

## Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα

Δημήτρης Κουτσογιάννης & Ανδρέας Ευστρατιάδης  
Τομέας Υδατικών Πόρων  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

### Αρχές μόνιμης ομοιόμορφης ροής

Ροή σε κλειστό αγωγό

**Αρχή διατήρησης μάζας**  
(= συνέχεια)

$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = V A$   
(όπου  $A$  το εμβαδό της διατομής)

**Αρχή διατήρησης ορμής**

$\Sigma F = \rho Q (V_2 - V_1)$

και λόγω συνέχειας και πρισματικού αγωγού:

$\Sigma F = 0$

**Αρχή διατήρησης ενέργειας**

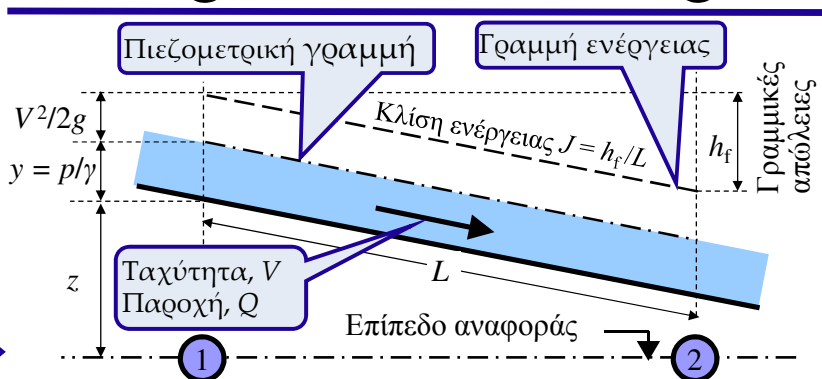
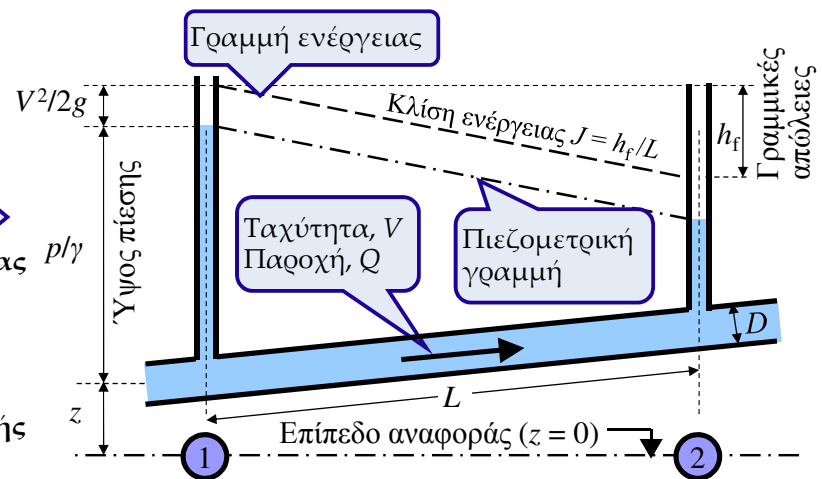
$z_1 + p_1/\gamma + V_1^2/2g =$

$z_2 + p_2/\gamma + V_2^2/2g + h_f$

και λόγω συνέχειας:

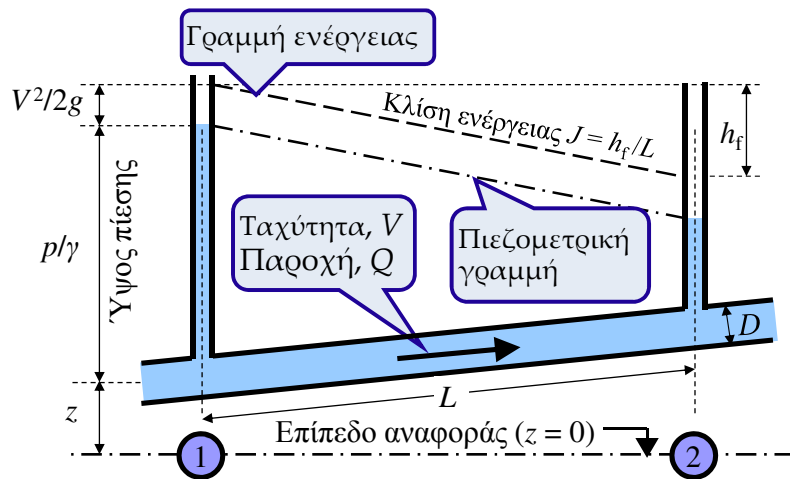
$z_1 + p_1/\gamma = z_2 + p_2/\gamma + h_f$

Ροή σε ανοιχτό αγωγό



## Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μόνιμης ομοιόμορφης ροής σε κλειστό αγωγό

