



ΟΔΥΣΣΕΥΣ

NAMA

ΕΜΠ

ΔΕΥΑΚ

ΑΕΙΦΟΡΙΚΗ

MDS



Γ' Κοινοτικό Πλαίσιο Στήριξης 2000-2006  
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Ανταγωνιστικότητα

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ  
ΣΥΖΕΥΞΗ ΜΕ ΕΞΕΛΙΓΜΕΝΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΟΔΥΣΣΕΥΣ

Τεύχος 3

Θεωρητική τεκμηρίωση μοντέλου στοχαστικής  
προσομοίωσης υδρολογικών μεταβλητών  
«Κασταλία»

Αθήνα  
Σεπτέμβριος  
2005

*Α. Ενσπρατιάδης, Δ. Κουτσογιάννης και Σ. Κοζάνης*



## Συνεργαζόμενοι φορείς



NAMA Σύμβουλοι Μηχανικοί και Μελετητές Α.Ε.



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τομέας Υδατικών Πόρων  
Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων



Δημοτική Επιχείρηση Ύδρευσης και Αποχέτευσης  
Καρδίτσας



Αειφορική Δωδεκανήσου Α.Ε.



Άδωνις Κοντός και ΣΙΑ Ε.Ε. (Marathon Data Systems)

## Ενότητα Εργασίας 3

**Ανάπτυξη δέσμης μαθηματικών μοντέλων για την  
ανάλυση, εκτίμηση και προσομοίωση των  
συνιστωσών διαχείρισης των υδατικών πόρων**

## Τεύχος 3

**Θεωρητική τεκμηρίωση μοντέλου στοχαστικής  
προσομοίωσης υδρολογικών μεταβλητών «Κασταλία»**



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παρόν τεύχος περιγράφει την ανάπτυξη ενός συστήματος στοχαστικής προσομοίωσης και πρόγνωσης υδρολογικών μεταβλητών. Το σύστημα εφαρμόζει ένα πρωτότυπο σχήμα στοχαστικής ανάλυσης πολλών μεταβλητών και δύο χρονικών επιπέδων, κατάλληλο αφενός για την διατήρηση των ουσιωδών στατιστικών χαρακτηριστικών των ιστορικών χρονοσειρών και αφετέρου για την αναπαραγωγή χαρακτηριστικών ιδιαιτεροτήτων των υδρολογικών ανελίξεων, όπως της εμμονής, της περιοδικότητας και της ασυμμετρίας. Το μαθηματικό μοντέλο υλοποιήθηκε μέσω του υπολογιστικού συστήματος *Κασταλία* και χρησιμοποιείται για την παραγωγή συνθετικών υδρολογικών χρονοσειρών στα πλαίσια των μοντέλων προσομοίωσης που είναι συνιστώσες των συστημάτων λήψης αποφάσεων για τη διαχείριση υδροσυστημάτων.

## ABSTRACT

This report describes a system for the stochastic simulation and forecast of hydrologic variables. More specifically, an original two-level multivariate scheme was introduced, appropriate for preserving the most important statistics of the historical time series and reproducing characteristic peculiarities of hydrologic processes such as persistence, periodicity and skewness. The mathematical model was implemented in a computer package, named *Castalia*, and it was applied for the generation of synthetic hydrologic time series within the simulation models the are components of the decision support systems for the management of hydro-systems.



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Αντικείμενο του τεύχους – Ιστορικό .....	1
1.2	Διάρθρωση του τεύχους .....	1
<b>2</b>	<b>Μαθηματικό υπόβαθρο</b>	<b>2</b>
2.1	Υδρολογικές χρονοσειρές και χαρακτηριστικά τους.....	2
2.1.1	Ορισμός θεμελιωδών στατιστικών εννοιών .....	2
2.1.2	Η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης.....	4
2.1.3	Πιθανοτική περιγραφή υδρολογικών διεργασιών .....	4
2.1.4	Υπολογισμός δειγματικών στατιστικών χαρακτηριστικών.....	4
2.1.5	Προσαρμογή συνάρτησης κατανομής.....	8
2.1.6	Το φαινόμενο της εμμονής.....	9
2.2	Η έννοια της στοχαστικής προσομοίωσης και πρόγνωσης.....	11
2.2.1	Ορισμός.....	11
2.2.2	Στοχαστική προσομοίωση συστημάτων υδατικών πόρων με χρήση συνθετικών υδρολογικών χρονοσειρών .....	12
2.2.3	Συνιστώσες στοχαστικής προσομοίωσης υδροσυστημάτων.....	13
2.2.4	Τύποι προσομοίωσης – Η έννοια της στοχαστικής πρόγνωσης.....	14
<b>3</b>	<b>Σχήμα γέννησης συνθετικών χρονοσειρών</b>	<b>16</b>
3.1	Δομή και απαιτήσεις του μοντέλου .....	16
3.1.1	Απαιτήσεις μαθηματικού μοντέλου .....	16
3.1.2	Συνοπτική περιγραφή του σχήματος γέννησης συνθετικών χρονοσειρών .....	17
3.2	Μεθοδολογία αναπαραγωγής της εμμονής.....	19
3.2.1	Γενικά.....	19
3.2.2	Ορισμός και ιδιότητες γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς.....	19
3.2.3	Εκτίμηση παραμέτρων συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς .....	22
3.3	Γέννηση ετήσιων χρονοσειρών .....	24
3.3.1	Μοντέλο συμμετρικών κινούμενων μέσων όρων .....	24
3.3.2	Εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου SMA .....	26
3.3.3	Γενίκευση του σχήματος SMA για πολυμεταβλητή προσομοίωση .....	27
3.3.4	Αλγόριθμος γέννησης ετήσιων χρονοσειρών.....	28
3.4	Γέννηση μηνιαίων χρονοσειρών.....	29
3.4.1	Περιοδικό μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης πρώτης τάξης.....	29
3.4.2	Αλγόριθμος γέννησης μηνιαίων χρονοσειρών .....	30
3.5	Αποκατάσταση συνέπειας μηνιαίων χρονοσειρών.....	31
3.5.1	Γενικά.....	31
3.5.2	Περιγραφή της γενικής διαδικασίας αναγωγής.....	32
3.5.3	Μοντέλο γραμμικής αναγωγής .....	32
3.5.4	Αναπαραγωγή στατιστικών χαρακτηριστικών.....	34
3.6	Γέννηση χρονοσειρών υπό μορφή πρόγνωσης.....	35

3.6.1	Η έννοια των δεσμευμένων στατιστικών χαρακτηριστικών .....	35
3.6.2	Στοχαστική πρόγνωση ετήσιων μεταβλητών .....	36
3.6.3	Περιγραφή της γενικής διαδικασίας στοχαστικής πρόγνωσης.....	37
3.7	Μεθοδολογία αποσύνθεσης μητρώων συνδιασπορών .....	37
3.7.1	Τυπικές μέθοδοι αντιμετώπισης.....	37
3.7.2	Χειρισμός του προβλήματος μέσω βελτιστοποίησης.....	38
3.8	Παραγωγή τυχαίων αριθμών .....	41
3.8.1	Επιλογή συνάρτησης κατανομής τυχαίων μεταβλητών .....	41
3.8.2	Η κατανομή γάμα τριών παραμέτρων.....	42
3.8.3	Γεννήτριες τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα .....	42
3.8.4	Προσαρμογή για παραγωγή αρνητικών ασυμμετριών .....	45
<b>4</b>	<b>Σχεδιασμός υπολογιστικού συστήματος</b> .....	<b>46</b>
4.1	Δομή και συνιστώσες του συστήματος .....	46
4.1.1	Υποσύστημα ανάκτησης και αποθήκευσης δεδομένων .....	47
4.1.2	Υποσύστημα οργάνωσης δεδομένων .....	48
4.1.3	Υποσύστημα μαθηματικών επεξεργασιών.....	48
4.1.4	Υποσύστημα γέννησης χρονοσειρών.....	48
4.1.5	Υποσύστημα παρουσίασης αποτελεσμάτων .....	48
	<b>Αναφορές</b> .....	<b>50</b>





# 1 Εισαγωγή

---

## 1.1 Αντικείμενο του τεύχους – Ιστορικό

Το παρόν τεύχος περιγράφει το μαθηματικό υπόβαθρο για την ανάπτυξη ενός μοντέλου στοχαστικής προσομοίωσης και πρόγνωσης των υδρομετεωρολογικών διεργασιών που λαμβάνουν μέρος σε ένα υδροσύστημα, όπως των απορροών, βροχοπτώσεων και εξατμίσεων των ταμιευτήρων. Οι διαδικασίες αυτές έχουν ως απώτερο σκοπό την γέννηση συνθετικών χρονοσειρών που διατηρούν τα χαρακτηριστικά των ιστορικών χρονοσειρών. Το τελικό προϊόν είναι το υπολογιστικό σύστημα *Κασταλία*. Το υπολογιστικό αυτό σύστημα υλοποιείται ως τμήμα του λογισμικού διαχείρισης και επεξεργασίας υδρολογικών δεδομένων «Υδρογνώμων».

Πολλές από τις μεθοδολογίες που εφαρμόζονται στο σύστημα γέννησης συνθετικών χρονοσειρών βασίζονται σε πρωτότυπη ερευνητική εργασία της ομάδας του Ε.Μ.Π., κυρίως των Δ. Κουτσογιάννη, Α. Ευστρατιάδη, κ.α. Ιδιαίτερη δε συμβολή στην ανάπτυξη του συστήματος παρείχε ή ενασχόληση με το ερευνητικό έργο: «Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας» (1999-2003) στα πλαίσια του οποίου αναπτύχθηκε μία προγενέστερη έκδοση της «Κασταλίας», προσανατολισμένη κυρίως στο σύστημα υδατικών πόρων της Αθήνας. (Κουτσογιάννης, Ευστρατιάδης, 2004).

## 1.2 Διάρθρωση του τεύχους

Το παρόν τεύχος περιλαμβάνει, εκτός από την παρούσα εισαγωγή (Κεφάλαιο 1), από τέσσερα ακόμα κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο 2 δίνονται ορισμένες θεμελιώδεις έννοιες, που είναι απαραίτητες για την κατανόηση του στοχαστικού υδρολογικού μοντέλου που αναπτύχθηκε. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται το μαθηματικό υπόβαθρο του μοντέλου. Στο Κεφάλαιο 4 αναφέρονται ορισμένα βασικά στοιχεία που σχετίζονται με τον σχεδιασμό του υπολογιστικού συστήματος.

## 2 Μαθηματικό υπόβαθρο

---

### 2.1 Υδρολογικές χρονοσειρές και χαρακτηριστικά τους

#### 2.1.1 Ορισμός θεμελιωδών στατιστικών εννοιών

Το μαθηματικό υπόβαθρο του μοντέλου που αναπτύχθηκε για την προσομοίωση των υδρολογικών διεργασιών βασίζεται στη θεωρία πιθανοτήτων, και ειδικότερα στη θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων, που αποτελεί ιδιαίτερο κλάδο της πρώτης. Προτού προχωρήσουμε στην αναλυτική παρουσίαση του μοντέλου προσομοίωσης, δίνουμε ορισμένους θεμελιώδεις ορισμούς που θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση αυτού.

*Τυχαία μεταβλητή* (random variable) είναι μια συνάρτηση ορισμένη επί ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Εφόσον αναφερόμαστε σε υδρολογικές διεργασίες, ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής και ταυτίζεται με το σύνολο  $[0, +\infty)$ . Συμβατικά, η τυχαία μεταβλητή συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα  $X$ , ενώ η αριθμητική τιμή της συμβολίζεται με μικρό,  $x$ . Η παράσταση  $\{X \leq x\}$  υποδηλώνει το γεγονός εκείνο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου, τέτοια ώστε οι τιμές της  $X$  να είναι μικρότερες ή ίσες της ποσότητας  $x$ . Η πιθανότητα αυτού του γεγονότος συμβολίζεται με  $P(X \leq x)$ .

*Συνάρτηση κατανομής* της τυχαίας μεταβλητής  $X$  είναι μια συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής  $x$  που δίνεται από την εξίσωση:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (2.1)$$

Η συνάρτηση κατανομής, η οποία αποκαλείται και *πιθανότητα μη υπέρβασης*, λαμβάνει τιμές από 0 έως 1. Η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής, ήτοι η:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.2)$$

ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*.

Αν  $X$  είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και  $g(X)$  είναι μια συνάρτηση της  $X$ , τότε ορίζεται ως *αναμενόμενη τιμή* ή *προσδοκία* της  $g(X)$  το μέγεθος:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (2.3)$$

Ειδικότερα, για  $g(X) = X$ , το μέγεθος:

$$m_X = E[X] \quad (2.4)$$

ονομάζεται *αναμενόμενη τιμή* ή *μέση τιμή* της τυχαίας μεταβλητής  $X$ . Η μέση τιμή περιγράφει τη θέση του κέντρου βάρους του σχήματος που ορίζει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής. Εφόσον η εν λόγω κατανομή είναι συμμετρική, η μέση τιμή ταυτίζεται με την *πιθανότερη τιμή*, ήτοι την τιμή του  $X$  για την οποία μεγιστοποιείται η  $f_X(x)$ , καθώς και με την *διάμεσο* της κατανομής, ήτοι την τιμή του  $X$  για την οποία  $P(X \leq x) = 0.5$ .

Για  $g(X) = (X - m_X)^r$ , το μέγεθος:

$$\mu_X^{(r)} = E[(X - m_X)^r] \quad (2.5)$$

ονομάζεται *κεντρική ροπή τάξης  $r$*  της τυχαίας μεταβλητής  $X$ .

Η κεντρική ροπή δεύτερης τάξης, ήτοι το μέγεθος:

$$\sigma_X^2 = \mu_X^{(2)} = E[X - m_X]^2 \quad (2.6)$$

ονομάζεται *διασπορά* της τυχαίας μεταβλητής  $X$ , και συμβολίζεται με  $\text{Var}[X]$ . Η διασπορά μιας μεταβλητής είναι μέτρο της συγκέντρωσης της πυκνότητας πιθανότητας γύρω από την μέση τιμή.

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς, η οποία έχει ίδιες διαστάσεις με την τυχαία μεταβλητή, ονομάζεται *τυπική απόκλιση*. Η αδιάστατη παράμετρος:

$$C_{vX} = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (2.7)$$

ονομάζεται *συντελεστής μεταβλητότητας* και αποτελεί μέτρο της αβεβαιότητας ως προς την εκτίμηση της μεταβλητής  $X$ . Μεγάλη τιμή του συντελεστή  $C_{vX}$ , ήτοι μεγάλη διασπορά σε σχέση με την μέση τιμή, συνεπάγεται μεγάλη αβεβαιότητα ως προς την εκτίμηση της  $\mu_X$ . Η οριακή τιμή μηδενικού συντελεστή μεταβλητότητας αντιστοιχεί σε μεταβλητή που λαμβάνει μία μόνο τιμή με πλήρη βεβαιότητα, και η οποία προφανώς ισούται με την μέση τιμή.

Η κεντρική ροπή τρίτης τάξης, ήτοι το μέγεθος:

$$\mu_X^{(3)} = E[X - m_X]^3 \quad (2.8)$$

σχετίζεται με την *ασυμμετρία* της τυχαίας μεταβλητής  $X$ . Μηδενική τιμή της τρίτης κεντρικής ροπής δείχνει συμμετρική κατανομή. Αν η τρίτη ροπή είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το μηδέν, τότε η κατανομή είναι θετικά ασύμμετρη ή αρνητικά ασύμμετρη, αντίστοιχα. Εφόσον η κατανομή είναι θετικά ασύμμετρη (κάτι που αποτελεί τυπικό χαρακτηριστικό των υδρολογικών μεταβλητών, καθώς οι εξαιρετικά υψηλές τιμές εμφανίζονται με χαμηλή συχνότητα), η μέση τιμή της μεταβλητής είναι μεγαλύτερη από την διάμεσο.

Αδιάστατο μέτρο της ασυμμετρίας είναι ο *συντελεστής ασυμμετρίας* που ορίζεται από την σχέση:

$$C_{sX} = \frac{\mu_X^{(3)}}{\sigma_X^3} \quad (2.9)$$

Στην υδρολογία, πολύ συχνά ενδιαφέρει η ταυτόχρονη μελέτη δύο μεταβλητών  $X$  και  $Y$ . Στην περίπτωση αυτή ορίζεται η *από κοινού συνάρτηση κατανομής* του ζεύγους μεταβλητών  $(X, Y)$  ως:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (2.10)$$

Σημειώνεται ότι οι συναρτήσεις  $F_X(x) = P(X \leq x)$  και  $F_Y(y) = P(Y \leq y)$  ονομάζονται *περιθώριες συναρτήσεις κατανομής* των  $X$  και  $Y$ , αντίστοιχα.

Υπό την προϋπόθεση ότι η  $F_{XY}$  είναι παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.11)$$

ονομάζεται *από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* των μεταβλητών  $(X, Y)$ . Αντίστοιχα ορίζονται οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας.

Κατά παρόμοιο τρόπο, όπως προηγουμένως, ορίζονται οι *από κοινού κεντρικές ροπές* των μεταβλητών. Από τις ροπές αυτές, συχνότερα χρησιμοποιείται η:

$$\sigma_{XY} = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \quad (2.12)$$

που ονομάζεται *συνδιασπορά* των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ , και συμβολίζεται με  $\text{Cov}[X, Y]$ . Διαιρώντας την συνδιασπορά με τις τυπικές αποκλίσεις των επιμέρους μεταβλητών, προκύπτει το αδιάστατο μέγεθος:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.13)$$

που ονομάζεται *συντελεστής συσχέτισης* και λαμβάνει τιμές στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Ο εν λόγω συντελεστής αποτελεί σημαντική παράμετρο για την μελέτη της γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών. Αν η τιμή του  $r_{XY}$  είναι κοντά στο 1, τότε οι μεταβλητές  $X$  και  $Y$  παρουσιάζουν ισχυρή θετική συσχέτιση. Αν η τιμή του  $r_{XY}$  είναι κοντά στο  $-1$ , τότε οι μεταβλητές παρουσιάζουν ισχυρή αρνητική συσχέτιση. Τέλος, αν η τιμή του  $r_{XY}$  είναι κοντά στο μηδέν, τότε οι μεταβλητές δεν παρουσιάζουν καμία συσχέτιση.

## 2.1.2 Η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης

*Στοχαστική ανέλιξη* (stochastic process) ονομάζεται μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών  $X_t$ , όπου  $t$  παράμετρος που λαμβάνει τιμές από ένα σύνολο  $T$ , και το οποίο συνήθως παριστάνει χρόνο (Κουτσογιάννης, 1997, σ. 34). Μια υλοποίηση της στοχαστικής ανέλιξης, δηλαδή ένα σύνολο παρατηρήσεων  $x_t$  της  $X_t$ , διατεταγμένο σε αυστηρή χρονική ακολουθία, καλείται *χρονοσειρά* (time series). Στην περίπτωση που τα στατιστικά χαρακτηριστικά μιας ανέλιξης δεν μεταβάλλονται με το χρόνο, αυτή καλείται *στάσιμη* (stationary).

Από την οπτική γωνία της θεωρίας πιθανοτήτων, οι υδρολογικές διεργασίες αντιμετωπίζονται ως στοχαστικές ανελιξεις. Για παράδειγμα, η βροχόπτωση ή η παροχή ενός ποταμού σε μια συγκεκριμένη θέση κατά την χρονική στιγμή  $t$  είναι μια τυχαία μεταβλητή, δεδομένου ότι δεν υπάρχει προσδιοριστική μέθοδος καθορισμού της τιμής της με πλήρη βεβαιότητα. Συνεπώς, η εν λόγω διεργασία είναι μια στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή μάλιστα χρόνο, ενώ μια σειρά μετρήσεών της ανά τακτά χρονικά διαστήματα αποτελεί μια χρονοσειρά.

## 2.1.3 Πιθανοτική περιγραφή υδρολογικών διεργασιών

Το γεγονός ότι μια φυσική διεργασία, όπως η βροχόπτωση ή η παροχή, περιγράφεται από μια στοχαστική ανέλιξη, δεν σημαίνει ότι η πρώτη δεν υπακούει σε κανενός είδους αιτιοκρατία. Αντίθετα, είναι γνωστό ότι τα υδρομετεωρολογικά μεγέθη εμφανίζουν *περιοδικές διακυμάνσεις* κατά την διάρκεια του έτους, οι οποίες προφανώς οφείλονται στην ετήσια κίνηση της γης και στα κλιματικά φαινόμενα που αυτή προκαλεί. Αυτές οι περιοδικές διακυμάνσεις αποτελούν την προσδιοριστική συνιστώσα των διεργασιών. Η στοχαστική ανέλιξη  $X_t$  μπορεί να συμπεριλάβει και να περιγράψει μαθηματικά την εν λόγω συνιστώσα, με την υπόθεση ότι η ανέλιξη δεν είναι στάσιμη, καθώς τα στατιστικά χαρακτηριστικά της μεταβάλλονται περιοδικά, ανάλογα με την εποχή του έτους.

Εξάλλου, η τυχαία μεταβλητή  $X_t$  έχει *στοχαστική δομή* ή αλλιώς *μνήμη*, καθώς οι τιμές της για διάφορες τιμές του  $t$  είναι στατιστικά εξαρτημένες. Η μνήμη είναι θεμελιώδες χαρακτηριστικό όλων των υδρομετεωρολογικών διεργασιών και οφείλεται στην φυσική επίδραση των προηγούμενων πραγματοποιήσεων των ίδιων ή άλλων διεργασιών, με τις οποίες συνδέονται με σχέσεις αιτίου και αποτελέσματος. Για παράδειγμα, η μέση μηνιαία παροχή δύο διαδοχικών μηνών παρουσιάζει σημαντική εξάρτηση, εφόσον ένα αξιόλογο ποσοστό της απορροής του ποταμού προέρχεται από σχετικά σταθερή τροφοδοσία, όπως η εκφόρτιση των πηγών.

## 2.1.4 Υπολογισμός δειγματικών στατιστικών χαρακτηριστικών

Οι παράμετροι που ορίστηκαν στην ενότητα 2.1.1 είναι θεωρητικά μεγέθη που αναφέρονται στον πληθυσμό, ήτοι το σύνολο όλων των δυνατών πραγματοποιήσεων της μεταβλητής  $X$ . Στην πράξη

βεβαίως, αυτό που είναι γνωστό είναι ένα δείγμα  $n$  χρονικά διατεταγμένων παρατηρήσεων της  $X$ , δηλαδή μια χρονοσειρά, η οποία συμβολίζεται με  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Στα πλαίσια της ανάλυσης μιας χρονοσειράς υπολογίζονται τα λεγόμενα *δειγματικά στατιστικά χαρακτηριστικά*, ήτοι ένα σύνολο αριθμητικών δεικτών που περιγράφουν τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του δείγματος και αποτελούν εκτιμήτριες των στατιστικών παραμέτρων του πληθυσμού.

Συγκεκριμένα, η δειγματική μέση τιμή, που αποτελεί αμερόληπτη<sup>1</sup> εκτίμηση της πραγματικής μέσης τιμής  $m_X$ , υπολογίζεται από την σχέση:

$$\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t \quad (2.14)$$

Η δειγματική διασπορά, που αποτελεί αμερόληπτη εκτίμηση της πραγματικής διασποράς  $\sigma_X^2$ , υπολογίζεται από την σχέση:

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (x_t - \mu_X)^2 \quad (2.15)$$

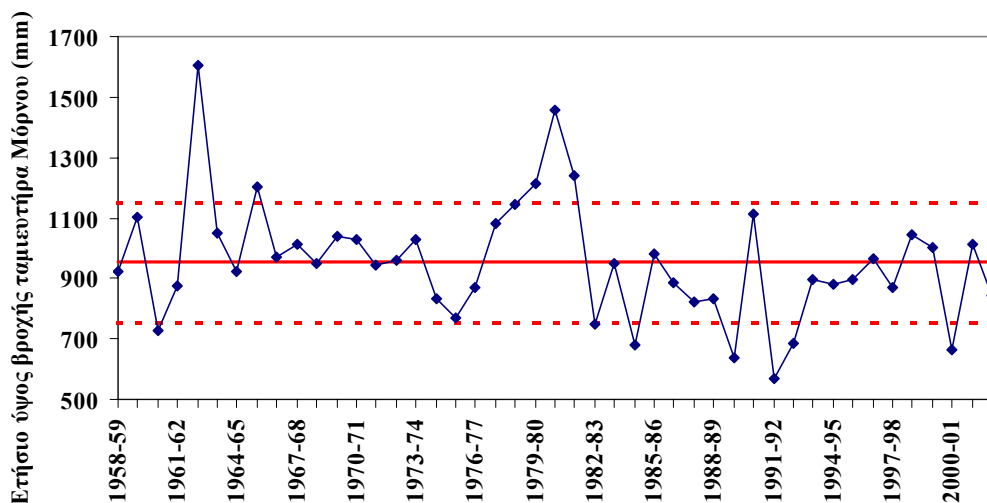
Η δειγματική τυπική απόκλιση,  $s_X$ , υπολογίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της δειγματικής διασποράς.

Η δειγματική τρίτη κεντρική ροπή, που αποτελεί αμερόληπτη εκτίμηση της αντίστοιχης πραγματικής ροπής  $\mu_X^{(3)}$ , υπολογίζεται από την σχέση:

$$\hat{\mu}_X^{(3)} = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{t=1}^n (x_t - \mu_X)^3 \quad (2.16)$$

Αντίστοιχα, η δειγματική, μη αμερόληπτη ωστόσο, εκτιμήτρια του συντελεστή ασυμμετρίας είναι:

$$\zeta_X = \frac{\hat{\mu}_X^{(3)}}{s_X^3} \quad (2.17)$$



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση της χρονοσειράς ετήσιας βροχόπτωσης στον ταμιευτήρα Μόρνου. Με παχιά γραμμή απεικονίζεται η μέση ετήσια τιμή, ενώ με διακεκομμένη τα όρια μιας τυπικής απόκλισης.

<sup>1</sup> Μια δειγματική συνάρτηση της μορφής  $\theta = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ονομάζεται *αμερόληπτη* (unbiased) εκτιμήτρια μιας παραμέτρου  $\theta_0$  του πληθυσμού εφόσον  $E[\theta] = \theta_0$ . Αυτό σημαίνει ότι αν ληφθούν άπειρα δείγματα, για κάθε ένα από τα οποία υπολογίζεται η εκτιμήτρια  $\theta$ , τότε η μέση τιμή των  $\theta$  ταυτίζεται με την τιμή της παραμέτρου  $\theta_0$  του πληθυσμού.

Στο Σχήμα 2.1 απεικονίζεται το γράφημα των ετήσιων υψών βροχής στον ταμιευτήρα Μόρνου, για την περίοδο 1958-59 έως 2002-03 (45 υδρολογικά έτη). Η μέση τιμή του δείγματος ισούται με 954.0 mm, ενώ η τυπική απόκλιση ισούται με 198.8 mm. Κατά συνέπεια, ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ίσος με  $198.8 / 954.0 = 0.208$ . Η τιμή αυτή θεωρείται σχετικά χαμηλή και υποδηλώνει μικρό βαθμό αβεβαιότητας ως προς την πρόγνωση της μεταβλητής. Στο γράφημα απεικονίζεται ακόμη το εύρος μιας τυπικής απόκλισης περί την μέση τιμή, ήτοι το διάστημα  $(\mu_X - s_X, \mu_X + s_X)$ . Εφόσον ο πληθυσμός ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε αναμένεται το 68% των παρατηρήσεων να κυμαίνονται μέσα στο εν λόγω διάστημα. Στην περίπτωση αυτή, αναμένεται να υπάρχει συμμετρική διάταξη των παρατηρήσεων γύρω από την μέση τιμή. Ωστόσο, στο παράδειγμα του σχήματος παρατηρείται ότι ενώ οι χαμηλές τιμές του δείγματος δεν απέχουν πολύ από το κάτω όριο  $\mu_X - s_X$ , οι υψηλές τιμές απέχουν σημαντικά από το αντίστοιχο άνω όριο  $\mu_X + s_X$ . Το γεγονός αυτό αποτελεί ισχυρή ένδειξη θετικής ασυμμετρίας. Πράγματι, ο δειγματικός συντελεστής ασυμμετρίας της χρονοσειράς ισούται με  $\xi_X = 0.87$ .

Τα δειγματικά χαρακτηριστικά των από κοινού συναρτήσεων κατανομής που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην υδρολογία είναι οι αυτοσυνδιασπορές και ετεροσυνδιασπορές.

