



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος

Στοχαστική προσομοίωση της χωρικής δομής της βροχής



Διπλωματική εργασία

Αθανάσιος Πασχάλης

Επιβλέπων καθηγητής: Δημήτρης Κουτσογιάννης

Αθήνα, Ιούλιος 2009

Coincidences, in general, are great stumbling blocks in the way of that class of thinkers who have been educated to know nothing of the theory of probabilities-that theory to which the most glorious objects of human research are indebted for the most glorious of illustrations.

Edgar Allan Poe

"The Murders in the Rue Morgue"

Η εικόνα του εξώφυλλου είναι το έργο "Βροχή στην Auvers" του Vincent Van Gogh

Ευχαριστίες

Φτάνοντας στο τέλος της εργασίας αυτής θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην συγγραφή της.

Θα θελα να ευχαριστήσω τον φίλο Σίμωνα Παπαλεξίου για την βοήθεια που μου παρείχε στο να καταφέρω να φέρω εις πέρας την εργασία αυτή η οποία χωρίς τις θεωρητικές αλλά και τεχνικές του γνώσεις δεν θα μπορούσε να επιτευχτεί.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τον Αντρέα Λαγγούση τον Γιάννη Μαρκόνη και τον Αντώνη Κουκουβίνο οι οποίοι με βοήθησαν σ' ένα αρκετά δύσκολο τμήμα της εργασίας, την εύρεση κατάλληλων δεδομένων προς επεξεργασία. Ακόμη θέλω να ζητήσω συγγνώμη από τον Αντρέα Ευστρατιάδη για τις ατελείωτες φορές που χρειάστηκε να διακόψω την συνεργασία του με τον Δημήτρη Κουτσογιάννη προκειμένου να λύσω απορίες μου κατά την εξέλιξη της συγγραφής της εργασίας αυτής.

Και φυσικά πάνω απ' όλους θέλω να ευχαριστήσω τον δάσκαλο Δημήτρη Κουτσογιάννη για την βοήθεια που μου παρείχε σε όλη την διάρκεια της εργασίας αυτής, για τις πολλές ώρες που δαπάνησε παρά το βαρύ του πρόγραμμα για μου λύσει τις απορίες όσο βλακώδεις κι αν ήταν αυτές, για την μεγάλη πόρτα που μου άνοιξε στη συνέχεια των σπουδών μου και πιο πολύ απ' όλα γιατί κατάφερε να ανοίξει καινούργιους ορίζοντες στο περιεχόμενο των σπουδών μας προσφέροντας νέα ενδιαφέροντα και ανοίγοντας ένα νέο δρόμο σκέψης και αμφισβήτησης.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	i
Περιεχόμενα	ii
Περίληψη-Abstract	iii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Αντικείμενο της εργασίας	1
1.3 Σημεία ιδιαίτερου ενδιαφέροντος	2
1.4 Διάρθρωση της εργασίας	2
2 Θεμελιώδεις έννοιες - Ορισμοί	4
2.1 Ιστορική επισκόπηση κλάδου στοχαστικής υδρολογίας	4
2.2 Φαινόμενο Hurst	5
2.3 Ορισμοί	7
2.4 Στοχαστική ανάλυση FGN	17
3 Επεξεργασία δεδομένων	19
3.1 Εκτίμηση μέσω κλασσικής στατιστικής	19
3.2 Τυπικές στατιστικές εκτιμήτριες	19
3.3 Στατιστικές εκτιμήτριες και προβλήματα	21
3.3.1 Εκτίμηση σε συσχετιζόμενες τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε μία διάσταση	21
3.3.2 Εκτίμηση σε αυτοσυσχετιζόμενο πεδίο	27
3.4 Ημιμεταβλητόγραμμα	30
3.5 Κανονικοποίηση αρχικών δεδομένων	32
4 Περιγραφή στοχαστικού μοντέλου	35
4.1 Περί μοντέλων και αναπαραγωγής φαινομένου Hurst	35
4.2 Μοντέλο συμμετρικού κυλιόμενου μέσου όρου (SMA) σε μεταβλητές ορισμένες σε μία διάσταση	35
4.3 Μοντέλο συμμετρικού κυλιόμενου μέσου όρου (SMA) σε μεταβλητές ορισμένες στις δύο διαστάσεις	40
4.3.1 Μοντέλο	40
4.3.2 Εκτίμηση παραμέτρων	56
5 Εφαρμογή μοντέλου	58
5.1 Δεδομένα	58
5.2 Παραγωγή συνθετικών πεδίων	60
5.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων	62
5.3.1 Δείγμα από δορυφορικές μετρήσεις	62
5.3.2 Δείγμα από μετρήσεις radar	78
6 Συμπεράσματα	92
6.1 Συμπεράσματα από την εφαρμογή του μοντέλου	92
6.2 Προβληματισμοί σχετικά με την εργασία	93
Βιβλιογραφικές αναφορές	95
Παράρτημα Α	100
Παράρτημα Β	103
Παράρτημα Γ	105

Περίληψη

Κατά την εκτίμηση του κινδύνου από πλημμυρικά γεγονότα εγείρεται η ανάγκη διερεύνησης της χωρικής μορφής της βροχής που είναι το γενεσιουργό αίτιο των πλημμυρών. Καθώς η εκτίμηση του κινδύνου αυτού μπορεί να γίνει με στοχαστικές μεθόδους (Monte Carlo) γεννιέται η ανάγκη δημιουργίας συνεπών στοχαστικών μοντέλων που να αναπαράγουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά από καταγεγραμμένα δεδομένα.

