὰς τάσεις μιᾶς στασίμου τυρβώδους ροῆς εἰς τὴν ὁποίαν αἱ μέσαι τιμαὶ τῶν διαφορῶν μεγεθῶν ὑπαίουουν εἰς τὰς ἐξισώσεις (7.2.α), ὁπότε ἡ μέση κίνησις εἶναι μία ροὴ ἀπλῆς ὀλισθήσεως μὲ τροχιάς εὐθυγράμμους καὶ παραλλήλους.



Σχ. 24.5.Α

Ἐστω τὸ στοιχειῶδες παραλληλεπίπεδον τοῦ Σχ. 24.5.Α, διαστάσεων dx_1, dx_2, dx_3 , κινούμενον μὲ τὴν μέσῃ τιμὴν τῆς ταχύτητος τοῦ κέντρου βάρους του, $\vec{V}_1$.

Ἐστω $A = dx_2 dx_3$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ. Εἰς τὸν χρόνον dt θὰ εἰσέλθῃ διὰ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς

μία μάζα ίση προς $\rho v_1' dt$ και ως έυ τούτου ή ποσότης υινήσεως τής έντός του παραλληλεπιπέδου εύρισιομένης ρευστής μάλης ιατά τόν άξονα Ox_1 θά μεταβληθῇ ιατά $-\rho v_1' v_2' dt$.

Όλουληρώνοντες τήν μεταβολήν αὐτήν τής προσότητος υινήσεως, τής διερχομένης διά τής έπιφανείας A , μεταξύ των χρόνων t_1 και $t_2 = t_1 + t'$ θά έχωμεν συνολικώς

$$dM = -A \int_{t_1}^{t_2} \rho v_1' v_2' dt \quad (24.5. \alpha)$$

Τό άνωτέρω φαινόμενον, έξεταζόμενον μαυροσυοπιώς χαρακτηρίζεται άπό μίαν πρόσθετον ώθησιν, έφαρμοζομένην επί τής έπιφανείας A μέ μέσην τιμήν ιατά τόν χρόνον t' ίσην προς dM/t' . Η ώθησις αὐτή είναι έν γένει θετική ή άρνητική, δημιουργεί δέ μίαν πρόσθετον έφαπτομενιήν τάσιν ίσην μέ

$$\tau_R = \frac{dM}{A \cdot t'} = -\frac{1}{t'} \int_{t_1}^{t_2} \rho v_1' v_2' dt \quad (24.5. \beta)$$

Επί τῇ βάσει τής σχέσεως (24.3. α), ή τάσις αὐτή δύναται νά γραφῇ

$$\boxed{\tau_R = -\rho v_1' v_2'} \quad (24.5. \gamma)$$

και παριστᾷ τήν πρόσθετον έφαπτομενιήν τάσιν λόγω του τυρβώδους τής ροής.

Εξ άλλου ή υπόθεσις του REYNOLDS μάς δίδει διά τήν έπιφάνειαν A μίαν στιγμιαίαν έφαπτομενιήν τάσιν ίσην προς $\tau = \mu \frac{dv}{dx_2}$. Επί τῇ βάσει τής σχέσεως (24.3. ι) θά ύπάρχη επί τής A μία μέση τάσις ασυμμένη τάσις του ιζώδους ίση προς

$$\tau_n = \mu \frac{\overline{dv_1}}{dx_2} = \mu \frac{d\overline{v_1}}{dx_2} \quad (24.5. \delta)$$

Η συνολική μέση τάσις θά είναι έπομένως

$$\tau = \tau_n + \tau_R = \mu \frac{d\overline{v_1}}{dx_2} - \rho v_1' v_2' \quad (24.5. \epsilon)$$

Παρατηρούμεν ότι ιατά ιανόνα εις τήν τυρβώδη ροήν ή τάσις του ιζώδους είναι άμελητέα ως προς τήν τάσιν λόγω τυρβώδους, όποτε λέγομεν ότι ή συνειντιμότης δέν έπηρεάζει τας άπωλειάς λόγω τριβών. Η σχέση (24.5. ε) γράφεται τότε

$$\tau \approx \tau_x = -\rho \overline{u'v'} \quad (24.5. \zeta)$$

Αποδεικνύεται έξ άλλου ότι $\overline{u'v'} < 0$ και έπομένως τό τυρβώδες της ροής πολλαπλασιάζει τάς αντίστάσεις λόγω τριβών.

Η μόνη ζώνη διά την οποίαν ή τάσις του ιζώδους παίζει πρωτεύοντα ρόλον είς την τυρβώδη ροήν είναι μία λεπτή στρώσις παρά την έπαφήν του ρευστού μέ τάς στερεάς παρειάς,υαλουμένη προς τοῦτο και τυρβώδης όριακή στοιβάς. Είς αυτήν, ό παράγων $d\overline{u}/dx_2$ αποτιθά μεγάλην τιμήν, όότι ή μέση ταχύτης ύφίσταται άπότομον αύξησιν από του μηδενός είς μίαν τιμήν u_* , ένώ αντίθέτως ή στιγμιαία τιμή της ταχύτητος τείνει νά γίνη παράλληλος προς την παρειάν,μέ άποτέλεσμα την άπότομον μείωσιν του όρου $\overline{u'v'}$, ό όποός τείνει προς τό μηδέν, του σημείου πλησιάζοντος προς την παρειάν.

Εξ αύτών συνάγεται ότι πάσα τυρβώδης όριακή στοιβάς περιλαμβάνει και μίαν λεπτοτάτην στρωτήν όριακήν στοιβάδα.

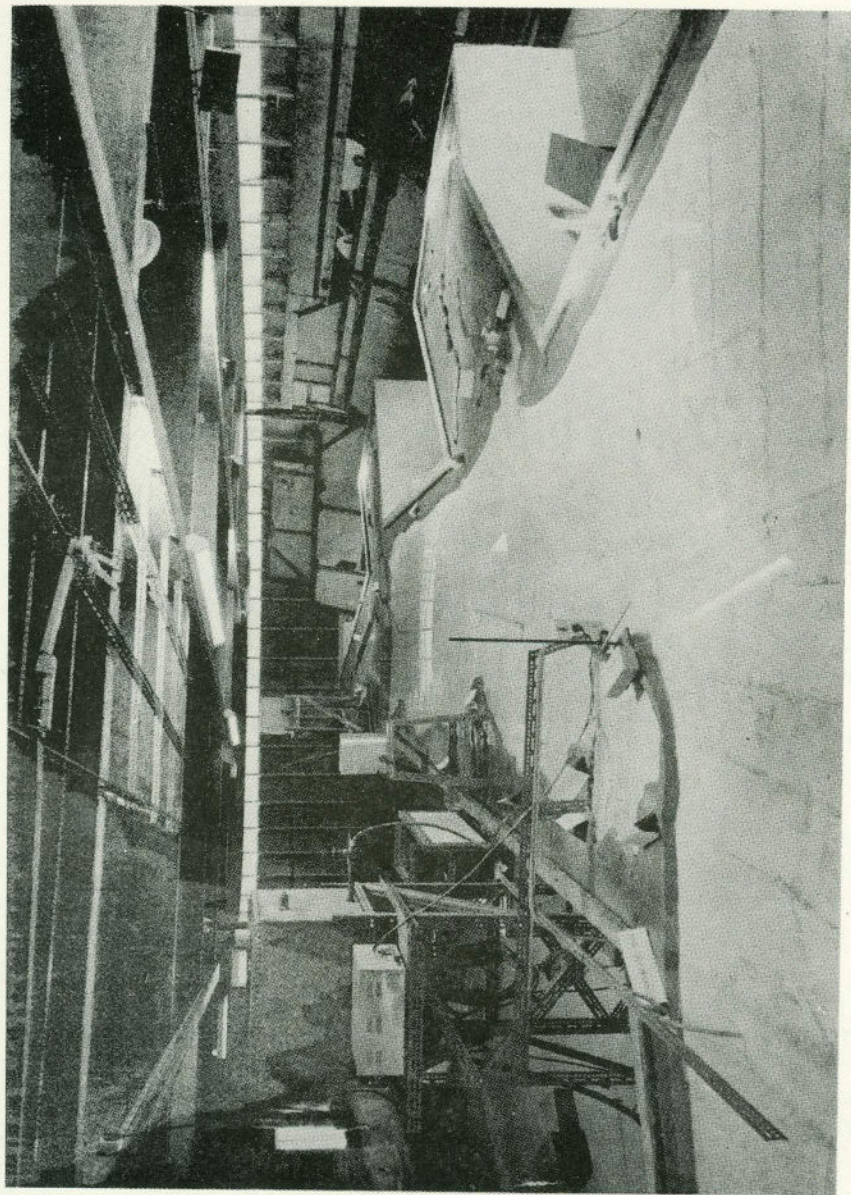
Εν της σχέσεως (24.5.ζ) συνάγεται έξ άλλου έν σοβαρώτατον συμπέρασμα σχετιώς μέ την έφαρμογήν του νόμου όμοιότητας του REYNOLDS είς τάς περιπτώσεις ροής είς τυρβώδη δίδαιταν (ίδε κεφ. 20 και 22).

Πράγματι, διά της έφαρμογής του νόμου όμοιότητας του REYNOLDS, λαμβάνεται ούσιαστικώς ύπ'όψιν ή συνευτιμότης του ρευστού και είδωώτερον αι έξ αύτης προϋππουσαι άπώλειαι έν τριβών, όφειλόμεναι άπουλειστικώς είς τάς τάσεις έν συνευτιμότητος (ή ιζώδους).

Ός άνεφέρθη όμως προηγουμένως είς όλας τάς περιπτώσεις ροής είς τυρβώδη δίδαιταν, αι τάσεις έν της συνευτιμότητος είναι άμελητέαι και έπομένως άπαλασσόμεθα αύτομάτως από την τήρησιν του νόμου του REYNOLDS μεταξύ όμοιώματος και πρωτοτύπου διά τάς ροάς αυτές. Βεβαίως ή σχέση (24.5.ζ) προσθέτει έν πρώτης όψεως ένα νέον νόμον όμοιότητας είς άντιματάστασιν του νόμου του REYNOLDS. Διά του νέου αύτου νόμου έμφράζεται άπλως ότι αι έν των τάσεων προϋππουσαι άπώλειαι λόγω τριβών πρέπει νά είναι άνάλογοι του τετραγώνου της ταχύτητος και της πυκνότητος του ρευστού.

Δεδομένου όμως ότι αι άπώλειαι λόγω τριβών μιας ροής έμφράζονται κατά υανόνα ύπό μιας διαφοράς πιέσεων, ό άνωτέρω νέος νόμος ταυτίζεται μέ τόν νόμον όμοιότητας του EULER και έπομένως ούδεμίαν προσθέτει δέσμευσιν είς τάς μελέτας επί όμοιωμάτων.

Εν συμπεράσματι οι νόμοι όμοιότητας των πραγματικών ρευστών είς τυρβώδη δίδαιταν άνάγονται είς τούς νόμους όμοιότητας των τελείων ρευστών.



Μελέτη επί ομοιώματος παρατίλων ρευμάτων εις SAUTHAMPTON
Στρεβλή υψύμαξ: $\lambda_H = 1/1250$, $\lambda_V = 1/100$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 25.

ΜΕΛΕΤΗ ΑΠΛΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΣΤΡΩΤΗΣ ΡΟΗΣ

ΔΙ'ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΡΕΥΣΤΑ

25.1 ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Αἱ εὐρεθεῖσαι εἰς τό κεφάλαιον 9 ἐξισώσεις καί συνθῆμαι ὁρίων διά τὰ πραγματικά ρευστά, αἱ ὁποῖαι ἀνταποκρίνονται πλήρως εἰς τήν στρωτήν ροήν, δέν ἐπιλύονται διά μίαν γενικήν περίπτωση μινῆσεως.

Εἰς ὠρισμένας ὁμως εἰδικάς περιπτώσεις, συναντωμένας συχνότερον καί ἐν τῇ πράξει, δίδουν μίαν ἀσφαλῆ θεωρητικήν λύσιν, ἐπαληθευμένην πλήρως καί ἀπό τό πείραμα, ὑπό τόν ὅρον ὅτι τό φαινόμενον δέν ὑπερβαίνει τά ὅρια τῆς στρωτῆς ροῆς.

Ἡ ἀναλυτική ἀνάπτυξις αὐτῶν τῶν περιπτώσεων μινῆσεως θά ἀποτελέσῃ τό ἀντιμεῖμενον τοῦ παρόντος κεφαλαίου, ἀφοῦ πρῶτον ἀναφερθοῦν ὠρισμένα συμπεληρωματικά ἀρχαί καί ἐξισώσεις.

Πρῶτον θά ἀποδείξωμεν ὅτι πᾶσα ἀστροβίλος ροή τελείου ἀσυμπίεστου ρευστοῦ εἶναι μαθηματικῶς ἰσοδύναμος μέ ἀστροβίλον ροήν πραγματικοῦ ἀσυμπίεστου ρευστοῦ, μέ μόνην ἐπιφύλαξιν τήν τυχόν ὑπάρχουσαν διαφοράν εἰς τās ὁριακάς συνθήκας.

Ἡ ἀρχή αὕτη ἔχει ὡς συνέπειαν τήν μεγάλην ἐφαρμογήν τῶν ἀστροβίλων ἐπιπέδων μινῆσεων τῶν τελείων ἀσυμπίεστου ρευστῶν εἰς τās ἀστροβίλους στρωτάς ροάς τῶν πραγματικῶν ρευστῶν (1).

Πράγματι, δι' ἀστροβίλον ροήν πραγματικοῦ ἀσυμπίεστου ρευστοῦ, δηλαδή διά ροήν μέ δυναμικόν πεδίου τῶν ταχυτήτων, θά ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \text{καί, λόγω τῆς συνεχείας, } \operatorname{div} u_i = \Delta \varphi = 0, \quad \text{ὅποτε}$$

(1) Π.χ. ροή ὕδατος διά πορώδους μέσου, λόγω διαφορᾶς πιέσεων.

$$\Delta\psi - \Delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right) = \frac{\Delta\phi}{\partial x_i} = 0$$

καί ἐπομένως αἱ ἐξισώσεις τοῦ NAVIER ἀνάγονται ἐν ταυτότητος εἰς ἐξισώσεις EULER.

Βεβαίως εἰς ὅσας περιπτώσεις ἔχομεν κίνησιν ρευστοῦ ἐν ἐπαφῇ μέ στερεάν παρειάν, εἶναι δέ καί αἱ περισσότεραι, δέν δύναμεθα νά μεταφέρωμεν αὐτούσια τά ἀποτελέσματα τῆς ἐπιπέδου κινήσεως εἰς τήν κίνησιν τοῦ πραγματικοῦ ρευστοῦ. Πράγματι, λόγῳ τῆς διαφορᾶς τῶν ὀριαῶν συνθηκῶν τῆς κινήσεως, ἡ ροή τοῦ πραγματικοῦ ρευστοῦ δύναται νά εἶναι τότε τελείως διάφορος τῆς θεωρητικῶς μελετηθείσης ἐπιπέδου κινήσεως.

Μία ἄλλη σχέση, ἐπιτρέπουσα τήν μελέτην τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως περιστροφῆς $\vec{\omega}$, δίδεται εἰς (9.6.1.α) ὑποτιθεμένου πάντοτε ὅτι αἱ ἐξωτερικαί δυνάμεις εἶναι τῆς μορφῆς $\vec{f} = \rho \operatorname{grad} \Phi$. Ἡ σχέση αὕτη γράφεται ἐπίσης

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \nu \Delta \vec{\omega}, \quad \left(\nu = \frac{\mu}{\rho}\right) \quad (25.1.α)$$

ὀνομάζεται ἐξίσωσις μεταφορᾶς τῆς δύνης, καί δεκνύει ὅτι ἡ μεταβολή τοῦ διανύσματος $\vec{\omega}$ κατὰ τήν μεταφοράν του, ἰσοῦται μέ τās ἀπωλείας του λόγω τριβῶν, Σημειοῦμεν δέ ὅτι εὐρίσκει ἀριετᾶς ἐφαρμογὰς εἰς τήν μηχανικήν τῶν πραγματιῶν ρευστῶν.

Ἐπὶ παραδείγματι ἄς ἐξετάσωμεν τās ἐπιπέδους κινήσεις μέ μόνον περιορισμόν νά εἶναι τό ρευστόν ἀσυμπίεστον.

Τότε, ὡς προοίπτει ἐν τῆς σχέσεως (12.2.δ) αἱ συνιστώσαι τῆς ταχύτητος πηγάζουν ἐν τῆς ροῆς συναρτήσεως ϕ , ἥτοι $u = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ὁπότε

$$|\omega| = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \Delta \phi$$

ἀλλά

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V} = -(\omega \cdot v) \vec{i} + (\omega \cdot u) \vec{j}$$

οπότε

$$\operatorname{rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\omega u) + \frac{\partial}{\partial y} (\omega v) \right] \vec{k} = \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial y} \right) \vec{k} = \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Κατόπιν αὐτῶν, ἡ σχέση (25.1.α) λαμβάνει τὴν μορφήν

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}(\Delta\psi) - \nu\Delta(\Delta\psi) = 0. \quad (25.1.\beta)$$

Ἐάν ἐπιτευχθῇ ἡ ἐπίλυσις αὐτῆς τῆς διαφορικῆς ἐξίσωσως 4ης τάξεως, λαμβανομένων πάντοτε ὑπ' ὄψιν τῶν συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια, θά προκύψῃ τὸ δίκτυον γραμμῶν ροῆς καὶ ἐξ αὐτοῦ τὰ ὑπόλοιπα ζητούμενα στοιχεῖα τῆς ροῆς.

Παρατηροῦμεν τέλος ὅτι διὰ τὰς ἐπιπέδους κινήσεις ἡ ἐξίσωσις (25.1.α), ἀναγομένη ὡς ἤδη ἐδείχθη εἰς τὴν σχέσηιν

$$\frac{\partial|\omega|}{\partial t} + u \frac{\partial|\omega|}{\partial x} + v \frac{\partial|\omega|}{\partial y} = \nu\Delta|\omega| = \nu \left(\frac{\partial^2|\omega|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2|\omega|}{\partial y^2} \right), \quad (25.1.\gamma)$$

συμπίπτει πλήρως μέ τὴν ἐξίσωσιν διανομῆς τῆς θερμοκρασίας περὶ θερμοῦ σώματος παρεμβالιομένου εἰς ἐπίπεδον ροὴν ἀσυμπιέστου ρευστοῦ.

Πράγματι ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι

$$\rho g C \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) = K \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) \quad (25.1.\delta)$$

ἐνθα C = εἰδικὴ θερμότης

K = συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος τοῦ ρευστοῦ

ϑ = διαφορὰ θερμοκρασίας μεταξὺ δύο σημείων τῆς ροῆς ὑποτιθεμένου ὅτι τὸ σῶμα ἔχει ἐνιαίαν καὶ σταθεράν θερμοκρασίαν.

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (25.1.δ) παριστᾷ τὴν μεταφορὰν θερμότητος διὰ τῆς ροῆς τοῦ ρευστοῦ, τὸ δὲ δεύτερον μέλος τὴν μεταφορὰν λόγῳ ἀγωγιμότητος τοῦ ρευστοῦ.

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ϑ καὶ $\frac{K}{\rho g C}$ διὰ τῶν $|\omega|$ καὶ ν ἐπανευ-

ρίσσομεν τὴν (25.1.γ).

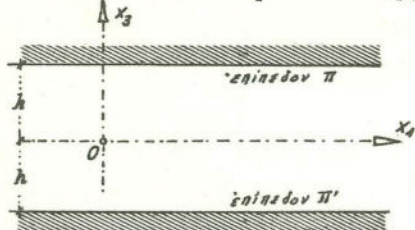
Ἡ πειραματικὴ ὠφέλεια ἐκ τοῦ γεγονότος αὐτοῦ εἶναι μεγίστη διότι μᾶς ἐπιτρέπει τὴν μελέτην τῆς ἐξίσωσως (25.1.γ) διὰ σχετικῶς εὐκόλων πειραμάτων ἐπὶ τῆς διανομῆς τῆς θερμοκρασίας περὶ διαφόρων θερμῶν σωμάτων.

25.2 ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑ ΜΟΝΙΜΟΝ ΡΟΗΝ

25.2.1 Ροὴ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων λόγῳ διαφορᾶς πιέσεων

Ἐστωσαν $x_3 = h$ καὶ $x_3 = -h$ αἱ ἐξίσωσεις τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ Π' . Θά μελετήσωμεν μίαν ροὴν μέ τροχιάς εὐθυγράμμους καὶ παραλλήλους πρὸς ἓνα ἄξονα, ἔστω τόν Ox_1 . Αἱ ἐξίσωσεις τῆς κινήσεως αὐτῆς κατὰ EULER θά εἶναι ἐν γένει $v_2 = v_3 = 0$, $v_1 = v_1(x_2, x_3)$.

Ἄς ἐξετάσωμεν κατ'ἀρχὴν τὴν ἐξίσωσιν συνεχείας, ἡ ὁποία ἀνάγεται



Σχ. 25.1. Α

διὰ τὴν ὁποίαν αἱ τάσεις δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις (7.2. γ) ἔνθα $a = a(x_3)$.

Ἄς ἐφαρμόσωμεν τὰς ἐξισώσεις (9.5.2. α) τοῦ NAVIER, περιοριζόμενοι κατ'ἀρχὴν εἰς τὴν περίπτωση ἠδενιμοῦ πεδίου ἐξωτερικῶν δυνάμεων. Ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν δίδει

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} = \mu \frac{d^2 v_1}{dx_3^2} \quad (25.2.1. α)$$

διότι

$$\vec{f} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

καί

$$\frac{1}{2} \text{grad} \vec{V} + \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{V} \text{grad} v_i = 0$$

Ἡ δευτέρα καί ἡ τρίτη ἐξ αὐτῶν ἀνάγονται ἐξ ἄλλου εἰς $\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$

καί δεικνύουν ὅτι ἡ πίεσις p εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν μεταβλητῶν x_2 καί x_3 , ἐξαρτημένη μόνον ἀπὸ τὴν μεταβλητὴν x_1 , δηλαδὴ $p = p(x_1)$. Τότε ὅμως εἰς τὴν ἐξίσωσιν (25.2.1. α) τὸ πρῶτον μέλος εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς μεταβλητῆς x_1 καί τὸ δεύτερον συνάρτησις μόνον τῆς μεταβλητῆς x_3 . Καί ἐπειδὴ αἱ μεταβληταὶ x_1 καί x_3 εἶναι ἀνεξάρτητοι, ἡ ἐξίσωσις εἶναι δυνατὴ μόνον ἐφ'ὅσον τὰ δύο αὐτὰ μέλη εἶναι ἴσα πρὸς μίαν καί τὴν αὐτὴν σταθεράν.

Λόγω τοῦ πρώτου μέλους $\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{dp}{dx_1} \right)$ ἡ πίεσις θά εἶναι μία γραμμική συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x_1 καί ἡ σταθερά K θά παριστᾷ τὴν πτώσιν πιέσεως ἀνά μονάδα μήκους.

Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$\frac{dp}{dx_1} = K = -\rho g j \quad ,$$

ἔνθα $j = \frac{\Delta x_3}{\Delta x_1} = \frac{\Delta h}{\Delta l}$ παριστᾷ τὴν πτώσιν πιέσεως ἀνά μονάδα μήκους, εἰπερ φρασμένην εἰς ὕψος ρευστοῦ.

Εξ αυτού προκύπτει ότι η ταχύτης v_1 δίδεται από την σχέση

$$\frac{d^2 v_1}{dx_3^2} = -\frac{\rho g j}{\mu} = -\frac{g j}{\nu}$$

οπότε

$$v_1 = -\frac{g j}{2\nu} x_3^2 + \kappa_1 x_3 + \kappa_2$$

και επομένως ευφράζεται με έν πολυώνυμον δευτέρου βαθμού ως προς x_3 . Ο προσδιορισμός των σταθερών κ_1 και κ_2 εξαρτάται από τās όριακές συνθήκας, δηλαδή από τās συνθήκας εις τās παρειάς Π και Π' .

α) Εάν αι παρειάι είναι άκίνητοι, η ταχύτης v_1 πρέπει νά μηδενίζεται διά $x_3 = h$ και $x_3 = -h$. Εξ αυτού προκύπτει ότι

$$\frac{g j}{2\nu} h^2 = \kappa_1 h + \kappa_2$$

$$\frac{g j}{2\nu} h^2 = -\kappa_1 h + \kappa_2$$

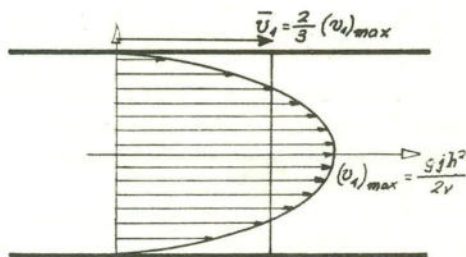
άρα $\kappa_1 = 0$ και $\kappa_2 = \frac{g j}{2\nu} h^2$, η δέ εξίσωσις τής ταχύτητος θά είναι

$$v_1 = \frac{g j}{2\nu} (h^2 - x_3^2). \quad (25.2.1. \beta)$$

Παρατηρούμεν ότι η διανομή τής ταχύτητος είναι παραβολική και συμμετρική ως προς τόν άξονα Ox_3 .