Η δειγματική αυτοσυνδιασπορά (autocovariance) μιας χρονοσειράς για χρονική υστέρηση (lag)  $j$  υπολογίζεται από την σχέση:

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-j} (x_{t+j} - \mu_X)(x_t - \mu_X) \quad (2.18)$$

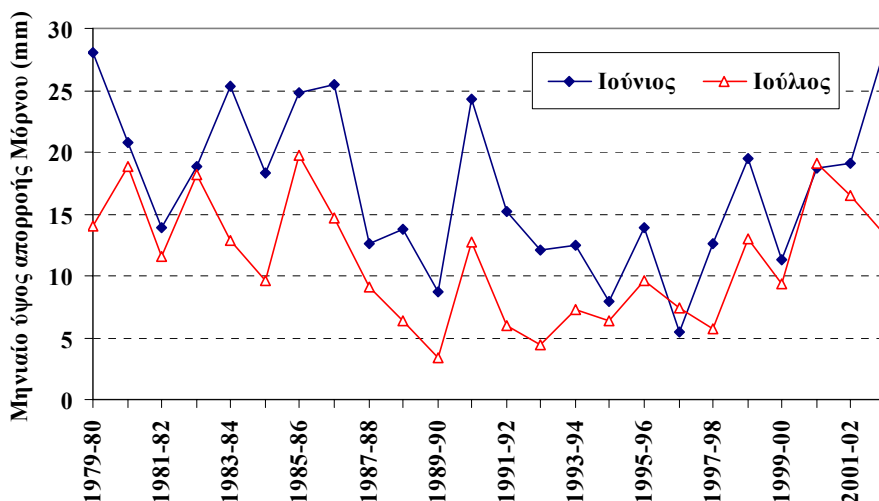
Διαιρώντας την αυτοσυνδιασπορά με την δειγματική διασπορά, προκύπτει ο αδιάστατος συντελεστής αυτοσυσχέτισης για υστέρηση  $j$ , που συμβολίζεται με  $\rho_j$  και λαμβάνει τιμές στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Η γραφική απεικόνιση των  $\rho_j$  συναρτήσει του  $j$  ονομάζεται αυτοσυσχετόγραμμα.

Το πλέον χαρακτηριστικό στοιχείο της ακολουθίας  $\rho_j$  είναι ο πρώτος όρος της, ήτοι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1, που υπολογίζεται ως:

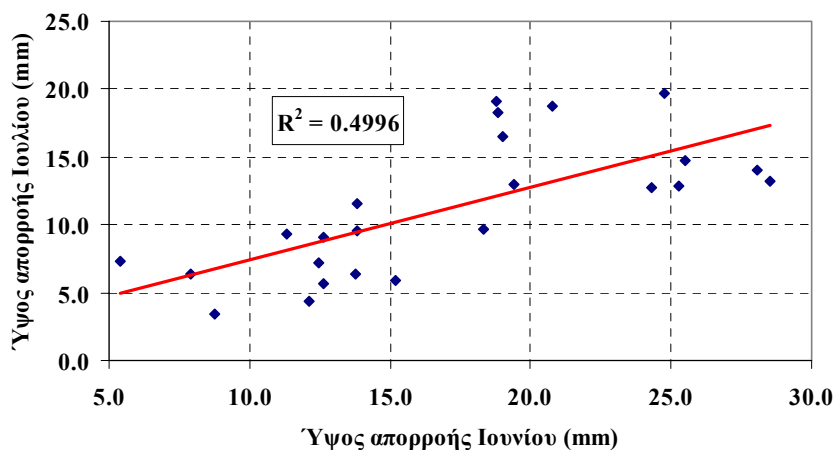
$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (x_{t+1} - \mu_X)(x_t - \mu_X)}{\sum_{t=1}^n (x_t - \mu_X)^2} \quad (2.19)$$

Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1 αποτελεί μέτρο της βραχυπρόθεσμης μνήμης μιας υδρολογικής διεργασίας. Στο Σχήμα 2.2 απεικονίζονται οι χρονοσειρές ύψους απορροής της λεκάνης ανάντη του ταμιευτήρα Μόρνου, κατά τους θερινούς μήνες Ιούνιο και Ιούλιο. Παρατηρείται ότι τα περισσότερα έτη η δίαιτα της απορροής ακολουθεί παρόμοια διακύμανση, γεγονός που οφείλεται στην σχετικά σταθερή τροφοδοσία του ποταμού από πηγές και αποτελεί ένδειξη έντονα θετικής συσχέτισης μεταξύ των δύο χρονοσειρών. Πράγματι, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1 ανέρχεται σε  $r_1 = 0.71$ , είναι δηλαδή αρκετά υψηλός.

Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης μιας χρονοσειράς εκφράζει το πόσο καλά εκτιμάται η τιμή  $x_{t+1}$ , αν θεωρηθεί γραμμική συνάρτηση της  $x_t$ . Το τετράγωνο του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ισούται με τον γνωστό συντελεστή προσδιορισμού ( $r^2$ ) της γραμμικής παλινδρόμησης. Στο Σχήμα 2.3 απεικονίζεται το διάγραμμα διασποράς της απορροής του Ιουλίου (εξαρτημένη μεταβλητή) συναρτήσει της απορροής του Ιουνίου (ανεξάρτητη μεταβλητή). Η τιμή του συντελεστή προσδιορισμού είναι  $r^2 = 0.50 (= r_1^2)$ , και αποτελεί ένδειξη ικανοποιητικής γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών. Η τιμή αυτή υποδηλώνει ακόμη ότι η διασπορά της απορροής του Ιουλίου εξηγείται σε ποσοστό 50% από την απορροή του προηγούμενου μήνα.



Σχήμα 2.2: Γραφική παράσταση χρονοσειρών ύψους απορροής λεκάνης Μόρνου τους μήνες Ιούνιο και Ιούλιο.



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα διασποράς χρονοσειρών ύψους απορροής λεκάνης Μόρνου τους μήνες Ιούνιο και Ιούλιο.

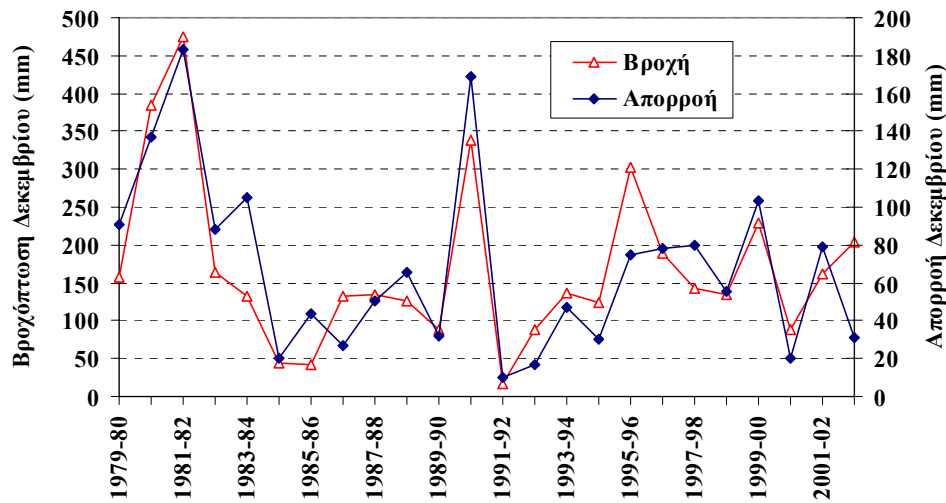
Παρόμοια με τον δειγματικό συντελεστή αυτοσυσχέτισης, ορίζεται ο δειγματικός *συντελεστής ετεροσυσχέτισης για υστέρηση j* δύο χρονοσειρών  $X$  και  $Y$ . Πιο πολύ ενδιαφέρον παρουσιάζει ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης μηδενικής υστέρησης, που υπολογίζεται από την σχέση:

$$r_{XY} = \frac{\sum_{t=1}^n (x_t - \mu_X)(y_t - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (x_t - \mu_X)^2 \sum_{t=1}^n (y_t - \mu_Y)^2}} \quad (2.20)$$

Ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης αποτελεί μέτρο της αλληλεξάρτησης δυο υδρολογικών διεργασιών, που είτε συνδέονται με σχέση αιτίου-αποτελέσματος ή αναφέρονται σε λεκάνες με κοινή υδρολογική διαίτα. Στο Σχήμα 2.4 απεικονίζονται οι χρονοσειρές ύψους βροχόπτωσης στον ταμιευτήρα Μόρνου και ισοδύναμου ύψους απορροής της ανάντη λεκάνης, κατά τον μήνα Δεκέμβριο. Παρατηρείται ότι τα περισσότερα έτη, οι δύο χρονοσειρές ακολουθούν παρόμοια διακύμανση, γεγονός που αποτελεί ένδειξη ισχυρής γραμμικής συσχέτισης μεταξύ τους. Πράγματι, ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης ανέρχεται σε 0.86, είναι δηλαδή πολύ κοντά στην μονάδα. Αυτό είναι απόλυτα λογικό, καθώς η βροχόπτωση στον ταμιευτήρα Μόρνου σχετίζεται σημαντικά με την επιφανειακή βροχόπτωση στην



λεκάνη, η οποία συνιστά την βασική αιτία δημιουργίας της απορροής κατά τον μήνα Δεκέμβριο. Αντίθετα, κατά την εαρινή και θερινή περίοδο, η συσχέτιση της απορροής με την βροχόπτωση είναι πολύ χαμηλότερη, καθώς η κύρια συνιστώσα του επιφανειακού υδατικού δυναμικού της λεκάνης είναι η τήξη του χιονιού και η τροφοδοσία από πηγές.



Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση χρονοσειρών ύψους βροχόπτωσης και απορροής λεκάνης Μόρνου τον μήνα Δεκέμβριο.

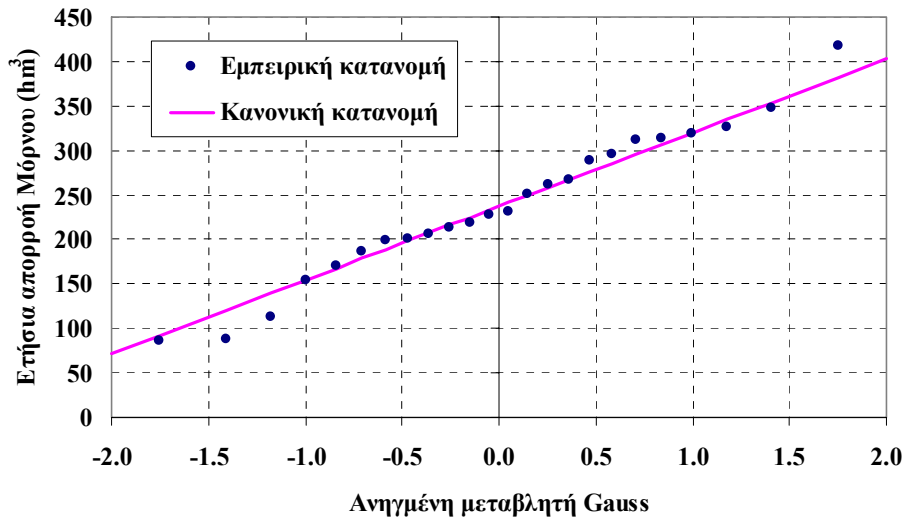
### 2.1.5 Προσαρμογή συνάρτησης κατανομής

Εφόσον μια χρονοσειρά προέρχεται από μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη έχει νόημα ο προσδιορισμός της μίας και μοναδικής περιθώριας συνάρτησης κατανομής της υπόψη μεταβλητής. Μέσω της συνάρτησης κατανομής είναι δυνατή η ποσοτικοποίηση της υδρολογικής αβεβαιότητας και η πραγματοποίηση προγνώσεων, καθώς με βάση τον ορισμό που δόθηκε στην ενότητα 2.1.1 κάθε τιμή της μεταβλητής συνδέεται με μια πιθανότητα υπέρβασης.

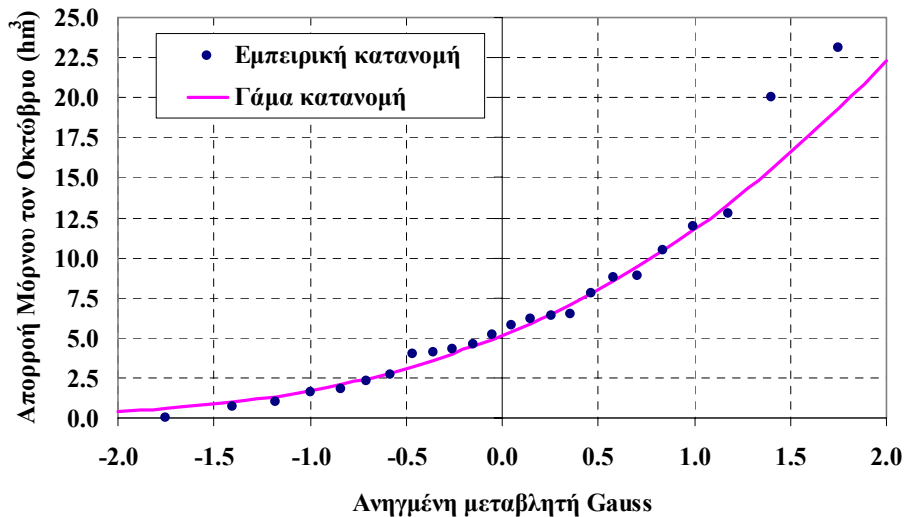
Στην βιβλιογραφία διατίθεται ένα πολύ μεγάλο φάσμα μοντέλων κατανομών πιθανοτήτων, ορισμένα από τα οποία ενδείκνυται για υδρολογικές εφαρμογές (Κουτσογιάννης, 1997, κεφ. 6). Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου εξαρτάται από την φύση της εξεταζόμενης ανέλιξης. Σε ορισμένες περιπτώσεις, υπάρχουν θεωρητικοί λόγοι για τους οποίους μια υδρολογική μεταβλητή αναμένεται να ακολουθεί συγκεκριμένο τύπο κατανομής, ενώ άλλες φορές ο τύπος της κατανομής επιλέγεται με βάση την υδρολογική εμπειρία ή ακόμη τα ιδιαίτερα στατιστικά χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου δείγματος. Συχνά, οι ετήσιες υδρολογικές μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή<sup>1</sup>, ενώ οι μηνιαίες ακολουθούν κατανομή γάμα (ειδική περίπτωση της οποίας είναι η κανονική), η οποία θεωρείται κατάλληλη για δείγματα με μη μηδενικό συντελεστή ασυμμετρίας. Στην ενότητα 3.6, περιγράφεται αναλυτικά η κατανομή γάμα και η μεθοδολογία προσαρμογής της.

Στα Σχήματα 2.5 και 2.6 δίνονται δυο παραδείγματα προσαρμογής της κανονικής και γάμα κατανομής, στο δείγμα των ετήσιων τιμών και το δείγμα των μηνών του μήνα Οκτωβρίου, αντίστοιχα, τα οποία αναφέρονται στην απορροή της λεκάνης του Μόρνου. Το γεγονός ότι η ασυμμετρία του ετήσιου δείγματος είναι πρακτικά μηδενική αποτελεί ισχυρή ένδειξη της καταλληλότητας της κανονικής κατανομής, που σε χαρτί κανονικής κατανομής απεικονίζεται ως ευθεία. Από την άλλη πλευρά, ο συντελεστής ασυμμετρίας της χρονοσειράς απορροής του Οκτωβρίου είναι πολύ υψηλός (1.57), γεγονός που καθιστά αναγκαία την προσαρμογή ασύμμετρης κατανομής, όπως η γάμα.

<sup>1</sup> Αυτό αποτελεί απόρροια του κεντρικού οριακού θεωρήματος, βάσει του οποίου ένα άθροισμα τυχαίων μεταβλητών οποιασδήποτε κατανομής είναι επίσης τυχαία μεταβλητή, η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή.



Σχήμα 2.5: Εμπειρική και θεωρητική συνάρτηση κατανομής του ετήσιου όγκου απορροής του Μόρνου, σε χαρτί κανονικής κατανομής.



Σχήμα 2.6: Εμπειρική και θεωρητική συνάρτηση κατανομής του όγκου απορροής του Μόρνου τον μήνα Οκτώβριο, σε χαρτί κανονικής κατανομής.

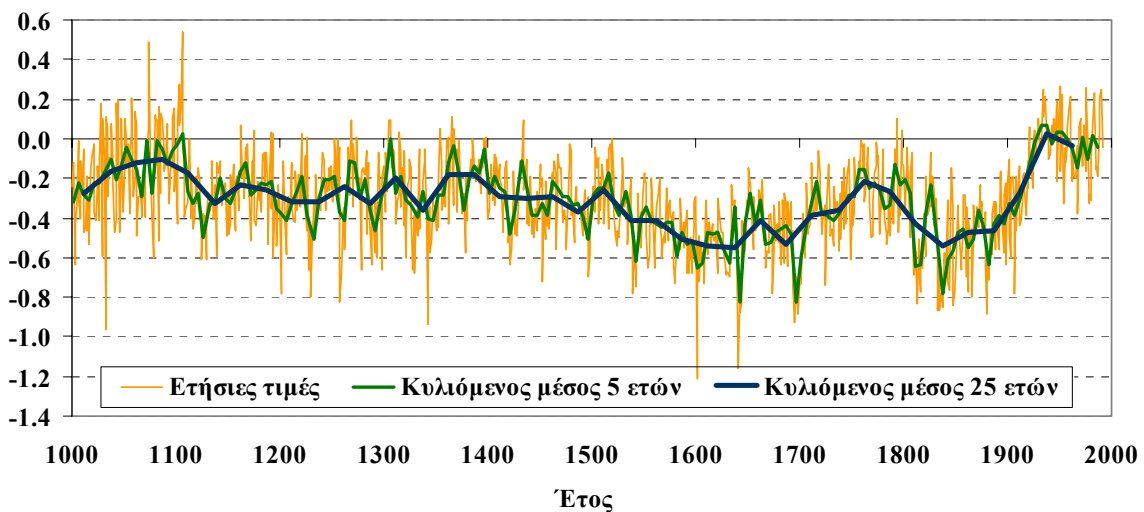
### 2.1.6 Το φαινόμενο της εμμονής

Η μακροπρόθεσμη *εμμονή* (persistence) των υδρολογικών χρονοσειρών ανακαλύφθηκε από τον *Hurst* (1951), στα πλαίσια μελέτης του φράγματος του Ασουάν. Ο *Hurst*, αναλύοντας τις χρονοσειρές του ποταμού Νείλου καθώς και άλλες υδρολογικές και γεωφυσικές χρονοσειρές που ήταν διαθέσιμες για αρκετές εκατοντάδες έτη, διαπίστωσε την ιδιότητα των υγρών και ξηρών ετών να εμφανίζονται κατά ομάδες, σχηματίζοντας μακρές περιόδους υψηλής και χαμηλής υδροφορίας, αντίστοιχα. Έκτοτε, η μακροπρόθεσμη εμμονή των φυσικών χρονοσειρών έλαβε την ονομασία *φαινόμενο Hurst*, ενώ αργότερα εισήχθη από τον γνωστό μαθηματικό Mandelbrot η έκφραση *φαινόμενο Ιωσήφ*<sup>1</sup>.

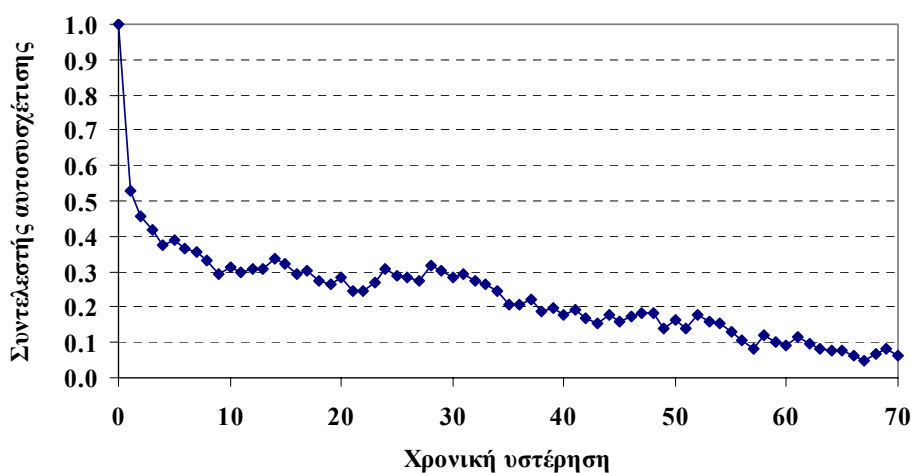
Το φαινόμενο εντοπίζεται σε πλήθος γεωφυσικών και κλιματολογικών μεταβλητών, όπως η ένταση ανέμων, η μέση παγκόσμια θερμοκρασία και το πάχος δακτυλίων δέντρων (*Koutsoyiannis*, 2002). Η

<sup>1</sup> Ο όρος προέρχεται από την γνωστή Βιβλική αφήγηση των επτά παχιών και επτά ισχνών αγελάδων, που αντιπροσωπεύουν επτά χρόνια υδροφορίας και επτά χρόνια ξηρασίας στην περιοχή της Αιγύπτου.

μακροπρόθεσμη εμμονή των χρονοσειρών που περιγράφουν φυσικές διεργασίες εμφανίζεται με την μορφή υψηλών θετικών τιμών των συντελεστών αυτοσυσχέτισης, ακόμη και για μεγάλη χρονική υστέρηση, της τάξης των δεκάδων ή και εκατοντάδων ετών. Στο Σχήμα 2.7 απεικονίζεται το διάγραμμα της ανακατασκευασμένης χρονοσειράς μέσης ετήσιας θερμοκρασίας του Βορείου Ημισφαιρίου, μήκους 992 ετών (Jones et al., 1998). Στο διάγραμμα, είναι εμφανής η ύπαρξη διαταραχών κάθε κλίμακας, όπως προκύπτει από την μη ομαλή διακύμανση των κυλιόμενων μέσων όρων των 5 και 25 ετών. Στο Σχήμα 2.8 απεικονίζεται το αυτοσυσχετόγραμμα της ίδιας χρονοσειράς για τα πρώτα 70 βήματα χρονικής υστέρησης, το οποίο παρουσιάζει την χαρακτηριστική μορφή πλατειάς «ουράς». Παρατηρείται δηλαδή ότι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης της χρονοσειράς παραμένουν εμφανώς μεγαλύτεροι του μηδενός, ακόμη και για μεγάλη χρονική υστέρηση. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει την ύπαρξη μακροπρόθεσμης εμμονής της χρονοσειράς.



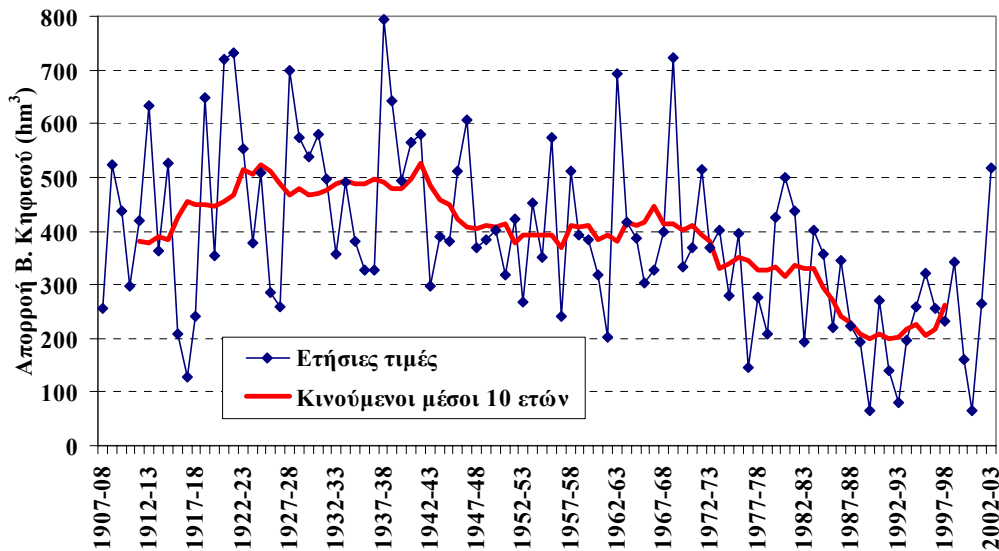
Σχήμα 2.7: Γραφική παράσταση χρονοσειράς μέσων ετήσιων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου και κυλιόμενων μέσων όρων 5 και 25 ετών.



Σχήμα 2.8: Αυτοσυσχετόγραμμα χρονοσειράς μέσων ετήσιων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι η εμπειρική τεκμηρίωση του φαινομένου της εμμονής μέσω του αυτοσυσχετογράμματος μιας χρονοσειράς είναι εξαιρετικά δύσκολη, δεδομένου ότι απαιτείται δείγμα μετρήσεων εκατοντάδων ετών ώστε να είναι δυνατή η αμερόληπτη εκτίμηση των συντελεστών αυτοσυσχέτισης για μεγάλη χρονική υστέρηση. Ακόμη και παγκοσμίως, τα διαθέσιμα δεδομένα υδρομετεωρολογικών μετρήσεων σπανίως ξεπερνούν σε μήκος τα 100-150 έτη. Στον ελληνικό χώρο,

το μεγαλύτερο δείγμα απορροής είναι αυτό του Βοιωτικού Κηφισού, που καλύπτει μια περίοδο 96 υδρολογικών ετών (1908-09 έως 2002-03). Στο Σχήμα 2.9 απεικονίζεται η ετήσια απορροή του ποταμού, στην έξοδο της λεκάνης του, καθώς και το διάγραμμα των κινούμενων μέσων όρων 10 ετών. Στο δείγμα είναι εμφανής η ύπαρξη του φαινομένου της εμμονής, το οποίο διαπιστώνεται από την ύπαρξη διακυμάνσεων στην μέση τιμή διαφόρων χρονικών περιόδων.



Σχήμα 2.9: Διακύμανση ετήσιας απορροής Βοιωτικού Κηφισού στην έξοδο της λεκάνης και κινούμενοι μέσοι όροι 10 ετών.

Σχετικά με τους μηχανισμούς γέννησης του φαινομένου της μακροπρόθεσμης εμμονής, μπορεί να ειπωθεί ότι οφείλει την ύπαρξή του στην ταυτόχρονη εμφάνιση πολλών τυχαίων διαταραχών στα μέσα στατιστικά χαρακτηριστικά των υδρομετεωρολογικών μεταβλητών, σε διάφορες χρονικές κλίμακες (Koutsoyiannis, 2002, 2003). Η αναπαραγωγή της εμμονής θεωρείται κρίσιμος παράγοντας όσον αφορά τον ορθολογικό σχεδιασμό και διαχείριση συστημάτων υδραυλικών έργων (Bras and Rodriguez-Iturbe, 1993). Πράγματι, το φαινόμενο της εμμονής φαίνεται ότι σχετίζεται άμεσα με την εμφάνιση παρατεταμένων ξηρασιών (όπως αυτή που έπληξε την Ελλάδα κατά την εξαετία 1988-94) καθώς και την εμφάνιση υδροκλιματικών αλλαγών (Evans, 1996· Koutsoyiannis, 2003). Τόσο η φυσική ερμηνεία του φαινομένου όσο και η μαθηματική περιγραφή του έχουν αποτελέσει αντικείμενο ιδιαίτερου ερευνητικού ενδιαφέροντος. Ολοκληρωμένη επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας κάνει ο Λαγούσης (2003).

## 2.2 Η έννοια της στοχαστικής προσομοίωσης και πρόγνωσης

### 2.2.1 Ορισμός

Ο όρος *στοχαστική προσομοίωση* (stochastic simulation) είναι πολύ γενικός, και αναφέρεται σε υπολογιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούν γεννήτριες τυχαίων αριθμών τόσο για την ανάλυση πολύπλοκων συστημάτων όσο και για την επίλυση δύσκολων μαθηματικών προβλημάτων, τα οποία δεν έχουν αναλυτική λύση, ενώ η αριθμητική τους επίλυση είναι εξαιρετικά χρονοβόρα. Στην βιβλιογραφία, η στοχαστική προσομοίωση απαντά και ως μέθοδος *Monte Carlo*.

Η μελέτη πολύπλοκων συστημάτων που διέπονται από αβεβαιότητες αποτελεί τυπικό πεδίο εφαρμογής της μεθόδου της στοχαστικής προσομοίωσης. Σε ένα πολύπλοκο σύστημα, δεν είναι απόλυτα γνωστοί οι μηχανισμοί λειτουργίας του ούτε και τα δεδομένα εισόδου (στατικά ή δυναμικά).

Ένα τέτοιο σύστημα μελετάται για διάφορα σενάρια παραμέτρων ή δεδομένων εισόδου, τα οποία παράγονται με κάποιον συστηματικό τρόπο (π.χ., παράγονται τυχαίες διαταραχές γύρω από μια μέση τιμή). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ένα φάσμα δυνατών αποκρίσεων του συστήματος, το οποίο είναι τόσο πιο περιεκτικό σε πληροφορία όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των σεναρίων που διερευνάται. Συνεπώς, η στοχαστική προσομοίωση μπορεί να θεωρηθεί και ως ένα «μαθηματικό πείραμα» που εκτελείται στον υπολογιστή (Ripley, 1987, σ. 2).

## **2.2.2 Στοχαστική προσομοίωση συστημάτων υδατικών πόρων με χρήση συνθετικών υδρολογικών χρονοσειρών**

Από την πληθώρα των πηγών αβεβαιότητας που διέπει την λειτουργία ενός συστήματος υδατικών πόρων, σημαντικότερη ασφαλώς είναι η υδρολογική. Αυτή συναρτάται με την αδυναμία πρόβλεψης της εξέλιξης των υδρομετεωρολογικών διεργασιών, η χαοτική συμπεριφορά των οποίων καθιστά ανέφικτη την πραγματοποίηση ασφαλών προγνώσεων για χρονικό ορίζοντα πέραν των λίγων ημερών. Ωστόσο, η χρονική κλίμακα ημερών είναι απολύτως ανεπαρκής για την διαχείριση υδροσυστημάτων, δεδομένου ότι η ανάγκη υπερετήσιας ρύθμισης ενός τέτοιου συστήματος προϋποθέτει την προσομοίωση της λειτουργίας του για χρονικό ορίζοντα πολλών ετών.

