

**ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΥΔΡΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΧΕΤΕΥΣΗΣ
ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΑΣ**

**WATER SUPPLY AND SEWAGE COMPANY OF
ATHENS**

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ, ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ
& ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΕΡΓΩΝ**

**NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
DEPARTMENT OF WATER RESOURCES, HYDRAULIC
& MARITIME ENGINEERING**

**ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΓΟ
ΕΚΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΠΟΠΤΕΙΑΣ ΚΑΙ
ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΥΔΡΕΥΣΗΣ ΤΗΣ
ΑΘΗΝΑΣ**

**RESEARCH PROJECT
UPDATING OF THE SUPERVISION AND
MANAGEMENT OF THE WATER
RESOURCE SYSTEM OF ATHENS**

**ΤΕΥΧΟΣ 9
ΚΑΣΤΑΛΙΑ: ΣΥΣΤΗΜΑ
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ**

**VOLUME 9
CASTALIA: A SYSTEM FOR THE
STOCHASTIC SIMULATION OF
HYDROLOGICAL VARIABLES**

ΣΥΝΤΑΞΗ: Α. ΕΥΣΤΡΑΤΙΑΔΗΣ, Δ. ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΗΣ

BY: Α. ΕΦΣΤΡΑΤΙΑΔΙΣ, Δ. ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΙΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ: Δ. ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΗΣ

SCIENTIFIC DIRECTOR: Δ. ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΙΣ

ΑΘΗΝΑ – ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2000

ATHENS – DECEMBER 2000

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πλαίσια του ερευνητικού έργου με τίτλο «*Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*», αναπτύχθηκε ένα μοντέλο στοχαστικής προσομοίωσης και πρόγνωσης υδρολογικών μεταβλητών. Ειδικότερα, αναπτύχθηκε ένα πρωτότυπο σχήμα προσομοίωσης πολλών μεταβλητών και δύο χρονικών επιπέδων, κατάλληλο αφενός για τη διατήρηση των ουσιωδών στατιστικών χαρακτηριστικών των ιστορικών χρονοσειρών και αφετέρου για την αναπαραγωγή χαρακτηριστικών ιδιαιτεροτήτων των υδρολογικών ανελίξεων, όπως της εμμονής και της περιοδικότητας. Το μαθηματικό μοντέλο υλοποιήθηκε μέσω του υπολογιστικού συστήματος *Κασταλία* και εφαρμόστηκε για την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών βροχόπτωσης, απορροής και εξάτμισης των ταμιευτήρων του υδροδοτικού συστήματος της Αθήνας.

ABSTRACT

Within the framework of the project entitled “*Modernization of the supervision and management of the water resources for water supply of Athens*”, a mathematical model was developed for the stochastic simulation and forecast of hydrologic variables. More specifically, an original two-level multivariate scheme was introduced, appropriate for preserving the essential statistics of the historical time series and reproducing characteristic peculiarities of hydrologic processes such as persistence and periodicity. The mathematical model was implemented in a computer package, named *Castalia*, and it was applied for the generation of synthetic rainfall, runoff and evaporation time series for the reservoirs of the Athens water supply system.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	iii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Αντικείμενο του τεύχους – Ιστορικό	1
1.2 Διάρθρωση του τεύχους.....	1
2 Θεωρητικό υπόβαθρο	2
2.1 Εισαγωγή	2
2.2 Μεθοδολογία.....	2
2.2.1 Συνοπτική περιγραφή του σχήματος προσομοίωσης	2
2.2.2 Στατιστικές παράμετροι που διατηρούνται	4
2.2.3 Προσομοίωση της εμμονής	4
2.3 Σχήμα γέννησης μεταβλητών υψηλού επιπέδου.....	5
2.3.1 Θεωρητική συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς.....	5
2.3.2 Μοντέλο συμμετρικών κινούμενων μέσων όρων.....	9
2.3.3 Εκτίμηση παραμέτρων	11
2.3.4 Πολυμεταβλητό σχήμα.....	12
2.3.5 Αλγόριθμος γέννησης ετήσιων χρονοσειρών	13
2.4 Σχήμα γέννησης μεταβλητών χαμηλού επιπέδου	14
2.4.1 Περιοδικό μοντέλο αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης	14
2.4.2 Αλγόριθμος γέννησης μηνιαίων χρονοσειρών	15
2.5 Τεχνική αποσύνθεσης των μητρώων συνδιασπορών.....	15
2.5.1 Τυπικές μέθοδοι αντιμετώπισης	15
2.5.2 Χειρισμός του προβλήματος με μεθόδους βελτιστοποίησης	16
2.6 Επιμερισμός ετήσιων συνθετικών χρονοσειρών.....	19
2.6.1 Γενικά.....	19
2.6.2 Διαδικασία γραμμικής αναγωγής	20
2.6.3 Διατήρηση στατιστικών παραμέτρων.....	21
2.6.4 Αλγόριθμος γέννησης συνθετικών χρονοσειρών με επιμερισμό.....	22
2.7 Παραγωγή τυχαίων αριθμών.....	22
2.7.1 Επιλογή της συνάρτησης κατανομής των τυχαίων μεταβλητών	22
2.7.2 Η κατανομή γάμα τριών παραμέτρων	22
2.7.3 Γεννήτριες τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα	23
2.7.4 Προσαρμογή για παραγωγή αρνητικών ασυμμετριών	26
2.8 Μοντέλο στοχαστικής πρόγνωσης ετήσιων μεταβλητών	26
3 Σχεδιασμός υπολογιστικού συστήματος	28

3.1	Γενική περιγραφή.....	28
3.2	Δομή του συστήματος.....	28
3.2.1	Υποσύστημα ανάκτησης και αποθήκευσης δεδομένων	29
3.2.2	Υποσύστημα οργάνωσης δεδομένων	29
3.2.3	Υποσύστημα μαθηματικών επεξεργασιών	30
3.2.4	Υποσύστημα γέννησης χρονοσειρών	30
3.2.5	Υποσύστημα παρουσίασης αποτελεσμάτων	30
3.3	Σχεδιασμός τοπικής βάσης δεδομένων.....	30
3.3.1	Μοντέλο οντοτήτων-συσχετισμών.....	31
3.3.2	Πίνακας υδρολογικών σεναρίων	31
3.3.3	Πίνακας μεταβλητών.....	31
3.3.4	Πίνακας ιστορικών χρονοσειρών	32
4	Οδηγίες χρήσης	33
4.1	Κύρια οθόνη της εφαρμογής.....	33
4.2	Δημιουργία νέου σεναρίου.....	33
4.3	Ορισμός υδρολογικών μεταβλητών	33
4.4	Επιλογή χρονοσειράς από τη βάση δεδομένων	34
4.5	Εισαγωγή σεναρίου.....	35
4.6	Παράμετροι υδρολογικών μεταβλητών	36
4.7	Παράμετροι υδρολογικού σεναρίου.....	38
4.8	Επισκόπηση στατιστικών χαρακτηριστικών.....	41
4.9	Επισκόπηση παραμέτρων ετήσιου μοντέλου.....	41
4.10	Επισκόπηση παραμέτρων μηνιαίου μοντέλου	42
4.11	Επισκόπηση χρονοσειρών.....	42
4.12	Στοχαστική πρόγνωση	43
4.13	Γραφική παράσταση ετήσιου αυτοσυσχετογράμματος	44
4.14	Γραφική παράσταση φάσματος συντελεστών α	45
4.15	Γραφική απεικόνιση στατιστικών χαρακτηριστικών.....	46
4.16	Γραφική απεικόνιση χρονοσειρών.....	49
4.17	Γραφική απεικόνιση σεναρίων πρόγνωσης	49
5	Εφαρμογές	51
5.1	Ιστορικά δεδομένα.....	51
5.2	Παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών μήκους 2000 ετών	51
5.2.1	Εκτίμηση της παραμέτρου εμμονής.....	52
5.2.2	Συνθετικές χρονοσειρές.....	52
5.2.3	Σύγκριση στατιστικών χαρακτηριστικών.....	53

5.3	Σενάρια στοχαστικής πρόγνωσης	57
	Αναφορές	58
	Παράρτημα: Πίνακες βάσης δεδομένων	61

1 Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο του τεύχους – Ιστορικό

Το παρόν τεύχος συντάχθηκε στα πλαίσια του ερευνητικού έργου με τίτλο «Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας» που ανατέθηκε από την ΕΥΔΑΠ (με την από 26/5/1999 απόφαση του Διοικητικού Συμβουλίου της) σε ερευνητική ομάδα του Τομέα Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων του ΕΜΠ με επιστημονικό υπεύθυνο τον επίκουρο καθηγητή ΕΜΠ Δ. Κουτσογιάννη.

Το τεύχος εντάσσεται στο υποσύστημα 3 (*Ανάπτυξη συστήματος εκτίμησης και πρόγνωσης των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*), το οποίο έχει ως κύριο στόχο την ανάπτυξη ενός μοντέλου στοχαστικής προσομοίωσης και πρόγνωσης των υδρομετεωρολογικών διεργασιών του υδροδοτικού συστήματος της Αθήνας, και συγκεκριμένα των απορροών, βροχοπτώσεων και εξατμίσεων των ταμιευτήρων. Το μοντέλο υλοποιήθηκε μέσω του υπολογιστικού συστήματος *Κασταλία*, ο σχεδιασμός της οποίας έγινε βάσει των προδιαγραφών της σχετικής ανάλυσης απαιτήσεων (Καραβοκυρός κ.ά., 2000).

Οι μεθοδολογίες που περιγράφονται στο τεύχος είναι σχεδόν στο σύνολό τους πρωτότυπες και έχουν δημοσιευτεί πρόσφατα σε κορυφαία επιστημονικά περιοδικά (Koutsoyiannis and Manetas, 1996· Koutsoyiannis, 1999· Koutsoyiannis, 2000). Υπολογιστικά πακέτα στοχαστικής προσομοίωσης είχαν υλοποιηθεί και στα πλαίσια προηγούμενων έργων (Κουτσογιάννης, 1992· Μανέτας, 1994· Κουτσογιάννης και Μανέτας, 1995· Καραβοκυρός κ.ά., 1999). Ωστόσο, το λογισμικό *Κασταλία*, αποτελεί ένα νέο υπολογιστικό σύστημα και ως προς το θεωρητικό υπόβαθρό του αλλά και ως προς το υπολογιστικές διαδικασίες του, και σχεδιάστηκε εξ αρχής έτσι ώστε να ανταποκριθεί με επάρκεια τόσο στον υπολογιστικό φόρτο των μεθοδολογιών που υιοθετήθηκαν όσο και στις υψηλές απαιτήσεις λειτουργικότητας και φιλικότητας προς τον χρήστη.

1.2 Διάρθρωση του τεύχους

Το παρόν τεύχος περιλαμβάνει, εκτός από την εισαγωγή (Κεφάλαιο 1), τέσσερα κεφάλαια και ένα παράρτημα. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται το μαθηματικό υπόβαθρο στο οποίο βασίζεται το μοντέλο στοχαστικής προσομοίωσης και πρόγνωσης. Συγκεκριμένα, στα πρώτα δύο υποκεφάλαια αναλύονται ορισμένες θεμελιώδεις έννοιες και συνοψίζεται η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται. Στη συνέχεια του κεφαλαίου γίνεται μια αναλυτική και εξειδικευμένη παρουσίαση του μοντέλου στοχαστικής προσομοίωσης. Στο Κεφάλαιο 3 αναφέρονται ορισμένα βασικά στοιχεία που σχετίζονται με τον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό του υπολογιστικού συστήματος *Κασταλία* και της βάσης δεδομένων που το υποστηρίζει. Στο Κεφάλαιο 4 παρατίθενται οι αναλυτικές οδηγίες χρήσης της *Κασταλίας*, οι οποίες είναι προσβάσιμες και από το ίδιο το πρόγραμμα. Στο Κεφάλαιο 5 περιγράφεται η εφαρμογή του μοντέλου για την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών εισροών και απωλειών των ταμιευτήρων, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στη συνέχεια από το μοντέλο προσομοίωσης και βελτιστοποίησης του υδροδοτικού συστήματος. Τέλος, στο Παράρτημα παρουσιάζεται ο σχεδιασμός των πεδίων των πινάκων της βάσης δεδομένων.

2 Θεωρητικό υπόβαθρο

2.1 Εισαγωγή

Η αδυναμία περιγραφής των υδρολογικών διεργασιών με χρήση συμβατικών μεθόδων προσδιοριστικής υδρολογικής ανάλυσης οδήγησε στην εναλλακτική θεώρησή τους ως τυχαίων μεταβλητών και την αντιμετώπισή τους με τη θεωρία πιθανοτήτων. Η πιθανοτική θεώρηση μπορεί να δώσει απαντήσεις ως προς τη χρονική πρόγνωση των φαινομένων, ποσοτικοποιώντας την αβεβαιότητα γύρω από την εξέλιξή τους.

Η θεωρία των *στοχαστικών ανελίξεων* έχει αποδειχθεί διεθνώς ως η πληρέστερη μέθοδος ανάλυσης των υδρολογικών διεργασιών. Βάσει αυτής έχει αναπτυχθεί ένα ευρύ φάσμα μοντέλων *στοχαστικής προσομοίωσης*, με τα οποία περιγράφεται μαθηματικά η χωρική και χρονική αλληλεξάρτηση των υδρολογικών μεταβλητών. Η χωρική εξάρτηση οφείλεται στην κοινή υδρολογική διάταξη γειτονικών θέσεων ή λεκανών, ενώ η χρονική εξάρτηση οφείλεται στη διαπιστωμένη εμμονή όλων των υδρολογικών (και γενικότερα των γεωφυσικών) διεργασιών. Οι παράμετροι κάθε τέτοιου μοντέλου εκτιμώνται συναρτήσει των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος και κατά συνέπεια είναι άμεσα εξαρτημένες από την ποιότητα της διατιθέμενης υδρολογικής πληροφορίας.

Τα στοχαστικά μοντέλα χρησιμοποιούνται για τη γέννηση μεγάλου μήκους *συνθετικών χρονοσειρών*, οι οποίες αναπαράγουν τη στατιστική δομή και τα στατιστικά χαρακτηριστικά των ιστορικών δεδομένων. Η χρήση συνθετικών χρονοσειρών κρίνεται απόλυτα αναγκαία για τον ορθολογικό σχεδιασμό και διαχείριση ενός συστήματος υδατικών πόρων αφού με τον τρόπο αυτό:

- α) δεν τίθενται περιορισμοί ως προς το χρονικό ορίζοντα μελέτης, αφού δεν χρησιμοποιείται το ίδιο το ιστορικό δείγμα (το οποίο κατά κανόνα έχει μικρό μήκος) αλλά τα στατιστικά χαρακτηριστικά του.
- β) είναι εφικτή η εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων ως προς την αξιοπιστία του συστήματος για ακραία αποδεκτά επίπεδα πιθανότητας (π.χ. 1%).
- γ) διερευνάται η απόκριση του συστήματος για ευρύ φάσμα ισοπίθανων υδροκλιματικών σεναρίων.

Η στοχαστική προσομοίωση εφαρμόζεται είτε με τυχαίες αρχικές συνθήκες είτε με αναφορά στις επίκαιρες τιμές των υδρολογικών μεταβλητών. Η δεύτερη περίπτωση προϋποθέτει τη διατύπωση του στοχαστικού μοντέλου υπό μορφή *πρόγνωσης*, η οποία αποσκοπεί στη μελέτη του υδροσυστήματος για σχετικά βραχύ χρονικό ορίζοντα.

2.2 Μεθοδολογία

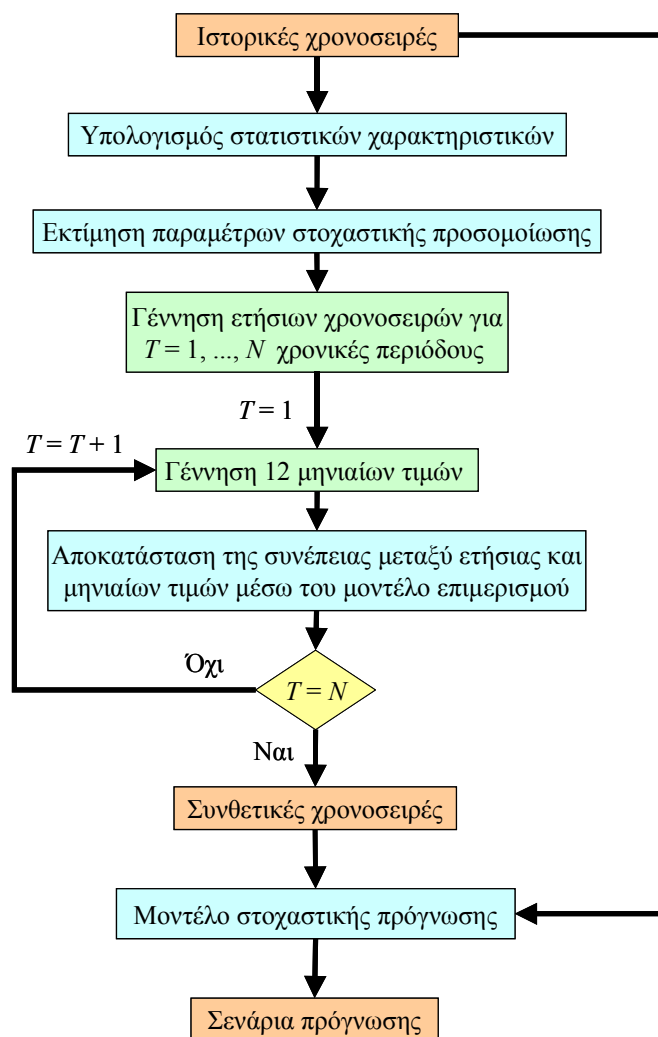
2.2.1 Συνοπτική περιγραφή του σχήματος προσομοίωσης

Για τη στοχαστική προσομοίωση των υδρολογικών μεταβλητών υιοθετήθηκε ένα συνδυαστικό σχήμα πολλών μεταβλητών και δύο διαδοχικών χρονικών επιπέδων ή φάσεων. Κάθε μεταβλητή αναφέρεται είτε σε διαφορετικές διεργασίες (π.χ. βροχή και απορροή) είτε στη ίδια διεργασία, η οποία πραγματοποιείται σε διαφορετικές θέσεις (απορροή Μόρνου και Ευήνου). Με την πολυμεταβλητή ανάλυση επιτυγχάνεται η ταυτόχρονη προσομοίωση των υδρολογικών διεργασιών του

υδροσυστήματος, οι οποίες συσχετίζονται εξαιτίας της κοινής υδρολογικής διαίτας της ευρύτερης περιοχής της Στερεάς Ελλάδας.

Το πρώτο επίπεδο (υψηλό επίπεδο) αναφέρεται σε χρονοσειρές αραιής χρονικής κλίμακας, η ισοδιάσταση της οποίας καλείται *περίοδος*, ενώ το δεύτερο επίπεδο (χαμηλό επίπεδο) αναφέρεται σε πυκνότερη χρονική κλίμακα. Ως υψηλή χρονική κλίμακα επιλέγεται η ετήσια, για την οποία οι χρονοσειρές παρουσιάζουν *στάσιμο* (stationary) χαρακτήρα. Η επιλογή της χαμηλότερης κλίμακας εξαρτάται από το είδος του προβλήματος που εξετάζεται. Κατά κανόνα, σε προβλήματα στρατηγικής διαχείρισης υδατικών πόρων θεωρείται επαρκής η χρήση μηνιαίου βήματος, χωρίς να αποκλείονται μικρότερα βήματα (π.χ. εβδομαδιαία). Στο εξής συμβατικά θα θεωρείται η χρήση μηνιαίας χρονικής κλίμακας για τις μεταβλητές χαμηλού επιπέδου. Η ανάλυση δύο χρονικών επιπέδων επιτρέπει τη χρήση διαφορετικών μοντέλων για την προσομοίωση των ετήσιων και μηνιαίων υδρολογικών διεργασιών, με στόχο την ακριβέστερη περιγραφή των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών τους, τα οποία είναι η *εμμονή* (βλ. 2.2.3) και η *περιοδικότητα* αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, για τις ετήσιες χρονοσειρές εισάγεται μια γενικευμένη συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς, στην οποία προσαρμόζεται ένα σχήμα κινούμενων μέσων όρων (βλ. 2.3), ενώ για τις μηνιαίες χρονοσειρές υιοθετείται ένα μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης πρώτης τάξης (βλ. 2.4).

Το διάγραμμα ροής του αλγόριθμου στοχαστικής προσομοίωσης απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1. Αρχικά υπολογίζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος και βάσει αυτών εκτιμώνται οι παράμετροι του ετήσιου και του μηνιαίου μοντέλου αντίστοιχα. Στη συνέχεια παράγονται οι ετήσιες χρονοσειρές, για όλο το μήκος της περιόδου προσομοίωσης. Η γέννηση των μηνιαίων χρονοσειρών πραγματοποιείται βήμα προς βήμα. Για κάθε έτος, παράγονται 12 μηνιαίες τιμές χωρίς αναφορά στη γνωστή ετήσια τιμή και ακολούθως καλείται το μοντέλο *επιμερισμού* (disaggregation) και εφαρμόζει μια διαδικασία αναγωγής (βλ. 2.6), με την οποία εξασφαλίζεται η συμβατότητα μεταξύ των χρονοσειρών των δύο επιπέδων. Εφόσον απαιτείται η παραγωγή σεναρίων στοχαστικής πρόγνωσης, καλείται το αντίστοιχο μοντέλο, στοιχεία εισόδου του οποίου είναι τόσο οι συνθετικές όσο και οι ιστορικές χρονοσειρές.



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα ροής του μεθοδολογικού σχήματος στοχαστικής προσομοίωσης-πρόγνωσης.

2.2.2 Στατιστικές παράμετροι που διατηρούνται

Ανεξάρτητα από τη χρονική κλίμακα και το επίπεδο προσομοίωσης, το σύνολο των στατιστικών παραμέτρων των μεταβλητών του μοντέλου που χρησιμοποιούνται και τελικά αναπαράγονται στις συνθετικές χρονοσειρές αποτελείται από τις ακόλουθες ομάδες:

α) παράμετροι των *περιθώριων συναρτήσεων κατανομής* κάθε μεταβλητής, και συγκεκριμένα μέσες τιμές, διασπορές και συντελεστές ασυμμετρίας.

β) παράμετροι των *από κοινού συναρτήσεων κατανομής* των μεταβλητών, και συγκεκριμένα συντελεστές αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης και συντελεστές ετεροσυσχέτισης μηδενικής τάξης.

Οι παραπάνω συνιστούν το ελάχιστο σύνολο ουσιωδών στατιστικών παραμέτρων που κατά κανόνα απαιτούνται στη στοχαστική προσομοίωση (Matalas and Wallis, 1976). Για την εκτίμηση των δειγματικών τιμών των παραμέτρων εφαρμόζονται τυπικές στατιστικές επεξεργασίες πάνω στις ιστορικές υδρολογικές χρονοσειρές (Κουτσογιάννης, 1996).

2.2.3 Προσομοίωση της εμμονής

Η υδρολογική εμμονή, γνωστή και ως φαινόμενο Hurst ή φαινόμενο Ιωσήφ, αναφέρεται στην φυσική τάση ομαδοποίησης των περιόδων χαμηλής υδροφορίας και των περιόδων υψηλής υδροφορίας

αντίστοιχα (Hurst, 1951). Με την εμμονή σχετίζονται οι παρατεταμένες ξηρασίες και οι πάσης φύσεως κλιματικές αλλαγές, οι οποίες εμφανίζονται ως τυχαίες διαταραχές στα μέσα στατιστικά χαρακτηριστικά των υδρομετεωρολογικών μεταβλητών, σε διάφορες χρονικές κλίμακες.

Για την προσομοίωση των ξηρασιών ακολουθούνται διεθνώς δύο ειδών προσεγγίσεις. Η πρώτη συνίσταται στη μαθηματική περιγραφή του φαινομένου της εμμονής και την εισαγωγή του στα στοχαστικά μοντέλα ως παραμέτρου (συντελεστής Hurst), της οποίας ο ορισμός και ο τρόπος εκτίμησης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκος. Μοντέλα προσομοίωσης της εμμονής έχουν αναπτυχθεί από τους Mandelbrot (1965), Mandelbrot and Wallis (1969), Mejia et al. (1972) και άλλους. Η δεύτερη προσέγγιση συνίσταται στην υιοθέτηση απλούστερων σχημάτων στοχαστικής προσομοίωσης, με τεχνητή επέμβαση στις στατιστικές τους παραμέτρους (π.χ. μείωση της μέσης ετήσιας βροχόπτωσης ή απορροής). Κατά κανόνα, οι τιμές των παραμέτρων προκύπτουν μετά από διερεύνηση υποθετικών σεναρίων κλιματικής αλλαγής, για τα οποία έχουν αναπτυχθεί μοντέλα προσομοίωσης που βασίζονται στις φυσικές διεργασίες του υδρολογικού κύκλου. Η προσέγγιση αυτή είναι λιγότερο αξιόπιστη τόσο επειδή βασίζεται σε αυθαίρετες υποθέσεις όσο και εξαιτίας του χαμηλού βαθμού επαλήθευσης των κλιματικών μοντέλων.

Στην παρούσα εργασία, αντί για τη χρήση πολύπλοκων στοχαστικών μοντέλων υιοθετήθηκε μια απλούστερη όσο και πρωτότυπη προσέγγιση, η οποία μπορεί να αναπαράγει ετήσιες χρονοσειρές με εμμονή ή όχι. Συγκεκριμένα, αναπτύχθηκε μια γενικευμένη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, στην εισάγονται παράμετροι που χαρακτηρίζουν την εμμονή. Η συνάρτηση παρουσιάζει τη χαρακτηριστική μορφή ουράς, η οποία αντιπροσωπεύει τη μακρά μνήμη των υδρολογικών διεργασιών. Η μακρά μνήμη συνδέεται άμεσα με το φαινόμενο της εμμονής και αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για τον ορθολογικό σχεδιασμό και διαχείριση συστημάτων υδραυλικών έργων (Bras and Rodriguez-Iturbe, 1993). Ωστόσο, τα μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούνται στα πλέον διαδεδομένα προγράμματα επιχειρησιακής υδρολογίας, είναι βραχείας μνήμης και κατά συνέπεια δεν ενδείκνυνται για την προσομοίωση της εμμονής. Η μαθηματική περιγραφή και τεκμηρίωση της μεθοδολογίας που ακολουθείται αναπτύσσονται στο εδάφιο 2.3.1.

2.3 Σχήμα γέννησης μεταβλητών υψηλού επιπέδου

2.3.1 Θεωρητική συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς

Έστω η στοχαστική ανέλιξη X_i , για κάθε χρονικό βήμα (π.χ. έτος) i , με αυτοσυνδιασπορά:

$$\gamma_j = \text{Cov} [X_i, X_{i+j}] \quad (1)$$

Οι μεταβλητές X_i θεωρούνται στάσιμες, με μέση τιμή $\mu_x = E[X_i]$, διασπορά γ_0 και συντελεστή ασυμμετρίας $\xi_x = E[(X_i - \mu_x)^3] / \gamma_0$. Η *στασιμότητα* της στοχαστικής ανέλιξης υποδηλώνει ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά διατηρούνται αμετάβλητα με την πάροδο του χρόνου. Εάν είναι γνωστά τα μ_x , γ_0 και ξ_x μπορεί να οριστεί η συνάρτηση κατανομής του δείγματος, ενώ αν είναι γνωστές οι αυτοσυσχετίσεις γ_j μπορεί να προσδιοριστεί η στοχαστική δομή της ανέλιξης. Τα γ_j εκτιμώνται με βάση το ιστορικό δείγμα x_1, \dots, x_n , μήκους n , μέσω της εμπειρικής συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς:

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-j} (x_{i+j} - \mu_x)(x_i - \mu_x) \quad (2)$$

Επειδή το μήκος του ιστορικού δείγματος είναι μικρό, μόνο οι πρώτες τιμές των αυτοσυνδιασπορών μπορούν να εκτιμηθούν με αποδεκτή ακρίβεια. Επιπλέον, το γεγονός ότι αυτές φθίνουν με το βήμα j μπορεί να οδηγήσει στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι τα γ_j μηδενίζονται μετά από κάποιο βήμα m , και

κατά συνέπεια η μνήμη της ανέλιξης X_i είναι μικρή, ενώ αυτό μπορεί να μην ισχύει στην πραγματικότητα. Οι λόγοι:

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \quad (3)$$

είναι γνωστοί ως *συντελεστές αυτοσυσχέτισης* και λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$. Η γραφική απεικόνιση των ρ_j συναρτήσεων του χρονικού βήματος j ονομάζεται *αυτοσυσχετόγραμμα*.

Τα τυπικά στοχαστικά μοντέλα ανήκουν στην κατηγορία των μοντέλων τύπου ARMA(p, q) και μπορούν να θεωρηθούν ως βραχείας μνήμης, με αυτοσυσχετόγραμμα το οποίο φθίνει εκθετικά με το χρόνο (Box and Jenkins 1970). Για μεγάλα βήματα j , η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς μιας ARMA διαδικασίας προσεγγίζεται από μια σχέση της μορφής:

$$\gamma_j = a \varphi^j \quad (4)$$

όπου a, φ παράμετροι, με $0 \leq \varphi \leq 1$. Η σχέση (4) προϋποθέτει θετικές αυτοσυνδιασπορές γ_j , κάτι που κατά κανόνα ισχύει για υδρολογικές διεργασίες όπως οι ετήσιες βροχοπτώσεις και απορροές.

Όπως ήδη αναφέρθηκε στο εδάφιο 2.2.3, τα μοντέλα τύπου ARMA είναι ακατάλληλα για την προσομοίωση του φαινομένου της μακροπρόθεσμης εμμονής των υδρολογικών διεργασιών. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκαν τα μοντέλα *κλασματικού γκαουσιανού θορύβου* (FGN, Fractional Gaussian Noise), τα οποία προσομοιώνουν μακράς μνήμης διεργασίες με εξίσωση αυτοσυνδιασποράς της μορφής (Bras and Rodriguez-Iturbe, 1993):

$$\gamma_j = \frac{1}{2} \gamma_0 [(j-1)^{2H} - 2j^{2H} + (j+1)^{2H}] \quad (5)$$

όπου H είναι ο συντελεστής Hurst, με τιμές $0.5 \leq H \leq 1$. Με εξαίρεση τους πρώτους όρους της, η ακολουθία (5) προσεγγίζεται από την εξίσωση δύναμης:

$$\gamma_j = \gamma_0 (1 - 1/\beta) (1 - 1/2\beta) j^{-1/\beta} \quad (6)$$

όπου $\beta = 1 / [2(1 - H)] \geq 1$.