Από καταγραφές, φαίνεται ότι η χωρική κατανομή της βροχόπτωσης κατά τη διάρκεια ενός επεισοδίου βροχής παρουσιάζει συμπεριφορά ομοιοθεσίας (scaling) ή εξάρτηση μακράς κλίμακας ή, ευρύτερα γνωστή και με τον όρο φαινόμενο Hurst.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η κατάρτιση ενός συνεπούς στοχαστικού μοντέλου το οποίο να μπορεί να αναπαράγει σε ικανοποιητικό βαθμό την συμπεριφορά αυτή όπως καταγράφεται από μετρήσεις πεδίου. Πιο συγκεκριμένα στην διπλωματική αυτή εργασία γίνεται προσπάθεια επέκτασης του υπάρχοντος στοχαστικού μοντέλου SMA (symmetric moving average) από την μία στις δύο διαστάσεις και της χρήσης του στην παραγωγή συνθετικών πεδίων βροχής.

Abstract

When estimating the risk of a flood event, the need to study the spatial structure of a precipitation event arises. As far as this study can be done based on stochastic simulations, the need to construct stochastic models consistent with observed data arises.

As observed from precipitation data, it seems that the spatial distribution of the rain has a scaling behaviour or long scale dependence, a behaviour also known as the Hurst phenomenon.

This thesis aims to construct a stochastic model that can reproduce satisfactorily the behaviour as observed in Nature from field measurements. Specifically, in this thesis an effort is done to expand the stochastic model SMA (Symmetric Moving Average) from one dimension to two dimensions and use it for generation of synthetic rainfall fields.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, λόγω της ραγδαίας ανάπτυξης των ηλεκτρονικών υπολογιστών και αντίστοιχα των υπολογιστικών δυνατοτήτων τους, υπάρχει μεγάλη ανάπτυξη της μελέτης φαινομένων μέσω της πιθανοτικής προσέγγισης των στοχαστικών ανελίξεων. Στην υδρολογία η εφαρμογή της θεωρίας των στοχαστικών ανελίξεων έχει βρει ευρεία χρήση στην προσπάθεια προσομοίωσης καταγεγραμμένων χρονοσειρών υδρολογικών διεργασιών όπως παραδείγματος χάριν απορροών και βροχοπτώσεων.

Ωστόσο, η θεωρήσεις αυτές δεν έχουν επεκταθεί επαρκώς σε περισσότερες τις μίας διάστασης, όπου συνήθως αυτή είναι ο χρόνος.

Κατά την μελέτη επικινδυνότητας πλημμυρικών επεισοδίων, είναι γνωστό από την κλασική υδρολογία ότι η δομή της βροχόπτωσης στον χώρο όπως σε κάποια λεκάνη απορροής παραδείγματος χάριν επηρεάζει άμεσα την απορροή από την λεκάνη αυτή (Wheater et al., 2000). Είναι προφανές ότι η επιρροή αυτή μπορεί να αποτελέσει κρίσιμο παράγοντα κατά την εκτίμηση πλημμυρικών παροχών κατά την κατασκευή αντιπλημμυρικών έργων ή έργων ασφαλείας όπως υπερχειλιστές φραγμάτων.

Κρίνεται λοιπόν σκόπιμο στην προσπάθεια μελέτης Monte Carlo της χωρικής δομής της βροχόπτωσης, να καταρτισθούν συνεπή στοχαστικά μοντέλα με την καταγεγραμμένη πραγματική φυσική συμπεριφορά στον χώρο και χρόνο.

Στην εργασία αυτή επιχειρείται το πρώτο απ' αυτά τα βήματα, δηλαδή μελέτη στις δύο διαστάσεις.

1.2 Αντικείμενο της εργασίας

Αντικείμενο της εργασίας αυτής αποτελεί η προσπάθεια διερεύνησης και προσομοίωσης της χωρικής δομής επεισοδίων βροχόπτωσης. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται προσπάθεια διερεύνησης της επιρροής του φαινομένου της εμμονής μακράς κλίμακας, γνωστού και ως φαινόμενο Hurst, αναφερόμενο στην περίπτωση αυτή ως εμμονή στην διάσταση του χώρου, σε καταγραφές από πεδία βροχόπτωσης και επιχειρείται η ανάπτυξη στοχαστικού μοντέλου δυο διαστάσεων το οποίο να μπορεί να αναπαράγει συνεπώς την συμπεριφορά αυτή. Αυτό θα επιχειρηθεί μέσω μιας επέκτασης ήδη υπάρχοντος μονοδιάστατου μοντέλου το οποίο μπορεί να αναπαραγάγει το φαινόμενο της εμμονής από την μια διάσταση, τον χρόνο, στις δύο. Επειδή βιβλιογραφικά το θέμα αυτό δεν έχει μελετηθεί επαρκώς, και λόγω της υπολογιστικής του δυσκολίας, θα γίνουν αναλύσεις όπου βασίζονται σε απλοποιητικές παραδοχές. Η εργασία αυτή έχει επίσης ως στόχο την διερεύνηση και χρήση κατάλληλης θεωρίας στατιστικής και πιθανοτήτων η οποία να είναι σύμφωνη με την παρατηρούμενη

φυσική συμπεριφορά και σε πολλές περιπτώσεις δεν καλύπτεται με τις θεωρήσεις της κλασικής στατιστικής.