Η αδυναμία πρόγνωσης των υδρομετεωρολογικών διεργασιών με χρήση προσδιοριστικών μοντέλων οδήγησε στην εναλλακτική θεώρησή τους ως τυχαίων μεταβλητών και την αντιμετώπισή τους με τη θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων (βλ. 2.1.1). Στις αρχές της εν λόγω θεωρίας βασίζονται τα *στοχαστικά υδρολογικά μοντέλα*, ήτοι ένα σύνολο εξισώσεων που περιγράφουν στατιστικά τις συσχετίσεις των υδρολογικών διεργασιών, ποσοτικοποιώντας την αβεβαιότητα γύρω από την εξέλιξή τους. Τα μοντέλα αυτά εφαρμόζονται για την γέννηση *συνθετικών χρονοσειρών* που είναι συνεπείς με τις ιστορικές, δηλαδή αναπαράγουν την στατιστική δομή και τα στατιστικά χαρακτηριστικά των παρατηρημένων υδρολογικών διεργασιών. Οι συνθετικές υδρολογικές χρονοσειρές χρησιμοποιούνται ως είσοδος σε μοντέλα στοχαστικής προσομοίωσης συστημάτων υδατικών πόρων.

Ένας άλλος παράγοντας που καθιστά αναγκαία την χρήση συνθετικών χρονοσειρών, και μάλιστα μεγάλου μήκους, είναι η υιοθέτηση υψηλών επιπέδων *αξιοπιστίας*, τόσο κατά τη φάση σχεδιασμού όσο και λειτουργίας των συστημάτων υδατικών πόρων. Η αξιοπιστία ενός συστήματος ορίζεται ως η πιθανότητα επίτευξης μιας συγκεκριμένης επίδοσης, για καθορισμένο χρονικό διάστημα και καθορισμένες συνθήκες (Chow *et al.*, 1988, σ. 434). Συμπληρωματική της έννοιας της αξιοπιστίας είναι η πιθανότητα αστοχίας. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας ενός συστήματος υδατικών πόρων είναι δυνατόν να γίνει αναλυτικά, με την προσαρμογή κατάλληλων στατιστικών μοντέλων (π.χ. εκτίμηση της περιόδου επαναφοράς μιας καταιγίδας ή της πιθανότητας υπέρβασης μιας συγκεκριμένης τιμής παροχής). Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό εφόσον αναφερόμαστε σε πολύπλοκα τεχνητά υδροσυστήματα, που διαταράσσουν το φυσικό καθεστώς υδρολογικής λειτουργίας, ρυθμίζοντας την απορροή των λεκανών τόσο χρονικά (αποθήκευση νερού και απόδοσή του μεταγενέστερα) όσο και χωρικά (μεταφορά νερού μεταξύ ταμιευτήρων). Από την άλλη πλευρά, ένα τέτοιο σύστημα απαιτείται να λειτουργεί με εξαιρετικά υψηλή αξιοπιστία, δεδομένου ότι τυχόν αστοχία στην ικανοποίηση της υδρευτικής ζήτησης αναμένεται να έχει δραματικές κοινωνικές και οικονομικές επιπτώσεις. Συνεπώς, η ασφαλής εκτίμηση της αξιοπιστίας του προϋποθέτει την ύπαρξη προσομοιωμένων χρονοσειρών απολήψεων για χρονικό ορίζοντα που υπερβαίνει κατά πολύ το σύνηθες μήκος των ιστορικών δειγμάτων.

Συνοψίζοντας, μπορεί να ειπωθεί ότι η στοχαστική προσομοίωση με χρήση συνθετικών χρονοσειρών κρίνεται απόλυτα αναγκαία για την ορθολογική διαχείριση πολύπλοκων υδροσυστημάτων, καθώς:

- δεν τίθενται περιορισμοί ως προς το χρονικό ορίζοντα μελέτης, καθώς δεν χρησιμοποιούνται τα ίδια ιστορικά δείγματα (που κατά κανόνα έχουν μικρό μήκος και πρακτικά μηδενική πιθανότητα επανάληψης στο μέλλον) αλλά τα στατιστικά τους χαρακτηριστικά·
- είναι εφικτή η εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων ως προς την αξιοπιστία του συστήματος για ακραία αποδεκτά επίπεδα πιθανότητας (π.χ. 1%)·
- διερευνάται η επίδοση του συστήματος έναντι ενός μεγάλου φάσματος υδροκλιματικών σεναρίων.

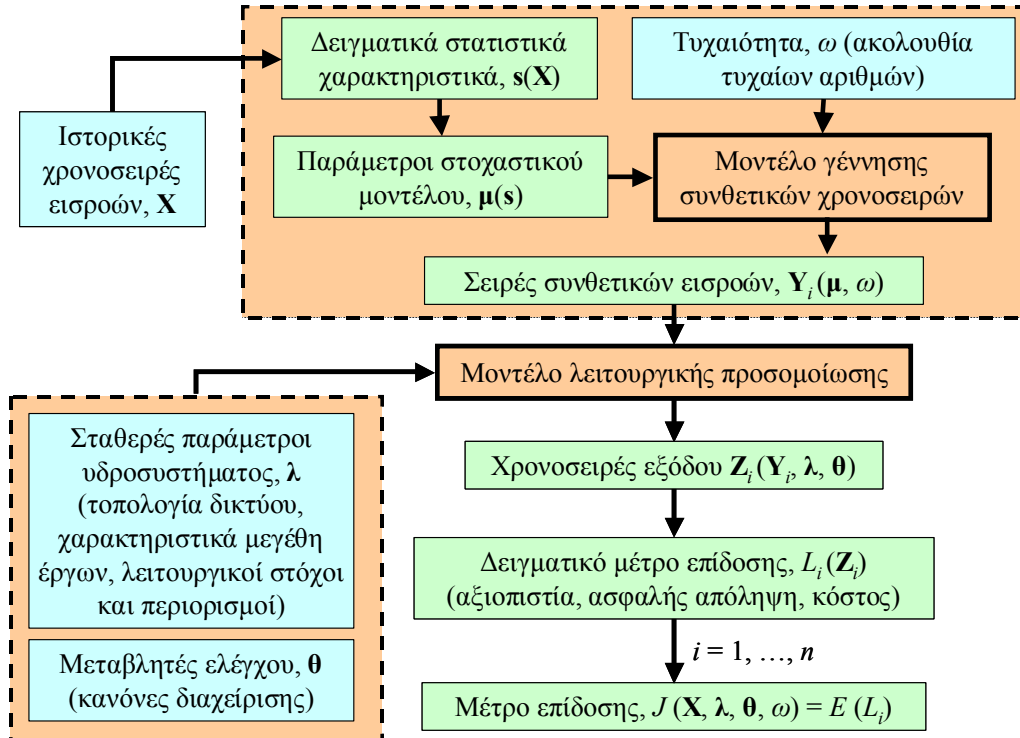
### 2.2.3 Συνιστώσες στοχαστικής προσομοίωσης υδροσυστημάτων

Στο Σχήμα 2.10 απεικονίζονται οι συνιστώσες και τα υπολογιστικά βήματα ενός γενικού σχήματος στοχαστικής προσομοίωσης συστημάτων υδατικών πόρων (Koutsoyiannis, 2004). Η υπολογιστική διαδικασία περιλαμβάνει δύο βασικά μοντέλα, τα οποία απεικονίζονται με παχιά γραμμή. Το πρώτο είναι το στοχαστικό υδρολογικό μοντέλο, το οποίο χρησιμοποιείται για την γέννηση συνθετικών χρονοσειρών. Στοιχεία εισόδου του μοντέλου είναι ένα σύνολο παραμέτρων,  $\mu$ , και ένας όρος τυχαιότητας,  $\omega$ , που εκφράζεται από ένα σύνολο τυχαίων αριθμών, που παράγονται αυτόματα μέσω του υπολογιστή<sup>1</sup>. Οι παράμετροι του μοντέλου εκτιμώνται συναρτήσει ορισμένων δειγματικών στατιστικών χαρακτηριστικών,  $s(\mathbf{X})$ , όπου με  $\mathbf{X}$  συμβολίζονται οι ιστορικές χρονοσειρές εισροών. Οι εν λόγω παράμετροι ορίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να αναπαράγουν τα παραπάνω στατιστικά χαρακτηριστικά. Επισημαίνεται ότι η αξιοπιστία ενός στοχαστικού υδρολογικού μοντέλου εξαρτάται από δύο παράγοντες: (α) την ποιότητα της διαθέσιμης υδρολογικής πληροφορίας, και (β) την ακρίβεια εκτίμησης των παραμέτρων του μοντέλου. Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως συμβαίνει και στο στοχαστικό μοντέλο που αναπτύχθηκε, ο υπολογισμός ορισμένων τουλάχιστον εκ των παραμέτρων,  $\mu$ , συναρτήσει των στατιστικών χαρακτηριστικών,  $s$ , δεν μπορεί να γίνει με αναλυτικές μεθόδους, οπότε χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές τεχνικές (αριθμητικά μοντέλα ή μοντέλα βελτιστοποίησης). Μια άλλη επισήμανση σχετίζεται με την ασυμπτωτική συμπεριφορά των στοχαστικών μοντέλων. Θεωρητικά, τα μοντέλα αυτά αναπαράγουν ακριβώς τα δειγματικά στατιστικά χαρακτηριστικά για άπειρο μήκος προσομοίωσης (ήτοι άπειρο μήκος συνθετικών χρονοσειρών). Στην πράξη, τα μήκη των συνθετικών χρονοσειρών είναι της τάξης των εκατοντάδων ή χιλιάδων τιμών, με αποτέλεσμα να υπάρχει μεροληψία στην αναπαραγωγή των στατιστικών μεγεθών. Έξοδοι του στοχαστικού μοντέλου είναι οι συνθετικές χρονοσειρές εισροών,  $\mathbf{Y}_t(\mu, \omega)$ , που στην γενική περίπτωση μπορούν να θεωρηθούν ως  $n$  στοχαστικά ανεξάρτητες σειρές με την ίδια πιθανότητα πραγματοποίησης, εφόσον η διαδικασία γέννησης επαναλαμβάνεται πολλές φορές με διαφορετικές αρχικές συνθήκες (διαφορετική τιμή της ακολουθίας τυχαίων αριθμών).

Η δεύτερη βασική συνιστώσα του σχήματος στοχαστικής προσομοίωσης είναι το μοντέλο λειτουργικής προσομοίωσης του υδροσυστήματος. Το εν λόγω μοντέλο χρησιμοποιεί ως στοιχεία εισόδου τις παραμέτρους του συστήματος και τις συνθετικές χρονοσειρές εισροών που παράγονται από το στοχαστικό υδρολογικό μοντέλο. Οι παράμετροι του υδροσυστήματος διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: (α) σταθερές παράμετροι, που συμβολίζονται με  $\lambda$ , και αναφέρονται στην τοπολογία του δικτύου, τα χαρακτηριστικά μεγέθη των υδραυλικών έργων και τους λειτουργικούς στόχους και περιορισμούς, και (β) παράμετροι διαχείρισης, που συμβολίζονται με  $\theta$ , και αναφέρονται στον τρόπο λειτουργίας του υδροσυστήματος. Το μοντέλο λειτουργικής προσομοίωσης αναπαριστά την λειτουργία του υδροσυστήματος, τηρώντας τους φυσικούς περιορισμούς του προβλήματος και προσπαθώντας να ικανοποιήσει τους λειτουργικούς περιορισμούς και στόχους, με βάση την πολιτική

<sup>1</sup> Στην πραγματικότητα, οι τυχαίοι αριθμοί στον υπολογιστή γεννώνται βάσει ενός αυστηρά προσδιοριστικού αλγορίθμου, ο οποίος οδηγεί στην ίδια ακολουθία αριθμών αν ξεκινήσει με την ίδια αρχική τιμή, που είναι γνωστή και ως σπόρος (seed). Για τον λόγο αυτό, οι τυχαίοι αριθμοί που παράγονται καθ' αυτόν τον τρόπο είναι αναφέρονται και ως ψευδοτυχαίοι (pseudorandom).

διαχείρισης,  $\theta$ . Έξοδοι του μοντέλου είναι  $n$  σενάρια απολήψεων  $Z_i(Y_i, \lambda, \theta)$ , κάθε ένα από τα οποία συνιστά την απόκριση του συστήματος έναντι του αντίστοιχου σεναρίου εισροών,  $Y_i$ . Για κάθε σενάριο απολήψεων,  $Z_i$ , ελέγχεται η επίδοση του υδροσυστήματος, με βάση ένα αριθμητικό μέτρο,  $L_i$ , που συναρτάται με ποσοτικά κριτήρια όπως η αξιοπιστία, η εγγυημένη απόληψη, η παραγωγή ενέργειας, το κόστος λειτουργίας, το οικονομικό όφελος από την πώληση του νερού, κλπ.



Σχήμα 2.10: Σχηματική απεικόνιση των συνιστωσών ενός σχήματος στοχαστικής προσομοίωσης συστημάτων υδατικών πόρων.

Η υδρολογική αβεβαιότητα οδηγεί σε ένα ιδιαίτερα ευρύ φάσμα ισοπίθανων συνθηκών υδροφορίας και αντίστοιχων αποκρίσεων του συστήματος, οπότε η τιμή κάθε μεμονωμένου (δειγματικού) μέτρου,  $L_i$ , δεν έχει ιδιαίτερο νόημα. Συνεπώς, ως τελικό μέτρο επίδοσης του συστήματος,  $J$ , λαμβάνεται η αναμενόμενη (μέση) τιμή των επιμέρους δειγματικών μέτρων, μέσω της οποίας αποτιμάται η αποτελεσματικότητα της πολιτικής διαχείρισης που περιγράφεται μέσω των παραμέτρων,  $\theta$ . Συχνά, επιδιώκεται βελτιστοποίηση της εν λόγω πολιτικής, θεωρώντας τις διαχειριστικές παραμέτρους,  $\theta$ , ως τις μεταβλητές ελέγχου και το μέτρο επίδοσης του υδροσυστήματος,  $J$ , ως την αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος μη γραμμικής βελτιστοποίησης.

Το παρόν τεύχος εστιάζεται στην αναλυτική περιγραφή της πρώτης συνιστώσας του σχήματος στοχαστικής προσομοίωσης, ήτοι στο στοχαστικό υδρολογικό μοντέλο που υλοποιήθηκε μέσω του υπολογιστικού συστήματος *Κασταλία*. Η δεύτερη συνιστώσα, ήτοι το μοντέλο λειτουργικής προσομοίωσης που υλοποιήθηκε μέσω του υπολογιστικού συστήματος *Υδρονομέας*, αποτελεί αντικείμενο άλλου τεύχους (*Καραβοκύρης κ.ά., 2004*).

## 2.2.4 Τύποι προσομοίωσης – Η έννοια της στοχαστικής πρόγνωσης

Με βάση όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.2.3, το μέτρο επίδοσης ενός συστήματος υδατικών πόρων, εκτιμώμενο με την μέθοδο της στοχαστικής προσομοίωσης, εξαρτάται από τρεις παράγοντες: (α) τις παραμέτρους του στοχαστικού μοντέλου,  $\mu$ , (β) τα χαρακτηριστικά του υδροσυστήματος,  $\lambda$ , και (γ) τις διαχειριστικές παραμέτρους,  $\theta$ . Όπως εξηγήθηκε προηγουμένως, οι παράμετροι  $\mu$  προκύπτουν

συναρτήσει του ιστορικού δείγματος, **X**. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι η ακρίβεια και αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της στοχαστικής προσομοίωσης είναι άμεσα εξαρτώμενη από την ποσότητα καθώς και ποιότητα της διαθέσιμης υδρολογικής πληροφορίας.

Σε μελέτες σχεδιασμού ή στρατηγικής διαχείρισης συστημάτων υδατικών πόρων, όπου ζητούμενο είναι η αποτίμηση της μακροχρόνιας επίδοσης του συστήματος, η εν λόγω επίδοση θεωρείται ότι δεν επηρεάζεται από τις συνθήκες εκκίνησης του μοντέλου στοχαστικής προσομοίωσης, ήτοι το αρχικό καθεστώς υδροφορίας και αποθεμάτων. Επιπλέον, όλα τα υπόλοιπα δεδομένα εισόδου του συστήματος, όπως η διάταξη και τα χαρακτηριστικά των έργων και η ετήσια ζήτηση νερού, θεωρούνται σταθερά και ανεξάρτητα του χρόνου. Ο τύπος αυτός της προσομοίωσης ονομάζεται *μόνιμης κατάστασης* (steady-state). Κατά την προσομοίωση μόνιμης κατάστασης, οι επιμέρους σειρές εισροών μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμα μιας μεμονωμένης χρονοσειράς μεγάλου (θεωρητικά άπειρου) μήκους.

Αντίθετα, η επιχειρησιακή διαχείριση ενός υδροσυστήματος, ήτοι η διαχείρισή του σε πραγματικό χρόνο, επιβάλλει την ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών στο μοντέλο στοχαστικής προσομοίωσης. Στην περίπτωση αυτή, η βραχυχρόνια και πιθανόν μεσοπρόθεσμη επίδοση του συστήματος ενδέχεται να εξαρτάται καθοριστικά τόσο από το επίκαιρο καθεστώς υδροφορίας όσο και από τα επίκαιρα αποθέματα νερού. Επιπλέον, οι παράμετροι του υδροσυστήματος είναι συνήθως μεταβαλλόμενες στον χρόνο, λόγω της βλάβης ή της ένταξης νέων έργων στο σύστημα, της εισαγωγής νέων περιορισμών, της αύξησης της ζήτησης, κλπ. Στην περίπτωση αυτή ακολουθείται μια διαφορετική προσέγγιση, με εφαρμογή μιας διαδικασίας που ονομάζεται *καταληκτική* (terminating) προσομοίωση (Winston, 1994, σ. 1220). Στην καταληκτική προσομοίωση, παράγονται πολλές αλλά μικρού, κατά κανόνα, μήκους σειρές εισροών, με κατάλληλη προσαρμογή του στοχαστικού μοντέλου ώστε να λαμβάνει υπόψη όχι μόνο τα στατιστικά χαρακτηριστικά των ιστορικών δειγμάτων αλλά και την ακολουθία των ιστορικών τιμών, και ιδιαίτερα των πλέον πρόσφατων<sup>1</sup>. Η λειτουργία αυτή του μοντέλου ονομάζεται *στοχαστική πρόγνωση*. Στην συνέχεια, επαναλαμβάνεται το μοντέλο λειτουργικής προσομοίωσης με διαφορετικό κάθε φορά σενάριο εισροών, αλλά με τις ίδιες αρχικές συνθήκες αποθεμάτων, τις ίδιες συνθήκες μεταβολής παραμέτρων (εφόσον το σύστημα χαρακτηρίζεται από μη στασιμότητα), και την ίδια συνθήκη τερματισμού (χρονικός ορίζοντας ελέγχου).

---

<sup>1</sup> Υπενθυμίζεται ότι οι μελλοντικές τιμές μιας υδρολογικής διεργασίας σχετίζονται στατιστικά με τις παρελθούσες, με τον βαθμό της συσχέτισης να περιγράφεται ποσοτικά από την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.



## 3 Σχήμα γέννησης συνθετικών χρονοσειρών

---

### 3.1 Δομή και απαιτήσεις του μοντέλου

#### 3.1.1 Απαιτήσεις μαθηματικού μοντέλου

Το μαθηματικό σύστημα της «Κασταλίας» πληρεί όλες τις απαιτήσεις που πρέπει να έχει ένα τέτοιο σύστημα ώστε να αναπαράγει τα χαρακτηριστικά των ιστορικών χρονοσειρών διαφόρων μεταβλητών που αναφέρονται σε χωρικά καταναμημένα στοιχεία των υδροσυστημάτων όπως ταμειυτήρες.

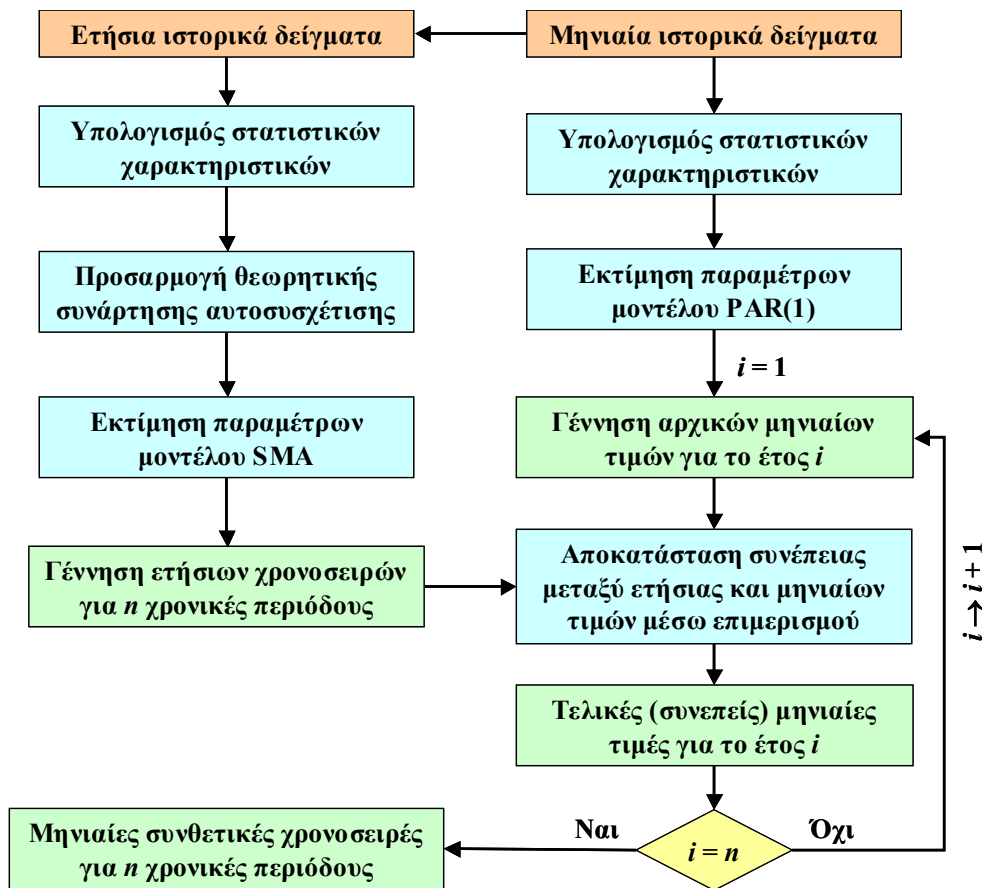
- Το μαθηματικό μοντέλο επιτρέπει την ταυτόχρονη στοχαστική ανάλυση πολλών δειγμάτων, τα οποία αναφέρονται σε διάφορες υδρολογικές διεργασίες και σε διάφορες θέσεις, χωρίς να θέτει περιορισμούς ως προς το πλήθος αυτών. Οι εν λόγω διεργασίες πρέπει να έχουν συσχέτιση ανήκοντας σε συστήματα (π.χ. λεκάνες απορροής) με κοινή υδρολογική δίαίτα. Η ανάλυση των δειγμάτων και, συνεπακόλουθα, η παραγωγή των συνθετικών χρονοσειρών γίνεται σε δύο χρονικά επίπεδα. Στο πρώτο επίπεδο γεννώνται συνθετικές χρονοσειρές ετήσιας κλίμακας μέσω μοντέλων που αναπαράγουν το φαινόμενο της εμμοής, ενώ στο δεύτερο επίπεδο γεννώνται συνθετικές χρονοσειρές μηνιαίου βήματος, μέσω μοντέλων που αναπαράγουν την ενδοετήσια περιοδικότητα των αντίστοιχων διεργασιών.
- Τα στατιστικά χαρακτηριστικά των ιστορικών δεδομένων, δηλαδή οι μέσες τιμές, διασπορές, συντελεστές ασυμμετρίας, συντελεστές αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης θα πρέπει να διατηρούνται αναλλοίωτα, μία απαίτηση που είναι σύμφωνη με την κυριαρχούσα άποψη της βιβλιογραφίας. Με βάση το κλασικό εγχειρίδιο των *Matalas and Wallis* (1976), και ανεξάρτητα από την χρονική κλίμακα της ανάλυσης, το ελάχιστο σύνολο των ουσιωδών στατιστικών παραμέτρων που απαιτείται να αναπαράγονται κατά την στοχαστική προσομοίωση ενός συστήματος υδατικών πόρων είναι: (α) οι παράμετροι των περιθώριων συναρτήσεων κατανομής κάθε μεταβλητής, και συγκεκριμένα η μέση τιμή, η διασπορά και ο συντελεστής ασυμμετρίας, και (β) οι παράμετροι των από κοινού συναρτήσεων κατανομής των μεταβλητών, και συγκεκριμένα οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης και οι συντελεστές ετεροσυσχέτισης μηδενικής τάξης. Το μαθηματικό της «Κασταλίας» αναπαράγει το σύνολο των παραπάνω στατιστικών χαρακτηριστικών. Τονίζεται ωστόσο ότι, στην πράξη, είναι αναπόφευκτη η εμφάνιση μικρών αποκλίσεων ως προς ορισμένα στατιστικά χαρακτηριστικά των ιστορικών και συνθετικών δειγμάτων, στην περίπτωση που η εκτίμηση των παραμέτρων που σχετίζονται με τα εν λόγω χαρακτηριστικά δεν γίνεται αναλυτικά αλλά προσεγγιστικά (μέσω βελτιστοποίησης).
- Το μοντέλο θα διατηρεί τη στοχαστική εξάρτηση των υδρολογικών μεταβλητών τόσο ως προς το χώρο όσο και ως προς το χρόνο. Η χωρική εξάρτηση αντιστοιχεί στην προφανή συγγένεια της ταυτόχρονης υδρολογικής δίαίτας σε γειτονικές θέσεις ή λεκάνες και μπορεί να αναφέρεται σε διαφορετικά υδρολογικά μεγέθη, στοχαστικά εξαρτημένα (π.χ. βροχή και απορροή). Αντίστοιχα, η χρονική εξάρτηση οφείλεται στη μνήμη (βραχυπρόθεσμη εμμοή) των υδρολογικών μεγεθών (εξάρτηση ενός μεγέθους από τις τιμές των αμέσως προηγούμενων βημάτων). Το μοντέλο διατηρεί την χωρική και χρονική εξάρτηση των μεταβλητών, καθώς αναπαράγει όλες τις ουσιώδεις συνδιασπορές, ήτοι τις ετεροσυσχετίσεις μηδενικής τάξης και αυτοσυσχετίσεις πρώτης τάξης.
- Το μοντέλο θα διατηρεί τη μακροπρόθεσμη εμμοή, ώστε να δυνατή η αναπαραγωγή αλληλουχιών ξηρών ετών παρόμοιων με αυτά που παρατηρήθηκαν στην τελευταία μεγάλη

ξηρασία. Η αναπαραγωγή του φαινομένου της εμμονής (φαινόμενο Hurst) θεωρείται από τα κομβικά σημεία του σχήματος προσομοίωσης που αναπτύχθηκε, καθώς βασίστηκε εξ ολοκλήρου σε πρωτότυπη ερευνητική εργασία. Η διατήρηση της μακροπρόθεσμης εμμονής επιτυγχάνεται με προσαρμογή ενός κατάλληλου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος στις ετήσιες μεταβλητές και την σύζευξη αυτού με ένα σχήμα γέννησης κινούμενων μέσων όρων.

- Οι ιδιότητες της στατιστικής κατανομής που θα επιλεγεί πρέπει να είναι συμβατές με τα χαρακτηριστικά των υδρολογικών μεταβλητών. Στο μοντέλο γέννησης συνθετικών χρονοσειρών γίνεται χρήση της κατανομής γάμα τριών παραμέτρων που θεωρείται κατάλληλη τόσο για μηνιαίες όσο και για ετήσιες υδρολογικές μεταβλητές, δεδομένου ότι ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής και μπορεί να αναπαράγει την ασυμμετρία των ιστορικών δειγμάτων.
- Οι μηνιαίες χρονοσειρές θα πρέπει να είναι συνεπείς με τις ετήσιες. Στο μοντέλο, παρόλο που σε πρώτη φάση οι μηνιαίες μεταβλητές παράγονται ανεξάρτητα από τις ετήσιες (και μάλιστα με εφαρμογή διαφορετικών σχημάτων προσομοίωσης), στην συνέχεια ανάγονται μέσω μιας μεθοδολογίας επιμερισμού, έτσι ώστε για κάθε προσομοιωμένο έτος το άθροισμα των συνθετικών μηνιαίων τιμών να ισούται με την αντίστοιχη συνθετική ετήσια τιμή.
- Οι μελλοντικές τιμές των συνθετικών χρονοσειρών θα πρέπει να είναι συνεπείς με τις επίκαιρες και τις ιστορικές τιμές. Το μοντέλο γέννησης συνθετικών χρονοσειρών μπορεί να εφαρμοστεί με δύο τρόπους: (α) για την γέννηση χρονοσειρών μεγάλου μήκους, οι οποίες χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές τύπου μόνιμης κατάστασης και, συνεπώς, δεν εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες της προσομοίωσης, και (β) για την γέννηση πολλαπλών σεναρίων μικρού μήκους, τα οποία χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές τύπου καταληκτικής προσομοίωσης (βλ. 2.2.4). Στην τελευταία περίπτωση, η βραχυπρόθεσμη εξέλιξη των υδρολογικών μεταβλητών εξαρτώνται από τις επίκαιρες και παρελθούσες τιμές τους, οι οποίες εισάγονται στο μοντέλο υπό μορφή στατιστικής δέσμευσης.