Οι αυτοσυνδιασπορές τόσο των ARMA όσο και των FGN διεργασιών για μεγάλα βήματα μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις της γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς (Koutsoyiannis, 2000):

$$\gamma_j = \gamma_0 [1 + \kappa \beta j]^{-1/\beta} \quad (7)$$

όπου κ, β παράμετροι. Συγκεκριμένα, για $\beta = 0$ και με εφαρμογή του κανόνα de l' Hospital, η εξίσωση (7) γίνεται:

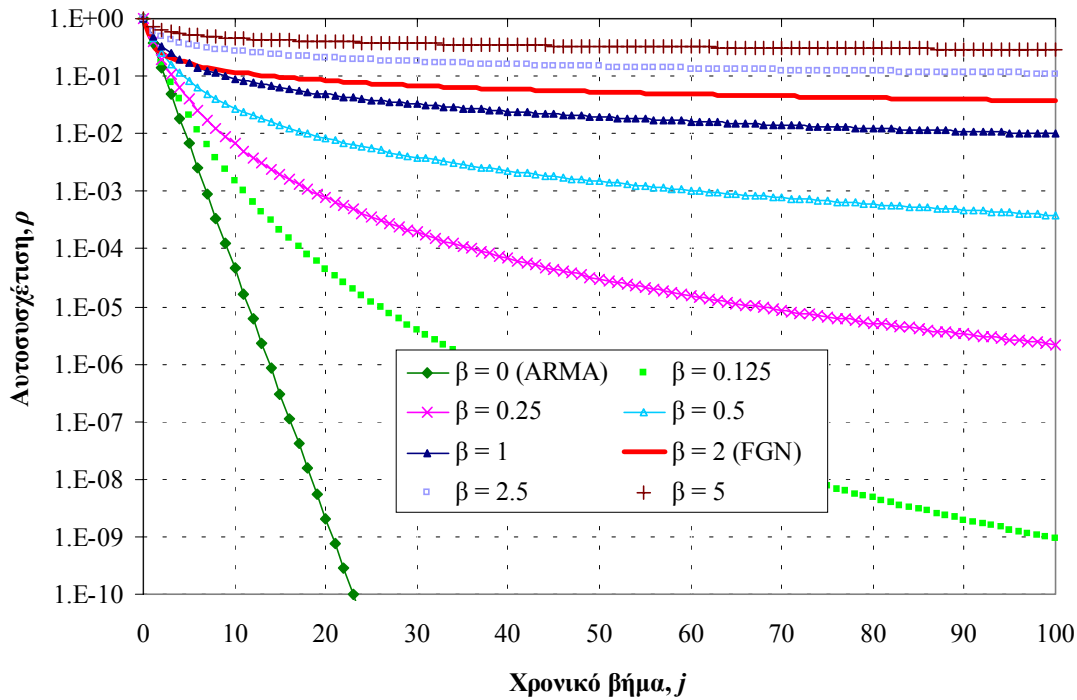
$$\gamma_j = \gamma_0 \exp(-\kappa j) \quad (8)$$

η οποία είναι ταυτόσημη με την (4) εφόσον τεθεί $\kappa = -\ln \varphi$. Ομοίως, για $\beta > 1$ η (7) προσεγγίζει με μεγάλη ακρίβεια την (6) εφόσον τεθεί

$$\kappa = \frac{1}{\beta (1 - 1/\beta) (1 - 1/2\beta)^\beta} =: \kappa_0 \quad (9)$$

Για $\kappa \neq \kappa_0$ ή για τιμές της παραμέτρου β στο διάστημα $(0, 1)$ η (7) εξακολουθεί να αποτελεί μια εφικτή δομή αυτοσυνδιασποράς για διεργασίες διαφορετικού τύπου από τις ARMA και FGN. Στο Σχήμα 2.2 απεικονίζεται η (7) για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , θεωρώντας $\kappa = 1$. Για $\beta = 0$, η (7) ταυτίζεται με μια ανέλιξη τύπου ARMA, η αυτοσυνδιασπορά της οποίας φθίνει μετά από ελάχιστα βήματα και σε ημιλογαριθμικό διάγραμμα παρίσταται με μια ευθεία γραμμή. Με συμπαγή γραμμή απεικονίζεται η εξίσωση για την ειδική περίπτωση $\kappa = \kappa_0$ και $\beta = 2$, οπότε ταυτίζεται με μια μακράς μνήμης FGN

διαδικασία. Είναι προφανές ότι όσο αυξάνει η τιμή της παραμέτρου β , τόσο αυξάνει η "μνήμη" της στοχαστικής ανέλιξης. Κατά συνέπεια, η παράμετρος β είναι αντίστοιχη του συντελεστή Hurst.



Σχήμα 2.2: Παραδείγματα εφαρμογής της γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς (7) για $\kappa = 1$ και για διάφορες τιμές της παραμέτρου εμμονής, β .

Οι παράμετροι της γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς είναι τουλάχιστον τρεις, δηλαδή η διασπορά γ_0 , ο συντελεστής εμμονής β και ο συντελεστής σχήματος, κ . Ωστόσο, η συνάρτηση μπορεί να περιέχει περισσότερες παραμέτρους, εφόσον θεωρηθεί ότι διατηρούνται οι $m + 1$ πρώτοι όροι της αυτοσυσχέτισης του δείγματος. Στην περίπτωση αυτή οι συντελεστές $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ λαμβάνουν αυθαίρετες τιμές (π.χ. τιμές που εκτιμώνται από την εμπειρική συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς), ενώ οι υπόλοιποι όροι της ακολουθίας εκτιμώνται μέσω της (7), θέτοντας:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{1}{\beta m} \left[\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_m} \right)^\beta - 1 \right] & \beta < \infty \\ \frac{1}{m} \ln \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_m} \right) & \beta = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται η συνέχεια της ακολουθίας για $j = m$.

Κατά κανόνα, χρησιμοποιούνται μόνο οι δύο ουσιώδεις παράμετροι (δηλαδή τα β και κ), η εκτίμηση των οποίων βασίζεται στην εμπειρική συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς. Οι δυνατές περιπτώσεις που προκύπτουν είναι:

α) Βέλτιστη προσαρμογή του θεωρητικού στο εμπειρικό αυτοσυσχετόγραμμα

Στην περίπτωση αυτή ορίζεται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$f(\beta, \kappa) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\hat{\rho}_j - \rho_j)^2 \quad (11)$$

Η f εκφράζει τη μέση τετραγωνική απόκλιση μεταξύ του δειγματικού και του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που ορίζεται από την (11) είναι μη γραμμικό

ως προς τις μεταβλητές ελέγχου β , κ και επιλύεται με ειδικούς αλγόριθμους, π.χ. με τη μέθοδο Nelder-Mead (Press et al. 1992).

β) Διατήρηση του δειγματικού συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1^{ns} τάξης

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η ίδια αντικειμενική συνάρτηση, με προσθήκη του περιορισμού:

$$\rho_1 = \hat{\rho}_1 \quad (12)$$

Η συνθήκη $\rho_1 = \hat{\rho}_1$ εισάγεται στη (11) ως όρος ποινής, δηλαδή:

$$f(\beta, \kappa) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\hat{\rho}_j - \rho_j)^2 + M (\hat{\rho}_1 - \rho_1)^2 \quad (13)$$

όπου M ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός. Για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης εφαρμόζεται η ίδια μέθοδος με την περίπτωση (α).

γ) Διατήρηση των δειγματικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης 1^{ns} και 2^{ns} τάξης

Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα δεν έχει βαθμούς ελευθερίας και οι παράμετροι β , κ προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των μη γραμμικών εξισώσεων:

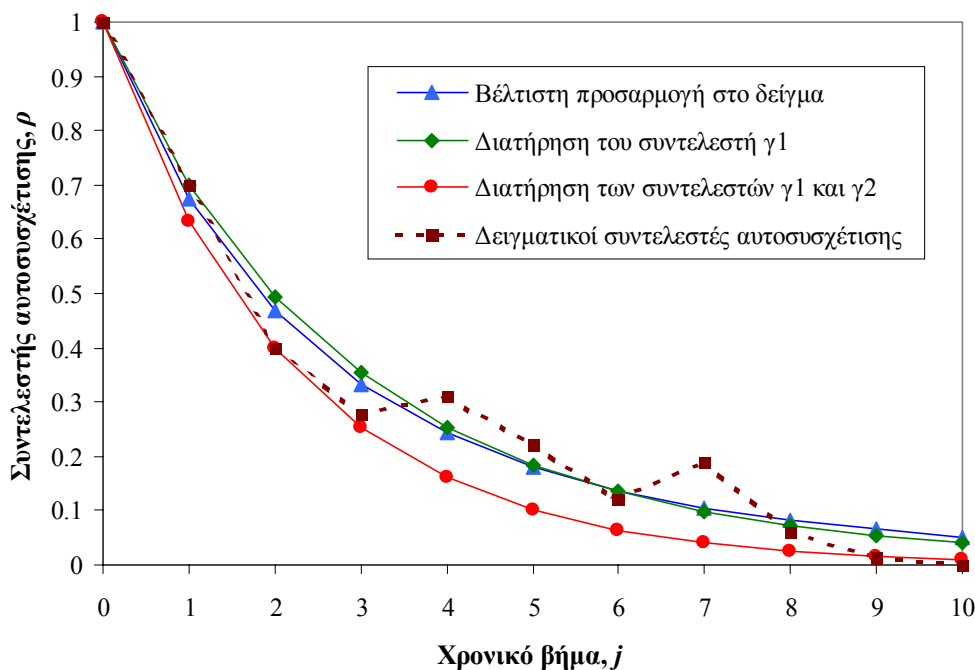
$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_0 [1 + \kappa \beta]^{-1/\beta} \\ \gamma_2 &= \gamma_0 [1 + 2 \kappa \beta]^{-1/\beta} \end{aligned} \quad (14)$$

Αποδεικνύεται ότι το σύστημα των εξισώσεων (14) έχει ακριβή λύση για ορισμένο εύρος τιμών των γ_0 , γ_1 και γ_2 , διαφορετικά η εκτιμήτρια της λύσης του συστήματος προκύπτει μέσω βελτιστοποίησης, όμοια με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

δ) Αυθαίρετη εκτίμηση της παραμέτρου β

Οι μέθοδοι (α), (β) και (γ) είναι κατάλληλες για την εκτίμηση των παραμέτρων της θεωρητικής συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς εφόσον μπορεί να υπολογιστεί ένα αξιόπιστο δειγματικό αυτοσυσχετόγραμμα. Αυτό προϋποθέτει την ύπαρξη μεγάλου μήκους ιστορικών δειγμάτων, κάτι που στην πράξη είναι εξαιρετικά σπάνιο. Για το λόγο αυτό είναι προτιμότερη η επιλογή της τιμής της παραμέτρου εμμονής με βάση τις ανάγκες του εκάστοτε προβλήματος που εξετάζεται. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση (7) έχει έναν μόνο βαθμό ελευθερίας, την παράμετρο σχήματος κ , η οποία μπορεί να είτε να υπολογιστεί αναλυτικά (θεωρώντας ότι διατηρείται ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1^{ns} τάξης) είτε μέσω βελτιστοποίησης, ελαχιστοποιώντας τη μέση απόκλιση του θεωρητικού από το δειγματικό αυτοσυσχετόγραμμα.

Στο Σχήμα 2.3 απεικονίζονται οι περιπτώσεις (α), (β) και (γ) για ένα υποθετικό δειγματικό αυτοσυσχετόγραμμα. Το αυτοσυσχετόγραμμα έχει ακανόνιστη μορφή, κάτι που είναι σύνηθες όταν το δείγμα από το οποίο υπολογίζεται έχει μικρό μήκος. Τα διαγράμματα που προκύπτουν για τις περιπτώσεις (α) και (β) σχεδόν ταυτίζονται, ενώ στην περίπτωση (γ) το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα φθίνει γρηγορότερα από τα δύο προηγούμενα (η βελτιστοποιημένη τιμή του συντελεστή β τείνει στο μηδέν). Σημειώνεται ότι στο παράδειγμα δεν υπάρχει ακριβής λύση για το (γ), δηλαδή δεν υπάρχουν κ και β τέτοια που να ικανοποιούν ακριβώς το σύστημα των εξισώσεων (14).



Σχήμα 2.3: Παραδείγματα εκτίμησης των παραμέτρων β και κ με βάση τις τιμές του δειγματικού αυτοσυσχετογράμματος.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι μια οποιαδήποτε ακολουθία γ_j ($j = 0, \dots, s$) συνιστά μια εφικτή συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς εφόσον το $s \times s$ μητρώο \mathbf{h} με στοιχεία

$$h_{ij} = \gamma_{|i-j|} \quad (15)$$

είναι θετικά ημιορισμένο, δηλαδή για κάθε διάνυσμα ξ ισχύει:

$$\xi \mathbf{h} \xi^T \geq 0 \quad (16)$$

Παρόμοιος έλεγχος εφικτότητας μπορεί να γίνει μέσω του *φάσματος ισχύος* (power spectrum) των γ_j , το οποίο πρέπει να είναι θετικό σε όλα τα σημεία ω . Αποδεικνύεται ότι (Papoulis, 1991) το φάσμα ισχύος κάθε στοχαστικής ανέλιξης ισούται με τον *διακριτό μετασχηματισμό Fourier* (DFT, Discrete Fourier Transform) της ακολουθίας των αυτοσυνδιασπορών γ_j , το οποίο υπολογίζεται ως (Bloomfield, 1976):

$$s_\gamma(\omega) = 2\gamma_0 + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(2\pi j \omega) \quad (17)$$

Λόγω συμμετρίας ($\gamma_j = \gamma_{-j}$) ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι:

$$\gamma_j = \int_0^{1/2} s_\gamma(\omega) \cos(2\pi j \omega) d\omega \quad (18)$$

Το φάσμα ισχύος χρησιμοποιείται για το προσδιορισμό των παραμέτρων του σχήματος γέννησης των μεταβλητών X_i , το οποίο περιγράφεται στη συνέχεια του υποκεφαλαίου.

2.3.2 Μοντέλο συμμετρικών κινούμενων μέσων όρων

Αποδεικνύεται ότι (Box and Jenkins, 1970) κάθε ανέλιξη X_i με αυτοσυνδιασπορά γ_j μπορεί να γραφεί ως ένα σταθμισμένο άθροισμα άπειρων τυχαίων μεταβλητών V_i σύμφωνα με τη σχέση:

$$X_i = \sum_{j=-\infty}^0 \alpha_{-j} V_{i+j} = \dots + \alpha_2 V_{i-2} + \alpha_1 V_{i-1} + \alpha_0 V_i \quad (19)$$

όπου τα α_j είναι αριθμητικοί συντελεστές, οι οποίοι μπορούν να προσδιοριστούν από την ακολουθία των γ_j ($j = 0, 1, 2, \dots$). Οι συντελεστές α_j συνδέονται με τα γ_j μέσω της εξίσωσης:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \alpha_{i+j} = \gamma_i \quad (20)$$

Στην πράξη το πλήθος των V_i , οι οποίες είναι γνωστές και ως *μεταβλητές ανανέωσης* (innovations), δεν είναι άπειρο, δεδομένου ότι α) ο αριθμός των μεταβλητών X_i που παράγονται μέσω του σχήματος γέννησης (19) έχει πάντοτε πεπερασμένο μήκος και β) τα α_{-j} τείνουν να μηδενιστούν όσο αυξάνει το βήμα j , και κατά συνέπεια για κάθε $j > -s$ όλοι οι όροι της ακολουθίας (19) μπορούν να απαλειφθούν. Σημειώνεται ότι το μέγεθος του s είναι πολύ μεγαλύτερο από την τιμή των τάξεων p, q μιας ARMA ανάλυσης. Με βάση τα παραπάνω, οι σχέσεις (19) και (20) μπορούν να προσεγγιστούν από τις:

$$X_i = \sum_{j=-s}^0 \alpha_{-j} V_{i+j} = \alpha_s V_{i-s} + \dots + \alpha_2 V_{i-2} + \alpha_1 V_{i-1} + \alpha_0 V_i \quad (21)$$

$$\sum_{j=0}^{s-i} \alpha_j \alpha_{i+j} = \gamma_i \quad (22)$$

Μια εναλλακτική διατύπωση του σχήματος (19) προκύπτει με τη θεώρηση της συνθήκης $\alpha_j = \alpha_{-j}$. Όμοια με προηγουμένως, αν θεωρηθεί ότι $\alpha_j = 0$ για κάθε $|j| > s$, η ακολουθία προσεγγίζεται από την εξίσωση (Koutsoyiannis 2000):

$$X_i = \sum_{j=-s}^s \alpha_{|j|} V_{i+j} = \alpha_s V_{i-s} + \dots + \alpha_1 V_{i-1} + \alpha_0 V_i + \alpha_1 V_{i+1} + \dots + \alpha_s V_{i+s} \quad (23)$$

Η (23) ορίζει το σχήμα γέννησης *συμμετρικών κινούμενων μέσων όρων* (SMA, Symmetric Moving Average), το οποίο χρησιμοποιείται για τη στοχαστική προσομοίωση των ετήσιων υδρολογικών διεργασιών. Οι συντελεστές α_j συνδέονται με τα γ_j μέσω της εξίσωσης:

$$\sum_{j=-s}^{s-i} \alpha_{|j|} \alpha_{|i+j|} = \gamma_i \quad (24)$$

ή ισοδύναμα:

$$\gamma_i = \begin{cases} \sum_{j=0}^i \alpha_j \alpha_{i-j} + 2 \sum_{j=i+1}^s \alpha_j \alpha_{j-i} & i = 0 \dots s \\ \sum_{j=i-s}^s \alpha_j \alpha_{i-j} & i = s+1 \dots 2s \end{cases} \quad (25)$$

Δεδομένου ότι το πλήθος των παραμέτρων α_j είναι ίσο με $s + 1$, το μοντέλο (23) διατηρεί τους πρώτους $s + 1$ όρους της ακολουθίας των αυτοσυνδιασπορών γ_j , θεωρώντας ότι και οι επόμενοι όροι μέχρι $j = 2s$ είναι μη μηδενικοί.

Εκτός από τους συντελεστές α_i , οι οποίοι σχετίζονται την αυτοσυνδιασπορά της ανάλυσης, απαιτείται ο προσδιορισμός δύο επιπλέον παραμέτρων του μοντέλου (23), οι οποίες σχετίζονται με τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος. Πρόκειται για τη μέση τιμή $\mu_V = E[V_i]$ και το συντελεστή ασυμμετρίας $\zeta_V = E[(V_i - \mu_V)^3]$ των τυχαίων μεταβλητών V_i , που υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\left(\alpha_0 + 2 \sum_{j=1}^s \alpha_j \right) \mu_V = \mu_X \quad (26)$$

$$\left(\alpha_0^3 + 2 \sum_{j=1}^s \alpha_j^3 \right) \xi_V = \xi_X \gamma_0^{3/2} \quad (27)$$

Οι διασπορές των V_i είναι εξ ορισμού ίσες με τη μονάδα, δηλαδή:

$$\text{Var} [V_i] = 1 \quad (28)$$

Το σχήμα γέννησης (23) διατηρεί τόσο τις στατιστικές παραμέτρους του ιστορικού δείγματος (μέση τιμή μ_x , διασπορά γ_0 και ασυμμετρία ξ_x) όσο και τις αυτοσυνδιασπορές του, μέχρι τάξεως $s + 1$. Κατά συνέπεια θεωρείται κατάλληλο για την προσομοίωση μεταβλητών που χαρακτηρίζονται από φαινόμενα εμμονής, όπως είναι κατ' εξοχήν οι υδρολογικές.

2.3.3 Εκτίμηση παραμέτρων

Η (24) ορίζει ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων ως προς τις άγνωστες παραμέτρους α_j . Το σύστημα μπορεί να επιλυθεί είτε αναλυτικά (υπό προϋποθέσεις) είτε αριθμητικά.

Αναλυτικός υπολογισμός

Αποδεικνύεται ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier $s_a(\omega)$ της ακολουθίας των συντελεστών α_j συνδέεται με το φάσμα ισχύος $s_j(\omega)$ της ακολουθίας των αυτοσυνδιασπορών γ_j με τη σχέση:

$$s_a(\omega) = \sqrt{2s_j(\omega)} \quad (29)$$

Κατά συνέπεια, η ακολουθία α_j είναι γνωστή εφόσον είναι γνωστή η αυτοσυνδιασπορά της ανέλιξης. Τότε, οι συντελεστές α_j μπορούν να υπολογιστούν με τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$\alpha_j = \int_0^{1/2} s_a(\omega) \cos(2\pi j \omega) d\omega \quad (30)$$

Εφόσον το μήκος s είναι δύναμη του 2, η επίλυση του ολοκληρώματος (30) μπορεί να πραγματοποιηθεί με τον *ταχύ μετασχηματισμό Fourier* (FFT, Fast Fourier Transform). Σε διαφορετική περίπτωση, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται αριθμητικά, βάσει του τύπου:

$$\alpha_j = \omega_1 \left[\frac{s_a(0)}{2} + \sum_{i=1}^s s_a(\omega_i) \cos(2\pi j \omega_i) \right] \quad (31)$$

όπου:

$$\omega_j = \frac{j}{2s+1} \quad (32)$$

Αριθμητική εκτίμηση

Η (24) μπορεί να γραφεί σε μητρική μορφή ως:

$$\mathbf{p} \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\theta} \quad (33)$$

όπου $\boldsymbol{\zeta} = [\alpha_0, \dots, \alpha_s]$, $\boldsymbol{\theta} = [\gamma_0, \dots, \gamma_s]^T$ και \mathbf{p} μητρώο διαστάσεων $(s+1) \times (s+1)$ με στοιχεία:

$$p_{ij} = \frac{1}{2} [\alpha_{|j-i|} + \alpha_{j+i-2} U(j-2) U(s-i-j+1)] \quad (34)$$

όπου $U(x)$ η *συνάρτηση Heaviside*, με τιμές $U(x) = 1$ για $x \geq 0$ και $U(x) = 0$ για $x < 0$.

Κάθε μεμονωμένη εξίσωση του συστήματος (33) περιέχει δεύτερης τάξης γινόμενα των άγνωστων παραμέτρων α_j . Κατά συνέπεια, το σύστημα έχει μία ή περισσότερες λύσεις εφόσον το μητρώο \mathbf{h} (βλ. 2.3.1) είναι θετικά ορισμένο (δηλαδή έχει οριστεί μια εφικτή ακολουθία αυτοσυνδιασπορών γ_j), ενώ διαφορετικά δεν έχει λύση. Εφόσον το σύστημα είναι αδύνατο, θα πρέπει να εντοπιστεί η λύση εκείνη η οποία προσεγγίζει καλύτερα τη μητρική εξίσωση (33). Για το σκοπό αυτό, η επίλυση του συστήματος διατυπώνεται ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$f(\zeta) = f(\alpha_0, \dots, \alpha_s) = \|\mathbf{p} \zeta - \boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda (\mathbf{p}_1 \zeta - \gamma_0)^2 \quad (35)$$

όπου \mathbf{p}_1 η πρώτη γραμμή του μητρώου \mathbf{p} , λ συντελεστής βάρους και $\|\cdot\|$ τελεστής που υποδηλώνει την Ευκλείδεια νόρμα ενός διάνυσματος. Ο δεύτερος όρος της αντικειμενικής συνάρτησης εκφράζει την τετραγωνική απόκλιση της εκτιμημένης από την δειγματική διασπορά γ_0 . Αν και η συνθήκη διατήρησης της διασποράς περιλαμβάνεται στον πρώτο όρο της συνάρτησης, είναι σκόπιμο να αντιμετωπίζεται και ξεχωριστά, με την εισαγωγή του συντελεστή βάρους λ , τάξης μεγέθους του 10^3 .

Για την ελαχιστοποίηση της (35) εφαρμόζεται η αριθμητική μέθοδος των *συζυγών κλίσεων* (Press et al., 1992), για την οποία απαιτείται η αναλυτική διατύπωση των μερικών παραγώγων της συνάρτησης $f(\zeta)$. Αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{df(\zeta)}{d\zeta} = 4(\mathbf{p} \zeta - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{p} + 4\lambda (\mathbf{p}_1 \zeta - \gamma_0) \mathbf{p}_1 \quad (36)$$

Η μέθοδος, η οποία είναι επαναληπτική, απαιτεί τον ορισμό μιας εφικτής τιμής εκκίνησης $\zeta^{[0]}$. Μια τέτοια αρχική λύση είναι το διάνυσμα $[\sqrt{\gamma_0}, 0, \dots, 0]^T$. Εάν στην k επανάληψη είναι γνωστό το μητρώο $\zeta^{[k]}$, τότε στην επόμενη προσδιορίζεται ένα μητρώο $\zeta^{[k+1]}$, με το οποίο βελτιώνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η εξίσωση υπολογισμού του $\zeta^{[k+1]}$ είναι:

$$\zeta^{[k+1]} = \zeta^{[k]} - \left[\beta^{[k+1]} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^{[k]} + \gamma^{[k]} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^{[k-1]} \right] \quad (37)$$

όπου:

$$\gamma^{[k]} = \frac{\left| \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^{[k]} \right|^2}{\left| \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^{[k-1]} \right|^2} \quad (38)$$

και $\beta^{[k+1]}$ παράμετρος που υπολογίζεται μέσω ενός αλγόριθμου μονοδιάστατης βελτιστοποίησης. Ο αλγόριθμος δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο πρώτο βήμα ($k = 0$), διότι είναι άγνωστη η τιμή της παραγώγου $(df/d\zeta)^{[-1]}$, οπότε τίθεται $\gamma^{[0]} = 0$.

2.3.4 Πολυμεταβλητό σχήμα

Το μοντέλο SMA μπορεί εύκολα να γενικευτεί για την προσομοίωση πολλών μεταβλητών ταυτόχρονα (Koutsoyiannis, 2000). Έστω $\mathbf{X}_i = (X_i^1, \dots, X_i^n)^T$ διάνυσμα n στοχαστικά εξαρτημένων μεταβλητών κατά τη χρονική περίοδο i , κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί ο δείκτης l . Θεωρούμε το $n \times n$ μητρώο ετεροσυνδιασπορών \mathbf{g} με στοιχεία:

$$g^{lk} = \text{Cov} [X_i^l, X_i^k] \quad (39)$$

Κάθε μεταβλητή X_i^l διατυπώνεται ως σταθμισμένο άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών V_i^l , δηλαδή:

$$X_i^l = \sum_{r=-s}^s \alpha_{|r|}^l V_{i+r}^l \quad (40)$$

Οι μεταβλητές V_i^l μπορούν να θεωρηθούν χρονικά ασυσχέτιστες, δηλαδή:

$$\text{Cov} [V_i^l, V_m^k] = 0, \text{ για κάθε } i \neq m \quad (41)$$

αλλά χωρικά συσχετισμένες σε κάθε χρονικό βήμα i , δηλαδή:

$$c^{lk} = \text{Cov} [V_i^l, V_i^k] \neq 0, \text{ για κάθε } i \quad (42)$$

Τα μητρώα ετεροσυνδιασπορών \mathbf{g} και \mathbf{c} συνδέονται με τη σχέση:

$$c^{lk} = \frac{g^{lk}}{\sum_{r=-s}^s \alpha_{|r|}^l \alpha_{|r|}^k} \quad (43)$$

Εάν είναι γνωστό το μητρώο \mathbf{c} , κάθε διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών $\mathbf{V}_i = (V_i^1, \dots, V_i^n)^T$ μπορεί να παραχθεί μέσω του απλού πολυμεταβλητού σχήματος:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{b} \mathbf{W}_i \quad (44)$$

όπου $\mathbf{W}_i = (W_i^1, \dots, W_i^n)^T$ διάνυσμα n στοχαστικά ανεξάρτητων μεταβλητών, με μοναδιαία διασπορά, και \mathbf{b} μητρώο διαστάσεων $n \times n$ τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{b} \mathbf{b}^T = \mathbf{c} \quad (45)$$

Η μεθοδολογία προσδιορισμού του μητρώου \mathbf{b} , μέσω αποσύνθεσης του μητρώου \mathbf{c} , περιγράφεται αναλυτικά στο υποκεφάλαιο 2.5. Τέλος, οι μέσες τιμές και οι συντελεστές ασυμμετρίας των τυχαίων μεταβλητών W_i^l εκτιμώνται βάσει των εξισώσεων:

$$\boldsymbol{\mu}_W = \mathbf{b}^{-1} \boldsymbol{\mu}_V, \quad \boldsymbol{\xi}_W = (\mathbf{b}^{(3)})^{-1} \boldsymbol{\xi}_V \quad (46)$$

όπου $\mathbf{b}^{(3)}$ μητρώο που περιέχει τους κύβους των στοιχείων του \mathbf{b} .

2.3.5 Αλγόριθμος γέννησης ετήσιων χρονοσειρών

Για τη γέννηση συνθετικών χρονοσειρών με εφαρμογή του μοντέλου SMA εκτελούνται τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1ο: Για κάθε μεταβλητή l ($l = 1, \dots, n$) εκτιμώνται τα στατιστικά χαρακτηριστικά της, δηλαδή η μέση τιμή μ_x , η διασπορά γ_0 , ο συντελεστής ασυμμετρίας ξ_x και η ακολουθία των δειγματικών αυτοσυνδιασπορών $\hat{\gamma}_j$. Επιπλέον, υπολογίζεται το μητρώο των δειγματικών ετεροσυνδιασπορών \mathbf{g} .

Βήμα 2ο: Για κάθε μεταβλητή l προσδιορίζονται ο συντελεστής εμμονής β και η παράμετρος σχήματος κ της γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς (7).

Βήμα 3ο: Για κάθε μεταβλητή l εκτιμώνται οι τιμές των συντελεστών α_j του μοντέλου SMA.

Βήμα 4ο: Με βάση τις (26) και (27) εκτιμώνται τα στατιστικά χαρακτηριστικά μ_V και ξ_V των τυχαίων όρων V , και από την (43) υπολογίζονται τα στοιχεία του μητρώου ετεροσυνδιασπορών \mathbf{c} .

Βήμα 5ο: Το μητρώο \mathbf{b} υπολογίζεται με εφαρμογή του αλγόριθμου αποσύνθεσης του μητρώου \mathbf{c} .

Βήμα 6ο: Από την (46) εκτιμώνται τα στατιστικά χαρακτηριστικά των τυχαίων όρων W_i^l , με βάση τα οποία προσδιορίζονται οι παράμετροι της συνάρτησης κατανομής τους.

Βήμα 7ο: Εάν N το μήκος της συνθετικής χρονοσειράς, τότε σε κάθε χρονικό βήμα $i = 1, \dots, N$ παράγονται $n + 2s$ τυχαίες μεταβλητές W_i^l μέσω μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών. Στη συνέχεια, από την εξίσωση (44) υπολογίζονται οι μεταβλητές V_i^l του σχήματος γέννησης (40), το οποίο χρησιμοποιείται για την παραγωγή των συνθετικών τιμών X_i^l .

2.4 Σχήμα γέννησης μεταβλητών χαμηλού επιπέδου

2.4.1 Περιοδικό μοντέλο αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης

Έστω X_τ^l η τιμή της στοχαστικής ανέλιξης l ($l = 1, \dots, n$) κατά το χρονικό βήμα τ . Το διάνυσμα στήλη $\mathbf{X}_\tau = (X_\tau^1, \dots, X_\tau^n)^T$ αντιπροσωπεύει την πραγματοποίηση n στοχαστικά εξαρτημένων ανελιξεων κατά το βήμα τ . Η απλούστερη εξάρτηση ως προς τον χρόνο μπορεί να περιγραφεί με μια γραμμική σχέση της μορφής:

$$\mathbf{X}_\tau = \mathbf{a}_\tau \mathbf{X}_{\tau-1} + \mathbf{b}_\tau \mathbf{V}_\tau \quad (47)$$

όπου $\mathbf{a}_\tau, \mathbf{b}_\tau$ μητρώα παραμέτρων και \mathbf{V}_τ διάνυσμα στοχαστικά ανεξάρτητων μεταβλητών, με μοναδιαία διασπορά. Η (47) αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του πολυμεταβλητού περιοδικού μοντέλου αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης, PAR(1). Οι παράμετροι του μοντέλου προσδιορίζονται με βάση τα δειγματικά στατιστικά χαρακτηριστικά, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\mathbf{a}_\tau = \text{Cov} [\mathbf{X}_\tau, \mathbf{X}_{\tau-1}] \{ \text{Cov} [\mathbf{X}_{\tau-1}, \mathbf{X}_{\tau-1}] \}^{-1} \quad (48)$$

$$\mathbf{b}_\tau \mathbf{b}_\tau^T = \text{Cov} [\mathbf{X}_\tau, \mathbf{X}_\tau] - \mathbf{a}_\tau \text{Cov} [\mathbf{X}_{\tau-1}, \mathbf{X}_{\tau-1}] \mathbf{a}_\tau^T \quad (49)$$

όπου $\text{Cov} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ το μητρώο συνδιασπορών κάθε ζεύγους τυχόντων διανυσμάτων \mathbf{X} και \mathbf{Y} , δηλαδή:

$$\text{Cov} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = E \{ (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) (\mathbf{Y}^T - E[\mathbf{Y}^T]) \} \quad (50)$$

Το μητρώο \mathbf{b}_τ προκύπτει από την αποσύνθεση του γινομένου $\mathbf{c}_\tau = \mathbf{b}_\tau \mathbf{b}_\tau^T$, με βάση τη μεθοδολογία που περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 2.5.