1.3 Σημεία ιδιαίτερου ενδιαφέροντος

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστεί θεωρητική ανάλυση και τεκμηρίωση του στοχαστικού μοντέλου των δύο διαστάσεων το οποίο θα έχει την ικανότητα να διατηρεί το φαινόμενο της χωρικής εμμονής. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στο γεγονός ότι η λύση του μοντέλου δεν παρέχει απλά προσεγγιστικά αποτελέσματα όπως συμβαίνει με πολλά υπάρχοντα μοντέλα, αλλά έχει αναλυτική λύση πράγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το μοντέλο που θα παρουσιαστεί στην εργασία αυτή είναι, παρά τις ίσως απλοποιητικές παραδοχές του, πλήρως θεωρητικά τεκμηριωμένο γεγονός που καταδεικνύει την επιδιωκόμενη ευρεία χρήση του κατά την προσομοίωση δισδιάστατων τυχαίων πεδίων.

Επίσης, στην εργασία αυτή θα γίνει προσπάθεια να υπάρχει θεωρητική συνέπεια με την μαθηματική θεώρηση των πραγμάτων. Αυτό όπως θα διατυπωθεί εκτενέστερα παρακάτω οδηγεί στο γεγονός ότι η χρήση της κλασικής θεωρίας πιθανοτήτων και στατιστικής δεν είναι πάντα δόκιμη στην ανάλυση δεδομένων φυσικών διεργασιών. Οπότε καταλήγουμε και στο συμπέρασμα ότι η ευρεία χρήση των εκτιμητριών της κλασικής στατιστικής δεν είναι πανάκεια και μπορεί πολλές φορές να οδηγήσει σε μεγάλη υποεκτίμηση της αβεβαιότητας, γεγονός που σε περίπτωση εφαρμογής σε τεχνικά έργα μπορεί να οδηγήσει στη υποεκτίμηση του κινδύνου σχεδιασμού.

1.4 Διάρθρωση της εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελείται από έξι κεφάλαια και τρία παραρτήματα.

Μετά το παρόν πρώτο εισαγωγικό κεφάλαιο, ακολουθεί το δεύτερο κεφάλαιο στο οποίο γίνεται μια μικρή "ιστορική" επισκόπηση στην εφαρμογή των πιθανοτικών προσεγγίσεων στο κλάδο των φυσικών επιστημών, αναλύεται τα φαινόμενο Hurst και δίνονται επίσης οι θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων καθώς και των μετασχηματισμών Fourier που θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση της εργασίας. Τέλος δίνεται ο ορισμός και η ανάλυση της ανέλιξης απλής ομοιοθεσίας.

Το τρίτο κεφάλαιο ασχολείται με την στατιστική επεξεργασία των δεδομένων. Στο κεφάλαιο περιγράφονται οι προσεγγίσεις των εκτιμήσεων των στατιστικών χαρακτηριστικών μέσω της κλασικής στατιστικής, τα προβλήματα που δημιουργούνται, καθώς επίσης περιγράφεται και μία μεθοδολογία μετασχηματισμού δεδομένων έτσι ώστε να ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται δύο στοχαστικά μοντέλα. Το μοντέλο SMA ορισμένο σε μία διάσταση καθώς και η επέκτασή του στις δυο διαστάσεις όπως επιχειρείται στην εργασία αυτή.

Το πέμπτο κεφάλαιο, αποτελεί την εφαρμογή του μοντέλου που αναλύθηκε στην επιφανειακή κατανομή δύο καταγεγραμμένων επεισοδίων βροχής.

Στο έκτο κεφάλαιο συνοψίζονται τα συμπεράσματα που βγήκαν από την εφαρμογή του μοντέλου αυτού.

Τα παραρτήματα τέλος είναι μια προσπάθεια να φανεί ότι η επίδραση του φαινομένου της μακράς χωρικής εμμονής είναι ευρύτερη στις γεωφυσικές διεργασίες και γι αυτό τον λόγο αναλύονται καταγραφές τριών πεδίων, δύο από τα οποία είναι κλιματικά και ένα υψομετρικής απεικόνισης γεωγραφικού ανάγλυφου.

Κεφάλαιο 2

2.1 Ιστορική επισκόπηση του κλάδου της στοχαστικής υδρολογίας

Ως την αρχή του 20^{ου} αιώνα η κύρια έως και μοναδική θεώρηση κατά την προσπάθεια ερμηνείας και ανάλυσης των φυσικών διεργασιών ευρύτερα ήταν η ντετερμινιστική θεώρηση των πραγμάτων. Η φιλοσοφική θεώρηση του ντετερμινισμού έχει τις ρίζες της στον Γάλλο φιλόσοφο και επιστήμονα Rene Descartes (1596-1650) και τελειοποιήθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό και αστρονόμο Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Η έννοια αυτή μπορεί να εκφραστεί περιγραφικά μέσω της μεταφοράς του “δαίμονα του Laplace”, μιας υποθετικής οντότητας η οποία γνωρίζει την ακριβή θέση και ορμή όλων των ατόμων στο σύμπαν στο παρόν και μπορεί χρησιμοποιώντας του νόμους του Νεύτωνα να αποκαλύψει το σύνολο των κοσμικών γεγονότων στο παρελθόν και στο μέλλον. (Ωστόσο ο ίδιος ο Νεύτωνας απέρριπτε αυτόν τον τρόπο σκέψης αντιλαμβανόμενος την “ευθραυστότητα” του σύμπαντος και πιστεύοντας ότι ο Θεός πρέπει να κάνει συνεχείς παρεμβάσεις για να διορθώνει το ανερχόμενο χάος). Από την θεώρηση αυτή καταλαβαίνουμε ότι η έννοια της αβεβαιότητας συνίσταται στο ότι δεν μπορούμε να έχουμε πλήρη και ακριβή εικόνα του παρόντος προκειμένου να βγουν βέβαια συμπεράσματα για το παρελθόν και το μέλλον. Δηλαδή, σε περίπτωση όπου μπορούμε να έχουμε πλήρη και ακριβή εικόνα του παρόντος, κάθε αβεβαιότητα μπορεί να εξαλειφθεί (Koutsoyiannis, 2009).