### **3.1.2 Συνοπτική περιγραφή του σχήματος γέννησης συνθετικών χρονοσειρών**

Για την γέννηση συνθετικών χρονοσειρών υιοθετήθηκε ένα στοχαστικό σχήμα πολλών μεταβλητών, το οποίο υλοποιείται σε δύο χρονικά επίπεδα. Κάθε μεταβλητή αναφέρεται σε συγκεκριμένη υδρολογική διεργασία, που λαμβάνει χώρα σε συγκεκριμένη γεωγραφική θέση. Το πρώτο επίπεδο (υψηλό επίπεδο) αναφέρεται σε χρονοσειρές αραϊής χρονικής κλίμακας, η ισοδιάσταση της οποίας θα καλείται εφεξής *περίοδος*, ενώ το δεύτερο επίπεδο (χαμηλό επίπεδο) αναφέρεται σε πυκνότερη χρονική κλίμακα, που θα καλείται *υποπερίοδος*. Ως υψηλή χρονική κλίμακα επιλέγεται η ετήσια, για την οποία οι στοχαστικές ανελίξεις θεωρούνται στάσιμες, ενώ ως χαμηλή χρονική κλίμακα επιλέγεται η μηνιαία, που είναι η συνήθης κλίμακα στην διαχείριση συστημάτων υδατικών πόρων.



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα ροής σχήματος γέννησης συνθετικών χρονοσειρών για την στοχαστική προσομοίωση συστημάτων υδατικών πόρων σε μηνιαία χρονική κλίμακα, για  $n$  συνολικά έτη.

Το διάγραμμα ροής της μεθοδολογίας γέννησης συνθετικών χρονοσειρών απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1. Είσοδος του μοντέλου είναι τα μηνιαία ιστορικά δείγματα των μεταβλητών, βάσει των οποίων προκύπτουν τα αντίστοιχα ετήσια. Πρώτα υπολογίζονται τα δειγματικά στατιστικά χαρακτηριστικά, τόσο σε μηνιαία όσο και σε ετήσια βάση. Στην συνέχεια, για κάθε ετήσια μεταβλητή ορίζεται μια θεωρητική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, η οποία περιγράφει την μακροπρόθεσμη εμμονή της αντίστοιχης υδρολογικής διεργασίας (βλ. 3.2). Η δομή της αυτοσυσχέτισης αναπαράγεται μέσω ενός στάσιμου μοντέλου συμμετρικά κινούμενων μέσων όρων (μοντέλο SMA), οι παράμετροι του οποίου εκτιμώνται συναρτήσει των στατιστικών χαρακτηριστικών των ετήσιων ιστορικών χρονοσειρών (βλ. 3.3). Το μοντέλο SMA, που σημειωτέον είναι γενικευμένο ώστε να προσαρμόζεται σε πολυμεταβλητά σχήματα προσομοίωσης, χρησιμοποιείται για την γέννηση συνθετικών χρονοσειρών σε όλες τις θέσεις και για όλον τον χρονικό ορίζοντα της προσομοίωσης.

Για τη στοχαστική προσομοίωση των μηνιαίων μεταβλητών χρησιμοποιείται ως βάση ένα περιοδικό μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης πρώτης τάξης, το  $PAR(1)$ , διατυπωμένο ως πολυμεταβλητό. Οι παράμετροι του μοντέλου εκτιμώνται συναρτήσει των στατιστικών χαρακτηριστικών των μηνιαίων ιστορικών χρονοσειρών (βλ. 3.4). Η γέννηση των μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών, η οποία προϋποθέτει να έχει ολοκληρωθεί η παραγωγή των ετήσιων συνθετικών τιμών, γίνεται σε στάδια. Αρχικά, για κάθε ένα έτος ξεχωριστά, γεννώνται 12 μηνιαίες τιμές μέσω του μοντέλου  $PAR(1)$ , οι οποίες προφανώς δεν είναι συνεπείς με τις αντίστοιχες ετήσιες. Για την αποκατάσταση της συνέπειας, εφαρμόζεται μια διαδικασία γραμμικής αναγωγής (μοντέλο επιμερισμού), μέσω της οποίας οι μηνιαίες συνθετικές τιμές διορθώνονται, ώστε συναθροιζόμενες να ισούνται με την αντίστοιχη ετήσια (βλ. 3.5). Η διαδικασία γέννησης μηνιαίων τιμών επαναλαμβάνεται για όλα τα έτη, οπότε προκύπτει

ένα τελικό συνθετικό δείγμα μηνιαίων τιμών που είναι συνεπές με το ετήσιο, το οποίο έχει προκύψει με εφαρμογή του μοντέλου SMA, αναπαράγοντας κατ' αυτόν τον τρόπο το ιδιαίτερα κρίσιμο φαινόμενο της εμμονής.

## 3.2 Μεθοδολογία αναπαραγωγής της εμμονής

### 3.2.1 Γενικά

Η αναπαραγωγή του φαινομένου της εμμονής, που όπως αναφέρθηκε αποτελεί γενικό χαρακτηριστικό των περισσότερων γεωφυσικών διεργασιών (βλ. 2.1.6), θεωρείται ιδιαίτερα κρίσιμη, δεδομένου ότι με αυτή σχετίζεται η εμφάνιση των μακροχρόνιων ξηρασιών, που επηρεάζουν άμεσα την λειτουργία και διαχείριση των υδροσυστημάτων.

Για την αναπαραγωγή των ξηρασιών ακολουθούνται διεθνώς δύο ειδών προσεγγίσεις. Η απλούστερη προσέγγιση είναι η εμπειρική, η οποία δεν απαιτεί ειδική μοντελοποίηση. Βάσει αυτής, υιοθετείται ένα σύνθηδες σχήμα γέννησης συνθετικών χρονοσειρών (π.χ. ένα μοντέλο τύπου ARMA), οι παράμετροι του οποίου δεν εκτιμώνται συναρτήσει των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος αλλά βάσει τροποποιημένων τιμών αυτών. Η επέμβαση γίνεται συνήθως μόνο στις δύο πρώτες ροπές του δείγματος, ήτοι την μέση τιμή και την διασπορά. Για παράδειγμα, με μείωση της τιμής της μέσης ετήσιας απορροής και αύξησης της διασποράς, μπορούν να παραχθούν συνθετικά δείγματα εισροών που είναι σαφώς πιο δυσμενή σε σχέση με τα αντίστοιχα ιστορικά. Κατά κανόνα, οι τροποποιημένες τιμές δεν ορίζονται εντελώς αυθαίρετα αλλά προκύπτουν μετά από διερεύνηση υποθετικών σεναρίων κλιματικής αλλαγής, για τα οποία έχουν αναπτυχθεί μοντέλα προσομοίωσης που βασίζονται στις φυσικές διεργασίες του υδρολογικού κύκλου. Ωστόσο, παρά την απλότητά της και την λογικοφανή ερμηνεία της, η εμπειρική προσέγγιση δεν κρίνεται αξιόπιστη, όχι μόνο επειδή βασίζεται σε αυθαίρετες υποθέσεις αλλά και εξαιτίας του χαμηλού βαθμού επαλήθευσης των κλιματικών μοντέλων.

Η δεύτερη προσέγγιση συνίσταται στη μαθηματική περιγραφή της εμμονής, και την αναπαραγωγή της μέσω εξειδικευμένων στοχαστικών σχημάτων, όπως τα μοντέλα τύπου FGN (*Mandelbrot*, 1965), FFGN (*Mandelbrot and Wallis*, 1969) και broken line (*Mejia et al.*, 1972). Στα παραπάνω μοντέλα επιχειρείται η ποσοτικοποίηση της εμμονής και η εισαγωγή της ως παραμέτρου, της οποίας ωστόσο ο ορισμός και ο τρόπος εκτίμησης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκος (βλ. και 3.2.2). Ένα άλλο σοβαρό μειονέκτημα είναι η αδυναμία διατύπωσης των μοντέλων ως πολυμεταβλητών, κάτι που ωστόσο θεωρείται αναγκαίο για τη στοχαστική προσομοίωση των υδρολογικών μεταβλητών σύνθετων υδροσυστημάτων. Για τον λόγο αυτό, υιοθετήθηκε μια γενικευμένη προσέγγιση που, αν και πολύ απλή στην εφαρμογή της, είναι πλήρως τεκμηριωμένη μαθηματικά. Η προσέγγιση αυτή περιγράφεται λεπτομερώς στην συνέχεια της ενότητας.

### 3.2.2 Ορισμός και ιδιότητες γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς

Έστω η στοχαστική ανέλιξη  $X_i$  σε διακριτό χρόνο (π.χ. έτος)  $i$ , με αυτοσυνδιασπορά:

$$\gamma_j = \text{Cov} [X_i, X_{i+j}] \quad (3.1)$$

Η ανέλιξη  $X_i$  θεωρείται στάσιμη, με μέση τιμή  $\mu_x = E[X_i]$ , διασπορά  $\gamma_0$  και συντελεστή ασυμμετρίας  $\zeta_x = E[(X_i - \mu_x)^3] / \gamma_0$ . Τα περιθώρια στατιστικά χαρακτηριστικά της ανέλιξης, ήτοι οι παράμετροι  $\mu_x$ ,  $\gamma_0$  και  $\zeta_x$ , μπορούν να εκτιμηθούν εφόσον διατίθεται ένα δείγμα της  $X_i$  μεγέθους  $n$ , ήτοι μια ακολουθία τιμών  $(x_1, \dots, x_n)$ . Από την άλλη πλευρά, οι αυτοσυνδιασπορές,  $\gamma_j$ , μπορούν να εκτιμηθούν μέσω της εμπειρικής συνάρτησης (2.18). Υπενθυμίζεται ότι ο λόγος  $\rho_j = \gamma_j / \gamma_0$  είναι ο συντελεστής

αυτοσυσχέτισης της ανέλιξης, ενώ η γραφική παράσταση των  $\rho_j$  συναρτήσεως της χρονικής υστέρησης  $j$  είναι το αυτοσυσχετόγραμμα (βλ. 2.1.4).

Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στο εδάφιο 2.1.6, η μακροπρόθεσμη εμμονή των υδρολογικών χρονοσειρών εμφανίζεται με την μορφή υψηλών θετικών τιμών των συντελεστών αυτοσυσχέτισης, ακόμη και για πολύ μεγάλα βήματα χρονικής υστέρησης. Ο εμπειρικός εντοπισμός της ύπαρξης μακροπρόθεσμης εμμονής σε μια χρονοσειρά γίνεται, μεταξύ άλλων, με την κατασκευή του δειγματικού αυτοσυσχετογράμματος. Εφόσον η χρονοσειρά έχει εμμονή το διάγραμμα των  $\rho_j$  παρουσιάζει την χαρακτηριστική μορφή πλατειάς ουράς, ενώ, αντίθετα, αν η χρονοσειρά δεν έχει εμμονή, το διάγραμμα φθίνει πολύ γρήγορα προς το μηδέν. Κατά συνέπεια, το σχήμα του αυτοσυσχετογράμματος αποτελεί ισχυρή ένδειξη της ύπαρξης ή όχι εμμονής.

Ωστόσο, επειδή το μήκος ενός υδρολογικού δείγματος είναι κατά κανόνα μικρό (της τάξης των μερικών δεκάδων ετών), μόνο οι πρώτες τιμές των αυτοσυνδιασπορών μπορούν να εκτιμηθούν με αποδεκτή ακρίβεια μέσω της (2.18). Επιπλέον, οι δειγματικές εκτιμήσεις της αυτοσυνδιασποράς εισάγουν σημαντική αρνητική μεροληψία, με αποτέλεσμα να φθίνουν γρήγορα συναρτήσεως του χρόνου (Koutsoyiannis, 2003). Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι τα  $\gamma_j$  μηδενίζονται μετά από κάποιο χρονικό βήμα  $m$  και, κατά συνέπεια, η μνήμη της ανέλιξης  $X_t$  είναι μικρή, ενώ κάτι τέτοιο μπορεί να μην ισχύει στην πραγματικότητα.

Τα συνήθη στοχαστικά μοντέλα ανήκουν στην οικογένεια των μοντέλων τύπου ARMA( $p, q$ ), που είναι συνδυασμένα σχήματα αυτοπαλινδρόμησης τάξης  $p$  και κινούμενων μέσων όρων τάξης  $q$  (Box and Jenkins, 1970). Τα μοντέλα αυτά είναι βραχείας μνήμης, με αυτοσυσχετόγραμμα που φθίνει εκθετικά με τον χρόνο. Πράγματι, για μεγάλα βήματα υστέρησης  $j$ , η θεωρητική συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς μιας στοχαστικής ανέλιξης τύπου ARMA προσεγγίζεται από μια σχέση εκθετικής μείωσης της μορφής:

$$\gamma_j = \alpha \varphi^j \quad (3.2)$$

όπου  $\alpha, \varphi$  παράμετροι, με  $0 \leq \varphi \leq 1$ .

Είναι προφανές ότι τα μοντέλα τύπου ARMA είναι ακατάλληλα για την αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής των υδρολογικών διεργασιών. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκαν εναλλακτικά μαθηματικά σχήματα, όπως τα λεγόμενα μοντέλα κλασματικού γκαουσιανού θορύβου (FGN, fractional Gaussian noise), τα οποία προσομοιώνουν διεργασίες με μακροπρόθεσμη εμμονή, θεωρώντας συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς της μορφής:

$$\gamma_j = \frac{1}{2} \gamma_0 [(j-1)^{2H} - 2j^{2H} + (j+1)^{2H}] \quad (3.3)$$

όπου  $H$  είναι μέτρο της μακροπρόθεσμης εμμονής, που καλείται συντελεστής Hurst και λαμβάνει τιμές στο διάστημα  $0.5 \leq H \leq 1$  (Bras and Rodriguez-Iturbe, 1993).

Με εξαίρεση τους πρώτους όρους της, η ακολουθία (3.3) προσεγγίζεται από την εξίσωση δύναμης:

$$\gamma_j = \gamma_0 (1 - 1/\beta) (1 - 1/2\beta) j^{-1/\beta} \quad (3.4)$$

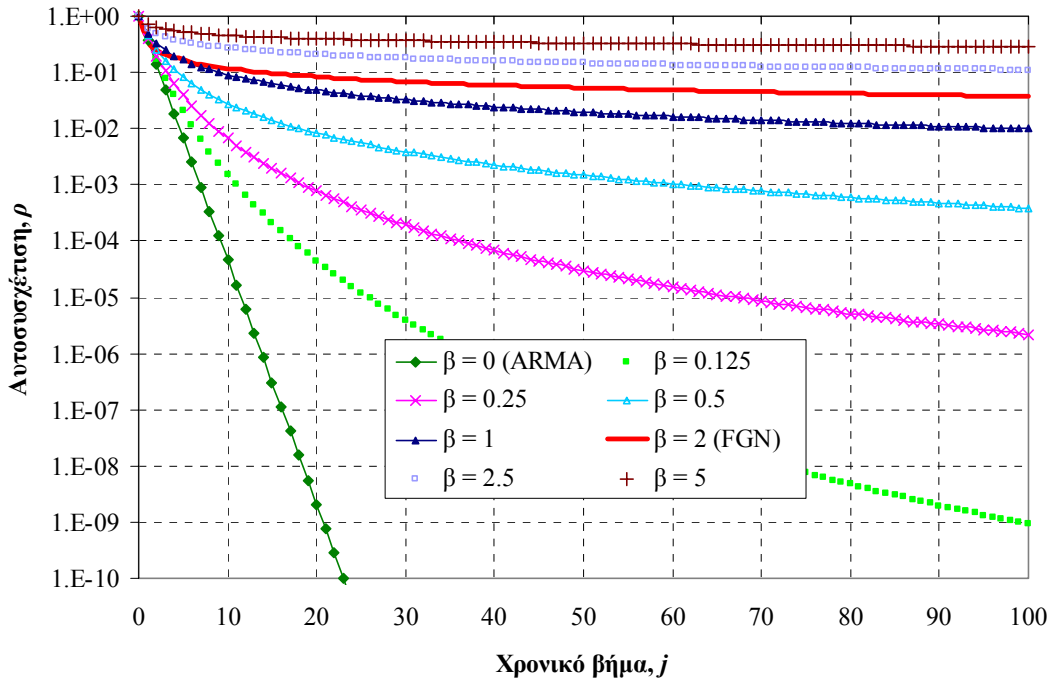
όπου:

$$\beta = \frac{1}{2(1-H)} \geq 1 \quad (3.5)$$

Για μεγάλα χρονικά βήματα, οι θεωρητικές συναρτήσεις αυτοσυνδιασποράς τόσο των ARMA όσο και των FGN ανελιξεων μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις της λεγόμενης γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς (Koutsoyiannis, 2000):

$$\gamma_j = \gamma_0 [1 + \kappa \beta j]^{-1/\beta} \quad (3.6)$$

όπου  $\kappa, \beta$  παράμετροι. Η παράμετρος  $\kappa$  περιγράφει το σχήμα της συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς, ενώ η παράμετρος  $\beta$  σχετίζεται άμεσα με την εμμονή της στοχαστικής ανέλιξης.



Σχήμα 3.2: Παραδείγματα εφαρμογής της γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς για παράμετρο σχήματος  $\kappa = 1$  και διάφορες τιμές της παραμέτρου εμμονής,  $\beta$ .

Για  $\beta = 0$ , με εφαρμογή του κανόνα de l' Hospital, η σχέση (3.6) γίνεται:

$$\gamma_j = \gamma_0 \exp(-\kappa j) \quad (3.7)$$

που είναι ταυτόσημη με την (3.2), εφόσον τεθεί  $\kappa = -\ln \rho$ .

Για  $\beta > 1$ , η σχέση (3.6) προσεγγίζει με μεγάλη ακρίβεια την (3.4) εφόσον τεθεί:

$$\kappa = \frac{1}{\beta(1-1/\beta)(1-1/2\beta)^\beta} =: \kappa_0 \quad (3.8)$$

Για  $\kappa \neq \kappa_0$  ή για τιμές της παραμέτρου εμμονής  $\beta$  στο διάστημα  $(0, 1)$  η σχέση (3.6) εξακολουθεί να αποτελεί μια εφικτή δομή αυτοσυνδιασποράς για στοχαστικές ανέλιξεις διαφορετικού τύπου από τις ARMA και FGN. Στο Σχήμα 3.2 απεικονίζεται η (3.6) για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\beta$ , θεωρώντας σταθερή τιμή  $\kappa = 1$ . Για  $\beta = 0$ , η (3.6) ταυτίζεται με μια ανέλιξη τύπου ARMA, η αυτοσυνδιασπορά της οποίας φθίνει μετά από ελάχιστα βήματα και σε ημιλογαριθμικό διάγραμμα παρίσταται με μια ευθεία γραμμή. Με συμπαγή γραμμή απεικονίζεται η εξίσωση για την ειδική περίπτωση  $\kappa = \kappa_0$  και  $\beta = 2$ , οπότε ταυτίζεται με μια μακράς μνήμης FGN ανέλιξη. Είναι προφανές ότι όσο αυξάνει η τιμή της παραμέτρου  $\beta$ , τόσο αυξάνει η μνήμη της στοχαστικής ανέλιξης. Κατά συνέπεια, η παράμετρος  $\beta$  είναι αντίστοιχη του συντελεστή Hurst της μεθόδου FGN.

Εφόσον κρίνεται απαραίτητη η αναπαράγωγή των  $m$  πρώτων όρων της αυτοσυνδιασποράς του ιστορικού δείγματος, αυτοί θεωρούνται παράμετροι της στοχαστικής δομής της ανέλιξης, με την ακολουθία  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  να ορίζεται αυθαίρετα ή να εκτιμάται μέσω της εμπειρικής συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς (2.18). Στην περίπτωση αυτή, οι υπόλοιποι όροι της θεωρητικής συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς της στοχαστικής ανέλιξης υπολογίζονται μέσω της (3.6), θέτοντας:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{1}{\beta m} \left[ \left( \frac{\gamma_0}{\gamma_m} \right)^\beta - 1 \right] & \beta \neq 0 \\ \frac{1}{m} \ln \left( \frac{\gamma_0}{\gamma_m} \right) & \beta = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται η συνέχεια της ακολουθίας στο χρονικό βήμα  $j = m$ .

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να τονιστεί ότι δεν μπορεί οποιαδήποτε ακολουθία τιμών  $\gamma_j$  ( $j = 0, \dots, s$ ) να συνιστά μια εφικτή ακολουθία όρων αυτοσυνδιασποράς. Το τελευταίο ισχύει μόνο εφόσον το  $s \times s$  μητρώο  $\mathbf{h}$  με στοιχεία:

$$h_{ij} = \gamma_{|i-j|} \quad (3.10)$$

είναι θετικά ημιορισμένο, δηλαδή για κάθε διάνυσμα  $\xi$  ισχύει:

$$\xi \mathbf{h} \xi^T \geq 0 \quad (3.11)$$

Παρόμοιος έλεγχος εφικτότητας μπορεί να γίνει και μέσω του *φάσματος ισχύος* (power spectrum) της ακολουθίας  $\gamma_j$ , το οποίο πρέπει να είναι θετικό σε όλα τα σημεία  $\omega$ . Αποδεικνύεται ότι το φάσμα ισχύος κάθε στοχαστικής ανέλιξης ισούται με τον *διακριτό μετασχηματισμό Fourier* (DFT, discrete Fourier transform) της ακολουθίας των αυτοσυνδιασπορών  $\gamma_j$  (Papoulis, 1991, σ. 293-294). Ο εν λόγω μετασχηματισμός υπολογίζεται ως (Bloomfield, 1976, σ. 46-49):

$$s_\gamma(\omega) = 2\gamma_0 + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(2\pi j \omega) \quad (3.12)$$

Λόγω συμμετρίας ( $\gamma_j = \gamma_{-j}$ ) ο αντίστροφος μετασχηματισμός του φάσματος είναι:

$$\gamma_j = \int_0^{1/2} s_\gamma(\omega) \cos(2\pi j \omega) d\omega \quad (3.13)$$

Το φάσμα ισχύος χρησιμοποιείται για το προσδιορισμό των παραμέτρων του σχήματος γέννησης των μεταβλητών  $X_i$ , όπως περιγράφεται στην ενότητα 3.3.2.

### 3.2.3 Εκτίμηση παραμέτρων συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς

Οι ουσιώδεις παράμετροι της γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς είναι κατ' ελάχιστο τρεις, δηλαδή η διασπορά  $\gamma_0$ , η παράμετρος εμμονής  $\beta$  και η παράμετρος σχήματος,  $\kappa$ . Εφόσον διατίθενται ένα δείγμα τιμών  $(x_1, \dots, x_n)$ , η εκτίμηση της δειγματικής διασποράς,  $\hat{\gamma}_0$ , γίνεται μέσω της σχέσης (2.15), ενώ για την εκτίμηση των παραμέτρων  $\beta$  και  $\kappa$  μπορούν να εφαρμοστούν τέσσερις εναλλακτικές μέθοδοι, που περιγράφονται στη συνέχεια του εδαφίου.

α) *Βέλτιστη προσαρμογή του θεωρητικού στο εμπειρικό αυτοσυσχετόγραμμα*

Στην περίπτωση αυτή ορίζεται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$f(\beta, \kappa) = \frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} (\hat{\rho}_j - \rho_j)^2 \quad (3.14)$$

όπου  $\hat{\rho}_j = \hat{\gamma}_j / \hat{\gamma}_0$  η ακολουθία των εμπειρικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης, όπως εκτιμώνται μέσω της (2.18) για βήματα υστέρησης έως  $n_0 < n$ , και  $\rho_j = \gamma_j / \gamma_0$  η ακολουθία των θεωρητικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης, όπως εκτιμώνται μέσω της (3.6). Ο λόγος που επιλέγεται μικρότερο δείγμα εμπειρικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης σε σχέση με το μήκος της διαθέσιμης χρονοσειράς έχει να κάνει με την αξιοπιστία προσδιορισμού των  $\hat{\rho}_j$  καθώς, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, όσο αυξάνει το βήμα υστέρησης τόσο αυξάνει η αρνητική μεροληψία της εκτιμήτριας (2.18). Στο πρόγραμμα *Κασταλία*, οι εμπειρικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης υπολογίζονται μέχρι βήματος  $n_0 < n / 2$ .

Η αντικειμενική συνάρτηση (3.14) εκφράζει την μέση τετραγωνική απόκλιση μεταξύ των δειγματικών και θεωρητικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης. Σημειώνεται ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης που ορίζεται από την (3.14) είναι μη γραμμικό ως προς τις παραμέτρους  $\beta$ ,  $\kappa$  και επιλύεται με ειδικές τεχνικές αναζήτησης ακροτάτων σε μη κυρτούς χώρους (*Ευστρατιάδης, 2001*).

*β) Διατήρηση του δειγματικού συντελεστή αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1*

Στην περίπτωση αυτή ορίζεται το ίδιο πρόβλημα βελτιστοποίησης, με προσθήκη του περιορισμού:

$$\rho_1 = \hat{\rho}_1 \quad (3.15)$$

Η συνθήκη  $\rho_1 = \hat{\rho}_1$  εισάγεται στη αντικειμενική συνάρτηση (3.14) ως όρος ποινής, δηλαδή:

$$f(\beta, \kappa) = \frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} (\hat{\rho}_j - \rho_j)^2 + M (\hat{\rho}_1 - \rho_1)^2 \quad (3.16)$$

όπου  $M$  ένας μεγάλος θετικός αριθμός.

*γ) Διατήρηση των δειγματικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1 και 2*

Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα δεν έχει βαθμούς ελευθερίας και οι παράμετροι  $\beta$ ,  $\kappa$  προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των μη γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 &= \hat{\gamma}_0 [1 + \kappa \beta]^{-1/\beta} \\ \hat{\gamma}_2 &= \hat{\gamma}_0 [1 + 2 \kappa \beta]^{-1/\beta} \end{aligned} \quad (3.17)$$

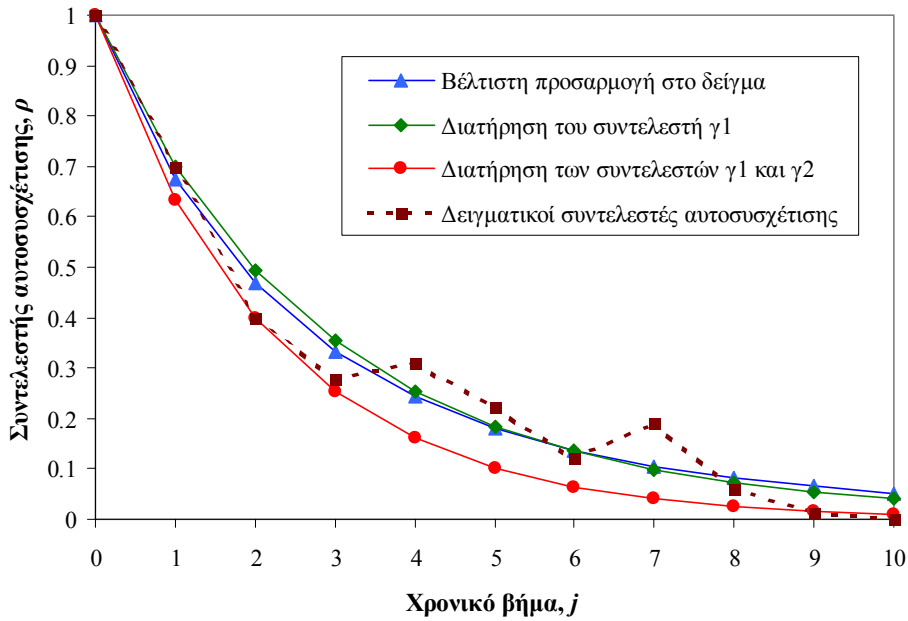
Αποδεικνύεται ότι το σύστημα (3.17) έχει ακριβή λύση για ορισμένο εύρος τιμών των  $\hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\gamma}_1$  και  $\hat{\gamma}_2$ , διαφορετικά η λύση του συστήματος προκύπτει με βελτιστοποίηση ως προς τις παραμέτρους  $\beta$  και  $\kappa$ , όμοια με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

*δ) Αυθαίρετη επιλογή παραμέτρου εμμονής*

Οι μέθοδοι (α), (β) και (γ) είναι κατάλληλες για την εκτίμηση των παραμέτρων της γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς μόνο εφόσον το δειγματικό αυτοσυσχετόγραμμα είναι σχετικά αξιόπιστο. Αυτό προϋποθέτει την ύπαρξη μεγάλου μήκους ιστορικών δειγμάτων, κάτι που στην πράξη είναι εξαιρετικά σπάνιο. Για το λόγο αυτό είναι προτιμότερη η επιλογή της τιμής της παραμέτρου εμμονής με βάση τις ανάγκες του εκάστοτε προβλήματος που εξετάζεται. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση (3.6) έχει έναν μόνο βαθμό ελευθερίας, ήτοι την παράμετρο σχήματος  $\kappa$ , που είτε μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά (θεωρώντας ότι διατηρείται ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1) είτε μέσω βελτιστοποίησης, ελαχιστοποιώντας δηλαδή την μέση απόκλιση του θεωρητικού από το δειγματικό αυτοσυσχετόγραμμα.

Στο Σχήμα 3.3 απεικονίζονται οι περιπτώσεις (α), (β) και (γ) για ένα υποθετικό δειγματικό αυτοσυσχετόγραμμα. Το συγκεκριμένο αυτοσυσχετόγραμμα έχει ακανόνιστη μορφή, κάτι που είναι σύνηθες όταν το δείγμα από το οποίο υπολογίζεται έχει μικρό μήκος. Τα διαγράμματα που προκύπτουν για τις περιπτώσεις (α) και (β) σχεδόν ταυτίζονται, ενώ στην περίπτωση (γ) το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα φθίνει γρηγορότερα σε σχέση με τα άλλα δύο, καθώς η βελτιστοποιημένη τιμή της παραμέτρου  $\beta$  τείνει στο μηδέν. Σημειώνεται ότι στο παράδειγμα δεν υπάρχει ακριβής λύση για την περίπτωση (γ), δηλαδή δεν υπάρχουν  $\kappa$  και  $\beta$  τέτοια που να ικανοποιούν ακριβώς το σύστημα των εξισώσεων (3.17).