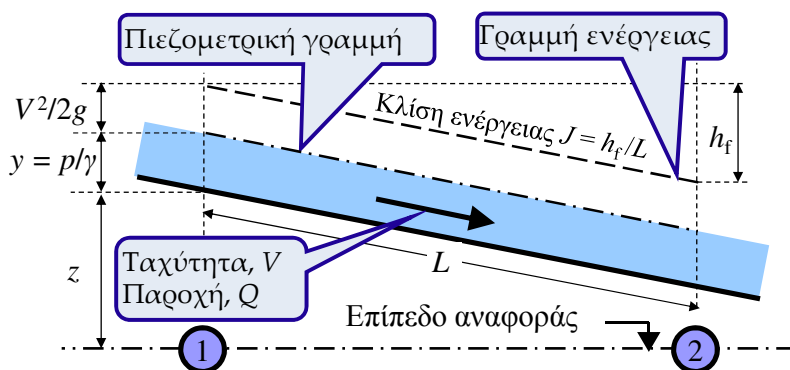
- Η διατομή αποτελεί καθαρά γεωμετρικό μέγεθος – δεν εξαρτάται από τα υδραυλικά μεγέθη (παροχή, ταχύτητα).
- Αντίθετα η κλίση ενέργειας είναι υδραυλικό μέγεθος (μεταβάλλεται με την παροχή).
- Κατά κανόνα οι σωλήνες είναι κυκλικής διατομής (κυλινδρικοί), κάτι που εξασφαλίζει:
  - την απλούστερη δυνατή γεωμετρία ροής (πολλαπλές συμμετρίες), και
  - τη μαθηματική περιγραφή της γεωμετρίας ροής από ένα μέγεθος, την εσωτερική διάμετρο  $D$ .
- Η ομοιομορφία της ροής είναι δεδομένη (έστω κατά τμήματα).



Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ενσπρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 3

## Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μόνιμης ομοιόμορφης ροής σε ανοιχτό αγωγό

- Η κλίση ενέργειας αποτελεί καθαρά γεωμετρικό μέγεθος: είναι ίση με την κλίση πυθμένα και δεν εξαρτάται από τα υδραυλικά μεγέθη (παροχή, ταχύτητα).
- Αντίθετα η διατομή είναι υδραυλικό μέγεθος (μεταβάλλεται με την παροχή).
- Η γεωμετρία της διατομής είναι σαφώς πιο πολύπλοκη από τη γεωμετρία των κυκλικών αγωγών – χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη αποτελούν
  - η επιφάνεια,  $A$ ,
  - η βρεχόμενη περίμετρος  $P$ ,
  - η υδραυλική ακτίνα  $R = A/P$ .
- Η ομοιομορφία της ροής δεν είναι δεδομένη (χρειάζεται υδραυλικές προϋποθέσεις).



Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ενσπρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 4

## Γενικές αρχές για την εξίσωση μόνιμης ομοιόμορφης ροής

- Από την αρχή διατήρησης ορμής (εν προκειμένω, την ισορροπία δυνάμεων) στον όγκο αναφοράς ανάμεσα στις διατομές 1 και 2, σε διεύθυνση παράλληλη με τον πυθμένα του αγωγού (αλλά και τη γραμμή ενέργειας), προκύπτει:

$$T = B \sin \theta$$

όπου λήφθηκε υπόψη ότι οι υδροστατικές πιέσεις αλληλοαναιρούνται.

- Παίρνουμε υπόψη ότι

$$B = m g = \rho L A g, \quad \sin \theta = J, \quad T = \tau P L$$

όπου  $m$  = μάζα,  $\rho$  = πυκνότητα και  $\tau$  = μέση διατμητική τάση στο όριο.

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις παίρνουμε

$$\tau = \rho g R J = \gamma R J$$

- Εξ άλλου η διατμητική τάση δίνεται και από τη σχέση

$$\tau = C_f \rho V^2 / 2$$

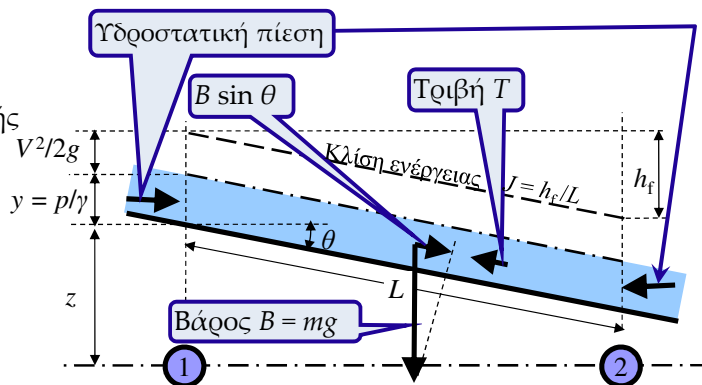
όπου  $C_f$  αδιάστατος συντελεστής τριβής.

- Απαλείφοντας το  $\tau$  παίρνουμε

$$R J = C_f V^2 / 2g$$

(γενικευμένη εξίσωση Chezy).

- Η ίδια τελική εξίσωση θα προέκυπτε και αν ο αγωγός ήταν υπό πίεση, παρόλο που τα δεδομένα είναι διαφορετικά.



Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 5

## Υπολογισμός γραμμικών ενεργειακών απωλειών σε αγωγούς υπό πίεση κυκλικής διατομής (μόνιμη ροή)

- Αν στη γενικευμένη εξίσωση Chézy θέσουμε  $f := 4 C_f$  και με δεδομένο ότι σε κυκλική διατομή  $R = A/P = (\pi D^2/4) / (\pi D) = D/4$ , παίρνουμε

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

που είναι γνωστή ως εξίσωση Darcy-Weisbach.