Οι μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών \mathbf{V}_τ υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$E[\mathbf{V}_\tau] = \mathbf{b}_\tau^{-1} \{ E[\mathbf{X}_\tau] - \mathbf{a}_\tau E[\mathbf{X}_{\tau-1}] \} \quad (51)$$

Οι διασπορές των \mathbf{V}_τ είναι εξ ορισμού ίσες με τη μονάδα, δηλαδή:

$$\text{Var} [\mathbf{V}_\tau] = [1, \dots, 1]^T \quad (52)$$

Τέλος, οι τρίτες ροπές, οι οποίες εκφράζουν την ασυμμετρία των \mathbf{V}_τ , προκύπτουν από τη σχέση:

$$\mu_3[\mathbf{V}_\tau] = (\mathbf{b}_\tau^{(3)})^{-1} \{ \mu_3[\mathbf{X}_\tau] - \mu_3[\mathbf{a}_\tau \mathbf{X}_{\tau-1}] \} \quad (53)$$

όπου η παράσταση $\mu_3[\mathbf{X}]$ υποδηλώνει την τρίτη κεντρική ροπή κάθε τυχόντος διανύσματος \mathbf{X} , δηλαδή:

$$\mu_3[\mathbf{X}] = E \{ (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^3 \} \quad (54)$$

ενώ $\mathbf{b}^{(k)}$ είναι το μητρώο, τα στοιχεία του οποίου βρίσκονται υψωμένα στην k δύναμη.

Γενικά, οι εξισώσεις από τις οποίες εκτιμώνται οι παράμετροι του μοντέλου PAR(1) περιέχουν μόνο τις ροπές των μεταβλητών \mathbf{X}^l , είτε των περιθώριων τάξης 1 ως 3 είτε των από κοινού τάξης 2. Εξαιρέση αποτελεί η εξίσωση (53), η οποία περιέχει τις τρίτες ροπές ενός γραμμικού συνδυασμού των \mathbf{X}^l , οι οποίες δεν μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά, συναρτηθεί των τρίτων ροπών των \mathbf{X}^l . Ωστόσο, αν θεωρηθεί ότι το μητρώο \mathbf{a}_τ είναι διαγώνιο, τότε η (53) απλοποιείται και γράφεται:

$$\mu_3[\mathbf{V}_\tau] = (\mathbf{b}^{(3)})_\tau^{-1} \{ \mu_3[\mathbf{X}_\tau] - \mathbf{a}_\tau^{(3)} \mu_3[\mathbf{X}_{\tau-1}] \} \quad (55)$$

Στην περίπτωση αυτή, το μητρώο \mathbf{a}_τ δίνεται από τη σχέση (Matalas and Wallis, 1976):

$$\mathbf{a}_\tau = \text{diag} (\text{Cov} [\mathbf{X}_\tau^1, \mathbf{X}_{\tau-1}^1] / \text{Var} [\mathbf{X}_{\tau-1}^1], \dots, \text{Cov} [\mathbf{X}_\tau^n, \mathbf{X}_{\tau-1}^n] / \text{Var} [\mathbf{X}_{\tau-1}^n]) \quad (56)$$

και το σχήμα (47), το οποίο είναι γνωστό ως *μαρκοβιανό*, μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$X_\tau^l = a_\tau^l X_{\tau-1}^l + \sum_{k=1}^n b_\tau^{lk} V_\tau^k \quad (57)$$

Το μαρκοβιανό μοντέλο διατηρεί τις διασπορές, τις αυτοσυσχετίσεις πρώτης τάξης και τις ετεροσυσχετίσεις μηδενικής τάξης, ενώ δεν διατηρεί τις ετεροσυσχετίσεις πρώτης τάξης. Σημειώνεται ωστόσο ότι οι τελευταίες δεν ανήκουν στις ουσιώδεις στατιστικές παραμέτρους τις οποίες οφείλει να διατηρεί ένα στοχαστικό μοντέλο (βλ. 2.2.2).

2.4.2 Αλγόριθμος γέννησης μηνιαίων χρονοσειρών

Το μοντέλο PAR(1) χρησιμοποιείται για τη γέννηση μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών με βάση τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1ο: Για κάθε μεταβλητή l ($l = 1, \dots, n$) εκτιμώνται τα μηνιαία στατιστικά χαρακτηριστικά της, δηλαδή οι μέσες τιμές $E[X_\tau^l]$, οι τρίτες κεντρικές ροπές $\mu_3[X_\tau^l]$ και οι αυτοσυνδιασπορές πρώτης τάξης $\text{Cov}[X_\tau^l, X_{\tau-1}^l]$. Επιπλέον, υπολογίζονται τα μητρώα των μηνιαίων ετεροσυνδιασπορών $\text{Cov}[\mathbf{X}_\tau, \mathbf{X}_\tau]$.

Βήμα 2ο: Από τις εξισώσεις (56) και (49) προσδιορίζονται τα μητρώα \mathbf{a}_τ και \mathbf{b}_τ , για κάθε μήνα τ .

Βήμα 3ο: Από τις σχέσεις (51), (52) και (55) εκτιμώνται τα στατιστικά χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών \mathbf{V}_τ , και με βάση αυτά προσδιορίζονται οι παράμετροι της συνάρτησης κατανομής τους για κάθε μήνα τ .

Βήμα 4ο: Εάν T το μήκος της συνθετικής χρονοσειράς, τότε σε κάθε βήμα $\tau = 1, \dots, T$ παράγονται n τυχαίες μεταβλητές V_s^l μέσω μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών. Στη συνέχεια, με εφαρμογή της εξίσωσης (47), υπολογίζονται οι συνθετικές τιμές των μηνιαίων μεταβλητών X_τ^l .

2.5 Τεχνική αποσύνθεσης των μητρώων συνδιασπορών

2.5.1 Τυπικές μέθοδοι αντιμετώπισης

Στα πολυμεταβλητά στοχαστικά μοντέλα προκύπτει το πρόβλημα της εύρεσης ενός μητρώου \mathbf{b} τέτοιου ώστε να ικανοποιείται μια σχέση της μορφής:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} \mathbf{b}^T \quad (58)$$

Το μητρώο \mathbf{c} περιέχει τις συνδιασπορές (αυτοσυνδιασπορές και ετεροσυνδιασπορές) των μεταβλητών του μοντέλου. Στην περίπτωση του σχήματος SMA το μητρώο \mathbf{c} δίνεται από την (43), ενώ στην περίπτωση του σχήματος PAR(1) το μητρώο \mathbf{c} δίνεται από την (49), και είναι διαφορετικό για κάθε χρονικό βήμα τ .

Η εξίσωση (58), η οποία αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως *γκραμμιανή*, έχει άπειρες λύσεις εφόσον το μητρώο συνδιασπορών \mathbf{c} είναι θετικά ορισμένο. Στην περίπτωση αυτή μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο τυπικοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό ενός εφικτού μητρώου \mathbf{b} . Ο πρώτος και απλούστερος, ο οποίος είναι γνωστός και ως μέθοδος *τριγωνοποίησης Cholesky*, συνίσταται στην αποσύνθεση του \mathbf{c} σε έναν κάτω τριγωνικό μητρώο \mathbf{b} με στοιχεία:

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= 0 & (i < j) \\
b_{ij} &= \sqrt{c_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} (b_{jk})^2} & (i = j) \\
b_{ij} &= \frac{c_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} b_{ik}}{b_{jj}} & (i > j)
\end{aligned} \tag{59}$$

Ο δεύτερος αλγόριθμος, ο οποίος είναι πιο πολύπλοκος, συνίσταται στον υπολογισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του \mathbf{c} , και έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή ενός πλήρους μητρώου \mathbf{b} . Η τυπική μέθοδος υπολογισμού των ιδιοτιμών ενός πίνακα είναι η τεχνική *Jacobi* (Press et al., 1992).

Αν το μητρώο \mathbf{c} δεν είναι θετικά ορισμένο, τότε δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ούτε η μέθοδος Cholesky ούτε η μέθοδος Jacobi, διότι τότε προκύπτουν αρνητικά υπόρριζα στην αναδρομική σχέση (59) και αρνητικές ιδιοτιμές, αντίστοιχα. Ωστόσο, η υπόθεση θετικά ορισμένου μητρώου \mathbf{c} δεν ισχύει πάντοτε. Η κυριότερη αιτία είναι η εκτίμηση των συνδιασπορών από ιστορικά δείγματα τα οποία αναφέρονται σε διαφορετικές περιόδους μέτρησης και κατά συνέπεια δεν έχουν ίσο μήκος. Μία δεύτερη αιτία είναι η απλοποίηση του μητρώου \mathbf{a} , και η διατύπωσή του ως διαγώνιου (εξ. 56).

Εξάλλου, ο υπολογισμός του μητρώου \mathbf{b} με βάση τις μεθόδους που προαναφέρθηκαν έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό υπερβολικά μεγάλων συντελεστών ασυμμετρίας των τυχαίων μεταβλητών \mathbf{V} , αφού στις εξισώσεις (46) και (53) ή (55) ο όρος $\mathbf{b}^{(3)}$ μπορεί να περιέχει πολύ μικρές τιμές. Ωστόσο, κατά την εφαρμογή των μοντέλων στοχαστικής προσομοίωσης για τη γέννηση συνθετικών χρονοσειρών, δεν είναι δυνατή η παραγωγή τυχαίων όρων με τόσο υψηλές ασυμμετρίες, με αποτέλεσμα να υποεκτιμώνται οι ασυμμετρίες του ιστορικού δείγματος. Για τον χειρισμό του προβλήματος των ασυμμετριών στα πολυμεταβλητά σχήματα έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές, οι οποίες ωστόσο προϋποθέτουν αυθαίρετες επεμβάσεις στις παραμέτρους που εκτιμώνται βάσει των δειγματικών στατιστικών χαρακτηριστικών (Todini, 1980· Grygier and Stedinger, 1990· Bras and Rodriguez-Iturbe, 1993· Koutsoyiannis and Manetas, 1996).

2.5.2 Χειρισμός του προβλήματος με μεθόδους βελτιστοποίησης

Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στο εδάφιο 2.5.1, η επίλυση της εξίσωσης (58) είναι ένα πολυσύνθετο πρόβλημα, αφού είτε δεν υφίσταται αναλυτική λύση είτε η λύση που προκύπτει με τις τυπικές μεθόδους υπολογισμού οδηγούν σε υπερβολικά υψηλές τιμές ασυμμετρίας των μεταβλητών \mathbf{V} . Ο Koutsoyiannis (1999) ανέπτυξε μια μέθοδο, βάσει την οποίας μπορεί πάντοτε να υπολογιστεί ένα εφικτό μητρώο \mathbf{b} (ανεξάρτητα αν το μητρώο συνδιασπορών είναι ή όχι θετικά ορισμένο), τέτοιο ώστε να αναπαράγονται κατά τον βέλτιστο τρόπο τα στατιστικά χαρακτηριστικά του δείγματος. Η μέθοδος είναι κοινή είτε πρόκειται για το στάσιμο μοντέλο SMA είτε για το περιοδικό PAR(1), τα οποία χρησιμοποιούνται για τη στοχαστική προσομοίωση των ετήσιων και μηνιαίων μεταβλητών αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση υπολογίζεται μόνο ένα μητρώο \mathbf{b} , ενώ στη δεύτερη υπολογίζονται 12 τέτοια μητρώα (ένα για κάθε μήνα).

Αρχικά, εφαρμόζεται μια διαδικασία κανονικοποίησης του μητρώου \mathbf{b} καθώς και των υπόλοιπων μητρώων και διανυσμάτων που σχετίζονται με αυτό. Το μητρώο συνδιασπορών \mathbf{c} κανονικοποιείται εισάγοντας το διαγώνιο μητρώο:

$$\mathbf{h} = \text{diag} (1/\sqrt{c_{11}}, \dots, 1/\sqrt{c_{mm}}) \tag{60}$$

έτσι ώστε:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{h} \mathbf{c} \mathbf{h} \tag{61}$$

Με τον τρόπο αυτό, όλα τα διαγώνια στοιχεία του μητρώου \mathbf{c}' είναι μοναδιαία, ενώ τα μη διαγώνια στοιχεία λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$. Σημειώνεται ότι η τελευταία υπόθεση μπορεί να παραβιάζεται οριακά εφόσον το μητρώο \mathbf{a}_τ έχει οριστεί μέσω της (56). Εάν τεθεί:

$$\mathbf{b}' = \mathbf{h} \mathbf{b} \quad (62)$$

τότε η εξίσωση (58) γράφεται στην ισοδύναμη μορφή:

$$\mathbf{b}' \mathbf{b}'^T = \mathbf{c}' \quad (63)$$

Ορίζεται ακόμη το διάνυσμα:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\xi}_V \quad (64)$$

εφόσον το μητρώο \mathbf{b} αναφέρεται στο μοντέλο SMA ή

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{h}^{(3)} \{ \mu_3[\mathbf{X}_\tau] - \mathbf{a}_\tau^{(3)} \mu_3[\mathbf{X}_{\tau-1}] \} \quad (65)$$

εφόσον το \mathbf{b} αναφέρεται στο μοντέλο PAR(1). Τότε οι σχέσεις (46) και (53) γράφονται:

$$\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{b}'^{(3)})^{-1} \boldsymbol{\varphi} \quad (66)$$

Τα μητρώα \mathbf{h} και \mathbf{c}' καθώς και το διάνυσμα $\boldsymbol{\varphi}$ είναι γνωστά, ενώ τα $\boldsymbol{\xi}$ και \mathbf{b}' πρέπει να προσδιοριστούν. Δεδομένου ότι η εξίσωση (63) δεν έχει πάντοτε λύση, εισάγεται το μητρώο διαφορών:

$$\mathbf{d} = \mathbf{b}' \mathbf{b}'^T - \mathbf{c}' \quad (67)$$

τα στοιχεία του οποίου πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο μηδέν. Η απαίτηση εκφράζεται μαθηματικά ως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\text{minimize } \|\mathbf{d}\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 \quad (68)$$

όπου ο τελεστής $\|\cdot\|$ εκφράζει τη νόρμα του μητρώου \mathbf{d} .

Στο παραπάνω πρόβλημα, τίθεται η επιπρόσθετη απαίτηση όλα τα διαγώνια στοιχεία του \mathbf{d} να είναι ακριβώς μηδέν. Με τον τρόπο αυτό δίνεται μεγαλύτερο βάρος στη διατήρηση των διασπορών του δείγματος έναντι των συνδιασπορών. Εάν οριστεί το διαγώνιο μητρώο:

$$\mathbf{d}^* = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn}) \quad (69)$$

στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (68) εισάγεται ο περιορισμός:

$$\|\mathbf{d}^*\|^2 = 0 \quad (70)$$

Ένας δεύτερος περιορισμός του προβλήματος σχετίζεται με τους συντελεστές ασυμμετρίας $\boldsymbol{\xi}$ των τυχαίων μεταβλητών \mathbf{V} , οι οποίοι υπολογίζονται από την (66). Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στην 2.5.1, αυτοί θα πρέπει να διατηρούνται όσο το δυνατόν πιο χαμηλοί. Αποδεικνύεται ότι (Wallis et al., 1974; Kirby, 1974) ο συντελεστής ασυμμετρίας ενός πεπερασμένου δείγματος μήκους k περιορίζεται στο εύρος $-\xi_{ub}$ και ξ_{ub} , όπου

$$\xi_{ub} = \frac{k-2}{\sqrt{k-1}} \approx \sqrt{k} \quad (71)$$

Στην πραγματικότητα, μια ακολουθία συνθετικών τιμών έχει ασυμμετρία ίση με $\pm \xi_{ub}$ μόνο εφόσον όλοι οι όροι της πλην ενός είναι ίσοι. Είναι προφανές ότι μια τέτοια ακολουθία δεν μπορεί να είναι αποδεκτή, οπότε πρέπει να τεθεί μια μέγιστη ασυμμετρία $\xi_{acc} < \xi_{ub}$. Εφόσον ο περιορισμός ισχύει για όλες τις μεταβλητές V^l ($l = 1, \dots, n$) τίθεται η απαίτηση:

$$\max \{ |\xi^l|, l = 1, \dots, n \} \leq \xi_{acc} \quad (72)$$

Ο μαθηματικός χειρισμός του περιορισμού (72) σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ιδιαίτερα δυσχερές. Για το λόγο αυτό ορίζεται η νόρμα:

$$\|\xi\|_p = \left(\sum_{l=1}^n |\xi^l|^p \right)^{1/p} \quad (73)$$

η οποία τείνει στο μέγιστο των $|\xi^l|$ όταν $p \rightarrow \infty$. Κατά συνέπεια, η απαίτηση (72) αντικαθίσταται από τον μαθηματικό περιορισμό:

$$\|\xi\|_p^2 \leq \xi_{acc}^2 \quad (74)$$

όπου $\xi_{acc} = 0.5\xi_{ub}$. Η τιμή του p πρέπει να είναι ζυγός ακέραιος αριθμός, έτσι ώστε να μην απαιτείται η χρήση απόλυτων τιμών. Μετά από διερεύνηση, ο Koutsoyiannis (1999) προτείνει την τιμή $p = 8$. Οι περιορισμοί (70) και (74) εισάγονται στην αντικειμενική συνάρτηση (68) ως όροι ποινής. Η τελική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι:

$$\text{minimize } \theta^2(\mathbf{b}') = \frac{\lambda_1}{n^2} \|\mathbf{d}(\mathbf{b}')\|^2 + \frac{\lambda_2}{n} \|\mathbf{d}^*(\mathbf{b}')\|^2 + \lambda_3 \|\xi(\mathbf{b}')\|_p^2 \quad (75)$$

όπου λ_1 , λ_2 και λ_3 συντελεστές βάρους, με τυπικές τιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10^3$ και $\lambda_3 = 10^{-3}$ ως 10^{-6} . Οι συντελεστές λ_1 και λ_2 διαιρούνται με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων των μητρών \mathbf{d} και \mathbf{d}^* , τα οποία είναι n^2 και n αντίστοιχα.

Η διαδικασία βελτιστοποίησης απαιτεί τον προσδιορισμό μιας αναλυτικής έκφρασης της παραγώγου της συνάρτησης $\theta^2(\mathbf{b}')$. Το διαφορικό μιας μητρικής συνάρτησης $f(\mathbf{x})$, όπου \mathbf{x} τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων $n \times n$, γράφεται:

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{21}} & \frac{\partial f}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{nn}} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Αποδεικνύεται ότι οι μερικές παράγωγοι της θ^2 δίδονται από τις σχέσεις:

$$\frac{d\|\mathbf{d}\|^2}{d\mathbf{b}'} = 4\mathbf{d} \mathbf{b}' \quad (77)$$

$$\frac{d\|\mathbf{d}^*\|^2}{d\mathbf{b}'} = 4\mathbf{d}^* \mathbf{b}' \quad (78)$$

$$\frac{d\|\xi\|_p^2}{d\mathbf{b}'} = -6\|\xi\|_p^{2-p} \mathbf{w} \quad (79)$$

όπου \mathbf{w} μητρώο διαστάσεων $n \times n$ με στοιχεία:

$$w_{ij} = b'_{ij}{}^2 \xi_j \psi_i \quad (80)$$

και ψ διάνυσμα, το οποίο ορίζεται ως:

$$\psi = \{(\mathbf{b}'^{(3)})^{-1}\}^T \xi^{(p-1)} \quad (81)$$

Κατά συνέπεια, το μητρώο των μερικών παραγώγων της θ^2 ως προς τις άγνωστες παραμέτρους b'_{ij} είναι:

$$\frac{d\theta^2}{db'} = \frac{4\lambda_1}{n^2} \mathbf{d} \mathbf{b}' + \frac{4\lambda_2}{n} \mathbf{d}^* \mathbf{b}' - 6\lambda_3 \|\xi\|_p^{2-p} \mathbf{w} \quad (82)$$

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της (75) επιλύεται με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, για την οποία έχει γίνει ήδη αναφορά στο εδάφιο 2.3.3. Τονίζεται ότι η μέθοδος αυτή συγκλίνει στο κοντινότερο ακρότατο σε σχέση την αρχική λύση που επιλέγεται. Κατά συνέπεια, η εφαρμογή της μεθόδου δεν εγγυάται το εντοπισμό του ολικού ελαχίστου της συνάρτησης (75). Ένας απλός τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος, ο οποίος υιοθετήθηκε στο μοντέλο που αναπτύχθηκε, είναι η εκκίνηση του αλγορίθμου από πολλές, τυχαία επιλεγμένες αρχικές λύσεις, οπότε αυξάνει η πιθανότητα σύγκλισης στο ολικό βέλτιστο (Rubinstein, 1986).

2.6 Επιμερισμός ετήσιων συνθετικών χρονοσειρών

2.6.1 Γενικά

Έστω \mathbf{X}_{it} το διάνυσμα των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου (π.χ. μηνιαίες), οι οποίες αναφέρονται στο χρονικό βήμα τ της περιόδου i , και \mathbf{Z}_i το διάνυσμα μεταβλητών υψηλού επιπέδου (π.χ. ετήσιες), οι οποίες αναφέρονται στην περίοδο i . Είναι προφανές ότι τα διανύσματα \mathbf{X}_{it} και \mathbf{Z}_i θα πρέπει να ικανοποιούν την *αθροιστική ιδιότητα*:

$$\sum_{\tau=1}^s \mathbf{X}_{it} = \mathbf{Z}_i \quad (83)$$

όπου s το πλήθος των χρονικών βημάτων κάθε περιόδου.

Η συνθήκη (83) δεν είναι δυνατόν να ικανοποιείται αν η γέννηση των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου \mathbf{X}_{it} είναι ανεξάρτητη από τη γέννηση των μεταβλητών υψηλού επιπέδου \mathbf{Z}_i . Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί μοντέλα *επιμερισμού* (disaggregation), τα οποία ενσωματώνουν τις μεταβλητές \mathbf{X}_{it} και \mathbf{Z}_i σε μια ενιαία μαθηματική έκφραση που περιέχει όλες τις δυνατές συσχετίσεις τους (π.χ. Valencia and Schaake, 1973· Salas, 1993). Το πλήθος των παραμέτρων τέτοιου τύπου μοντέλων επιμερισμού είναι πολύ μεγάλο και η εκτίμησή τους καθίσταται ιδιαίτερα δυσχερής. Για τη μείωση των παραμέτρων, έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές, μια συνοπτική ανασκόπηση των οποίων κάνουν οι Koutsoyiannis and Manetas (1996).

Με βάση τα όσα έχουν αναφερθεί, η γέννηση των μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών γίνεται χωρίς καμία αναφορά στις ετήσιες χρονοσειρές. Μάλιστα, γίνεται χρήση διαφορετικών μοντέλων, έτσι ώστε να αναπαράγονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του κάθε χρονικού επιπέδου, δηλαδή η εμμονή των ετήσιων υδρολογικών διεργασιών και η περιοδικότητα των μηνιαίων. Για να πληρείται η αθροιστική ιδιότητα (83) εφαρμόζεται μια απλή διαδικασία αναγωγής, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός της μορφής:

$$\mathbf{X}_\tau = f(\tilde{\mathbf{X}}_\tau, \tilde{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}) \quad (84)$$

όπου $\tilde{\mathbf{X}}_\tau$ το διάνυσμα των μηνιαίων τιμών, οι οποίες έχουν προκύψει χωρίς αναφορά στην ετήσια τιμή \mathbf{Z} , $\tilde{\mathbf{Z}}$ το άθροισμα των $\tilde{\mathbf{X}}_\tau$ (γενικά ισχύει $\tilde{\mathbf{Z}} \neq \mathbf{Z}$) και $\boldsymbol{\theta}$ διάνυσμα το οποίο περιέχει τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος. Στο εξής, και για λόγους απλούστευσης, παραλείπεται ο δείκτης που αναφέρεται στη χρονική περίοδο i .

Οι Koutsoyiannis and Manetas (1996) έχουν αναπτύξει τρεις τύπους διαδικασιών αναγωγής, την αναλογική, τη γραμμική και την εκθετική. Η πρώτη, η οποία είναι η απλούστερη, μπορεί να χειριστεί μόνο ειδικές κατηγορίες προβλημάτων. Η τρίτη παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι απαιτεί μια επαναληπτική διαδικασία για την ικανοποίηση της αθροιστικής συνθήκης (83), και κατά συνέπεια είναι πιο αργή από τις υπόλοιπες. Στο μοντέλο που αναπτύχθηκε χρησιμοποιείται η γραμμική διαδικασία αναγωγής, η οποία παρουσιάζεται στο εδάφιο 2.6.2.

2.6.2 Διαδικασία γραμμικής αναγωγής

Έστω \tilde{X}_τ ($\tau = 1, \dots, s$) τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu_\tau = E[\tilde{X}_\tau]$ και μητρώο συνδιασπορών σ με στοιχεία $\sigma_{ij} = \text{Cov}[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = E[(\tilde{X}_i - \mu_i)(\tilde{X}_j - \mu_j)]$ και Z τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη της \tilde{X}_τ , με μέση τιμή:

$$\mu_Z = E[Z] = \sum_{\tau=1}^s \mu_\tau \quad (85)$$

και διασπορά:

$$\sigma_{ZZ} = \text{Var}[Z] = \sum_{\tau=1}^s \sum_{j=1}^s \sigma_{\tau j} \quad (86)$$

Αποδεικνύεται ότι οι μεταβλητές:

$$X_\tau = \tilde{X}_\tau + \lambda_\tau \left(Z - \sum_{\tau=1}^s \tilde{X}_\tau \right) \quad (87)$$

έχουν ίδιες μέσες τιμές και ίδιο μητρώο συνδιασπορών με τις \tilde{X}_τ εφόσον ισχύει:

$$\lambda_\tau = \frac{\sigma_{\tau Z}}{\sigma_{ZZ}} \quad (88)$$

όπου:

$$\sigma_{\tau Z} = \sum_{j=1}^s \sigma_{\tau j} \quad (89)$$

Με βάση την παραπάνω πρόταση ορίζεται η ακόλουθη διαδικασία γραμμικής συνόρθωσης (linear adjusting procedure) των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου:

$$X_\tau = \tilde{X}_\tau + \lambda_\tau (Z - \tilde{Z}) \quad (90)$$

όπου \tilde{Z} το άθροισμα όλων των μεταβλητών \tilde{X}_τ . Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται και σε άλλα μοντέλα επιμερισμού (Grygier and Stedinger, 1988· Lane and Flevert, 1990), με τη διαφορά ότι οι συντελεστές αναγωγής λ_τ δεν ορίζονται με βάση τις συνδιασπορές των μεταβλητών υψηλού επιπέδου αλλά θεωρούνται ανάλογοι των τυπικών αποκλίσεων των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου X_τ , δηλαδή:

$$\lambda_\tau = \frac{\sqrt{\sigma_{\tau\tau}}}{\sum_{j=1}^s \sqrt{\sigma_{jj}}} \quad (91)$$

Ωστόσο, ο ορισμός των λ_τ με βάση τη σχέση (88) είναι ο μόνος που διατηρεί το μητρώο συνδιασπορών σ . Η διαφορά των σχέσεων (88) και (91) είναι περισσότερο εμφανής όταν οι μεταβλητές X_τ είναι ανεξάρτητες, οπότε η (88) γράφεται:

$$\lambda_\tau = \frac{\sigma_{\tau\tau}}{\sum_{j=1}^s \sigma_{jj}} \quad (92)$$

και κατά συνέπεια οι συντελεστές αναγωγής είναι ανάλογοι των διασπορών και όχι των τυπικών αποκλίσεων.

Οι παράμετροι του μοντέλου είναι οι συνδιασπορές $\sigma_{\tau z}$ των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου με αυτές του υψηλού επιπέδου. Αφού το άθροισμά τους για όλα τα χρονικά βήματα τ ισούται με τη διασπορά σ_{ZZ} , ισχύει:

$$\sum_{\tau=1}^s \lambda_\tau = 1 \quad (93)$$

Επειδή στο PAR(1) μόνο οι αυτοσυσχετίσεις πρώτης τάξης είναι παράμετροι του μοντέλου, οι υπόλοιπες συνδιασπορές $\sigma_{\tau j}$, για $j > \tau + 1$, υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\sigma_{\tau j} = \frac{\sigma_{\tau\tau+1} \sigma_{\tau+1\tau+2} \cdots \sigma_{j-1j}}{\sigma_{\tau+1\tau+1} \cdots \sigma_{j-1j-1}} \quad (94)$$

η οποία είναι άμεση συνέπεια του μοντέλου PAR(1). Μετά την εκτίμηση όλων των $\sigma_{\tau j}$, υπολογίζονται οι τιμές των $\sigma_{\tau z}$ με βάση την εξίσωση (89). Παρόμοιες αλλά πιο πολύπλοκες σχέσεις μπορούν να εξαχθούν και για άλλα σειριακά μοντέλα.

Η μέθοδος που περιγράφηκε μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε κατανομή των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου X_τ , διατηρώντας αναλλοίωτες τόσο τις μέσες τιμές όσο το μητρώο συνδιασπορών του ιστορικού δείγματος. Στην περίπτωση εμφάνισης αρνητικών τιμών (οι οποίες δεν είναι αποδεκτές, δεδομένου ότι πρόκειται για υδρολογικές μεταβλητές) ακολουθείται μια επαναληπτική διαδικασία. Οι αρνητικές μεταβλητές μηδενίζονται και εφαρμόζεται εκ νέου η γραμμική αναγωγή, μέχρις ότου να εξαλειφθούν οι αρνητικές τιμές ή να γίνουν τόσο μικρές ώστε να θεωρηθούν αμελητέες.

2.6.3 Διατήρηση στατιστικών παραμέτρων

Η γραμμική διαδικασία αναγωγής αλλοιώνει ορισμένα από τα στατιστικά χαρακτηριστικά των μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών, και συγκεκριμένα τις ασυμμετρίες και τις ετεροσυσχετίσεις, οι οποίες κατά κανόνα υποεκτιμώνται. Εξάιρεση αποτελούν ορισμένες εκφυλισμένες περιπτώσεις, και συγκεκριμένα η περίπτωση μηδενικών συντελεστών ασυμμετρίας καθώς και μηδενικών ή μοναδιαίων συντελεστών ετεροσυσχέτισης. Η μη διατήρηση των ετεροσυσχετίσεων οφείλεται στο γεγονός ότι η διαδικασία αναγωγής εφαρμόζεται ξεχωριστά για κάθε μεταβλητή X_τ^l ($l = 1, \dots, n$).

Ένα άλλο πρόβλημα, το οποίο απαντά στα περισσότερα μοντέλα επιμερισμού, είναι η διατήρηση του συντελεστή συσχέτισης του πρώτου χρονικού βήματος μιας περιόδου με το τελευταίο της προηγούμενης. Όταν ξεκινά η γέννηση των συνθετικών μηνιαίων τιμών μιας περιόδου i με το μοντέλο PAR(1), είναι ήδη γνωστή η τιμή του τελευταίου μήνα της προηγούμενης περιόδου, η οποία εισάγεται στην αναδρομική σχέση (47). Με τον τρόπο αυτό διατηρείται ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης, ο οποίος ωστόσο διαταράσσεται όταν εφαρμοστεί η διαδικασία γραμμικής αναγωγής (90). Η διαταραχή αυτή επηρεάζει και τις γειτονικές τιμές των αυτοσυσχετίσεων, σε μικρότερο βαθμό.

Για τον περιορισμό των παραπάνω σφαλμάτων, ακολουθείται μια επαναληπτική διαδικασία, η οποία συνίσταται στην εύρεση μιας στατιστικά ανεξάρτητης μηνιαίων μεταβλητών, η οποία προσεγγίζει όσο το δυνατόν την ετήσια τιμή. Κατά συνέπεια, για κάθε χρονική περίοδο i , παράγεται ένα πλήθος πραγματοποιήσεων των μηνιαίων μεταβλητών μέσω του μοντέλου PAR(1), ώσπου η απόσταση:

$$\Delta Z = \|Z - \tilde{Z}\| \quad (95)$$

να γίνει μικρότερη από κάποια αποδεκτή τιμή ΔZ_{\max} . Η απόσταση ΔZ ορίζεται ως η αδιάστατη ποσότητα:

$$\Delta Z = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \frac{|Z^l - \tilde{Z}^l|}{\sqrt{\text{Var}[Z^l]}} \quad (96)$$

Κατά συνέπεια, το όριο ΔZ_{\max} μπορεί να εκφραστεί ως ποσοστό της μέσης τυπικής απόκλισης των ετήσιων μεταβλητών.