Παρόλα αυτά, σε αντίθεση με την παραπάνω φιλοσοφική θεώρηση, έρχεται η θεώρηση της απροσδιοριστίας σύμφωνα με την οποία η αβεβαιότητα είναι εγγενής ιδιότητα της φύσης. Η φιλοσοφική αυτή προσέγγιση της φύσης έχει την απαρχή της στις ιδέες του Έλληνα φιλοσόφου Ηράκλειτου (535-475 π.Χ.) και του Επίκουρου (341-270 π.Χ.). Στην επιστήμη, η απροσδιοριστία βασίζεται στη έννοια της πιθανότητας η οποία σύμφωνα με τον Αυστρο-Βρετανό φιλόσοφο Karl Popper (1902-1994) είναι επέκταση της ιδέας του Αριστοτέλη περί “δυνατού”. Στην μελέτη φυσικών δυναμικών συστημάτων, πρώτη φορά εισήχθη η έννοια του χάους ή όπως συνηθίζεται ντετερμινιστικού χάους από τον Henry Poincaré (1854-1912) στην προσπάθεια του για την επίλυση του προβλήματος των τριών σωμάτων. Για την ακρίβεια, μετά από μια λανθασμένη προσπάθεια, ο Henry Poincaré κατέληξε στο συμπέρασμα ότι απειροελάχιστες αλλαγές στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, μπορεί να οδηγήσουν σε απρόβλεπτες συμπεριφορές του συστήματος και για τον λόγο αυτό η αβεβαιότητα περιγραφής της απόκρισης του συστήματος γίνεται μεγάλη (Poincare, 1887).

Παρόλα αυτά, η μελέτη μη γραμμικών χαοτικών συστημάτων δεν βρήκε απήχηση με εξαιρέσεις κάποιους κορυφαίους Ρώσους μαθηματικούς (Lyapunov, Kolmogorov, Andronov) έως την ανάπτυξη της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών που έδωσε την δυνατότητα στην αριθμητική εφαρμογή των χαοτικών συστημάτων. Η χρήση τους υιοθετήθηκε από κλάδους της επιστήμης όπως μετεωρολογία, κβαντική φυσική αλλά δυστυχώς ο κλάδος της υδρολογίας δεν έκανε αρχικά αποδεκτή αυτήν την προσέγγιση με το σκεπτικό ότι τα υδρολογικά φαινόμενα είναι απλά και μπορούν να προσεγγιστούν ντετερμινιστικά (koutsoyiannis, 2009).

Η πρώτη εκτεταμένη προσπάθεια προσομοίωσης φυσικών συστημάτων σύμφωνα με την θεώρηση της απροσδιοριστίας ήρθε μετά την διατύπωση από τον Heisenberg της αρχής της απροσδιοριστίας και αφορούσε τον κλάδο της κβαντικής φυσικής. Η μεγάλη ανάπτυξη επιτεύχθηκε ύστερα από την ανάπτυξη της μεθόδου Monte Carlo από τον Stanislaw Ulam το 1946, και η πρώτη εφαρμογή έγινε για τον υπολογισμό αριθμητικά ολοκληρωμάτων κατά την μελέτη του φαινομένου της διαχύσεως νετρονίων στο ερευνητικό κέντρο του Los Alamos από τους μαθηματικούς και φυσικούς (John von Neumann, Nicholas Metropolis, Enrico Fermi) (Λαγγούσης, 2003).

Στον τομέα των υδατικών πόρων η πρώτη προσπάθεια είχε γίνει από τον Hazen (1914) ο οποίος θέλοντας να παράγει συνθετικές χρονοσειρές απορροών, χρησιμοποίησε μια εμπειρική μέθοδο βάσει της οποίας οι συνθετικές χρονοσειρές αποτελούσαν προϊόν ιστορικών χρονοσειρών διαφορετικών ποταμών που είχαν συνδυαστεί μεταξύ τους μετά από κατάλληλη προσαρμογή (Grygier & Stedinger, 1990).

Ωστόσο όπως προαναφέρθηκε η μέθοδος Monte Carlo στην υδρολογία δεν είχε απήχηση έως το 1954 όπου έγινε το πρώτο καθοριστικό βήμα απ τον Barnes, ο οποίος επιχείρησε την παραγωγή ετήσιων ασυσχέτιστων δεδομένων για μια θέση ενδιαφέροντος που ακολουθούν την κανονική κατανομή. Εν συνεχεία ακολουθούν οι μελέτες των Maass *et al.*(1962) και Thomas & Fiering (1962) οι οποίοι επιχειρούν την παραγωγή συσχετισμένων ασύμμετρων συνθετικών χρονοσειρών. Ύστερα η μελέτη συνεχίστηκε από τις προσπάθειες των Beard (1965) και Matalas (1967) για την παραγωγή συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών για περισσότερες από μία θέσεις. Τέλος με την πάροδο των χρόνων η μελέτη πάνω στη συμπεριφορά και ανάλυση υδρολογικών δεδομένων με βάση τις θεωρήσεις των στοχαστικών ανελιξων φαίνεται στα κλασικά πλέον βιβλία, Time Series Analysis, Forecasting and Control (Box & Jenkins, 1970), Systems Approach to Water Management (Matalas et al., 1976), Random Functions and Hydrology (Bras et al., 1985).