Η παροχή όγκου ανά μονάδα πλάτους θά είναι

$$q = 2 \int_0^h v_1 dx_3 = \frac{2g j}{3\nu} h^3. \quad (25.2.1. \gamma)$$



Σχ. 25.2.1. Β

Η μέση ταχύτης τής διατομής ανά μονάδα πλάτους δίδεται από την σχέση

$$\bar{v}_1 = \frac{q}{2h} = \frac{g j h^2}{3\nu}, \quad (25.2.1. \delta)$$

ίσοῦται δέ μέ τά $\frac{2}{3}$ τής μεγίστης ταχύτητος τής ροής.

Παρατηρούμεν έξ άλλου ότι η πτώσις πιέσεως j (άντιπροσωπεύουσα τās άπωλείας ένεργείας τής ροής λόγω τριβών, $\tau = \mu a$), είναι άνάλογος τής πρώτης δυνάμεως τής μέσης ταχύτητος, διότι

$$j = \frac{3\nu}{gh^2} \bar{v}_1. \quad (25.2.1. \epsilon)$$

β) Εάν η παρειά $\Pi(x_3=h)$ υινεϊται μέ σταθεράν ταχύτητα V_0 ως εἰς σχ.21.2.1.Γ, ἐνῶ η παρειά Π' παραμένει ἀκίνητος, θά ἔχωμεν τὰς συνθήκας $v_1(h) = V_0$, $v_1(-h) = 0$, ἐν τῶν ὁποίων προκύπτει ἡ τελειή ἔκφρασις τῆς ταχύτητος

$$v_1 = \frac{x_3+h}{2h} V_0 + \frac{gj}{2\nu} (h^2 - x_3^2). \quad (25.2.1.ζ)$$

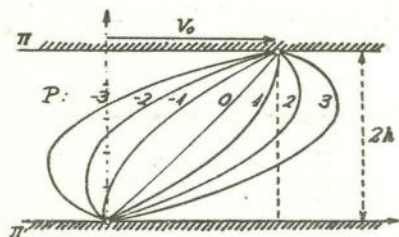
Διὰ $j=0$ δηλαδή ὑπὸ σταθεράν πίεσιν καὶ κατὰ τὸν ἄξονα Ox_1 , τὸ διάγραμμα ταχυτήτων εἶναι γραμμικόν, ἀναγόμεθα δέ εἰς τὴν περίπτωση τοῦ σχήματος 7.2.Α.

Διὰ $j > 0$ ἡ ταχύτης τοῦ ρευστοῦ αὐξάνει, καὶ ἀντιστρόφως διὰ $j < 0$ ἡ ταχύτης ἐλαττοῦται. Προκύπτει δέ εὐκόλως ὅτι διὰ $2gj < -\frac{\mu V_0}{2h^2}$ δημι-

ουργεῖται ἐν ρεῦμα ἐπιστροφῆς, δηλαδή τὸ ρευστόν πλησίον τοῦ ἐπιπέδου Π' ἔχει ταχύτητα ἀντίθετον πρὸς τὴν τοῦ ἐπιπέδου Π .

Ἡ μέση ταχύτης τῆς ροῆς εἶναι ἴση πρὸς εἶναι ἴση πρὸς

$$\bar{v}_1 = \frac{V_0}{2} + \frac{gj}{3\nu} h^2. \quad (25.2.1.η)$$



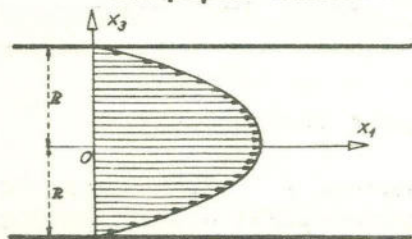
Σχ. 25.2.1. Γ

Εἰς τὸ σχῆμα 25.2.1.Γ δίδονται τὰ διαγράμματα τῶν ταχυτήτων διὰ διαφόρους τιμὰς τῆς

$$\text{παραμέτρου } P = \frac{2h^2 gj}{\nu V_0}.$$

Παρατήρησις: Αἱ ἐξισώσεις καὶ τὰ ἀποτελέσματα τῆς παρουσίας παραγράφου ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν περίπτωση ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐν πεδίου βαρύτητος, ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ πίεσις p ὑπὸ τῆς μηχανηρίου πίεσεως $p^* = p - \rho g x_3$.

25.2.2 Ροὴ ἐντὸς κυλινδρικοῦ σωλήνος σταθερᾶς διατομῆς λόγῳ διαφορᾶς πιέσεων



Σχ. 25.2.2. Α

ας προκύπτει ὅτι ἡ v_1 εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς x_1 , ἐπομένως

$$v_1 = v_1(x_2, x_3).$$

Ἡ περίπτωση αὕτη ἀποτελεῖ μίαν ἀπλὴν γενίκευσιν τῆς προηγουμένης περιπτώσεως ροῆς μεταξύ δύο παραλλήλων πλακῶν. Μία κατακόρυφος τομὴ κατὰ τὸν ἄξονα τοῦ σωλήνος δίδει τὴν ροὴν τοῦ σχήματος 25.2.2.Α, διὰ τὴν ὁποίαν, $v_2 = v_3 = 0$, τῆς v_1 οὕσης συναρτήσεως τῶν x_2, x_3 . Ἀλλὰ ἐν τῇ ἐξισώσει συνεχεί-

Εν τῆς δευτέρας καί τρίτης τῶν ἐξισώσεων τοῦ NAVIER, μέ μὴ δεινιόν πεδίων ἐξωτερικῶν δυνάμεων, προκύπτει πάλιν ὅτι ἡ πίεσις p εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν x_2 καί x_3 , ἡ δέ πρώτη ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \Delta v_1, \quad (25.2.2. \alpha)$$

ἐνθα

$$\Delta v_1 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}.$$

Τό πρῶτον μέλος τῆς 25.2.2. α) εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς x_1 , τό δέ δεύτερον μέλος εἶναι συνάρτησις μόνον τῶν x_2 καί x_3 . Ἐξ αὐτῶν συνάγεται ὅτι

$$\frac{dp}{dx_1} = -\rho g f,$$

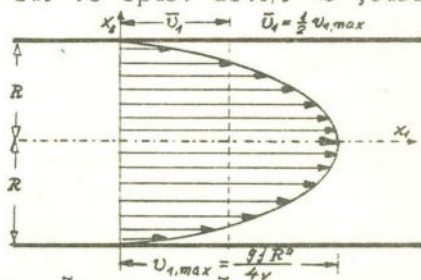
ἄρα ἡ πίεσις εἶναι πάλιν γραμμική συνάρτησις τῆς x_1 , καί

$$\Delta v_1 = \Delta f(x_2, x_3) = -\frac{g f}{\nu},$$

ἢ

$$\Delta v_1 + \frac{g f}{\nu} = 0. \quad (25.2.2. \beta)$$

Ἐάν S εἶναι τό ὅριον τῆς ὀρθῆς διατομῆς (Σ) τοῦ σωλῆνος, δηλαδή ἡ ὀριαυή συνθήκη τῆς ροῆς, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $f(x_2, x_3)$, ὠρισμένης εἰς τὴν περιοχὴν (Σ) καί μηδενιζομένης εἰς τό ὅριον αὐτῆς S , δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (25.2.2. β). Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μαθηματικὴ μορφή τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἀνταποκρίνεται πλήρως εἰς τό πρόβλημα τῆς στρέψεως κυλινδρικοῦ τινός υορμοῦ, ὡς δίδεται εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ἐλαστικότητος, αὐτό δέ ἀποτελεῖ καί ἓν χαρακτηριστικὸν παράδειγμα τῆς ἀναλογίας ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξύ τῶν διαφόρων προβλημάτων τῆς μηχανικῆς.



Εἰς τό προυείμενον παράδειγμα θά περιορισθῶμεν εἰς τὴν λύσιν τῆς (25.2.2. β) διὰ τὴν περὶπτωσιν σωλῆνος ὀρθῆς κυλινδρικοῦ διατομῆς.

Λόγῳ συμμετρίας τῆς ροῆς ὡς πρὸς τὸν κεντρικόν ἄξονα Ox_1 , δύναμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν τὰς μεταβλητάς x_2 καί x_3 μέ τὴν μεταβλητὴν r ($r^2 = x_2^2 + x_3^2$), ὁπότε ἔχομεν

$$\Delta f = \Delta v_1 = 2 \frac{d^2 v_1}{dr^2} = -\frac{g f}{\nu}$$

καί τελικώς

$$v_r = f(r) = \frac{g j}{4\nu} (R^2 - r^2)$$

(25.2.2.γ)

Ἡ διανομή τῆς ταχύτητος εἶναι καί πάλιν παραβολική.
Ἡ παροχή ὀγκοῦ θά εἶναι

$$Q = \int_0^R 2\pi r v_r dr = \frac{\pi R^4 g}{8\nu} j$$

(25.2.2.δ)

Ἡ μέση ταχύτης τῆς διατομῆς δίδεται ἀπό τήν σχέσιν

$$\bar{v}_r = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{g j R^2}{8\nu}$$

(25.2.2.ε)

ἴσοῦται δέ μέ τό ἥμισυ τῆς μεγίστης ταχύτητος τῆς διατομῆς.
Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πτώσις πιέσεως εἶναι πάλιν ἀνάλογος τῆς
πρώτης δυνάμεως τῆς μέσης ταχύτητος, διότι

$$j = \frac{8\nu}{g R^2} \bar{v}_r.$$

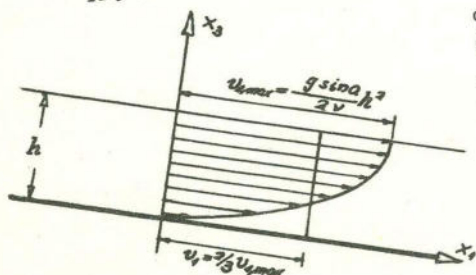
(25.2.2.ζ)

Εἰς τήν σχέσιν (25.2.2.δ) ὅλα τά μεγέθη εἶναι γνωστά ἢ μετρῶν-
ται εὐκόλως, πειραματικῶς, ἐντός τοῦ μινηματοῦ συντελεστοῦ συνε-
υτιμότητος ν . Εἰς τό γεγονός αὐτό ἐστηρίχθη ὁ POISEUILLE (1842)
διὰ τόν προσδιορισμόν τοῦ συντελεστοῦ συνευτιμότητος διαφόρων ὑγρῶν.
Ἡ δυσκολία τοῦ πειράματος ἔγκειται εἰς τήν ἀπαιτούμενην σταθεράν
θερμοκρασίαν, καθ' ὅσον τό μήκος τοῦ σωλήνος καί καθ' ὅλην τήν διάρ-
κειαν τοῦ πειράματος, ὥς καί εἰς τήν κατασκευήν λεπτῶν σωλήνων μέ
αύστηρως κυλιανήν διατομήν.

25.2.3 Ροή μέ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν εἰς κεκλιμένον ἐπίπε- δον λόγῳ τοῦ δυναμικοῦ πεδίου βαρύτητος

Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄξονα Ox_1 μίαν γραμμὴν μεγίστης κλίσεως τοῦ
ἐπιπέδου, ὑποθέσωμεν δέ ὅτι ἡ κίνη-
σις εἶναι ἐπίπεδος ὡς ἐν σχήματι
(25.2.3.Α) μέ ἓν σταθερόν ὕψος ρευ-
στῆς στρώσεως ἴσον μέ h .
Προφανῶς θά εἶναι $v_2 = v_3 = 0$ καί $v_1 = v_1(x_2)$.
Ἐν τῆς ἐξίσωσιν συνεχείας προου-
πτει ὁμως ὅτι $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$, καί ἐπομένως θά
εἶναι τελικῶς

$$v_1 = v_1(x_2)$$



Σχ. 25.2.3.Α

Αι έξισώσεις του NAVIER δίδουν

$$\begin{aligned} \rho g \sin \alpha - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \Delta v_1 &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= \rho g \cos \alpha. \end{aligned} \quad (25.2.3.a)$$

Εν της τρίτης των ανωτέρω εξισώσεων προκύπτει ότι η μεταβολή της πίεσεως είναι υδροστατική κατά την διεύθυνσιν του άξονος Ox_3 μέ σταθεράν τιμήν εἰς τήν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ρευστοῦ. Ἐπομένως θά εἶναι σταθερά κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ άξονος Ox_1 καί κατά

συνέπειαν $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$

Ἡ πρώτη ἐν τῶν (25.2.3. a) δίδει τότε ὅτι

$$\mu \Delta v_1 = -\rho g \sin \alpha$$

Ἐάν λάβωμεν ὡς συνθήμας ὀρίων, μηδενικήν ταχύτητα εἰς τόν πυθμένα ($v_1 = 0$ διά $x_3 = h$) καί μεγίστην εἰς τήν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ($v_1 = v_{1, \max}$ διά $x_3 = 0$) θά ἔχωμεν τελικῶς

$$v_1 = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} (2h - x_3) x_3 \quad (25.2.3. \beta)$$

ὡς δέ ἀνεμένετο, ἡ μεταβολή της ταχύτητος εἶναι παραβολική κατά τόν άξονα Ox_3 .

Ἡ παροχή ὄγκου ἀνά μονάδα πλάτους θά εἶναι

$$q = \int_0^h v_1 dx_3 = \frac{g \sin \alpha}{3\nu} h^3, \quad (25.2.3. \gamma)$$

ὁπότε ἡ μέση ταχύτης λαμβάνει τήν τιμήν

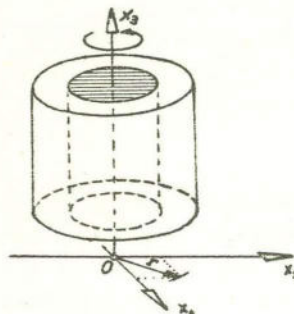
$$\bar{v}_1 = \frac{g \sin \alpha}{3\nu} h^2,$$

ἴσοῦται δέ μέ τά $2/3$ της μεγίστης ταχύτητος της ροής.

Παρατηροῦμεν τήν ἀπόλυτον ἀντιστοιχίαν της ροής τοῦ σχήματος (25.2.1. B) μέ τήν παροῦσαν περίπτωσιν ροής. Ἡ πτώσις πίεσεως j , ἥτις καί ἀπετέλει τήν κινήτηριον δύναμιν της ροής (25.2.1), ἀντιμαθίσταται ἐν προκειμένῳ μέ τήν κλίσιν $\tan \alpha$ τοῦ ἐπιπέδου Ox_1 .

25.2.4 Ροή μεταξύ δύο συναξονικών κυλίνδρων λόγω περιστροφής του έσωτερικού κυλίνδρου με σταθ.γωνιώδη ταχύτητα

Η γενική υνίσκη μεταξύ δύο συναξονικών κυλίνδρων, της οποίας μία μερική περίπτωση αναλύεται ες την παρούσαν παράγραφον υπακούει ες τας άμολούθους έξισώσεις υνίσκας κατά EULER



Σχ. 25.2.4. Α

$$v_1 = -f(r)x_2, \quad v_2 = f(r)x_1, \quad v_3 = 0 \quad (25.2.4.a)$$

$$\text{ένθα } r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Επομένως αϊ γραμμαί ροής είναι περιφέρεια με κέντρα ες τόν άξονα Ox_3 , τό δέ μέτρον της ταχύτητος είναι συνάρτησις μόνον της πολικής μεταβλητής r

Η έξίσωσις συνεχείας έπαληθεύεται έμ ταυτότητος ως προκύπτει από την μορφήν των έξισώσεων υνίσκας. Έξ άλλου, ή εφαρμογή των έξισώσεων NAVIER διά μηδενιόν πεδίων έσωτερικών δυνάμεων, δίδει έν σύστημα έξισώσεων, έπιλυόμενον εύκολως, δεδομένου ότι ή ροή έχει συμμετρίαν έμ περιστροφής. Επομένως αϊ έξισώσεις αύται δύνανται νά γραφούν δι'έν σημείον $x_1=r, x_2=0$ θά ίσχύουν δέ γενικώς λόγω της συμμετρίας. Π.χ. ή τρίτη έξίσωσις του NAVIER δίδει άμέσως ότι $\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$ καί έξ αύτης συνάγεται ότι καί ή πίεσις έξαρτάται μόνον από την μεταβλητήν r

Παρατηρούμεν επίσης ότι ες τό τυχόν σημείον $x_1=r, x_2=0$ όλαι αϊ συνιστώσαι του τανυστού των παραμορφώσεων ε_{ij} είναι μηδενισαί έντός μίας της

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}r \frac{df}{dr} \quad (25.2.4.β)$$

Επομένως ες τας έπιπέδους έπιφανείας ($x_3 = \text{σταθερά}$) αϊ τάσεις έξόδους είναι μηδενισαί, ένν ες τας κυλινδρικής έπιφανείας ($r = r_0 = \text{σταθερά}$) τό ρευστόν εύρισκόμενον ες την περιοχήν $r > r_0$ έλασσει μίαν τάσιν λόγω έξόδους, ή οποία είναι, ες έναστον σημείον, έφαπτομένη ες την έπιφάνειαν $r=r_0$ καί κάθετος ες τόν άξονα Ox_3 . Η τιμή της τάσεως αύτης είναι προφανώς

$$\tau = \mu r \frac{df}{dr} \quad (25.2.4.γ)$$

Τό σύνολον των τάσεων (25.2.4.γ) ες την έπιφάνειαν $r=r_0$ καί διά την περιοχήν $0 < x_3 < l$ σχηματίζει στρόφια άναγόμενον ες μίαν ροπήν με άξονα Ox_3 καί μέτρον

$$M = r(2\pi r) \left(\mu r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 2\pi \mu r^2 \frac{df}{dr} . \quad (25.2.4.δ)$$

Παρατηρούμεν όμως ότι η ροπή αυτή δέον νά είναι ανεξάρτητος της μεταβλητής r , διότι μεταβιβάζεται από στρώσεως εἰς στρώσιν μέ σταθερόν μέτρον, λόγω τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ποσότητος υἱνῆσεως ἐντός τῆς ὑπ' ὄψιν περιοχῆς. Ἐπομένως ἡ συνάρτησις $f(r)$ δέον νά εἶναι τῆς μορφῆς

$$f(r) = A + \frac{B}{r^2} , \quad (25.2.4.ε)$$

ἐνθα A καί B εἶναι σταθεραί προσδιοριζόμεναι ἀπό τὰς συνθήκας τῶν ὁρίων.

Ἐφαρμογή: Ἐστω ὅτι τό ρευστόν περιέχεται μεταξύ ἑνός ἐξωτερικοῦ κυλίνδρου, αὐτῆνος r_1 , αἰνιήτου, καί ἑνός ἐσωτερικοῦ, αὐτῆνος r_2 , κινουμένου μέ σταθεράν γωνιώδη ταχύτητα ω .

Αἱ συνθήκαι τῶν ὁρίων δίδουν

$$f(r_1) = 0 , \quad f(r_2) = \omega . \quad (25.2.4.ζ)$$

ὁπότε ἡ σχέση (25.2.4.ε) γράφεται

$$f(r) = \omega \frac{r_2^2(r_1^2 - r^2)}{r^2(r_1^2 - r_2^2)} . \quad (25.2.4.η)$$

Ἐν τῶν σχέσεων (25.2.4.δ) καί (25.2.4.η) φαίνεται ἀμέσως ὅτι διά νά διατηρηθῇ σταθερά ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ ἐσωτερικοῦ κυλίνδρου, παρὰ τὰς ἀντιστάσεις λόγω τοῦ ἰσώδους τοῦ ρευστοῦ καί μόνον, ἀπαιτεῖται ἡ ἐφαρμογή ἑνός λεύγους

$$M_o = 4\pi\mu \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \omega \quad (25.2.4.θ)$$

ἀνά μονάδα μήκους τοῦ ἄξονος Ox_3 .

Σημειοῦμεν τέλος ὅτι διά r_1 τεῖνον εἰς τό ἄπειρον, ἡ ροή τοῦ ρευστοῦ εἰς τήν περιοχὴν $r > r_2$ ταυτίζεται μέ τήν ροήν λόγω σημειαοῦ στροβιλισμοῦ, εὐρισκομένου εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἰσόνων ($x_1 = x_2 = 0$) καί ἐντάσεως ἴσης πρὸς $\Gamma = 2\pi r_2^2 \omega$.

Ἡ ἐφαρμογή τῆς παρούσης παραγράφου ἀποτελεῖ τήν θεωρητικὴν βάσιν τῆς λειτουργίας τῶν περιστροφικῶν ἰσώδομέτρων, τὰ ὁποῖα εἶναι καί τὰ πλέον ἐν χρήσει σήμερον ὄργανα διά τήν μέτρησιν τοῦ συντελεστοῦ συνεντιμότητος τῶν διαφόρων ὑγρῶν.

25.3 ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑ ΜΗ ΜΟΝΙΜΟΝ ΡΟΗΝ

Εν τῶν ἐφαρμογῶν τῆς παραγράφου (25.2) προκύπτει ὅτι διὰ νά διατηρηθῇ μία ροή μόνιμος, πρoκειμένου περί πραγματικοῦ ρευστοῦ, ἀπαιτεῖται μία ἐξωτερική μινητήριος δύναμις, παρoσιαζομένη ἢ ὑπό τὴν μορφήν μιᾶς διαφορᾶς πιέσεων εἰς τὰς ὁριακὰς συνθήκας, ἢ μιᾶς υἱνουμένης παρειᾶς ἢ, τέλος, ἐνός πεδίου βαρύτητος ἔχοντος συνιστῶσαν μὴ μηδενικήν, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως.

Ἀπαντα τὰ ἀνωτέρω ὀφείλονται ἀπομειωτικῶς καὶ μόνον εἰς τὰς ἀντιστάσεις λόγω τριβῶν, τὰς προαλουμένας ἀπὸ τὸ ἔξωδες τοῦ ρευστοῦ.

Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θά ἐξετάσωμεν τὰς συνεπείας τοῦ ἔξωδους εἰς τὴν μὴ μόνιμον ροὴν καὶ δὴ τὰ φαινόμενα διαχύσεως τὰ ὁποῖα κατὰ κανόνα προαλεῖ.

25.3.1 Ροαὶ ἀπλῆς ὀλισθήσεως

Θά μελετήσωμεν τὴν ροὴν μέ ἐξισώσεις κινήσεως κατὰ EULER.

$$v_1 = v_1(x_3, t) \quad , \quad v_2 = v_3 = 0 \quad (25.3.1.a)$$

καὶ σταθεράν πίεσιν εἰς ὅλον τὸ πεδῖον ροῆς.

Ἡ ἐξίσωσις συνεχείας καὶ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις τοῦ NAVIER ἱκανοποιούνται ἐν ταυτότητος. Ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ NAVIER δίδει ἐξ ἄλλου

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \quad (25.3.1.b)$$

Ἡ πλήρωσις τῆς ἀνωτέρω διαφορικῆς ἐξισώσεως ἀποτελεῖ τὴν μόνην ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην διὰ τὴν ὑπαρξιν μιᾶς κινήσεως τῆς μορφῆς (25.3.1.a). Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ (25.3.1.b) συμπίπτει μέ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν μεταδόσεως τῆς θερμότητος ἐν τὸς ἐπιπέδου τινός χώρου.

Θά ἀναζητήσωμεν τὰς λύσεις τῆς (25.3.1.b) διὰ $t > 0$ καὶ διὰ δεδομένας ὁριακὰς συνθήκας κατὰ τὴν στιγμὴν $t = 0$. Ἐν τῆς θεωρίας τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, γνωρίζομεν ὅτι ἐάν $v_1^0(x_3, t)$ εἶναι λύσις τῆς διαφορικῆς αὐτῆς ἐξισώσεως, θά εἶναι τότε λύσις καὶ ἡ $v_1^0(ax_3, a^2t)$ ἔνθα a εἶναι μία τυχούσα σταθερά.

Λαμβάνοντες τὴν τιμὴν $a = t^{-\frac{1}{2}}$ ἀνάγομεν τὴν ζητουμένην συνάρτησιν v_1 εἰς συνάρτησιν μιᾶς μόνον μεταβλητῆς, τῆς $\frac{x_3}{\sqrt{t}}$.

Ἐάν θέσωμεν

$$v_1 = f(\vartheta) \quad \text{καὶ} \quad \vartheta = \frac{x_3}{\sqrt{4\nu t}} \quad (25.3.1.γ)$$

ή συνάρτησις v_1 θα προσδιορισθῇ από τήν γραμμικήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$\frac{d^2 f}{d\vartheta^2} + 2\vartheta \frac{df}{d\vartheta} = 0 \quad (25.3.1.δ)$$

υαί ἡ ζητούμενη λύσις θα δίδεται από τήν σχέσηιν

$$v_1 = f(\vartheta) = A + B \int_0^\vartheta e^{-\vartheta^2} d\vartheta, \quad (25.3.1.ε)$$

ἐνθα A υαί B εἶναι δύο σταθεραί προσδιοριζόμεναι από τὰς ὁριαίας συνθήκας.