2.6.4 Αλγόριθμος γέννησης συνθετικών χρονοσειρών με επιμερισμό

Με βάση τα παραπάνω, τα βήματα του μοντέλου γέννησης συνθετικών χρονοσειρών συνοψίζονται ως εξής:

Βήμα 1ο: Μέσω του σχήματος γέννησης SMA, παράγονται οι χρονοσειρές των ετήσιων μεταβλητών \mathbf{Z} , σε κάθε θέση l και για όλη την περίοδο προσομοίωσης (βλ. 2.3.5).

Βήμα 2ο: Μέσω του σχήματος γέννησης PAR(1), παράγονται οι μηνιαίες μεταβλητές $\tilde{\mathbf{X}}_t$ για κάθε έτος i , χωρίς καμία αναφορά στη γνωστή ετήσια τιμή \mathbf{Z} (βλ. 2.4.2).

Βήμα 3ο: Για κάθε περίοδο i υπολογίζεται η απόκλιση ΔZ (εξ. 96).

Βήμα 4ο: Τα βήματα 2 και 3 επαναλαμβάνονται ώσπου η τιμή ΔZ να γίνει μικρότερη από την τιμή ΔZ_{\max} .

Βήμα 5ο: Μέσω του μοντέλου γραμμικής συνόρθωσης (βλ. 2.6.2), αποκαθίσταται η συνέπεια μεταξύ των μηνιαίων και της αντίστοιχης ετήσιας τιμής, έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (83).

Βήμα 6ο: Τα βήματα 2 ως 5 επαναλαμβάνονται για όλες τις περιόδους $i = 1, \dots, N$.

2.7 Παραγωγή τυχαίων αριθμών

2.7.1 Επιλογή της συνάρτησης κατανομής των τυχαίων μεταβλητών

Η εφαρμογή οποιουδήποτε στοχαστικού μοντέλου απαιτεί την παραγωγή τυχαίων αριθμών. Οι τυχαίοι αριθμοί ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανοτήτων, η επιλογή της οποίας είναι άμεσα εξαρτημένη από τις στατιστικές ιδιότητες του ιστορικού δείγματος.

Για την προσομοίωση των τυχαίων όρων \mathbf{W} και \mathbf{V} του ετήσιου και μηνιαίου μοντέλου αντίστοιχα, χρησιμοποιείται η *κατανομή γάμα* (γνωστή και ως κατανομή Pearson III), η οποία είναι από τις πιο διαδεδομένες στατιστικές κατανομές της τεχνικής υδρολογίας. Το γεγονός ότι είναι θετικά ασύμμετρα και ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής την κάνει συμβατή με τις πιο χαρακτηριστικές υδρολογικές διεργασίες, όπως είναι οι μηνιαίες και ετήσιες βροχοπτώσεις και απορροές. Οι ιδιότητες της κατανομής περιγράφονται στο εδάφιο 2.7.2, ενώ οι γεννήτριες που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή τυχαίων αριθμών παρουσιάζονται στο εδάφιο 2.7.3

2.7.2 Η κατανομή γάμα τριών παραμέτρων

Στη γενικότερη περίπτωση η κατανομή γάμα ορίζεται από τρεις παραμέτρους, την παράμετρο θέσης c , την παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$ και την παράμετρο σχήματος $\kappa > 0$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής είναι (Κουτσογιάννης, 1996):

$$f_x(x) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} (x - c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(x-c)} \quad (97)$$

όπου $\Gamma()$ η *συνάρτηση γάμα*, η οποία ορίζεται ως το ολοκλήρωμα:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad (98)$$

για $\alpha > 0$. Οι παράμετροι της κατανομής, εκτιμώμενοι με τη μέθοδο των ροπών, είναι:

$$\kappa = \frac{4}{C_x^2} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\kappa}}{s_x} \quad c = \bar{x} - \frac{\kappa}{\lambda} \quad (99)$$

όπου \bar{x} η μέση τιμή του δείγματος, s_x η τυπική απόκλιση και C_x ο συντελεστής ασυμμετρίας.

Η παράμετρος θέσης c , η οποία αποτελεί το κάτω όριο της μεταβλητής x , επιτρέπει την καλύτερη προσαρμογή της κατανομής στα δεδομένα.

Το σχήμα της κατανομής γάμα εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου κ . Για πολύ μεγάλες τιμές του κ ($> 15 - 30$) η κατανομή γάμα προσεγγίζει την κανονική. Για $\kappa = 1$ η κατανομή ταυτίζεται με την εκθετική. Για ακέραιο κ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής (η οποία είναι γνωστή και ως *κατανομή Erlang*) είναι:

$$f_x(x) = \frac{\lambda^\kappa}{(\kappa - 1)!} (x - c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(x-c)} \quad (100)$$

Αποδεικνύεται ότι η τυχαία μεταβλητή x η οποία ακολουθεί κατανομή Erlang προκύπτει ως άθροισμα κ τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Η κατανομή γάμα είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση. Κατά συνέπεια το άθροισμα δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x_1, x_2 που ακολουθούν κατανομές γάμα με κοινή παράμετρο κλίμακας λ και παραμέτρους σχήματος κ_1 και κ_2 αντίστοιχα, ακολουθεί επίσης κατανομή γάμα, με παραμέτρους λ και $\kappa_1 + \kappa_2$.

2.7.3 Γεννήτριες τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα

Έστω η τυχαία μεταβλητή x η οποία ακολουθεί κατανομή γάμα, με παραμέτρους $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ και c . Με βάση την προσθετική ιδιότητα της κατανομής γάμα, θεωρούμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές x_1 και x_2 με κοινή παράμετρο κλίμακας λ και παραμέτρους σχήματος $\kappa_1 = \text{Int}(\kappa)$ και $\kappa_2 = \text{Trunc}(\kappa)$ αντίστοιχα. Ο τελεστής $\text{Int}()$ υποδηλώνει το ακέραιο μέρος του αριθμού, ενώ ο τελεστής $\text{Trunc}()$ το δεκαδικό του μέρος. Για την παραγωγή των τυχαίων αριθμών x_1 και x_2 ακολουθούνται διαφορετικές μεθοδολογίες.

α) *Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα με ακέραιο κ*

Για την παραγωγή τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κατανομή Erlang με παραμέτρους κ_1 (ακέραιο) και $\lambda > 0$ χρησιμοποιείται η εξίσωση:

$$x = -\lambda \ln \left(\prod_{i=1}^{\kappa_1} u_i \right) \quad (101)$$

όπου u_i τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$. Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα ότι η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Erlang ισούται με το άθροισμα κ τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν εκθετική κατανομή. Πράγματι, η σχέση (101) μπορεί να γραφεί ως:

$$x = \sum_{i=1}^{\kappa_1} x_i = \sum_{i=1}^{\kappa_1} -\lambda \ln u_i \quad (102)$$

Η συνάρτηση της εκθετικής κατανομής είναι:

$$F_x(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (103)$$

Αντιστρέφοντας ως προς x προκύπτει:

$$x = -\lambda \ln(1 - u) \quad (104)$$

Εφόσον η τυχαία μεταβλητή $u' = 1 - u$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή, τότε η μεταβλητή

$$x = -\lambda \ln u' \quad (105)$$

ακολουθεί εκθετική κατανομή.

β) Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα με δεκαδικό κ

Στην περίπτωση κατά την οποία $0 < \kappa < 1$, εφαρμόζονται δύο εναλλακτικές διαδικασίες. Η πρώτη και απλούστερη διαδικασία βασίζεται στον αλγόριθμο του Whittaker (1972), ο οποίος περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1ο: Γεννώνται οι τυχαίοι αριθμοί v και r , οι οποίοι ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$.

Βήμα 2ο: Υπολογίζονται οι αριθμοί $a = v^{1/\kappa}$ και $b = r^{-1/\kappa}$.

Βήμα 3ο: Ελέγχεται αν $a + b \leq 1$. Στην περίπτωση που αυτό δεν συμβαίνει, επαναλαμβάνονται τα βήματα 1 και 2.

Βήμα 4ο: Υπολογίζεται η τιμή:

$$x = c - \frac{1}{\lambda} \frac{a}{a+b} \ln u \quad (106)$$

όπου u τυχαίος, ομοιόμορφος αριθμός.

Η δεύτερη διαδικασία βασίζεται στη μέθοδο της απόρριψης (Papoulis, 1991· Press et al., 1992) και αποτελεί πρωτότυπη εργασία των Koutsoyiannis and Manetas (1996). Η τεχνική της απόρριψης είναι μια πιθανοτική μέθοδος γέννησης τυχαίων αριθμών, η οποία χρησιμοποιείται για μη αντιστρέψιμες συναρτήσεις κατανομής $F_x(x)$. Η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 2.4. Έστω ότι ορίζεται μια συνάρτηση κατανομής $G_x(x)$ που είναι αντιστρέψιμη και περιβάλλει την $F_x(x)$, δηλαδή $G_x(x) \geq F_x(x)$ για κάθε x . Επειδή η $G_x(x)$ είναι συνάρτηση κατανομής ισχύει $0 \leq G_x(x) \leq 1$. Ο λόγος:

$$r(x) = \frac{F_x(x)}{G_x(x)} \leq 1 \quad (107)$$

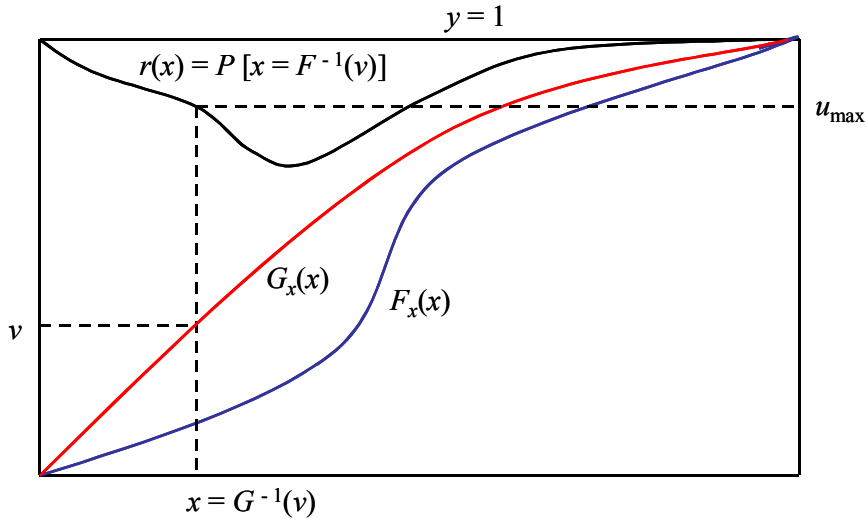
αποτελεί μέτρο του πόσο καλά προσεγγίζει η $G_x(x)$ την αρχική συνάρτηση $F_x(x)$. Για την παραγωγή του τυχαίου αριθμού x που ακολουθεί κατανομή $F_x(x)$ εφαρμόζονται τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1ο: Παράγονται δύο τυχαίοι αριθμοί v και u , οι οποίοι ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$.

Βήμα 2ο: Τίθεται $v = G_x(x)$ και υπολογίζεται η αντίστροφη τιμή της συνάρτησης, $x = G_x^{-1}(v)$.

Βήμα 3ο: Από την (107) υπολογίζεται η τιμή $r(x)$, η οποία εκφράζει την πιθανότητα του γεγονότος ο αριθμός x να ακολουθεί κατανομή $F_x(x)$.

Βήμα 4ο: Αν $u \leq r(x)$ η τιμή x γίνεται δεκτή, διαφορετικά η μέθοδος επαναλαμβάνεται από την αρχή.



Σχήμα 2.4: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου απόρριψης ως προσεγγιστικής γεννήτριας τυχαίων αριθμών από μια μη αντιστρέψιμη κατανομή, $F_x(x)$.

Η εφαρμογή της μεθόδου για την παραγωγή τυχαίων αριθμών γάμα κατανομής έχει ως εξής: Έστω $g(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $G_x(x)$, η οποία ορίζεται ως:

$$g(x) = \begin{cases} \beta (x - c)^{\kappa - 1} & c \leq x \leq h \\ \beta \gamma e^{-\lambda(x-c)} & x > h \end{cases} \quad (108)$$

όπου β , γ σταθεροί συντελεστές και h αριθμός μεγαλύτερος του c . Από την απαίτηση συνέχειας της $g(x)$ για $x = h$ προκύπτει:

$$\gamma = (h - c)^{\kappa - 1} e^{\lambda(h-c)} \quad (109)$$

Εφόσον η $g(x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας πρέπει:

$$\int_c^{\infty} g(x) dx = 1 \quad (110)$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\beta = \frac{\kappa}{(h - c)^{\kappa - 1} (h - c + \kappa / \lambda)} \quad (111)$$

Τότε η συνάρτηση κατανομής της $g(x)$ είναι:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{h - c}{h - c + \kappa / \lambda} \left(\frac{x - c}{h - c} \right)^{\kappa} & c \leq x \leq h \\ 1 - \frac{\kappa / \lambda}{h - c + \kappa / \lambda} e^{-\lambda(x-c)} & x > h \end{cases} \quad (112)$$

Η αντίστροφη της $G(x)$ είναι:

$$x(G) = \begin{cases} \left[\frac{h - c + \kappa / \lambda}{h - c} G \right]^{1/\kappa} (h - c) + c & 0 \leq G \leq \frac{h - c}{h - c + \kappa / \lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} \ln \left[(1 - G) \frac{h - c + \kappa / \lambda}{\kappa / \lambda} \right] + h & G > \frac{h - c}{h - c + \kappa / \lambda} \end{cases} \quad (113)$$

Ορίζεται η συνάρτηση:

$$r(x) = \alpha \frac{f(x)}{g(x)} \quad (114)$$

όπου α μια σταθερή ποσότητα τέτοια ώστε $\max[r(x)] = 1$. Μετά από πράξεις προκύπτει:

$$r(x) = \begin{cases} e^{-\lambda(x-c)} & c \leq x \leq h \\ e^{-\lambda(x-c)} \left(\frac{x-c}{h-c}\right)^{\kappa-1} & x > h \end{cases} \quad (115)$$

Για απλούστευση της διαδικασίας, η παράμετρος h εξισώνεται με τη μέση τιμή του x , δηλαδή:

$$h = c + \frac{\kappa}{\lambda} \quad (116)$$

γ) Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα με $\kappa > 30$

Στην περίπτωση αυτή η κατανομή προσεγγίζεται από την κανονική, με μέση τιμή $\mu = \kappa / \lambda$ και τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\kappa} / \lambda$. Η παραγωγή τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κανονική κατανομή γίνεται μέσω της γεννήτριας:

$$x = \mu + \sigma 2\pi u_1 \sqrt{-2 \ln u_2} \quad (117)$$

όπου u_1 και u_2 διαδοχικοί όροι ακολουθίας αριθμών που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή.

2.7.4 Προσαρμογή για παραγωγή αρνητικών ασυμμετριών

Η κατανομή γάμα, με παραμέτρους που ορίζονται με βάση τις σχέσεις (99), είναι πάντοτε θετικά ασύμμετρη. Εφόσον ο συντελεστής ασυμμετρίας του δείγματος C_x είναι αρνητικός, οι παράμετροι της κατανομής υπολογίζονται ως:

$$\kappa = -\frac{4}{C_x^2} \quad \lambda = \frac{\sqrt{|\kappa|}}{s_x} \quad c = -\bar{x} + \frac{\kappa}{\lambda} \quad (118)$$

Για την παραγωγή τυχαίων αριθμών που ακολουθούν αρνητικά ασύμμετρη κατανομή γάμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ίδιες γεννήτριες, θέτοντας $\kappa = |\kappa|$ και αλλάζοντας το πρόσημο της τιμής του τελικού αποτελέσματος.

Σημειώνεται ότι αρνητικές ασυμμετρίας εμφανίζονται στις τυχαίες μεταβλητές \mathbf{W} και \mathbf{V} , παρόλο που οι τελικές υδρολογικές μεταβλητές \mathbf{X} έχουν κατά κανόνα θετική ασυμμετρία.

2.8 Μοντέλο στοχαστικής πρόγνωσης ετήσιων μεταβλητών

Το σχήμα γέννησης των ετήσιων μεταβλητών X_i^l (εξ. 40) χρησιμοποιεί τυχαίες αρχικές συνθήκες, τυχαίες δηλαδή τιμές των μεταβλητών ανανέωσης V_i^l . Με τον τρόπο αυτό δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη η πληροφορία του παρελθόντος, η ακολουθία δηλαδή των πρόσφατων τιμών X_i^l . Ωστόσο το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί και υπό μορφή στοχαστικής πρόγνωσης, εισάγοντας τις παρελθούσες και την τρέχουσα τιμή για την πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών των ετήσιων μεταβλητών. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι εξαιτίας του στοχαστικού χαρακτήρα των υδρομετεωρολογικών διεργασιών, η εφαρμογή του σχήματος πρόγνωσης δεν είναι μονοσήμαντη, αλλά πραγματοποιείται υπό τη μορφή στοχαστικά ανεξάρτητων σεναρίων. Επιπλέον, η "ακρίβεια" της πρόγνωσης πρακτικά μηδενίζεται μετά από λίγα χρονικά βήματα και κατά συνέπεια δεν έχει νόημα η χρήση τέτοιων μοντέλων για χρονικό ορίζοντα μεγαλύτερο των 5 ως 10 ετών.

Το σχήμα συμμετρικών κινούμενων μέσων όρων μιας μεταβλητής γενικεύεται ως μοντέλο στοχαστικής πρόγνωσης με εφαρμογή μιας απλής διαδικασίας αναγωγής (Koutsoyiannis 2000). Έστω

ότι το διάνυσμα της τρέχουσας και των k τελευταίων τιμών των μεταβλητών $\mathbf{Z} = [X_0, X_{-1}, \dots, X_{-k}]^T$ είναι γνωστό και η τιμή του είναι $\mathbf{z} = [x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}]^T$. Το πρόβλημα συνίσταται στη γέννηση οποιασδήποτε μελλοντικής μεταβλητής X_j , υπό τη συνθήκη $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$.

Έστω η στοχαστική ανέλιξη \tilde{X}_i ($i = -k, \dots, 0, 1, \dots$) με αυτοσυνδιασπορά γ_j ($j = 0, 1, \dots$) και έστω $\tilde{\mathbf{Z}} = [\tilde{X}_0, \tilde{X}_{-1}, \dots, \tilde{X}_{-k}]^T$. Έστω ακόμη $\mathbf{Z} = [X_0, X_{-1}, \dots, X_{-k}]^T$ διάνυσμα μεταβλητών στοχαστικά ανεξάρτητων από τις \tilde{X}_i , αλλά με κοινή μέση τιμή και αυτοσυνδιασπορά. Αποδεικνύεται ότι η στοχαστική ανέλιξη:

$$X_i = \tilde{X}_i + \mathbf{n}_i^T \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}) \quad (119)$$

όπου $\mathbf{n}_i^T = \text{Cov}[\tilde{X}_i, \tilde{\mathbf{Z}}]$ και $\mathbf{h} = \text{Cov}[\tilde{\mathbf{Z}}, \tilde{\mathbf{Z}}]$ έχει την ίδια μέση τιμή και αυτοσυνδιασπορά με την \tilde{X}_i . Η υπό συνθήκη (conditional) διασπορά της X_i , δεδομένου ότι $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$, είναι ίση με:

$$\text{Var}[X_i | \mathbf{Z} = \mathbf{z}] = \gamma_0 - \mathbf{n}_i^T \mathbf{h}^{-1} \mathbf{n}_i \quad (120)$$

Δηλαδή η υπό συνθήκη διασπορά είναι μικρότερη από την γ_0 και μάλιστα ταυτίζεται με την ελάχιστη τιμή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος πρόβλεψης των X_i από τα \mathbf{Z} . Με τον τρόπο αυτό, ο συνδυασμός του σχήματος γέννησης (19) ή (23) με τον μετασχηματισμό (119) διατηρεί τη στοχαστική δομή της ανέλιξης X_i και ταυτόχρονα μειώνει την υπό συνθήκη διασπορά περισσότερο από κάθε άλλο γραμμικό μοντέλο.

Σημειώνεται ότι το \mathbf{h} είναι συμμετρικό μητρώο, με διαστάσεις $(k+1) \times (k+1)$, τα στοιχεία του οποίου υπολογίζονται συναρτήσει των αυτοσυνδιασπορών γ_j (εξ. 15). Αντίθετα το \mathbf{n}_i είναι διάνυσμα με διάσταση $k+1$ και στοιχεία:

$$(\mathbf{n}_i)_j = \gamma_{|i+j-1|} \quad (121)$$

Η διαδικασία αναγωγής που περιγράφει η (119) είναι γενική μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε γραμμικό στοχαστικό μοντέλο. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι:

Βήμα 1ο: Υπολογίζονται τα στοιχεία του μητρώου \mathbf{h} από τη σχέση (15), για δεδομένο πλήθος γνωστών τιμών των μεταβλητών, ίσο με $k+1$.

Βήμα 2ο: Γεννάται η χρονοσειρά των ετήσιων μεταβλητών \tilde{X}_i ($i = -k, \dots, 0, 1, 2, \dots$) χωρίς καμία αναφορά στις γνωστές τιμές \mathbf{Z} και υπολογίζεται το διάνυσμα $\mathbf{h}^{-1} (\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})$.

Βήμα 3ο: Για κάθε χρονική περίοδο $i > 0$, ορίζονται τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{n}_i και διορθώνεται η τιμή της ετήσιας μεταβλητής X_i , με εφαρμογή της σχέσης (119).

Τα παραπάνω μπορούν να υλοποιηθούν και σε πολυμεταβλητά σχήματα, θεωρώντας ότι τα X_i^l παράγονται μέσω της εξίσωσης (40) και εφαρμόζοντας τη διαδικασία αναγωγής θέση προς θέση, ξεχωριστά δηλαδή για κάθε μεταβλητή $l = 1, \dots, n$.

3 Σχεδιασμός υπολογιστικού συστήματος

3.1 Γενική περιγραφή

Οι μεθοδολογίες που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 2 υλοποιήθηκαν σε ένα ενιαίο λογισμικό πακέτο, με την ονομασία *Κασταλία*. Ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη του υπολογιστικού συστήματος έγιναν με βάση τις προδιαγραφές που ορίστηκαν στην ανάλυση απαιτήσεων (Καραβοκυρός κ.ά., 2000).

Οι λειτουργίες που επιτελεί το πρόγραμμα είναι:

- Ανάκτηση ιστορικών και διαχείριση συνθετικών χρονοσειρών.
- Υπολογισμός στατιστικών χαρακτηριστικών ιστορικών δεδομένων και εκτίμηση παραμέτρων στοχαστικών μοντέλων.
- Γέννηση ετήσιων και μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών σε μία ή περισσότερες θέσεις.
- Παρουσίαση υπό μορφή πινάκων και γραφημάτων των χρονοσειρών, των στατιστικών μεγεθών τους και των παραμέτρων του μοντέλου.

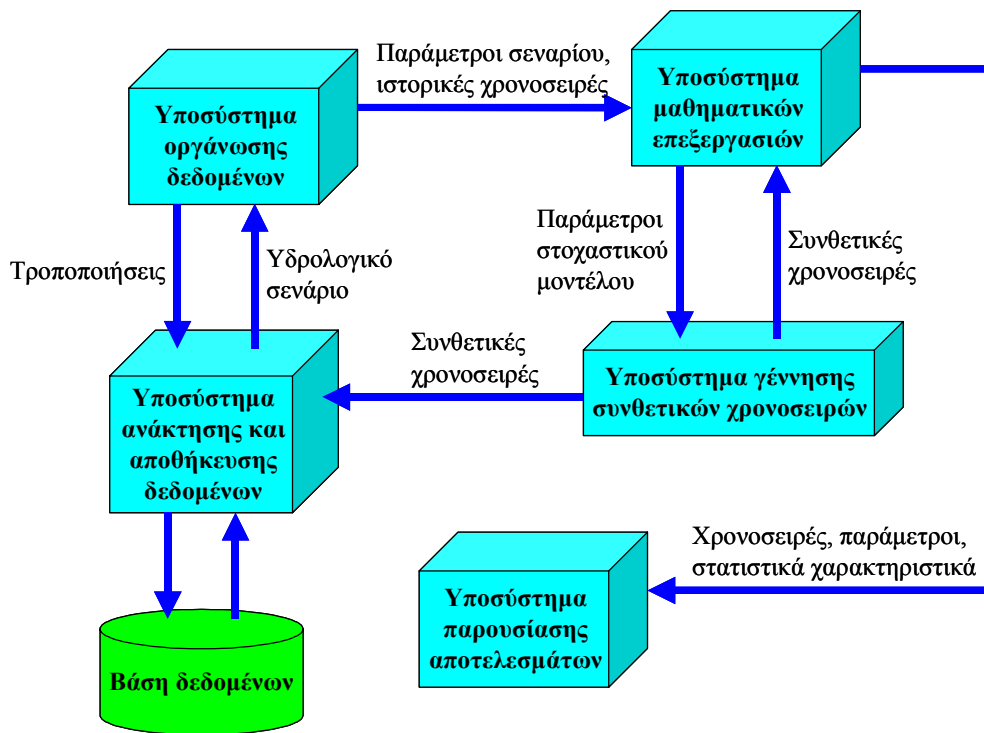
Η *Κασταλία* λειτουργεί ως αυτόνομο πρόγραμμα σε περιβάλλον Windows. Η ανάπτυξη του λογισμικού έγινε σε γλώσσα προγραμματισμού Object Pascal/Delphi, Στην παρούσα (μη επιχειρησιακή) έκδοση του συστήματος δεν υπάρχει σύνδεση με τα υπόλοιπα υποσυστήματα του έργου, η οποία προβλέπεται να υλοποιηθεί μέσω της κεντρικής βάσης δεδομένων κατά την Β' Φάση.

Στην *Κασταλία* διατίθενται αναλυτικές οδηγίες χρήσης σε ηλεκτρονική μορφή, οι οποίες παρατίθενται και στο Κεφάλαιο 4 του παρόντος τεύχους.

3.2 Δομή του συστήματος

Στο Σχήμα 3.1 απεικονίζονται η αρχιτεκτονική δομή και οι συνιστώσες (υποσυστήματα) του προγράμματος. Η *Κασταλία* υποστηρίζεται από μια τοπική βάση δεδομένων, η οποία στην παρούσα έκδοση είναι ανεξάρτητη από την κεντρική βάση δεδομένων του έργου. Στην επόμενη έκδοση του προγράμματος, κατά την οποία προβλέπεται η επιχειρησιακή λειτουργία του, η τοπική βάση θα ενσωματωθεί στην κεντρική. Το πρόγραμμα αποτελείται από 5 υποσυστήματα, οι λειτουργίες των οποίων περιγράφονται στη συνέχεια του υποκεφαλαίου.

Σε μια τυπική *σύνοδο* (session), ο χρήστης είτε επιλέγει ένα υφιστάμενο υδρολογικό σενάριο είτε δημιουργεί ένα νέο σενάριο. Από τη βάση δεδομένων ανακτώνται όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για την εκτέλεση μιας ολοκληρωμένης εφαρμογής, δηλαδή οι παράμετροι του υδρολογικού σεναρίου καθώς και οι ιστορικές χρονοσειρές στις οποίες αναφέρεται το σενάριο. Ο χρήστης μπορεί να τροποποιήσει τις παραμέτρους του σεναρίου, μέσω του υποσυστήματος οργάνωσης δεδομένων. Μετά την ανάκτηση των δεδομένων ή τις τροποποιήσεις τους, το πρόγραμμα εκτελεί διάφορες μαθηματικές επεξεργασίες με στόχο την εκτίμηση των παραμέτρων των στοχαστικών μοντέλων. Στη συνέχεια ο χρήστης μπορεί να ζητήσει τη γέννηση συνθετικών χρονοσειρών και να οπτικοποιήσει τα δεδομένα και τα στατιστικά τους χαρακτηριστικά, μέσω του υποσυστήματος παρουσίασης αποτελεσμάτων. Μετά το πέρας της συνόδου, όλες οι πληροφορίες μπορούν να αποθηκευτούν στη βάση δεδομένων, ώστε να είναι διαθέσιμες μεταγενέστερα. Σημειώνεται ότι ο χρήστης δεν χρειάζεται να επεμβαίνει στην ίδια τη βάση, αφού όλες οι τροποποιήσεις πραγματοποιούνται μέσω του προγράμματος.



Σχήμα 3.1: Αρχιτεκτονικός σχεδιασμός και υποσυστήματα Κασταλίας.

3.2.1 Υποσύστημα ανάκτησης και αποθήκευσης δεδομένων

Μέσω του υποσυστήματος ανάκτησης και αποθήκευσης, εξασφαλίζεται η επικοινωνία του προγράμματος με τη βάση δεδομένων. Μετά την εκκίνηση κάθε συνόδου, ανακτώνται όλες οι απαιτούμενες πληροφορίες από τη βάση, δηλαδή οι παράμετροι του υδρολογικού σεναρίου και των μεταβλητών του καθώς και οι ιστορικές χρονοσειρές, οι οποίες μεταφέρονται στην εσωτερική μνήμη του προγράμματος. Καθ' όλη τη διάρκεια εκτέλεσης της συνόδου, το σύνολο των υπολογιστικών διαδικασιών που αφορούν ανάγνωση και τροποποίηση δεδομένων πραγματοποιούνται στη μνήμη του προγράμματος, το οποίο καθίσταται ανεξάρτητο από τη βάση. Μετά το πέρας της συνόδου, τα τροποποιημένα δεδομένα του υδρολογικού σεναρίου (π.χ. οι συνθετικές χρονοσειρές), μπορούν να αποθηκευτούν στη βάση μέσω μιας αντίστροφης διαδικασίας.

3.2.2 Υποσύστημα οργάνωσης δεδομένων

Το υποσύστημα οργάνωσης δεδομένων, το οποίο αποτελεί το μέσο επικοινωνίας του προγράμματος με τον χρήστη, επιτελεί τις ακόλουθες λειτουργίες:

- Επιλογή υφιστάμενου υδρολογικού σεναρίου ή ορισμός νέου σεναρίου.
- Ορισμός ή τροποποίηση παραμέτρων υδρολογικού σεναρίου.
- Ορισμός ή τροποποίηση παραμέτρων υδρολογικών μεταβλητών.

Όλες οι επεμβάσεις του χρήστη ελέγχονται, έτσι ώστε να εμποδίζεται η εισαγωγή μη συμβατών δεδομένων και να εξασφαλίζεται η απρόσκοπτη λειτουργία του προγράμματος. Ο έλεγχος περιλαμβάνει δύο στάδια: (α) έλεγχο συμβατότητας του τύπου των εισαγόμενων στοιχείων (π.χ. απαγόρευση καταχώρησης πραγματικών τιμών σε ακέραιες μεταβλητές) και (β) έλεγχο αριθμητικών ορίων (π.χ. απαγόρευση ορισμού μήκους χρονοσειράς μεγαλύτερου από 10000 έτη).

3.2.3 Υποσύστημα μαθηματικών επεξεργασιών

Τα υποσύστημα μαθηματικών επεξεργασιών επιτελεί τις ακόλουθες λειτουργίες:

- Υπολογισμός στατιστικών χαρακτηριστικών ιστορικού δείγματος.
- Εκτίμηση παραμέτρων στοχαστικών μοντέλων.
- Υπολογισμός στατιστικών χαρακτηριστικών συνθετικών χρονοσειρών.

Κατά τη διάρκεια εκτέλεσης των υπολογισμών, οι οποίοι ανάλογα με την περίπτωση μπορεί να φτάσουν και τα μερικά λεπτά της ώρας, όλες οι επιλογές του προγράμματος παραμένουν ανενεργές. Ανά τακτά διαστήματα, ο χρήστης ενημερώνεται για το είδος των επεξεργασιών που πραγματοποιούνται, μέσω της κύριας φόρμας του προγράμματος (βλ. 4.1).