- Για μεγάλες τιμές του αριθμού Reynolds της ροής ( $Re := VD/\nu$ , όπου  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα του νερού, ίση με  $1.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , για θερμοκρασία  $16^\circ\text{C}$ ), ο συντελεστής τριβής  $f$  είναι σταθερός για δεδομένο υλικό και διάμετρο σωλήνα.
- Ακριβέστερα, στις συνθήκες αυτές ο συντελεστής  $f$  είναι συνάρτηση της σχετικής τραχύτητας  $\epsilon/D$ , όπου  $\epsilon$  η απόλυτη επιφανειακή τραχύτητα του τοιχώματος του αγωγού, μέγεθος με διάταση μήκους.
- Για μικρότερους αριθμούς Reynolds, ο συντελεστής  $f$  είναι συνάρτηση και του  $Re$ , που δίνεται από τον (πεπλεγμένο) τύπο Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$$

ή γραφικά από το διάγραμμα Moody.

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 6

## Προσεγγιστικός απλουστευμένος υπολογισμός γραμμικών απωλειών

- Η εξίσωση Colebrook-White γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\varepsilon_*^{3/2}} \frac{(\varepsilon/D)^{3/2}}{J^{1/2}} \right), \text{ όπου } \varepsilon_* := \varepsilon/\varepsilon_0, \text{ ενώ } \varepsilon_0 := \left( \frac{v^2}{g} \right)^{1/3}$$

Εν προκειμένω  $\varepsilon_0 = 0.05 \text{ mm}$  (σταθερά), ενώ το μέγεθος  $\varepsilon_*$  είναι αδιάστατο με γνωστή τιμή για καθορισμένο υλικό και συνθήκες σωλήνα

- Για απλοποίηση υποτίθεται η προσεγγιστική εξίσωση δύναμης

$$f \approx \alpha \frac{(\varepsilon_0/D)^\beta}{J^\gamma}$$

όπου  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  συντελεστές που εξαρτώνται από το αδιάστατο μέγεθος  $\varepsilon_*$  (ήτοι  $\alpha = \alpha(\varepsilon_*)$ ,  $\beta = \beta(\varepsilon_*)$  and  $\gamma = \gamma(\varepsilon_*)$ ) και εν τέλει από την απόλυτη τραχύτητα  $\varepsilon$ .

- Συνδυάζουμε την παραπάνω με την εξίσωση Darcy-Weisbach και, επιπλέον, εισάγουμε το (διαστατικό) μέγεθος (που θα αποκαλούμε γενικευμένο συντελεστή τραχύτητας Manning)

$$N := \frac{\varepsilon_0^{\beta/2}}{2^{3/2+\beta} g^{1/2}} \alpha^{1/2}$$

- Καταλήγουμε στην ακόλουθη απλή εξίσωση (που θα αποκαλούμε γενικευμένη εξίσωση Manning)

$$V = (1/N) R^{(1+\beta)/2} J^{(1+\gamma)/2}$$

*Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 7*

## Τυπικές μορφές της γενικευμένης εξίσωσης Manning (για άνετους υπολογισμούς)

- Γενικευμένη εξίσωση Manning:

$$V = (1/N) R^{(1+\beta)/2} J^{(1+\gamma)/2}$$

- Σχέση παροχής  $Q$  και ταχύτητας  $V$ :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V$$

- Σχέσεις ανάμεσα στην κλίση ενέργειας  $J$ , την ταχύτητα  $V$  και τη διάμετρο  $D$ :

$$J = \left( \frac{4^{1+\beta} N^2 V^2}{D^{1+\beta}} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad V = \frac{1}{2^{1+\beta} N} D^{(1+\beta)/2} J^{(1+\gamma)/2}, \quad D = 4 \left( \frac{N^2 V^2}{J^{1+\gamma}} \right)^{\frac{1}{1+\beta}}$$

- Σχέσεις ανάμεσα στην κλίση ενέργειας  $J$ , την παροχή  $Q$  και τη διάμετρο  $D$ :

$$J = \left( \frac{4^{3+\beta} N^2 Q^2}{\pi^2 D^{5+\beta}} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad Q = \frac{\pi}{2^{3+\beta} N} D^{(5+\beta)/2} J^{(1+\gamma)/2}, \quad D = \left( \frac{4^{3+\beta} N^2 Q^2}{\pi^2 J^{1+\gamma}} \right)^{\frac{1}{5+\beta}}$$

*Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 8*

## Τιμές των συντελεστών της γενικευμένης εξίσωσης Manning (για τυπικές τιμές της τραχύτητας σχεδιασμού που χρησιμοποιούνται στην Ευρώπη)

- Για δεδομένη τραχύτητα  $\varepsilon$  (ή, ισοδύναμα, αδιαστατοποιημένη τραχύτητα  $\varepsilon_*$ ), οι τιμές των συντελεστών  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $a$  (ή ισοδύναμα  $N$ ) προκύπτουν από βελτιστοποίηση, με στόχο την ελαχιστοποίηση του σφάλματος σε σχέση με την αυθεντική σχέση Colebrook-White.
- Οι βέλτιστες τιμές εξαρτώνται από το θεωρούμενο εύρος διακύμανσης της διαμέτρου  $D$  και της ταχύτητας  $V$ .
- Οι ακόλουθες τιμές είναι βέλτιστες για εύρος διαμέτρου  $0.05 \text{ m} \leq D \leq 10 \text{ m}$  και ταχύτητας  $0.1 \text{ m/s} \leq V \leq 10 \text{ m/s}$ :

$\varepsilon$ (mm)	0	0.1	0.3	1	3
$a$	0.1273	0.1602	0.2200	0.3397	0.6458
$\beta$	0.31	0.28	0.28	0.29	0.32
$\gamma$	0.104	0.054	0.029	0.014	0.007
$N$ (μονάδες SI: m, s)	0.0070	0.0093	0.0109	0.0128	0.0149

- Τα μέγιστα σχετικά σφάλματα στην εκτίμηση των μεγεθών  $J$ ,  $D$ ,  $V$ ,  $Q$  είναι αντίστοιχα 10%, 2%, 6%, 6%.
- Τα σφάλματα αυτά είναι πολύ μικρότερα από άλλα τυπικά σφάλματα και αβεβαιότητες (π.χ. στην εκτίμηση της τραχύτητας  $\varepsilon$ ).