Θά ἐξετάσωμεν ἐν συνεχείᾳ δύο χαρακτηριστικὰς ἐφαρμογὰς τῶν ἀνωτέρω.

α) Ροή ρευστοῦ λόγω τῆς στιγμιαίας (ἀποτόμου) ἐνάρξεως τῆς υἱήσεως μιᾶς ἐπιπέδου στερεᾶς παρειᾶς μέ σταθεράν ταχύτητα V_0

Τό ρευστόν υατέχει τόν ἡμίχωρον $x_3 > 0$. Κατά τήν ἀρχικήν στιγμήν $t=0$ εὐρίσκεται ἐν ἡρεμίᾳ υαί ἐν ἐπαφῇ μέ τήν ἐπίπεδον παρειάν $x_3=0$. Δι' ὅλας τὰς ἐπομένους στιγμάς ($t > 0$) ἡ παρεία $x_3=0$ κινεῖται μέ ὁμοιόμορφον κίνησιν, σταθερᾶς ταχύτητος V_0 , υατά τόν ἄξονα τῶν

Ox_1 . Διά τῆς καταλλήλου ἐυλογῆς τῶν σταθερῶν A υαί B ἐπαληθεύονται ὅλαι αἱ ἀνωτέρω συνθήκαι. Πρός τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι διά $x_3=$ σταθερόν υαί $t \rightarrow 0$ ἐυ θετικῶν τιμῶν, θα εἶναι $\vartheta \rightarrow +\infty$. Δεδομένου δέ ὅτι

$$2 \int_0^\infty e^{-\vartheta^2} d\vartheta = \sqrt{\pi}$$

ἡ συνάρτησις (25.3.1.ε) θα τεῖνη πρό τήν τιμήν

$$A + \frac{1}{2} B \sqrt{\pi}.$$

Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι διά $t =$ σταθερόν υαί $x_3 \rightarrow 0$ θα εἶναι $\vartheta \rightarrow 0$ υαί ἡ συνάρτησις (25.3.1.ε) θα τεῖνη εἰς τό A .

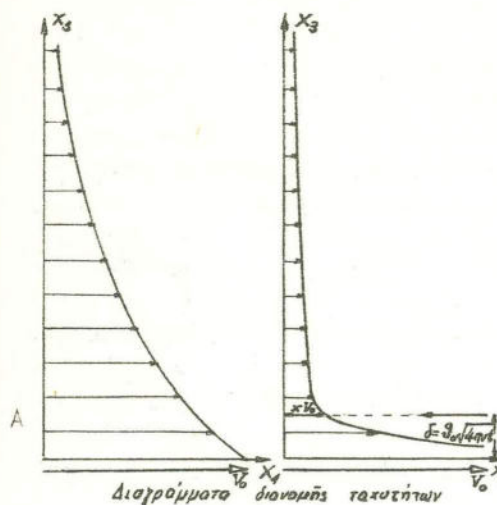
Διά νά ἱκανοποιοῦνται ἐπομένως αἱ ἀρχικαί συνθήκαι υαί αἱ συνθήκαι προσφύσεως, πρέπει υαί ἀρκεῖ νά ληφθοῦν $A = V_0$ υαί $B\sqrt{\pi} = -2V_0$ ὁπότε ἡ σχέση (25.3.1.ε) λαμβάνει τήν μορφήν

$$v_1 = V_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\vartheta e^{-\vartheta^2} d\vartheta \right). \quad (25.3.1.ζ)$$

Ἐυ τῆς ἀμέσου διερευνήσεως τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προκύπτουν τὰ ἀνδोलουθα συμπεράσματα (Σχ.25.3.1.Α).

α) Διά μίαν δεδομένην στιγμήν t , ἡ ταχύτης v_1 εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x_3 υαί μηδενίζεται εἰς τό ἄπειρον. Δι' ὅσον

δῆποτε μικρόν χρόνον t , πᾶν σημεῖον τοῦ ρευστοῦ ἔχει μὴ μηδενιῶν ταχύτητα. Ἐπομένως, ἡ συνεπιτιμότης ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν ἀναρρίαν μετάδοσιν τῆς κινήσεως τῆς παρειᾶς ἐντός ὅλης τῆς μάζης τοῦ ρευστοῦ.



Σχ. 25.3.1. Α

ἔξετάσωμεν τί συμβαίνει, διὰ τῆς συνεχοῦς ἐλλαττώσεως τῆς συνεπιτιμότητος τοῦ ρευστοῦ.

Παρατηροῦμεν ἐν γένει ὅτι τοῦ v τείνοντος εἰς τὸ μηδέν, ἡ μεταβλητὴ ϑ τείνει εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἐπομένως ἡ ταχύτης v , τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὡς προϋπτεῖ καὶ ἐν τῆς (25.3.1.ζ).

Οὕτως, ἡ συμπεριφορὰ τοῦ ρευστοῦ τείνει ἐν γένει πρὸς τὴν τῶν τελείων ρευστῶν, τὰ ὁποῖα δὲν ἐπηρεάζονται ἀπὸ τὴν κίνησιν τῆς παρειᾶς. Αὐτὸ δὲν ἰσχύει ὁμως διὰ τὴν περιοχὴν περὶ τῆς παρειᾶς εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης τοῦ ρευστοῦ θά τείνη ἀποτόμως εἰς τὴν τιμὴν V_0 .

Ἐπομένως, ὅταν ἡ συνεπιτιμότης τείνει εἰς τὸ μηδέν, ἐμφανίζεται εἰς τὴν πλησίον τῆς παρειᾶς περιοχὴν μία ζώνη, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ σύγκλισις τῆς ροῆς τοῦ πραγματικοῦ ρευστοῦ πρὸς τὴν ροὴν τελείου ρευστοῦ δὲν εἶναι ὁμοιόμορφος. Συναντῶμεν οὕτως ἐν φαινόμενον γενημὸν καὶ σπουδαιοτάτης σημασίας, λαμβάνον χώραν εἰς μίαν πολὺ λεπτὴν ζώνην ρευστοῦ παρὰ τὴν παρειάν, τὴν ὁποίαν υαλοῦμεν ὀριαυὴν στοιβάδα (ἴδε τέλος παραγρ. 24.5), ἐμφανιζόμενον εἰς ὅλας τὰς ροὰς ρευστῶν μὲ μικράν συνεπιτιμότητα καὶ μελετώμενον ἀναλυτικώτερον εἰς τὸ κεφάλαιον 27.

δ) Συνήθως ζητῶμεν νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ποίαν ζώνην, ἡ τιμὴ τῆς ταχύτητος v , ὑπερβαίνει μίαν ὠρισμένην τιμὴν κV_0 (ἐνθα $\kappa > 0$ π.χ. $\kappa = 0.01$ διὰ νὰ ὀρίσωμεν οὕτως αὐθαρέτως τὸ πάχος τῆς ὀριαυῆς στοιβάδος διὰ μίαν συγκεκριμένην περίπτωσηιν.

Ἡ σχέσις (25.3.1.ζ) δευνύει ὅτι ἡ ταχύτης v , γίνεται μεγαλύτερα τῆς κV_0 , ἐάν τὸ ϑ γίνῃ μικρότερον μιᾶς ὠρισμένης τιμῆς $\vartheta_0(\kappa)$. Ἐπομένως, διὰ δεδομένην στιγμὴν t , ἡ ταχύτης v , γίνεται μεγαλύτερα τῆς κV_0 , διὰ μίαν ζώνην πάχους

$$\delta = \vartheta_0 \sqrt{4\nu t} \quad (25.3.1.η)$$

Τό πάχος δ της όριαρης στοιβάδος θά είναι έπομένως ανάλογον της ποσότητας $\sqrt{\nu t}$. Διά t σταθερόν καί ν τεΐνον εΐς τό μηδέν, τό πάχος της όριαρης στοιβάδος τεΐνει εΐς τό μηδέν όπως τεΐνει ή ποσότης $\sqrt{\nu}$.

β) Διάχυσις μιΐς έπιφανείας έπαφης

Τό ρευστόν κατέχει όλον τόν χΰρον καί κατά την άρχικήν στιγμήν $t=0$ ή διανομή των ταχυτήτων ύπαιούει εΐς τας σχέσεις

$$v_1 = V_0 \quad \text{διά} \quad x_3 > 0 \quad \text{καί} \quad v_1 = -V_0 \quad \text{διά} \quad x_3 < 0. \quad (25.3.1.θ)$$

Έπομένως, συμφώνως πρός τόν όρισμόν της παραγράφου (5.3.4) τό επίπεδον $x_3 = 0$ είναι μία έπιφάνεια έπαφης μεταξύ των δύο μινουμένων ήμιχΰρων $x_3 > 0$ καί $x_3 < 0$.

Έάν τό ρευστόν ήτο τέλειον, ή άρχική κατάστασις (25.3.1.θ) θά διετηρήτο επ' άπειρον. Λόγω του ίδΰδους όμως, πρέπει ή συνάρτησις της ταχύτητος νά είναι συνεχής κατά την διέλευσιν της έπιφανείας $x_3 = 0$.

Θά δείξωμεν ότι ή σχέση (25.3.1.ε) δΐδει την λύσιν καί διά τό παρόν πρόβλημα.

Πράγματι, εάν τό x_3 έχη μιάν σταθεράν τιμήν, θετικήν ή άρνητικήν, καί διά t τεΐνον εΐς τό μηδέν, τό ϑ τεΐνει άντιστοίχως εΐς τό $+\infty$ ή εΐς τό $-\infty$.

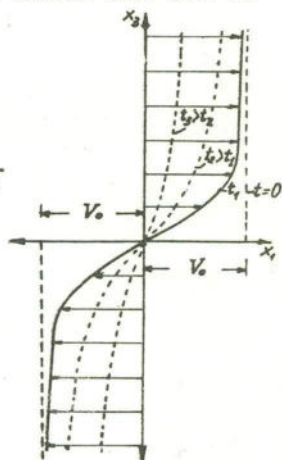
Κατά συνέπειαν, ή συνάρτησις v_1 τεΐνει εΐς τό $A + \frac{1}{2}B\sqrt{\pi}$

διά $x_3 > 0$ καί $A - \frac{1}{2}B\sqrt{\pi}$ διά $x_3 < 0$. Η σχέση (25.3.1.ε)

έπαληθεύει έπομένως τας άρχιάς συνθήκας (25.3.1.θ),

εάν θέσωμεν $A = 0$ καί $B\sqrt{\pi} = 2V_0$, όποτε θά λάβη την μορφήν

$$v_1 = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\vartheta e^{-\vartheta^2} d\vartheta. \quad (25.3.1.ι)$$



Σχ. 25.3.1.Β

Παρατηρούμεν ότι διά δεδομένον x_3 καί διά t τεΐνον εΐς τό άπειρον, ή ταχύτης v_1 τεΐνει εΐς τό μηδέν. Έπομένως, ή όλη ροή τεΐνει εΐς την κατάστασιν της ήρεμίας (Σχ.25.3.1.Β). Η έπιφάνεια έπαφης $x_3 = 0$ "διαχέεται" εΐς τό σύνολον της ρευστής μάζης, προκαλοΰσα μιάν επιβράδυνσιν της κινήσεως καί οδηγούσα τελικώς εΐς την κατάστασιν της πλήρους ήρεμίας.

25.3.2 Διάχυσις της περιστροφής

Εΐς την παρούσαν παράγραφον θά μελετηθΉ ή διάχυσις της περιστροφής υπό την έπήρειαν του ίδΰδους του ρευστου.

Έξετάζομεν πρός τοΰτο την κΐνησιν της παραγράφου 25.2.4 μέ την διαφοράν ότι τό μέτρον της ταχύτητος είναι τώρα συνάρτησις των r καί t : Τό διάνυσμα της περιστροφής $\vec{\omega}$ έχει άξονα όλισθήσεως τόν

Ox_3 , τό δέ μέτρον του $|\omega|$ είναι επίσης συνάρτησις τῶν r καί t .
Ἡ γενική ἐξίσωσις (25.1.α) γράφεται διά τήν περιπτώσιν αὐτήν

$$\frac{\partial |\omega|}{\partial t} = \nu \Delta |\omega| = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial |\omega|}{\partial r} \right) \quad (25.3.2.α)$$

διότι $\text{rot}(\bar{\omega} \wedge \bar{V}) = 0$, ὡς φαίνεται ἀπό τήν ἀνάλυσιν κατά τούς τύπους (21.2.υ).

Ἡ ἐξίσωσις (25.3.2.α) παριστᾷ ἐν ταυτότητος τήν μετάδοσιν τῆς θερμουργίας εἰς τούς ἀγωγίμους χώρους ἐν περιστροφῇ. Ἡ ἐπίλυσις αὐτῆς ἐπιτυγχάνεται κατά μέθοδον ἀνάλογον μέ τήν ἀνολογηθεῖσαν εἰς

τήν ἐξίσωσιν (25.3.1.β), θά ὡση δέ λύσεις τῆς μορφῆς $\omega = f(z)$ ἐνθα $z = \frac{r^2}{4\nu t}$,

ὁπότε θά εἶναι

$$r \frac{\partial \omega}{\partial r} = 2y \frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{z}{t} \frac{df}{dz} \quad (25.3.2.β)$$

καί ἡ $\omega = f(z)$ θά πρέπη νά πληροῖ τήν σχέσιν

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{df}{dz} \right) + z \frac{df}{dz} = 0$$

ἡ αὐόμη τήν

$$z \frac{df}{dz} = A e^{-z} \quad (A = \text{σταθ.}) \quad (25.3.2.γ)$$

ἐν τῆς ὁποίας δι' ὁλοκληρώσεως προκύπτει ὅτι

$$\omega(r, t) = \frac{A}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \quad (25.3.2.δ)$$

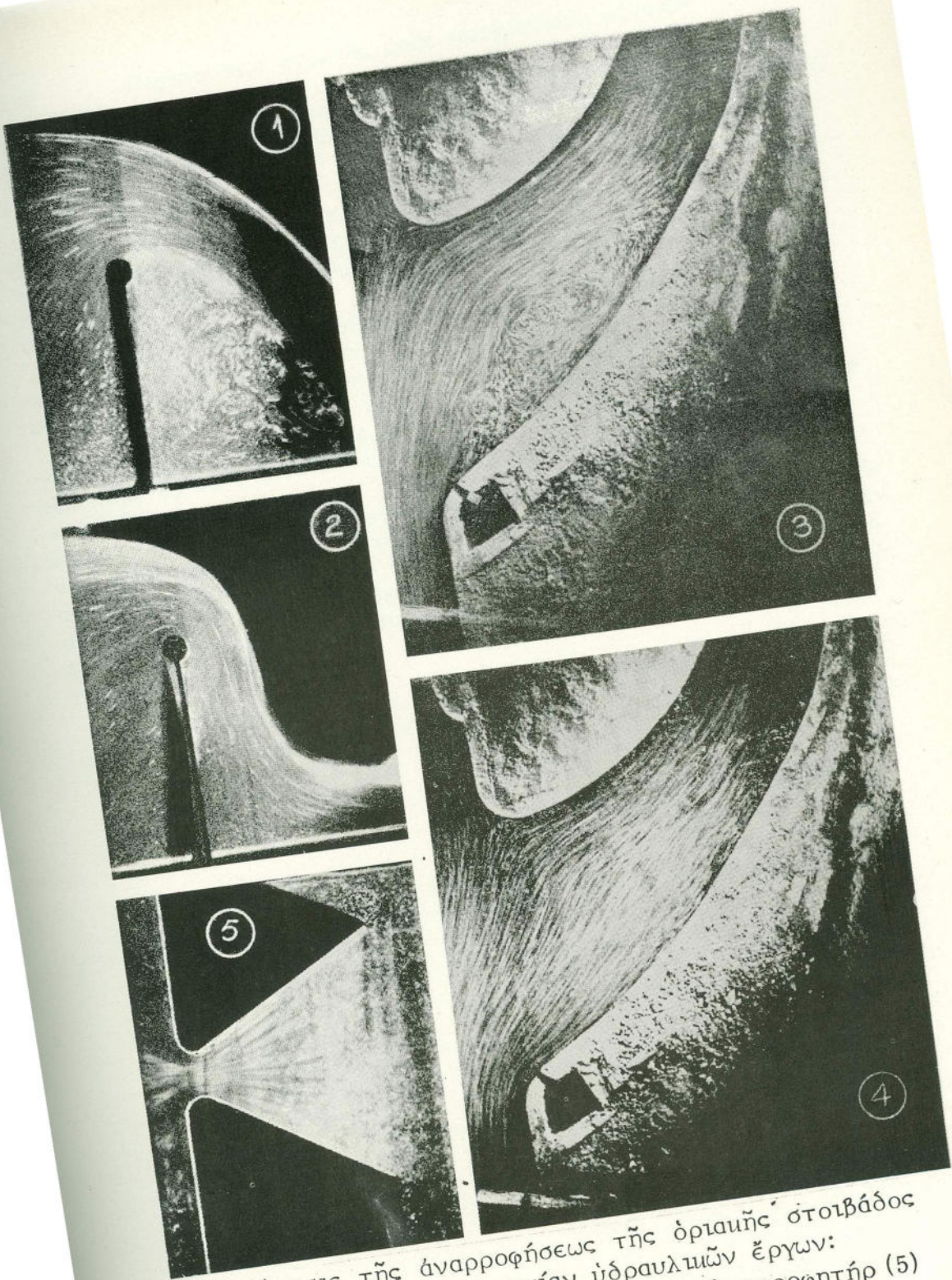
Παρατηροῦμεν ἐπὶ πλέον ὅτι ἐάν ἡ $\omega = \omega(r, t)$ εἶναι λύσις τῆς (25.3.2.δ) θά εἶναι λύσις καί ἡ $\frac{\partial \omega}{\partial t}$.

Εἰς μίαν δεδομένην στιγμὴν t ἡ κυκλοφορία κατὰ μήκος ἐνός υἱου μέ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox_3 , ἥτοι κατὰ μήκος μιᾶς γραμμῆς ροῆς, θά εἶναι ἴση πρὸς

$$\Gamma(r, t) = \int_0^r 2\omega \cdot 2\pi r dr = 8\pi\nu A \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right) \quad (25.3.2.ε)$$

καί ἐν συνεχείᾳ τό μέτρον τῆς ταχύτητος θά ἰσοῦται πρὸς

$$q(r, t) = \frac{\Gamma(r, t)}{2\pi r} = 4 \frac{\nu A}{r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right). \quad (25.3.2.ζ)$$



Ἐπίδρασις τῆς ἀναρροφήσεως τῆς ὀριαῖς στοιβάδος
εἰς τὴν λειτουργίαν ὑδραυλικῶν ἔργων:
Εὐχειλιωτής(1,2)- Ὑδροληψία (3,4)- Ἀναρροφητήρ (5)

Εν τῶν ἀνωτέρω σχέσεων συμπεραίνομεν ἀμέσως τὰ ὑάτωθι:

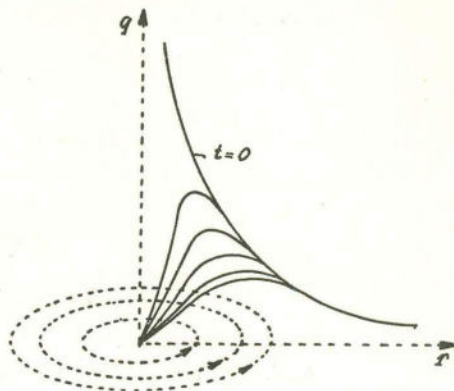
α) Εἰς ἓν δοθέν σημεῖον ἡ ταχύτης τείνει πρὸς τὸ μηδέν τοῦ t τείνοντος εἰς τὸ ἄπειρον.

β) Ἡ περιστροφή ω , μηδενική κατὰ τὴν ἀρχικὴν στιγμὴν $t=0$ αὐτῶν κατ' ἀρχὴν ἀποτόμως καὶ ἐν συνεχείᾳ τείνει πάλιν ἀσυμπτωτικῶς πρὸς τὸ μηδέν.

Τὸ σχῆμα 25.3.2.Α δίδει παραστατικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $q(r, t)$, συναρτήσεσι τῶν r καὶ t .

γ) Κατὰ μῆκος μιᾶς ὀρισμένης γραμμῆς ροῆς, ἡ κυκλοφορία, ἴση ἀρχικῶς πρὸς $\theta\pi\nu A$, ἐλαττοῦται καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τοῦ t τείνοντος εἰς τὸ ἄπειρον. Ἐξ αὐτοῦ φαίνεται ὅ-

τι ἡ κυκλοφορία, ἥτις εἰς τὴν ἀρχικὴν στιγμὴν ἦτο συγκεντρωμένη εἰς σωλῆνα ἀπειροστοῦ πάχους, περιβάλλοντα τὸν ἄξονα Ox_3 , διαχέεται ἐν συνεχείᾳ ἐντὸς ὅλου τοῦ ρευστοῦ λόγω τῆς συνεπιμότητος, ἡ δὲ διάχυσις αὕτη εἶναι τελείως ἀνάλογος πρὸς τὴν διάχυσιν θερμότητος ἐντὸς ἀγωγίου χώρου.



Σχ. 25.3.2.Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 26.

ΜΟΝΙΜΟΣ ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ

ΜΕ ΜΙΚΡΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS

ΔΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

ΑΝΕΥ ΠΕΔΙΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ὁ διαχωρισμός τῆς φυσικῆς περιοχῆς μιᾶς κατηγορίας υνῆσεων, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν ὠρισμένων ἀδιαστάτων μονωνύμων, καὶ ἡ ἐν συνεχείᾳ μελέτη τῶν ὑποπεριοχῶν, τῇ βοηθείᾳ ἀπλουστευτικῶν παραδοχῶν, ὀφειλομένων εἰς τὸν διαχωρισμὸν αὐτόν, ἀποτελεῖ μίαν ἐκ τῶν ἐπιτυχεστέρων μεθόδων διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν διαφορῶν περιπτώσεων ροῆς τῶν πραγματικῶν ρευστῶν.

Ἡ ὅλη μέθοδος στηρίζεται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν ἀδιαστάτων μεταβλητῶν καὶ τὴν μετατροπὴν τῶν διαφορῶν ἐξισώσεων εἰς ἀνηγμένας μέ ὅλα τὰ ἀντίστοιχα πλεονευτήματα, ὥς ἀνεφέρθησαν εἰς τὴν παράγραφον 19, 3. Ἐπὶ πλεον δέ, ἡ ἔκφρασις τῶν ἐξισώσεων ὑπὸ ἀνηγμένην μορφήν ἀποτελεῖ μίαν παραλλαγὴν τῆς ἀπ' εὐθείας μεθόδου διὰ τὴν εὑρεσιν τῶν διαφορῶν νόμων ὁμοιότητος τῆς φυσικῆς περιοχῆς, διότι ἐμφανίζονται οὗτοι ὡς οἱ ἀριθμητικοὶ συντελεστοὶ τῶν διαφορῶν μονωνύμων ὅρων μέ ἀδιαστάτους μεταβλητάς.

Ἡ ἀναφερθεῖσα μέθοδος θά ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν μελέτην τῆς φυσικῆς περιοχῆς, ἡ ὁποία περιλαμβάνει τὴν μόνιμον στρωτὴν ροὴν τῶν ἀσυμπιέστων πραγματικῶν ρευστῶν ἄνευ πεδίου ἐξωτερικῶν δυνάμεων. Ὁ διαχωρισμός τῆς φυσικῆς αὐτῆς περιοχῆς θά γίνῃ μέ βάσιν τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τοῦ ἀδιαστάτου μονωνύμου τοῦ REYNOLDS, ὁπότε καὶ θά διαυριθοῦν δύο ὑποπεριοχαί, χαρακτηριζόμεναι ὡς

α) Ροαὶ μέ μικροὺς ἀριθμοὺς REYNOLDS.

β) Ροαὶ μέ μεγάλους ἀριθμοὺς REYNOLDS.

Ἐπιτυγχάνεται οὕτως ἡ μελέτη καὶ διερεύνησις περιπτώσεων υνῆσεως πολὺ γενικωτέρων ἀπὸ τὰς μελετηθείσας εἰς τὸ προηγούμενον

κεφάλαιον. Δι' αὐτῶν τίθενται καὶ αἱ λοιπαὶ βάσεις διὰ τὴν μελέτην τῆς κινήσεως τῶν ἀσυμπιέστων πραγματικῶν ρευστῶν, ἡ δὲ ἀνάπτυξις αὐτῶν θά ἀποτελέσῃ τὸ ἀντιμείμενον τοῦ παρόντος καὶ τοῦ ἐπομέ-νου κεφαλαίου.

26.1 ΑΝΗΓΜΕΝΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ, ΑΝΗΓΜΕΝΑΙ ΕΙΣΩΣΕΙΣ

Διὰ ροὴν μόνιμον καὶ ἄνευ πεδίου ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἱ ἐξ-ώσεις 9.5.2. α λαμβάνουν τὴν μορφήν «1»

$$\rho \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i ,$$

$$\eta \quad v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \Delta v_i , \quad (26.1. \alpha)$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις συνεχείας παραμένει πάντοτε

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 . \quad (26.1. \beta)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς (26.1.α,β) ὑπαισέρχονται τὰ ἀνεξάρτητα φυσικὰ μεγέθη x_i, v_i, p, ρ, ν , ἐν τῶν ὁποίων τὰ ρ καὶ ν εἶναι σταθεραὶ καὶ χαρακτηρίζουν τὴν φύσιν τοῦ μελετωμένου ρευστοῦ. Διὰ τὰς ὑπολοίπους τρεῖς ἀνεξαρτήτους φυσικὰς μεταβλητάς σιμειτόμεθα ὡς ἀπολούθως:

Ἐὰς ὀρίσωμεν ἀντιστοίχως διὰ τῶν L, V_c καὶ ρ_c ἓν μῆκος, μίαν ταχύτητα καὶ μίαν πίεσιν, χαρακτηριστικὰς καὶ σταθεράς διὰ μίαν ὀρισμένην ροὴν, δυναμένης δὲ νὰ ὀρισθοῦν κατὰ τρόπον ἀπλοῦν (π.χ. διάμετρος ἀγωγοῦ, μέση ταχύτης, πίεσις εἰς τὸν ἄξονα). Ἐχομεν ὁρίσει οὕτω συνολικῶς πέντε ἀνεξάρτητα χαρακτηριστικὰ καὶ σταθερά μεγέθη, τὰ $\rho, \nu, L, V_c, \rho_c$.

Αἱ τρεῖς ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ δύνανται τότε νὰ ἐμφρα-σθοῦν ὡς

$$x_i = L \bar{x}_i, \quad v_i = V_c \bar{v}_i, \quad p = \rho_c \bar{p}. \quad (26.1. \gamma)$$

ἔνθα αἱ $\bar{x}_i, \bar{v}_i, \bar{p}$, εἶναι μεταβληταὶ συναρτήσεις ἄνευ διαστάσεων καὶ ὀνομάζονται ἀνηγμέναι μεταβληταί.

Αἱ σχέσεις (26.1.α,β) λαμβάνουν τότε τὴν μορφήν

$$\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\rho_c}{\rho V_c^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\nu}{V_c L} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j^2} = \frac{\nu}{V_c L} (\Delta \bar{v}_i) \quad (26.1. \delta)$$

(1) Λόγω τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀδιαστάτων μεταβλητῶν, προτιμᾶται ἡ χρῆσις τῆς ψευδομονωμιακῆς μορφῆς ἔναντι τῆς διανυσματικῆς τοιαύτης.

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_j} = 0. \quad (26.1.δ)$$

Τό σύστημα τῶν (26.1.δ) ὀνομάζεται ἀνηγμένον σύστημα ἐξισώσεων, ἐμφανίζονται δέ εἰς αὐτό δύο ἀδιάστατα μονώνυμα, σταθερά, δι' ἐυλόγητον συγχειρωμένην περὶπτωσην ροῆς.

Εἰς τό πρῶτον ἐξ αὐτῶν ἀναγνωρίζομεν τόν ἀριθμόν τοῦ EULER

$$E = \frac{p_c}{\rho V_c^2} \text{ δυνάμεθα δέ νά ἀπαλλαγῶμεν ἀπό αὐτόν, ἐάν παρατηρήσωμεν ὅ-}$$

τι διὰ τὰ ἀσυμπιεστά ρευστά ἡ πίεσις ἐμφανίζεται εἰς τὰς ἐξισώσεις (11.4.γ) μόνον διὰ τῶν παραγῶγων τῆς. Δηλαδή, τήν μίνησιν ἑνός ἀσυμπιεστοῦ ρευστοῦ ἐνδιαφέρει μόνον ἡ μεταβολή τῆς πίεσεως καί ὅχι ἡ ἀπόλυτος πίεσις, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ συμπιεστά ρευστά εἰς τὰ ὁποῖα ἡ πίεσις ἐμφανίζεται καί εἰς τὰς ἐξισώσεις υαταστάσεως. Ἐπομένως ἡ χαρακτηριστικὴ πίεσις p_c δύναται νά ἐυλεγῇ αὐθαίρετως.

Ἐυλέγομεν πρὸς ἀπλούστευσιν τήν τιμὴν $p_c = \rho V_c^2$, ὁπότε αἱ ἀνεξάρτητοι χαρακτηριστικαὶ σταθεραὶ περιορίζονται εἰς τέσσαρας, τὰς ρ, ν, L, V_c , ἀπαλείφεται δέ καί ὁ ἀριθμός EULER ἀπὸ τὰς σχέσεις (26.1.δ).

Εἰς τό δεύτερον ἀδιάστατον μονώνυμον ἀναγνωρίζομεν τόν ἀριθμόν τοῦ REYNOLDS

$$R = \frac{L \cdot V_c}{\nu}, \quad (26.1.ε)$$

τοῦ ὁποῖου ἡ θεμελιώδης σημασία εἰς τὰ φαινόμενα τῆς μίνησεως τῶν ἀσυμπιεστων ρευστῶν εἶναι ἤδη γνωστή.

Αἱ σχέσεις (26.1.δ) λαμβάνουν τελικῶς τήν μορφήν

$$\bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} = \frac{1}{R} (\Delta \bar{v}_i) \quad (26.1.ζ)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_j} = 0.$$

Ἄς θεωρήσωμεν μίαν λύσιν τῶν σχέσεων (26.1.ζ) διὰ μίαν ὀρισμένην ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ R . Αὕτη θά εἶναι τῆς μορφῆς

$$\bar{v}_i = \bar{v}_i(\bar{x}_i, R), \quad \bar{p} = \bar{p}(\bar{x}_i, R). \quad (26.1.η)$$

Παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι, ἀπὶ τῇ βάσει τῶν σχέσεων (26.1.γ) εἰς τήν λύσιν αὐτήν, ἀντιστοιχεῖ μία οἰογένεια λύσεων τῶν ἀρχικῶν ἐξισώσεων (26.1.α) μέ παραμέτρους τὰ χαρακτηριστικὰ μεγέθη L, V_c, ν, ρ

ὕπο τόν περιορισμόν ὅτι διά πᾶσαν λύσιν τῆς οἰμογενείας, ὁ συνδυασμός τῶν μεγεθῶν αὐτῶν δίδει μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ Re ἴσην μέ τὴν ὀρισθεῖσαν εἰς (26.1.η).

Τὰ χαρακτηριστικὰ μεγέθη ν καὶ ρ ὀρίζονται ὑποχρεωτικῶς ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ μελετωμένου ρευστοῦ, ἐνῶ ἀντιθέτως ἡ ἐκλογὴ τῶν χαρακτηριστικῶν μεγεθῶν L καὶ V_c εἶναι κατ'ἀρχὴν αὐθαίρετος. Διὰ νὰ εἶναι ὅμως καὶ ἐπιτυχὴς πρέπει αἱ προϋπάρχοντες ἀνηγμένα μεταβληταὶ $\bar{u}_c$ καὶ $\bar{x}_c$ τῶν σχέσεων (26.1.ζ) νὰ μὴν ἔχουν οὔτε πολὺ μεγάλας οὔτε πολὺ μικρὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς.

Τό σημαντικὸν ὄφελος ἐν τῆς ἐκλογῆς αὐτῆς εἶναι ὅτι αἱ αὐτομειώσεις τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ REYNOLDS χαρακτηρίζουν τότε πολὺ ἐμφανῶς τὰς αὐτομειώσεις τῶν δυνάμεων ἀδρανείας τῆς ροῆς ὡς πρὸς τὰς δυνάμεις συννευτιμότητος (ἴδε παραγρ. 20.4).

Ἀφ' ἐτέρου ἡ μορφή τῶν σχέσεων (26.1.ζ) ἐπιτρέπει τὸν διαχωρισμόν δύο ἀμυαλῶν περιπτώσεων ροῆς τῶν πραγματικῶν ρευστῶν, διὰ τὰς ὁποίας δύναται νὰ διευκολυνθῇ ἡ θεωρητικὴ μελέτη ἐπὶ τῇ βάσει ἀνευτῶν ἀπλουστευτικῶν παραδοχῶν. Πρόκειται ἀφ' ἐνός μὲν διὰ τὰς ροὰς μέ πολὺ μικροὺς ἀριθμούς REYNOLDS καὶ ἀφ' ἐτέρου διὰ τὰς ροὰς μέ πολὺ μεγάλους ἀριθμούς REYNOLDS.

Ἡ πρώτη περίπτωσις ἀντιστοιχεῖ εἰς πολὺ μικρὰν χαρακτηριστικὴν ταχύτητα, ὡς συμβαίνει εἰς τὰς υινήσεις ὕδατος ἐντὸς διαπερατῶν πορωδῶν μέσων ἐν συνδυασμῷ μέ λίαν ἡύξημένην συννευτιμότητα ὡς εἰς τὰ παχύρευστα ἔλαια λιπάνσεως τῶν μηχανῶν, ἢ μέ ἐξαιρετικῶς μικρὰς χαρακτηριστικὰς διαστάσεις, ὡς συμβαίνει εἰς ἀγωγούς πολὺ μικρὰς διαμέτρου ἢ σώματα πολὺ μικρῶν διαστάσεων, παρεμβαλλόμενα εἰς μίαν ροήν.

Ἡ δευτέρα περίπτωσις ἀντιστοιχεῖ εἰς καιονομικὰ μεγέθη χαρακτηριστικοῦ μήκους καὶ ταχύτητος, συνδυαζόμενα μέ μικρὰν συννευτιμότητα τοῦ ρευστοῦ, ὡς συμβαίνει μέ τὴν ἐν γένει ροήν τοῦ ὕδατος ἐντὸς φυσικῶν ἢ τεχνητῶν ἀγωγῶν, ἢ ἐπὶ σωμάτων καιονομικῶν διαστάσεων, ἐμβαπτιζόμενων εἰς αὐτό.

Εἰς τὴν συνέχειαν θὰ ἐξετάσωμεν λεπτομερῶς τὰς δύο αὐτὰς ἀμυαλὰς περιπτώσεις, αἱ ὁποῖαι κατ'ἐύτυχὴν σύμπτωσιν καιύπτουν καὶ τὰς πλείους τῶν ἐν τῇ φύσει παρουσιαζόμενων περιπτώσεων ροῆς τῶν πραγματικῶν ρευστῶν.

26.2 ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ ΜΕ ΜΙΚΡΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS

Τό ἀπλοποιημένον σύστημα ἐξισώσεων τῆς παρούσης παραγράφου ὀφείλεται εἰς τὸν STOKES, ὁ ὁποῖος παρετήρησεν ὅτι διὰ τὰς υινήσεις αὐτάς, ὄχι μόνον αἱ ταχύτητες ἀλλὰ καὶ αἱ πρῶται μερμαί των παράγωγοι εἶναι πολὺ μικραί, καὶ μάλιστα τῆς αὐτῆς τάξεως μεγέθους μέ τὸν ἀριθμόν REYNOLDS. Δυνάμεθα ἐπομένως νὰ καιαλήσωμεν εἰς ἀπλοποιημένον σύστημα, ἀπ' ἐυθείας ἐν τῶν ἐξισώσεων (26.1. α), παραλεί-

ποντες τούς όρους $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ένώπιον τών υπολοίπων όρων, ώς άπειρο-
στά άνωτέρας τάξεως.

Προϋπτεi ούτω τό άπλοποιημένον σύστημα του STOKES

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \Delta u_i \quad (26.2. \alpha)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Έργαζόμενοι με τό άνηγμένον σύστημα (26.1. ζ) καταλήγομεν εις τό άπλοποιημένον σύστημα

$$\frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}_i} = \Delta \bar{u}_i \quad (26.2. \beta)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} = 0.$$

όπου έτέθη $\bar{p} = \bar{p}' \cdot R^{-1}$ παρατηρούμεν δέ ότι ή μεταβλητή $\bar{p}'$ είναι τής
αύτης τάξεως μεγέθους με την ταχύτητα $\bar{u}_i$ διότι $\bar{p}' = \frac{p}{R} R = \frac{p}{\rho V_c^2} R$.

Ή θεωρητική μελέτη του συστήματος (26.1. β) είναι δυνατόν νά
άχθῃ εις πέρας ιατά τρόπον άρμούντως όλουληρωμένον, πλην όμως έμ-
φεύγει τών πλαισίων του παρόντος κεφαλαίου. Παρατηρούμεν όμως ότι

ή συνάρτησις p (έπομένως ιαί αἱ $\bar{p}$ ἢ $\bar{p}'$) είναι άρμονική, διότι $\operatorname{div} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) =$
 $= \operatorname{div} \operatorname{grad} p = \Delta p = 0$ δεδομένου ότι $\operatorname{div} \Delta u_i = 0$.

Δι' έπίπεδον ροήν ή γενική έξίσωσις (25.1. β) δίδει τελιωῶς

$$\Delta (\Delta \bar{\psi}) = 0, \quad (26.2. \gamma)$$

όπου έτέθησαν, $x = L \bar{x}$, $y = L \bar{y}$, $\phi = V_c L \bar{\phi}$, $\omega = V_c L^{-1} \bar{\omega}$, παρελήφθησαν δέ τά ά-
πειροστά άνωτέρας τάξεως ώς προς R .

Έν δέ τής σχέσεως $\bar{\omega} = -\frac{1}{2} \Delta \bar{\psi}$, προϋπτεi ότι

$$\Delta \bar{\omega} = 0, \quad (26.2. \delta)$$

όπότε ιαί ή συνάρτησις $\bar{\omega}$ είναι άρμονική.

26.3 ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ἡ υυριωτέρα ἐφαρμογή τῶν προηγουμένων ἀφορᾷ τὴν μελέτην μιᾶς ροῆς ταχύτητος V εἰς τὸ ἄπειρον, πέραν μιᾶς σφαίρας αὐτῆνος R . Ἡ υἷνησις αὐτὴ ὑπάγεται εἰς τὴν γενικὴν κατηγορίαν τῶν υἷνησεων ἐν περιστροφῇ αἱ ὁποῖαι καὶ ἀποτελοῦν μίαν πρώτην γενίευσιν τῶν ἐπιπέδων υἷνησεων.

Ἀποδεικνύεται (ἴδε βιβλιωγρ. 31 σελ. 41 καὶ 272) ὅτι καὶ διὰ τὰς υἷησεις αὐτάς ὑπάρχει μία ροῦνὴ συνάρτησις ψ , τοιαύτη ὥστε

$$u = \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (26.3. \alpha)$$

ὁπότε αἱ ἐξισώσεις τῆς παραγράφου (25.1) λαμβάνουν μίαν γενικωτέραν μορφήν.

Ἐάν θέσωμεν $\bar{x} = r \cos \vartheta$ καὶ $\bar{y} = r \sin \vartheta$, ἔνθα r εἶναι ἀδιάστατον μέγεθος, εὐρίσκομεν τελικῶς ὅτι ἡ ζητουμένη συνάρτησις $\bar{\psi}$ θά εἶναι

$$\bar{\psi} = \left(r^2 - \frac{3r}{2} - \frac{1}{2r} \right) \frac{\sin^2 \vartheta}{2} \quad (26.3. \beta)$$

καὶ

$$\bar{\omega} = -\frac{3}{4} \frac{\sin \vartheta}{r^2}.$$

Ἐξ αὐτῶν εὐρίσκομεν τὴν διανομὴν τῆς πιέσεως ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ τὴν συνισταμένην τῶν πιέσεων αὐτῶν, ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ

$$F = 6\pi\mu V_0 R. \quad (26.3. \gamma)$$

Μία ἄλλη ἐφαρμογή ἀφορᾷ τὴν μελέτην τῆς διανομῆς τῶν πιέσεων πέραν κυλίνδρου, παρεμβαλλομένου εἰς τυχοῦσαν ἐπίπεδον υἷνησιν. Ἡ λύσις ὅμως τῆς περιπτώσεως αὐτῆς ὁδηγεῖ εἰς ἓν ἐπὶ μέρους παράδοξον, ὀνομαζόμενον παράδοξον τοῦ STOKES. Παρατηροῦμεν ἐξ ἄλλου ὅτι διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς σφαίρας, τὸ πείραμα δίδει διάφορα ἀποτελέσματα ἀπὸ τὴν θεωρίαν εἰς ὃ,τι ἀφορᾷ τὸ ὀπισθεν τμήμα τῆς προσβαλλομένης ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Πράγματι, ἐμφανίζεται σχεδὸν πάντοτε πειραματικῶς μία αὐλάκωσις μέ ἀπουόλλησιν τοῦ ρευστοῦ ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Ἡ διερεύνησις τῶν αἰτίων αὐτῶν τῶν παραδόξων καὶ ἡ κατὰστρωσις μιᾶς πληρεστέρας θεωρίας διὰ τὴν περιοχὴν τῆς ἐμφάνισις τῶν ἀπουλίσεων τῆς θεωρίας τοῦ STOKES ἀπὸ τὸ πείραμα ὀφείλεται εἰς τὸν OSEEN, τὸ δὲ σύνολον τῶν δύο θεωριῶν ἐπιτρέπει μίαν ὁλοκληρωμένην μελέτην τῶν ροῶν μέ μικροῦς ἀριθμοῦς REYNOLDS.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 27

ΜΟΝΙΜΟΣ ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ

ΜΕ ΜΕΓΑΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ REYNOLDS

ΚΑΙ ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΙΣ

ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΤΡΩΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΤΟΙΒΑΔΟΣ

27.1 ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ

Εν τῶν τριῶν ἐξισώσεων μινήσεως (26.1.ζ) προϋπτεῖ ὅτι διὰ μεγάλους ἀριθμούς REYNOLDS τὸ ἀδιάστατον μονώνυμον Re^{-1} τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὁπότε δύναται νὰ παραληφθῇ ὁ ὅρος $\frac{1}{Re}(\Delta \bar{u}_i)$ καὶ ἀναγόμεθα εἰς τὰς γνωστὰς ἐξισώσεις μινήσεως τῶν τελείων ρευστῶν τοῦ EULER:

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} = 0 \quad (27.1.α)$$

αὐτό δέ καὶ λογικῶς ἀναμένετο, καθ' ὅσον οἱ μεγάλοι ἀριθμοὶ REYNOLDS σημαίνουν ὅτι αἱ δυνάμεις συνεπτιμότητος εἶναι ἀμελητέαι ἐνώπιον τῶν δυνάμεων ἀδρανείας τοῦ ρευστοῦ.

Πλήν ὅμως ἡ ἀπλοποίησης αὐτῇ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (26.1.ζ) καὶ ὁ ὑποβιβασμὸς τῆς τάξεως των ἀπὸ δευτέρας εἰς πρώτην, ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν ἀπώλειαν μιᾶς συνθήκης ὁρίων. Ἐπομένως δυνάμεθα ἐν τῶν προτέρων νὰ εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ἡ θεωρητικὴ ἐπίλυσις τῶν (27.1.α) δίδει ἀποτελέσματα προσεγγίζοντα τὴν πραγματικότητα, μόνον διὰ τὴν μαυράν τῶν ὁρίων (π.χ. παρεῶν) εὐρισσομένην περιοχὴν τοῦ ρευστοῦ. Διὰ τὴν πλησίον τῶν ὁρίων περιοχὴν αἱ λύσεις τῶν (27.1.α) θὰ ἐμφανίζουν ἐν γένει σοβαράν ἀπούλισιν ἀπὸ τὰς λύσεις τῶν πλήρων ἐξισώσεων (26.1.ζ). Εἰς τὴν παράγραφον (25.3.1) ἐδόθη ἓν χαρακτηριστικὸν παράδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον φαίνεται ὅτι ἡ ροὴ τοῦ πραγματικοῦ ρευστοῦ

δέν συγυλίνει πρὸς τήν ροήν τοῦ τελείου ρευστοῦ διά τήν πλησίον τῶν παρεῶν περιοχὴν.

Διά τήν πληρεστέραν υατανόησιν τῶν ἀνωτέρω θά ἐπαυολουθήσῃ μία πρώτη μελέτη, ἐπὶ τῇ βάσει ἐνός ἀπλοῦ μαθηματικοῦ ὁμοιώματος, διά τοῦ ὁποίου θά υαταστοῦν προφανῇ τὰ χαραυτηρισυαῖα στοιχεῖα τοῦ ὅλου θέματος. Δίδεται οὔτω υαί ἐν ἀπλοῦν παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῶν μαθηματικῶν ὁμοιωμάτων εἰς τήν μελέτην τῶν προβλημάτων τῆς θεωρητικῆς ὑδραυλικῆς, τονίζομεν δέ τό γεγονός ὅτι ἡ χρῆσις τῶν μαθηματικῶν ὁμοιωμάτων γενυιεύεται μέ ἐξαιρετικὴν ἐπιτυχίαν εἰς τοὺς τομεῖς τῆς ἐφηρμοσμένης ὑδραυλικῆς υαί τῶν ὑδραυλικῶν ἔργων.

27.2 ΜΕΛΕΤΗ ΕΠΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ

Ἐστω ἡ γραμμική, ὁμογενὴς υαί μέ σταθεροὺς συνυελεσάς διαφορικὴ ἐξίσωσις

$$\varepsilon \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} = a \quad (27.2. \alpha)$$

ἔνθα $0 < a < 1$, $\varepsilon > 0$ υαί μέ συνθήκας ὁρίων $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

Ἡ μοναδικὴ λύσις, ἡ ὑανοποιοῦσα τὰς ἀνωτέρω ὁριαυὰς συνθήκας, δίδεται ἀπὸ τήν σχέσιν

$$\varphi(x) = \varphi(x, \varepsilon) = (1-a) \frac{1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} + ax. \quad (27.2. \beta)$$

Ἐάν τό ε τεῖνει εἰς τό 0, διά x εὐρισιόμενον εἰς τό διάστημα (0,1) υαί διάφορον τοῦ μηδενός, θά προῦψῃ εἰς τό ὅριον ἡ λύσις

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi_0(x) = (1-a) + ax = 1 + (x-1)a. \quad (27.2. \gamma)$$

Διά $x = 0$, τό ἀνωτέρω ὅριον γίνεται προφανῶς ἴσον μέ τό μηδέν.

Παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι

α) Ἡ συνάρτησις $\varphi_0(x)$ εἶναι λύσις τῆς ὁριαυῆς ἐξίσωσεως $\frac{d\varphi}{dx} = a$ ἡ ὁποῖα

προυῖπτει ἀπὸ τήν (27.2. α) διά ε τεῖνον εἰς τό μηδέν.

β) Ἡ συνάρτησις $\varphi_0(x)$ ἐπαληθεύει υαί τήν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν (27.2. α) ὡς υαί τήν μίαν ἐν τῶν δύο συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια $\varphi(1) = 1$. Δέν ἐπαληθεύει ὁμως τήν ἄλλην συνθήκην, διότι $\varphi_0(0) = 1-a$, αὐτό δέ εἶναι ἐπόμενον, διότι ἡ ὁριαυὴ διαφορικὴ ἐξίσωσις εἶναι μιυροτέρου βαθμοῦ ἀπὸ τήν ἀρχικὴν, ἐπομένως διά τῆς μεταβάσεως ἀπὸ τήν ἀρχικὴν εἰς τήν ὁριαυὴν χάνεται μία συνθήκη ὁρίων.

Κατά συνέπειαν, ἡ σύγυλις τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, \varepsilon)$ πρὸς τήν $\varphi_0(x)$, ὅταν τό ε τεῖνει εἰς τό μηδέν, δέν εἶναι ὁμοιόμορφος εἰς τό υαλειστόν διάστημα $0 \leq x \leq 1$ πλησίον δέ τῆς τιμῆς $x = 0$ ἡ $\varphi_0(x)$ δέν ἀποτελεῖ πλέον προσέγγισιν τῆς ἀυριβοῦς λύσε-

ως $\varphi(x, \varepsilon)$.

Διά νά έπιτύχωμεν μίαν προσεγγιστικήν παράστασιν τῆς άυριβοῦς λύσεως τῆς $\varphi(x, \varepsilon)$, πλησίον τῆς θέσεως $x=0$, πρέπει νά θέσωμεν $x=\varepsilon\xi$ καί νά περάσωμεν εἰς τήν όριαυήν συνάρτησιν ($\varepsilon \rightarrow 0$), κρατοῦντες σταθεράν τήν τιμήν τοῦ ξ .

Ἡ σχέση (27.2.β) γίνεται τότε διά $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(x) = f_0(\xi) = (1-a)(1-e^{-\xi}), \quad (\xi = \text{σταθερά}). \quad (27.2.δ)$$

Παρατηροῦμεν ότι ἡ συνάρτησις $f_0(\xi) = f_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ έπαληθεύει τώρα καί

τήν συνθήκην $f_0(0)=0$ καί τήν άρχικήν έξίσωσιν (27.2.α) διά $\varepsilon \rightarrow 0$ έπομένως άποτελεῖ μίαν πολύ καλήν προσέγγισιν τῆς άυριβοῦς λύσεως, διά $\varepsilon \rightarrow 0$ καί διά τήν πλησίον τοῦ μηδενός περιοχήν τῆς μεταβλητῆς x .