2.2 Φαινόμενο Hurst

Το 1950 ο βρετανός μηχανικός Harold Edwin Hurst, στα πλαίσια της μελέτης του φράγματος του Ασουάν, μελετώντας τις καταγεγραμμένες χρονοσειρές στάθμης του Νείλου από τις καταγραφές του Νειλόμετρου στο νησί Roda στο Κάιρο (τη μεγαλύτερη καταγεγραμμένη υδρολογική χρονοσειρά), άρα κατ' επέκταση και χρονοσειρές απορροών, παρατήρησε ότι τα έτη με μεγάλη απορροή τείνουν να ομαδοποιούνται όπως επίσης και τα έτη μειωμένων παροχών. Περιέγραψε της φυσική συμπεριφορά που παρατήρησε ως εξής: "Αν και σε τυχαία γεγονότα ομάδες υψηλών και χαμηλών τιμών συμβαίνουν, η τάση τους να εμφανίζονται σε φυσικά γεγονότα είναι μεγαλύτερη. Αυτή είναι η κύρια διαφορά μεταξύ φυσικών και τυχαίων γεγονότων"(Hurst, 1950). Πιο συγκεκριμένα ο Hurst μελέτησε το φαινόμενο αυτό σε επίπεδο εύρους καθώς μελετούσε την απαιτούμενη αποθηκευτικότητα του φράγματος του Ασουάν. Προς τιμή του Άγγλου μηχανικού το φαινόμενο αυτό ονομάστηκε και φαινόμενο Hurst. Παρόλο που το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε το 1950 σε γεωφυσικές πραγματικές χρονοσειρές η μαθηματική του περιγραφή είχε γίνει δέκα χρόνια νωρίτερα από τον Ρώσο μαθηματικό Andrey Nikolaevich Kolmogorov και γι' αυτό

είναι πιο δόκιμη η αναφορά στο φαινόμενο αυτό ως "δυναμική Hurst-Kolmogorov". Το φαινόμενο αυτό ωστόσο συναντάται στην βιβλιογραφία και ως "φαινόμενο Ιωσήφ" όνομα που του αποδόθηκε από τον Benoit Mandelbrot, εμπνευσμένο από την παλαιά διαθήκη και τον μύθο που αναφέρει τις επτά ισχνές και επτά παχιές αγελάδες που επισκέφθηκαν τον Φαραώ στον ύπνο του. Εναλλακτικές ονομασίες του φαινομένου αυτού είναι επίσης: "φαινόμενο μακράς μνήμης", "εξάρτησης μεγάλου εύρους", "εμμονή μακράς διάρκειας", "συμπεριφορά απλής ομοιοθεσίας", "διακύμανση πολλαπλών κλιμάκων", "κλασματική κίνηση Brown".(Koutsoyiannis, 2006)

Ωστόσο η συμπεριφορά αυτή είναι ευρύτερη στις γεωφυσικές και όχι μόνον διεργασίες και δεν απαντάται κατ αποκλειστικότητα σε υδρολογικές χρονοσειρές. Έχει παρατηρηθεί επίσης στην ένταση πνοής ανέμων (Haslett and Raftery, 1989) Μέσες σημειακές και παγκόσμιες θερμοκρασίες (Bloomfield, 1992; Koutsoyiannis, 2003a, b) Απορροής σε διάφορους ποταμούς όπως πχ. Νείλος (Eltahan, 1996; Koutsoyiannis, 2002), Βάρτα, Πολωνία (Radziejewski and Kundzewicz, 1997), Βιοτικός Κηφισός, Ελλάδα (Koutsoyiannis, 2003a), και Νεμούνας, Λιθουανία (Sakalauskiene, 2003) Εισροές στη λίμνη Maggiore, Ιταλία (Montanari et al., 1997) Φαινόμενο ταλάντωσης Βορείου Ατλαντικού (Stephenson et al., 2000); Και πάχος δακτυλίων δέντρων που είναι άμεσα συναφές με την αλλαγή του κλίματος (Koutsoyiannis, 2002). Επιπλέον η μελέτη του φαινομένου Hurst έχει άμεσα συνδεθεί με την μελέτη των "κλιματικών αλλαγών" (e.g. Evans, 1996; Koutsoyiannis, 2003a, c; Koutsoyiannis and Efstratiadis, 2004). Παρόμοιες συμπεριφορές έχουν παρατηρηθεί ωστόσο και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους εκτός από γεωφυσικές διεργασίες όπως βιολογία (Peng et al., 1994), οικολογία (Halley and Inchausti, 2004), φυσιολογία (Hausdorff et al., 1997), ψυχολογία (Wagenmakers et al., 2004), οικονομικά (Ray and Tsay, 2000), πολιτικά (Byers et al., 2000), και επιστήμης υπολογιστών και internet (Karagiannis et al., 2004). Η πανομοιότυπη αυτή συμπεριφορά σε πολύπλοκα συστήματα, δεν θα πρέπει να θεωρηθεί σαν σύμπτωση, αλλά θα πρέπει να διερευνηθεί μια θεμελιώδης εξήγηση για τις συμπεριφορές αυτές (Koutsoyiannis, 2003).