Σχήμα 3.3: Παραδείγματα εκτίμησης των παραμέτρων  $\beta$  και  $\kappa$  με βάση τις τιμές ενός υποθετικού δειγματικού αυτοσυσχετογράμματος.

### 3.3 Γέννηση ετήσιων χρονοσειρών

#### 3.3.1 Μοντέλο συμμετρικών κινούμενων μέσων όρων

Κάθε στοχαστική ανάλυση  $X_i$  με γνωστή ακολουθία αυτοσυνδιασπορών  $\gamma_j$  μπορεί να γραφεί ως ένα σταθμισμένο άθροισμα άπειρων τυχαίων μεταβλητών, ήτοι:

$$X_i = \sum_{j=-\infty}^0 a_{-j} V_{i+j} = \dots + a_2 V_{i-2} + a_1 V_{i-1} + a_0 V_i \quad (3.18)$$

όπου  $a_j$  οι συντελεστές στάθμισης που προσδιορίζονται από την ακολουθία των αυτοσυνδιασπορών  $\gamma_j$ , και  $V_i$  ο λευκός θόρυβος ή αλλιώς μεταβλητές ανανέωσης (innovations), που θεωρείται ότι είναι στοχαστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους και έχουν μοναδιαία διασπορά. Το μοντέλο (3.18) είναι το γνωστό σχήμα γέννησης κινούμενων προς τα πίσω μέσων όρων (BMA, backward moving average), το οποίο εισήχθη από τους *Box and Jenkins* (1970, σ. 46).

Ειδικότερα, οι συντελεστές  $a_j$  συνδέονται με τις αυτοσυνδιασπορές  $\gamma_j$  μέσω ενός συστήματος εξισώσεων της μορφής:

$$\gamma_i = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j a_{i+j} \quad (3.19)$$

Στην πράξη, δηλαδή κατά την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών μέσω του σχήματος (3.18), το πλήθος των μεταβλητών ανανέωσης  $V_i$  δεν είναι άπειρο, καθώς: α) το μήκος της προσομοίωσης, και συνεπώς το πλήθος των συνθετικών τιμών  $X_i$  είναι προφανώς πάντοτε πεπερασμένο, και β) οι συντελεστές  $a_j$  τείνουν να μηδενιστούν όσο αυξάνει το χρονικό βήμα  $j$ , οπότε όλοι οι όροι της ακολουθίας (3.18) μπορούν να αμεληθούν μετά κάποιο πεπερασμένο όριο  $j > -s$ . Τονίζεται ότι το εν λόγω όριο  $s$  είναι πολύ μεγαλύτερο από την συνήθη τάξη  $p, q$  μιας στοχαστικής ανάλυσης τύπου ARMA. Με βάση τα παραπάνω, οι απειροσειρές (3.18) και (3.19) μπορούν να προσεγγιστούν από τις πεπερασμένες ακολουθίες:

$$X_i = \sum_{j=-s}^0 \alpha_{-j} V_{i+j} = \alpha_s V_{i-s} + \dots + \alpha_2 V_{i-2} + \alpha_1 V_{i-1} + \alpha_0 V_i \quad (3.20)$$

$$\gamma_i = \sum_{j=0}^{s-i} \alpha_j \alpha_{i+j} \quad (3.21)$$

Για ευκολότερη εκτίμηση των συντελεστών του μοντέλου, ο *Koutsoyiannis* (2000) εισήγαγε μια εναλλακτική διατύπωση. Αρχικά, υπέθεσε ότι η στοχαστική ανέλιξη  $X_i$  προκύπτει ως σταθμισμένο άθροισμα τόσο άπειρων προηγούμενων όσο και άπειρων επόμενων τυχαίων μεταβλητών, ορίζοντας έτσι το λεγόμενο σχήμα γέννησης *κινούμενων μέσων όρων διπλής κατεύθυνσης* (BFMA, backward-forward moving average), που είναι μια απειροσειρά της μορφής:

$$X_i = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j V_{i+j} = \dots + \alpha_{-1} V_{i-1} + \alpha_0 V_i + \alpha_1 V_{i+1} + \dots \quad (3.22)$$

Στην συνέχεια, όρισε μια ειδική περίπτωση του σχήματος γέννησης BFMA, το λεγόμενο σχήμα γέννησης *συμμετρικών κινούμενων μέσων όρων* (SMA, symmetric moving average), με την θεώρηση της συνθήκης συμμετρίας  $\alpha_j = \alpha_{-j}$ . Όμοια με προηγούμενως, αν θεωρηθεί ότι αμελούνται οι όροι  $\alpha_j$  μετά από κάποιο όριο  $|i| > s$ , το σχήμα SMA προσεγγίζεται από την πεπερασμένη ακολουθία:

$$X_i = \sum_{j=-s}^s \alpha_{|j|} V_{i+j} = \alpha_s V_{i-s} + \dots + \alpha_1 V_{i-1} + \alpha_0 V_i + \alpha_1 V_{i+1} + \dots + \alpha_s V_{i+s} \quad (3.23)$$

Οι συντελεστές  $\alpha_j$  συνδέονται με τις αυτοσυνδιασπορές  $\gamma_j$  μέσω ενός συστήματος  $2s + 1$  εξισώσεων της μορφής:

$$\gamma_i = \sum_{j=-s}^{s-i} \alpha_{|j|} \alpha_{|i+j|} \quad (3.24)$$

ή ισοδύναμα:

$$\gamma_i = \begin{cases} \sum_{j=0}^i \alpha_j \alpha_{i-j} + 2 \sum_{j=i+1}^s \alpha_j \alpha_{j-i} & i = 0 \dots s \\ \sum_{j=i-s}^s \alpha_j \alpha_{i-j} & i = s + 1 \dots 2s \end{cases} \quad (3.25)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το πλήθος των συντελεστών  $\alpha_j$  είναι ίσο με  $s + 1$ , το μοντέλο (3.23) αναπαράγει τους πρώτους  $s + 1$  όρους της ακολουθίας των αυτοσυνδιασπορών  $\gamma_j$  (που εκτιμώνται από την θεωρητική συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς της ανέλιξης), ενώ και οι επόμενοι όροι μέχρι  $j = 2s$  εξακολουθούν να είναι μη μηδενικοί.

Το σχήμα γέννησης SMA χρησιμοποιείται για την γέννηση των ετήσιων υδρολογικών μεταβλητών που θεωρούνται στάσιμες, καθώς στην κλίμακα αυτή εξαφανίζονται οι ενδοετήσιες περιοδικότητες. Το εν λόγω σχήμα, συνδυαζόμενο με την γενικευμένη συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς που ορίστηκε στην ενότητα 3.2.2, είναι κατάλληλο για την αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής των μεταβλητών. Συγκεκριμένα, όχι μόνο διατηρεί τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν με κατάλληλη ρύθμιση των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν την εμμονή της στοχαστικής ανέλιξης (βλ. 3.2.3), αλλά αναπαράγει θετικές τιμές των συνθετικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης για μήκος διπλάσιο του αντίστοιχου μήκους του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος.

### 3.3.2 Εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου SMA

Οι παράμετροι του μοντέλου SMA είναι οι  $s + 1$  συντελεστές στάθμισης,  $\alpha_j$ , και τα στατιστικά χαρακτηριστικά (μέση τιμή και ασυμμετρία) των μεταβλητών ανανέωσης,  $V_i$ .

#### Εκτίμηση συντελεστών στάθμισης

Η σχέση (3.24) ορίζει ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων ως προς τις άγνωστες παραμέτρους  $\alpha_j$ . Το σύστημα αυτό επιλύεται είτε αναλυτικά (υπό προϋποθέσεις) είτε αριθμητικά. Σημειώνεται ότι η ακρίβεια της αναπαραγωγής της στοχαστικής δομής της ανέλιξης, ήτοι των αυτοσυνδιασπορών  $\gamma_j$ , εξαρτάται από την ακρίβεια εκτίμησης των παραμέτρων  $\alpha_j$ .

#### α) Κλειστή λύση

Αποδεικνύεται ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier  $s_\alpha(\omega)$  της ακολουθίας των συντελεστών  $\alpha_j$  συνδέεται με το φάσμα ισχύος  $s_\gamma(\omega)$  της ακολουθίας των αυτοσυνδιασπορών  $\gamma_j$  με την σχέση:

$$s_\alpha(\omega) = \sqrt{2s_\gamma(\omega)} \quad (3.26)$$

Κατά συνέπεια, η ακολουθία  $\alpha_j$  είναι γνωστή εφόσον είναι γνωστή η αυτοσυνδιασπορά της στοχαστικής ανέλιξης. Στην περίπτωση αυτή, οι συντελεστές  $\alpha_j$  μπορούν να υπολογιστούν με τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$\alpha_j = \int_0^{1/2} s_\alpha(\omega) \cos(2\pi j \omega) d\omega \quad (3.27)$$

Εφόσον το όριο  $s$  είναι δύναμη του δύο, ήτοι  $s = 2^k$ , η επίλυση του ολοκληρώματος (3.27) μπορεί να γίνει με τον *ταχύ μετασχηματισμό Fourier* (FFT, fast Fourier transform). Σε διαφορετική περίπτωση, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται αριθμητικά, βάσει του τύπου:

$$\alpha_j = \omega_1 \left[ \frac{s_\alpha(0)}{2} + \sum_{i=1}^s s_\alpha(\omega_i) \cos(2\pi j \omega_i) \right] \quad (3.28)$$

όπου:

$$\omega_j = \frac{j}{2s+1} \quad (3.29)$$

#### β) Αριθμητική εκτίμηση

Η (3.24) μπορεί να γραφεί σε μητρική μορφή ως:

$$\mathbf{p} \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\theta} \quad (3.30)$$

όπου  $\boldsymbol{\zeta} = [\alpha_0, \dots, \alpha_s]$ ,  $\boldsymbol{\theta} = [\gamma_0, \dots, \gamma_s]^T$  και  $\mathbf{p}$  μητρώο διαστάσεων  $(s+1) \times (s+1)$  με στοιχεία:

$$p_{ij} = \frac{1}{2} [\alpha_{|j-i|} + \alpha_{j+i-2} U(j-2) U(s-i-j+1)] \quad (3.31)$$

όπου  $U(x)$  η λεγόμενη συνάρτηση άλματος ή συνάρτηση Heaviside, με τιμές  $U(x) = 1$  για  $x \geq 0$  και  $U(x) = 0$  για  $x < 0$ .

Κάθε μεμονωμένη εξίσωση του συστήματος (3.30) περιέχει δεύτερης τάξης γινόμενα των άγνωστων συντελεστών  $\alpha_j$ . Κατά συνέπεια, το σύστημα έχει μία ή περισσότερες λύσεις εφόσον έχει οριστεί μια εφικτή ακολουθία αυτοσυνδιασπορών  $\gamma_j$ , δηλαδή το μητρώο  $\mathbf{h}$ , το οποίο ορίστηκε στην ενότητα 3.2.2, είναι θετικά ορισμένο. Διαφορετικά, το σύστημα δεν έχει ακριβή λύση. Στην τελευταία αυτή περίπτωση, ζητείται μια προσεγγιστική λύση που να ικανοποιεί όσο το δυνατόν καλύτερα τη μητρική εξίσωση (3.30). Για τον σκοπό αυτό, η επίλυση του συστήματος διατυπώνεται ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$f(\zeta) = f(\alpha_0, \dots, \alpha_s) = \|\mathbf{p} \zeta - \boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda (\mathbf{p}_1 \zeta - \gamma_0)^2 \quad (3.32)$$

όπου  $\mathbf{p}_1$  η πρώτη γραμμή του μητρώου  $\mathbf{p}$ ,  $\lambda$  συντελεστής βάρους και  $\|\cdot\|$  η ευκλείδεια νόρμα ενός διανύσματος. Ο δεύτερος όρος της αντικειμενικής συνάρτησης εκφράζει την τετραγωνική απόκλιση της εκτιμημένης από την δειγματική διασπορά  $\gamma_0$ . Αν και η συνθήκη διατήρησης της διασποράς περιλαμβάνεται στον πρώτο όρο της συνάρτησης, είναι σκόπιμο να αντιμετωπίζεται και ξεχωριστά, με την εισαγωγή του συντελεστή βάρους  $\lambda$ , τάξης μεγέθους του  $10^3$ .

Για την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης (3.32) εφαρμόζεται η αριθμητική μέθοδος των *συζυγών κλίσεων* (Press et al., 1992, σ. 442), που προϋποθέτει την αναλυτική διατύπωση των μερικών παραγώγων της συνάρτησης  $f(\zeta)$ . Αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{df(\zeta)}{d\zeta} = 4(\mathbf{p} \zeta - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{p} + 4\lambda (\mathbf{p}_1 \zeta - \gamma_0) \mathbf{p}_1 \quad (3.33)$$

Η μέθοδος, η οποία είναι επαναληπτική, απαιτεί τον ορισμό μιας εφικτής τιμής εκκίνησης  $\zeta^{[0]}$ . Μια τέτοια αρχική λύση είναι το διάνυσμα  $[\sqrt{\gamma_0}, 0, \dots, 0]^T$ . Εάν στην  $k$  δοκιμή είναι γνωστό το μητρώο  $\zeta^{[k]}$ , τότε στην επόμενη προσδιορίζεται ένα εφικτό μητρώο  $\zeta^{[k+1]}$ , το οποίο βελτιώνει πάντα την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η αναδρομική σχέση υπολογισμού του  $\zeta^{[k+1]}$  είναι:

$$\zeta^{[k+1]} = \zeta^{[k]} - \left[ \beta^{[k+1]} \left( \frac{df}{d\zeta} \right)^{[k]} + \gamma^{[k]} \left( \frac{df}{d\zeta} \right)^{[k-1]} \right] \quad (3.34)$$

όπου:

$$\gamma^{[k]} = \frac{\left| \left( \frac{df}{d\zeta} \right)^{[k]} \right|^2}{\left| \left( \frac{df}{d\zeta} \right)^{[k-1]} \right|^2} \quad (3.35)$$

και  $\beta^{[k+1]}$  παράμετρος που εκτιμάται μέσω ενός σχήματος αναζήτησης ακροτάτου σε μία διάσταση. Για την εφαρμογή του αλγορίθμου, στο πρώτο βήμα ( $k = 0$ ) όπου δεν ορίζεται η τιμή της παραγώγου  $(df/d\zeta)^{[-1]}$ , τίθεται  $\gamma^{[0]} = 0$ .

### Εκτίμηση στατιστικών χαρακτηριστικών μεταβλητών ανανέωσης

Εκτός από τους συντελεστές  $\alpha_i$  που σχετίζονται την αυτοσυνδιασπορά της ανέλιξης, απαιτείται ο προσδιορισμός δύο επιπλέον παραμέτρων του μοντέλου (3.23). Πρόκειται για την μέση τιμή  $\mu_V = E[V_i]$  και τον συντελεστή ασυμμετρίας  $\zeta_V = E[(V_i - \mu_V)^3]$  των τυχαίων μεταβλητών  $V_i$ , που εκτιμώνται από τις σχέσεις:

$$\left( \alpha_0 + 2 \sum_{j=1}^s \alpha_j \right) \mu_V = \mu_X \quad (3.36)$$

$$\left( \alpha_0^3 + 2 \sum_{j=1}^s \alpha_j^3 \right) \zeta_V = \zeta_X \gamma_0^{3/2} \quad (3.37)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι διασπορές των  $V_i$  είναι εξ ορισμού ίσες με τη μονάδα, δηλαδή:

$$\text{Var} [V_i] = 1 \quad (3.38)$$

### 3.3.3 Γενίκευση του σχήματος SMA για πολυμεταβλητή προσομοίωση

Ο Koutsoyiannis (2000) γενίκευσε το μοντέλο SMA, ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί για την ταυτόχρονη γέννηση πολλών μεταβλητών που είναι στοχαστικά εξαρτημένες. Αυτό γίνεται εύκολα, με την παραγωγή συσχετισμένου (πολυμεταβλητού) λευκού θορύβου.

Έστω  $\mathbf{X}_i = (X_i^1, \dots, X_i^m)^T$  διάνυσμα  $m$  μεταβλητών κατά τη χρονική περίοδο  $i$ , σε κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί ο δείκτης  $l$ . Θεωρούμε το  $m \times m$  μητρώο ετεροσυνδιασπορών  $\mathbf{g}$  με στοιχεία:

$$g^{lk} = \text{Cov} [X^l, X^k] \quad (3.39)$$

Κάθε μεταβλητή  $X_i^l$  διατυπώνεται ως σταθμισμένο άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών  $V_i^l$ , δηλαδή:

$$X_i^l = \sum_{r=-s}^s \alpha_{|r|}^l V_{i+r}^l \quad (3.40)$$

Οι μεταβλητές ανανέωσης  $V_i^l$  μπορούν να θεωρηθούν χρονικά ασυσχέτιστες, δηλαδή:

$$\text{Cov} [V_i^l, V_j^k] = 0, \text{ για κάθε } i \neq j \quad (3.41)$$

αλλά χωρικά συσχετισμένες σε κάθε χρονικό βήμα  $i$ , δηλαδή:

$$c^{lk} = \text{Cov} [V_i^l, V_i^k] \neq 0, \text{ για κάθε } i \quad (3.42)$$

Τα μητρώα ετεροσυνδιασπορών  $\mathbf{g}$  και  $\mathbf{c}$  συνδέονται με τη σχέση:

$$c^{lk} = \frac{g^{lk}}{\sum_{r=-s}^s \alpha_{|r|}^l \alpha_{|r|}^k} \quad (3.43)$$

Εφόσον είναι γνωστό το μητρώο  $\mathbf{c}$ , κάθε διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών  $\mathbf{V}_i = (V_i^1, \dots, V_i^m)^T$  μπορεί να παραχθεί μέσω του απλού πολυμεταβλητού σχήματος:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{b} \mathbf{W}_i \quad (3.44)$$

όπου  $\mathbf{W}_i = (W_i^1, \dots, W_i^m)^T$  διάνυσμα  $m$  στοχαστικά ανεξάρτητων μεταβλητών μοναδιαίας διασποράς, και  $\mathbf{b}$  μητρώο διαστάσεων  $m \times m$  τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{b} \mathbf{b}^T = \mathbf{c} \quad (3.45)$$

Για τον προσδιορισμό του μητρώου  $\mathbf{b}$  αναπτύχθηκε ειδική μεθοδολογία, η οποία περιγράφεται στην ενότητα 3.6.

Εκτός από το μητρώο  $\mathbf{b}$ , μέσω του οποίου αναπαράγονται οι συντελεστές ετεροσυσχέτισης των ετήσιων χρονοσειρών, απαιτείται ο προσδιορισμός των περιθώριων στατιστικών χαρακτηριστικών των τυχαίων μεταβλητών  $\mathbf{W}_i$ . Αυτές είναι οι μέσες τιμές,  $\boldsymbol{\mu}_w$ , και οι συντελεστές ασυμμετρίας,  $\boldsymbol{\xi}_w$ , που εκτιμώνται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_w &= \mathbf{b}^{-1} \boldsymbol{\mu}_v \\ \boldsymbol{\xi}_w &= (\mathbf{b}^{(3)})^{-1} \boldsymbol{\xi}_v \end{aligned} \quad (3.46)$$

όπου  $\mathbf{b}^{(3)}$  μητρώο που περιέχει τους κύβους των στοιχείων του  $\mathbf{b}$ . Υπενθυμίζεται ότι  $\text{Cov}[\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_i] = \mathbf{I}$ , όπου  $\mathbf{I}$  το μοναδιαίο μητρώο.

Οι μεταβλητές  $W_i^l$  παράγονται μέσω μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κατανομή γάμα τριών παραμέτρων (Pearson III). Η κατανομή αυτή, που περιγράφεται στην ενότητα 3.6, είναι κατάλληλη για την αναπαραγωγή τυχαίων όρων με ασυμμετρία, ενώ οι παράμετροι της κατανομής εκτιμώνται συναρτήσει των περιθώριων στατιστικών χαρακτηριστικών των  $\mathbf{W}_i$ .

### 3.3.4 Αλγόριθμος γέννησης ετήσιων χρονοσειρών

Για την γέννηση των ετήσιων συνθετικών χρονοσειρών, με σύζευξη της γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς και του στοχαστικού σχήματος SMA, εκτελούνται τα ακόλουθα βήματα:

**Βήμα 1ο:** Για κάθε μεταβλητή  $l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) εκτιμώνται τα δειγματικά στατιστικά χαρακτηριστικά της, δηλαδή η μέση τιμή  $\mu_x$ , η διασπορά  $\gamma_0$ , ο συντελεστής ασυμμετρίας  $\zeta_x$  και η ακολουθία των αυτοσυνδιασπορών  $\hat{\gamma}_j$ . Επιπλέον, υπολογίζεται το μητρώο των δειγματικών ετεροσυνδιασπορών  $\mathbf{g}$ .

**Βήμα 2ο:** Για κάθε μεταβλητή  $l$  εκτιμώνται η παράμετρος εμμονής  $\beta$  και η παράμετρος σχήματος  $\kappa$  της γενικευμένης συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς (βλ. 3.2.3).

**Βήμα 3ο:** Για κάθε μεταβλητή  $l$  εκτιμώνται οι τιμές των συντελεστών στάθμισης  $\alpha_j$  του μοντέλου SMA (βλ. 3.3.2).

**Βήμα 4ο:** Με βάση τις (3.36) και (3.37) εκτιμώνται τα στατιστικά χαρακτηριστικά  $\mu_V$  και  $\zeta_V$  των τυχαίων όρων  $V$ , και από την (3.43) υπολογίζονται τα στοιχεία του μητρώου ετεροσυνδιασπορών  $\mathbf{c}$ .

**Βήμα 5ο:** Προσδιορίζεται το μητρώο  $\mathbf{b}$ , με εφαρμογή της μεθοδολογίας αποσύνθεσης του μητρώου  $\mathbf{c}$  (βλ. 3.6).

**Βήμα 6ο:** Από την (3.46) εκτιμώνται τα στατιστικά χαρακτηριστικά των τυχαίων όρων  $W_i^l$ , με βάση τα οποία προσδιορίζονται οι παράμετροι της συνάρτησης κατανομής τους, ήτοι της κατανομής γάμα τριών παραμέτρων (βλ. 3.8.2).

**Βήμα 7ο:** Εάν  $n$  το ζητούμενο μήκος της ετήσιας συνθετικής χρονοσειράς, ήτοι το μήκος της προσομοίωσης, τότε για κάθε προσομοιωμένη χρονική περίοδο (έτος)  $i = 1, \dots, n$  παράγονται  $n + 2s$  τυχαίες μεταβλητές  $W_i^l$ , μέσω μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα (βλ. 3.8.3). Στην συνέχεια, μέσω της (3.44) υπολογίζεται η ακολουθία των μεταβλητών ανανέωσης  $V_i^l$ , οι οποίες εισάγονται στο σχήμα γέννησης (3.40) για την παραγωγή των συνθετικών τιμών  $X_i^l$ .

## 3.4 Γέννηση μηνιαίων χρονοσειρών

### 3.4.1 Περιοδικό μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης πρώτης τάξης

Δεδομένου ότι η μακροπρόθεσμη εμμονή των υδρολογικών διεργασιών αναπαράγεται σε ετήσια κλίμακα μέσω του σχήματος που περιγράφηκε στην ενότητα 3.3, η έμφαση στην κατώτερη (μηνιαία) κλίμακα δίνεται στην αναπαραγωγή της περιοδικότητας. Σημειώνεται ότι κάθε μηνιαία στοχαστική ανέλιξη θεωρείται *κυκλοστάσιμη*, που σημαίνει ότι διατηρεί σταθερά στατιστικά χαρακτηριστικά σε κάθε χρονική υποπερίοδο (μήνα).

Για την γέννηση των μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών, χρησιμοποιείται ένα περιοδικό σχήμα αυτοπαλινδρόμησης πρώτης τάξης, PAR(1), που έχει γενικευτεί για πολυμεταβλητή προσομοίωση. Έστω το διάνυσμα  $\mathbf{X}_\tau = (X_\tau^1, \dots, X_\tau^m)^T$ , το οποίο αντιπροσωπεύει την ταυτόχρονη πραγματοποίηση  $m$  στοχαστικά εξαρτημένων ανεξίτητων κατά την υποπερίοδο  $\tau$ . Το πολυμεταβλητό PAR(1) περιγράφει μαθηματικά την απλούστερη εξάρτηση των μεταβλητών  $X_\tau^l$  ως προς τον χρόνο, με μια γραμμική αναδρομική σχέση της μορφής:

$$\mathbf{X}_\tau = \mathbf{a}_\tau \mathbf{X}_{\tau-1} + \mathbf{b}_\tau \mathbf{V}_\tau \quad (3.47)$$

όπου  $\mathbf{a}_\tau$ ,  $\mathbf{b}_\tau$  μητρώα παραμέτρων και  $\mathbf{V}_\tau$  διάνυσμα στοχαστικά ανεξάρτητων μεταβλητών (λευκός θόρυβος), μοναδιαίας διασποράς. Οι παράμετροι του μοντέλου εκτιμώνται με βάση τα από κοινού στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος (αυτοσυσχετίσεις και ετεροσυσχετίσεις), σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\mathbf{a}_\tau = \text{Cov} [\mathbf{X}_\tau, \mathbf{X}_{\tau-1}] \{ \text{Cov} [\mathbf{X}_{\tau-1}, \mathbf{X}_{\tau-1}] \}^{-1} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{b}_\tau \mathbf{b}_\tau^T = \text{Cov} [\mathbf{X}_\tau, \mathbf{X}_\tau] - \mathbf{a}_\tau \text{Cov} [\mathbf{X}_{\tau-1}, \mathbf{X}_{\tau-1}] \mathbf{a}_\tau^T \quad (3.49)$$

όπου  $\text{Cov}[\Xi, \Psi]$  το μητρώο συνδιασπορών ενός ζεύγους τυχόντων διανυσμάτων τυχαίων μεταβλητών  $\Xi$  και  $\Psi$ , δηλαδή:

$$\text{Cov}[\Xi, \Psi] = E\{(\Xi - E[\Xi])(\Psi^T - E[\Psi^T])\} \quad (3.50)$$

Το μητρώο  $\mathbf{b}_\tau$  προκύπτει από την αποσύνθεση του γινομένου  $\mathbf{c}_\tau = \mathbf{b}_\tau \mathbf{b}_\tau^T$ , με βάση τη μεθοδολογία που περιγράφεται στην ενότητα 3.6.

Οι μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών  $\mathbf{V}_\tau$  υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$E[\mathbf{V}_\tau] = \mathbf{b}_\tau^{-1} \{E[\mathbf{X}_\tau] - \mathbf{a}_\tau E[\mathbf{X}_{\tau-1}]\} \quad (3.51)$$

Οι διασπορές των  $\mathbf{V}_\tau$  είναι εξ ορισμού ίσες με τη μονάδα, δηλαδή:

$$\text{Var}[\mathbf{V}_\tau] = [1, \dots, 1]^T \quad (3.52)$$

Τέλος, οι τρίτες ροπές, οι οποίες σχετίζονται με την ασυμμετρία των τυχαίων όρων  $\mathbf{V}_\tau$ , προκύπτουν από τη σχέση:

$$\mu_3[\mathbf{V}_\tau] = (\mathbf{b}_\tau^{(3)})^{-1} \{\mu_3[\mathbf{X}_\tau] - \mu_3[\mathbf{a}_\tau \mathbf{X}_{\tau-1}]\} \quad (3.53)$$

όπου η παράσταση  $\mu_3[\Xi]$  υποδηλώνει την τρίτη κεντρική ροπή κάθε τυχόντος διανύσματος  $\Xi$ , δηλαδή:

$$\mu_3[\Xi] = E\{(\Xi - E[\Xi])^3\} \quad (3.54)$$

ενώ  $\mathbf{b}^{(k)}$  είναι το μητρώο, τα στοιχεία του οποίου βρίσκονται υψωμένα στην  $k$  δύναμη.

Οι τυχαίες μεταβλητές  $\mathbf{V}_\tau$  παράγονται μέσω μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών που θεωρείται ότι ακολουθούν κατανομή γάμα τριών παραμέτρων. Οι εν λόγω παράμετροι εκτιμώνται συναρτήσει των στατιστικών χαρακτηριστικών των  $\mathbf{V}_\tau$ , ήτοι των μέσων τιμών  $E[\mathbf{V}_\tau]$ , των διασπορών  $\text{Var}[\mathbf{V}_\tau]$  και των ασυμμετριών  $\mu_3[\mathbf{V}_\tau]$ .