Έξ άλλου διά ξ τεῖνον εἰς τό άπειρον, θά εἶναι

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} f_0(\xi) = 1-a = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi_0(x). \quad (27.2.ε)$$

Ἡ μελέτη επί τοῦ μαθηματικοῦ αὐτοῦ όμοιώματος δύναται εύνόως νά μεταφερθῇ εἰς τήν περίπτωση τῆς ροῆς τῶν πραγματικῶν ρευστῶν μέ μεγάλους αριθμούς REYNOLDS.

Πράγματι θά έχωμεν ότι

α) ε εἶναι τό όμοίωμα τοῦ R^{-1} .

β) Ἡ έξίσωσις (27.2.α) εἶναι τό όμοίωμα τῶν (26.1.ζ) δηλαδή τῶν έξισώσεων τοῦ NAVIER μέ άνηγμένas μεταβλητάς, διά ροήν μόνιμον καί άνευ πεδίου έσωτερικῶν δυνάμεων.

γ) Ἡ λύσις (27.2.β) τῆς έξισώσεως (27.2.α) εἶναι τό όμοίωμα τῆς λύσεως τῆς (26.1.ζ), δηλαδή τῶν έξισώσεων μινήσεως τῶν πραγματικῶν ρευστῶν.

δ) Ἡ όριαυή έξίσωσις $\frac{d\varphi}{dx} = a$ εἶναι τό όμοίωμα τῶν έξισώσεων

τοῦ EULER, ἥτοι τῶν έξισώσεων τῶν τελείων ρευστῶν.

ε) Ἡ λύσις αὐτῆς, $\varphi_0(x)$ εἶναι τό όμοίωμα τῆς λύσεως τῶν έξισώσεων EULER παρατηροῦμεν δέ ότι εύρίσκεται έν γένει εἰς πολύ καλήν προσέγγισιν μέ τήν άυριβῇ λύσιν $\varphi(x, r)$, έυτός άπό τήν περιοχήν πέριξ τῆς τιμῆς $x=0$, εἰς τήν όποίαν δέν έπαληθεύεται ἡ όριαυή συνθήκη $\varphi(0)=0$.

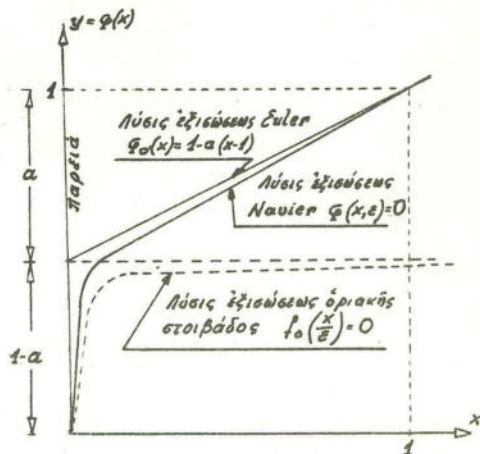
στ) Ἡ άπώλεια τῆς όριαυῆς συνθήκης $\varphi(0)=0$ άντιστοιχεῖ εἰς τήν άνωματάστασιν τῆς συνθήκης προσφύσεως τῶν πραγματικῶν ρευστῶν εἰς τάς παρειάς μέ τήν συνθήκην όλισθήσεως τῶν τελείων ρευστῶν επί τῶν παρειῶν.

ζ) Ἡ περιοχή πέριξ τῆς τιμῆς $x=0$, εἰς τήν όποίαν γίνεται ἡ άλλαγῇ μεταβλητῆς $x=\varepsilon\xi$, εἶναι τό όμοίωμα τῆς περιοχῆς τῆς όριαυῆς στοιβάδος.

η) Η έξισωσις (27.2.δ) είναι τό όμοίωμα της λύσεως της έξισώσεως της όριαυής στοιβάδος, ή όποία ευτείνεται διά $0 \leq \xi < \infty$ είς τό διάστημα $(0, 1-a)$ του άξονος των $y = \varphi(x)$.

Τά άνωτέρω παρίστανται γραφικώς είς τό σχήμα (27.2.Α)

Παρατηρούμεν τέλος ότι διά μίαν ώρισμένην σταθεράν τιμήν της μεταβλητής y , ή (27.2.δ) δεικνύει ότι αύξανόμενου του άριθμου REYNOLDS, δηλαδή έλαττουμένου του ε , έλαττούται άντιστοιχώς ή τεταγμένη x , ήτοι περιορίζεται άντιστοιχώς τό πλάτος της ζώνης έπιρροής της όριαυής στοιβάδος.



Σχ. 27.2.Α

27.3 ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΤΟΙΒΑΔΟΣ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΗΜΙΑΠΕΙΡΟΥ ΠΛΑΚΟΣ

Θά μελετήσωμεν τώρα επί τη βάσει των προηγουμένων τήν περίπτωση όμοιομόρφου επιπέδου ροής πραγματιού ρευστού, πέριξ επιπέδου πλαιός, συμπτουόσης μέ τόν ήμιάξονα Ox (Σχ. 27.3.Α).

Η ροή άνάντη ή μαυράν της πλαιός είναι όμοιόμορφος ($u_1 = V_0, u_2 = u_3 = 0$) μέ ταχύτητα V_0 , παράλληλον πρός τόν άξονα Ox .

Ός χαραυτηριστιμά μεγέθη λαμβάνομεν, $V_c = V_0$, $\rho_c = \rho V_c^2 = \rho V_0^2 = p_0$ καί αφήνομεν τό μέγεθος L αύθαίρετον, όιότι ούδέν χαραυτηριστιμόν μήκος υπεισέρχεται είς τήν ύπ' όψιν ροήν.

Η όμοιόμορφος αύτή ροή άντιστοιχοῦσα είς τήν ροήν τελείου ρευστού θά έχη τάς άνηγμένες μεταβλητάς

$$\bar{v}_1 = \bar{u} = 1 \quad \bar{v}_2 = \bar{v} = 0, \quad \bar{p} = 1. \quad (27.3.a)$$

Διά τήν ιαλυτέραν μελέτην της όριαυής στοιβάδος είναι σόφισμον νά διασταλθ ή άξων των y καί ή υάθετος πρός τήν πλάια συνιστώσα της ταχύτητος $\bar{v}$. Θετομεν έπομένως

$$\bar{x} = \xi, \quad \bar{y} = R^{-\frac{1}{2}} \eta, \quad \bar{u} = \bar{u}, \quad \bar{v} = \bar{v} R^{-\frac{1}{2}}, \quad \bar{p} = \bar{p} \quad (27.3.b)$$

καί άνυμαθιστώμεν είς τάς (26.1.ζ), όπότε, παραλειπομένων των όρων της μορφής $f(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}) R$, ως άπειροστών, προυίπτει τελικώς τό σύστημα των διαφοριών έξισώσεων

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} = 0$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} \quad (27.3. \gamma)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0$$

Ἡ ἐκλογὴ τῆς αὐτῆς δυνάμεως $R^{-\frac{1}{2}}$ διὰ τὴν διαστολὴν τῶν μεταβλητῶν εἰς τὰς (27.3. β) διαιολογεῖται εὐλόγως ἀπὸ τὴν μορφήν τοῦ προϋπτοντος συστήματος (27.3. γ), ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ πληρεστέρα δυνατή. Οἷαδὴποτε ἄλλη ἐκλογὴ δυνάμεων θά ὠδήγη ἐἰς σύστημα μέ ὀλιγώτερος ὅρους καὶ ἐπομένως εἰς ἀπώλειαν ὠρισμένων συνθημῶν εἰς τὰ ὅρια.

Αἱ ἐκισώσεις (27.3. γ) ὀνομάζονται συνήθως ἐκισώσεις τῆς ὀριαυῆς στοιβάδος ἢ ἐκισώσεις τοῦ PRANDTL.

Ἐὰς διερευνήσωμεν ἐν συνεχείᾳ τὰς ὀριαυὰς συνθήκας, στήριζόμενοι εἰς τὸ ὅτι θά ἐμφράζουν

α) Τὴν πρόσφυσιν τοῦ ρευστοῦ εἰς τὴν παρεῖαν τῆς πλαυός. Ἐν τῆς συνθήκης αὐτῆς προϋπτοῦν αἱ σχέσεις

$$\bar{u}(\xi, 0) = \bar{v}(\xi, 0) = 0 \quad \text{διὰ} \quad \xi > 0. \quad (27.3. \delta)$$

β) Τὴν σύγκλισιν τῆς ὅλης ροῆς πρὸς τὴν ροὴν τελείου ρευστοῦ εἰς τὴν μαυράν τῆς πλαυός περιοχὴν, ἥτοι διὰ n τεῖνον εἰς τὸ ἄπειρον. Ἐν τῆς συνθήκης αὐτῆς προϋπτοῦν αἱ σχέσεις

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \bar{u}(\xi, \eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \bar{p}(\xi, \eta) = 1. \quad (27.3. \epsilon)$$

Παρατηροῦμεν ἐξ ἄλλου ἐν τῆς τρίτης τῶν σχέσεων (27.3. γ) ὅτι ἡ πίεσις $\bar{p}$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τεταγμένης n . Ἐπὶ πλέον, λόγῳ τῆς συνθήκης (27.3. ε) διὰ $n \rightarrow \infty$ καὶ ξ τυχόν εἶναι $\bar{p} = 1$. Ἐπομένως ἡ πίεσις $\bar{p}$, καὶ ἐξ αὐτῆς καὶ ἡ p , παραμένει σταθερά ἐντὸς ὅλης τῆς ὀριαυῆς στοιβάδος καὶ ἰσοῦται μέ τὴν πίεσιν τοῦ ρευστοῦ εἰς τὴν ἐντὸς τῆς στοιβάδος ἀπομεμαυρωσμένην περιοχὴν. Κατὰ συνέπειαν μηδενίζεται καὶ ὁ ὅρος $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}$ εἰς τὴν δευτέραν τῶν σχέσεων (27.3. γ).

Τέλος, δι' εἰσαγωγῆς τῆς ροῖμης συναρτήσεως ψ , προσδιοριζόμενης ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$d\bar{\varphi} = \bar{u}dn - \bar{v}d\xi \quad (27.3.ζ)$$

δυνάμεθα νά αναγάγωμεν τό όλον σύστημα (27.3.γ) εἰς μίαν καί μόνην ἐξίσωσιν, τήν

$$\frac{\partial^3 \bar{\varphi}}{\partial n^3} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial n \partial \xi} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial n^2} = 0. \quad (27.3.η)$$

Αἱ ὁριακαί συνθῆμαι λαμβάνουν τώρα τήν μορφήν

$$\bar{\varphi}(\xi, 0) = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}(\xi, 0) = 0 \quad (27.3.θ)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = 1$$

27.4 ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΕΩΣ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΤΟΙΒΑΔΟΣ ΔΙ' ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΠΛΑΚΑ

Ἡ λύσις τῆς ἐξίσωσως (27.3.η) τῆς ὁριακῆς στοιβάδος, εὐρίσμεται ἐάν θέσωμεν⁽¹⁾

$$\bar{\varphi}(\xi, n) = \xi^{\frac{1}{2}} \cdot f(\vartheta) \quad (27.4.α)$$

ἔνθα

$$\vartheta = \frac{n}{\xi^{3/2}}.$$

(1) Στηριζόμεθα πρὸς τοῦτο εἰς τήν ἐλῆς πρότασιν, ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων:

Ἐάν $\bar{\varphi}(\xi, n)$ εἶναι λύσις τῆς (27.3.η), τότε θά εἶναι λύσις καί ἡ $\frac{\alpha}{\beta} \bar{\varphi}\left(\frac{\xi}{\alpha}, \frac{n}{\beta}\right)$, δι' οἰαδήποτε τιμὰς τῶν παραμέτρων α καί β . Διὰ $\beta = \alpha^3$ θά ἰσχύη ἐπομένως ἡ ταυτότης

$$\bar{\varphi}(\xi, n) = \alpha^{1/2} \bar{\varphi}\left(\frac{\xi}{\alpha}, \frac{n}{\alpha^3}\right)$$

δι' οἰανδήποτε τιμὴν τῶν ξ , n , καί α , ὅρα καί διὰ $\xi = \alpha$.

Θά προύψῃ κατόπιν αὐτῶν ἡ ἰσότης

$$\bar{\varphi}(\xi, n) = \xi^{1/2} \bar{\varphi}\left(1, \frac{n}{\xi^3}\right) = \xi^{1/2} f\left(\frac{n}{\xi^3}\right).$$

Ἡ παράγωγος ὡς πρὸς n θά εἶναι

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = \xi^{1/2} f'\left(\frac{n}{\xi^3}\right)$$

καί διὰ νά ἐπαληθεύωνται αἰχουνθῆναι (27.3.θ) πρέπει ὑποχρεωτικῶς νά εἶναι $\pi = \frac{1}{2}$. Θά μελετήσωμεν ἐπομένως τὰς λύσεις τῆς μορφῆς (27.4.α).

Αντικαθιστώντες εις την (27.3.η) τάς προϋπτούσας σχέσεις

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} = f'(\vartheta), \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial n^2} = \frac{1}{\xi^{3/2}} f'', \quad \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial n^3} = \frac{1}{\xi} f'''$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi} = \frac{1}{2\xi^{3/2}} (f - \vartheta f'), \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \xi \partial n} = -\frac{1}{2\xi} \vartheta f''.$$

υαταλήγομεν εις την απλήν εξίσωσιν, εύρεθεῖσαν τό πρῶτον υπό τοῦ BLA-SIUS

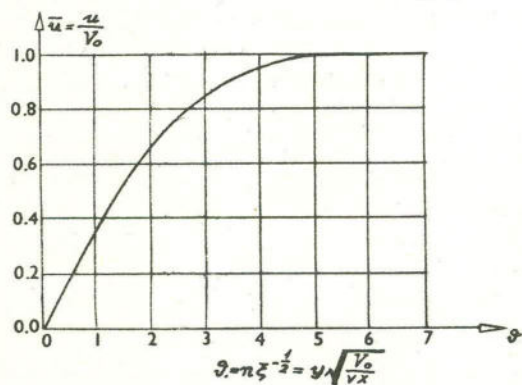
$$2f''' + f f'' = 0 \quad (27.4.β)$$

μέ συνθήμας ὁρίων, ὡς προϋπτοῦν ἐν τῶν (27.3.θ), τάς

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (27.4.γ)$$

$$\lim f'(\vartheta) = 1$$

Ἀποδεικνύεται διά διαδοχικῶν προσεγγίσεων ὅτι ἡ εξίσωσις (27.4.β) ἔχει μίαν καί μόνην λύσιν, ἐπαληθεύουσαν τάς συνθήμας (27.4.γ) (ἴδε ἄουησιν V.19, μέθοδον τοῦ H. WEYL). Ἡ λύσις αὐτή ἔχει εύρεθῇ μετὰ μεγάλης ἀκριβεΐας. Τό σχῆμα 27.4.A δίδει τήν μορφήν τοῦ διαγράμματος τῆς κατὰ τόν ἄξονα τῶν x διανομῆς τῶν ταχυτήτων



Σχ. 27.4.A

ροή παραμένει πραιντικῶς ἀνεπηρέαστος ἀπό τήν παρεμβολήν τῆς πλαυός δηλαδή ταυτίζεται μέ τήν ροήν τελείου ρευστοῦ.

Ἐν τῶν ἀνωτέρω προϋπτοῦν τά ἐξῆς ἐνδιαφέροντα ἀποτελέσματα:

α) Συντελεστής τριβῆς καί δύναμις τριβῆς ἐπὶ ὀρθογωνιῆς πλαυός

Εἰς ἓν σημεῖον τῆς πλαυός, τετμημένης x , ἡ ἐφαπτομενική συντεστώσα τῆς τάσεως θά εἶναι

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} = f'(\vartheta) \quad \text{ὡς προϋπτει ἐν τῆς}$$

λύσεως τῆς (27.4.β). Τό πείραμα ἐπιβεβαιώνει ἀπολύτως τό θεωρητικόν αὐτό διάγραμμα, παρατηροῦμεν δέ ὅτι διά $\vartheta \gg 5$ δηλαδή δι' ἀπόστασιν ἀπό τῆς πλαυός με-

γαλύτεραν ἢ ἴσην τῆς $y = 5\sqrt{\frac{\nu x}{V_0}}$ ἡ

$$\tau_{xz} = \tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu V_o}{L} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} R_x^{\frac{1}{2}} = \rho V_o^2 \sqrt{\frac{\nu}{V_o x}} f''(0).$$

Ο συντελεστής τριβής είναι επομένως έξ όρισμού

$$c_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho V_o^2} = 2 \sqrt{\frac{\nu}{V_o x}} f''(0) = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{V_o x}} \frac{0,664}{\sqrt{R_x}} \quad (27.4. \delta)$$

ένθα $R_x = \frac{V_o x}{\nu}$ είναι πάλιν μία μεταβλητή μορφή αριθμού REYNOLDS

υαί $f''(0) = 0,332$ ως προούπτει έμ της έπιλύσεως της (27.4. β).

Η δύναμις τριβής επί όρθογωνιυής πλαυός, διαστάσεων l_1 , l_2 , θά είναι επομένως

$$F = l_2 \int_0^{l_1} \tau dx = 0,664 \rho V_o^2 l_1 l_2 \sqrt{\frac{\nu}{V_o l_1}} \quad (27.4. \epsilon)$$

β) Πάχος της όριαυής στοιβάδος

Η έννοια του όρου αύτου δέν δύναται νά προσδιορισθί έπαυριβώς, δεδομένου ότι αι έξισώσεις (27.4. β) ισχύουν θεωρητικώς δι' όλον τό ρευστόν. Κατά παραδοχήν όμως, θά όνομάσωμεν πάχος δ της όριαυής στοιβάδος είς την τετμημένην x , την τιμήν της τεταγμένης y , διά την όποιαν $u = 0,99 V_o$. Αντιστοιχεϊ επομένως είς μίαν τιμήν η διά την όποιαν ισχύει ή σχέση $1 - f'(\eta) = 0,01$, εύρίσκομεν δέ ότι είναι μέ μεγάλην προσέγγισιν $\eta = 5$, ως προούπτει άλλωστε υαί από τό διάγραμμα (27.4. Α). Έπομένως τό πάχος δ της όριαυής στοιβάδος θά δοθί από την σχέση

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{V_o}} = \frac{5x}{\sqrt{R_x}} \quad (27.4. \zeta)$$

αυξάνει δέ αναλόγως της $\sqrt{x}$. Διά τόν λόγον αυτόν λέγομεν ότι τό όριον της όριαυής στοιβάδος έχει μορφήν παραβολιυήν.

γ) Πάχος μετατοπίσεως

Η έπιβράδυνσις της ροής λόγω της προσφύσεως του ρευστου είς την πλάυα, δημιουργεί μίαν έλάττωσιν της παροχής είς μίαν διατομήν υάθετον είς την πλάυα. Η έλάττωσις αυτή δύναται νά χαραυτηρισθί από έν μήυος δ_1 , όνομαζόμενον πάχος μετατοπίσεως υαί προσδιοριζόμενον γενικώς από την σχέση

$$\delta_1 = -\frac{1}{V_o} \int_0^{\infty} (V_o - u) dy = \int_0^{\infty} (1 - \bar{u}) dy. \quad (27.4. \eta)$$

Συμφώνως προς τά προηγούμενα θά εἶναι

$$\delta_1 = LR^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} (1 - \bar{u}) d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{V_0}} \int_0^{\infty} [1 - f'(\vartheta)] d\vartheta \approx 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{V_0}} \approx 1,72 \frac{x}{\sqrt{R_x}} \quad (27.4. \theta)$$

δ) Πάχος ποσότητας υινήσεως

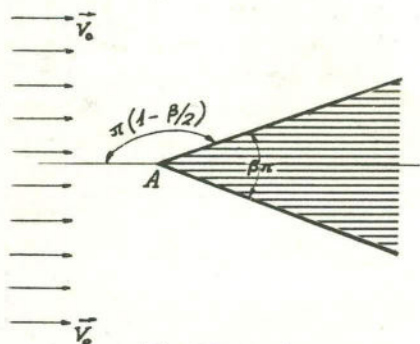
Κατά τρόπον τελείως ανάλογον με τόν ὁρισμόν τοῦ δ_1 ὀρίζομεν ὡς πάχος ποσότητας υινήσεως τό μῆκος

$$\delta_2 = \frac{1}{V_0^2} \int_0^{\infty} u(V_0 - u) dy = \int_0^{\infty} \bar{u}(1 - \bar{u}) dy. \quad (27.4. \iota)$$

27.5 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ ΠΕΡΙ ΣΤΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΤΟΙΒΑΔΟΣ ΔΙΑ ΣΩΜΑΤΑ ΤΥΧΟΥΣΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΝ ΡΟΗΝ

Μία πρώτη ἐπέυταση τῆς θεωρίας τῆς προηγουμένης παραγράφου ἐγένετο τό 1930 ὑπό τῶν FALKNER καί SKAN, οἱ ὁποῖοι ἐμελέτησαν τό ὅλον πρόβλημα διά τήν περίπτωσιν διέδρου, παρεμβαλομένου εἰς ὁμοιόμορφον καί ἐπίπεδον ροήν (Σχ.27.5.Α)

Δι' ἀναλόγων πρὸς τοὺς τῆς προηγουμένης παραγράφου μετασχηματισμῶν καταλήγομεν εἰς τήν τελειήν ἐξίσωσιν



Σχ. 27.5. Α

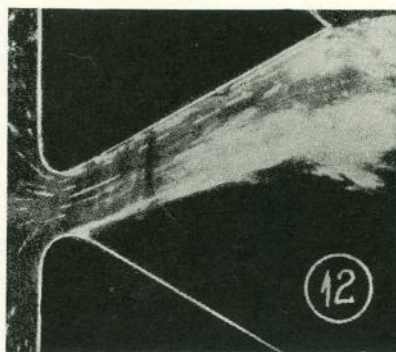
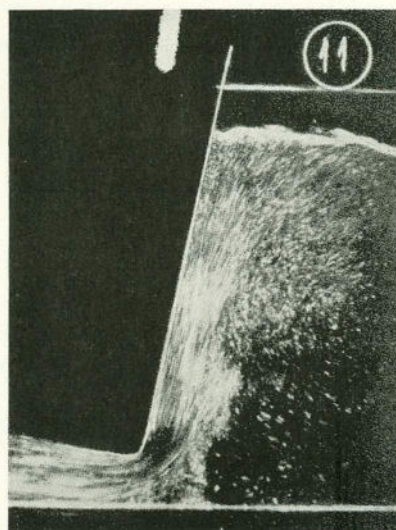
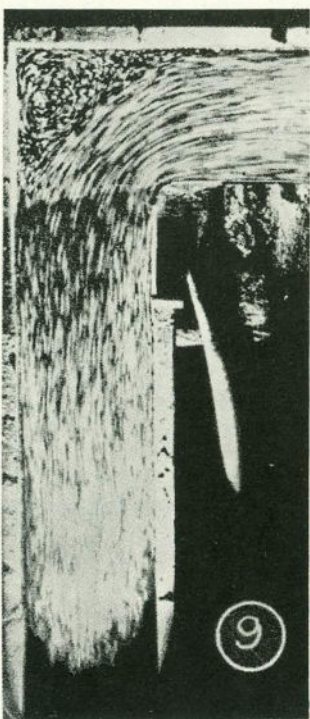
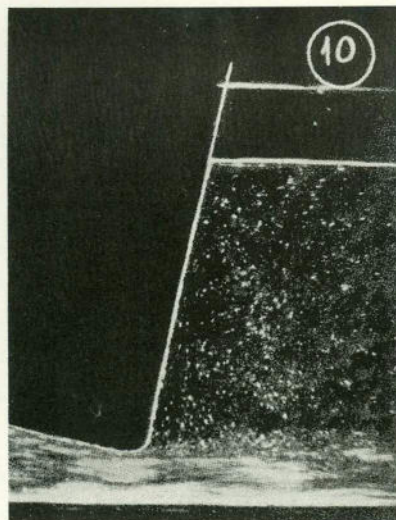
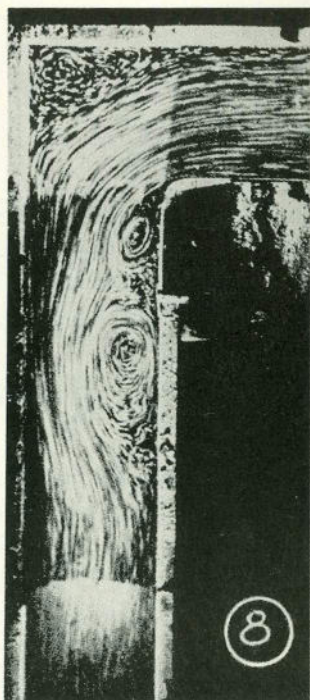
$$Af''' + ff'' = \beta(f'^2 - 1) \quad (27.5. \alpha)$$

με ὀριαυᾶς συνθήκας τὰς (27.4. γ).