3.2.4 Υποσύστημα γέννησης χρονοσειρών

Η γέννηση συνθετικών χρονοσειρών ετήσιου και μηνιαίου χρονικού βήματος συνιστά την κύρια λειτουργία του προγράμματος. Οι χρονοσειρές, οι οποίες αναφέρονται σε μία ή περισσότερες θέσεις, παράγονται ανά ομάδες ίσου μήκους. Κάθε ομάδα διαφοροποιείται ως προς τις τιμές της τυχηματικής συνιστώσας του στοχαστικού σχήματος γέννησης.

Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει μεταξύ δύο τρόπων γέννησης χρονοσειρών (α) προσομοίωση μόνιμης κατάστασης ή (β) πρόγνωση με δεδομένες αρχικές συνθήκες. Η πρώτη περίπτωση συνίσταται στην παραγωγή χρονοσειρών οι οποίες δεν είναι συνεπείς με τα επίκαιρα και παρελθόντα δεδομένα. Αντίθετα, η δεύτερη περίπτωση συνίσταται στην αναγωγή των ετήσιων και μηνιαίων χρονοσειρών μέσω του μοντέλου πρόγνωσης (βλ. 2.8), έτσι ώστε οι συνθετικές τιμές που αντιστοιχούν στα παρελθόντα έτη και μήνες να ταυτίζονται με τα πραγματικά δεδομένα.

3.2.5 Υποσύστημα παρουσίασης αποτελεσμάτων

Τα δεδομένα που ανακτώνται από τη βάση και τα αποτελέσματα των πάσης φύσεως επεξεργασιών οπτικοποιούνται υπό μορφή πινάκων και γραφημάτων. Συγκεκριμένα, υπό μορφή πινάκων παρουσιάζονται:

- οι τιμές των ιστορικών και οι συνθετικών χρονοσειρών
- τα στατιστικά μεγέθη των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών
- οι παράμετροι των στοχαστικών μοντέλων για τις ετήσιες και μηνιαίες μεταβλητές
- τα στατιστικά μεγέθη των τυχαίων όρων των ετήσιων και μηνιαίων μεταβλητών

Υπό μορφή γραφημάτων απεικονίζονται:

- τα ετήσια και μηνιαία στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος και των συνθετικών χρονοσειρών (μέσες τιμές, τυπικές αποκλίσεις, συντελεστές ασυμμετρίας, συντελεστές αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης, συντελεστές ετεροσυσχέτισης μηδενικής τάξης)
- το αυτοσυσχετόγραμμα, πραγματικό και θεωρητικό, του ετήσιου ιστορικού δείγματος και των συνθετικών χρονοσειρών.
- το φάσμα ισχύος του ετήσιου ιστορικού δείγματος.
- οι ετήσιες και μηνιαίες χρονοσειρές του ιστορικού δείγματος και των συνθετικών χρονοσειρών.

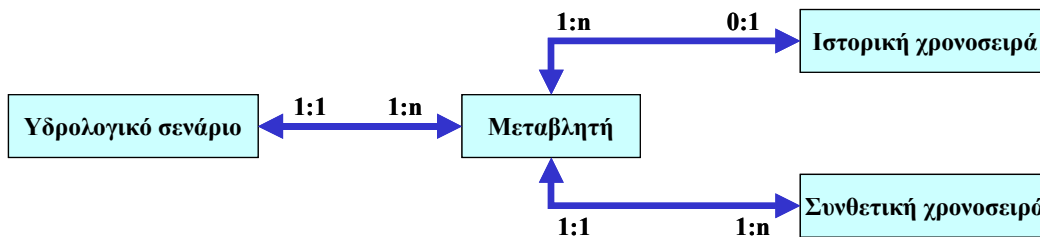
3.3 Σχεδιασμός τοπικής βάσης δεδομένων

Η τοπική βάση δεδομένων εξασφαλίζει την αυτονομία του υπολογιστικού συστήματος, εξυπηρετώντας αποκλειστικά και μόνο τις ανάγκες του προγράμματος. Ο σχεδιασμός της τοπικής βάσης δεδομένων, η οποία έχει προσωρινό χαρακτήρα, ακολουθεί εν μέρει τις προδιαγραφές της

κεντρικής βάσης (Παπακώστας, 2000), στην οποία προβλέπεται να ενσωματωθεί κατά την επόμενη έκδοση του προγράμματος. Η ανάπτυξη της βάσης έγινε σε περιβάλλον MS Access 2000.

3.3.1 Μοντέλο οντοτήτων-συσχετισμών

Η βάση δεδομένων ακολουθεί την αρχιτεκτονική δομή του μοντέλου οντοτήτων-συσχετισμών (entity-relationship model). Σύμφωνα με αυτό, η βάση χωρίζεται σε δύο λογικά μέρη, τις οντότητες και τους μεταξύ τους συσχετισμούς (Sommerville, 1998). Ως οντότητα θεωρείται ένα αντικείμενο ή μια έννοια που χρησιμοποιείται στον σχεδιασμό του μοντέλου. Στο μοντέλο της *Κασταλίας* χρησιμοποιούνται τρεις οντότητες, α) τα υδρολογικά σενάρια, β) οι μεταβλητές των σεναρίων, και γ) οι χρονοσειρές (ιστορικές και συνθετικές). Το λογικό διάγραμμα οντοτήτων-συσχετισμών του συστήματος απεικονίζεται στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Το διάγραμμα οντοτήτων-συσχετισμών της *Κασταλίας*.

Η βασική οντότητα της *Κασταλίας* είναι το υδρολογικό σενάριο, δηλαδή το σύνολο των δεδομένων και πληροφοριών που συνιστούν ένα πλήρες πρόβλημα σύνθεσης χρονοσειρών. Κάθε σενάριο περιλαμβάνει μία τουλάχιστον μεταβλητή, η οποία αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη υδρολογική διεργασία και σε μια συγκεκριμένη γεωγραφική θέση (π.χ. απορροή στον Μόρνο). Κάθε μεταβλητή μπορεί να αναφέρεται το πολύ σε μία ιστορική χρονοσειρά, ενώ αντίθετα μια χρονοσειρά μπορεί να αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία μεταβλητές, υπό την προϋπόθεση ότι κάθε μία ανήκει σε διαφορετικό σενάριο. Τέλος, σε κάθε μεταβλητή αντιστοιχεί μία ή περισσότερες συνθετικές χρονοσειρές.

Για κάθε οντότητα της βάσης δεδομένων υπάρχει και ένας αντίστοιχος πίνακας. Η αναλυτική περιγραφή των πινάκων και των πεδίων τους αναφέρεται στο Παράρτημα.

3.3.2 Πίνακας υδρολογικών σεναρίων

Κάθε σενάριο έχει μία και μοναδική ονομασία, η οποία χρησιμοποιείται ως αναγνωριστικό (κλειδί). Στις ιδιότητες ενός υδρολογικού σεναρίου περιλαμβάνονται:

- το πλήθος των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στο σενάριο
- οι παράμετροι του ετήσιου και του μηνιαίου στοχαστικού μοντέλου
- οι παράμετροι της γεννήτριας τυχαίων αριθμών
- το πλήθος και το μήκος των συνθετικών χρονοσειρών
- το πλήθος και ο χρονικός ορίζοντας των σεναρίων πρόγνωσης

3.3.3 Πίνακας μεταβλητών

Οι ιδιότητες των μεταβλητών ενός σεναρίου είναι:

- η ονομασία της μεταβλητής
- το είδος της υδρολογικής διεργασίας (βροχόπτωση, απορροή ή εξάτμιση)
- το υδρολογικό σενάριο στο οποίο αναφέρεται η μεταβλητή

- η ονομασία του πίνακα που περιέχει την αντίστοιχη ιστορική χρονοσειρά
- το υδρολογικό έτος έναρξης και λήξης του δείγματος που χρησιμοποιείται
- οι παράμετροι του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος (βλ. 2.3.1)

3.3.4 Πίνακας ιστορικών χρονοσειρών

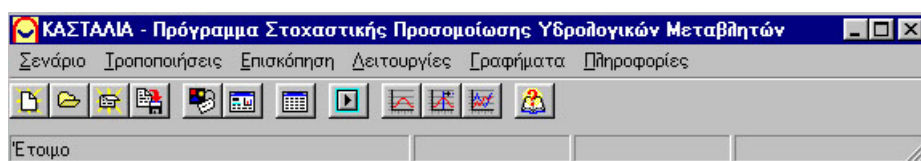
Στον πίνακα αναγράφονται πληροφορίες για τις ιστορικές χρονοσειρές που είναι αποθηκευμένες στη βάση δεδομένων της *Κασταλίας* και συγκεκριμένα:

- η ονομασία του πίνακα στον οποίο έχουν αποθηκευτεί τα ιστορικά δεδομένα
- η γεωγραφική θέση στην οποία αναφέρεται η υδρολογική διεργασία
- το είδος της διεργασίας (βροχόπτωση, απορροή ή εξάτμιση)
- το έτος έναρξης και λήξης του ιστορικού δείγματος

4 Οδηγίες χρήσης

4.1 Κύρια οθόνη της εφαρμογής

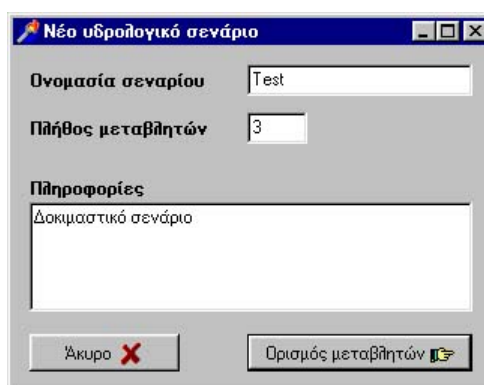
Η κύρια οθόνη, η οποία εμφανίζεται με την έναρξη του προγράμματος, απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1. Από την κύρια οθόνη εκτελούνται όλες οι λειτουργίες του προγράμματος και καλούνται τα επιμέρους υποσυστήματα. Στο κάτω μέρος της φόρμας αναγράφονται συνοπτικά κάποιες πληροφορίες ή οδηγίες προς τον χρήστη. Με την έναρξη του προγράμματος, οι μόνες διαθέσιμες επιλογές είναι είτε η δημιουργία νέου υδρολογικού σεναρίου (βλ. 4.2) είτε η εισαγωγή ενός αποθηκευμένου στη βάση σεναρίου (βλ. 4.5).



Σχήμα 4.1: Η κύρια φόρμα του προγράμματος.

4.2 Δημιουργία νέου σεναρίου

Από το μενού **Σενάριο** → **Δημιουργία** καλείται η φόρμα του Σχήματος 4.2, στην οποία ο χρήστης ορίζει την ονομασία και το πλήθος των μεταβλητών του νέου υδρολογικού σεναρίου. Δεν επιτρέπεται ονομασία ίδια με αυτή υφιστάμενου σεναρίου, ενώ το πλήθος των μεταβλητών δεν μπορεί να υπερβαίνει τις 10. Οι τιμές των παραμέτρων ορίζονται αυτόματα και μπορούν να μεταβληθούν μόνο μετά το πέρας της δημιουργίας του σεναρίου, μέσω της αντίστοιχης φόρμας (βλ. 4.7). Στη συνέχεια δημιουργούνται οι μεταβλητές του σεναρίου, με το πάτημα του πλήκτρου **Ορισμός μεταβλητών**. Αν ο χρήστης ακυρώσει την εγγραφή, επιστρέφει στην κύρια οθόνη, απ' όπου μπορεί να ξανακαλέσει τη φόρμα δημιουργίας σεναρίου ή να εισάγει ένα από τα υφιστάμενα υδρολογικά σενάρια.

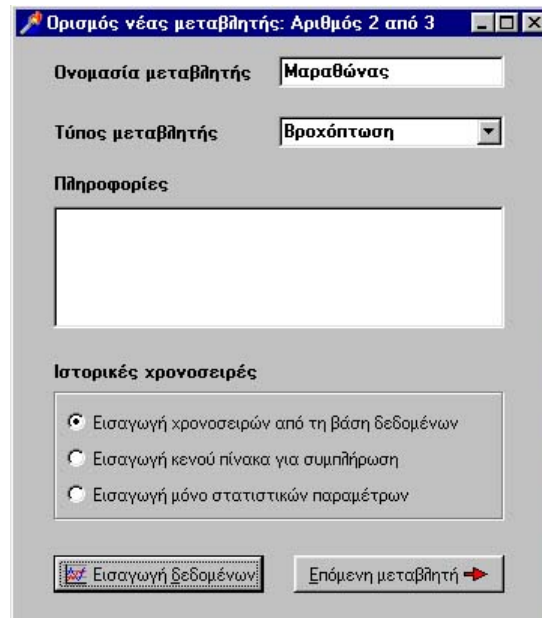


Σχήμα 4.2: Η φόρμα δημιουργίας νέου υδρολογικού σεναρίου.

4.3 Ορισμός υδρολογικών μεταβλητών

Για κάθε μεταβλητή ο χρήστης πρέπει να ορίσει την ονομασία, το είδος της μεταβλητής (βροχόπτωση, απορροή ή εξάτμιση) και τη χρονοσειρά του δείγματος, βάσει του οποίου εκτιμώνται τα στατιστικά χαρακτηριστικά της μεταβλητής και οι παράμετροι του μοντέλου στοχαστικής

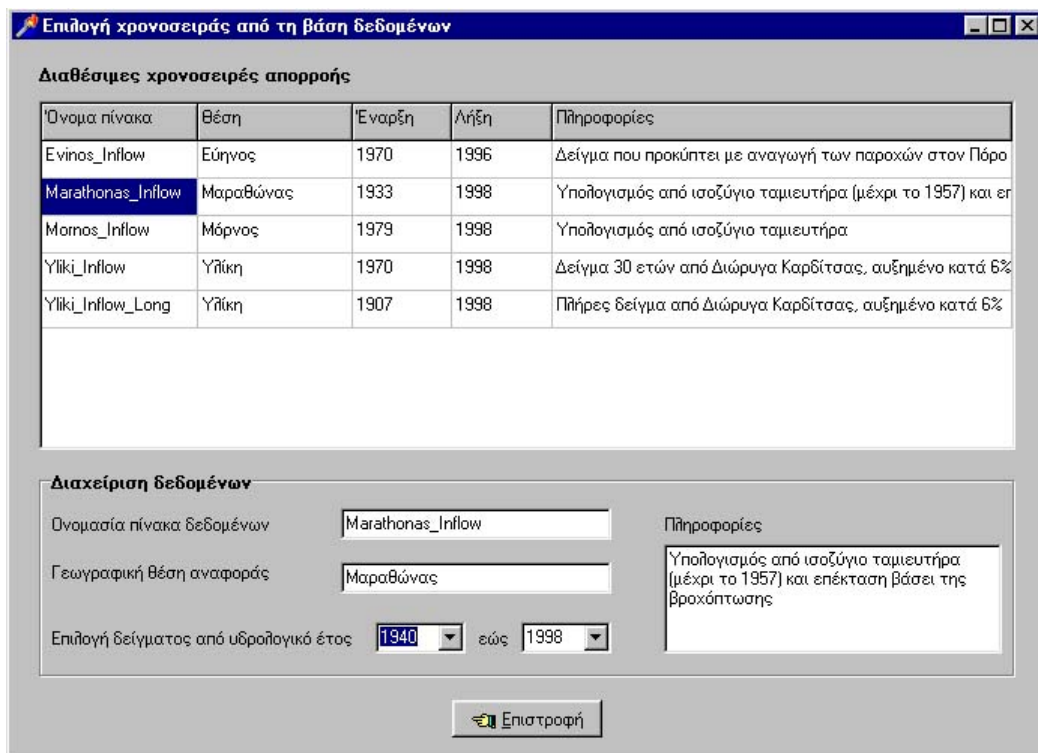
προσομοίωσης (Σχήμα 4.3). Στην παρούσα έκδοση του προγράμματος δεν είναι εφικτή η εισαγωγή κενού πίνακα χρονοσειρών και η μεμονωμένη εισαγωγή στατιστικών χαρακτηριστικών. Δεν επιτρέπεται η μετάβαση στην επόμενη μεταβλητή αν δεν έχει κληθεί προηγουμένως η φόρμα εισαγωγής δεδομένων, ενώ δεν επιτρέπεται το κλείσιμο της οθόνης αν δεν έχουν οριστεί όλες οι μεταβλητές του σεναρίου. Μετά το πέρας της διαδικασίας υπολογίζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών και οι παράμετροι του μοντέλου, ενώ επανέρχεται στο προσκήνιο η κύρια φόρμα.



Σχήμα 4.3: Η φόρμα ορισμού νέας υδρολογικής μεταβλητής.

4.4 Επιλογή χρονοσειράς από τη βάση δεδομένων

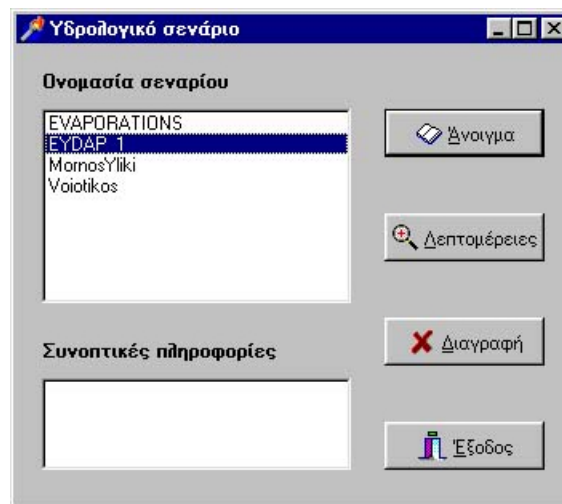
Η οθόνη αυτή, η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 4.4, καλείται από τη φόρμα ορισμού νέων μεταβλητών (βλ. 4.3). Στο πάνω μέρος της οθόνης εμφανίζεται ένας πίνακας που περιέχει όλες τις χρονοσειρές που διατίθενται στη βάση δεδομένων και οι οποίες αναφέρονται στον συγκεκριμένο τύπο μεταβλητής (βροχόπτωση, απορροή ή εξάτμιση) και δεν έχουν χρησιμοποιηθεί ως τώρα στο σενάριο. Για κάθε χρονοσειρά που επιλέγεται, απεικονίζονται οι αντίστοιχες πληροφορίες στο κάτω τμήμα της οθόνης. Δεν είναι υποχρεωτική η χρήση όλου του διατιθέμενου δείγματος. Αντίθετα, ο χρήστης μπορεί να ορίσει την αρχή και το πέρας του δείγματος που θα χρησιμοποιηθεί, μεταβάλλοντας τις τιμές στα αντίστοιχα πλαίσια.



Σχήμα 4.4: Η φόρμα επιλογής χρονοσειράς από τη βάση δεδομένων.

4.5 Εισαγωγή σεναρίου

Από το μενού Σενάριο → Εισαγωγή καλείται η φόρμα του Σχήματος 4.5, από την οποία ο χρήστης επιλέγει ένα από τα διαθέσιμα στη βάση δεδομένων υδρολογικά σεναρία.



Σχήμα 4.5: Φόρμα εισαγωγής υδρολογικού σεναρίου.

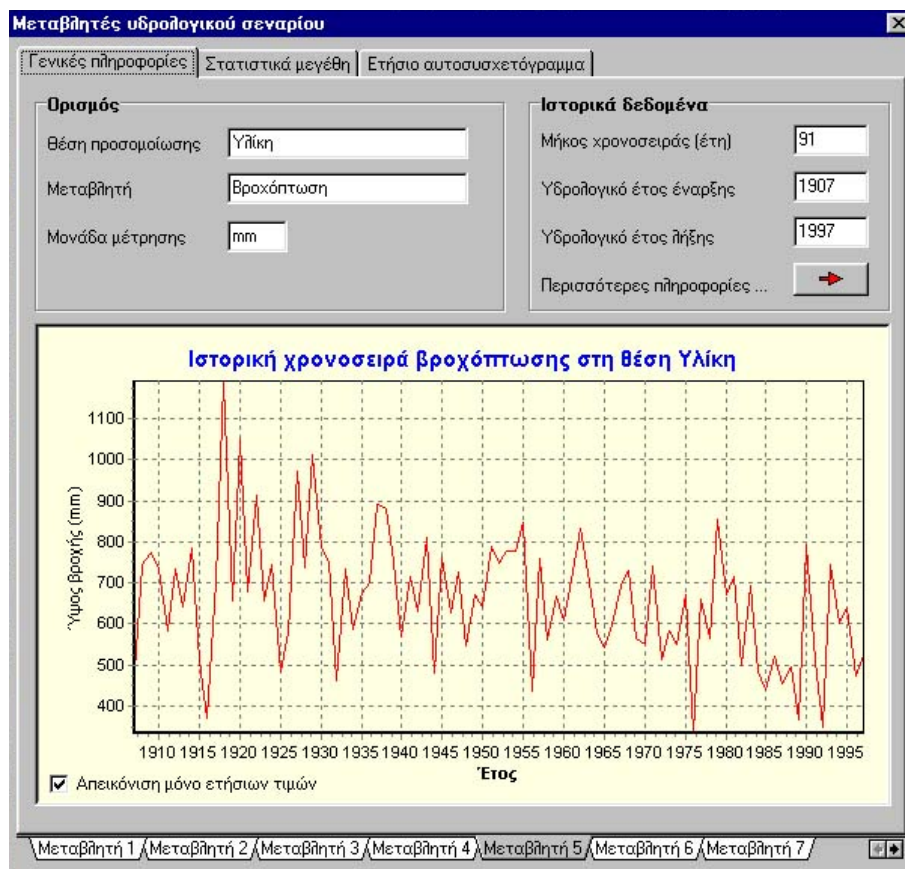
Με το πάτημα του πλήκτρου Ανοιγμα εισάγονται από τη βάση δεδομένων όλες οι συνιστώσες του σεναρίου, δηλαδή οι τιμές των παραμέτρων, οι ιδιότητες των υδρολογικών μεταβλητών και οι αντίστοιχες χρονοσειρές. Μετά τον υπολογισμό των στατιστικών χαρακτηριστικών των χρονοσειρών και των παραμέτρων του στοχαστικού μοντέλου, η φόρμα αποκρύπτεται και επανέρχεται στο προσκήνιο η κύρια οθόνη.

Με το πάτημα του πλήκτρου **Λεπτομέρειες** παρέχεται η δυνατότητα επισκόπησης των βασικών παραμέτρων του σεναρίου, χωρίς δυνατότητα τροποποίησης αυτών.

Με το πάτημα του πλήκτρου **Διαγραφή** ο χρήστης διαγράφει όλες τις συνιστώσες του επιλεγμένου σεναρίου από τη βάση δεδομένων.

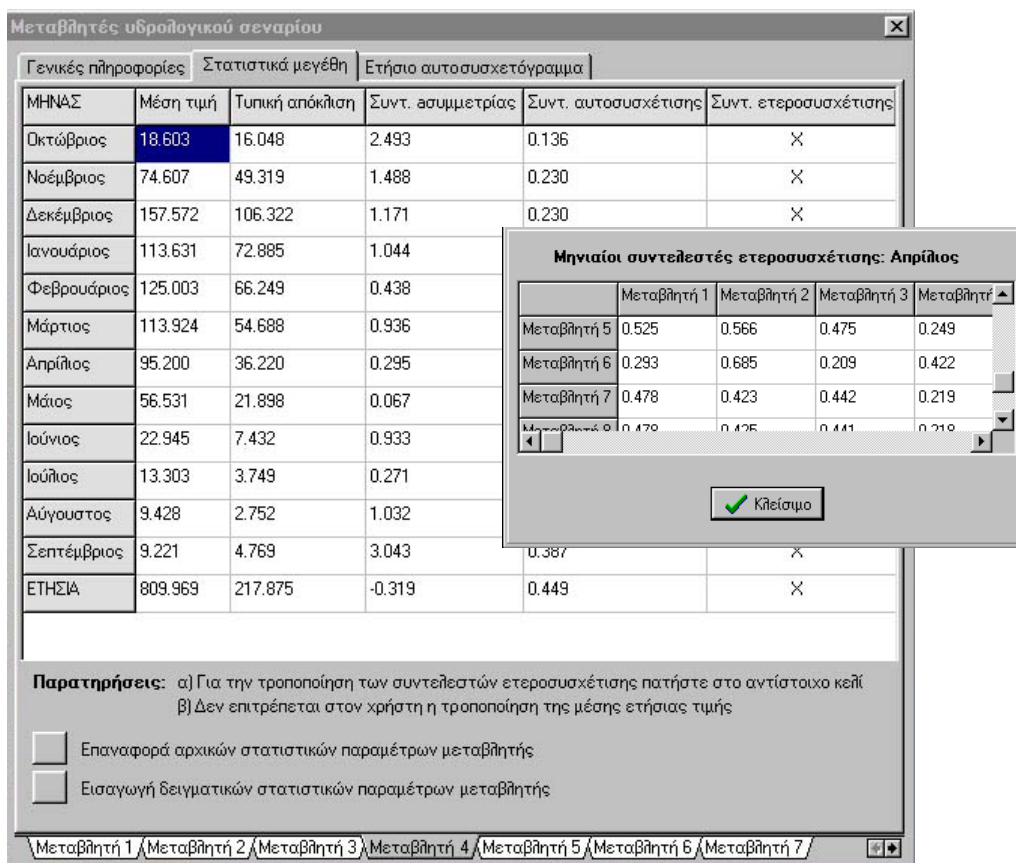
4.6 Παράμετροι υδρολογικών μεταβλητών

Η φόρμα αυτή καλείται από το μενού **Τροποποιήσεις** → **Παράμετροι μεταβλητών** και περιέχει τρεις καρτέλες. Στην πρώτη καρτέλα (Σχήμα 4.6) εμφανίζονται ορισμένες γενικές πληροφορίες σχετικά με την επιλεγμένη μεταβλητή του σεναρίου, καθώς και η γραφική απεικόνιση του ιστορικού δείγματος (εφόσον αυτό υφίσταται), είτε σε ετήσιο είτε σε μηνιαίο βήμα.



Σχήμα 4.6: Η πρώτη καρτέλα της φόρμας επισκόπησης ή τροποποίησης των παραμέτρων των μεταβλητών του σεναρίου.

Πατώντας στην ταμπέλα **Στατιστικά μεγέθη** εμφανίζεται η δεύτερη καρτέλα της φόρμας (Σχήμα 4.7), η οποία περιέχει έναν πίνακα όπου αναγράφονται τα μηνιαία και ετήσια στατιστικά χαρακτηριστικά της επιλεγμένης μεταβλητής. Ο χρήστης μπορεί να τροποποιήσει τα μεγέθη αυτά, με εξαίρεση την ετήσια μέση τιμή, η οποία εξ ορισμού ισούται με το άθροισμα των επιμέρους μέσων τιμών. Εάν η τιμή ενός κελιού μείνει κενή, λαμβάνεται από το πρόγραμμα ως μηδενική. Για την τροποποίηση των συντελεστών ετεροσυσχετίσεως, ο χρήστης επιλέγει το αντίστοιχο κελί και πατώντας το εμφανίζεται ο πίνακας ετεροσυσχετίσεων. Με το πλήκτρο επαναφορά, ακυρώνονται όλες οι εγγραφές που αφορούν την επιλεγμένη μεταβλητή και επανέρχονται οι τιμές που έχουν αποθηκευτεί πιο πρόσφατα. Εναλλακτικά, ο χρήστης μπορεί να εισάγει τα δειγματικά στατιστικά μεγέθη, υπό την προϋπόθεση ότι διατίθεται στη βάση δεδομένων η αντίστοιχη ιστορική χρονοσειρά.



Σχήμα 4.7: Η δεύτερη καρτέλα της φόρμας επισκόπησης ή τροποποίησης των παραμέτρων των μεταβλητών του σεναρίου και στο προσκλήριο η φόρμα τροποποίησης των ετεροσυσχετίσεων.

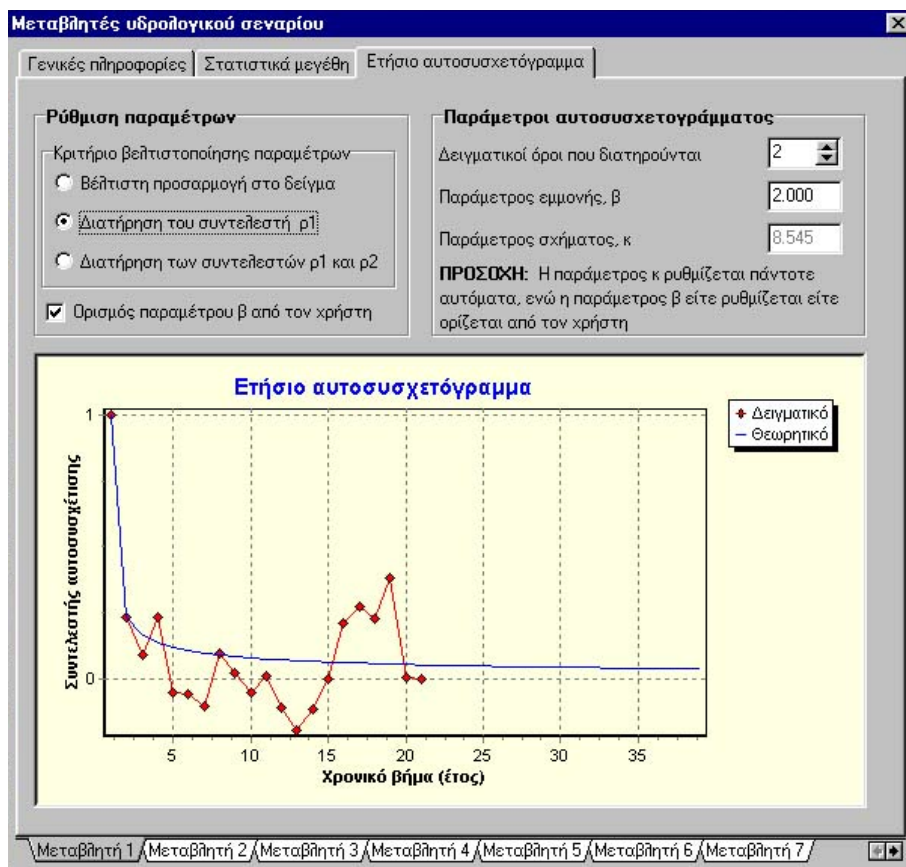
Πατώντας στην ταμπέλα Ετήσιο αυτοσυσχετόγραμμα εμφανίζεται η η τρίτη καρτέλα της φόρμας (Σχήμα 4.8), στην οποία απεικονίζονται οι παράμετροι της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της μεταβλητής, καθώς και η γραφική παράσταση του ιστορικού και θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος. Εφόσον επιλεγεί αυτόματη ρύθμιση της παραμέτρου εμμονής β , (η παράμετρος σχήματος κ ρυθμίζεται πάντοτε αυτόματα) διατίθενται στον χρήστη τρεις επιλογές (βλ. 2.3.1):

(α) Βέλτιστη προσαρμογή του θεωρητικού στο δειγματικό αυτοσυσχετόγραμμα, βάσει της οποίας οι παράμετροι β και κ επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η μέση τετραγωνική απόκλιση των συντελεστών αυτοσυσχέτισης.

(β) Διατήρηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξης (ρ_1), βάσει του οποίου οι παράμετροι β και κ επιλέγονται έτσι ώστε το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα να διέρχεται ακριβώς από το ρ_1 .

(γ) Διατήρηση των συντελεστών αυτοσυσχέτισης 1^{ης} και 2^{ης} τάξης (ρ_1, ρ_2) και, βάσει του οποίου οι παράμετροι β και κ επιλέγονται έτσι ώστε το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα να διέρχεται ακριβώς από τα ρ_1 και ρ_2 . Η επιλογή αυτή είναι διαθέσιμη μόνο εφόσον ο συντελεστής ρ_2 είναι θετικός αριθμός.

Εφόσον η παράμετρος β οριστεί από τον χρήστη ($\beta \geq 0$), τότε μόνο οι δύο πρώτες επιλογές είναι διαθέσιμες. Το γράφημα της θεωρητικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης αναπροσαρμόζεται αυτόματα σε κάθε αλλαγή των παραμέτρων της.



Σχήμα 4.8: Η τρίτη καρτέλα της φόρμας επισκόπησης ή τροποποίησης των παραμέτρων των μεταβλητών του σεναρίου.