Γενικά, οι εξισώσεις βάσει των οποίων εκτιμώνται οι παράμετροι του μοντέλου PAR(1) περιέχουν μόνο τις ροπές των μεταβλητών  $\mathbf{X}^l$ , είτε των περιθώριων τάξης 1 ως 3 είτε των από κοινού τάξης 2. Εξαιρέση αποτελεί η εξίσωση (3.53), η οποία περιέχει τις τρίτες ροπές ενός γραμμικού συνδυασμού των  $\mathbf{X}^l$ , οι οποίες δεν μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά, συναρτήσει των τρίτων ροπών των  $\mathbf{X}^l$ . Ωστόσο, αν θεωρηθεί ότι το μητρώο  $\mathbf{a}_\tau$  είναι διαγώνιο, τότε η (3.53) απλοποιείται και γράφεται:

$$\mu_3[\mathbf{V}_\tau] = (\mathbf{b}^{(3)})_\tau^{-1} \{\mu_3[\mathbf{X}_\tau] - \mathbf{a}_\tau^{(3)} \mu_3[\mathbf{X}_{\tau-1}]\} \quad (3.55)$$

Στην περίπτωση αυτή, το μητρώο  $\mathbf{a}_\tau$  δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{a}_\tau = \text{diag}(\text{Cov}[\mathbf{X}_\tau^1, \mathbf{X}_{\tau-1}^1] / \text{Var}[\mathbf{X}_{\tau-1}^1], \dots, \text{Cov}[\mathbf{X}_\tau^m, \mathbf{X}_{\tau-1}^m] / \text{Var}[\mathbf{X}_{\tau-1}^m]) \quad (3.56)$$

οπότε το σχήμα γέννησης (3.47) γράφεται πλέον στην μορφή:

$$X_\tau^l = a_\tau^l X_{\tau-1}^l + \sum_{k=1}^m b_\tau^{lk} V_\tau^k \quad (3.57)$$

Το παραπάνω μοντέλο αναπαράγει τις διασπορές, τις αυτοσυσχετίσεις για υστέρηση 1 και τις ετεροσυσχετίσεις των μεταβλητών για μηδενική υστέρηση, ενώ δεν αναπαράγει τις ετεροσυσχετίσεις για μοναδιαία υστέρηση.

### 3.4.2 Αλγόριθμος γέννησης μηνιαίων χρονοσειρών

Ένα μοντέλο PAR(1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την γέννηση μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών με βάση τα ακόλουθα βήματα:

**Βήμα 1ο:** Για κάθε μεταβλητή  $l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) εκτιμώνται τα μηνιαία στατιστικά χαρακτηριστικά της, δηλαδή οι μέσες τιμές  $E[X_\tau^l]$ , οι τρίτες κεντρικές ροπές  $\mu_3[X_\tau^l]$  και οι αυτοσυνδιασπορές για μοναδιαία

υστέρηση  $\text{Cov} [X_\tau^l, X_{\tau-1}^l]$ . Επιπλέον, υπολογίζονται τα μητρώα των μηνιαίων ετεροσυνδιασπορών  $\text{Cov} [\mathbf{X}_\tau, \mathbf{X}_\tau]$ .

**Βήμα 2ο:** Από τις σχέσεις (3.56) και (3.49) προσδιορίζονται τα μητρώα  $\mathbf{a}_\tau$  και  $\mathbf{b}_\tau$ , για κάθε μήνα  $\tau$ .

**Βήμα 3ο:** Από τις σχέσεις (3.51), (3.52) και (3.55) εκτιμώνται τα στατιστικά χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών  $\mathbf{V}_\tau$ , και με βάση αυτά προσδιορίζονται οι παράμετροι της συνάρτησης κατανομής τους για κάθε μήνα  $\tau$ .

**Βήμα 4ο:** Εάν  $n$  το μήκος της συνθετικής χρονοσειράς, τότε για κάθε χρονικό βήμα  $\tau = 1, \dots, 12n$  παράγονται  $m$  τυχαίες μεταβλητές  $V_\tau^l$  μέσω μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα (βλ. 3.8.3). Στην συνέχεια, οι μεταβλητές  $V_\tau^l$  εισάγονται στην αναδρομική σχέση (3.57), οπότε υπολογίζονται οι συνθετικές τιμές των μηνιαίων μεταβλητών  $X_\tau^l$ . Σημειώνεται ότι για την εφαρμογή της σχέσης (3.57) την πρώτη φορά, απαιτείται ο ορισμός ενός διανύσματος αρχικών τιμών  $\mathbf{X}_0$  για τον προηγούμενο από τον μήνα έναρξης της προσομοίωσης (που κατά κανόνα είναι ο πρώτος μήνας του υδρολογικού έτους, ήτοι ο Οκτώβριος). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το εν λόγω διάνυσμα ταυτίζεται με την μέση τιμή του Σεπτεμβρίου.

Τονίζεται ότι η παραπάνω διαδικασία είναι εντελώς ανεξάρτητη από την διαδικασία γέννησης των ετήσιων συνθετικών τιμών μέσω του σχήματος SMA (βλ. 3.3). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών που είναι ασυνεπείς μεταξύ τους, καθώς με την συνάθροιση των μηνιαίων χρονοσειρών κατά έτος δεν προκύπτουν αθροίσματα που να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες συνθετικές τιμές. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται μέσω της μεθοδολογίας επιμερισμού που περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

## 3.5 Αποκατάσταση συνέπειας μηνιαίων χρονοσειρών

### 3.5.1 Γενικά

Έστω το διάνυσμα  $\mathbf{X}_\tau = (X_\tau^1, \dots, X_\tau^m)^T$ , το οποίο αντιπροσωπεύει την ταυτόχρονη πραγματοποίηση  $m$  μεταβλητών χαμηλού επιπέδου (π.χ. μηνιαίων) κατά την υποπερίοδο  $\tau$  μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου, και  $\mathbf{Z} = (Z^1, \dots, Z^m)^T$  το αντίστοιχο διάνυσμα μεταβλητών υψηλού επιπέδου (π.χ. ετήσιων), οι οποίες αναφέρονται στην ίδια χρονική περίοδο. Για λόγους απλούστευσης, στο συμβολισμό των διανυσμάτων  $\mathbf{X}_\tau$  και  $\mathbf{Z}$  παραλείπεται ο δείκτης της χρονικής περιόδου.

Είναι προφανές ότι σε κάθε χρονική περίοδο, τα διανύσματα  $\mathbf{X}_\tau$  και  $\mathbf{Z}$  πρέπει να ικανοποιούν την αθροιστική ιδιότητα:

$$\sum_{\tau=1}^s \mathbf{X}_\tau = \mathbf{Z} \quad (3.58)$$

όπου  $s$  το πλήθος των υποπεριοδών κάθε περιόδου.

Η συνθήκη (3.58) δεν είναι δυνατόν να ικανοποιείται εφόσον η γέννηση των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου  $\mathbf{X}_s$  είναι ανεξάρτητη από τη γέννηση των μεταβλητών υψηλού επιπέδου  $\mathbf{Z}$ . Για τον σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί τα λεγόμενα μοντέλα επιμερισμού (disaggregation), τα οποία ενσωματώνουν τις μεταβλητές  $\mathbf{X}_s$  και  $\mathbf{Z}$  σε μια ενιαία μαθηματική έκφραση που περιέχει όλες τις δυνατές συσχετίσεις τους (π.χ. *Valencia and Schaake, 1973; Salas, 1993*). Ωστόσο, το πλήθος των παραμέτρων τέτοιου τύπου μοντέλων επιμερισμού είναι πολύ μεγάλο και, κατά συνέπεια, η εκτίμησή τους καθίσταται ιδιαίτερα δυσχερής. Για τον περιορισμό του πλήθους των παραμέτρων, έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές, συνοπτική ανασκόπηση των οποίων κάνει ο *Koutsoyiannis (2001)*.



Οι *Koutsoyiannis and Manetas* (1996) και αργότερα ο *Koutsoyiannis* (2001) ανέπτυξαν ένα πλήθος σχημάτων επιμερισμού, που χρησιμοποιώντας μικρό πλήθος παραμέτρων επιτυγχάνουν την αναπαραγωγή διαφορετικών χαρακτηριστικών των ιστορικών δειγμάτων. Στο σχήμα προσομοίωσης που υλοποιήθηκε χρησιμοποιείται η λεγόμενη διαδικασία γραμμικής αναγωγής (linear adjusting procedure), η οποία περιγράφεται στην συνέχεια.

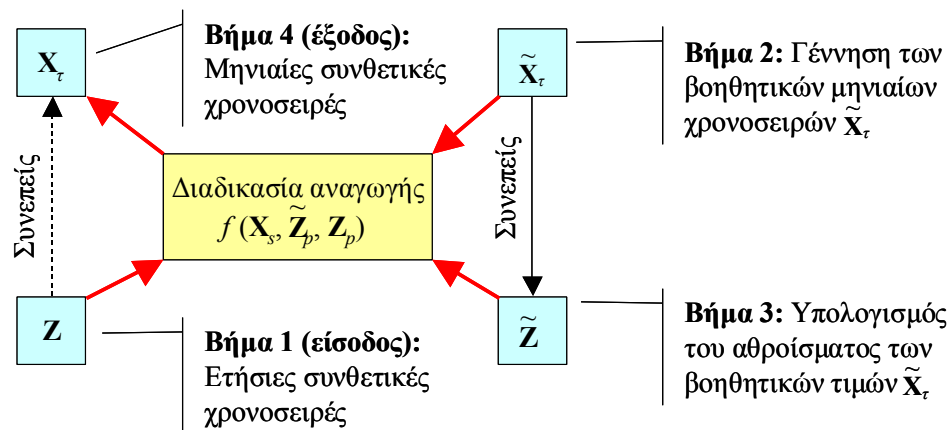
### 3.5.2 Περιγραφή της γενικής διαδικασίας αναγωγής

Με βάση τα όσα έχουν αναφερθεί, η γέννηση των μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών γίνεται χωρίς καμία αναφορά στις ετήσιες χρονοσειρές. Μάλιστα, γίνεται χρήση διαφορετικών μοντέλων, έτσι ώστε να αναπαράγονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του κάθε χρονικού επιπέδου, ήτοι η μακροπρόθεσμη εμμονή των ετήσιων υδρολογικών διεργασιών και η περιοδικότητα των μηνιαίων. Για να πληρείται η αθροιστική ιδιότητα (3.58) ορίζεται μια γενική μεθοδολογία επιμερισμού, που υλοποιείται μέσω αναγωγής. Η διαδικασία αναγωγής μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός της μορφής:

$$\mathbf{X}_t = f(\tilde{\mathbf{X}}_t, \tilde{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}) \quad (3.59)$$

όπου  $\tilde{\mathbf{X}}_t$  το διάνυσμα των μηνιαίων τιμών που έχουν προκύψει χωρίς αναφορά στην αντίστοιχη ετήσια τιμή  $\mathbf{Z}$ , και  $\tilde{\mathbf{Z}}$  το άθροισμα των  $\tilde{\mathbf{X}}_t$  (γενικά ισχύει  $\tilde{\mathbf{Z}} \neq \mathbf{Z}$ ).

Ο τρόπος εφαρμογής του μοντέλου αναγωγής περιγράφεται στο Σχήμα 3.4. Είσοδος του μοντέλου είναι οι ετήσιες συνθετικές χρονοσειρές,  $\mathbf{Z}_p$ . Με εφαρμογή ενός σχήματος γέννησης μηνιαίων χρονοσειρών παράγεται μια ακολουθία βοηθητικών τιμών  $\tilde{\mathbf{X}}_t$ , και υπολογίζεται το άθροισμα αυτών,  $\tilde{\mathbf{Z}}$ . Τα διανύσματα  $\tilde{\mathbf{X}}_t$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}$  και  $\mathbf{Z}$  είναι είσοδοι του μοντέλου αναγωγής, μέσω του οποίου προκύπτει η τελική ακολουθία τιμών  $\mathbf{X}_t$ , που είναι συνεπής με την ετήσια τιμή  $\mathbf{Z}$ .



Σχήμα 3.4: Σχηματική απεικόνιση της διαδικασίας αναγωγής μηνιαίων χρονοσειρών για την αποκατάσταση της συνέπειάς τους με τις ετήσιες.

### 3.5.3 Μοντέλο γραμμικής αναγωγής

Από τα διάφορα σχήματα επιμερισμού που προτείνουν οι *Koutsoyiannis and Manetas* (1996) και *Koutsoyiannis* (2001), επιλέχθηκε το μοντέλο γραμμικής αναγωγής, που είναι απλό στην εφαρμογή του και αναπαράγει (με κάποια προσέγγιση) τα στατιστικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών.

Έστω  $\tilde{X}_t$  ( $t = 1, \dots, s$ ) τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $\mu_t = E[\tilde{X}_t]$  και μητρώο συνδιασπορών  $\sigma$  με στοιχεία  $\sigma_{ij} = \text{Cov}[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]$  και  $Z$  τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη της  $\tilde{X}_t$ , με μέση τιμή:

$$\mu_Z = E[Z] = \sum_{\tau=1}^s \mu_{\tau} \quad (3.60)$$

και διασπορά:

$$\sigma_{ZZ} = \text{Var}[Z] = \sum_{\tau=1}^s \sum_{j=1}^s \sigma_{\tau j} \quad (3.61)$$

Αποδεικνύεται ότι οι μεταβλητές:

$$X_{\tau} = \tilde{X}_{\tau} + \lambda_{\tau} \left( Z - \sum_{\tau=1}^s \tilde{X}_{\tau} \right) \quad (3.62)$$

έχουν ίδιες μέσες τιμές και ίδιο μητρώο συνδιασπορών με τις  $\tilde{X}_{\tau}$  εφόσον ισχύει:

$$\lambda_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau Z}}{\sigma_{ZZ}} \quad (3.63)$$

όπου:

$$\sigma_{\tau Z} = \sum_{j=1}^s \sigma_{\tau j} \quad (3.64)$$

Η διαδικασία γραμμικής αναγωγής των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου περιγράφεται από την σχέση:

$$X_{\tau} = \tilde{X}_{\tau} + \lambda_{\tau} (Z - \tilde{Z}) \quad (3.65)$$

όπου  $\tilde{Z}$  το άθροισμα όλων των μεταβλητών  $\tilde{X}_{\tau}$ . Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται και σε άλλα μοντέλα επιμερισμού (*Grygier and Stedinger, 1988· Lane and Flevert, 1990*), με τη διαφορά ότι οι συντελεστές αναγωγής  $\lambda_{\tau}$  δεν ορίζονται με βάση τις συνδιασπορές των μεταβλητών υψηλού επιπέδου αλλά θεωρούνται ανάλογοι των τυπικών αποκλίσεων των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου  $X_{\tau}$ , δηλαδή:

$$\lambda_{\tau} = \frac{\sqrt{\sigma_{\tau\tau}}}{\sum_{j=1}^s \sqrt{\sigma_{jj}}} \quad (3.66)$$

Ωστόσο, ο ορισμός των  $\lambda_{\tau}$  με βάση τη σχέση (3.63) είναι ο μόνος που διατηρεί το μητρώο συνδιασπορών  $\sigma$ . Η διαφορά των σχέσεων (3.63) και (3.66) είναι περισσότερο εμφανής όταν οι μεταβλητές  $X_{\tau}$  είναι ανεξάρτητες, οπότε η (3.63) γράφεται:

$$\lambda_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau\tau}}{\sum_{j=1}^s \sigma_{jj}} \quad (3.67)$$

με συνέπεια οι συντελεστές αναγωγής να είναι ανάλογοι των διασπορών και όχι των τυπικών αποκλίσεων.

Παράμετροι του μοντέλου αναγωγής είναι οι συνδιασπορές  $\sigma_{\tau Z}$  των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου με αυτές του υψηλού επιπέδου. Δεδομένου ότι το άθροισμά τους για όλα τα χρονικά βήματα  $\tau$  ισούται με τη διασπορά  $\sigma_{ZZ}$ , ισχύει:

$$\sum_{\tau=1}^s \lambda_{\tau} = 1 \quad (3.68)$$

Επειδή στο σχήμα γέννησης PAR(1) μόνο οι αυτοσυσχετίσεις πρώτης τάξης είναι παράμετροι του μοντέλου, οι υπόλοιπες συνδιασπορές  $\sigma_{\tau j}$ , για  $j > \tau + 1$ , εκτιμώνται από τη σχέση:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{\tau+1} \sigma_{\tau+2} \dots \sigma_{j-1}}{\sigma_{\tau+1} \sigma_{\tau+2} \dots \sigma_{j-1}} \quad (3.69)$$

η οποία είναι άμεση συνέπεια του μοντέλου PAR(1). Μετά την εκτίμηση όλων των  $\sigma_{ij}$ , υπολογίζονται οι τιμές των  $\sigma_{iz}$  με βάση την εξίσωση (3.64). Παρόμοιες αλλά πιο πολύπλοκες σχέσεις μπορούν να εξαχθούν και για άλλα σειριακά μοντέλα.

Η μέθοδος που περιγράφηκε μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε κατανομή των μεταβλητών χαμηλού επιπέδου  $X_{\tau}$ , διατηρώντας αναλλοίωτες τόσο τις μέσες τιμές όσο το μητρώο συνδιασπορών του ιστορικού δείγματος. Στην περίπτωση εμφάνισης αρνητικών τιμών (οι οποίες δεν είναι αποδεκτές, δεδομένου ότι πρόκειται για υδρολογικές μεταβλητές) ακολουθείται μια επαναληπτική διαδικασία. Οι αρνητικές μεταβλητές μηδενίζονται και εφαρμόζεται εκ νέου η γραμμική αναγωγή, μέχρις ότου να εξαλειφθούν οι αρνητικές τιμές ή να γίνουν τόσο μικρές ώστε να θεωρηθούν αμελητέες.

### 3.5.4 Αναπαγωγή στατιστικών χαρακτηριστικών

Η γραμμική διαδικασία αναγωγής αλλοιώνει ορισμένα από τα στατιστικά χαρακτηριστικά των μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών, και συγκεκριμένα τις ασυμμετρίες και τις ετεροσυσχετίσεις, οι οποίες κατά κανόνα υπεκτιμώνται. Εξαίρεση αποτελούν ορισμένες εκφυλισμένες περιπτώσεις, και συγκεκριμένα η περίπτωση μηδενικών συντελεστών ασυμμετρίας καθώς και μηδενικών ή μοναδιαίων συντελεστών ετεροσυσχετίσης. Η μη διατήρηση των ετεροσυσχετίσεων οφείλεται στο γεγονός ότι η διαδικασία αναγωγής εφαρμόζεται ξεχωριστά για κάθε μεταβλητή  $X_{\tau}^l$  ( $l = 1, \dots, n$ ).

Ένα άλλο πρόβλημα, το οποίο απαντά στα περισσότερα μοντέλα επιμερισμού, είναι η διατήρηση του συντελεστή συσχέτισης του πρώτου χρονικού βήματος μιας περιόδου με το τελευταίο της προηγούμενης. Όταν ξεκινά η γέννηση των συνθετικών μηνιαίων τιμών μιας περιόδου  $i$  με το μοντέλο PAR(1), είναι ήδη γνωστή η τιμή του τελευταίου μήνα της προηγούμενης περιόδου, η οποία εισάγεται στην αναδρομική σχέση (3.47). Με τον τρόπο αυτό διατηρείται ο συντελεστής αυτοσυσχετίσης, ο οποίος ωστόσο διαταράσσεται όταν εφαρμοστεί η διαδικασία γραμμικής αναγωγής (3.65). Η διαταραχή αυτή επηρεάζει και τις γειτονικές τιμές των αυτοσυσχετίσεων, σε μικρότερο βαθμό. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος έχει προταθεί μια γενικευμένη μεθοδολογία σύζευξης, η οποία μπορεί να λάβει υπόψη της περαιτέρω συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών (Koutsoyiannis, 2001).

Στα πλαίσια του στοχαστικού σχήματος που αναπτύχθηκε ακολουθείται μια επαναληπτική διαδικασία τύπου Monte Carlo, με σκοπό την εξομάλυνση των αποκλίσεων που παρατηρούνται μεταξύ των στατιστικών χαρακτηριστικών της αρχικής (βοηθητικής) και τελικής (ανηγμένης) μηνιαίας συνθετικής χρονοσειράς (Koutsoyiannis and Manetas, 1996). Η εν λόγω διαδικασία συνίσταται στην εύρεση μιας στατιστικά ανεξάρτητης ακολουθίας μηνιαίων μεταβλητών, η οποία προσεγγίζει όσο το δυνατόν την ετήσια τιμή. Κατά συνέπεια, για κάθε χρονική περίοδο, παράγεται ένα πλήθος πραγματοποιήσεων των μηνιαίων μεταβλητών μέσω του μοντέλου PAR(1), ώσπου η απόσταση:

$$\Delta Z = \|Z - \tilde{Z}\| \quad (3.70)$$

να γίνει μικρότερη από κάποια αποδεκτή τιμή  $\Delta Z_{\max}$ . Η απόσταση  $\Delta Z$  ορίζεται αδιάστατα ως:

$$\Delta Z = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \frac{|Z^l - \tilde{Z}^l|}{\sqrt{\text{Var}[Z^l]}} \quad (3.71)$$

Συνεπώς, το όριο  $\Delta Z_{\max}$  μπορεί να διατυπωθεί ως ποσοστό της μέσης τυπικής απόκλισης των ετήσιων μεταβλητών.

Με εφαρμογή της διαδικασίας Monte Carlo, το πλήρες σχήμα γέννησης συνθετικών χρονοσειρών διαμορφώνεται ως εξής:

**Βήμα 1ο:** Μέσω του μοντέλου SMA, παράγονται οι χρονοσειρές των ετήσιων μεταβλητών, σε κάθε θέση και για όλα τα έτη της προσομοίωσης (βλ. 3.3).

**Βήμα 2ο:** Για κάθε έτος, παράγονται οι βοηθητικές μηνιαίες χρονοσειρές με εφαρμογή του μοντέλου PAR(1) (βλ. 3.4) και υπολογίζεται η απόσταση  $\Delta Z$  του ετήσιου αθροίσματος αυτών από την γνωστή ετήσια τιμή, μέσω της (3.71).

**Βήμα 3ο:** Επαναλαμβάνεται το βήμα 2 με εισάγοντας στην ακολουθία PAR(1) διαφορετικές τυχαίες αρχικές συνθήκες, ώσπου η τιμή  $\Delta Z$  να γίνει μικρότερη από το αποδεκτό όριο  $\Delta Z_{\max}$ .

**Βήμα 4ο:** Μέσω του μοντέλου γραμμικής αναγωγής, αποκαθίσταται η συνέπεια μεταξύ των μηνιαίων και της αντίστοιχης ετήσιας τιμής.

**Βήμα 5ο:** Τα βήματα 2 ως 4 επαναλαμβάνονται για όλα τα έτη, μέχρι το πέρας της προσομοίωσης, οπότε προκύπτει η τελική μηνιαία συνθετική χρονοσειρά που είναι συνεπής με την ετήσια.

## 3.6 Γέννηση χρονοσειρών υπό μορφή πρόγνωσης

### 3.6.1 Η έννοια των δεσμευμένων στατιστικών χαρακτηριστικών

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.2.4, κατά την επιχειρησιακή διαχείριση ενός υδροσυστήματος το ενδιαφέρον εστιάζεται στην βραχυπρόθεσμη και μεσοπρόθεσμη επίδοση του συστήματος, η οποία επηρεάζεται τόσο από τις αρχικές συνθήκες αποθεμάτων όσο και την υφιστάμενη κατάσταση υδροφορίας. Λόγω της στοχαστικής εξάρτησης των υδρολογικών μεταβλητών από τις προηγούμενες πραγματοποιήσεις τους, αλλά κυρίως λόγω του φαινομένου της μακροπρόθεσμης εμμονής, οι παρελθούσες και επίκαιρες τιμές των μεταβλητών επιδρούν στην πρόγνωση της μελλοντικής εξέλιξης των αντίστοιχων διεργασιών. Με όρους στατιστικής, αυτό σημαίνει ότι αν είναι γνωστή η ιστορική ακολουθία  $(x_{t-k}, \dots, x_{t-1}, x_t)$ , η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής  $X_{t+1}$  δεν είναι η δειγματική μέση τιμή  $\mu_X = E[X]$  αλλά η λεγόμενη *δεσμευμένη* (conditional) μέση τιμή, ήτοι:

$$E[X | X_{t-k} = x_{t-k}, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] \quad (3.72)$$

Αντίστοιχα ορίζεται η δεσμευμένη διασπορά της μεταβλητής, που είναι πάντοτε μικρότερη από την δειγματική διασπορά, καθώς η πληροφορία που προσθέτει η γνώση του παρελθόντος μειώνει την αβεβαιότητα της πρόγνωσης. Το μέγεθος της αβεβαιότητας εξαρτάται από τον βαθμό συσχέτισης της μεταβλητής με τις προηγούμενες τιμές της, ήτοι με τις τιμές των συντελεστών αυτοσυσχέτισης. Για παράδειγμα, στο μοντέλο PAR(1), του οποίου το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα φθίνει εκθετικά με το χρόνο, η επίδραση του παρελθόντος εκμηδενίζεται μετά από ελάχιστα χρονικά βήματα. Μάλιστα, στο συγκεκριμένο μοντέλο, η δεσμευμένη μέση τιμή εξαρτώνται μόνο από την επίκαιρη ιστορική τιμή, δηλαδή:

$$E[X | X_{t-k} = x_{t-k}, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] = E[X | X_t = x_t] \quad (3.73)$$

Ένα γραμμικό σειριακό μοντέλο, όπως το PAR(1), μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έχει για την γέννηση μηνιαίων χρονοσειρών με πρόγνωση, θεωρώντας απλά ως διάνυσμα εκκίνησης τις επίκαιρες μηνιαίες τιμές. Είναι προφανές ότι λόγω του στοχαστικού χαρακτήρα του μοντέλου (όπως κάθε στοχαστικού υδρολογικού μοντέλου), είναι εφικτή η πολλαπλή εφαρμογή του σχήματος πρόγνωσης υπό τη μορφή στοχαστικά ανεξάρτητων σεναρίων. Με άλλα λόγια, ξεκινώντας από μια γνωστή τιμή, παράγονται στοχαστικά ανεξάρτητες τροχιές που περιγράφουν πιθανές εξελίξεις της στοχαστικής ανέλιξης. Λόγω όμως της βραχείας μνήμης του μοντέλου, οι εν λόγω τροχιές αποκλίνουν σημαντικά μετά από ελάχιστα χρονικά βήματα.

Αντίθετα, σε μη σειριακά σχήματα, όπως το μοντέλο SMA, η εφαρμογή της διαδικασίας πρόγνωσης είναι πιο σύνθετη. Η εν λόγω διαδικασία για το συγκεκριμένο μοντέλο, όπως αναπτύχθηκε από τον *Koutsoyiannis* (2000) για την στοχαστική πρόγνωση των ετήσιων υδρολογικών μεταβλητών, περιγράφεται στο εδάφιο που ακολουθεί.

### 3.6.2 Στοχαστική πρόγνωση ετήσιων μεταβλητών

Το σχήμα SMA, μέσω του οποίου παράγονται οι ετήσιες συνθετικές χρονοσειρές  $X_i^l$ , χρησιμοποιεί τυχαίες τιμές των μεταβλητών ανανέωσης  $V_i^l$ . Με τον τρόπο αυτό, βέβαια, δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη η πληροφορία του παρελθόντος, ήτοι η ακολουθία των πρόσφατων τιμών  $X_i^l$ . Ωστόσο το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί και υπό μορφή στοχαστικής πρόγνωσης, εισάγοντας τις παρελθούσες και την τρέχουσα τιμή για την πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών των ετήσιων μεταβλητών, υπό μορφή στοχαστικά ανεξάρτητων σεναρίων. Τονίζεται ότι η ακρίβεια της πρόγνωσης πρακτικά μηδενίζεται μετά από λίγα χρονικά βήματα, και συνεπώς δεν έχει νόημα η χρήση τέτοιων μοντέλων για χρονικό ορίζοντα μεγαλύτερο των 5 ως 10 ετών.

Το μονομεταβλητό σχήμα συμμετρικών κινούμενων μέσων όρων γενικεύεται ως μοντέλο στοχαστικής πρόγνωσης με εφαρμογή μιας απλής διαδικασίας αναγωγής. Έστω ότι το διάνυσμα της τρέχουσας και των  $k$  τελευταίων τιμών των μεταβλητών  $\mathbf{Y} = [X_0, X_{-1}, \dots, X_{-k}]^T$  είναι γνωστό και η τιμή του είναι  $\mathbf{y} = [x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}]^T$ . Το πρόβλημα συνίσταται στην γέννηση οποιασδήποτε μελλοντικής μεταβλητής  $X_j$ , υπό την συνθήκη  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ .

Έστω η στοχαστική ανέλιξη  $\tilde{X}_i$  ( $i = -k, \dots, 0, 1, \dots$ ) με ακολουθία αυτοσυνδιασπορών  $\gamma_j$  και έστω  $\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{X}_0, \tilde{X}_{-1}, \dots, \tilde{X}_{-k}]^T$ . Έστω ακόμη  $\mathbf{Y} = [X_0, X_{-1}, \dots, X_{-k}]^T$  διάνυσμα μεταβλητών που είναι στοχαστικά ανεξάρτητο από το  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , αλλά έχουν κοινή μέση τιμή και κοινές αυτοσυνδιασπορές. Αποδεικνύεται ότι η στοχαστική ανέλιξη:

$$X_i = \tilde{X}_i + \mathbf{n}_i^T \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{Y}}) \quad (3.74)$$

όπου  $\mathbf{n}_i^T = \text{Cov} [\tilde{X}_i, \tilde{\mathbf{Y}}]$  και  $\mathbf{h} = \text{Cov} [\tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{Y}}]$  έχει την ίδια μέση τιμή και ακολουθία αυτοσυνδιασπορών με την  $\tilde{X}_i$ . Η υπό συνθήκη διασπορά της  $X_i$ , με δεδομένο ότι  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ , είναι ίση με:

$$\text{Var} [X_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = \gamma_0 - \mathbf{n}_i^T \mathbf{h}^{-1} \mathbf{n}_i \quad (3.75)$$

Επιβεβαιώνεται δηλαδή ότι η υπό συνθήκη διασπορά είναι μικρότερη από την  $\gamma_0$  και μάλιστα ταυτίζεται με την ελάχιστη τιμή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος πρόβλεψης των  $X_i$  από τα  $\mathbf{Y}$ . Με τον τρόπο αυτό, ο συνδυασμός του σχήματος γέννησης (3.18) ή (3.23) με τον μετασχηματισμό (3.74) διατηρεί τη στοχαστική δομή της ανέλιξης  $X_i$  και ταυτόχρονα μειώνει την υπό συνθήκη διασπορά περισσότερο από κάθε άλλο γραμμικό μοντέλο.