Ἐν συνεχείᾳ αἱ προσπάθειαι ἐστράφησαν πρὸς τήν εὑρεσιν τῆς στρωτῆς ὀριαυῆς στοιβάδος κατὰ μῆκος ἐνός "profil". Πλήν ὅμως οἱ ὑπολογισμοὶ ἔγιναν ἐξαιρετικῶς πολὺπλοιοι καί μόνον διά προσεγγιστικῶν ἢ ἡμιεμπειρικῶν μεθόδων κατέληξαν οἱ ἐρευνηταὶ εἰς τελειᾶς λύσεις, τὰς ὁποίας ἐν συνεχείᾳ ἐπηλήθευσαν πειραματικῶς. Χαραυτηρικῶς ἀναφέρομεν τήν μέθοδον POHLHAUSEN (1921).

Κατ' αὐτήν ὑποθέτομεν

Κατ' αὐτήν ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ταχύτης $\bar{u} = \frac{u}{V_0}$ ἐυφράζεται ἀπὸ τήν σχέσιν



Ἐπίδρασις τῆς ἀναρροφήσεως τῆς ὀριαυῆς στοιβάδος
εἰς τὴν λειτουργίαν ὑδραυλικῶν ἔργων:
Βάθρον γεφύρας (6, 7) Γωνία εἰς ἀνοικτὴν διώρυγα (8, 9)-
Ἐυτροπή ὑδατίνης δέσεως (10, 11, 12)

$$\bar{u} = a \frac{y}{\delta} + b \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + c \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + d \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \quad (27.5.β)$$

εἴναι τό πάχος τῆς ὀριαῖς στοιβάδος.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὀριαίων συνθηκῶν τῶν ἐξισώσεων (26.1.ζ) καὶ τῆς ἐξισώσεως BERNOULLI, εὐρίσκονται τελικῶς αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν a , b , c , d , καὶ ἡ ἐξίσωσις (27.5.β) λαμβάνει τὴν μορφήν

$$\bar{u} = 2 \frac{y}{\delta} - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 + \frac{\eta y}{\delta \delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (27.5.γ)$$

εἴναι γνωστὴ συνάρτησις τῶν δ, ν, V_0 .

Σήμερον αἱ πλέον ἐν χρήσει μέθοδοι στηρίζονται εἰς τὴν ὁλοκληρώσιν τῶν ἐξισώσεων διὰ διαδοχικῶν προσεγγίσεων, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως καὶ τῶν ἡλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

Πλεῖστοι ὅσαι μελέται ἐγίναν ἐξ ἄλλου διὰ τὴν τυρβώδη ὀριαίην στοιβάδα, ἡ ὁποία καὶ ἐμφανίζεται συνηθέστερον εἰς τὴν πρᾶξιν.

Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιπέδου πλακῶς ἡ ὀριαίη στοιβάς μεταπίπτει ἀπὸ στρωτὴν εἰς τυρβώδη διὰ τιμὰς R_x μεταξύ $3 \cdot 10^5$ καὶ $3 \cdot 10^6$ Εὐρέθησαν τὰ κατωθὶ ἀποτελέσματα

α) Διὰ $10^5 < R_x < 10^7$ εἴναι

$$\bar{u} = \frac{u}{V_0} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (27.5.δ)$$

συνήθως λαμβάνεται $m = 7$, ὁπότε προκύπτουν αἱ τιμαὶ

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,37}{R_x^{\frac{1}{5}}} \quad (27.5.ε)$$

καὶ

$$c_f = \frac{0,0592}{R_x^{\frac{1}{5}}} \quad (27.5.ζ)$$

Διὰ $R_x > 10^7$ ἡ διανομὴ τῶν ταχυτήτων γίνεται λογαριθμικῶς καὶ ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 1,7 + 4,15 \log [R_x c_f] \quad (27.5.η)$$

β) Αἱ τελευταῖαι μελέται κατέληξαν εἰς τὴν διατύπωσιν μιᾶς σχέσεως, ἡ ὁποία καλύπτει ὅλον τὸ πεδῖον τῶν ἀριθμῶν REYNOLDS, ἥτοι

$$c_f = 0,246 e^{-1,54 H^* R^{*-0,268}}$$

(27.5.θ)

Ένθα

$$H^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad \text{υαί} \quad R^* = \frac{V_0 \sigma_2}{\nu}$$

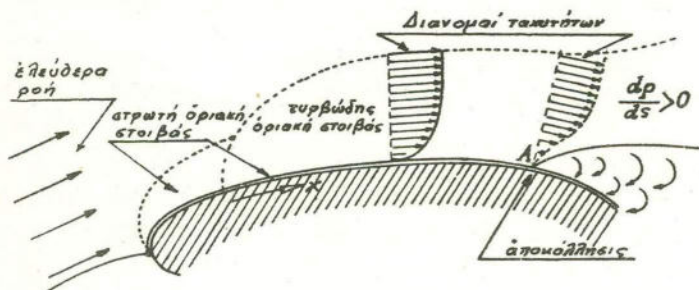
Είς τό σχήμα 27.5.Β δίδεται ή μορφή τής όριαυής στοιβάδος διά τήν περίπτωση ένός "profil". Παρατηρούμεν ότι υατάντη του ση-

μείου Α λαμβάνει χώραν άπουόλλησις τής ρευστής φλεβός από τό "profil", αυτό δέ δύναται νά συμβή όταν ή

μεταβολή $\frac{dp}{dx}$ τής πιέ-

σεως υατά τήν φοράν τής ροής γίνη θετική.

Είς τήν στρωτήν όριαυήν στοιβάδα ή άπουόλλησις πραγματοποιείται όταν



Σχ. 27.5.Β

$$\frac{\sigma_2^2}{\nu} \frac{du}{ds} = 0,082$$

ή, υατ' άλλην θεωρίαν, όταν

$$H^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \gg 4.$$

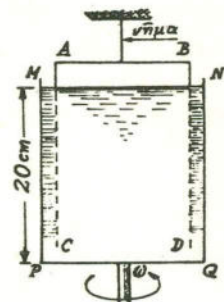
Είς τήν κυρβώδη όριαυήν στοιβάδα ή άπουόλλησις λαμβάνει χώραν διά $H^* \gg 2$

Έν υαταυλεϊδι συμπεραίνομεν ότι ή μέν τριβή, ή άναπτυσομένη είς τήν κυρβώδη στοιβάδα, είναι μεγαλυτέρα τής τριβής είς τήν στρωτήν όριαυήν στοιβάδα, ή δέ άπουόλλησις δημιουργείται εύμολώτερον είς τήν στρωτήν όριαυήν στοιβάδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΕΜΠΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

V.1) Ίξωδομετρον τοῦ COUETTE

Ἐκτελοῦμεν τὸ πείραμα τοῦ "COUETTE" μὲ δύο συναξονικούς κυλίνδρους $ABCD$ καὶ $MNPQ$. Αἱ ἀπέναντι διαβρεχόμεναι ὀφεις ἔχουν ἀντιστοίχως διαμέτρους 10 καὶ 10,04 cm ἐπὶ ἓνα μῆκος 20 cm . Ὄταν ὁ ἐξωτερικὸς κύλινδρος περιστρέφεται μὲ 90 $στρ./min$, μετρώμεν εἰς τὸν ἄξονα ζεῦγος ἴσον πρὸς $4 \cdot 10^{-2} \text{ kpm}$.



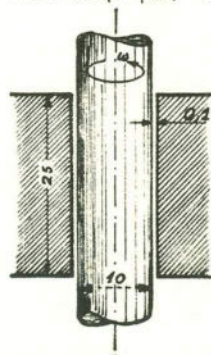
Σχ. V.1

α. Ποῖα ἡ συνεκτικότης τοῦ μεταξὺ τῶν δύο κυλίνδρων περιεχομένου ὑγροῦ, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι αἱ μόναι λαμβανόμεναι ὑπ' ὀφιν δυνάμεις τριβῆς εἶναι ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν;

β. Ἀναστρέφομεν τώρα τὸν ἐσωτερικὸν κύλινδρον. Εἰς τὰς προηγουμένως θεωρηθείσας τριβάς προστίθενται καὶ αἱ ἐνεργοῦσαι εἰς τὰς κατωτέρας βάσεις τῶν κυλίνδρων. (Ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι 1 mm). Νά ὑπολογισθῇ ἡ ροπή τῶν νέων αὐτῶν δυνάμεων. Τὸ σφάλμα θὰ προκύψῃ ἂν τὰς θεωρήσωμεν ἀμελητέας εἰς τὸν ὑπολογισμόν τοῦ μ ;

V.2) Ἄξων μηχανῆς διαμέτρου 10 cm στηρίζεται κατακορυφῶς τῇ βο-
 ηθείᾳ ἐδράνου μῆκους 25 cm . Τὸ μεταξὺ αὐ-
 τῶν κενόν, ἀκτινικῆς ἀποστάσεως 1 mm , πλη-
 ροῦται μὲ ἔλαιον, ἰξώδους $\mu = 125 \text{ centi-}$
 poises . Ὁ ἄξων στρέφεται μὲ 240 $στρ./min$.

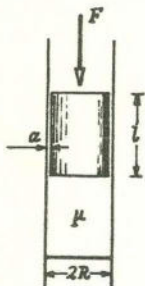
Ποῖον ἀνθιστάμενον ζεῦγος δημιουργεῖται ἀπὸ τὸ ἔδρανον καὶ ποῖα ἡ κατανα-
 λισκομένη ἰσχύς;



Σχ. V.2

V.3) Ύδραυλικόν "AMORTISSEUR"

"Ένα υδραυλικόν **amortisseur** αποτελείται από ένα κύλινδρον άκτίνος R έντός του όποιου δύναται νά μετακινήται έμβολον μήκους l απέχον άκτινικώς του κυλίνδρου κατά άπόστασιν a . Ο κύλινδρος περιέχει έλαιον άσυμπιεστον ιξώδους μ τδ όποϊον ρέει μέσφ του διαστήματος a (βλέπε σχήμα V.3).



Εύρετε σχέσιν μεταξύ της ταχύτητος V_0 του έμβολου προς τόν κύλινδρον καί της δυνάμεως F ή όποια έφαρμόζεται επί του κυλίνδρου.

Έφαρμογή: $R=2\text{ cm}$, $l=2\text{ cm}$, $a=0,1\text{ cm}$, $\mu=1\text{ poise}$, $F=1\text{ Mp}$.

Σχ. V.3

V.4) Άνάλυσις τριβής συνεκτικότητος

"Εστω κυλινδρικός σωλήν μήκους 3 km καί διαμέτρου 10 cm διαρρέομενος από υγρόν ιξώδους $\mu=0,4\text{ poises}$

Έάν ή κατανομή τών ταχυτήτων είς μίαν κάθετον τομήν του άγωγού δίδεται από την έξίσωσιν της παραβολής

$$v = 10y - y^2 \quad (\text{συστημα C.G.S.})$$

όπου v ή ταχύτης είς άπόστασιν y από την παρειάν, νά υπολογισθοῦν

α) Η ανά μονάδα έπιφανείας δύναμις τριβής έκ της συνεκτικότητος, ή αναπτυσσομένη επί της παρειάς.

β) Η ανά μονάδα έπιφανείας δύναμις τριβής έκ της συνεκτικότητος, ή αναπτυσσομένη είς άπόστασιν 2 cm από της παρειάς.

γ) Η όλική δύναμις τριβής ή όποια ένεργεί επί του άγωγού.

V.5) Μελέτη συσκευής φύξεως έλαίου

Μία συσκευή φύξεως έλαίου αποτελείται από 100 παραλλήλους κυλινδρικούς σωλήνας, διαμέτρου $D=1\text{ cm}$ καί μήκους $l=4\text{ m}$. Μέ μέσην ταχύτητα $v=2\text{ m/sec}$ θέτομεν είς κυκλοφορίαν έλαιον του όποιου ή μέση πυκνότης είναι 0,9 αλλά ό συντελεστής δυναμικής συνεκτικότητος μ μεταβάλλεται γραμμικώς από 0,30 poise είς την είσοδον μέχρις 1 poise είς την έξοδον.

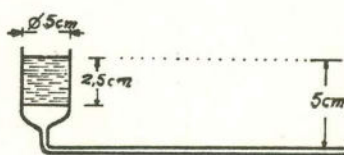
α) Νά υπολογισθῇ ή ίσχύς P την όποϊαν πρέπει νά καταναλώσῃ τδ έλαιον διά νά διαρρεύσῃ από την συσκευήν φύξεως. (Δέν λαμβάνονται υπ' όφιν αί άπώλειαι ένεργείας είς την είσοδον καί είς την έξοδον τών σωλήνων).

β) Νά δοθῇ πρακτικός τύπος διά τόν υπολογισμόν του P είς τόν όποϊον δέν υπεισέρχεται ή διάμετρος D .

V.6) Ίξωδόμετρον διά ροής

Κυλινδρικός δοχεϊόν διαμέτρου 5 cm τροφοδοτεί την ροήν συνεκτικού υγρού είς όριζόντιον σωλήνα, διαμέτρου 1 mm καί μήκους 40 cm .

Γνωστού ὄντος ὅτι χρειάζονται 75 min διά τήν μεταβολήν τοῦ πιεζομετρικοῦ ὕψους ἀπό 5 cm εἰς $2,5 \text{ cm}$ εἰς τὰ ἀνάπτυξη τοῦ σωλήνος, νά προσδιορισθῇ ὁ κινηματικός συντελεστής συνεκτικότητος τοῦ ὑγροῦ. (Δέν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ ἐπιδράσεις λόγῳ τῶν ἄκρων τοῦ σωλήνος).



Σχ. V.6

V.7) Μετρητής VENTURI εἰς στρωτήν ροήν

α) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ μέση ὀλική ἐνέργεια H εἰς κάθετον τομήν κυλινδρικοῦ σωλήνος, διαρροεμένου ἀπὸ στρωτήν ροήν, δίδεται ἀπὸ τήν σχέσηιν

$$H = \frac{p^*}{\rho g} + \frac{v^2}{g}$$

ἐνθα v εἶναι ἡ μέση ταχύτης τῆς ροῆς.

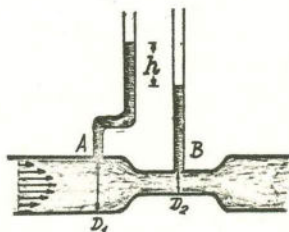
β) Κυλινδρικός ἀγωγὸς διαμέτρου $D_1 = 15 \text{ mm}$ εἶναι ἐφωδιασμένος μὲ ἓνα μετρητὴν παροχῆς τύπου Venturi τοῦ ὁποῖου ἡ στενὴ διατομὴ ἔχει διάμετρον $D_2 = 5 \text{ mm}$. (Σχ. V.7).

Νά ὑπολογισθῇ εἰς lt/min ἡ διερχομένη παροχή, διὰ διαφορὰν h τῶν ἐνδείξεων τῶν πιεζομετρικῶν σωλήνων ἴσην μὲ 16 cm στήλης ἐλαίου, ὅταν ὁ ἄξων τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι ὀριζόντιος.

Δεχόμεθα παραβολικὴν τὴν διανομήν τῶν ταχυτήτων ἐντός τοῦ ἀγωγοῦ καὶ τοῦ σωλήνος Venturi καὶ ἀμελητέαν τὴν ἀπώλειαν ἐνέργειας μεταξὺ τῶν διατομῶν A καὶ B.

Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ροὴ εἶναι τελείως στρωτή, ἐάν ὁ κινηματικός συντελεστής ἰξώδους τοῦ ἐλαίου εἶναι $\nu = 0,8 \text{ stokes}$.

γ) Διὰ τὰς αὐτὰς συνθήκας ροῆς ἀλλάζει ἡ διαφορὰ h τῶν ἐνδείξεων, ἂν ὁ ἄξων τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι κεκλιμένος πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω;

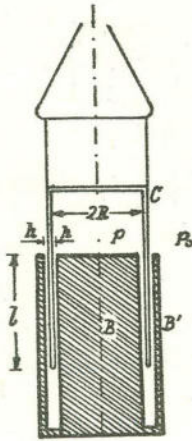


Σχ. V.7

V.8) Ἀποσβεσις ταλαντώσεων ζυγοῦ, τύπου "CURIE"

Δι' ἕκαστον ὀσκον ζυγοῦ ὑπάρχει εἰς ἀποσβεστήρ ταλαντώσεων, ἀποτελούμενος ἀπὸ ἓνα λεπτόν κυλινδρικὸν κώδωνα C, ἀκτῖνος R, ὁ ὁποῖος δύναται νά διεισδύσῃ εἰς τὸν χῶρον τὸν περιέχόμενον μεταξὺ τῶν συναξονικῶν κυλινδρῶν B καὶ B' (βλέπε σχῆμα).

Κατὰ τὴν μετατόπισιν αἱ παρειαὶ τοῦ κώδωνος διατηροῦν μέαν στα-



Σχ. V.8

θεράν απόστασιν h από τὰς παρειὰς τῶν κυλινδρῶν B καὶ B' τοῦ h θεωρουμένου ἐλαχίστου ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα R

Νά ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις τριβῆς, ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ κώδωνος.

Ποῖας μορφῆς εἶναι αὐτή;

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $R=5\text{ cm}$
 $h=0,1\text{ cm}$, $\mu=18,10\text{ poises}$,
 μέση τιμὴ τοῦ $l=10\text{ cm}$.

V.9)

Νά ὑπολογισθῇ ἡ παροχὴ κυλινδρικοῦ ἀγωγοῦ διὰ γραμμικὴν πιῶσιν pgj ὅταν ἡ διατομὴ εἴναι:

α) ῥηθιόν, ἡμιαξόνων a καὶ b

$$\text{Λύσις:} \quad \frac{\pi g j}{4\nu} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

β) ῥηθιόν, ἡμιαξόνων a καὶ b

$$\text{Λύσις:} \quad \frac{\sqrt{3} a^4 g j}{320 \nu}$$

γ) Δακτύλιος ὀριζόμενος ὑπὸ κύκλων ἀκτῶν R_1, R_2 ($R_1 < R_2$)

$$\text{Λύσις:} \quad \frac{\pi g j}{8\nu} \left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln R_2 - \ln R_1} \right]$$

V.10)

Κυλινδρικός ἀγωγὸς ἔχει ὡς κάθετον τομὴν μίαν ἐπιφάνειαν S , ἡ ὅποια εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z λαμβάνεται ἐκ τοῦ κύκλου $|z| \leq 1$ τοῦ ἐπιπέδου Z διὰ τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως $z = RZ/(1+RZ^2)$ ὅπου R πραγματικὴ σταθερά, τιμῆς μικροτέρας τοῦ $1/5$.

α) Παρουσιάσατε τὴν ἐξέλιξιν τῆς καθέτου τομῆς S .

β) Μελετήσατε τὴν μόνιμον ροήν, ἡ ὅποια λαμβάνει χώραν ἐντὸς τοῦ

ἀγωγοῦ, ὅταν ὑπάρχη μία γραμμικὴ πτώσις τῆς πίεσεως pgj .

$$\gamma) \text{ Δείξατε ὅτι ἡ παροχὴ εἶναι ἴση με } \frac{\pi g j R^4}{8 \nu} (1 + 4\eta^2 + 5\eta^4)$$

V.11) Ροὴ ἐνδὸς συγκλίνοντος ἀγωγοῦ

Θεωροῦμεν ἀκτινικὴν ἐπίπεδον ροὴν (ὅλαι αἱ τροχιαεῖς μιᾶς τοιαύτης ροῆς εἶναι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τῆς ἀρχῆς) ἐνδὸς ἰζώδους ἀσυμπίεστου ρευστοῦ.

α) Ἐὰν r καὶ θ εἶναι αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι καὶ u τὸ ἀλγεβρικὸν μέτρον τῆς ταχύτητος, δείξατε ὅτι διὰ τὴν διατήρησιν τῆς παρασυρομένης μᾶζης ἡ ru θά εἶναι συνάρτησις τοῦ θ καὶ μόνον, θά τεθῇ δὲ ἴση πρὸς $\phi(\theta)$.

β) Ποῖαι θά εἶναι αἱ συναρτήσεις ροῆς καὶ περιστροφῆς;

γ) Νά γραφῇ κατ'εὐθείαν ἡ ἐξίσωσις περιστροφῆς καὶ νά δειχθῇ ὅτι ἡ $f(\theta)$ εἶναι λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως:

$$f'' + 4(f' + f^2 \alpha f + \beta) = 0$$

ἔνθα α καὶ β εἶναι δύο σταθεραί.

δ) Νά ἐφαρμοσθῇ τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ εἰς τὴν μελέτην τῆς ροῆς ἐντὸς τοῦ συγκλίνοντος ἀγωγοῦ $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ ὀριζομένου ὑπὸ δύο ἐπιπέδων παρειῶν, θεωρουμένης τῆς ροῆς συμμετρικῆς ὡς πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα, καὶ τῆς $f < 0$.

ε) Νά γραφοῦν τὰ ὁλοκληρώματα τὰ δίδοντα τὴν θ_0 καὶ τὴν παροχὴν Q (ἀρνητικὴν) εἰς τὸν συγκλίνοντα ἀγωγὸν, ὅταν θεωροῦνται γνωσταί αἱ τιμαὶ τοῦ $f(0)$ (κατανομή τῶν ταχυτήτων εἰς τὸν ἄξονα) καὶ τοῦ $f'(\theta_0)$ (κατανομή τῆς περιστροφῆς εἰς τὴν παρειάν).

V.12)

Ἐν ἰζώδεις ρευστὸν καταλαμβάνει ἓνα χῶρον $x_3 > 0$ καὶ εἶναι ἐν ἐπαφῇ μετὰ τὴν ἐπίπεδον παρειάν $x_3 = 0$, τῆς ὁποίας ἡ κίνησις εἶναι ἀρμονικὴ ταλάντωσις, ταχύτητος $V_0 \cos at$.

α) Νά εὑρεθῇ ἡ ροή, ἂν θεωρηθῇ ἡ πρὸς σταθερά καὶ ἡ ταχύτης συγγραμμικὴ μετὰ τὸν ἄξονα Ox_1 , μετὰ ἀλγεβρικὸν μέτρον μίαν συνάρτησιν τῶν x_3 καὶ t (t : περὶοδος).

β) Νά μελετηθῇ τὸ διάγραμμα τῶν ταχυτήτων (εὖρος καὶ φάσις).

γ) Νά καθορισθοῦν αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ὁροῦν ἐπὶ τῆς παρειᾶς διὰ νά τὴν διατηρήσουν ἐν κινήσει.

δ) Νά καθορισθῇ ἡ ἀπόστασις δ , ἡ χωρίζουσα δύο στοιβάδας ρευστοῦ, εἰς φάσιν ταλαντώσεως $2\pi\sqrt{\frac{2\nu}{a}}$

ε) Νά ἐξηγηθοῦν τὰ φαινόμενα, τὰ ὁποῖα παρατηροῦνται ὅταν τὸ ν εἶναι μικρὸν.

(Ἡ ἀπόστασις δ ὀνομάζεται συνήθως πᾶχος διεισδύσεως τοῦ ἰξώδους κυματισμοῦ).

V.13)

Νά μελετηθῇ τὸ ἴδιο πρόβλημα, ἐάν θεωρηθῇ ὅτι τὸ ρευστὸν καταλαμβάνει τὸν χῶρον $0 < x_3 < h$ καὶ ὅτι τὸ ἐπίπεδον $x_3 = h$ διατηρεῖται σταθερόν.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι

$$u = V_0 R \left(e^{iat} \frac{\operatorname{sh} [\beta(h-x_3)(1-i)]}{\operatorname{sh} [\beta h(1-i)]} \right), \quad (2\nu\beta^2 = a^2).$$

($R(f)$: συμβολίζει τὸ πραγματικὸν μέρος τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως f)

Νά καθορισθοῦν αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $x_3 = 0$, διὰ τὴν διατηρηθῇ ἡ κίνησις περιοδική.

V.14)

Στερεὰ σφαῖρα πυκνότητος $\mathcal{P}$ καὶ ἀκτῖνος a πίπτει βραδέως ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τοῦ βάρους τῆς ἐντὸς ἰξώδους ρευστοῦ πυκνότητος ρ .

α) Δειξάτε ὅτι ἡ ὀριακὴ ταχύτης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ $\frac{2}{g} \frac{\mathcal{P}-1}{\nu} ga^2$

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $\mathcal{P}=2$, $\nu=0,018 \text{ cm/sec}$, $g=981 \text{ cm/sec}^2$.

β) Νά εὐρεθῇ ἡ τάξις τοῦ μεγέθους a διὰ τὴν ὁποῖαν ἐφαρμόζεται ἱκανοποιητικῶς ἡ θεωρία τοῦ STOKES.

Τὰ δεδομένα αὐτὰ ἰσχύουν κατὰ προσέγγισιν διὰ τὴν περίπτωσιν ἐνὸς κόκκου ἄμμου, πλινθίου ἐντὸς τοῦ ὕδατος.