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 9

## Υπολογισμός των συντελεστών της γενικευμένης εξίσωσης Manning συναρτήσει της τραχύτητας

- Ορισμός της αδιαστατοποιημένης τραχύτητας  $\varepsilon_*$ :

$$\varepsilon_* := \varepsilon/\varepsilon_0, \text{ όπου } \varepsilon_0 = (\nu^2/g)^{1/3} = 0.00005 \text{ m (για } \nu = 1.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s)}$$

- **Σύνθητες εύρος** ( $0.1 \text{ m} \leq D \leq 1 \text{ m}$ ,  $0.2 \text{ m/s} \leq V \leq 2 \text{ m/s}$ ) [Σε αγκύλη δίνονται μέγιστα σχετικά σφάλματα στην εκτίμηση των μεγεθών  $J$ ,  $D$ ,  $V$ ,  $Q$ , αντίστοιχα]

$$\beta = 0.3 + 0.0005 \varepsilon_* + \frac{0.02}{1 + 6.8 \varepsilon_*} \quad \gamma = \frac{0.096}{1 + 0.31 \varepsilon_*} \quad N = 0.00687 (1 + 1.6 \varepsilon_*)^{0.16} \quad [5\%, 1\%, 3\%, 3\%]$$

- **Μικρές διαμέτροι** ( $0.05 \text{ m} \leq D \leq 1 \text{ m}$ ,  $0.1 \text{ m/s} \leq V \leq 3 \text{ m/s}$ )

$$\beta = 0.32 + 0.0006 \varepsilon_* + \frac{0.021}{1 + 12.1 \varepsilon_*} \quad \gamma = \frac{0.11}{1 + 0.32 \varepsilon_*} \quad N = 0.00648 (1 + 1.92 \varepsilon_*)^{0.16} \quad [9\%, 2\%, 5\%, 5\%]$$

- **Μεγάλες διαμέτροι** ( $0.1 \text{ m} \leq D \leq 10 \text{ m}$ ,  $0.3 \text{ m/s} \leq V \leq 10 \text{ m/s}$ )

$$\beta = 0.25 + 0.0006 \varepsilon_* + \frac{0.024}{1 + 7.2 \varepsilon_*} \quad \gamma = \frac{0.083}{1 + 0.42 \varepsilon_*} \quad N = 0.00757 (1 + 2.47 \varepsilon_*)^{0.14} \quad [8\%, 2\%, 5\%, 5\%]$$

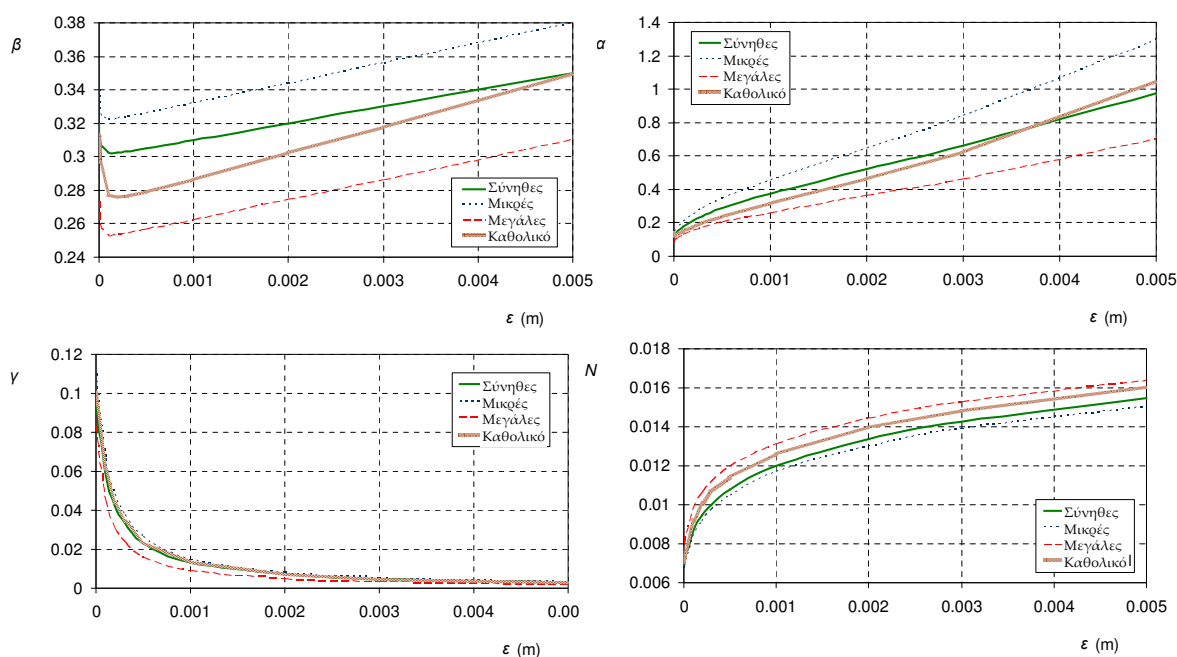
- **Καθολικό εύρος** ( $0.05 \text{ m} \leq D \leq 10 \text{ m}$ ,  $0.1 \text{ m/s} \leq V \leq 10 \text{ m/s}$ )

$$\beta = 0.27 + 0.0008 \varepsilon_* + \frac{0.043}{1 + 3.2 \varepsilon_*} \quad \gamma = \frac{0.1}{1 + 0.32 \varepsilon_*} \quad N = 0.00705 (1 + 2.38 \varepsilon_*)^{0.15} \quad [12\%, 2\%, 7\%, 7\%]$$