Σημειώνεται ότι το  $\mathbf{h}$  είναι συμμετρικό μητρώο, με διαστάσεις  $(k+1) \times (k+1)$ , τα στοιχεία του οποίου υπολογίζονται συναρτήσει των αυτοσυνδιασπορών  $\gamma_j$ , όπως υποδηλώνει η σχέση (3.10). Αντίθετα το  $\mathbf{n}_i$  είναι διάνυσμα με διάσταση  $k+1$  και στοιχεία:

$$(\mathbf{n}_i)_j = \gamma_{|i+j-1|} \quad (3.76)$$

Η διαδικασία αναγωγής που περιγράφει η (3.74) είναι γενική μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε γραμμικό στοχαστικό μοντέλο. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι:

**Βήμα 1ο:** Υπολογίζονται τα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{h}$  από την σχέση (3.10), για δεδομένο πλήθος γνωστών τιμών των μεταβλητών, ίσο με  $k+1$ .

**Βήμα 2ο:** Γεννάται η χρονοσειρά των ετήσιων μεταβλητών  $\tilde{X}_i$  ( $i = -k, \dots, 0, 1, 2, \dots$ ) χωρίς καμία αναφορά στις γνωστές τιμές  $\mathbf{Y}$  και υπολογίζεται το διάνυσμα  $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{Y}})$ .

**Βήμα 3ο:** Για κάθε χρονική περίοδο  $i > 0$ , ορίζονται τα στοιχεία του διανύσματος  $\mathbf{n}_i$  και διορθώνεται η τιμή της ετήσιας μεταβλητής  $X_i$ , με εφαρμογή της σχέσης (3.74).

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και σε πολυμεταβλητά σχήματα, θεωρώντας ότι οι μεταβλητές  $X_i^l$  γεννώνται μέσω του μοντέλου (3.40) και εφαρμόζοντας ακολούθως την διαδικασία αναγωγής θέση προς θέση, ξεχωριστά δηλαδή για κάθε μεταβλητή  $l = 1, \dots, n$ .

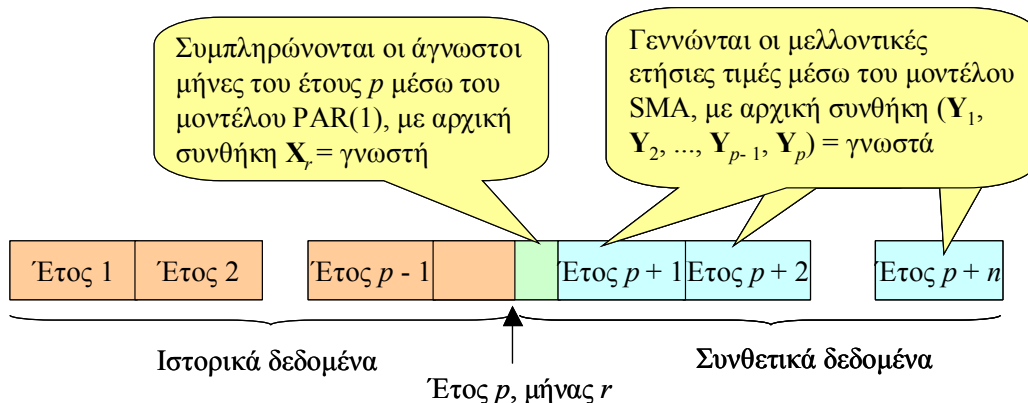
### 3.6.3 Περιγραφή της γενικής διαδικασίας στοχαστικής πρόγνωσης

Στο Σχήμα 3.5 απεικονίζεται η γενική μεθοδολογία εφαρμογής των μοντέλων γέννησης συνθετικών χρονοσειρών υπό μορφή πρόγνωσης. Έστω ότι κατά τον μήνα  $r$  του έτους  $p$  είναι γνωστή η ακολουθία των πραγματοποιήσεων των υδρολογικών μεταβλητών, ήτοι τα διανύσματα των ιστορικών ετήσιων τιμών μέχρι το έτος  $p - 1$  και όλων των μηνιαίων τιμών του τρέχοντος έτους  $p$  μέχρι τον μήνα  $r$ . Η διαδικασία που ακολουθείται έχει ως εξής:

**Βήμα 1ο:** Με βάση την επίκαιρη μηνιαία τιμή  $\mathbf{X}_r$  συμπληρώνεται το τρέχον υδρολογικό έτος, με εφαρμογή του σχήματος γέννησης PAR(1).

**Βήμα 2ο:** Η ετήσια αυτή τιμή μαζί με τις  $p - 1$  προηγούμενες εισάγονται ως δέσμευση στο σχήμα γέννησης ετήσιων χρονοσειρών υπό μορφή πρόγνωσης (βλ. 3.6.2).

**Βήμα 3ο:** Με δεδομένες τις ετήσιες συνθετικές τιμές που αναφέρονται σε χρονικό ορίζοντα  $n$  ετών, με έναρξη το έτος  $p + 1$ , εφαρμόζεται η τυπική διαδικασία γέννησης μηνιαίων χρονοσειρών μέσω του μοντέλου PAR(1) και εν συνεχεία επιμερισμού αυτών, μέσω του μοντέλου γραμμικής αναγωγής.



Σχήμα 3.6: Σχηματική απεικόνιση της γενικής διαδικασίας γέννησης συνθετικών χρονοσειρών υπό μορφή πρόγνωσης.

## 3.7 Μεθοδολογία αποσύνθεσης μητρώων συνδιασπορών

### 3.7.1 Τυπικές μέθοδοι αντιμετώπισης

Στα πολυμεταβλητά στοχαστικά σχήματα προκύπτει πάντοτε το πρόβλημα προσδιορισμού ενός μητρώου  $\mathbf{b}$  τέτοιου ώστε να ικανοποιείται μια σχέση της μορφής:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} \mathbf{b}^T \quad (3.77)$$

όπου  $\mathbf{c}$  ένα  $m \times m$  μητρώο που περιέχει τις από κοινού στατιστικές παραμέτρους, ήτοι τις συνδιασπορές (αυτοσυσχετίσεις και ετεροσυσχετίσεις) των μεταβλητών του μοντέλου. Ειδικότερα,

στην περίπτωση του σχήματος γέννησης των ετήσιων μεταβλητών το μητρώο  $\mathbf{c}$  δίνεται από την (3.43), ενώ στην περίπτωση του σχήματος γέννησης των μηνιαίων μεταβλητών το μητρώο  $\mathbf{c}$  δίνεται από την (3.49), και είναι διαφορετικό για κάθε υποπερίοδο  $\tau$ .

Η εξίσωση (3.77), που είναι γνωστή ως *γκραμμιανή*, έχει άπειρες λύσεις εφόσον το μητρώο συνδιασπορών  $\mathbf{c}$  είναι θετικά ορισμένο. Στην περίπτωση αυτή μπορούν, κατ' αρχάς, να χρησιμοποιηθούν δυο τυπικές αριθμητικές μέθοδοι για τον υπολογισμό ενός μητρώου  $\mathbf{b}$ . Η πρώτη και απλούστερη, που είναι γνωστή ως *τριγωνοποίηση Cholesky*, συνίσταται στην αποσύνθεση του  $\mathbf{c}$  σε ένα κάτω τριγωνικό μητρώο  $\mathbf{b}$  με στοιχεία:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= 0 & (i < j) \\ b_{ij} &= \sqrt{c_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} (b_{jk})^2} & (i = j) \\ b_{ij} &= \frac{c_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} b_{ik}}{b_{jj}} & (i > j) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Η δεύτερη αριθμητική μέθοδος είναι πιο δύσκολη στην εφαρμογή της, καθώς προϋποθέτει τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του  $\mathbf{c}$ , και έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή ενός πλήρους μητρώου  $\mathbf{b}$ . Σημειώνεται ότι η τυπική μέθοδος υπολογισμού των ιδιοτιμών ενός πίνακα είναι η τεχνική *Jacobi* (*Press et al.*, 1992).

Ωστόσο, αν το μητρώο  $\mathbf{c}$  δεν είναι θετικά ορισμένο, τότε δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ούτε η μέθοδος Cholesky ούτε η μέθοδος Jacobi, διότι τότε προκύπτουν αρνητικά υπόρριζα στην αναδρομική σχέση (3.78) και αρνητικές ιδιοτιμές, αντίστοιχα. Από την άλλη πλευρά, η υπόθεση θετικά ορισμένου μητρώου  $\mathbf{c}$  δεν ισχύει πάντοτε. Η κυριότερη αιτία είναι η εκτίμηση των συνδιασπορών από ιστορικά δείγματα που αναφέρονται σε διαφορετικές περιόδους μέτρησης και, κατά συνέπεια, δεν έχουν ίσο μήκος. Μια άλλη αιτία είναι η απλοποίηση του μητρώου  $\mathbf{a}_r$  και η διατύπωσή του ως διαγώνιου (βλ. 3.4.1).

Εξάλλου, ο υπολογισμός του μητρώου  $\mathbf{b}$  με τις μεθόδους που προαναφέρθηκαν έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό υπερβολικά μεγάλων συντελεστών ασυμμετρίας των τυχαίων μεταβλητών  $\mathbf{V}$ , δεδομένου ότι στις σχέσεις (3.46) και (3.53) ή (3.55) ο όρος  $\mathbf{b}^{(3)}$  μπορεί να περιέχει πολύ μικρές τιμές. Ωστόσο, κατά την εφαρμογή των μοντέλων στοχαστικής προσομοίωσης για τη γέννηση συνθετικών χρονοσειρών, δεν είναι δυνατή η παραγωγή τυχαίων όρων με τόσο υψηλές ασυμμετρίες, με αποτέλεσμα να υποεκτιμώνται οι ασυμμετρίες του ιστορικού δείγματος. Για τον χειρισμό του προβλήματος των ασυμμετριών στα πολυμεταβλητά σχήματα έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές, οι οποίες ωστόσο προϋποθέτουν αυθαίρετες επεμβάσεις στις παραμέτρους που εκτιμώνται βάσει των δειγματικών στατιστικών χαρακτηριστικών (*Todini*, 1980· *Grygier and Stedinger*, 1990· *Bras and Rodriguez-Iturbe*, 1993· *Koutsoyiannis and Manetas*, 1996).

### 3.7.2 Χειρισμός του προβλήματος μέσω βελτιστοποίησης

Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, η επίλυση της εξίσωσης (3.77) είναι ένα πολυσύνθετο πρόβλημα, αφού είτε δεν υφίσταται αναλυτική λύση είτε η λύση που προκύπτει με τις τυπικές μεθόδους υπολογισμού οδηγούν σε υπερβολικά υψηλές τιμές ασυμμετρίας των μεταβλητών  $\mathbf{V}$ . Ο *Koutsoyiannis* (1999) ανέπτυξε μια μέθοδο, βάσει την οποίας μπορεί πάντοτε να υπολογιστεί ένα μητρώο  $\mathbf{b}$  (ανεξάρτητα αν το μητρώο συνδιασπορών είναι ή όχι θετικά ορισμένο), τέτοιο ώστε να αναπαράγονται κατά τον βέλτιστο τρόπο τα στατιστικά χαρακτηριστικά του δείγματος. Η μέθοδος είναι κοινή είτε πρόκειται για το στάσιμο μοντέλο SMA είτε για το κυκλοστάσιμο PAR(1).

Υπενθυμίζεται ωστόσο ότι στην πρώτη περίπτωση υπολογίζεται μόνο ένα μητρώο  $\mathbf{b}$ , ενώ στη δεύτερη υπολογίζονται 12 τέτοια μητρώα (ένα για κάθε μήνα).

Αρχικά, εφαρμόζεται μια διαδικασία κανονικοποίησης του μητρώου  $\mathbf{b}$  καθώς και των υπόλοιπων μητρώων και διανυσμάτων που σχετίζονται με αυτό. Το μητρώο συνδιασπορών  $\mathbf{c}$  κανονικοποιείται εισάγοντας το διαγώνιο μητρώο:

$$\mathbf{h} = \text{diag} (1/\sqrt{c_{11}}, \dots, 1/\sqrt{c_{mm}}) \quad (3.79)$$

έτσι ώστε:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{h} \mathbf{c} \mathbf{h} \quad (3.80)$$

Με τον τρόπο αυτό, όλα τα διαγώνια στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{c}'$  είναι μοναδιαία, ενώ τα μη διαγώνια στοιχεία λαμβάνουν τιμές στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Σημειώνεται ότι η τελευταία υπόθεση μπορεί να παραβιάζεται οριακά εφόσον το μητρώο  $\mathbf{a}_\tau$  έχει οριστεί μέσω της (3.56). Εάν τεθεί:

$$\mathbf{b}' = \mathbf{h} \mathbf{b} \quad (3.81)$$

τότε η εξίσωση (3.77) γράφεται στην ισοδύναμη μορφή:

$$\mathbf{b}' \mathbf{b}'^T = \mathbf{c}' \quad (3.82)$$

Ορίζεται ακόμη το διάνυσμα:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\xi}_V \quad (3.83)$$

εφόσον το μητρώο  $\mathbf{b}$  αναφέρεται στο μοντέλο SMA ή

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{h}^{(3)} \{ \mu_3[\mathbf{X}_\tau] - \mathbf{a}_\tau^{(3)} \mu_3[\mathbf{X}_{\tau-1}] \} \quad (3.84)$$

εφόσον το  $\mathbf{b}$  αναφέρεται στο μοντέλο PAR(1). Τότε οι σχέσεις (3.46) και (3.53) γράφονται:

$$\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{b}'^{(3)})^{-1} \boldsymbol{\varphi} \quad (3.85)$$

Τα μητρώα  $\mathbf{h}$  και  $\mathbf{c}'$  καθώς και το διάνυσμα  $\boldsymbol{\varphi}$  είναι γνωστά, ενώ τα  $\boldsymbol{\xi}$  και  $\mathbf{b}'$  πρέπει να προσδιοριστούν. Δεδομένου ότι η εξίσωση (3.82) δεν έχει πάντοτε λύση, εισάγεται το μητρώο διαφορών:

$$\mathbf{d} = \mathbf{b}' \mathbf{b}'^T - \mathbf{c}' \quad (3.86)$$

τα στοιχεία του οποίου πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο μηδέν. Η απαίτηση εκφράζεται μαθηματικά ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, ήτοι:

$$\text{minimize } \|\mathbf{d}\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_{ij}^2 \quad (3.87)$$

όπου ο τελεστής  $\|\cdot\|$  εκφράζει τη νόρμα του μητρώου  $\mathbf{d}$ .

Στο παραπάνω πρόβλημα, τίθεται η επιπρόσθετη απαίτηση όλα τα διαγώνια στοιχεία του  $\mathbf{d}$  να είναι ακριβώς μηδέν. Με τον τρόπο αυτό δίνεται μεγαλύτερο βάρος στη διατήρηση των δειγματικών διασπορών έναντι των συνδιασπορών. Εάν οριστεί το διαγώνιο μητρώο:

$$\mathbf{d}^* = \text{diag} (d_{11}, \dots, d_{mm}) \quad (3.88)$$

στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (3.87) εισάγεται ο περιορισμός:

$$\|\mathbf{d}^*\|^2 = 0 \quad (3.89)$$

Ένας δεύτερος περιορισμός του προβλήματος σχετίζεται με τους συντελεστές ασυμμετρίας  $\boldsymbol{\xi}$  των τυχαίων μεταβλητών  $\mathbf{V}$ , οι οποίοι υπολογίζονται από την (3.85). Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 3.7.1, αυτοί θα πρέπει να διατηρούνται όσο το δυνατόν πιο χαμηλοί. Αποδεικνύεται ότι



(Wallis et al., 1974· Kirby, 1974) ο συντελεστής ασυμμετρίας ενός πεπερασμένου δείγματος μήκους  $k$  περιορίζεται στο εύρος  $-\zeta_{ub}$  και  $\zeta_{ub}$ , όπου:

$$\zeta_{ub} = \frac{k-2}{\sqrt{k-1}} \approx \sqrt{k} \quad (3.90)$$

Στην πραγματικότητα, μια ακολουθία συνθετικών τιμών έχει ασυμμετρία ίση με  $\pm \zeta_{ub}$  μόνο εφόσον όλοι οι όροι της πλην ενός είναι ίσοι. Είναι προφανές ότι μια τέτοια ακολουθία δεν μπορεί να είναι αποδεκτή, οπότε πρέπει να τεθεί μια μέγιστη ασυμμετρία  $\zeta_{acc} < \zeta_{ub}$ . Εφόσον ο περιορισμός ισχύει για όλες τις μεταβλητές  $V^l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) τίθεται η απαίτηση:

$$\max \{|\zeta^l|, l = 1, \dots, n\} \leq \zeta_{acc} \quad (3.91)$$

Ο μαθηματικός χειρισμός του περιορισμού (3.91) σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ιδιαίτερα δυσχερές. Για το λόγο αυτό ορίζεται η νόρμα:

$$\|\xi\|_p = \left( \sum_{l=1}^m |\zeta^l|^p \right)^{1/p} \quad (3.92)$$

η οποία τείνει στο μέγιστο των  $|\zeta^l|$  όταν  $p \rightarrow \infty$ . Κατά συνέπεια, η απαίτηση (3.91) αντικαθίσταται από τον μαθηματικό περιορισμό:

$$\|\xi\|_p^2 \leq \zeta_{acc}^2 \quad (3.93)$$

όπου  $\zeta_{acc} = 0.5\zeta_{ub}$ . Η τιμή του  $p$  πρέπει να είναι ζυγός ακέραιος αριθμός, έτσι ώστε να μην απαιτείται η χρήση απόλυτων τιμών. Μετά από διερεύνηση, ο Koutsoyiannis (1999) προτείνει την τιμή  $p = 8$ . Οι περιορισμοί (3.89) και (3.93) εισάγονται στην αντικειμενική συνάρτηση (3.87) ως όροι ποινής. Η τελική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι:

$$\text{minimize } \theta^2(\mathbf{b}') = \frac{\lambda_1}{m^2} \|\mathbf{d}(\mathbf{b}')\|^2 + \frac{\lambda_2}{m} \|\mathbf{d}^*(\mathbf{b}')\|^2 + \lambda_3 \|\xi(\mathbf{b}')\|_p^2 \quad (3.94)$$

όπου  $\lambda_1, \lambda_2$  και  $\lambda_3$  συντελεστές βάρους, με τυπικές τιμές  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10^3$  και  $\lambda_3 = 10^{-3}$  ως  $10^{-6}$ . Οι συντελεστές  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  διαιρούνται με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων των μητρών  $\mathbf{d}$  και  $\mathbf{d}^*$ , τα οποία είναι  $m^2$  και  $m$ , αντίστοιχα.

Η συνάρτηση (3.94) είναι έντονα μη γραμμική, γεγονός που δυσχεραίνει σημαντικά της διαδικασία εντοπισμού της βέλτιστης τιμής αυτής, καθώς ο χώρος αναζήτησης είναι εξαιρετικά τραχύς και παρουσιάζει πολλά τοπικά ακρότατα. Η δυσχέρεια του προβλήματος εντείνεται όσο αυξάνει η διάσταση  $m$  του μητρώου, ήτοι το πλήθος των μεταβλητών των οποίων ζητείται η ταυτόχρονη στοχαστική προσομοίωση. Ο Ευστρατιάδης (2001), επιχειρώντας να επιλύσει το πρόβλημα (3.94) με τις πλέον καταξιωμένες τεχνικές ολικής βελτιστοποίησης, οι οποίες θεωρούνται κατάλληλες για την αναζήτηση ακροτάτων σε μη ομαλούς χώρους, διαπίστωσε ότι η εύρεση μιας ικανοποιητικής προσέγγισης του μητρώου  $\mathbf{b}$  απαιτεί απαγορευτικά μεγάλο πλήθος δοκιμών.

Για τον λόγο αυτόν ακολουθήθηκε μια εναλλακτική προσέγγιση, που αν και δεν εγγυάται την εύρεση του ολικά βέλτιστου μητρώου  $\mathbf{b}$ , εξασφαλίζει μια ικανοποιητική λύση απαιτώντας σαφώς λιγότερο υπολογιστικό φόρτο. Πρόκειται για την λεγόμενη μέθοδο *πολλαπλών εκκινήσεων* (multistart), βάσει της οποίας εφαρμόζεται μια τεχνική αναζήτησης τοπικών ακροτάτων, που ξεκινώντας από διαφορετικά, τυχαία επιλεγμένα σημεία εκκίνησης μπορεί να εντοπίσει διάφορα τοπικά ακρότατα και να θεωρήσει ως προσέγγιση της ολικά βέλτιστης λύσης το καλύτερο εξ αυτών (Rubinstein, 1986). Για να εξασφαλιστεί όσο το δυνατόν πιο γρήγορος εντοπισμός των τοπικών ακροτάτων, επιλέχθηκε η μέθοδος των συζυγών κλίσεων, για την οποία έχει γίνει ήδη αναφορά στην ενότητα 3.3.2. Η εν λόγω μέθοδος βασίζει την ταχύτητά της στην χρήση των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης και την εφαρμογή των θεμελιωδών αρχών του διαφορικού λογισμού. Συνεπώς, για να μπορεί να

εφαρμοστεί η μέθοδος στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (3.94), απαιτείται η αναλυτική έκφραση της παραγώγου της συνάρτησης  $\theta^2(\mathbf{b}')$ , η οποία δίνεται από τον *Koutsoyiannis* (1999).

Με επέκταση του συμβολισμού των παραγώγων διανυσματικών συναρτήσεων, στην περίπτωση που το  $\mathbf{x}$  είναι τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων  $m \times m$ , γράφουμε:

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1m}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{21}} & \frac{\partial f}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{m2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mm}} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό, αποδεικνύεται ότι οι μερικές παράγωγοι της (3.94) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{d\|\mathbf{d}\|^2}{d\mathbf{b}'} = 4\mathbf{d} \mathbf{b}' \quad (3.96)$$

$$\frac{d\|\mathbf{d}^*\|^2}{d\mathbf{b}'} = 4\mathbf{d}^* \mathbf{b}' \quad (3.97)$$

$$\frac{d\|\xi\|_p^2}{d\mathbf{b}'} = -6\|\xi\|_p^{2-p} \mathbf{w} \quad (3.98)$$

όπου  $\mathbf{w}$  μητρώο διαστάσεων  $m \times m$  με στοιχεία:

$$w_{ij} = b'_{ij}{}^2 \xi_j \psi_i \quad (3.99)$$

και  $\psi$  διάνυσμα, το οποίο ορίζεται ως:

$$\psi = \{(\mathbf{b}'^{(3)})^{-1}\}^T \xi^{(p-1)} \quad (3.100)$$

Συνεπώς, το μητρώο των μερικών παραγώγων της  $\theta^2$  ως προς τις άγνωστες παραμέτρους  $b'_{ij}$  είναι:

$$\frac{d\theta^2}{d\mathbf{b}'} = \frac{4\lambda_1}{m^2} \mathbf{d} \mathbf{b}' + \frac{4\lambda_2}{m} \mathbf{d}^* \mathbf{b}' - 6\lambda_3 \|\xi\|_p^{2-p} \mathbf{w} \quad (3.101)$$

## 3.8 Παραγωγή τυχαίων αριθμών

### 3.8.1 Επιλογή συνάρτησης κατανομής τυχαίων μεταβλητών

Η εφαρμογή ενός στοχαστικού μοντέλου απαιτεί την παραγωγή τυχαίων αριθμών που ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανοτήτων, η επιλογή της οποίας είναι άμεσα εξαρτημένη από τα περιθώρια στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος.

Για την προσομοίωση των τυχαίων όρων  $\mathbf{W}$  και  $\mathbf{V}$  του ετήσιου και μηνιαίου σχήματος γέννησης, αντίστοιχα, χρησιμοποιείται η κατανομή γάμα τριών παραμέτρων (γνωστή και ως κατανομή Pearson III), η οποία είναι από τις πιο διαδεδομένες στατιστικές κατανομές της τεχνικής υδρολογίας. Το γεγονός ότι είναι θετικά ασύμμετρα και ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής την κάνει συμβατή με τις πιο χαρακτηριστικές υδρολογικές διεργασίες, όπως είναι οι μηνιαίες και ετήσιες βροχοπτώσεις και απορροές. Στο εδάφιο 3.8.2 ορίζονται τα χαρακτηριστικά της κατανομής, ενώ στο εδάφιο 3.8.3 περιγράφονται οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή τυχαίων αριθμών.

### 3.8.2 Η κατανομή γάμα τριών παραμέτρων

Στη γενικότερη περίπτωση, η κατανομή γάμα ορίζεται από τρεις παραμέτρους, ήτοι την παράμετρο θέσης  $c$ , την παράμετρο κλίμακας  $\lambda > 0$  και την παράμετρο σχήματος  $\kappa > 0$ . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής είναι (Κουτσογιάννης, 1997, σ. 151):

$$f_x(x) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} (x - c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(x-c)} \quad (3.102)$$

όπου  $\Gamma()$  η συνάρτηση γάμα, που ορίζεται ως το ολοκλήρωμα:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad (3.103)$$

για  $\alpha > 0$ . Οι παράμετροι της κατανομής, εκτιμώμενες με την μέθοδο των ροπών, είναι:

$$\kappa = \frac{4}{\xi_x^2} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\kappa}}{s_x} \quad c = \mu_x - \frac{\kappa}{\lambda} \quad (3.104)$$

όπου  $\mu_x$  η μέση τιμή,  $s_x$  η τυπική απόκλιση και  $\xi_x$  ο συντελεστής ασυμμετρίας του δείγματος.

Η παράμετρος θέσης  $c$ , η οποία αποτελεί το κάτω όριο της μεταβλητής  $x$ , επιτρέπει την καλύτερη προσαρμογή της κατανομής στα δεδομένα.

Το σχήμα της κατανομής εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου σχήματος  $\kappa$ . Για πολύ μεγάλες τιμές του  $\kappa$  ( $> 15 - 30$ ) η κατανομή γάμα προσεγγίζει την κανονική. Για  $\kappa = 1$  η κατανομή ταυτίζεται με την εκθετική. Για ακέραιο  $\kappa$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής (που είναι γνωστή και ως κατανομή Erlang) είναι:

$$f_x(x) = \frac{\lambda^\kappa}{(\kappa - 1)!} (x - c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(x-c)} \quad (3.105)$$

Αποδεικνύεται ότι η τυχαία μεταβλητή  $x$  που ακολουθεί κατανομή Erlang προκύπτει ως άθροισμα  $\kappa$  τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Η κατανομή γάμα είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση. Κατά συνέπεια το άθροισμα δυο ανεξάρτητων μεταβλητών  $x_1, x_2$  που ακολουθούν κατανομές γάμα με κοινή παράμετρο κλίμακας  $\lambda$  και παραμέτρους σχήματος  $\kappa_1$  και  $\kappa_2$  αντίστοιχα, ακολουθεί επίσης κατανομή γάμα, με παραμέτρους  $\lambda$  και  $\kappa_1 + \kappa_2$ .

### 3.8.3 Γεννήτριες τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα

Έστω η τυχαία μεταβλητή  $x$  η οποία ακολουθεί κατανομή γάμα, με παραμέτρους  $\kappa > 0$ ,  $\lambda > 0$  και  $c$ . Με βάση την προσθετική ιδιότητα της κατανομής γάμα, θεωρούμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x_1$  και  $x_2$  με κοινή παράμετρο κλίμακας  $\lambda$  και παραμέτρους σχήματος  $\kappa_1 = \text{Int}(\kappa)$  και  $\kappa_2 = \text{Trunc}(\kappa)$  αντίστοιχα. Ο τελεστής  $\text{Int}()$  υποδηλώνει το ακέραιο μέρος του αριθμού, ενώ ο τελεστής  $\text{Trunc}()$  το δεκαδικό του μέρος. Για την παραγωγή των τυχαίων αριθμών  $x_1$  και  $x_2$ , και ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου  $\kappa$ , εφαρμόζονται διαφορετικοί αλγόριθμοι, που περιγράφονται αναλυτικά στην συνέχεια.

α) Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα με ακέραιο  $\kappa$

Η γέννηση τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κατανομή Erlang με ακέραιο  $\kappa_1$  και  $\lambda > 0$  γίνεται μέσω της σχέσης:

$$x = -\lambda \ln \left( \prod_{i=1}^{\kappa_1} u_i \right) \quad (3.106)$$

όπου  $u_i$  τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0, 1)$ . Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα ότι η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Erlang ισούται με το

άθροισμα  $\kappa$  τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν εκθετική κατανομή. Πράγματι, η σχέση (3.106) μπορεί να γραφεί ως:

$$x = \sum_{i=1}^{\kappa_1} x_i = \sum_{i=1}^{\kappa_1} -\lambda \ln u_i \quad (3.107)$$

Η συνάρτηση της εκθετικής κατανομής είναι:

$$F_x(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (3.108)$$

Αντιστρέφοντας ως προς  $x$  προκύπτει:

$$x = -\lambda \ln(1 - u) \quad (3.109)$$

Εφόσον η τυχαία μεταβλητή  $u' = 1 - u$  ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή, η μεταβλητή

$$x = -\lambda \ln u' \quad (3.110)$$

ακολουθεί εκθετική κατανομή.