Η εμμονή μακράς κλίμακας (φαινόμενο Hurst), είναι δύσκολο να κατανοηθεί ως φυσική διεργασία. Οι Mesa και Poveda (1993) υποστηρίζουν ότι το φαινόμενο Hurst είναι ένα απ' τα πιο σημαντικά άλματα προβλήματα στην υδρολογία και ότι "κάτι συγκλονιστικό πρέπει να συμβαίνει από την φυσική άποψη των πραγμάτων".

Προσπάθειες έχουν γίνει για την ντετερμινιστική περιγραφή του φαινομένου αυτού. Οι προσπάθειες αυτές βασίζονται στο γεγονός ότι γνωστές φυσικές διεργασίες επηρεάζουν με γνωστό τρόπο την συμπεριφορά του κλίματος άρα μπορούν να επεκταθούν και στις υδρολογικές διεργασίες.

Τέτοια φαινόμενα που επηρεάζουν με γνωστό τρόπο την κλιματική συμπεριφορά είναι παραδείγματος χάριν, οι κύκλοι Milankovitch που επιδρούν περιοδικά στο κλίμα (εποχές παγετώνων), η ηφαιστειακή δράση, η ηλιακή ακτινοβολία. Επιπλέον, υπάρχουν ενδογενείς κλιματικοί μηχανισμοί σχετικά με την αλληλεπίδραση ωκεανών, ατμόσφαιρας, γης οι οποίοι λειτουργούν είτε προς την σταθεροποίηση είτε προς την όξυνση τυχόν μεταβολών από επιδράσεις στο σύστημα. Τέτοιοι μηχανισμοί είναι πχ (Moran and Morgan, 1997, pp. 484-485) η ανατροφοδότηση λευκαύγειας πάγου (αύξηση θερμοκρασίας → λιώσιμο πάγων → μείωση λευκαύγειας → αύξηση θερμοκρασίας (όξυνση αλλαγών) επίσης η περίπτωση της ανατροφοδότηση εξάτμισης νερού (αύξηση θερμοκρασίας → μεγαλύτερη εξάτμιση →

περισσότεροι υδρατμοί στην ατμόσφαιρα → μείωση ανακλώμενης υπέρυθρης ακτινοβολίας από την γη → αύξηση θερμοκρασίας (όξυνση αλλαγών) και σε αντίθετη περίπτωση η ανατροφοδότηση χαμηλών σύννεφων (αύξηση θερμοκρασίας → μεγαλύτερη εξάτμιση → περισσότερα σύννεφα στην ατμόσφαιρα → αύξηση λευκαύγειας ηλιακής ακτινοβολίας → μείωση θερμοκρασίας). (Koutsoyiannis, 2003).

Αρκετές ερμηνείες έχουν προταθεί κατά την προσπάθεια μαθηματικής περιγραφής του φαινομένου Hurst. Από κάποιους θεωρείται ότι η εμμονή έχει ντετερμινιστική προέλευση (πχ Bhattacharya et al., 1983) ενώ άλλοι (πχ Bak, 1996) θεωρούν ότι υπάρχει κάποια εγγενής ιδιότητα στα φυσικά συστήματα, που επιτρέπει ακόμη και σε πολύ απομακρυσμένα στοιχεία τους να συνεργάζονται. Μια άλλη ερμηνεία, γενικότερη κατά την άποψη του γράφοντος είναι ότι οι διακυμάνσεις στις γεωφυσικές διεργασίες συμβαίνουν σε περισσότερες από μία κλίμακες (για την ακρίβεια σε όλες τις κλίμακες χώρου η χρόνου (multi-scale fluctuations)). Αυτό οδηγεί σε συμπεριφορές που είναι σύμφωνες με την πραγματικότητα και αυτός είναι ο πλέον δόκιμος τρόπος για την διερεύνηση, κατανόηση και προσομοίωση των διεργασιών αυτών. Κάτι τέτοιο έχει υποστηριχθεί από το Εθνικό Συμβούλιο Ερευνών των ΗΠΑ (National Research Council, 1991), το οποίο υποστηρίζει ότι το κλίμα «αλλάζει ακανόνιστα, για άγνωστο λόγο, σε όλες τις χρονικές κλίμακες». Βιβλιογραφικά επίσης αναφέρονται και οι μελέτες άλλων στην προσπάθεια περιγραφής του φαινομένου αυτού. Beran (1994), Klemes (1974), Koutsoyiannis (2003), Montanari et al. (1999).

2.2 Ορισμοί

Πριν την θεωρητική ανάλυση και μαθηματική περιγραφή του στοχαστικού μοντέλου, θα δοθούν οι ορισμοί καθώς και οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην εργασία αυτή προκειμένου να είναι εφικτή η ευκολότερη ανάγνωση και κατανόηση της (οι ορισμοί που δίνονται βασίζονται στην θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων κατά Kolmogorov).

Ορισμοί στατιστικής και θεωρίας πιθανοτήτων

Ως δειγματικός χώρος, Ω ορίζεται το σύνολο που τα στοιχεία του ω αντιστοιχούν στις δυνατές εκβάσεις ενός πειράματος η μίας διεργασίας.

Ως τυχαία μεταβλητή X ορίζεται μια συνάρτηση ορισμένη επί του δειγματικού χώρου (απεικόνιση του δειγματικού χώρου στο R (σύνολο πραγματικών αριθμών)).