**Σημείωση:** το διαστατικό μέγεθος  $N$  δίνεται στο σύστημα μονάδων SI (m, s).

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 10

## Γραφική απεικόνιση των συντελεστών της γενικευμένης εξίσωσης Manning (συναρτήσεις της τραχύτητας)



Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 11

## Ειδικές περιπτώσεις: Οι εξισώσεις Manning και Hazen-Williams

- Για σχετικά μεγάλες τιμές της τραχύτητας  $\epsilon$  μπορεί να θεωρηθεί:

$$\beta = 1/3, \quad \gamma = 0$$

ενώ από βελτιστοποίηση προκύπτει

$$N = n = 0.009 (1 + 0.3 \epsilon_*)^{1/6} \approx \epsilon^{1/6} / 26 \quad (\epsilon \text{ σε m}),$$

οπότε παίρνουμε την κλασική εξίσωση Manning

$$V = (1/n) (D/4)^{2/3} J^{1/2}$$

- Για σχετικά μικρές τιμές της τραχύτητας  $\epsilon$  μπορεί να θεωρηθεί:

$$\beta = 0.26, \quad \gamma = 0.08$$

ενώ από βελτιστοποίηση προκύπτει

$$N = 0.008 (1 + 0.22 \epsilon_*)^{1/6}$$

οπότε παίρνουμε τη γνωστή εμπειρική εξίσωση Hazen-Williams

$$V = 0.85 C (D/4)^{0.63} J^{0.54}, \quad \text{όπου } C = 1 / (0.85 N)$$

- **Σημείωση:** Σε καμιά περίπτωση δεν συστήνεται η χρήση της εξίσωσης Hazen-Williams λόγω μεγάλου σφάλματος. Η χρήση της κλασικής εξίσωσης Manning δεν συστήνεται για κλειστούς αγωγούς κυκλικής διατομής, είναι όμως η πιο κατάλληλη για ανοιχτούς αγωγούς (βλ. παρακάτω).

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 12

## Τιμές της τραχύτητας σχεδιασμού

- Δεδομένου ότι τα δίκτυα διανομής σχεδιάζονται με ορίζοντα 40 ετών, οι τιμές εφαρμογής των συντελεστών τραχύτητας πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τη γήρανση των αγωγών.
- Κατά κανόνα οι τιμές εφαρμογής λαμβάνονται προσαυξημένες (ισοδύναμη τραχύτητα) προκειμένου να συμπεριληφθούν και τοπικές απώλειες (βλ. επόμενη σελίδα).
- Η ελάχιστη αποδεκτή ισοδύναμη τραχύτητα, με την προϋπόθεση νερού που δεν προκαλεί διάβρωση ή επικαθήσεις αλάτων, λαμβάνεται  $\varepsilon = 0.1 \text{ mm}$  ( $\varepsilon_* = 2$ ).
- Στη συνήθη περίπτωση πλαστικών αγωγών, με την υπόθεση ότι αναμένονται φαινόμενα διάβρωσης ή επικαθήσεων αλάτων, συστήνεται  $\varepsilon = 1.0-2.0 \text{ mm}$  ( $\varepsilon_* = 20-40$ ).

**Ενδεικτικός πίνακας εργαστηριακών τιμών ισοδύναμης τραχύτητας τυπικών υλικών** (Δεν συστήνεται η χρήση τους σε μελέτες δικτύων)

Υλικό	$\varepsilon$ (mm)
Ορείχαλκος, χαλκός	0.0015
Χάλυβας εμπορίου ή σφυρήλατος σίδηρος	0.045
Χυτοσίδηρος με ασφαλική επάλειψη	0.12
Γαλβανισμένος σίδηρος	0.15
Χυτοσίδηρος χωρίς επάλειψη	0.26
Σκυρόδεμα	0.3 – 3.0
Πλαστικό (λείοι σωλήνες εργοστασίου)	< 0.01
Πλαστικό, μετά από χρήση	> 0.10

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 13

## Τοπικές απώλειες

- Πέραν των γραμμικών απωλειών, στα δίκτυα διανομής δημιουργούνται και τοπικές απώλειες, στις συνδέσεις των αγωγών και τις στροφές (τυπικές τοπικές απώλειες), καθώς και στις θέσεις των ειδικών συσκευών και διατάξεων (ειδικές τοπικές απώλειες).
- Οι τοπικές απώλειες οφείλονται κυρίως στην ανάπτυξη στροβίλων αποκόλλησης της ροής και εκφράζονται με όρους ύψους κινητικής ενέργειας, ήτοι:

$$h_L = K_T V^2 / 2g \quad \text{ή} \quad h_L = K_T \Delta(V^2) / 2g$$

όπου  $K_T$  συντελεστής που εξαρτάται από τη γεωμετρία της τοπικής μεταβολής διατομής και κατεύθυνσης και τα χαρακτηριστικά της ροής (αριθμός Reynolds).