*β) Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα με δεκαδικό  $\kappa$*

Στην περίπτωση κατά την οποία  $0 < \kappa < 1$ , εφαρμόζονται δύο εναλλακτικές διαδικασίες. Η πρώτη και απλούστερη βασίζεται στην μέθοδο του *Whittaker* (1972), και περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

**Βήμα 1ο:** Γεννώνται οι τυχαίοι αριθμοί  $v$  και  $r$ , που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0, 1)$ .

**Βήμα 2ο:** Υπολογίζονται οι τιμές  $a = v^{1/\kappa}$  και  $b = r^{-1/\kappa}$ .

**Βήμα 3ο:** Ελέγχεται αν  $a + b \leq 1$ . Στην περίπτωση που αυτό δεν συμβαίνει, επαναλαμβάνονται τα βήματα 1 και 2.

**Βήμα 4ο:** Υπολογίζεται η τιμή:

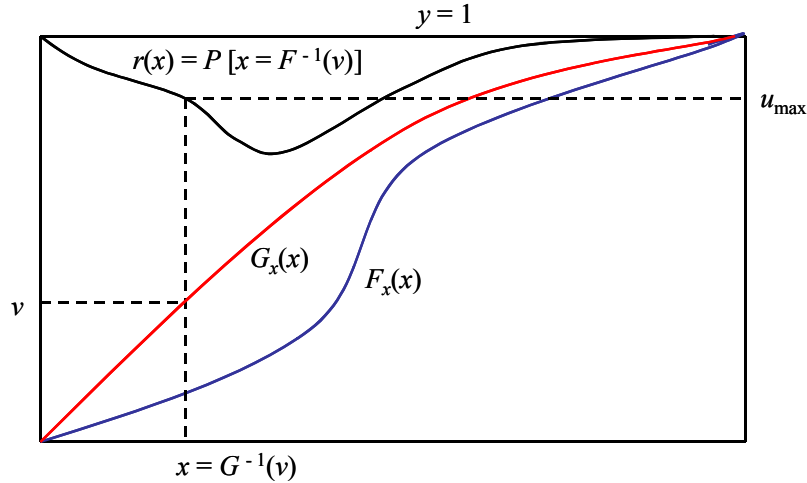
$$x = c - \frac{1}{\lambda} \frac{a}{a+b} \ln u \quad (3.111)$$

όπου  $u$  τυχαίος, ομοιόμορφος αριθμός.

Η δεύτερη διαδικασία γέννησης τυχαίων αριθμών (*Koutsoyiannis and Manetas, 1996*) βασίζεται στην πιθανοτική μέθοδο της *απόρριψης* (*Paroulis, 1991*). Η εν λόγω μέθοδος είναι κατάλληλη για μη αντιστρέψιμες συναρτήσεις κατανομής  $F_x(x)$ . Η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 3.7. Έστω ότι ορίζεται μια συνάρτηση κατανομής  $G_x(x)$  που είναι αντιστρέψιμη και περιβάλλει την  $F_x(x)$ , δηλαδή  $G_x(x) \geq F_x(x)$  για κάθε  $x$ . Επειδή η  $G_x(x)$  είναι συνάρτηση κατανομής ισχύει  $0 \leq G_x(x) \leq 1$ . Ο λόγος:

$$r(x) = \frac{F_x(x)}{G_x(x)} \leq 1 \quad (3.112)$$

αποτελεί μέτρο του πόσο καλά προσεγγίζει η  $G_x(x)$  την αρχική συνάρτηση  $F_x(x)$ .



Σχήμα 3.7: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου απόρριψης ως προσεγγιστικής γεννήτριας τυχαίων αριθμών από μια μη αντιστρέψιμη κατανομή,  $F_x(x)$ .

Η γέννηση ενός τυχαίου αριθμού  $x$  που ακολουθεί κατανομή  $F_x(x)$  γίνεται ως εξής:

**Βήμα 1ο:** Παράγονται δύο τυχαίοι αριθμοί  $v$  και  $u$ , που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0, 1)$ .

**Βήμα 2ο:** Τίθεται  $v = G_x(x)$  και υπολογίζεται η αντίστροφη τιμή της συνάρτησης,  $x = G_x^{-1}(v)$ .

**Βήμα 3ο:** Από την (3.112) υπολογίζεται η τιμή  $r(x)$ , η οποία εκφράζει την πιθανότητα του γεγονότος ο αριθμός  $x$  να ακολουθεί κατανομή  $F_x(x)$ .

**Βήμα 4ο:** Αν  $u \leq r(x)$  η τιμή  $x$  γίνεται δεκτή, διαφορετικά η μέθοδος επαναλαμβάνεται από την αρχή.

Η εφαρμογή της μεθόδου για την παραγωγή τυχαίων αριθμών γάμα κατανομής έχει ως εξής: Έστω  $g(x)$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $G_x(x)$ , η οποία ορίζεται ως:

$$g(x) = \begin{cases} \beta (x - c)^{\kappa - 1} & c \leq x \leq h \\ \beta \gamma e^{-\lambda(x - c)} & x > h \end{cases} \quad (3.113)$$

όπου  $\beta, \gamma$  σταθεροί συντελεστές και  $h$  αριθμός μεγαλύτερος του  $c$ . Από την απαίτηση συνέχειας της  $g(x)$  για  $x = h$  προκύπτει:

$$\gamma = (h - c)^{\kappa - 1} e^{\lambda(h - c)} \quad (3.114)$$

Εφόσον η  $g(x)$  είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας πρέπει:

$$\int_c^{\infty} g(x) dx = 1 \quad (3.115)$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\beta = \frac{\kappa}{(h - c)^{\kappa - 1} (h - c + \kappa / \lambda)} \quad (3.116)$$

Τότε η συνάρτηση κατανομής της  $g(x)$  είναι:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{h - c}{h - c + \kappa / \lambda} \left( \frac{x - c}{h - c} \right)^{\kappa} & c \leq x \leq h \\ 1 - \frac{\kappa / \lambda}{h - c + \kappa / \lambda} e^{-\lambda(x - c)} & x > h \end{cases} \quad (3.117)$$

Η αντίστροφη της  $G(x)$  είναι:

$$x(G) = \begin{cases} \left[ \frac{h-c+\kappa/\lambda}{h-c} G \right]^{1/\kappa} (h-c) + c & 0 \leq G \leq \frac{h-c}{h-c+\kappa/\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} \ln \left[ (1-G) \frac{h-c+\kappa/\lambda}{\kappa/\lambda} \right] + h & G > \frac{h-c}{h-c+\kappa/\lambda} \end{cases} \quad (3.118)$$

Ορίζεται η συνάρτηση:

$$r(x) = a \frac{f(x)}{g(x)} \quad (3.119)$$

όπου  $a$  μια σταθερή ποσότητα τέτοια ώστε  $\max[r(x)] = 1$ . Μετά από πράξεις προκύπτει:

$$r(x) = \begin{cases} e^{-\lambda(x-c)} & c \leq x \leq h \\ e^{-\lambda(x-c)} \left( \frac{x-c}{h-c} \right)^{\kappa-1} & x > h \end{cases} \quad (3.120)$$

Για απλούστευση της διαδικασίας, η παράμετρος  $h$  εξισώνεται με τη μέση τιμή του  $x$ , δηλαδή:

$$h = c + \frac{\kappa}{\lambda} \quad (3.121)$$

γ) *Γεννήτρια τυχαίων αριθμών κατανομής γάμα με  $\kappa > 30$*

Στην περίπτωση αυτή η κατανομή προσεγγίζεται από την κανονική, με μέση τιμή  $\mu = \kappa / \lambda$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = \sqrt{\kappa} / \lambda$ . Η γέννηση τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κανονική κατανομή γίνεται μέσω της σχέσης:

$$x = \mu + \sigma 2\pi u_1 \sqrt{-2 \ln u_2} \quad (3.122)$$

όπου  $u_1$  και  $u_2$  διαδοχικοί όροι ακολουθίας αριθμών που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή.

### 3.8.4 Προσαρμογή για παραγωγή αρνητικών ασυμμετριών

Η κατανομή γάμα, με παραμέτρους που ορίζονται με βάση τις σχέσεις (3.104), είναι πάντοτε θετικά ασύμμετρη. Στην περίπτωση που ο δειγματικός συντελεστής ασυμμετρίας  $\xi_X$  είναι αρνητικός, οι παράμετροι της κατανομής υπολογίζονται ως:

$$\kappa = -\frac{4}{\xi_X^2} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\kappa}}{s_X} \quad c = -\mu_X + \frac{\kappa}{\lambda} \quad (3.123)$$

Για την παραγωγή τυχαίων αριθμών που ακολουθούν αρνητικά ασύμμετρη κατανομή γάμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ίδιες γεννήτριες με προηγουμένως, θέτοντας  $\kappa = |\kappa|$  και αλλάζοντας το πρόσημο της τιμής του τελικού αποτελέσματος.

Σημειώνεται ότι αρνητικές ασυμμετρίες εμφανίζονται αρκετά συχνά στις τυχαίες μεταβλητές  $\mathbf{W}$  και  $\mathbf{V}$ , παρόλο που, κατά κανόνα, οι πρωτογενείς μεταβλητές που αναφέρονται σε υδρολογικές διεργασίες έχουν θετική ασυμμετρία.

## 4 Σχεδιασμός υπολογιστικού συστήματος

---

### 4.1 Δομή και συνιστώσες του συστήματος

Η «Κασταλία», ανάλογα με την μεθοδολογία μεταγλώττισης (compiling), μπορεί να αποτελέσει υποσύστημα (module) του λογισμικού συστήματος «Υδρογνώμων» από το οποίο τροφοδοτείται με στοιχεία ιστορικών χρονοσειρών είτε να αποτελέσει αυτόνομο λογισμικό σύστημα το οποίο μπορεί να λειτουργήσει με αυτόνομα αρχεία κειμένου (Text files) χρονοσειρών είτε σε συνεργασία με λογιστικά φύλλα τύπου Excel είτε και σε συνεργασία με την κεντρική βάση δεδομένων.

Οι λειτουργίες που επιτελεί το πρόγραμμα σε αυτόνομη μορφή είτε ως υποσύστημα του Υδρογνώμονα είναι:

- Ανάκτηση ιστορικών και διαχείριση συνθετικών χρονοσειρών·
- Υπολογισμός στατιστικών χαρακτηριστικών ιστορικών δεδομένων και εκτίμηση παραμέτρων στοχαστικών μοντέλων·
- Γέννηση ετήσιων και μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών σε μία ή περισσότερες θέσεις·
- Παρουσίαση υπό μορφή πινάκων και γραφημάτων των χρονοσειρών, των στατιστικών μεγεθών τους και των παραμέτρων του μοντέλου.

Στην *Κασταλία* διατίθενται αναλυτικές οδηγίες χρήσης σε ηλεκτρονική μορφή, οι οποίες δίνονται σε αντίστοιχο τεύχος καθώς και σε μορφή ηλεκτρονικής βοήθειας (online help).

Η βασική οντότητα της *Κασταλίας* είναι το υδρολογικό σενάριο, δηλαδή το σύνολο των δεδομένων και πληροφοριών που συνιστούν ένα πλήρες πρόβλημα σύνθεσης χρονοσειρών. Κάθε σενάριο περιλαμβάνει μία τουλάχιστον μεταβλητή, η οποία αναφέρεται σε συγκεκριμένη υδρολογική διεργασία και σε συγκεκριμένη γεωγραφική οντότητα (π.χ. απορροή ταμιευτήρα). Κάθε μεταβλητή μπορεί να αναφέρεται το πολύ σε μία ιστορική χρονοσειρά, ενώ αντίθετα μια χρονοσειρά μπορεί να αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία μεταβλητές, υπό την προϋπόθεση ότι κάθε μία ανήκει σε διαφορετικό σενάριο. Τέλος, σε κάθε μεταβλητή αντιστοιχεί μία ή περισσότερες συνθετικές χρονοσειρές.

Στο Σχήμα 4.1 απεικονίζονται η αρχιτεκτονική δομή και οι συνιστώσες (υποσυστήματα) της *Κασταλίας*. Η βάση δεδομένων από την οποία η Κασταλία μπορεί να ανακτήσει δεδομένα ή να εξάγει αποτελέσματα είναι η κεντρική βάση «Υδρία». Το πρόγραμμα αποτελείται από πέντε υποσυστήματα, οι λειτουργίες των οποίων περιγράφονται στη συνέχεια της ενότητας.



Σχήμα 4.1: Αρχιτεκτονικός σχεδιασμός και υποσυστήματα Κασταλίας.

Σε μια τυπική *συνόδο* (session), ο χρήστης είτε επιλέγει ένα υφιστάμενο υδρολογικό σενάριο είτε δημιουργεί ένα νέο σενάριο. Από την κεντρική βάση δεδομένων ανακτώνται όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για την εκτέλεση μιας ολοκληρωμένης εφαρμογής, δηλαδή οι παράμετροι του υδρολογικού σεναρίου καθώς και οι ιστορικές χρονοσειρές στις οποίες αναφέρεται το σενάριο. Ο χρήστης μπορεί να τροποποιήσει τις παραμέτρους του σεναρίου, μέσω του υποσυστήματος οργάνωσης δεδομένων. Μετά την ανάκτηση των δεδομένων ή τις τροποποιήσεις τους, το πρόγραμμα εκτελεί διάφορες μαθηματικές επεξεργασίες για την εκτίμηση των παραμέτρων του στοχαστικού μοντέλου. Στη συνέχεια ο χρήστης μπορεί να ζητήσει την γέννηση συνθετικών χρονοσειρών και να οπτικοποιήσει τα δεδομένα και τα στατιστικά τους χαρακτηριστικά, μέσω του υποσυστήματος παρουσίασης αποτελεσμάτων. Μετά το πέρας της συνόδου, οι συνθετικές χρονοσειρές μπορούν να αποθηκευτούν στη βάση δεδομένων, ώστε να είναι διαθέσιμες από άλλες εφαρμογές, όπως ο «Υδρονομέας» και το μοντέλο προσομοίωσης «Υδρόγειος». Σημειώνεται ότι σε κανένα στάδιο του προγράμματος δεν απαιτείται επέμβαση του χρήστη στα στοιχεία της βάσης, καθώς η διαχείριση των δεδομένων πραγματοποιούνται αποκλειστικά μέσω του προγράμματος.

#### 4.1.1 Υποσύστημα ανάκτησης και αποθήκευσης δεδομένων

Μέσω του υποσυστήματος ανάκτησης και αποθήκευσης, εξασφαλίζεται η επικοινωνία του προγράμματος με την κεντρική βάση δεδομένων. Μετά την εκκίνηση κάθε συνόδου, ανακτώνται όλες οι απαιτούμενες πληροφορίες από την βάση, δηλαδή οι παράμετροι του υδρολογικού σεναρίου και των μεταβλητών του καθώς και οι ιστορικές χρονοσειρές, οι οποίες μεταφέρονται στην εσωτερική μνήμη του προγράμματος. Σημειώνεται ότι επιλέξιμες χρονοσειρές του προγράμματος είναι όλα τα επεξεργασμένα ιστορικά δείγματα που υπάρχουν στην βάση, με μοναδική προϋπόθεση να είναι μηνιαίου χρονικού βήματος. Καθ' όλη τη διάρκεια εκτέλεσης της συνόδου, το σύνολο των υπολογιστικών διαδικασιών που αφορούν ανάγνωση και τροποποίηση δεδομένων πραγματοποιούνται στη μνήμη του προγράμματος, το οποίο καθίσταται ανεξάρτητο από τη βάση. Μετά το πέρας της



συνόδου, τα τροποποιημένα δεδομένα του υδρολογικού σεναρίου (παράμετροι σεναρίου και συνθετικές χρονοσειρές), μπορούν να αποθηκευτούν στην βάση μέσω μιας αντίστροφης διαδικασίας.

#### **4.1.2 Υποσύστημα οργάνωσης δεδομένων**

Το υποσύστημα οργάνωσης δεδομένων, το οποίο αποτελεί το μέσο επικοινωνίας του προγράμματος με τον χρήστη, επιτελεί τις ακόλουθες λειτουργίες:

- Επιλογή υφιστάμενου υδρολογικού σεναρίου ή ορισμός νέου σεναρίου·
- Ορισμός ή τροποποίηση παραμέτρων υδρολογικού σεναρίου·
- Ορισμός ή τροποποίηση παραμέτρων υδρολογικών μεταβλητών.

Όλες οι επεμβάσεις του χρήστη ελέγχονται, έτσι ώστε να εμποδίζεται η εισαγωγή μη συμβατών δεδομένων και να εξασφαλίζεται η απρόσκοπτη λειτουργία του προγράμματος. Ο έλεγχος περιλαμβάνει δύο συνιστώσες: (α) έλεγχο συμβατότητας του τύπου των εισαγόμενων στοιχείων (π.χ., απαγόρευση καταχώρησης πραγματικών τιμών σε ακέραιες μεταβλητές) και (β) έλεγχο αριθμητικών ορίων (π.χ. απαγόρευση ορισμού μήκους χρονοσειράς μεγαλύτερου από 10000 έτη).

#### **4.1.3 Υποσύστημα μαθηματικών επεξεργασιών**

Τα υποσύστημα μαθηματικών επεξεργασιών επιτελεί τις ακόλουθες λειτουργίες:

- Στατιστική ανάλυση ιστορικών χρονοσειρών, ήτοι υπολογισμός ουσιωδών στατιστικών χαρακτηριστικών δειγμάτων και προσαρμογή στατιστικών κατανομών·
- Εκτίμηση παραμέτρων μοντέλων·
- Υπολογισμός στατιστικών χαρακτηριστικών συνθετικών χρονοσειρών.

Κατά τη διάρκεια εκτέλεσης των υπολογισμών, που ανάλογα με την περίπτωση μπορεί να φτάσουν και τα μερικά λεπτά της ώρας, όλες οι επιλογές του προγράμματος παραμένουν ανενεργές. Ανά τακτά διαστήματα, ο χρήστης ενημερώνεται για το είδος των επεξεργασιών που πραγματοποιούνται, μέσω της κύριας φόρμας του προγράμματος.

#### **4.1.4 Υποσύστημα γέννησης χρονοσειρών**

Η γέννηση συνθετικών χρονοσειρών ετήσιου και μηνιαίου χρονικού βήματος συνιστά την κύρια λειτουργία του προγράμματος. Οι χρονοσειρές, οι οποίες αναφέρονται σε μία ή περισσότερες θέσεις, παράγονται ανά ομάδες ίσου μήκους. Κάθε ομάδα διαφοροποιείται ως προς τις τιμές της τυχαίας συνιστώσας του στοχαστικού σχήματος γέννησης.

Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει μεταξύ δύο τρόπων γέννησης χρονοσειρών: (α) προσομοίωση μόνιμης κατάστασης, ή (β) πρόγνωση με δεδομένες αρχικές συνθήκες. Η πρώτη περίπτωση συνίσταται στην παραγωγή χρονοσειρών μεγάλου, κατά κανόνα, μήκους, με τυχαίες αρχικές συνθήκες, που χρησιμοποιούνται για την μακροχρόνια προσομοίωση των συστημάτων υδατικών πόρων. Αντίθετα, η δεύτερη περίπτωση συνίσταται στη γέννηση πολλαπλών σειρών μικρού μήκους, μέσω του σχήματος στοχαστικής πρόγνωσης (βλ. 3.6), που χρησιμοποιούνται για καταληκτική προσομοίωση.

#### **4.1.5 Υποσύστημα παρουσίασης αποτελεσμάτων**

Τα δεδομένα που ανακτώνται από τη βάση και τα αποτελέσματα των πάσης φύσεως επεξεργασιών οπτικοποιούνται υπό μορφή πινάκων και γραφημάτων. Συγκεκριμένα, υπό μορφή πινάκων παρουσιάζονται:

- οι τιμές των ιστορικών και οι συνθετικών χρονοσειρών·
- τα ουσιώδη στατιστικά χαρακτηριστικά των ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών·
- οι παράμετροι των στοχαστικών μοντέλων για τις ετήσιες και μηνιαίες μεταβλητές·

- τα στατιστικά μεγέθη των τυχαίων όρων των ετήσιων και μηνιαίων μεταβλητών.

Υπό μορφή γραφημάτων απεικονίζονται:

- τα ετήσια και μηνιαία στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος και των συνθετικών χρονοσειρών (μέσες τιμές, τυπικές αποκλίσεις, συντελεστές ασυμμετρίας, συντελεστές αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης, συντελεστές ετεροσυσχέτισης μηδενικής τάξης)·
- η προσαρμογή της κανονικής και της γάμα κατανομής στα μηνιαία και ετήσια ιστορικά δείγματα·
- το αυτοσυσχετόγραμμα, πραγματικό και θεωρητικό, του ετήσιου ιστορικού δείγματος και των συνθετικών χρονοσειρών·
- το φάσμα ισχύος των ετήσιων ιστορικών δειγμάτων·
- οι ετήσιες και μηνιαίες χρονοσειρές του ιστορικού δείγματος και των συνθετικών χρονοσειρών.

## Αναφορές

---

- Ευστρατιάδης, Α., *Διερεύνηση μεθόδων αναζήτησης ολικού βελτίστου σε προβλήματα υδατικών πόρων*, MSc thesis, 139 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2001.
- Ευστρατιάδης, Α., Ι. Ναλμπάντης, και Ε. Ρόζος, Μοντέλο προσομοίωσης του υδρολογικού κύκλου στη λεκάνη Βοιωτικού Κηφισού - Υλίκης, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 21, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2004.
- Ευστρατιάδης, Α., και Δ. Κουτσογιάννης, Κασταλία (έκδοση 2.0) - Σύστημα στοχαστικής προσομοίωσης υδρολογικών μεταβλητών, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 23, 103 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Ιανουάριος 2004
- Ευστρατιάδης, Α., και Δ. Κουτσογιάννης, Κασταλία: Σύστημα στοχαστικής προσομοίωσης υδρολογικών μεταβλητών, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τεύχος 9, 70 σελίδες, Αθήνα, Δεκέμβριος 2000.
- Καραβοκυρός, Γ., Α. Ευστρατιάδης, Α. Κουκουβίνος, Ν. Μαμάσης, Ι. Ναλμπάντης, Ν. Δαμιανόγλου, Κ. Κωνσταντινίδου, Σ. Ναλπαντίδου, Α. Ξανθάκης, και Σ. Πολιτάκη, Ανάλυση απαιτήσεων του συστήματος, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 1, 74 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Ιανουάριος 2000.
- Καραβοκυρός, Γ., Α. Ευστρατιάδης, και Δ. Κουτσογιάννης, Υδρονομέας (έκδοση 3.3) - Σύστημα υποστήριξης της διαχείρισης των υδατικών πόρων, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 24, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2004.
- Κουτσογιάννης, Δ., Γ. Καραβοκυρός, Ι. Ναλμπάντης, Α. Κουκουβίνος, Α. Ευστρατιάδης, Ν. Μαμάσης, Β. Τσουκαλά, Ν. Δαμιανόγλου, Σ. Πολιτάκη, Δ. Γκριντζιά, και Α. Ξανθάκης, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 5, Σχέδιο διαχείρισης του υδροδοτικού συστήματος της Αθήνας-Έτος 2000-2001, ΕΜΠ-ΕΥΔΑΠ, Αθήνα, 2000.
- Κουτσογιάννης, Δ., *Στατιστική Υδρολογία*, Έκδοση 4, 312 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1997.
- Λαγγούσης, Α., *Ανάπτυξη κυκλοστάσιμων στοχαστικών υδρολογικών μοντέλων με διατήρηση της βραχυπρόθεσμης μνήμης και της μακροπρόθεσμης εμμονής*, Διπλωματική εργασία, 327 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Ιούλιος 2003.
- Παπακόστας, Α., Σχεδιασμός και υλοποίηση κεντρικής βάσης δεδομένων, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 19, Σχεδιασμός και υλοποίηση κεντρικής βάσης δεδομένων, ΕΜΠ, ΤΥΠΥΘΕ, Αθήνα, 2004.

- Bloomfield, P., *Fourier Analysis of Time Series*, Willey, New York, 1976.
- Box, G. E., and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden Day, 1970.
- Bras, R. L., and I. Rodriguez-Iturbe, *Random Functions and Hydrology*, Dover Publications, 1993.
- Chow, V. T., Maidement, D. R., and Mays, L. W., *Applied Hydrology*, McGraw-Hill, New York, 1988.
- Evans, T. E., The effects of changes in the world hydrological cycle on availability of water resources, *Global climate Change and Agricultural Production: Direct and Indirect Effects of Changing Hydrological, Pedological and Plant Physiological Processes*, edited by F. Bazaaz and W. Sombroek, Chapter 2, FAO and John Wiley, Chichester, West Sussex, UK, 1996.
- Grygier, J. C., and J. R. Stedinger, Condensed disaggregation procedures and conservation corrections for stochastic hydrology, *Water Resources Research*, 24(10), 1574-1584, 1988.
- Grygier, J. C., and J. R. Stedinger, *SPIGOT, A synthetic streamflow generation software package*, Technical description, Version 2.5, School of Civil and Environmental Engineering, Ithaca, New York, 1990.
- Hurst, H. E., Long-term storage capacity of reservoirs, *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, 116, pp. 776-808, 1951.
- Jones, P. D., Briffa K. R., Barnett T. P., and Tett S. F. B., High-resolution paleoclimatic records for the last millennium: interpretation, integration and comparison with General circulation Model control-run temperatures, *Holocene*, 8(4), 455-471, 1998.
- Kirby, W., Algebraic boundness of sample statistics, *Water Resources Research*, 10(2), 220-222, 1974.
- Kottogoda, N. T., *Stochastic Water Resources Technology*, Macmillan Press, London, 1980.
- Koutsoyiannis, D., A generalized mathematical framework for stochastic simulation and forecast of hydrologic time series, *Water Resources Research*, 36(6), 1519-1534, 2000.
- Koutsoyiannis, D., and A. Manetas, Simple disaggregation by accurate adjusting procedures, *Water Resources Research*, 32(7), 2105-2117, 1996.
- Koutsoyiannis, D., Climate change, the Hurst phenomenon, and hydrological statistics, *Hydrological Sciences Journal*, 48(1), 3-24, 2003.
- Koutsoyiannis, D., Coupling stochastic models of different time scales, *Water Resources Research*, 37(2), 379-392, 2001.
- Koutsoyiannis, D., Optimal decomposition of covariance matrices for multivariate stochastic models in hydrology, *Water Resources Research*, Vol. 35(4), pp. 1219-1229, 1999.
- Koutsoyiannis, D., Stochastic simulation of hydrosystems, *The Encyclopedia of Water*, edited by J. H. Lehr, New York, 2004.
- Koutsoyiannis, D., The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy, *Hydrological Sciences Journal*, 47(4), 573-595, 2002.
- Lane, W. L., and D. K. Flevert, Applied stochastic techniques, User's manual, personal computer version, Bureau of Reclamation, Eng. and Res. Cent., Denver, Colorado, 1990.

- Mandelbrot, B. B., Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi: Application à la loi climatologique de H. E. Hurst, *Compte Rendus Académie Science*, 260, 3284-3277, 1965.
- Mandelbrot, B. B., and J. R. Wallis, Computer experiments with fractional Gaussian noises, Parts 1, 2 and 3, *Water Resources Research*, 5(1), 1969.
- Matalas, N. C., and J. R. Wallis, Generation of synthetic flow sequences, in *Systems Approach to Water Management*, edited by A. K. Biswas, McGraw-Hill, New York, 1976.
- Mejia, J. M., I. Rodriguez-Iturbe, and D. R. Dawdy, Streamflow simulation, 2, The broken line process as a potential model for hydrologic simulation, *Water Resources Research*, 8(4), 931-941, 1972.
- Papoulis, A., *Probability, Random Functions and Stochastic Processes*, 3<sup>rd</sup> ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge Univ. Press, New York, 1992.
- Ripley, B. D., *Stochastic Simulation*, Wiley, New York, 1987.
- Rubinstein, R. Y., *Monte Carlo Optimization, Simulation and Sensitivity of Queuing Networks*, John Wiley, 1986.
- Salas, J. D., Analysis and modeling of hydrologic time series, Chapter 19, *Handbook of Hydrology*, edited by D. Maidment, McGraw-Hill, New York, 1993.
- Salas, J. D., J. W. Delleur, V. Yevjevich, and W. L. Lane, *Applied Modeling of Hydrologic Time Series*, Water Resources Publications, Littleton, Colorado, 1988.
- Todini, E., The preservation of skewness in linear disaggregation schemes, *Journal of Hydrology*, 47, 199-214, 1980.
- Valencia, D., and J. C. Schaake, Disaggregation processes in stochastic hydrology, *Water Resources Research*, 9(3), 211-219, 1973.
- Wallis, J. R., N. Matalas, and J. R. Slack, Just a moment!, *Water Resources Research*, 10(2), 211-219, 1974.
- Whittaker, J., A note on the generation of gamma random variables with non-integral shape parameter, *Floods and Droughts, Proceeding of the 2nd International Hydrology Symposium*, Colorado State University Press, Fort Collins, Colorado, 1972.
- Winston, W. L., *Operations Research, Applications and Algorithms*, 3rd edition, Duxbury, Belmont, 1994.