V.15)

Σφαῖρα κέντρου O καὶ ἀκτῖνος a στρέφεται βραδέως περίξ μιᾶς τῶν διαμέτρων τῆς, διατηρουμένης σταθερᾶς (ὁμοιόμορφος περιστροφή ω) ἐντὸς ἰξώδους ρευστοῦ ἰσορροποῦντος εἰς τὸ ἄπειρον.

α) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ σημείου M εἶναι ἴση μὲ $\frac{\omega a^3}{r_s^2} \vec{k} \wedge \vec{OM}$

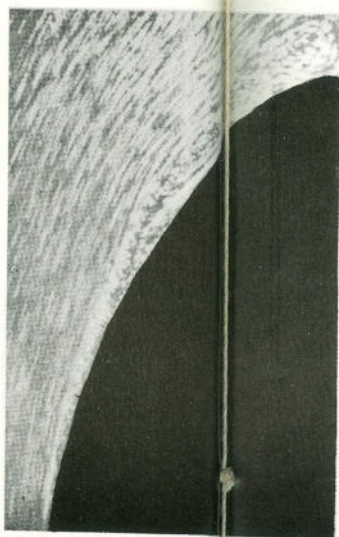
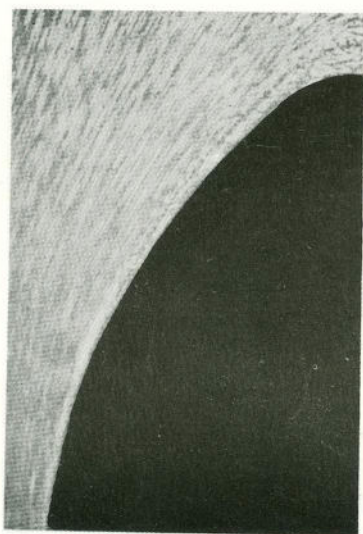
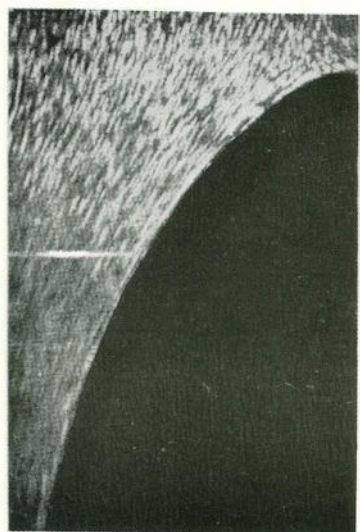
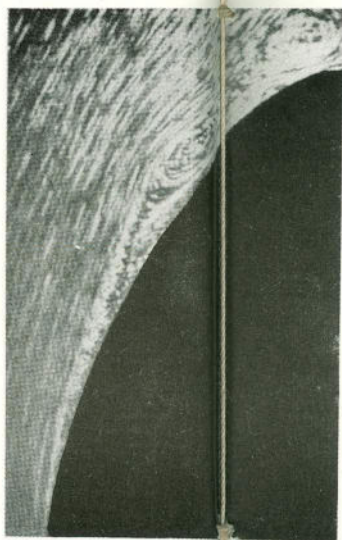
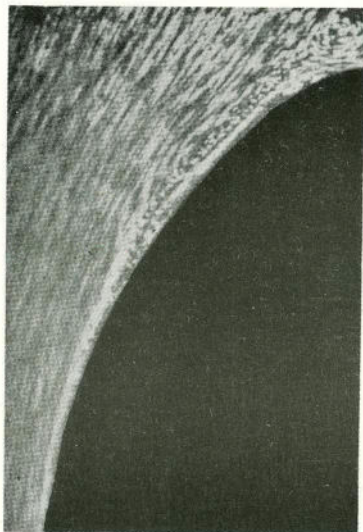
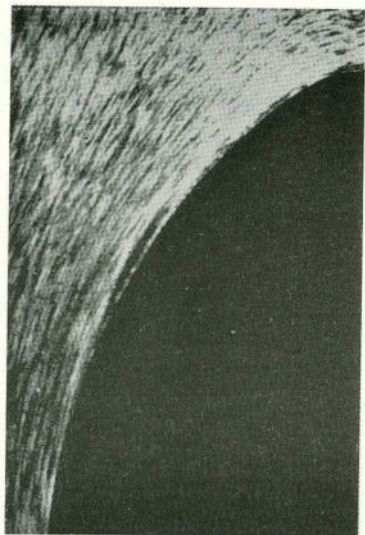
ὅπου $\vec{k}$ μοναδιαῖο διάνυσμα τοῦ ἄξονος περιστροφῆς καὶ $r = |\vec{OM}|$.

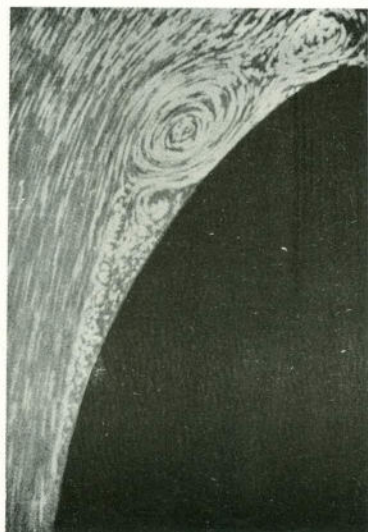
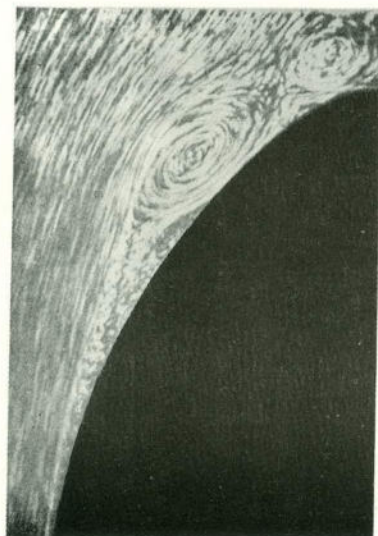
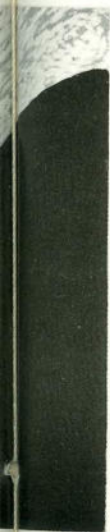
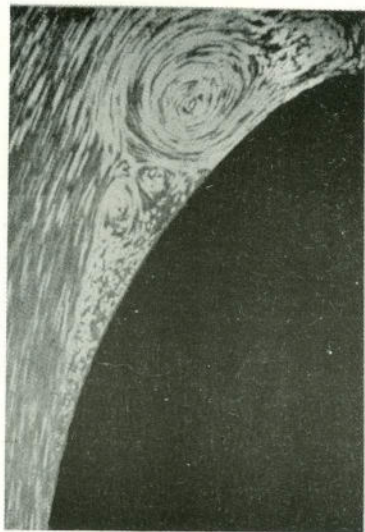
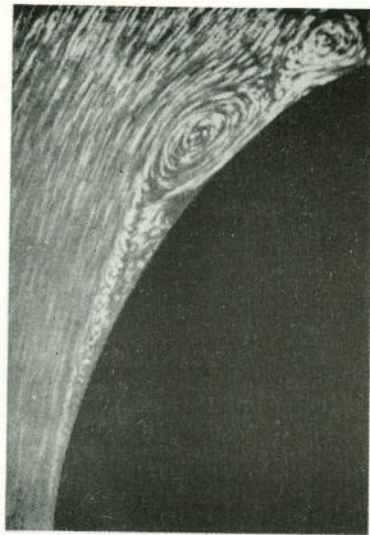
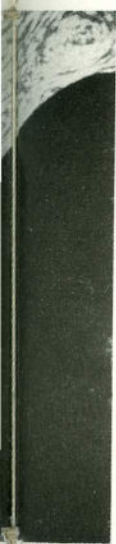
β) Νά ὑπολογισθῇ τὸ ζεῦγος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς σφαίρας διὰ τὴν διατηρήσῃ ἐν κινήσει (Δύσις: $8\pi\mu\omega a^3$)

Ἡ κίνησις θεωρεῖται μόνιμος καὶ ἰσχύει ἡ προσεγγιστικὴ ἐξίσωσις τοῦ STOKES

V.16) Ροή ἰξώδους ρευστοῦ εἰς τὴν γειτονίαν ἐνὸς σημείου αἰχμῆς (ἐπίπεδος ροή)

Ἡ ροή εἶναι μόνιμος. Τὸ ρευστὸν κατέχει τὸν χῶρον $y>0$ καὶ δια-





Ὅριαυή Στοιβάς. Ροή περί "profil" δι' αὐξανόμενου ἀριθμοῦ REYNOLDS

2011

βρέχει τήν παρειάν $y=0$. Τό πεδίον τῶν ταχυτήτων εἶναι τοῦ τύπου (Α):

$$u=xf'(y) \quad v=-f(y).$$

α) Νά σχηματισθῇ ἡ διαφορική ἐξίσωσις (Ε), τήν ὁποῖαν πληροῖ ἡ συνάρτησις $f(y)$.

β) Πῶς θά ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις;

γ) Ἐάν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ πίεσις αὐτή εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τοῦ x^2 (διὰ y -σταθ.), νά δειχθῇ ὅτι δυνάμεθα νά ἐπαναφέρωμεν τήν (Ε) εἰς τήν ἐξίσωσιν (Ε')

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0.$$

Θεωροῦμεν ροήν τελείου ρευστοῦ $u = \alpha x$, $v = -\alpha y$ καί ζητοῦμεν τήν μελέτην τῆς ὀριακῆς στοιβάδος, πλησίον τῆς παρειᾶς $y=0$.

δ) Νά δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει μία λύσις τύπου (Α).

ε) Νά ἐπαληθευθῇ ὅτι εἰς τήν εἰδικήν αὐτήν περιπτῶσιν ὑπάρχει ταυτοῦτης μεταξὺ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων τῆς ὀριακῆς στοιβάδος (ἀναφορικῶς πρὸς τὰς συνιστώσας τῆς ταχύτητος) καί τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ NAVIER.

στ) Ποῖαι ὀριακαί συνθῆκαι ἀπαιτοῦνται διὰ τήν λύσιν τῆς (Ε) ὥστε νά προσδιορισθῇ πλήρως;

V.17) Ὀριακή στοιβάς εἰς τὰ τοιχώματα μιᾶς γωνίας

Νά μελετηθῇ ἡ ὀριακή στοιβάς ἐπὶ μιᾶς ἐπιπέδου παρειᾶς ὅταν ἡ ταχύτης ἐπ' αὐτῆς, διὰ τέλειον ρευστόν εἶναι $u = Cx^m$.

Νά δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει μία λύσις τῶν ἐξισώσεων τῆς ὀριακῆς στοιβάδος ὅταν ληφθῇ

$$\psi = c\xi^{\frac{m+1}{2}} f(\vartheta)$$

ὅπου

$$\vartheta = n\xi^{\frac{m-1}{2}}.$$

Νά σχηματισθῇ ἡ διαφορική ἐξίσωσις τήν ὁποῖαν ἱκανοποιεῖ ἡ συνάρτησις $f(\vartheta)$.

Ἐάν τεθῇ $\vartheta = ax$, $f = bF$, ὅπου a καί b δύο σταθεραί προσδιοριστέαι, νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις, τήν ὁποῖαν πληροῖ ἡ $F(x)$, δύναται νά γραφῇ

$$F''' = FF'' + \beta(1 - F'^2) = 0$$

ὅπου

$$\beta = \frac{2m}{m+1}$$

Νά γραφοῦν αἱ ὀριακαί συνθῆκαι τοῦ προβλήματος.

Ἡ περίπτωσις $m=0$ ἀφορᾷ τήν μελετηθεῖσαν ἤδη ἐπίπεδον πλάκα.

Ἡ περίπτωσις $m=1$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ροήν, τήν μελετηθεῖσαν εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν.

V.18) Όριακή στοιβάς εις τήν παρειάν ἐνός συγκλίνοντος ἄγωγού
 Ἐάν ἡ παρειά θεωρηθῇ ὡς ἡμιᾶξων τῶν θετικῶν x , τὸ προβλήμα ἀποτελεῖ εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ προηγουμένου προβλήματος, ἀντιστοιχοῦσα εἰς $m = -1$ καὶ $c < 0$.

α) Δεῖξατε ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐπαναφέρωμεν τήν μελέτην εἰς ὁλοκλήρωσιν μιᾶς ἐξιśσεως τῆς μορφῆς

$$F''' - F'^2 + 1 = 0.$$

β) Σχηματίσατε ἓν πρῶτον ὁλοκλήρωμα, καὶ δεῖξατε, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς συνθήκας εἰς τὰ ὅρια, ὅτι ὁδηγεῖ εἰς τήν ἐξιśωσιν

$$\frac{dF'}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3}(F'-1)^2(F'+2)}$$

γ) Ὁλοκληρώσατε καὶ δεῖξατε ὅτι δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν μὲ ἀκρίβειαν τήν u .

V.19) Ἐπίλυσις διὰ διαδοχικῶν ἐπαναλήψεων τῆς ἐξιśσεως τῆς ὁριακῆς στοιβάδος

Ζητῶμεν τήν λύσιν $\omega(x)$ τῆς διαφορικῆς ἐξιśσεως

$$\omega''' + 2\omega\omega'' = 0 \quad (1)$$

ἡ ὅποια πληροῖ τὰς συνθήκας εἰς τὰ ὅρια $\omega(0) = \omega'(0) = 0$, $\omega''(0) = 1$.

Δεχόμενοι τήν ὑπαρξιν μιᾶς τοιαύτης λύσεως διὰ πᾶν πραγματικὸν καὶ θετικὸν x , δεῖξατε ὅτι ἔάν $g(x) = \omega''$, θὰ εἶναι ὑποχρεωτικῶς

$$g = \tau[g(x)] \quad (2)$$

μὲ
$$\tau[g(x)] = e \left[- \int_0^x (x-z)^2 g(z) dz \right]$$

(θὰ ὑπολογίσωμεν τὸ g συναρτήσῃ τοῦ ω δι' ἐπιλύσεως, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια, τῆς δοθείσης ἐξιśσεως (1) $g' + 2\omega g = 0$, καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ ω συναρτήσῃ τοῦ g δι' ἐπιλύσεως τῆς $g = \omega''$)

Δεῖξατε, ἀντιστρόφως, ὅτι ἔάν ἡ (2) ὀέχεται μίαν λύσιν, δυνάμεθα νὰ ἐξάγωμεν μίαν λύσιν τῆς (1), ἐπαληθεύουσαν τὰς δοθείσας συνθήκας εἰς τὰ ὅρια.

Ἐπιλύομεν τήν (2) διὰ διαδοχικῶν ἐπαναλήψεων θέτοντες $g_0 = 0$, $g_n = \tau(g_{n-1})$. Ἐπαληθεύσατε ὅτι

$$g_1 = 1, \quad g_2 = e \left(-\frac{x^3}{3} \right).$$

Δείξατε, επαγωγικῶς, ὅτι $|g_{n+1} - g_n| \leq \frac{(2x^3)^n}{3n!}$ ὅποτε ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ἡ ὕπαρξις τῆς λύσεως $g(x)$ τῆς (2).
 Ἀποδείξατε ὅτι

$$g_{2n}(x) < g(x) < g_{2n+1}(x)$$

Δείξατε ὅτι

$$\int_0^\infty g(x) dx = \beta, \quad \int_0^\infty 2g(x) dx = \beta',$$

ἐνθα β καὶ β' θετικοί, σταθεροί, καὶ ὅτι διὰ μεγάλης τιμᾶς τοῦ (x) , τὸ $\omega(x)$ τείνει ἀσυμπτωτικῶς πρὸς τὴν τιμὴν $\beta x - \beta'$.

Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $f(\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \omega\left(\frac{\vartheta}{2\sqrt{\beta}}\right)$ ἐπαληθεύει τὰς ἐξισώσεις (27.4.β) καὶ (27.4.γ).

Ἐφαρμογή: Ἐπιτυχάνομεν μίαν προσεγγιστικὴν τιμὴν τοῦ f δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ g ὑπὸ τοῦ g_n .

Δείξατε ὅτι δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ g ὑπὸ τοῦ g_2 ἔχομεν ὡς προσεγγιστικὴν τιμὴν τοῦ β τὴν $3^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$, ὅπου $\Gamma(x)$ συνάρτησις EULER δευτέρου εἴδους καὶ ὅτι ὁ ἀριθμητικὸς συντελεστής τοῦ τύπου (27.4.δ) $C_p = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{V_0 x}}$ προκύπτει ἴσος μὲ 0,684 (ἀντὶ τοῦ ἀληθοῦς 0,664).

Αὐτὸ δεικνύει τὴν ταχύτητα συγκλίσεως τῶν ἐφαρμοσθεισῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων.

V.20) Κυφελωτὸν πλέγμα

Πλέγμα τοποθετεῖται ἐντὸς ἀγωγοῦ ἀέρος διὰ νά ρυθμίση τὴν ροήν. Ἀποτελεῖται ἀπὸ λεπτὰ μεταλλικὰ ἐλάσματα, πλάτους 2 cm , διασταυρούμενα παραλλήλως πρὸς τὸ ρεῦμα, σχηματίζοντα τετραγωνικοὺς βρόγχους πλευρᾶς 2 cm .

α) Νά ὑπολογισθῇ εἰς mm ὕδατος ἡ πτώσις τῆς πιέσεως, ἡ προκαλουμένη ὑπὸ τοῦ πλέγματος διὰ μίαν ταχύτητα ἀέρος, ἴσην πρὸς 30 m/sec .

β) Νά θεωρηθῇ ἀμελητέον τὸ πᾶχος τῶν ἐλασμάτων καὶ νά δειχθῇ ὅτι ἡ ὀριακὴ στοιβὰς παραμένει στρωτὴ δι' ὅλα τὰ ἐλάσματα.

Ἡ κινηματικὴ συνεκτικότης τοῦ ἀέρος εἶναι $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$ καὶ ἡ πυκνότης τοῦ $\rho = \frac{1}{8} \text{ M.K.S.}$

V.21) Άντίστασις ἐπιπέδου πλακός

Έπίπεδος πλάξ πλάτους 3 m καὶ μήκους 30 m ρυμουλκεῖται παραλλήλως πρὸς αὐτὴν καὶ κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους της, ἐντὸς ὕδατος μετὰ ταχύτητα 6 m/sec.

Νά καθορισθῇ ἡ δύναμις τριβῆς, ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ μιᾶς τῶν δύο ὀφειων τῆς πλακός καὶ ἡ δύναμις, ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τῶν 3 πρώτων μέτρων τῆς πλακός ($g=10 \text{ m/sec}^2$, $\nu=10^{-2} \text{ stokes}$)

V.22) Άντίστασις ὑποβρύχιου

Έν ὑποβρύχιον ἔχει μήκος $L=84 \text{ m}$ καὶ ὀλικὴν ἐπιφάνειαν κελεύφους ἴσην μετὰ 1800 m².

Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις εἰς τὰς δυνάμεις τριβῆς, αἱ ὁποῖαι ἀσκοῦνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κελεύφους, λόγῳ τοῦ ἰξώδους, ὅταν, ἐν βυθίσει, τὸ ὑποβρύχιον ἔχει ταχύτητα V ἴσην μετὰ 5 m/sec.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν δεχόμεθα ὅτι ἡ τιμὴ c_f τοῦ μέσου συντελεστοῦ τριβῆς, ἡ εὑρεθεῖσα διὰ τὴν ἐπίπεδον πλάκα, ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν.

Έχομεν ἐξ ἄλλου

$$c_f = 0,455 (\log R_L)^{-2,58} \quad \text{διὰ} \quad R_L = \frac{vL}{\nu} > 10^7$$

Λαμβάνομεν $g = 10 \text{ m/sec}^2$, $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$.

V.23) Ρυμουλκήσις βεβυθισμένου ἄγωγοῦ

Θέλομεν νά ρυμουλκῇσωμεν εἰς τὴν θάλασσαν μετὰ ταχύτητα 2 m/sec καὶ παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονά του ἓνα ἄγωγόν διατηρούμενον ἐν βυθίσσει, διαμέτρου ἴσης μετὰ 22 mm καὶ μήκους ἴσου μετὰ 3 km.

Νά ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἑλξεως καὶ ἡ ἀπαιτούμενη ἰσχὺς.

Τί θά συμβῇ, ἐάν ὁ ἄγωγός ἔχῃ διαχωρισθῇ εἰς τμήματα τῶν 75 m μήκους;

($\nu = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ stokes}$, $\rho = 1,025 \text{ g/cm}^3$).

V.24) Προσδιορισμὸς τῆς ἰσχύος ἐνδὸς πλοῦ

Διὰ τὴν μελέτην ἐντὸς δεξαμενῆς ναυπηγείου (γλυκεὸς ὕδατος), τὸ ὁμοίωμα ἐνδὸς πλοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει μήκος 100 m, μέση ἐπιφάνειαν κελεύφους 1800 m², καὶ προορίζεται νά ἀναπτύσῃ εἰς τὴν θάλασσαν μεγίστην ταχύτητα ἴσην μετὰ 8,5 m/sec, κατεσκευάσθη ὑπὸ κλίμακα 1:25.

Δεχόμεθα ὅτι ἡ ἀντίστασις κατὰ τὴν μέσῃ τῶν κυμμάτων διέλευσιν τοῦ πλοῦ καὶ ἡ ἀντίστασις λόγῳ τριβῆς ἐνεργοῦν ἀθροιστικῶς καὶ ὅτι ἰσχύει ὁ νόμος ὁμοιότητος τοῦ FROUDE.

Έπὶ τὰς συνθήκας τοῦ πειράματος. αἱ ὁποῖαι θά προσδιορισθοῦν.

εύρεται μία δύναμις ἑλξεως $F_2 = 1,65 \text{ kp}$. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις F_1 τοῦ πραγματικοῦ πλοίου καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἀπαιτούμενη ἰσχύς.

Δεχόμεθα ὅτι ὁ συντελεστὴς τριβῆς C_f δίδεται ἀπὸ τοὺς τύπους

$$C_f = \frac{0,074}{(R_L)^{0,2}} \quad R_L < 10^7$$

$$C_f = \frac{0,455}{(\log R_L)^{2,58}} \quad R_L > 10^8$$

$$R_L = \frac{\rho v L}{\mu} \quad L$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι

διὰ τὸ θαλάσσιον ὕδωρ $\rho_1 = 1,025 \text{ gr/cm}^3$, $\nu_1 = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ stokes}$.

διὰ τὸ γλυκὺ ὕδωρ $\rho_2 = 1 \text{ gr/cm}^3$, $\nu_2 = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ stokes}$.

καὶ $g = 10^3 \text{ cm/sec}^2$.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ἡ ὅλη βιβλιογραφία παρουσιάζεται κατὰ σειράν χρησιμοποίησώς τῆς εἰς τὴν σύνταξιν τῆς ὕλης τῶν μαθημάτων. Τὰ συγγράμματα τὰ ὁποῖα ἀπετέλεσαν τὴν βάση διὰ τὴν διαμόρφωσιν τῆς ὕλης σημειοῦνται δι' ἀστερίσκων.