- Για να ληφθούν υπόψη οι τυπικές τοπικές απώλειες χωρίς αναλυτικό υπολογισμό, προσ αυξάνονται οι τιμές της τραχύτητας  $\varepsilon$  (ισοδύναμη τραχύτητα).
- Ειδικά για τις δικλείδες, οι τοπικές απώλειες πρέπει να λαμβάνονται ξεχωριστά υπόψη, ιδίως όταν αυτές περιορίζουν σημαντικά τη ροή. Στην περίπτωση αυτή, ανάλογα και με το άνοιγμα της δικλείδας, ο συντελεστής  $K_T$  μπορεί να αποκτήσει πολύ υψηλές τιμές (π.χ. > 100-1000).

Η εκτίμηση της ισοδύναμης τραχύτητας αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους παράγοντες αβεβαιότητας κατά την προσομοίωση ενός δικτύου διανομής.

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 14

## Παράδειγμα 1: Διαστασιολόγηση αγωγού

- **Πρόβλημα:** Να διαστασιολογηθεί υδρευτικός αγωγός ώστε να μεταφέρει παροχή σχεδιασμού 100 L/s αν η διαθέσιμη κλίση ενέργειας είναι 0.5%.

- **Λύση:** Τα δεδομένα είναι  $Q = 100 \text{ L/s} = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $J = 0.5\% = 0.005$ . Έστω ότι θα χρησιμοποιήσουμε σωλήνες από πολυαιθυλένιο κλάσης (αντοχής) 1.25 MPa (12.5 atm). (Ο καθορισμός της κλάσης των σωλήνων προκύπτει από άλλους σχεδιαστικούς παράγοντες που δεν συζητούνται εδώ.)

Για ασφαλή σχεδιασμό υποθέτουμε τραχύτητα  $\varepsilon = 1 \text{ mm}$ , λόγω του ενδεχομένου επικαθήσεων. Η αδιαστατοποιημένη τραχύτητα είναι  $\varepsilon_* = \varepsilon / \varepsilon_0 = 1/0.05 = 20$ .

Θεωρώντας το σύνθηρες εύρος διαμέτρων και ταχυτήτων, οι συντελεστές της γενικευμένης εξίσωσης Manning είναι

$$\beta = 0.3 + 0.0005 \varepsilon_* + 0.02/(1 + 6.8 \varepsilon_*) = 0.3 + 0.0005 \times 20 + 0.02/(1 + 6.8 \times 20) = 0.310,$$

$$\gamma = 0.096/(1 + 0.31 \varepsilon_*) = 0.096/(1 + 0.31 \times 20) = 0.0133,$$

$$N = 0.00687 (1 + 1.6 \varepsilon_*)^{0.16} = 0.00687 (1 + 1.6 \times 20)^{0.16} = 0.0120$$

Κατά συνέπεια,

$$D = [4^{3+\beta} N^2 Q^2 / (\pi^2 J^{1+\gamma})]^{1/(5+\beta)} = [4^{3+0.310} \times 0.0120^2 \times 0.1^2 / (\pi^2 \times 0.005^{1+0.0133})]^{1/(5+0.310)} = 0.337 \text{ m}$$

Η ταχύτητα προκύπτει  $V = 4Q / \pi D^2 = 4 \times 0.1 / (\pi \times 0.337^2) = 1.12 \text{ m/s}$ . Παρατηρούμε ότι τόσο η διάμετρος, όσο και η ταχύτητα βρίσκονται μέσα στο σύνθηρες εύρος διαμέτρων και ταχυτήτων και κατά συνέπεια το μέγιστο υπολογιστικό σφάλμα δεν θα ξεπεράσει το 1%.

Τελικώς επιλέγουμε σωλήνα πολυαιθυλενίου του εμπορίου 1.25 MPa (12.5 atm) ονομαστικής διαμέτρου 400 mm με εσωτερική διάμετρο 341 mm > 337 mm.

*Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 15*

## Παράδειγμα 1: Διαστασιολόγηση αγωγού – διερεύνηση

- **Διερεύνηση 1:** Η ακριβής λύση, χρησιμοποιώντας τους τύπους Darcy-Weisbach και Colebrook-White βρίσκεται μετά από αρκετές δοκιμές που δεν παρουσιάζονται εδώ. Για σύγκριση παρουσιάζονται μόνο τα τελικά αποτελέσματα:

Διάμετρος  $D = 0.337 \text{ m}$  (η απόκλιση από την προσεγγιστική λύση που υπολογίστηκε πιο πάνω είναι στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο) και  $\varepsilon/D = 0.0030$ ,  $V = 1.12$ ,  $Re = 3.43 \times 10^5$  (για  $\nu = 1.1 \times 10^6$ ),  $f = 0.0265$ .

- **Διερεύνηση 2:** Αν δεν αναμέναμε επικαθήσεις στο σωλήνα, θα μπορούσαμε να δεχτούμε τραχύτητα  $\varepsilon = 0.1 \text{ mm}$ , οπότε  $\varepsilon_* = \varepsilon / \varepsilon_0 = 0.1/0.05 = 2$  και

$$\beta = 0.3 + 0.0005 \varepsilon_* + 0.02/(1 + 6.8 \varepsilon_*) = 0.3 + 0.0005 \times 2 + 0.02/(1 + 6.8 \times 2) = 0.302,$$

$$\gamma = 0.096/(1 + 0.31 \varepsilon_*) = 0.096/(1 + 0.31 \times 2) = 0.059,$$

$$N = 0.00687 (1 + 1.6 \varepsilon_*)^{0.16} = 0.00687 (1 + 1.6 \times 2)^{0.16} = 0.0086$$

Κατά συνέπεια,

$$D = [4^{3+\beta} N^2 Q^2 / (\pi^2 J^{1+\gamma})]^{1/(5+\beta)} = [4^{3+0.302} \times 0.0086^2 \times 0.1^2 / (\pi^2 \times 0.005^{1+0.059})]^{1/(5+0.302)} = 0.310 \text{ m},$$

δηλαδή, θα προέκυπτε μείωση της διαμέτρου κατά 9% (οι τύποι Darcy-Weisbach και Colebrook-White δίνουν  $D = 0.308 \text{ m}$  – διαφορά < 1%).

*Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 16*



## Παράδειγμα 2: Υπολογισμός γραμμικών απωλειών

- **Πρόβλημα:** Στο προηγούμενο παράδειγμα, ποιοί πρέπει να είναι οι χειρισμοί στην αρχή της περιόδου λειτουργίας για να μεταφερθεί παροχή 60 L/s αν το μήκος του υδραγωγείου είναι 10 km;
- **Λύση:** Τα δεδομένα είναι  $Q = 60 \text{ L/s} = 0.06 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $L = 10 \text{ km}$ ,  $D = 341 \text{ mm}$  (από την επίλυση του προηγούμενου προβλήματος) ενώ η γεωμετρική κλίση είναι  $J = 0.5\% = 0.005$ , πράγμα που σημαίνει ότι διατίθεται γεωμετρικό ύψος  $H = 0.005 \times 10\,000 = 50 \text{ m}$ . Εφόσον το πρόβλημα αναφέρεται στην αρχή της περιόδου λειτουργίας του υδραγωγείου, θα δεχτούμε ισοδυναμη τραχύτητα  $\varepsilon = 0.1 \text{ mm}$ .  
Όπως υπολογίσαμε προηγουμένως, για  $\varepsilon = 0.1 \text{ mm}$  οι παράμετροι της γενικευμένης εξίσωσης Manning είναι  $\beta = 0.302$ ,  $\gamma = 0.059$ ,  $N = 0.0086$ . Κατά συνέπεια η κλίση ενέργειας είναι:  
$$J = [4^{3+\beta} N^2 Q^2 / (\pi^2 D^{5+\beta})]^{1/(1+\gamma)} = [4^{3+0.302} \times 0.0086^2 \times 0.06^2 / (\pi^2 \times 0.341^{5+0.302})]^{1/(1+0.059)} = 0.00117$$
  
Οι γραμμικές απώλειες είναι  $h_f = J L = 0.00117 \times 10\,000 = 11.73 \text{ m}$ .  
Κατά συνέπεια, υπάρχει ένα πλεόνασμα ενέργειας  $50.0 - 11.73 = 38.27 \text{ m}$  που πρέπει να «σπάσει», δηλαδή να διατεθεί σε τοπικές απώλειες. Χρησιμοποιούμε για το σκοπό αυτό δικλείδα σε κατάλληλο άνοιγμα, ώστε  $h_t = 38.27 \text{ m}$ .  
Η ταχύτητα που προκύπτει είναι  $V = 4Q / \pi D^2 = 4 \times 0.06 / (\pi \times 0.341^2) = 0.657 \text{ m/s}$ .  
Οι τοπικές απώλειες για τη δικλείδα είναι  $h_t = K_\delta V^2 / 2g$ . Κατά συνέπεια ο συντελεστής τοπικών απωλειών είναι  
$$K_\delta = 2g h_t / V^2 = 2 \times 9.81 \times 38.27 / 0.657^2 = 1740.$$
- **Σημείωση:** Η ακριβής λύση με τους τύπους Darcy-Weisbach και Colebrook-White είναι  $J = 0.00114$ , δηλαδή το σχετικό σφάλμα είναι  $(0.00117 - 0.00114) / 0.00114 = 3\%$ .

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 17

## Ενεργειακές απώλειες σε ανοιχτούς αγωγούς

- Αν και η εξίσωση γραμμικών ενεργειακών απωλειών στη βάση της δεν εξαρτάται από το αν ο αγωγός είναι ανοιχτός ή κλειστός (δηλαδή, αν η ροή είναι υπό πίεση ή με ελεύθερη επιφάνεια), υπάρχουν ορισμένες πρακτικές διαφορές.
- Συγκεκριμένα στους ανοιχτούς αγωγούς (σε αντίθεση με τους κλειστούς κυλινδρικούς σωλήνες):
  - η γεωμετρία της ροής δεν έχει την τέλεια συμμετρία ενός κύκλου,
  - αντίθετα, η γεωμετρία της ροής μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκη, ακόμη και σε κυλινδρικό αγωγό (η υγρή διατομή είναι κυκλικός τομέας και όχι κύκλος), και
  - η τραχύτητα είναι κατά κανόνα μεγαλύτερη (π.χ. σε κανάλια από σκυρόδεμα)
- Με αυτές τις συνθήκες, δεν έχει νόημα (ούτε θα προσέφερε μεγαλύτερη ακρίβεια) η χρήση των πολύπλοκων τύπων Darcy-Weisbach-Colebrook-White.
- Εξ άλλου, όπως συζητήθηκε παραπάνω, για μεγάλες τραχύτητες ο γενικευμένος τύπος Manning πρακτικώς μεταπίπτει στον κλασικό τύπο του Manning.
- Τέλος, η συσσωρευμένη εμπειρία επιτυχούς εφαρμογής του τύπου του Manning και η εκτεταμένη πινακοποίηση τιμών του συντελεστή  $n$  για ποικιλία συνθηκών, ουσιαστικά τον καθιστά την μοναδική αξιόπιστη επιλογή.