4.7 Παράμετροι υδρολογικού σεναρίου

Μέσω της φόρμας αυτής (Σχήμα 4.9), η οποία καλείται από το μενού Τροποποιήσεις → Παράμετροι σεναρίου, ο χρήστης ρυθμίζει τις παραμέτρους που αφορούν τον αλγόριθμο διάσπασης των μητρώων συνδιασπορών, τη γεννήτρια τυχαίων αριθμών, το στοχαστικό μοντέλο των ετήσιων μεταβλητών και τη διαδικασία παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών. Συνοπτικές πληροφορίες για κάθε παράμετρο (σκοπός, πεδίο ορισμού) παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1.

Για τη διευκόλυνση χρηστών οι οποίοι δεν είναι εξοικειωμένοι με το μαθηματικό υπόβαθρο του μοντέλου, συνίσταται η χρήση μόνο των προκαθορισμένων τιμών των παραμέτρων, η οποία πραγματοποιείται με το πάτημα του αντίστοιχου πλήκτρου στο κάτω μέρος της οθόνης. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να αποφευχθούν προβλήματα που αφορούν την ομαλή λειτουργία του προγράμματος (π.χ. εξαιτίας της υπερβολικά αργής σύγκλισης ορισμένων επαναληπτικών αλγορίθμων). Δεν έχει νόημα η χρήση των προκαθορισμένων τιμών για το μήκος και πλήθος των συνθετικών χρονοσειρών που ζητείται να παραχθούν.

Πίνακας: 4.1: Παράμετροι υδρολογικού σεναρίου

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ - ΣΧΟΛΙΑ
Μέγιστο επιτρεπόμενο τετραγωνικό σφάλμα	Το μητρώο b υπολογίζεται βάσει μιας επαναληπτικής διαδικασίας βελτιστοποίησης (μέθοδος συζυγών κλίσεων). Η παράμετρος εκφράζει τη μέγιστη αποδεκτή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (τυπικά όρια 0.001 - 0.1).
Μέγιστος αριθμός εκκινήσεων από διαφορετικές (τυχαίες) τιμές	Για την προσέγγιση της ολικά βέλτιστης λύσης, ο αλγόριθμος συζυγών κλίσεων επαναλαμβάνεται για ένα καθορισμένο πλήθος αρχικών τιμών (1 - 100). Η διαδικασία διακόπτεται μόλις επιτευχθεί η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της συνάρτησης.
Κριτήριο σύγκλισης αλγορίθμου βελτιστοποίησης	Μόλις η σχετική μεταβολή της τιμής της συνάρτησης γίνει μικρότερη από την τιμή της παραμέτρου διακόπτεται ο αλγόριθμος (τυπικά όρια 0.0001 - 0.01).
Παράμετροι αντικειμενικής συνάρτησης ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p$)	Η αντικειμενική συνάρτηση περιλαμβάνει τρεις όρους: α) απόκλιση ως προς τις ετεροσυσχετίσεις, β) απόκλιση ως προς τις διασπορές και γ) απόκλιση ως προς την ασυμμετρία του δείγματος. Τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές βάρους, με τυπικές τιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 100, \lambda_3 = 0.001$, ενώ ο ακέραιος p εκφράζει την σχετική βαρύτητα του μέγιστου ως προς τον μέσο συντελεστή ασυμμετρίας (τυπική τιμή $p = 8$).
Ελάχιστη τιμή διαγώνιου στοιχείου (τριγωνοποίηση μητρώου b)	Σε πρώτη προσέγγιση, το μητρώο b υπολογίζεται με τη μέθοδο τριγωνοποίησης Cholesky. Αν το μητρώο δεν είναι θετικά ορισμένο, τίθεται μια μικρή, μη μηδενική τιμή ορισμού στα διαγώνια στοιχεία του (< 0.1).
Γεννήτρια αριθμών γάμα κατανομής	Η μέθοδος της απόρριψης και ο αλγόριθμος Whittaker είναι ισοδύναμοι ως προς την ακρίβεια και μπορεί να διαφοροποιούνται μόνο ως προς την ταχύτητα.
Αριθμός Seed	Αρχική τιμή ("σπόρος") της ακολουθίας των τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής, οι οποίοι χρησιμοποιούνται βοηθητικά κατά την παραγωγή τυχαίων αριθμών γάμα κατανομής και σε ορισμένες ρουτίνες βελτιστοποίησης. Αλλάζοντας την τιμή εκκίνησης, παράγονται διαφορετικές χρονοσειρές.
Επιλογή μοντέλου	Δεν συστήνεται η εφαρμογή του μοντέλου AR(1) για τη στοχαστική προσομοίωση των ετήσιων διεργασιών.
Εκτίμηση συντελεστών α του μοντέλου SMA	Οι συντελεστές α συνδέονται με ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων με τις αυτοσυνδιασπορές. Οι εξισώσεις έχουν αναλυτική λύση με την εφαρμογή της μεθόδου FFT, η οποία ωστόσο προϋποθέτει μήκος αυτοσυσχετογράμματος που είναι δύναμη του 2. Σε διαφορετική περίπτωση επιλέγεται είτε η αναλυτική επίλυση του ολοκληρώματος Fourier (σχετικά αργή σύγκλιση) είτε η αριθμητική εκτίμηση (πολύ αργή σύγκλιση).
Κριτήριο σύγκλισης αριθμητικής μεθόδου	Αν η εκτίμηση των α γίνεται αριθμητικά, εισάγεται μια αντικειμενική συνάρτηση. Η παράμετρος αποτελεί άνω όριο της σχετικής μεταβολής της τιμής της συνάρτησης του αλγορίθμου βελτιστοποίησης (τυπικά όρια 0.0001 - 0.01).
Συντελεστής αντικειμενικής συνάρτησης (λ)	Συντελεστής βάρους του 2ου όρου της συνάρτησης, ο οποίος εκφράζει την απόκλιση ως προς τις διασπορές (τυπική τιμή 100).

Μήκος αυτοσυσχετογράμματος	Συστήνεται ο ορισμός τιμής που είναι δύναμη του 2, έτσι ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος FFT.
Πλήθος συνθετικών χρονοσειρών	Μέγιστο πλήθος χρονοσειρών 1000, υπό την προϋπόθεση συνολικού αριθμού δεδομένων ≤ 100000 .
Μήκος συνθετικών χρονοσειρών	Μέγιστο μήκος χρονοσειρών 10000, υπό την προϋπόθεση συνολικού αριθμού δεδομένων ≤ 100000 .
Μέγιστη επιτρεπόμενη αρνητική τιμή	Σε ορισμένες περιπτώσεις παράγονται αρνητικές τιμές, εξαιτίας της ασυμμετρίας του δείγματος. Η παράμετρος εκφράζει τη μέγιστη αποδεκτή αρνητική τιμή, η οποία στη συνέχεια τίθεται ίση με μηδέν.
Κριτήριο σύγκλισης αλγορίθμου γέννησης μηνιαίων χρονοσειρών	Για τη διατήρηση της ασυμμετρίας και των ετεροσυσχετίσεων των μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών κατά την εφαρμογή της διαδικασίας επιμερισμού ακολουθείται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος. Η παράμετρος εκφράζει την ανοχή μεταξύ της ετήσιας και των επιμέρους μηνιαίων τιμών, ως ποσοστό της ετήσιας τυπικής απόκλισης (τυπικά όρια 0.05 - 0.5).
Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων	Η παράμετρος εκφράζει το όριο επαναλήψεων του αλγορίθμου, ο οποίος διακόπτεται αν επιτευχθεί το κριτήριο σύγκλισης (τυπικές τιμές 50 - 5000).

Σχήμα 4.9: Η φόρμα ρύθμισης των παραμέτρων του υδρολογικού σεναρίου.

4.8 Επισκόπηση στατιστικών χαρακτηριστικών

Η φόρμα αυτή (Σχήμα 4.10) καλείται από το μενού Επισκόπηση → Στατιστικά χαρακτηριστικά. Στο πρόγραμμα υπολογίζονται τρεις κατηγορίες στατιστικών χαρακτηριστικών, (α) τα ιστορικά, όπως εκτιμώνται από το ιστορικό δείγμα, (β) τα θεωρητικά, τα οποία ορίζονται από τον χρήστη και είναι αυτά που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς και (γ) τα συνθετικά, που εκτιμώνται από τα συνθετικά δεδομένα. Υπενθυμίζεται ότι τα θεωρητικά στατιστικά χαρακτηριστικά μπορούν να διαφοροποιηθούν από τα δειγματικά μόνο μετά από επέμβαση του χρήστη, μέσω της φόρμας τροποποιήσεων των παραμέτρων των υδρολογικών μεταβλητών (Σχήμα 4.7).

Για κάθε κατηγορία στατιστικών απεικονίζονται:

- οι κεντρικές ροπές (μέσες τιμές, τυπικές αποκλίσεις και συντελεστές ασυμμετρίας)
- οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης
- οι συντελεστές ετεροσυσχέτισης μηδενικής τάξης
- οι ακραίες τιμές (μέγιστα, ελάχιστα)

Τα στατιστικά μεγέθη υπολογίζονται τόσο σε μηνιαίο όσο και σε ετήσιο βήμα. Για τις μηνιαίες χρονοσειρές υπολογίζονται μόνο οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης, ενώ για τις ετήσιες υπολογίζεται το δειγματικό αυτοσυσχετόγραμμα μήκους ίσου με το ήμισυ του μήκους της ιστορικής χρονοσειράς.

	Μεταβλητή 1	Μεταβλητή 2	Μεταβλητή 3	Μεταβλητή 4
Μέση τιμή	81.236	11.205	102.283	18.603
Τυπική απόκλιση	58.401	9.117	76.345	16.048
Συντ. ασυμμετρίας	0.868	1.866	0.565	2.493

Σχήμα 4.10: Η φόρμα επισκόπησης των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος.

4.9 Επισκόπηση παραμέτρων ετήσιου μοντέλου

Η φόρμα αυτή (Σχήμα 4.11) καλείται από το μενού Επισκόπηση → Παράμετροι ετήσιου μοντέλου. Οι παράμετροι του μοντέλου συμμετρικών κινούμενων μέσων όρων είναι:

- το μητρώο των συντελεστών a
- οι τιμές του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος
- τα στατιστικά χαρακτηριστικά (μέση τιμή, ασυμμετρία) των βοηθητικών μεταβλητών V
- το μητρώο συνδιασπορών b
- τα στατιστικά χαρακτηριστικά (μέση τιμή, ασυμμετρία) των τυχαίων όρων W
- οι παράμετροι κ , λ και c της κατανομής γάμα

	Μεταβλητή 1	Μεταβλητή 2	Μεταβλητή 3	Μεταβλητή 4	Μεταβλητή 5	Μεταβλητή 6
a(0)	200.8577	134.6350	258.4210	199.6586	150.6669	46.5
a(1)	19.8626	22.5263	30.1053	50.5671	10.0911	9.2
a(2)	9.8541	9.3977	7.3405	18.8086	7.4526	4.1
a(3)	6.4350	5.2264	2.4374	7.7370	6.1974	2.4
a(4)	4.7368	3.3559	0.9741	3.3373	5.4212	1.6
a(5)	3.7293	2.3500	0.4417	1.4804	4.8793	1.1
a(6)	3.0656	1.7441	0.2198	0.6690	4.4731	0.8
a(7)	2.5968	1.3495	0.1175	0.3064	4.1540	0.7

Σχήμα 4.11: Η φόρμα επισκόπησης των παραμέτρων του μοντέλου στοχαστικής προσομοίωσης των ετήσιων μεταβλητών.

4.10 Επισκόπηση παραμέτρων μηνιαίου μοντέλου

Η φόρμα αυτή (Σχήμα 4.12) καλείται από το μενού Επισκόπηση → Παράμετροι μηνιαίου μοντέλου. Οι παράμετροι του περιοδικού μοντέλου αυτοπαλινδρόμησης πρώτης τάξης είναι:

- το διαγώνιο μητρώο των συντελεστών a
- το μητρώο συνδιασπορών b
- τα στατιστικά χαρακτηριστικά (μέση τιμή, ασυμμετρία) των τυχαίων όρων V
- οι παράμετροι κ , λ και c της κατανομής γάμα
- οι συντελεστές λ που χρησιμοποιεί το μοντέλο επιμερισμού

	Μεταβλητή 1	Μεταβλητή 2	Μεταβλητή 3	Μεταβλητή 4
Μεταβλητή 1	8.3284	11.8211	29.2719	14.4262
Μεταβλητή 2	10.0331	2.2547	11.8217	4.1502
Μεταβλητή 3	44.6022	8.5142	63.3108	-0.3829
Μεταβλητή 4	38.7302	7.3861	20.0240	21.2723
Μεταβλητή 5	3.6458	17.2321	-8.7293	3.0722
Μεταβλητή 6	1.4010	1.9313	0.5571	5.3620
Μεταβλητή 7	-1.8021	26.6050	-5.3529	6.3422
Μεταβλητή 8	-0.8833	15.3256	-0.2375	4.0355

Ελάχιστο ποσοστό υπολογισμών: 0.0098

Οκτ. / Νοε. / Δεκ. / Ιαν. / Φεβ. / Μαρ. / Απρ. / Μαϊ. / Ιουν. / Ιουλ. / Αυγ. / Σεπτ.

Σχήμα 4.12: Η φόρμα επισκόπησης των παραμέτρων του μοντέλου στοχαστικής προσομοίωσης των μηνιαίων μεταβλητών

4.11 Επισκόπηση χρονοσειρών

Στη φόρμα αυτή (Σχήμα 4.13), η οποία καλείται από το μενού Επισκόπηση → Χρονοσειρές, απεικονίζονται οι τιμές των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών, σε μηνιαία και ετήσια βάση.

Επισκόπηση χρονοσειρών

Μεταβλητή 1 | Μεταβλητή 2 | Μεταβλητή 3 | Μεταβλητή 4 | Μεταβλητή 5 | Μεταβλητή 6 | Μεταβλητή 7 | Μεταβλητή 8

Ιστορική χρονοσειρά βροχόπτωσης στη θέση Μαραθώνας (Υδρολογικά έτη: 1933 - 1998)

Έτος	Οκτ.	Νοε.	Δεκ.	Ιαν.	Φεβ.	Μαρ.	Απρ.	Μαι.	Ιουν.	Ιουλ.	Αυγ.	Σεπ.	ΕΤΗΣΙΑ
1933	17.1	24.5	152.0	219.0	172.2	48.1	9.2	0.0	5.6	37.2	0.0	0.0	684.9
1934	19.1	130.3	134.3	135.0	52.4	76.3	1.8	1.3	8.9	5.8	0.0	1.3	566.5
1935	39.5	38.2	100.0	82.9	81.3	28.0	16.2	71.5	34.3	39.3	16.5	5.1	552.8
1936	114.6	142.3	173.7	71.2	70.4	19.1	29.4	34.7	0.0	19.8	0.0	5.1	680.3
1937	167.3	87.6	140.7	44.4	177.8	63.3	143.7	6.6	0.0	1.0	6.4	35.7	874.5
1938	64.4	63.0	190.2	108.7	95.0	181.6	13.8	5.0	153.3	0.0	12.8	41.2	929.0
1939	27.4	71.4	142.4	148.8	57.6	40.8	41.8	80.6	35.2	52.2	2.8	0.0	701.0
1940	27.8	99.4	141.8	76.8	74.4	21.8	18.0	17.2	32.0	0.0	0.0	4.3	513.5
1941	142.8	51.8	88.0	156.0	121.6	39.0	25.2	1.0	33.8	0.0	11.0	1.0	671.2
1942	127.1	83.6	26.0	57.2	51.0	74.0	52.8	52.2	11.2	0.0	0.0	41.2	576.3
1943	11.4	30.6	38.8	68.2	105.4	83.4	30.8	24.8	1.2	1.2	86.2	0.0	482.0
1944	85.6	13.0	137.4	86.2	68.7	40.8	14.4	0.4	5.6	0.0	0.4	29.0	481.5
1945	25.6	90.3	185.4	115.2	40.2	73.2	40.7	45.7	0.0	11.9	0.0	0.0	628.2
1946	54.2	21.7	234.1	183.3	22.5	9.6	3.8	2.3	14.7	0.0	0.0	9.9	556.1
1947	54.0	72.3	77.3	63.3	136.5	30.6	74.2	15.3	48.3	1.3	0.0	100.8	673.9
1948	10.0	139.8	96.3	130.1	56.9	58.5	19.2	10.7	23.2	25.7	0.5	40.9	611.8
1949	67.4	77.1	50.8	49.7	9.5	106.8	36.6	18.8	4.0	0.0	0.0	34.5	455.2

Ιστορική / Ομάδα 1 / Ομάδα 2 /

Σχήμα 4.13: Η φόρμα επισκόπησης των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών.

4.12 Στοχαστική πρόγνωση

Η φόρμα αυτή (Σχήμα 4.14) καλείται από το μενού Λειτουργίες → Στοχαστική πρόγνωση. Σε αυτή τη φόρμα ο χρήστης ορίζει το πλήθος των σεναρίων (μέχρι 1000) και τα υδρολογικά έτη έναρξης και λήξης της πρόγνωσης, υπό την προϋπόθεση συνολικού αριθμού δεδομένων μικρότερου των 100000. Κατά κανόνα, η στοχαστική πρόγνωση πραγματοποιείται για έναν μεγάλο αριθμό σεναρίων και έχει χρονικό ορίζοντα λίγων ετών ή δεκαετιών.

Η διαδικασία πρόγνωσης πραγματοποιείται θέση προς θέση και κατά συνέπεια δεν απαιτεί κοινό ιστορικό δείγμα. Το μοντέλο χρησιμοποιεί ως πληροφορία εισόδου το τελευταίο συνεχές δείγμα ετήσιων τιμών που διατίθεται για κάθε μεταβλητή του σεναρίου και παράγει συνθετικές χρονοσειρές που έχουν ως ορίζοντα το έτος που ορίζει ο χρήστης. Το έτος έναρξης έχει νόημα μόνο στην αποθήκευση των σεναρίων. Τα χαρακτηριστικά του δείγματος για κάθε μεταβλητή απεικονίζονται στον πίνακα της φόρμας.

Για την κλήση της διαδικασίας ο χρήστης πρέπει να πατήσει το πλήκτρο Εκτέλεση. Μετά το πέρας των υπολογισμών η φόρμα αποκρύπτεται και επανέρχεται στο προσκήνιο η κύρια οθόνη.

Παράμετροι πρόγνωσης

Πλήθος σεναρίων πρόγνωσης: 100

Υδρολογικό έτος έναρξης της πρόγνωσης: 2000

Υδρολογικό έτος λήξης της πρόγνωσης: 2009

Ιστορικό δείγμα που χρησιμοποιεί το μοντέλο

	Έναρξη	Λήξη	Μήκος
Μεταβλητή 1	1958	1996	39
Μεταβλητή 2	1980	1998	19
Μεταβλητή 3	1970	1998	29
Μεταβλητή 4	1970	1998	29
Μεταβλητή 5	1907	1997	91

Εκτέλεση

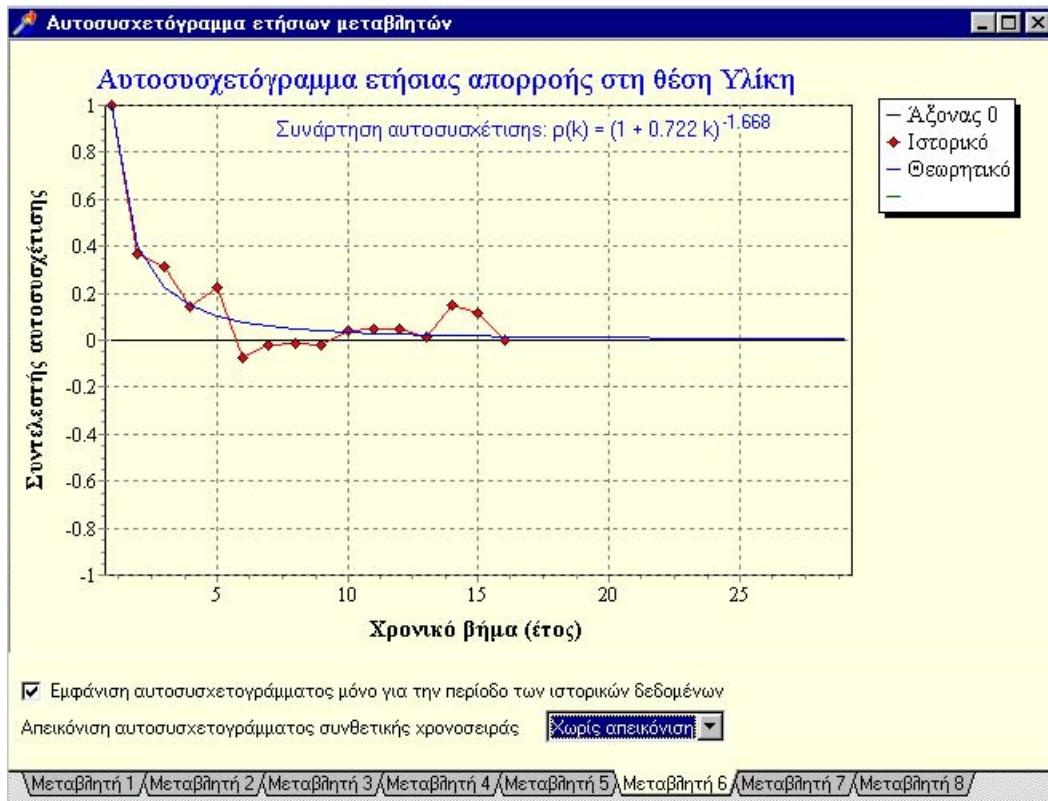
Σχήμα 4.14: Η φόρμα ρύθμισης του μοντέλου στοχαστικής πρόγνωσης.

4.13 Γραφική παράσταση ετήσιου αυτοσυσχετογράμματος

Στη φόρμα αυτή (Σχήμα 4.15), η οποία καλείται από το μενού Γραφήματα → Ετήσιο αυτοσυσχετόγραμμα, απεικονίζονται τρεις κατηγορίες διαγραμμάτων:

- Το δειγματικό ετήσιο αυτοσχετόγραμμα, το οποίο έχει μήκος ίσο με το ήμισυ του ιστορικού δείγματος.
- Το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα, το οποίο μπορεί να απεικονιστεί είτε για περίοδο ίση με το μήκος του ιστορικού δείγματος είτε στο πλήρες του μήκος. Σημειώνεται ότι το αυτοσυσχετόγραμμα είναι συμμετρικό ως προς τον κατακόρυφο άξονα.
- Το αυτοσυσχετόγραμμα για κάθε ομάδα συνθετικών χρονοσειρών, εφόσον φυσικά έχουν παραχθεί συνθετικές σειρές.

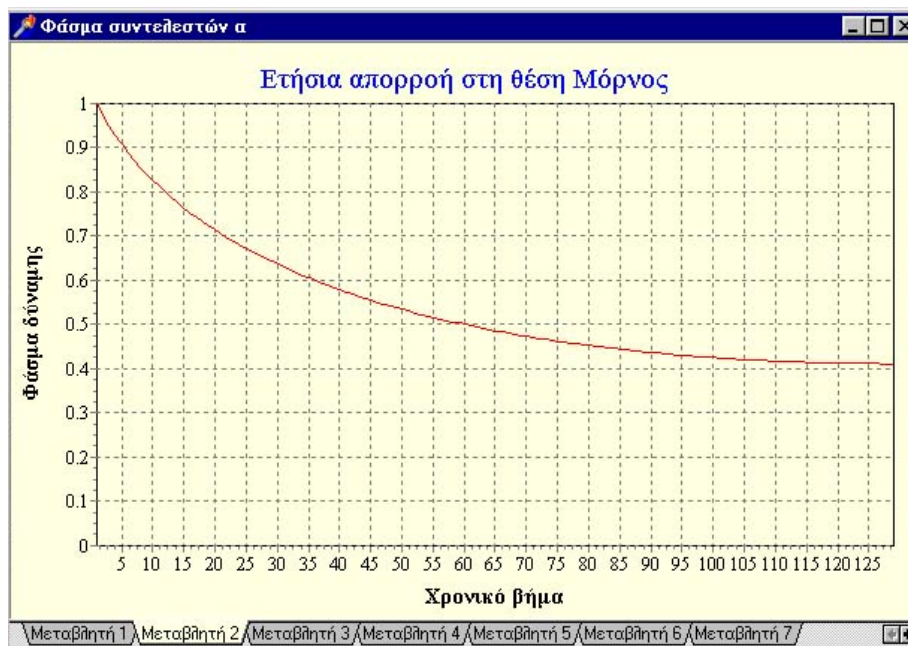
Στο άνω μέρος του διαγράμματος αναγράφεται η θεωρητική εξίσωση αυτοσυσχέτισης, η οποία είναι συνάρτηση του χρονικού βήματος k . Λόγω συμμετρίας ισχύει $\rho(k) = \rho(-k)$.



Σχήμα 4.15: Η φόρμα απεικόνισης του αυτοσυσχετογράμματος των ετήσιων μεταβλητών.

4.14 Γραφική παράσταση φάσματος συντελεστών α

Η φόρμα αυτή (Σχήμα 4.16) καλείται από το μενού Γραφήματα \rightarrow Φάσμα συντελεστών α . Υπενθυμίζεται ότι το φάσμα ισχύος, όπως και το αυτοσυσχετόγραμμα, απεικονίζουν τη δομή της μνήμης της στοχαστικής ανέλιξης (βλ. 2.3.1).

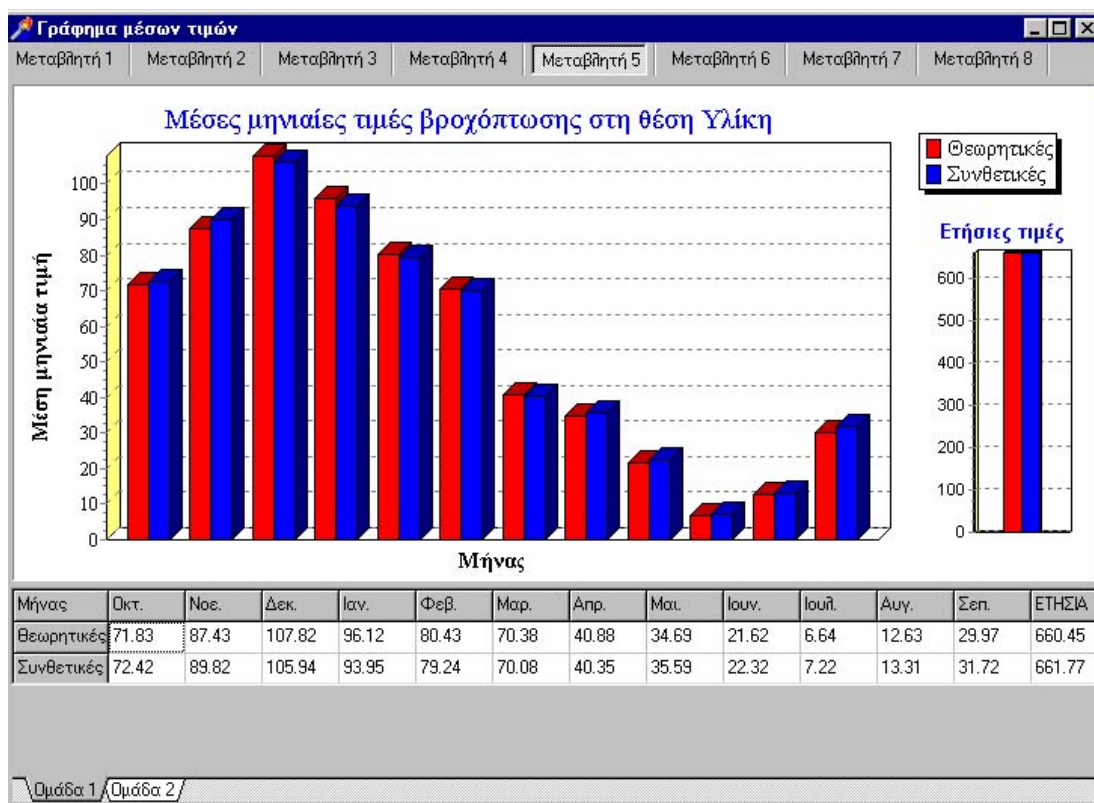


Σχήμα 4.16: Η φόρμα απεικόνισης του φάσματος των παραμέτρων του ετήσιου μοντέλου SMA.

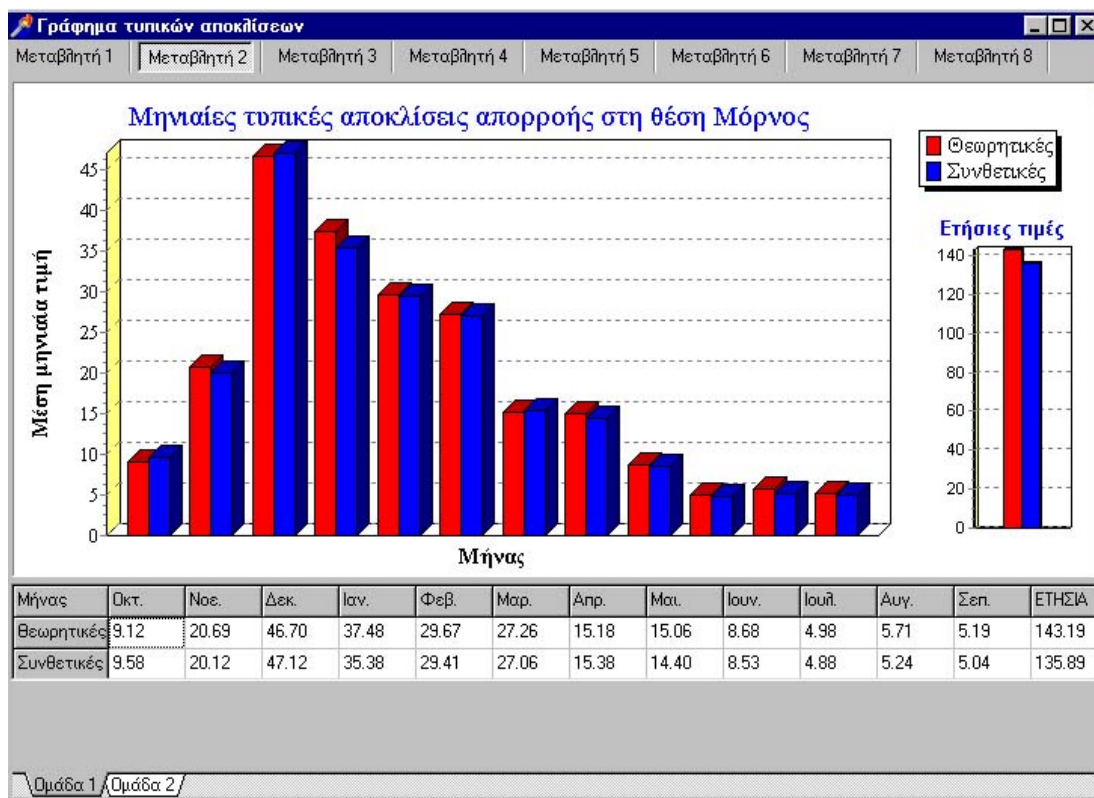
4.15 Γραφική απεικόνιση στατιστικών χαρακτηριστικών

Οι φόρμες απεικόνισης των στατιστικών χαρακτηριστικών (Σχήματα 4.17 ως 4.21) καλούνται από τα μενού Γραφήματα → Μέσες τιμές, Γραφήματα → Τυπικές αποκλίσεις, Γραφήματα → Συντελεστές ασυμμετρίας, Γραφήματα → Αυτοσυσχετίσεις 1ης τάξης, Γραφήματα → Ετεροσυσχετίσεις. Σε κάθε φόρμα απεικονίζονται τα μηνιαία και ετήσια στατιστικά μεγέθη, τόσο τα θεωρητικά (τα οποία μπορεί να ταυτίζονται με τα ιστορικά) όσο και τα συνθετικά. Στη φόρμα των ετεροσυσχετίσεων απεικονίζονται επιπλέον και οι συννορθωμένες τιμές των συντελεστών, όπως προκύπτουν μετά την ανασύνθεση του μητρώου συνδιασπορών. Οι τιμές αυτές προσεγγίζουν τις θεωρητικές, εφόσον ο πρώτος όρος της αντικειμενικής συνάρτησης εκτίμησης του μητρώου **b** τείνει στο μηδέν.