Ως πιθανότητα $P(\delta)$ ορίζεται η απεικόνιση μίας οικογένειας Φ υποσυνόλων του δειγματικού χώρου Ω στο διάστημα $[0,1]$.

Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας ονομάζεται η συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x που δίνεται από την εξίσωση

$$F_X(x) = P(X \leq x), x \in R. \quad (2.1)$$

Πιθανότητα υπέρβασης κατ αντιστοιχία ορίζεται ως

$$F_{1X}(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x). \quad (2.2)$$

Ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κατανομής όταν αυτή είναι απολύτως συνεχής

$$f(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (2.4)$$

Στην περίπτωση όπου F μη συνεχής τότε ορίζεται κατ αντιστοιχία ως συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$p_k = F(x_k) - F(x_{k-1}). \quad (2.5)$$

Η αναμενόμενη τιμή η προσδοκία της συνάρτησης $g(X)$ ορίζεται από τη

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \quad (2.6)$$

Το μέγεθος $E[X^p]$ ονομάζεται ροπή τάξης p της X .

Κατ αντιστοιχία το μέγεθος $E[(X - m_X)^p]$ ονομάζεται κεντρική ροπή τάξης p της X .

Ειδικότερα:

1. Για $g(X) = X^r$, όπου $r = 0, 1, 2 \dots$ το μέγεθος

$$m_X^{(r)} = E[X^r] \quad (2.7)$$

ονομάζεται ροπή περί την αρχή τάξης r της X .

2. Για $g(X) = X$, το μέγεθος

$$m_X^{(r)} = E[X] \quad (2.8)$$

ονομάζεται αναμενόμενη τιμή ή μέση τιμή της X (εναλλακτικά συμβολίζεται και ως μ_X).

3. Για $g(X) = (X - m_X)^r$ το μέγεθος

$$\mu_X^r = E[(X - m_X)^r] \quad (2.9)$$

ονομάζεται κεντρική ροπή τάξης r της X .

4. Για $g(X) = (X - m_X)^2$, το μέγεθος

$$\sigma_X^2 = \mu_X^{(2)} = E[(X - m_X)^2] \quad (2.10)$$

ονομάζεται διασπορά της X και συμβολίζεται επίσης με $\text{Var}[X]$.

Παράμετροι

Για την καλύτερη και πιο εποπτική περιγραφή μιας τυχαίας μεταβλητής, συχνά χρησιμοποιούνται οι παρακάτω παράμετροι που περιγράφουν την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής.

1. Παράμετροι θέσης: α) Η μέση τιμή η οποία περιγράφει την θέση του κέντρου βάρους του σχήματος όπου ορίζει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής β) Η πιθανότερη τιμή x_p ή κορυφή η οποία είναι η τιμή της μεταβλητής X για την οποία η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γίνεται μέγιστη γ) Η διάμεσος, συμβολικά $x_{0.5}$, είναι η τιμή της μεταβλητής για την οποία ισχύει

$$P(X \leq x_{0.5}) = P(X \geq x_{0.5}) = 1/2 \quad (2.11)$$

2. Παράμετροι διασποράς: Οι συνήθεις παράμετροι διασποράς που δείχνουν το μέγεθος της συγκέντρωσης της πυκνότητας πιθανότητας περί την μέση τιμή είναι α) Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς η οποία ονομάζεται τυπική απόκλιση και έχει διαστάσεις ίδιες με την τυχαία μεταβλητή

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]} \quad (2.12)$$

β) Η αδιάστατη παράμετρος

$$C_{VX} = \frac{\sigma_X}{m_X} \quad (2.13)$$

που ονομάζεται συντελεστής μεταβλητότητας.

3. Παράμετροι ασυμμετρίας: Το σύνηθες μέτρο ασυμμετρίας που χρησιμοποιείται είναι ο αδιάστατος συντελεστής ασυμμετρίας

$$C_{Sx} = \frac{\mu_X^{(3)}}{\sigma_X^3} \quad (2.14)$$

Η κατανομή ονομάζεται θετικά ασύμμετρη όταν $x_p \leq x_{0.5} \leq m_X$. Σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται αρνητικά ασύμμετρη.

4. Παράμετροι κύρτωσης: Η κύρτωση περιγράφει πόσο "αιχμηρή" είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας περί την κορυφή της και το σύνηθες μέτρο της είναι ο συντελεστής κύρτωσης που ορίζεται ως

$$C_{kx} = \frac{\mu_X^{(4)}}{\sigma_X^4}. \quad (2.15)$$

Σε επέκταση των προηγουμένων ορίζεται η από κοινού συνάρτηση κατανομής ζεύγους τυχαίων μεταβλητών (X, Y) .

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y). \quad (2.16)$$

Με την προϋπόθεση ότι η $F_{XY}(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη ορίζεται ως από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας η

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.17)$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$F_{XY}(x, y) = \iint_{-\infty-\infty}^{x y} f_{XY}(x, y) dx dy \quad (2.18)$$

Αναμενόμενες τιμές – ροπές

Η αναμενόμενη τιμή ή προσδοκία της συνάρτησης $g(X, Y)$ ορίζεται από τη

$$E[g(X, Y)] = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} g(x, y) * f_{XY}(x, y) dx dy \quad (2.19)$$

Το μέγεθος $E[X^p Y^q]$ ονομάζεται από κοινού ροπή τάξης $p + q$ των X και Y .

Κατ'αντιστοιχία το μέγεθος

$$E[(X - m_X)^p (Y - m_Y)^q] \quad (2.20)$$

ονομάζεται από κοινού κεντρική ροπή τάξης $p + q$ των X και Y .