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 18

## Συμπεράσματα

### Ροή υπό πίεση σε κυλινδρικούς σωλήνες

- Για απλούστευση των υπολογισμών χωρίς ουσιαστικό σφάλμα μπορεί να χρησιμοποιείται ο γενικευμένος τύπος Manning αντί των πολύπλοκων τύπων Darcy-Weisbach και Colebrook-White – Η αβεβαιότητα στην εκτίμηση της τραχύτητας οδηγεί σε σφάλμα πολύ μεγαλύτερο από το υπολογιστικό.
- Για τις πιο τυπικές τιμές της τραχύτητας και για σύνηθες εύρος διαμέτρων και ταχυτήτων σε υδρευτικά έργα ( $0.1 \text{ m} \leq D \leq 1 \text{ m}$ ,  $0.2 \text{ m/s} \leq V \leq 2 \text{ m/s}$ ) οι βέλτιστες παράμετροι είναι οι εξής (το  $N$  στο SI για  $m, s$ ):
  - για  $\varepsilon = 0.1 \text{ mm}$ :  $\beta = 0.302$ ,  $\gamma = 0.059$ ,  $N = 0.0086$ , και
  - για  $\varepsilon = 1 \text{ mm}$ :  $\beta = 0.31$ ,  $\gamma = 0.0133$ ,  $N = 0.012$ .

### Ροή με ελεύθερη επιφάνεια

- Ο κλασικός τύπος του Manning αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή.
- Ο τύπος αυτός προκύπτει και ως ειδική περίπτωση του γενικευμένου τύπου Manning για  $\beta = 1/3$ ,  $\gamma = 0$ ,  $n = N$ .
- Κατά κανόνα στη χρήση του τύπου του Manning η βιβλιογραφία δίνει απευθείας τιμές για το συντελεστή τριβής  $n$ . Αν όμως είναι δεδομένη η τραχύτητα  $\varepsilon$ , τότε ο συντελεστής  $n$  μπορεί να εκτιμηθεί από τη σχέση:  
$$N = n = 0.009 (1 + 0.3 \varepsilon_*)^{1/6} \approx \varepsilon^{1/6} / 26 \quad (\varepsilon \text{ σε m}).$$

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 19

## Παράρτημα 1: Εσωτερικές διαμέτροι αγωγών από πολυαιθύλιο (HDPE)

Ονομαστική διάμετρος (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)					
	10 atm	12.5 atm	16 atm	20 atm	25 atm	32 atm
63	55.4	53.6	51.4	48.8	45.8	42.0
75	66.0	63.8	61.4	58.2	54.4	50.0
90	79.2	76.6	73.6	69.8	65.4	60.0
110	96.8	93.8	90.0	85.4	79.8	73.4
125	110.2	106.6	102.2	97.0	90.8	83.4
140	123.4	119.4	114.6	108.6	101.6	93.4
160	141.0	136.4	130.8	124.2	116.2	106.8
180	158.6	153.4	147.2	139.8	130.8	120.2
200	176.2	170.6	163.6	155.2	145.2	133.6
225	198.2	191.8	184.0	174.6	163.4	150.2
250	220.4	213.2	204.6	194.2	181.6	167.0
280	246.8	238.8	229.2	217.4	203.4	187.0
315	277.6	268.6	257.8	244.6	228.8	210.4
355	312.8	302.8	290.6	275.6	258.0	
400	352.6	341.2	327.4	310.6	290.6	
450	396.6	383.8	368.2	349.4	327.0	
500	440.6	426.4	409.2	388.4		
560	493.6	477.6	458.4			
630	555.2	537.4	515.6			

Δ. Κουτσογιάννης & Α. Ευστρατιάδης, Αρχές υδραυλικής στα αστικά υδραυλικά έργα 20

## Παράρτημα 2: Εσωτερικές διαμέτρους αγωγών από πολυβινυλοχλωρίδιο (PVC)

Ονομαστική διάμετρος (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)		
	10 atm	12.5 atm	16 atm
63	57.0		53.6
75	67.8		63.8
90	81.4	79.0	76.6
110	99.4	97.0	93.6
125	113.0	110.2	106.4
140	126.6	123.6	119.2
160	144.6	141.2	136.2
200	180.8	176.4	170.2
225	203.4	198.6	191.6
250	226.2	220.6	212.8
280	253.2	247.0	238.4
315	285.0	278.0	268.2
355	321.2	313.2	
400	361.8	353.2	340.6
450	407.0	397.0	
500	452.2	441.2	

### Λοιποί σωλήνες ύδρευσης:

- Στους σωλήνες από χάλυβα και αμιαντοσιμέντο η ονομαστική διάμετρος ταυτίζεται με την εσωτερική.
- Σωλήνες από χάλυβα διατίθενται σε διαμέτρους 100-2000 mm με διαβαθμίσεις ανά 50 mm μέχρι τη διάμετρο των 400 mm και ανά 100 mm για τις μεγαλύτερες.
- Σωλήνες από αμιαντοσιμέντο διατίθενται σε διαμέτρους 100-1000 mm με διαβαθμίσεις ανά 50 mm μέχρι τη διάμετρο των 500 mm και ανά 100 mm για τις μεγαλύτερες.