- *1) E. BRUN, A. MARTINOT-LAGARDE : Mécaniques des fluides, Dunod, 1960
- 2) Marc BLANC-LAPIERRE : La mathématique moderne, Eyrolles, 1961
- 3) G. CHOQUET : Cours d'analyse-topologie, Masson et C^{ie}, 1964
- 4) J. BREUER : Initiation à la théorie des ensembles, Dunod, 1961
- 5) R. BELLMAN : Introduction to matrix analysis, Mc Graw-Hill, 1960
- 6) A. LICHNEROWICZ : Eléments de calcul tensoriel, A. Collin, 1962
- 7) M. DENIS-PAPIN, A. KAUFMANN : Cours de calcul matriciel, A. Michel, 1961
- 8) A. BLAQUIÈRE : Calcul matriciel, Hachette, 1959
- 9) F. R. GANTMACHER : Applications of the theory of matrices, Willey, 1959
- *10) G. CAHEN : Eléments de calcul matriciel, Dunod, 1959
- 11) Barry SPAIN : Tensor Calculus, Oliver et Royd, 1960
- *12) E. BAUER : Champs de vecteurs et de tenseurs, Masson, 1955
- 13) Michel QUEYSANNE et André DELACHET : L'algèbre moderne, (que sais-je? N° 661 P.U.F.)
- *14) A. LENTIN et J. RIVAUD : Eléments d'algèbre moderne, Vuibert, 1957
- 15) G. CHOQUET : Espaces topologiques et espaces métriques, Centre de documentation universitaire
- 16) G. CHOQUET : **Structure** topologique-Structures uniformes-Espaces de fonctions, Centre de documentation universitaire
- 17) BIEBERBACH : Lehrbuch der Functionentheorie, I, Leipzig, 1930
- *18) COURANT-HILBERT : Methoden der Mathematischen Physik, Berlin, 1931
- 19) MAGNUS-OBERHETTINGER : Formeln und Sätze für die Speziellen Functionen der Mathematischen Physik, Berlin, 1948
- 20) RUTHERFORD : **Vectoranalyse** med Tillampingar, Upsala, 1949
- 21) C. W. GSEEN : Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig, 1927
- 22) FERRANDON : Cours de mécanique, Eyrolles, 1961
- 23) G. BRUAT : Mécanique, Masson, 1955
- *24) H. BÉGHIN : Mécanique théorique et appliquée, Gauthier-Villars, 1950
- 25) R. OUZIAUX-J. PERRIER : Mécanique appliquée, Dunod, 1958
- 26) V. STREETER : Fluid mechanics, Mc Graw-Hill, 1962
- 27) L. PRANDTL : Guide à travers la mécanique des fluides, Dunod, 1952

- 28) M.SEDILLE : Précis de mécanique des fluides, Dunod, 1962
- 29) V.SREETER : Fluid dynamics, Mc Graw-Hill, 1948
- *30) G.BIRKHOFF : Hydrodynamique, Dunod, 1955
- *31) P.GERMAIN : Mécanique des milieux continus, Masson, 1962
- *32) L.ESCANDE : Hydraulique générale, tome I, E.Privat, Toulouse, 1950
- 33) W.KAUFMANN : Fluid mechanics, Mc Graw-Hill, 1963
- *34) N.KOCHIN - J.KIBEL - N.ROSE : Theoretische Hydromechanik, Akademie Verlag, 1954
- 35) L.ROBINSON : Basic fluid mechanics, Mc Graw-Hill, 1963
- 36) H.ROUSE : Elementary mechanics of fluids, Chapman, 1957
- 37) A.TENOT : Exercices de mécanique des fluides appliquée, A.Blanchard, 1961
- 38) H.ROUSE : Advanced mechanics of fluids, Willey, 1959
- 39) GOLSTEIN : Modern developments in fluid mechanics, Dover, 1958
- *40) H.LAMB : Hydrodynamics, Cambridge Univ.Press et Dover, 1945
- 41) H.CABANNES : Cours de mécanique générale, Dunod, 1962
- 42) M.ROY : Mécanique des milieux continus et déformables, Gautiers-Villars, 1950
- *43) W.PRÄGER : Introduction to mechanics of continua, Ginn and Co, 1961
- *44) R.TOUPIN : The classical field theories in "Handbuch der Physik" Springer, 1960, Vol III/I p.226-793
- *45) COMOLET : Mécanique expérimentale des fluides, tome I, Masson, 1961
- 46) W.KAUFMANN : Technische Hydro-und Aeromechanik, Springer Verlag, 1954
- 47) A.BETZ : Hydro-und Aeromechanik, Verlag Chemie G.M.B.H. (Weinheim), 1953
- 48) B.ECK : Technische Strömungslehre, Springer-Verlag, 1958
- 49) J.PERES : Cours de mécanique des fluides, Gauthier-Villars, 1936
- 50) L.LANDAU et E.LIFSHITZ : Fluid mechanics, Pergamon, 1959
- 51) Mac CRACKEN : Digital computer programming, Dunod, 1960
- *52) A.KORGANOFF : Méthodes de calcul numérique, Dunod, 1961
- 53) K.RICHARDS : Arithmetic operations in digital computers, D.V.Nostrand Company, 1955
- 54) M.V.WILKES : Automatic Digital computers, Dunod, 1959
- 55) N.D.CHAPIN : An introduction to automatic computers, D.V. Norstrand Company, 1957
- 56) N.V.REINFELD - W.P.VOGEL : Mathematical Programming, Prentice Hall, 1958
- 57) PELEGRIN : Machines à calculer électroniques, arithmétiques et analogiques, Dunod, 1959
- *58) SESTIER : Les calculateurs numériques automatiques et leurs applications, Editions Hommes et Techniques, 1958
- 59) L.FRANZ : Electronic digital computers, Academic press, N.York, 1959
- 60) E.G.BERKELEY - Laurence WAINWRIGHT : Computers their operations and applications, Reinhold publishing corporation, 1956
- 61) FOYEN : Le langage électronique, Que sais-je?, 1960
- 62) G.NASLIN : Principes des calculatrices numériques automatiques, Dunod, 1960
- 63) WRUBEL : A primer of programming for digital computers, Mc Graw-Hill 1959
- 64) C.GOTTLIER - J.HUME : High speed data processing, Mc Graw-Hill, 1958
- 65) D.R.HARTREE : Numerical analysis, Oxford university press, 1958
- *66) A.RALSTON - H.WILF : Méthodes mathématiques pour calculateurs arithmétiques, Dunod, 1965
- 67) L.ESCANDE : Hydraulique générale, tome II, E.Privat, Toulouse, 1950

- 68) R.COMOLET : Introduction à l'analyse dimensionnelle et aux problèmes de similitude en mécanique des fluides
- 69) H.LANGHAAR : Dimensional analysis and theory of models, John Willey, 1951
- 70) P.W.BRIDGMAN : Dimensional analysis, New Haven, 1943
- *71) S.KLINE : Similitude and approximation theory, Mc Graw-Hill, 1965
- *72) Θ.ΕΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ : Συμβολή της μαθηματικής ανάλυσεως εις την γενικήν της θεωρίας καὶ πειραματικῆς μελέτης τῶν φυσικῶν ὁμοιωμάτων, Α.Π.Θ., 1965
- 73) D.MASSIGNON : Mécanique statistique des fluides, Dunod, 1953
- *74) E.A.BRUN : Introduction à l'étude de la couche limite, Gauthier-Villars, 1955
- *75) H.SCHLICHTING : Boundary layer theory, Mc Graw-Hill, 1960
- 76) V.M.FALKNER-S.W.SKAN : Some approximate solutions of the boundary layer equations, A.R.C., 1930
- 77) A.M.O.SMITH : Improved solution of the Falkner and Skan boundary layer equation, Institute of the Aeronautical Sciences, N.York, 1954
- 78) A.A.DORODNITZIN : Couche limite laminaire dans un gaz compressible, N.A.C.A., 1956
- 79) K.STEWARTSON : Correlated incompressible and compressible boundary layers, Royal Society of London, 1949
- 80) I.TAMI : On the approximate solution of the laminar boundary layer equations, Journal of the Aeronautical Sciences, Juillet 1954
- 81) B.LE FUR : Calcul de la couche limite laminaire dans un écoulement compressible avec gradient de pression sur une paroi thermiquement isolée, Journal de Recherches du C.N.R.S., Mars 1958
- 82) M.PLAN : Méthodes d'exploration dynamique et thermique, et étude de la couche limite laminaire compressible de la plaque plane, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, 1957
- 83) N.H.KEMP-P.H.ROSE-R.W.DETRA : Laminar heat transfer around blunt bodies in dissociated air, Journal of the Aero-Space Sciences, Juillet 1959

ΑΛΦΑΒΗΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Α	Σελ.
άγωγός έν ιαμπύλη	127
άλγεβρα λογική ή άλγεβρα BOOLE	218, 233
άναλλοιώτος	277
άνάλυσις άριθμητική	217, 233
άνάλυσις λογική	234
άνάρτησις	216
άνηγμένα δεδομένα	263
άνηγμέναι έξισώσεις	262
άντιστροφή μητρώου	221
άπειρόνισις ιανονική	213
άπειρόνισις σύμμορφος	199, 200
άπόυλις	27
άπουόλλησις όριαυής στοιβάδος	354
άποτελέσματα όμοιότητας	259, 268, 268
άριθμητικός λογισμός	217
άριθμός EULER	269, 270, 273, 290
άριθμός FROUDE	269, 270, 273, 290
άριθμός MACH	289, 290, 292
άριθμός PRANDTL	289, 290, 291
άριθμός REYNOLDS	269, 270, 273, 312, 313, 341, 344, 347, 351
άριθμός WEBER	290, 291
άσυμπτειστότης	27
άυτόπρογραμματισμός	239
 Β	
βαθμής	27, 75
βάσις	37
βάσις όρθονορμισμένη	38
βάσεως άλλαγή	34
BITS	265
 Γ ιαί C	
γινόμενα δυνάμεων	260

	Σελ.
γινόμενον βαθμωτὸν ἐρημιτικόν	38
γινόμενον ἐσωτερικόν, ἐξωτερικόν, δισεξωτερικόν, μυτικόν	23
γλῶσσα μηχανῆς	234
γραμμαί περιστροφῆς	60
γραμμαί ροῆς	28, 60
γραμμὴ πλεύσεως	101
γραμμικότης	79, 265
γραφικὴ μέθοδος ἐπιλύσεως ἐπιπέδων υνιήσεων	158, 159
γωνία προσπτώσεως	213
COMPILER	240
Δ καὶ D	
DARBOUX	259, 261
δείκτης ἄφωνος, ἐλεύθερος	35, 105
διάγραμμα λειτουργικόν ἢ γενικόν	234
διαδοχικαί προσεγγίσεις	218
διαίρεσις διανυσματικῇ	23
δαίτα ροῆς	309
διαυλαδώσεις προγράμματος	228
διαύμανσις	314
διανομὴ πιέσεων	95
διανύσματα ἐλεύθερα καὶ ὀλισθαίνοντα	23
διάρθρωσις δαυτυλίου	32
διάρθρωσις ὁμάδος	32
διάρθρωσις σώματος	33
διασπορά	314
διαστατικῇ ἀνάλυσις	276, 286
διαστατικῇ ἐξίσωσις	277
διαστατικὸν μητρώον	279, 285, 287
διαταραχὴ υνιήσεως	69
διάχυσις	332, 335
διεύθυνσις ὑποματεστημένη	238
διεύθυνσις ὑπολογιστοῦ	227, 228
DIGITS	225
δίπολον	183
δίπολον ἐν μέσῳ ὁμοιομόρφου ροῆς	188
δρᾶσις-ἀντίδρασις	49
δυνάμεις ἀδρανείας	341, 344
δυνάμεις ἐπαφῆς, ἐξωτερικαί-ἐσωτερικαί	18
δυνάμεις συνευτικότητος	341, 344
δυνάμεις συνοχῆς	51
δυνάμεις τριβῆς	350
δυναμικῇ	48
δυναμικῇ ρευστῶν, ἐσωτερικῇ, ἐξωτερικῇ	19
δυναμικὸν μιγαδικόν	166
δύνη σημειαυή	176

Σελ.

Ε

ἐυτελεστοί διαφοριμοί	27, 30
ἐνέργεια υινητιῇ	48
ἐντασις σωλῆνος περιστροφῆς	61
ἐντολή (πρόγραμμα ὑπολογιστῶν)	229
ἐξισώσεις ἀνηγμέναι	262, 338, 339
ἐξισώσεις BOUSSINESQ	316
ἐξισώσεις γεννιαί	265, 341, 343
ἐξισώσεις διαφοριμαί μέ μεριμᾶς παραγώγους	156
ἐξισώσεις δυναμιτῆς τῶν ρευστῶν	104
ἐξισώσεις EULER	112, 322, 346
ἐξισώσεις υαταστάσεως	108, 265
ἐξισώσεις υινήσεως, θεμελιώδεις	66, 83, 265, 321
ἐξισώσεις NAVIER	111, 114, 322, 324, 346
ἐξισώσεις ὀριαμῆς στοιβάδος ἢ ἐξισώσεις PRANDTL	348
ἐξισώσεις συνεχείας	65, 107, 111, 265, 324
ἐξισώσεις συντελεστῶν	288
ἐξίσωσις BLASIUS	350
ἐξίσωσις διανομῆς θερμουρασίας	323
ἐξίσωσις ἐπιτέδων υυματισμῶν ἢ παλλομένων χορδῶν	156
ἐξίσωσις LAPLACE	156, 220
ἐξίσωσις μεταφορᾶς τῆς δύνης	322
ἐξίσωσις συμπληρωματιῇ	109
ἐξίσωσις χαραυτηριστιῇ	108
ἐπαναληπτιῇ μέθοδος	218, 221
ἐπίπεδοι υινήσεις	153
ἐπιτάχυνσις	47
ἐπιτάχυνσις CORIOLIS	47
ἐπιφάνεια ἐπαφῆς	68, 98, 109
ἐπιφάνειαι ἴσης πιέσεως	97
ἐπιφάνειαι ἴσου δυναμιμοῦ	28
ἐπιφάνειαι ροῆς	20
ἐπιφάνειαι περιστροφῆς	60
ἐφαπτομενιῇ πρόσθετος τάσις	319

Θ

θέσεις μνήμης	222, 225
θεώρημα Ἀρχιμήδους	101
θεωρήματα BERNOULLI	114, 116, 117, 119, 121, 123
θεώρημα CAUCHY	167
θεώρημα GREEN-OSTROGRADSKI	30
θεώρημα JOUKOWSKI	197, 214
θεώρημα τῶν π	278
θεώρημα ὑπάρξεως καί μοναδιμότητος	201
θεώρημα ὑπολοίπων	167, 198

I

ἰζῶδες	81, 84, 332
ἰζωδόμετρα περιστροφιά	331
ἰσοτροπία	79, 265
ἰσχύς δυνατή	49, 67
ἴχνος	37

K

καμπύλαι ὁμόλογοι	200
κέντρον πιέσεως	100
κινηματική	46
κινήσεις ἐν περιστροφῇ	343
κίνησης ἐπίπεδος	153
κίνησης μόνιμος	60, 65
κινητική	47
κλάδοι διαγράμματος (υῖριοι, μεταβαλλόμενοι, ἐπαναληπτικοί)	234
κλιμάκων ἐκλογή	266, 271
κλίμαξ	251, 257, 266, 271
κλίμαξ στρεβλή	253, 297
κλίμαξ τυρβώδους	314
κόμμα κινήτη	231
κορυφή μηδενικής γωνίας	209
κρίσιμος ἀριθμός REYNOLDS	312, 313
κυκλοφορία	28, 61, 168
κύλινδρος ἐντός ὁμοιομόρφου ροῆς	190, 192
κώδικες (δευαδικός κωδικοποιημένος εἰς δυαδικόν, καθαρῶς δυαδικός, <i>biquinaire</i> κ. λπ.)	230

Λ

λέξεις (ἀριθμ. ἀνάλυσις)	225
λόγος εἰδιῶν θερμότητων	290
λύσεις προσεγγιστικά	68

M

μαγνητικά τύμπανα, δίσκοι, ταινία	226
μεγέθη ἀσυνεχῇ	217
μεγέθη τοπιῶ	20
μεγέθη συνεχῇ	217
μεγέθη συνολικά	20
μέγεθος ὄντοτης	277
μέγεθος τυρβῶδες	314
μέθοδοι ἀναλητήσεως τῶν νόμων φυσικῆς ὁμοιότητος	263
ἀπ' εὐθείας ἀναλητήσεως	264, 265
διαστατικῆς ἀναλύσεως	264, 276, 286
μέθοδοι ἀναλύσεως εἰς γινόμενον τριγωνικῶν μητρῶν,	

Σελ.

ἀπαλοιφῆς ἢ τριγωνοποιήσεως, ταυτοχρόνων μετατοπίσεων, ὑπερχαλαρώσεως ἢ GAUSS- SOUTHWELL, χαλαρώσεως	221
μέθοδοι ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ	218
μέθοδοι πεπερασμένων διαφορῶν	219
μέθοδος POHLHAUSEN	352
μέθοδος PRAŠIL	160
μεταβατικότητος (ἀρχή)	205
μεταβληταὶ ἀδιάστατοι	338
μεταβληταὶ ἀνηγμέναι	262, 338, 339
μεταβληταὶ EULER	59, 62
μεταβληταὶ LAGRANGE	59, 62
μεταβολὴ πιέσεων ἰσόθερμος	103
μεταμεντρινὴ μαγνήτης	102
μεταμεντρον	102
μετασχηματισμός (ὁμοιότης)	257
μετασχηματισμός τῶν SCHWARTZ-CHRISTOFFEL	205, 207
μέτρησης παροχῆς ἐντός υλικοῦ ἀγωγῶν	119
μέτρησης ταχύτητος	120
μετρητὴς VENTURI	119
μέτρον σχετικόν	35
μητρῶα	39
μητρῶον διαστατικόν τῶν μεταβλητῶν	279, 285
μητρῶον διαστατικόν τῶν λύσεων	282, 285, 288
μητρῶον λιωδωτόν	221
μηχαναὶ ὑδραυλικαί	19
μηχανικὴ υλικοῦ	17
μνήμη ἀποθημεύσεως	225, 226
μνήμη ταχείας προσπελάσεως	225
μνήμη ὑπολογιστοῦ	222
μονώνυμα ἀδιάστατα	269, 279, 340
μονώνυμα	278, 282, 283, 289
μορφὴ γραμμικὴ	37, 69
μορφὴ πολυγραμμικὴ	40

N

νόμος διατηρήσεως τῆς μᾶζης	64, 107
νόμος καταστάσεως	83, 104, 108, 265
νόμοι ὁμοιότητος	265, 276, 286
νόμοι συμπεριφορᾶς ἢ τάσεων παραμορφώσεων	78, 79, 83, 104
νόρμα εὐκλείδειος, ἑρμητικὴ	38

O

ὁμογένεια	79, 265
ὁμοιότης γεωμετρικὴ	253
ὁμοιότης δυναμικὴ	253, 254

	Σελ.
ὁμοιότης κληματατῆ	253, 254
ὁμοιότης φυσική	251, 256, 265, 276
ὁμοιότητος ἐλευθερία	258
ὁμοίωμα ἀναλογιῶν, μαθηματικῶν, φυσικῶν	251, 252, 345
ὄντοτης	270, 276
ὄργανα ὑπολογιστῶν	223
διευθύνσεως	223, 227
εἰσόδου, ἐξόδου	223, 224
ἐπεξεργασίας ἢ ὑπολογισμοῦ	223, 227
μνήμης	223, 224
ὄριαυή στοιβάς	344, 347, 349, 352, 354
ὄριαυαί συνθημαί	345, 346, 348
Π αἰ P	
παράγωγος μοριαυή	61, 72
παράδοξα ὀρίων	21
παράδοξον STOKES	343
παράδοξα συμμετρίας	21
παράδοξον τοῦ D'ALEMBERT	188, 191, 196
παραλαγαί	228
παρεμβολή σώματος εἰς ροήν	128
παροχή μάλης	20
παροχή ὄγμου	168
πάχος μετατοπίσεως	352
πάχος ὀριαυῆς στοιβάδος	351
πεδίων δυναμικῶν	28
πεῖραμα REYNOLDS	310
περιοχή φυσική	256
περιστροφή	27
περιστροφή κληνῆσεως	60
περιστροφή ρευστοῦ	98
πηγή ἐν μέσῳ ὁμοιομόρφου ροῆς	186
πηγή αἰ φρέαρ	180
πηγή σημειαυή	175
πηδήματα	228
πίεσις	20
πίεσις στατική	99
ποσότης κληνῆσεως	48, 66, 126
πράξεις ἀριθμηταί	227, 232, 233
πράξεις διαμοσπῆς συνεχεῖας	228
πράξεις ἐπεξεργασίας, ὑπολογιστοῦ	227
πράξεις λογισαί	227, 234
πράξεις μεταφορᾶς	227
πρόβλημα DIRICHLET	157, 251
πρόβλημα NEUMANN	157, 251
πρόγραμμα ἐσωτερικῶν	223—

Σελ.

πρόγραμμα ὑπολογιστοῦ	224
πρόγραμμα SEQUENTIEL	228, 229
πρόγραμμα μὴ SEQUENTIEL	228, 229
προγραμματισμός	239
PROFILS	211
προώθησις δι' ἐυτονώσεως	129
πτῶσις πίεσεως	324

P

ρευστά	18
ρευστά ἀσυμπέστα ἰζώδη	88, 112, 124, 270, 269, 272
ρευστά ἀσυμπέστα τέλεια	88, 112, 124, 270, 273
ρευστά υλασσιμά	79, 265
ρευστά μὴ υλασσιμά	82
ρευστά νευτώνεια	86
ρευστά τέλεια βαροτροπιμά	89, 124
ρευστά τέλεια συμπίεστά	89, 113
ροή ἀστροβίλος	121, 321
ροή εἰς γωνίαν	170
ροή ἐκ πηγῆς παρουσίᾳ παρειᾶς	185
ροή μέ δυναμικὸν πεδίων ταχυτήτων	121
ροή μέ μιχροὺς ἀριθμοὺς REYNOLDS	338, 341
ροή μέ μεγάλους ἀριθμοὺς REYNOLDS	338, 341
ροή μέσῳ σχισμῆς	177
ροή μὴ μόνιμος	338
ροή μόνιμος	86, 323, 344
ροή ὁμοιόμορφος	169
ροή περίᾳ κυλίνδρου	190, 192
ροή μέ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν	270, 291
ροή στρωτή	310, 332, 344
ροή ὑπὸ πίεσιν	273
ροή τυρβώδης	309, 310, 313, 338
ροή τυρβώδης στάσιμος	316
ροπή ὀλισθαίνοντος διανύσματος	23

Σ

σημεῖα κρύστα	202
σημεῖα ὁμόλογα	200
στατιμὴ ρευστῶν	19
στοιβὰς ὀριαυή	320, 344
στροβιλισμός σημειαῖος	176
στροφεύς	24
στροφεύς διανομῆς ταχυτήτων	46
στροφεύς ἐπιταχύνσεων	47
στροφεύς ποσοτήτων μινήσεως	48
συνπληρωματικὴ ἐξίσωσις	109

	Σελ.
συναρτήσεις μετασχηματισμοῦ	200
συναρτήσεις προσθετικαί (συνεχεῖς, ἀσυνεχεῖς)	259, 261
συνάρτησις ἀναλυτικῇ μιγαδικῇ μεταβλητῇ	165
συνάρτησις ἀναλυτικῇ ὁλόμορφος	167
συνάρτησις ἀναλυτικῇ ὁμοιόμορφος	167
συνάρτησις λαπλασιανή	30
συνάρτησις ροῆς ἢ ροῦμῇ	155, 340
συνδιασπορά	314
συνδυασμοὶ ἀναλυτικῶν συναρτήσεων	180
συνθῆμαι CAUCHY-RIEMANN	165
συνθῆμαι εἰς τὰ ὅρια	67, 69, 109, 112, 345, 346, 348
συνθῆμαι ὁμοιότητος	259, 267, 268
σύνολον	31
συντελεστής ἰζώδους	86
συντελεστής πιέσεως	290
συντελεστής συνευτιμότητος	86, 328
συντελεστής τριβῆς	350
συντελεστής τυρβῶδους	316
συντεταγμέναι πλουριερναναί	24
σύστημα δυαδικῶν	230
σύστημα ἐξισώσεων ἀνηγμένον	340
σύστημα λύσεων θεμελιῶδες	281
συστήματα αὐτοπρογραμματισμοῦ	239
συστήματα δυνάμεων ὁμόλογα	254
σχέσεις BLASIUS	196
σχέσεις ὁμοιότητος	257, 259, 267, 268
σχέσεις TAYLOR	219
σωλῆνες περιστροφῆς	124
σωλὴν PITOT	120
σωλὴν ροῆς	60
σωματίδια ὁμόλογα	254
T	
τανυστῆς ἀνταλλοίωτος	36
τανυστῆς ἀντισυμμετρικῶς, συμμετρικῶς	42
τανυστῆς συναλλοίωτος	38
τανυστῆς τάσεων	53, 81
τανυστῆς ταχυτήτων παραμορφώσεως	75, 76
τάσις ἐφαπτομενικῇ ἢ ὀλισθήσεως ἢ διατμήσεως	52, 85
τάσις ἰζώδους	319
τάσις κάθετος	52
ταχύτης διανυσματικῇ	20
ταχύτης μέση	311
ταχύτης μιγαδικῇ	166
ταχύτης περιστροφῆς	47

	Σελ.
τροχιά σημείου	46, 59
τύπος τοῦ TORRICELLI	118
τύπος τῶν πέντε σημείων	220
Υ	
ὑποδοχεύς πληροφοριῶν	225
ὑπολογισταί	221, 222, 223
ὑποπρογράμματα	234, 238
ὕψος δυναμιῶν	118
ὕψος ἐνεργειαῶν	117
ὕψος κινήτων	118
ὕψος πιεζομετριῶν	118
Φ	
φρέαρ σημειαῶν	175
Χ	
χαρακτῆρες ἀλφαριθμητικοί	224
χαρακτηριστικὰ στρωτῆς ροῆς	310
χαρακτηριστικὰ τυρβώδους ροῆς	310, 313
χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις	108
χρόνοι ὁμολογοὶ (ἀντίστοιχοι)	254
χρόνος προσπελάσεως	225
χωρητικότης	
Ψ	
ψευδομονωνυμιαὶ μορφὴ	106
ψευδομονώνυμον	35
Ω	
ῶθησις φλεβός ἐπὶ ἐπιπέδου πλαυός	130
ῶθησις φλεβός ἐπὶ καμπύλης πλαυός	133



Τυπώθηκε στο
Ἑλληνικὸ Ἰνστιτούτο Ἐξυπηρέτησεως Πανεπιστημίων
Ἑγνατία 129
Θεσσαλονίκη

THE NATIONAL ARCHIVES
COLLECTIONS DIVISION