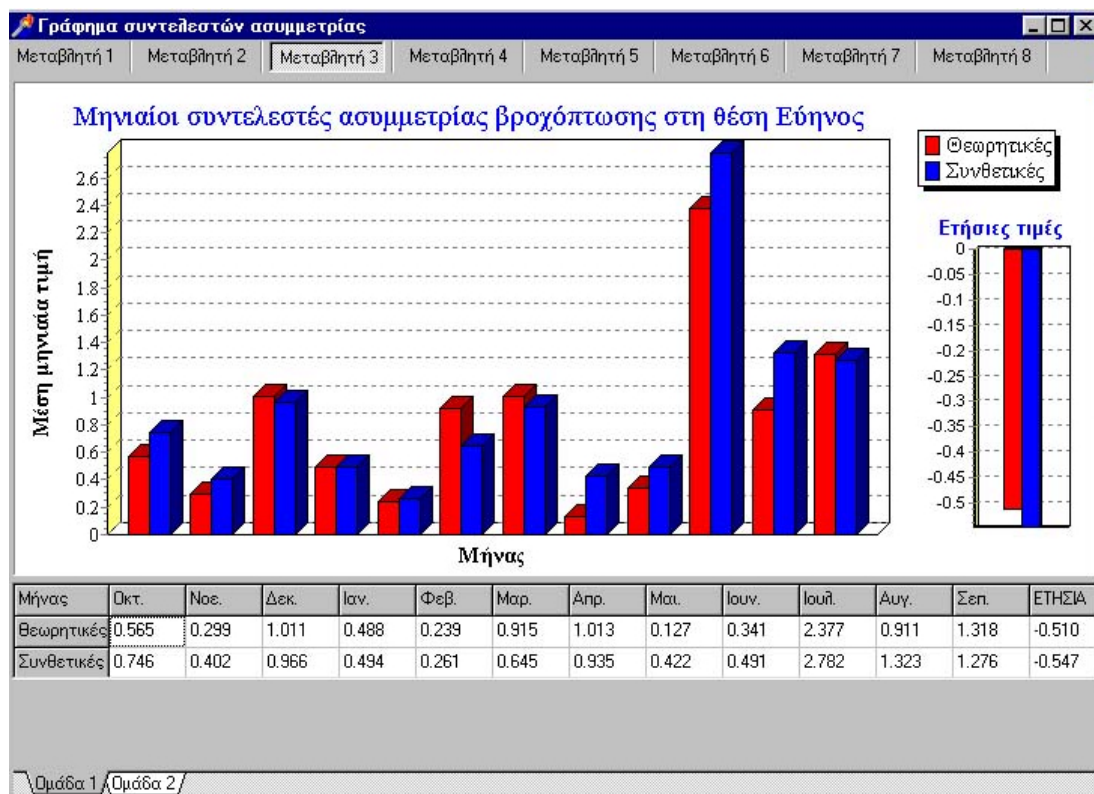
Όσο καλύτερη είναι η ρύθμιση του μοντέλου και όσο μεγαλύτερο το μήκος των συνθετικών χρονοσειρών, τόσο καλύτερη είναι η προσαρμογή των συνθετικών στατιστικών μεγεθών στα θεωρητικά. Εάν ο χρήστης παρατηρήσει ότι υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ συνθετικών και θεωρητικών τιμών, θα πρέπει να επέμβει στη ρύθμιση του μοντέλου, μεταβάλλοντας τις παραμέτρους της φόρμας «Παράμετροι υδρολογικού σεναρίου». Εάν η διαφορά εμφανίζεται στους συντελεστές ασυμμετρίας, τότε ο χρήστης μπορεί να επέμβει στις επιλογές του αλγόριθμου γέννησης μηνιαίων χρονοσειρών, θέτοντας αυστηρότερο κριτήριο σύγκλισης ή αυξάνοντας τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων. Εάν η διαφορά εμφανίζεται στις τυπικές αποκλίσεις ή στους συντελεστές ετεροσυσχετίσεων, τότε ο χρήστης θα πρέπει να επέμβει στις παραμέτρους του αλγόριθμου αποσύνθεσης του μητρώου συνδιασπορών. Όσον αφορά διαφορές ως προς τις μέσες τιμές ή τις αυτοσυσχετίσεις, αυτές κατά κανόνα οφείλονται στο μικρό μήκος των συνθετικών χρονοσειρών (< 100 έτη) και όχι σε κακή ρύθμιση του μοντέλου.



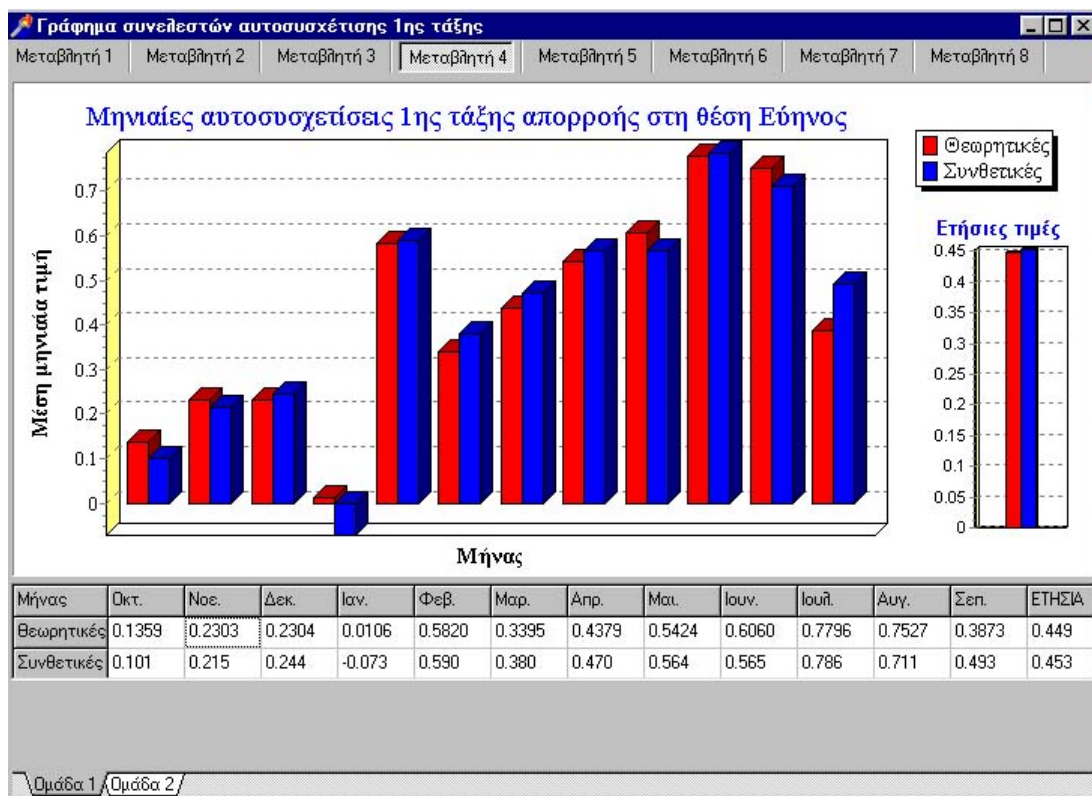
Σχήμα 4.17: Η φόρμα απεικόνισης των μέσων τιμών των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών.



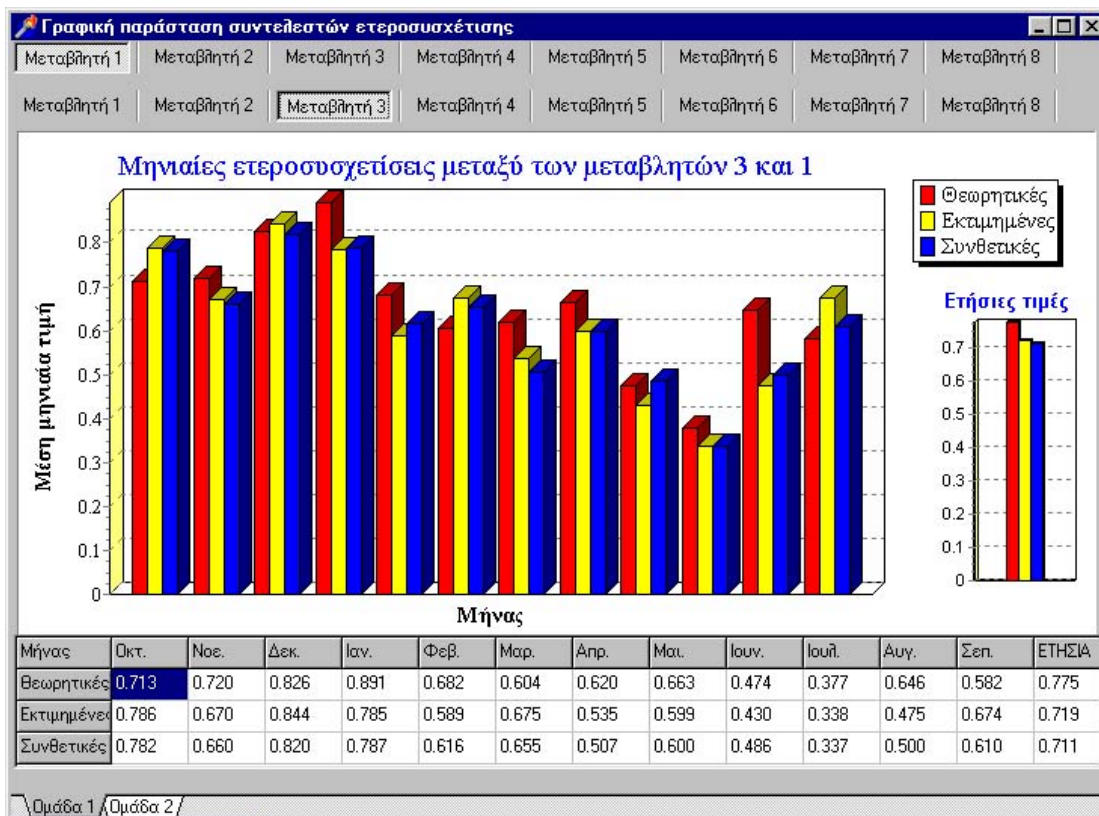
Σχήμα 4.18: Η φόρμα απεικόνισης των τυπικών αποκλίσεων των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών.



Σχήμα 4.19: Η φόρμα απεικόνισης των συντελεστών ασυμμετρίας των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών.



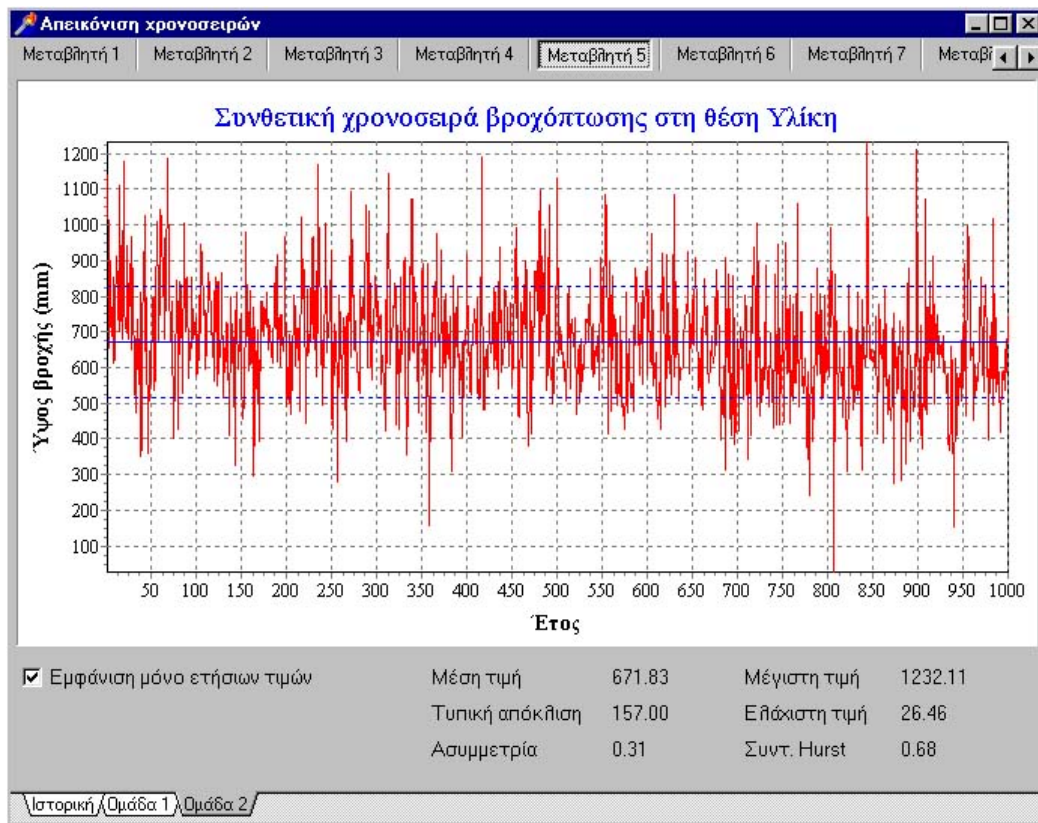
Σχήμα 4.20: Η φόρμα απεικόνισης των συντελεστών αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών.



Σχήμα 4.21: Η φόρμα απεικόνισης των συντελεστών ετεροσυσχέτισης μηδενικής τάξης των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών.

4.16 Γραφική απεικόνιση χρονοσειρών

Η φόρμα αυτή (Σχήμα 4.22) καλείται από το μενού Γραφήματα → Χρονοσειρές. Στην οθόνη εμφανίζεται η γραφική παράσταση της ετήσιας χρονοσειράς της μεταβλητής που έχει επιλεγεί. Επίσης απεικονίζονται η μέση τιμή ως συνεχής γραμμή και τα όρια μεταξύ της μέσης τιμής και μιας τυπικής απόκλισης ως διακεκομμένη γραμμή. Στο κάτω μέρος της οθόνης αναγράφονται ορισμένα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά, μεταξύ των οποίων και ο συντελεστής Hurst, ο οποίος αποτελεί μέτρο της εμμονής της χρονοσειράς (όσο ο συντελεστής τείνει προς τη μονάδα, τόσο πιο έμμονη είναι η χρονοσειρά, δηλαδή τόσο πιο ομαδοποιημένα εμφανίζονται τα υγρά και τα ξηρά έτη). Αν ο χρήστης απενεργοποιήσει την επιλογή «Εμφάνιση μόνο ετήσιων τιμών» απεικονίζεται η ίδια χρονοσειρά σε μηνιαίο βήμα, αλλά χωρίς τις παραπάνω πληροφορίες.



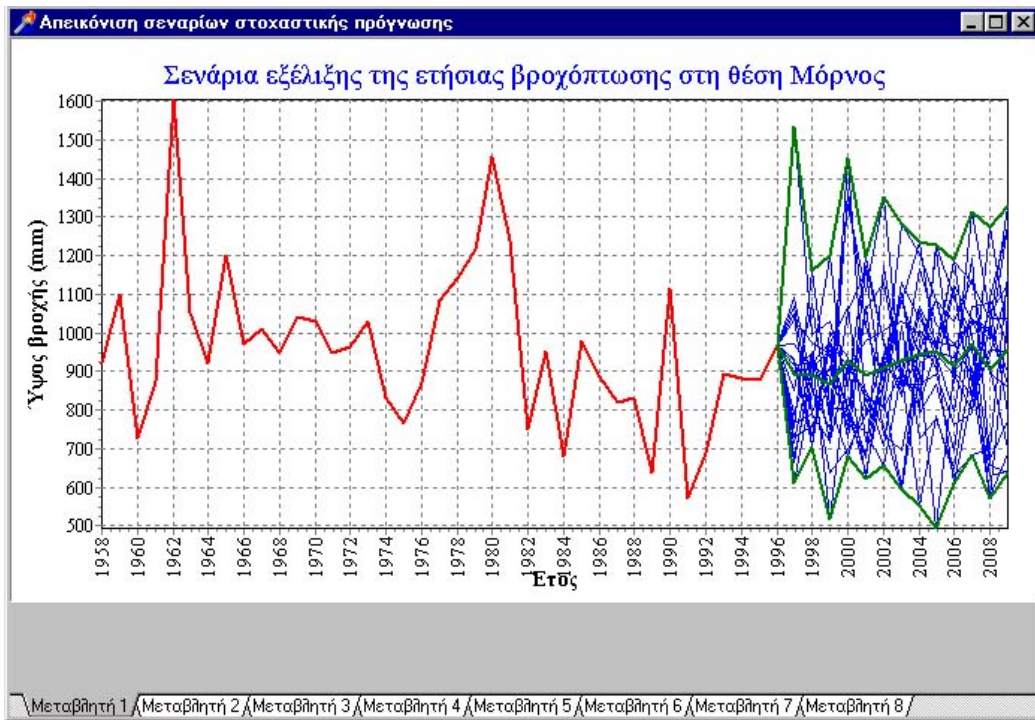
Σχήμα 4.22: Η φόρμα απεικόνισης των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών.

4.17 Γραφική απεικόνιση σεναρίων πρόγνωσης

Στη φόρμα αυτή (Σχήμα 4.23), η οποία καλείται από το μενού Γραφήματα → Σενάρια πρόγνωσης μόνο εφόσον έχουν παραχθεί συνθετικές χρονοσειρές με στοχαστική πρόγνωση, απεικονίζονται:

- η χρονοσειρά του ιστορικού δείγματος, η οποία παρίσταται με μια παχιά κόκκινη γραμμή
- οι χρονοσειρές που αναφέρονται στα σενάρια πρόγνωσης, οι οποίες παρίστανται με γραμμές μπλε χρώματος
- το «μέσο» σενάριο πρόγνωσης καθώς και η άνω και κάτω περιβάλλουσα, που παρίστανται με τρεις παχιές πράσινες γραμμές.

Σημειώνεται ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των σεναρίων πρόγνωσης, τόσο η γραμμή που απεικονίζει το «μέσο» σενάριο τείνει να σταθεροποιηθεί γύρω από τη μέση τιμή του ιστορικού δείγματος.



Σχήμα 4.23: Η φόρμα απεικόνισης των σεναρίων πρόγνωσης.

5 Εφαρμογές

Η *Κασταλία* χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών βροχής, απορροής και εξάτμισης στους ταμιευτήρες Μόρνου, Ευήνου, Υλίκης και Μαραθώνα. Οι συνθετικές χρονοσειρές αποτέλεσαν στοιχείο εισόδου του μοντέλου προσομοίωσης του υδροδοτικού συστήματος της Αθήνας, βάσει του οποίου υλοποιήθηκε το διαχειριστικό σχέδιο της ΕΥΔΑΠ (Κουτσογιάννης κ.ά., 2000).

5.1 Ιστορικά δεδομένα

Τα ιστορικά δείγματα προέκυψαν μετά από επεξεργασίες των υδρομετεωρολογικών δεδομένων της περιοχής μελέτης, οι οποίες περιγράφονται αναλυτικά από τους Ευστρατιάδη κ.ά. (2000). Όλα τα δεδομένα εκφράστηκαν σε ισοδύναμα ύψη (σε χιλιοστά). Τα μήκη των δειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και οι ετήσιες μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις τους παρατίθενται στον Πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1: Πρωτογενείς χρονοσειρές που χρησιμοποιήθηκαν στις εφαρμογές

Μεταβλητή	Δείγμα	Μέση ετήσια τιμή (mm)	Τυπική απόκλιση (mm)
Βροχόπτωση Μόρνου	1958-96	961.0	206.6
Απορροή Μόρνου	1979-98	392.6	143.2
Εξάτμιση Μόρνου	1979-98	1252.0	41.6
Βροχόπτωση Ευήνου	1970-98	1240.1	266.8
Απορροή Ευήνου	1970-98	810.0	217.9
Εξάτμιση Ευήνου	1973-93	1224.5	64.5
Βροχόπτωση Υλίκης	1907-97	660.4	155.8
Απορροή Υλίκης	1970-98	122.6	50.2
Εξάτμιση Υλίκης	1976-96	1343.2	30.5
Βροχόπτωση Μαραθώνα	1933-98	592.2	131.9
Απορροή Μαραθώνα	1933-98	112.3	42.0
Εξάτμιση Μαραθώνα	1933-80	1311.0	164.7

Σημειώνεται ότι ως προς την απορροή στη λίμνη Υλίκη, το διατιθέμενο δείγμα είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό που τελικά χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση των παραμέτρων της στοχαστικής προσομοίωσης. Συγκεκριμένα, διατίθεται δείγμα απορροής από το υδρολογικό έτος 1907-08, το οποίο έχει προκύψει μέσω αναγωγής των μετρημένων παροχών στη Διώρυγα Καρδίτσας (Ευστρατιάδης κ.ά., 2000). Η μέση ετήσια τιμή του συνολικού δείγματος ανέρχεται σε 412.6 hm^3 ή 167.8 mm , ενώ τα αντίστοιχα μεγέθη για το δείγμα των 30 τελευταίων ετών είναι 301.4 hm^3 και 122.6 mm αντίστοιχα. Η σημαντική αυτή διαφοροποίηση οφείλεται τόσο σε κλιματικούς παράγοντες όσο και στη μείωση της απορροής του Βοιωτικού Κηφισού εξαιτίας των αντλήσεων.

5.2 Παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών μήκους 2000 ετών

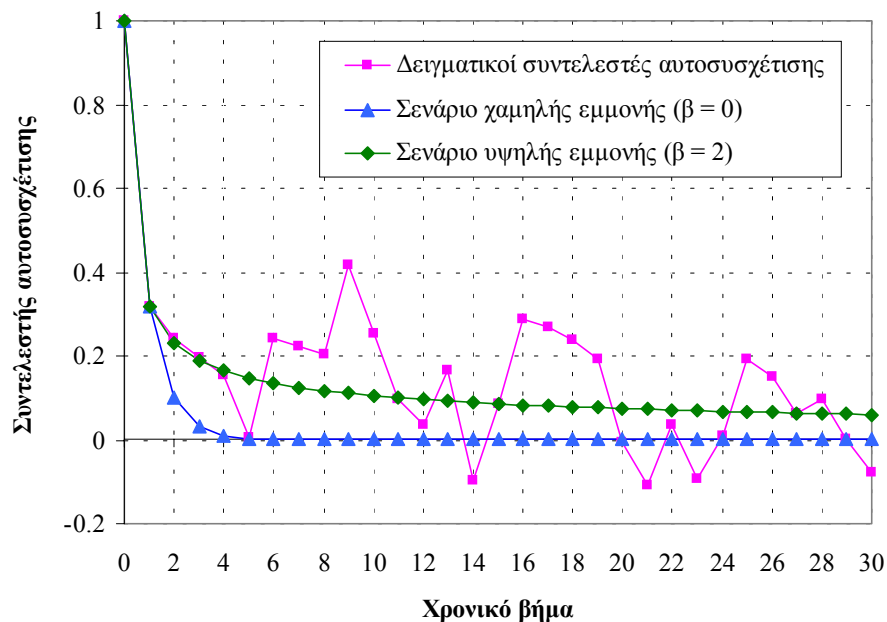
Για την εκτίμηση της αξιοπιστίας και της μακροπρόθεσμης απόδοσης του υδροδοτικού συστήματος, παρήχθησαν συνθετικές χρονοσειρές μήκους 2000 ετών. Διερευνήθηκαν δύο υδρολογικά σενάρια, ένα

χαμηλής εμμονής (ευμενές σενάριο) και ένα υψηλής εμμονής (δυσμενές σενάριο). Τα σενάρια διαφοροποιήθηκαν μόνο ως προς την παράμετρο εμμονής β της θεωρητικής συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς (βλ. 2.3.1). Στο σενάριο χαμηλής εμμονής τέθηκε $\beta = 0$, δηλαδή στις μεταβλητές προσαρμόστηκε ένα μοντέλο ARMA. Αντίθετα, στο σενάριο υψηλής εμμονής τέθηκε η τιμή $\beta = 2$, η οποία προέκυψε μετά από διερεύνηση (βλ. 5.2.1). Οι λοιπές παράμετροι της στοχαστικής προσομοίωσης εκτιμήθηκαν συναρτήσει των στατιστικών χαρακτηριστικών των δειγμάτων. Και στις δύο περιπτώσεις έγινε η παραδοχή ότι το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα διατηρεί τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης.

5.2.1 Εκτίμηση της παραμέτρου εμμονής

Για την εκτίμηση της παραμέτρου εμμονής χρησιμοποιήθηκε η πλήρης χρονοσειρά απορροής στην Υλίκη, βάσει της οποίας υπολογίστηκαν οι δειγματικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης. Η χρονοσειρά αυτή είναι η πιο αξιόπιστη σχετικά, δεδομένου ότι το μήκος της ξεπερνά τα 90 έτη. Προσαρμόζοντας το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα στο δειγματικό, προέκυψε παράμετρος εμμονής της τάξης του $\beta = 2$, τιμή η οποία ελήφθη ως η κοινή παράμετρος εμμονής για όλες τις υδρολογικές διεργασίες της περιοχής μελέτης.

Στο Σχήμα 5.1 απεικονίζεται το ετήσιο αυτοσυσχετόγραμμα, όπως προκύπτει από το πήρες δείγμα απορροής στη Υλίκη (1907-1998). Επιπλέον απεικονίζονται τα θεωρητικά αυτοσυσχετογράμματα για τα σενάρια χαμηλής και υψηλής εμμονής, τα οποία έχουν προσαρμοστεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούν τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1ης τάξης που ισούται με $\rho_1 = 0.32$. Οι αντίστοιχοι συντελεστές σχήματος της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι ίσοι με $\kappa = 1.15$ και $\kappa = 4.49$ αντίστοιχα.

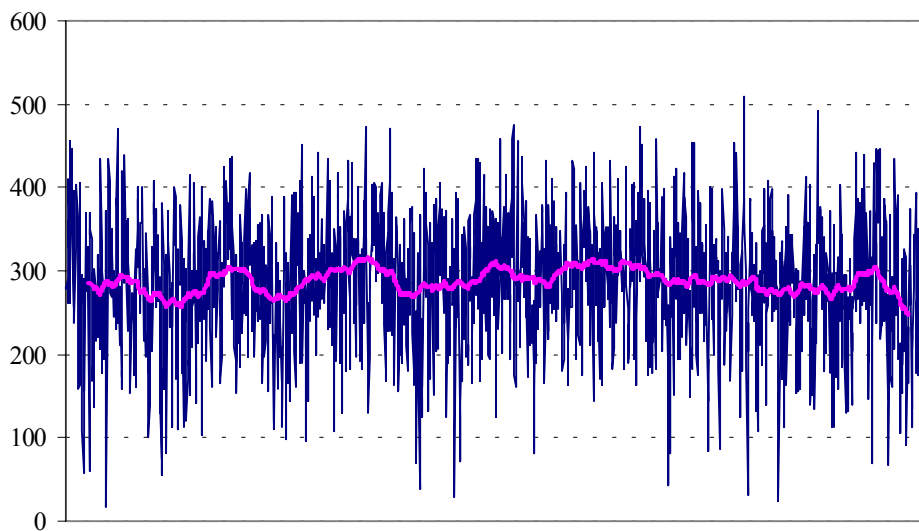


Σχήμα 5.1: Γραφική απεικόνιση του δειγματικού και των θεωρητικών αυτοσυσχετογραμμάτων της ετήσιας απορροής στη λίμνη Υλίκη.

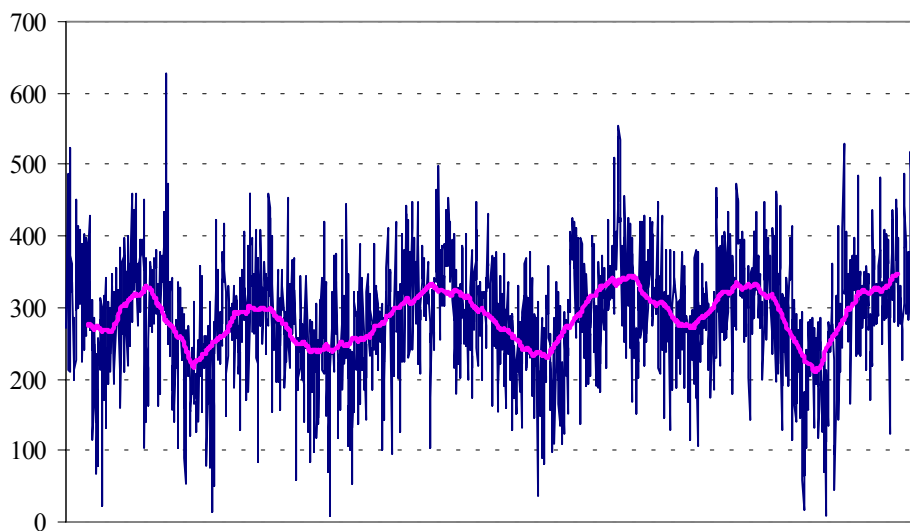
5.2.2 Συνθετικές χρονοσειρές

Στα Σχήματα 5.2 και 5.3 απεικονίζονται ενδεικτικά δύο από τις συνθετικές χρονοσειρές που παρήχθησαν, και οι οποίες αναφέρονται στην ετήσια απορροή στον ταμιευτήρα Ευήνου για τα σενάρια χαμηλής και υψηλής εμμονής αντίστοιχα. Η διαφοροποίηση που εισάγει η χρήση διαφορετικής παραμέτρου εμμονής της θεωρητικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι εμφανής. Στην

πρώτη περίπτωση η καμπύλη των κινούμενων μέσων όρων εμφανίζει μικρές διακυμάνσεις γύρω από τη μέση τιμή, ενώ στη δεύτερη περίπτωση παρουσιάζει μακράς χρονικής κλίμακας διακυμάνσεις, χωρίς κανονικότητα.



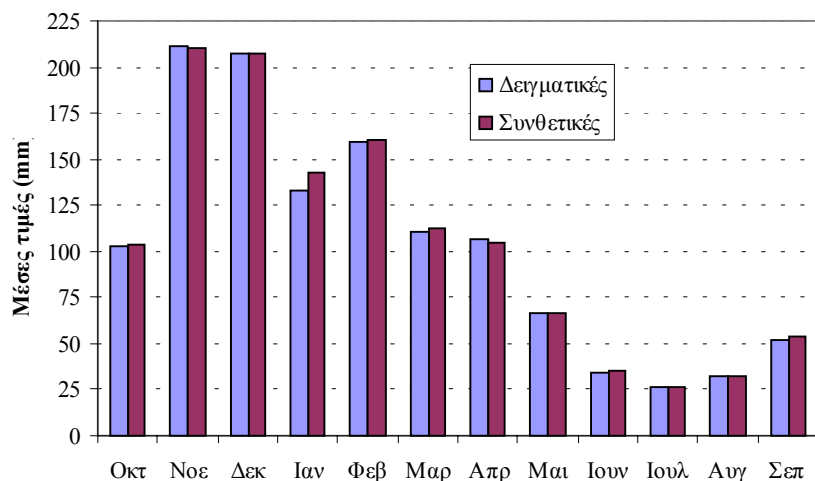
Σχήμα 5.2: Συνθετική χρονοσειρά ετήσιας απορροής 2000 ετών στον ταμιευτήρα Ευήνου (σε hm^3) και κινούμενοι μέσοι όροι 100 ετών –Σενάριο χαμηλής εμμονής.



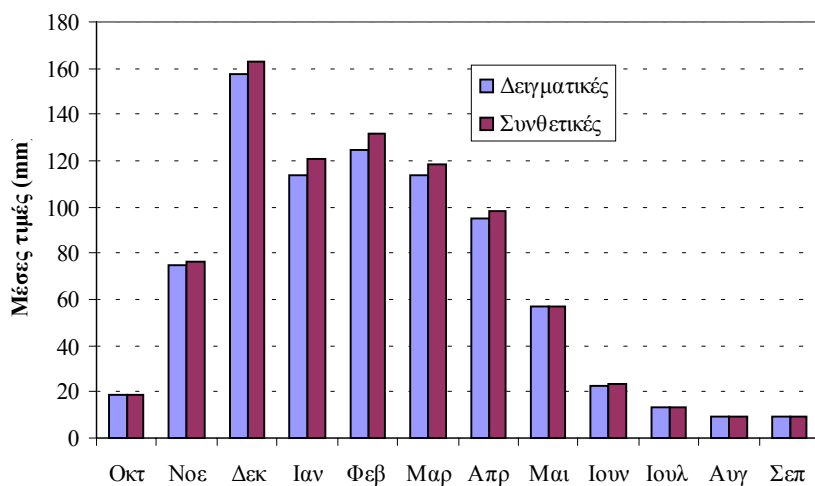
Σχήμα 5.3: Συνθετική χρονοσειρά ετήσιας απορροής 2000 ετών στον ταμιευτήρα Ευήνου (σε hm^3) και κινούμενοι μέσοι όροι 100 ετών – Σενάριο υψηλής εμμονής.

5.2.3 Σύγκριση στατιστικών χαρακτηριστικών

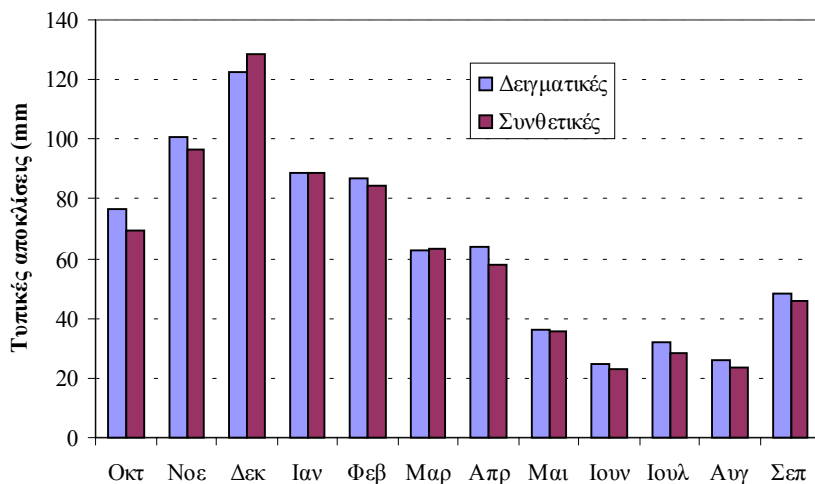
Στο εδάφιο αυτό παρατίθενται συγκριτικά διαγράμματα των δειγματικών και των συνθετικών στατιστικών χαρακτηριστικών για τις χρονοσειρές βροχόπτωσης και απορροής στον ταμιευτήρα Ευήνου (Σχήματα 5.4 ως 5.12). Είναι προφανές ότι το συνδυαστικό σχήμα στοχαστικής προσομοίωσης που επιλέχθηκε διατηρεί όλες τις ουσιώδεις στατιστικές παραμέτρους του ιστορικού δείγματος με μεγάλη ακρίβεια. Είναι χαρακτηριστικό ότι το μοντέλο μπορεί να αναπαράγει τόσο τις πολύ υψηλές ασυμμετρίες (μεγαλύτερες του 3) όσο και τις αρνητικές ασυμμετρίες. Επιπλέον, η διαδικασία αναγωγής κατά την εφαρμογή του επιμερισμού δεν αλλοιώνει τους δειγματικούς συντελεστές ετεροσυσχέτισης.



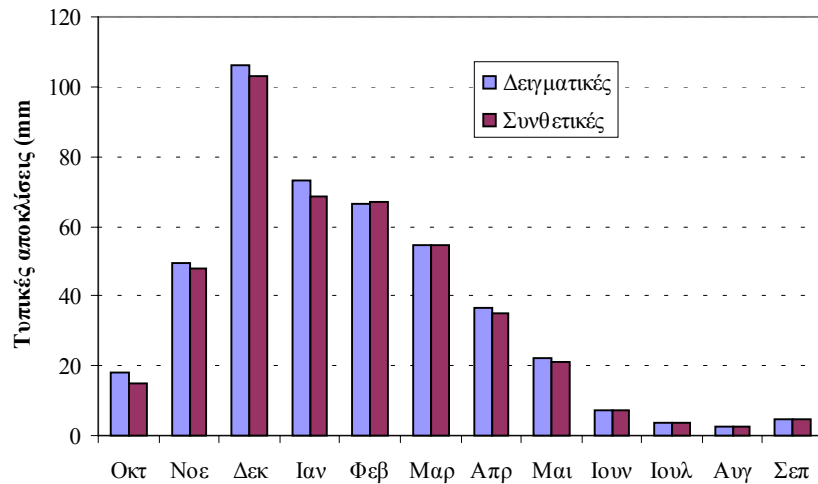
Σχήμα 5.4: Σύγκριση ιστορικών και συνθετικών μέσων μηνιαίων τιμών της βροχόπτωσης στον ταμιευτήρα Ευήνου.



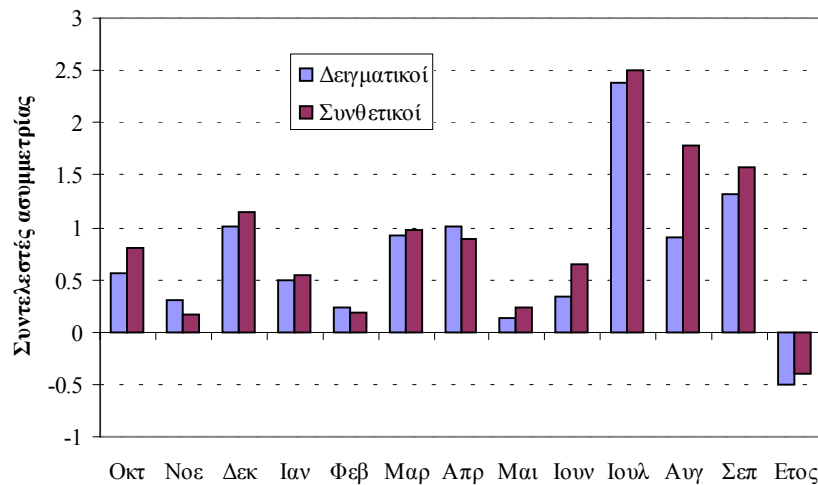
Σχήμα 5.5: Σύγκριση ιστορικών και συνθετικών μέσων μηνιαίων τιμών της απορροής στον ταμιευτήρα Ευήνου.



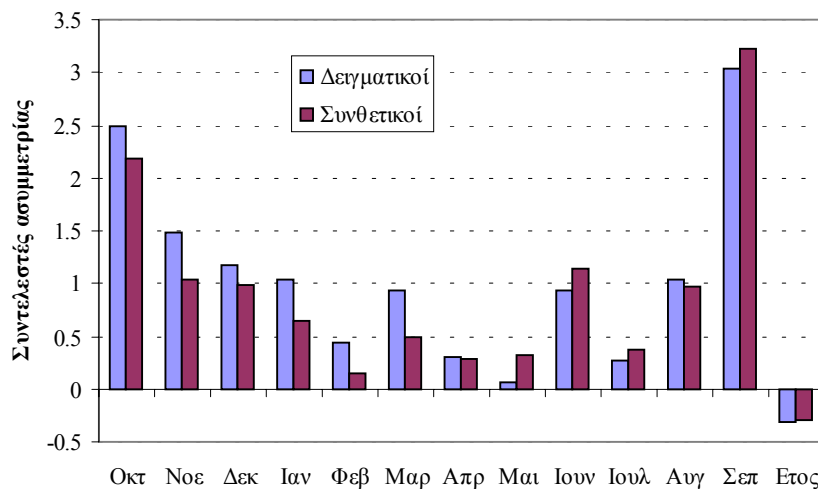
Σχήμα 5.6: Σύγκριση μηνιαίων ιστορικών και συνθετικών τυπικών αποκλίσεων της βροχόπτωσης στον ταμιευτήρα Ευήνου.



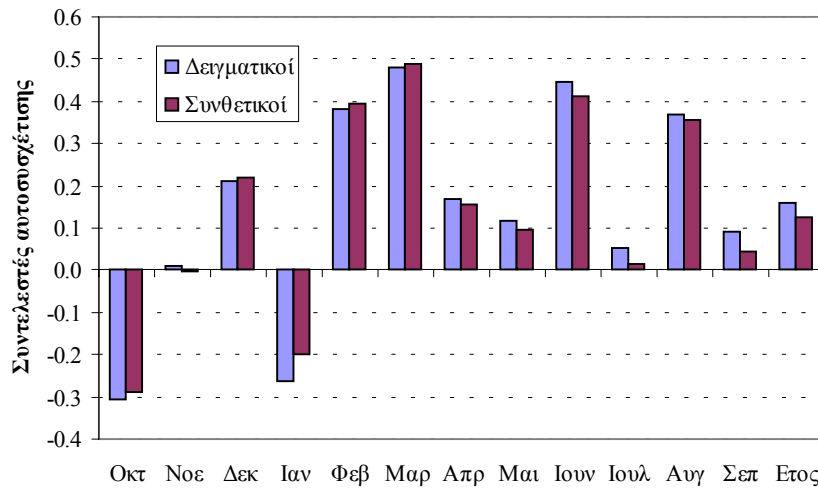
Σχήμα 5.7: Σύγκριση μηνιαίων ιστορικών και συνθετικών τυπικών αποκλίσεων της αποροής στον ταμιευτήρα Ευήνου.



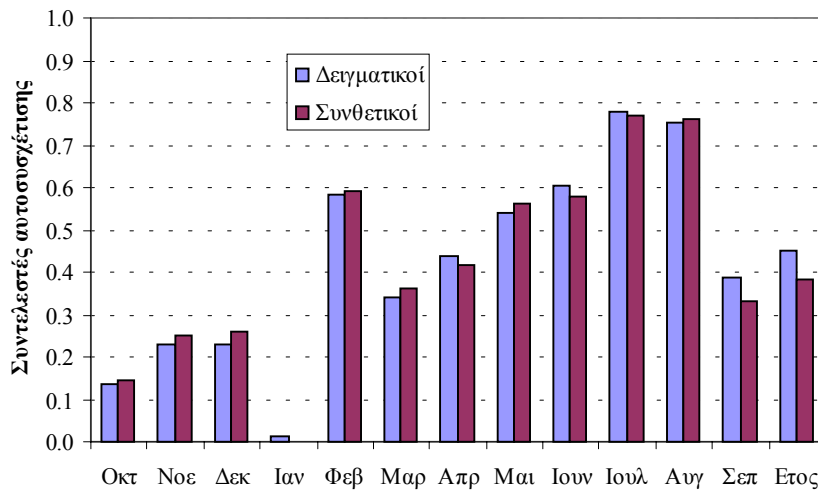
Σχήμα 5.8: Σύγκριση ιστορικών και συνθετικών συντελεστών ασυμμετρίας της βροχόπτωσης στον ταμιευτήρα Ευήνου.



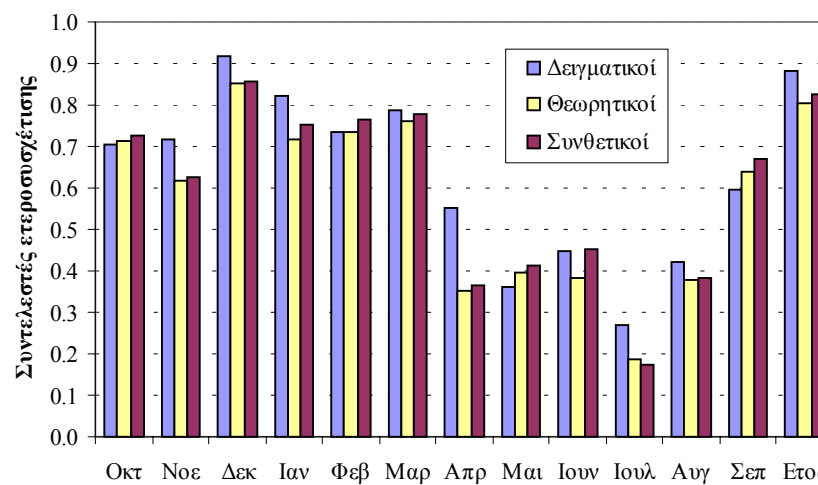
Σχήμα 5.9: Σύγκριση ιστορικών και συνθετικών συντελεστών ασυμμετρίας της αποροής στον ταμιευτήρα Ευήνου.



Σχήμα 5.10: Σύγκριση ιστορικών και συνθετικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης 1ης τάξης της βροχόπτωσης στον ταμιευτήρα Ευήνου.



Σχήμα 5.11: Σύγκριση ιστορικών και συνθετικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης 1ης τάξης της απορροής στον ταμιευτήρα Ευήνου.

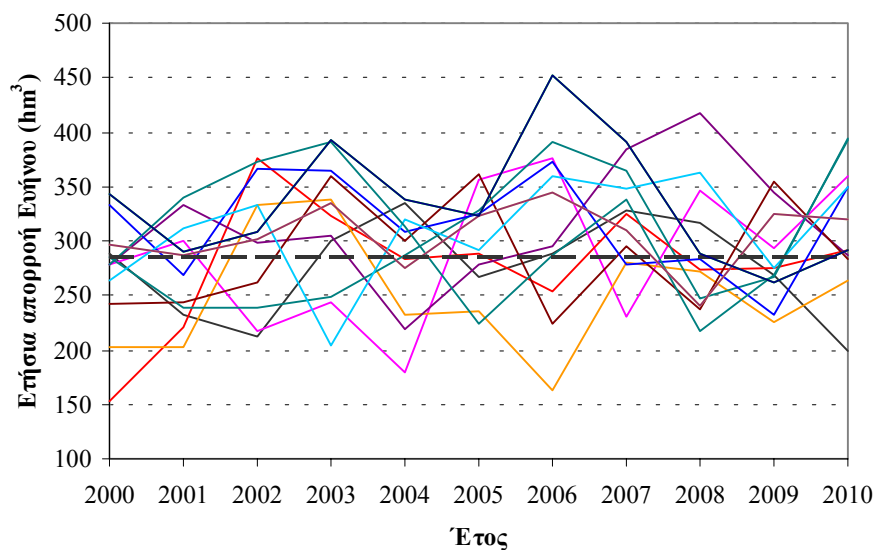


Σχήμα 5.12: Σύγκριση ιστορικών, θεωρητικών (συνορθωμένων) και συνθετικών συντελεστών ετεροσυσχέτισης μεταξύ βροχόπτωσης και απορροής στον ταμιευτήρα Ευήνου.

5.3 Σενάρια στοχαστικής πρόγνωσης

Για τον καθορισμό της διαχειριστικής πολιτικής της ΕΥΔΑΠ κατά τη προσεχή πενταετία, με έμφαση στο τρέχον υδρολογικό έτος (2000-01), έγινε προσομοίωση της λειτουργίας του υδροδοτικού συστήματος για 200 σενάρια εισροών και απωλειών των ταμιευτήρων (Κουτσογιάννης κ.ά., 2000). Τα σενάρια αυτά παρήχθησαν μέσω στοχαστικής πρόγνωσης, με βάση τις ίδιες παραδοχές που υιοθετήθηκαν για τη γέννηση των συνθετικών χρονοσειρών μήκους 2000 ετών με ορίζοντα δέκα ετών.

Στο Σχήμα 5.13 απεικονίζονται 15 από τα σενάρια εξέλιξης της ετήσιας απορροής στον ταμιευτήρα Ευήνου. Τα ισοπίθανα αυτά σενάρια έχουν παραχθεί με αναφορά στις ιστορικές ετήσιες τιμές της περιόδου 1970-98. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα, για το τρέχον υδρολογικό έτος, οι περισσότερες προβλέψεις βρίσκονται κάτω από τη μέση τιμή, η οποία απεικονίζεται με διακεκομμένη γραμμή. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη χαμηλή υδροφορία των τελευταίων ετών, η οποία λόγω της εμμονής αναμένεται (με τη στατιστική έννοια του όρου) να επηρεάσει και τα αμέσως επόμενα έτη.



Σχήμα 5.13: Γραφική απεικόνιση 15 σεναρίων ετήσιας απορροής στον ταμιευτήρα Ευήνου για την δεκαετία 2000-2010 (με διακεκομμένη απεικονίζεται η μέση τιμή του ιστορικού δείγματος).

Αναφορές

- Ευστρατιάδης, Α., Ι. Ναλμπάντης, και Ν. Μαμάσης, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 8, Υδρομετεωρολογικά δεδομένα και επεξεργασίες, ΕΜΠ, ΤΥΠΥΘΕ, Αθήνα, 2000.
- Καραβοκυρός, Γ., Δ. Κουτσογιάννης, και Ν. Μανδέλος, *Εκτίμηση και διαχείριση των υδατικών πόρων της Στερεάς Ελλάδας*, Φάση Γ, Τεύχος 40, Ανάπτυξη μοντέλου προσομοίωσης και βελτιστοποίησης του υδροσυστήματος της Ανατολικής Στερεάς Ελλάδας, ΕΜΠ, ΤΥΠΥΘΕ, Αθήνα, 1999.
- Καραβοκυρός, Γ., Ι. Ναλμπάντης, Α. Κουκουβίνος, Α. Ευστρατιάδης, Ν. Μαμάσης, Κ. Κωνσταντινίδου, Ν. Δαμιανόγλου, Σ. Πολιτάκη, Σ. Ναλπαντίδου, και Α. Ξανθάκης, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 1, Ανάλυση απαιτήσεων, ΕΜΠ-ΕΥΔΑΠ, Αθήνα, 2000.
- Κουτσογιάννης, Δ., Γ. Καραβοκυρός, Ι. Ναλμπάντης, Α. Κουκουβίνος, Α. Ευστρατιάδης, Ν. Μαμάσης, Β. Τσουκαλά, Ν. Δαμιανόγλου, Σ. Πολιτάκη, Δ. Γκριντζιά, και Α. Ξανθάκης, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 5, Σχέδιο διαχείρισης του υδροδοτικού συστήματος της Αθήνας-Έτος 2000-2001, ΕΜΠ-ΕΥΔΑΠ, Αθήνα, 2000.
- Κουτσογιάννης, Δ., *Εκτίμηση και διαχείριση των υδατικών πόρων της Στερεάς Ελλάδας*, Φάση Α, Τεύχος 7, Προγράμματα στοχαστικής προσομοίωσης υδρολογικών χρονοσειρών, ΕΜΠ, ΤΥΠΥΘΕ, Αθήνα, 1992.
- Κουτσογιάννης, Δ., και Α. Μανέτας, *Εκτίμηση και διαχείριση των υδατικών πόρων της Στερεάς Ελλάδας*, Φάση Β, Τεύχος 12, Μοντέλο στοχαστικής προσομοίωσης υδρολογικών χρονοσειρών με απλή τεχνική επιμερισμού – Εγχειρίδιο χρήσης προγράμματος, ΕΜΠ, ΤΥΠΥΘΕ, Αθήνα, 1995.
- Κουτσογιάννης, Δ., *Στατιστική Υδρολογία*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1996.
- Μανέτας, Α., *Ανάπτυξη Λογισμικού για την Πολυμεταβλητή Στοχαστική Προσομοίωση Υδρολογικών Μεταβλητών με Χρήση Επιμεριστικών Μεθόδων*, Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1994.
- Παπακώστας, Α., *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 6, Σχεδιασμός και υλοποίηση κεντρικής βάσης δεδομένων, ΕΜΠ, ΤΥΠΥΘΕ, Αθήνα, 2000.
- Bloomfield, P., *Fourier Analysis of Time Series*, Willey, New York, 1976.
- Box, G. E., and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden Day, 1970.
- Bras, R. L., and I. Rodriguez-Iturbe, *Random Functions and Hydrology*, Dover Publications, 1993.
- Grygier, J. C., and J. R. Stedinger, Condensed disaggregation procedures and conservation corrections for stochastic hydrology, *Water Resources Research*, 24(10), 1574-1584, 1988.

- Grygier, J. C., and J. R. Stedinger, *SPIGOT, A synthetic streamflow generation software package*, Technical description, Version 2.5, School of Civil and Environmental Engineering, Ithaca, New York, 1990.
- Hurst, H. E., Long-term storage capacity of reservoirs, *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, 116, pp. 776-808, 1951.
- Kirby, W., Algebraic boundness of sample statistics, *Water Resources Research*, 10(2), 220-222, 1974.
- Kottegoda, N. T., *Stochastic Water Resources Technology*, Macmillan Press, London, 1980.
- Koutsoyiannis, D., A generalized mathematical framework for stochastic simulation and forecast of hydrologic time series, *Water Resources Research*, 36(6), 1519-1534, 2000.
- Koutsoyiannis, D., and A. Manetas, Simple disaggregation by accurate adjusting procedures, *Water Resources Research*, 32(7), 2105-2117, 1996.
- Koutsoyiannis, D., Optimal decomposition of covariance matrices for multivariate stochastic models in hydrology, *Water Resources Research*, Vol. 35(4), pp. 1219-1229, 1999.
- Lane, W. L., and D. K. Flevert, Applied stochastic techniques, User's manual, personal computer version, Bureau of Reclamation, Eng. and Res. Cent., Denver, Colorado, 1990.
- Mandelbrot, B. B., Une class de processus stochastiques homothetiques a soi: Application a la loi climatologique de H. E. Hrst, *Compte Rendus Academie Science*, 260, 3284-3277, 1965.
- Mandelbrot, B. B., and J. R. Wallis, Computer experiments with fractional Gaussian noises, Parts 1, 2 and 3, *Water Resources Research*, 5(1), 1969.
- Matalas, N. C., and J. R. Wallis, Generation of synthetic flow sequences, in *Systems Approach to Water Management*, edited by A. K. Biswas, McGraw-Hill, New York, 1976.
- Mejia, J. M., I. Rodriguez-Iturbe, and D. R. Dawdy, Streamflow simulation, 2, The broken line process as a potential model for hydrologic simulation, *Water Resources Research*, 8(4), 931-941, 1972.
- Papoulis, A., *Probability, Random Functions and Stochastic Processes*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge Univ. Press, New York, 1992.
- Rubinstein, R. Y., *Monte Carlo Optimization, Simulation and Sensitivity of Queuing Networks*, John Willey, 1986.
- Salas, J. D., Analysis and modeling of hydrologic time series, Chapter 19, *Handbook of Hydrology*, edited by D. Maidment, McGraw-Hill, New York, 1993.
- Salas, J. D., J. W. Delleur, V. Yevjevich, and W. L. Lane, *Applied Modeling of Hydrologic Time Series*, Water Resources Publications, Littleton, Colorado, 1988.
- Sommerville, I., *Software Engineering*, Fifth Edition, Addison-Wesley, 1998.
- Todini, E., The preservation of skewness in linear disaggregation schemes, *Journal of Hydrology*, 47, 199-214, 1980.
- Valencia, D., and J. C. Schaake, Disaggregation processes in stochastic hydrology, *Water Resources Research*, 9(3), 211-219, 1973.

Wallis, J. R., N. Matalas, and J. R. Slack, Just a moment!, *Water Resources Research*, 10(2), 211-219, 1974.

Whittaker, J., A note on the generation of gamma random variables with non-integral shape parameter, *Floods and Droughts, Proceeding of the 2nd International Hydrology Symposium*, Colorado State University Press, Fort Collins, Colorado, 1972.

Παράρτημα: Πίνακες βάσης δεδομένων

Η περιγραφή των πινάκων της βάσης γίνεται με την ακόλουθη μορφή:

Όνομασία πεδίου	Τύπος	Πεδίο τιμών	Περιγραφή
Ιδιότητα 1			
Ιδιότητα 2			
Ιδιότητα <i>n</i>			

Το σύμβολο (*) δίπλα στο όνομα ενός πεδίου υποδηλώνει ότι αυτό λειτουργεί ως αναγνωριστικό του αντικειμένου και αποτελεί κλειδί της κλάσης. Οι τύποι πεδίου που χρησιμοποιούνται είναι:

A[x] : Αλφαριθμητικό πεδίο αποτελούμενο από x κατά μέγιστο χαρακτήρες

N : Πραγματικός αριθμός

I : Ακέραιος αριθμός

B : Λογική (boolean) έκφραση

E : Απαριθμητός (enumerated) τύπος

Πίνακας 1: Πεδία πίνακα υδρολογικών σεναρίων

Όνομασία πεδίου	Τύπος	Πεδίο τιμών	Περιγραφή
ScenarioName (*)	A[20]		Όνομασία υδρολογικού σεναρίου.
Info	A[256]		Πληροφορίες σχετικά με το σενάριο.
Subperiods	I	1 - 100	Υποδιάρθρωση χρονικών περιόδων. Δεδομένου ότι εξ ορισμού η χρονική περίοδος είναι το έτος και η υποδιάρθρωσή του ο μήνας, το πεδίο λαμβάνει την τιμή 12.
Locations	I	1 - 10	Πλήθος υδρολογικών μεταβλητών.
SyntheticPeriods	I	1 - 10 000	Μήκος συνθετικών χρονοσειρών.
TimeSeries	I	1 - 1000	Πλήθος ομάδων συνθετικών χρονοσειρών.
HV_model	E	SMA ή ARI	Το πεδίο λαμβάνει τις τιμές α SMA και β ARI ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται το μοντέλο SMA ή AR(1) για την προσομοίωση των ετήσιων μεταβλητών.
LV_model	E	PAR1	Εξ ορισμού η προσομοίωση των μηνιαίων μεταβλητών γίνεται με το μοντέλο PAR(1). Σε επόμενη έκδοση του συστήματος ενδέχεται να εισαχθούν και άλλα σχήματα στοχαστικής προσομοίωσης.
Length_a			Πλήθος συντελεστών a του σχήματος γέννησης ετήσιων μεταβλητών (βλ. 2.3.2).
Biased	B	True / False	Ψευδές εφόσον γίνεται αμερόληπτη εκτίμηση των στατιστικών παραμέτρων (Κουτσογιάννης, 1996).
Alpha_solution	E	Numerical ή Analytical ή Fourier	Το πεδίο λαμβάνει τις τιμές α Numerical, β Analytical και γ Fourier ανάλογα με το αν η εκτίμηση των συντελεστών a γίνεται αριθμητικά (μέσω βελτιστοποίησης) ή αναλυτικά (με επίλυση του ολοκληρώματος Fourier) με την μέθοδο Fast Fourier Transform (βλ. 2.3.3)
Lamda	N	1 - 10000	Συντελεστής βάρους του όρου διατήρησης των διασπορών στην αντικειμενική συνάρτηση (35). Χρησιμοποιείται εφόσον η εκτίμηση των συντελεστών a γίνεται μέσω βελτιστοποίησης.
Alpha_toler	N	0.0001 - 1	Κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου των συζυγών κλίσεων για την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης (35). Χρησιμοποιείται εφόσον η εκτίμηση των a γίνεται μέσω βελτιστοποίησης.
B_limit	N	0.001 - 0.1	Ελάχιστη τιμή διαγώνιου στοιχείου μητρώου b . Χρησιμοποιείται εφόσον η αρχική εκτίμηση του μητρώου γίνεται μέσω της τριγωνοποίησης Cholesky (βλ. 2.5.1).
Param_P	I	2 - 10	Δύναμη στην οποία υψώνεται η νόρμα (73), η οποία εισάγεται ως όρος ποινής στη συνάρτηση εκτίμησης του μητρώου b (βλ. 2.5.2).
Lamda1	N	1 - 10	Συντελεστής βάρους του πρώτου όρου της αντικειμενικής συνάρτησης υπολογισμού του μητρώου b , ο οποίος εκφράζει τη διατήρηση των συνδιασπορών.

Lamda2	N	100 - 10000	Συντελεστής βάρους του δεύτερου όρου της αντικειμενικής συνάρτησης υπολογισμού του μητρώου b , ο οποίος εκφράζει τη διατήρηση των διασπορών.
Lamda3	N	0.0001 - 0.01	Συντελεστής βάρους του τρίτου όρου της αντικειμενικής συνάρτησης υπολογισμού του μητρώου b , ο οποίος εκφράζει τη διατήρηση των ασυμμετριών.
B_toler	N	0.0001 - 1	Κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου των συζυγών κλίσεων για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (75).
B_Convergence	N	0.001 - 1	Μέγιστη αποδεκτή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (75).
B_MaxIter	I	1 - 100	Μέγιστος αριθμός στοχαστικά ανεξάρτητων εκκινήσεων της μεθόδου των συζυγών κλίσεων για την εκτίμηση του βέλτιστου μητρώου b .
NegativeLimit	N	0 - 10	Μέγιστη αρνητική τιμή η οποία μπορεί να γίνει αποδεκτή κατά τη γέννηση συνθετικών χρονοσειρών.
SeedNumber	I	1 - 2 ³²	Αρχικός όρος ακολουθίας ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών.
RandomModel	E	Whittaker ή Rejection	Επιλογή γεννήτριας τυχαίων αριθμών μεταξύ των δύο μεθόδων που περιγράφονται στο εδάφιο 2.7.3.
MaxIterDZ	I	1 - 5000	Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων μέχρι την επίτευξη μιας ελάχιστης απόκλισης μεταξύ της γνωστής ετήσιας και των επιμέρους μηνιαίων τιμών (βλ.2.6.4).
MinNormDZ	N	0.05 - 1.00	Μέγιστη τιμή της νόρμας (96), η οποία εκφράζεται ως ποσοστό επί της ετήσιας τυπικής απόκλισης.
ForecastPopulation	I	1 - 1000	Πλήθος σεναρίων στοχαστικής πρόγνωσης.
ForecastStart	I	1900 - 2000	Υδρολογικό έτος έναρξης της πρόγνωσης.
ForecastEnd	I	2000 - 2100	Υδρολογικό έτος λήξης της πρόγνωσης.

Πίνακας 2: Πεδία πίνακα υδρολογικών μεταβλητών

Ονομασία πεδίου	Τύπος	Πεδίο τιμών	Περιγραφή
Name	A[20]		Ονομασία υδρολογικής μεταβλητής.
SeriesType	E	rain ή inflow ή evaporation	Είδος υδρολογικής διεργασίας (βροχή, απορροή ή εξάτμιση)
ScenarioName	A[20]		Ονομασία υδρολογικού σεναρίου στο οποίο αναφέρεται η μεταβλητή.
Table_Name	A[20]		Ονομασία πίνακα ιστορικών δεδομένων.
Info	A[256]		Πληροφορίες σχετικά με τη μεταβλητή.
Periods	I	1 - 100	Μήκος του ιστορικού δείγματος που χρησιμοποιείται.
StartPeriod	I		Υδρολογικό έτος έναρξης του ιστορικού δείγματος.
EndPeriod	I		Υδρολογικό έτος λήξης του ιστορικού δείγματος.
GAS	E	User Defined ή Least Square Fitted ή Lag One Preserved ή Lag Two Preserved	Μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων της θεωρητικής συνάρτησης αυτοσχετίσης των ετήσιων μεταβλητών (βλ. 2.3.1).
Lag	I	1 - 10	Πλήθος βημάτων για τα οποία διατηρείται το ιστορικό αυτοσχετόγραμμα.
Beta	N	0 - 10	Παράμετρος εμμονής, β . Η τιμή $\beta = 0$ αντιστοιχεί σε μια ARMA διαδικασία.
Kappa	N	0 - 1000000	Παράμετρος σχήματος, κ .
UserDefinedBeta	B	True / False	Αληθής εφόσον η παράμετρος β ορίζεται από τον χρήστη.
SampleStatistics	B	True / False	Αληθής εφόσον τα στατιστικά χαρακτηριστικά της μεταβλητής υπολογίζονται βάσει του ιστορικού δείγματος.

Πίνακας 3: Πεδία πίνακα ιστορικών χρονοσειρών

Ονομασία πεδίου	Τύπος	Πεδίο τιμών	Περιγραφή
Table_Name	A[20]		Ονομασία πίνακα ιστορικών δεδομένων.
Location	A[20]		Γεωγραφική οντότητα στην οποία αναφέρεται η υδρολογική διεργασία
Type	E	rain ή inflow ή evaporation	Είδος υδρολογικής διεργασίας (βροχή, απορροή ή εξάτμιση)
Start	I		Υδρολογικό έτος αρχής ιστορικού δείγματος.
End	I		Υδρολογικό έτος πέρατος ιστορικού δείγματος.
Info	A[256]		Πληροφορίες σχετικά με τη χρονοσειρά.