Από τις από κοινού κεντρικές ροπές η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη είναι η

$$\sigma_{XY} = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = E[XY] - m_X m_Y \quad (2.21)$$

που ονομάζεται συνδιασπορά των X, Y . Εναλλακτικά η συνδιασπορά συμβολίζεται και ως $\text{Cov}[X, Y]$.

Διαιρώντας την συνδιασπορά με τις τυπικές αποκλίσεις των δυο τυχαίων μεταβλητών παίρνουμε τον συντελεστή συσχέτισης

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[XY]}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}} \quad (2.22)$$

ο οποίος είναι αδιάστατος και με τιμές $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

Στοχαστική ανέλιξη

Ως στοχαστική ανέλιξη ονομάζεται η ακολουθία τυχαίων X_t μεταβλητών, που μπορεί να είναι απειροπλήθεις, όπου t παίρνει τιμές από ένα κατάλληλο σύνολο T . Σε περίπτωση όπου το δεικτοσύνηλο T αντιστοιχεί σε διακριτές μονάδες έχουμε ανέλιξη σε διακριτό χρόνο (Συνήθως t νοείται ως χρόνος). Σε περίπτωση όπου το δεικτοσύνηλο αντιστοιχεί σε συνεχή χρόνο, έχουμε ανέλιξη σε συνεχή χρόνο.

Τυχαία πεδία

Στην περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή X ορίζεται σε χώρο όχι μίας αλλά περισσότερων διαστάσεων, έχουμε την περίπτωση των τυχαίων πεδίων. Πιο συγκεκριμένα, έστω ένα διάνυσμα $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ του n -διάστατου παραμετρικού χώρου (δεικτοσύνολου) $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{R}^n$. Τυχαίο πεδίο θα καλούμε μια απειροπληθή οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X(\mathbf{v})$, όπου το διάνυσμα \mathbf{v} παίρνει τιμές από το δεικτοσύνολο \mathbf{V} (Vanmarcke, 1988). Η τυχαία μεταβλητή X μπορεί να είναι βαθμωτή ($\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$) ή περισσότερων διαστάσεων ($\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$).

Ορισμοί για στοχαστικές ανελίξεις

Για μία στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ κατ' απόλυτη αντιστοιχία με τις τυχαίες μεταβλητές ορίζονται τα παρακάτω μεγέθη:

Μέση τιμή:

$$\mu_X = E[X] \quad (2.23)$$

Αυτοσυνδιασπορά:

$$\gamma_\tau = C(t, \tau) := \text{Cov}[X(t), X(t + \tau)] = E[(X(t) - \mu(t))(X(t + \tau) - \mu(t + \tau))] \quad (2.24)$$

Διασπορά:

$$\gamma_0 = C(t, 0) = \text{Var}[X(t)] = \text{Cov}[X(t), X(t + \tau)] \quad (2.25)$$

Συντελεστής αυτοσυσχέτισης:

$$\rho(t, \tau) := \frac{\text{Cov}[X(t), X(t + \tau)]}{\sqrt{\text{Var}[X(t)]\text{Var}[X(t + \tau)]}} \quad (2.26)$$

Στις παραπάνω σχέσεις ο όρος τ καλείται υστέρηση (lag).

Για δύο ανελίξεις X και Y ορίζονται:

Ετεροσυνδιασπορά:

$$C_{XY}(t, \tau) := \text{Cov}[X(t), Y(t + \tau)] \quad (2.27)$$

Συντελεστής ετεροσυσχέτισης:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X(t), Y(t + \tau)]}{\sqrt{\text{Var}[X(t)]\text{Var}[Y(t + \tau)]}} \quad (2.28)$$

Όλα τα προηγούμενα που ορίσθηκαν για στοχαστικές ανελίξεις, επεκτείνονται άμεσα για την χρήση του στα τυχαία πεδία.

Λευκός θόρυβος Ιδανικός Λευκός θόρυβος ονομάζεται η στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο για την οποία ισχύουν:

Ο συντελεστής αυτοσυνδιασποράς της είναι

$$\rho(\tau) = \delta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

όπου τ η υστέρηση και δ η συνάρτηση του Dirac

Η διασπορά της σ^2 είναι άπειρη.

Με την ολοκλήρωση του ιδανικού λευκού θορύβου σε διαστήματα Δt προκύπτει μία πλήρως τυχαία σειρά σε διακριτό χρόνο για την οποία ισχύει

$$\rho(\tau) = \delta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \geq 0 \end{cases} \text{ και } \sigma^2 = \frac{w}{\Delta t}, \quad (2.30)$$

όπου w ορίζεται η "ένταση" του λευκού θορύβου (Vanmarcke, 1986).

Ημιδιασπορά

Ως ημιδιασπορά (semivariance) τυχαίου πεδίου ορίζεται η συνάρτηση $\gamma(h)$ για την οποία ισχύει

$$2\gamma(h) = E\{[z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{x}')]^2\} = 2\text{Var}[z(\mathbf{x})] - 2\text{Cov}[z(\mathbf{x})], h = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (2.31)$$

Στην περίπτωση ομοιόμορφου, ισότροπου πεδίου, ισχύει ότι η συνάρτηση ημιδιασποράς συνδέεται με την συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς με την εξής σχέση

$$\gamma(h) = R(0) - R(h) \quad (2.32)$$

ενώ για

$$h \rightarrow \infty, \gamma(h) \rightarrow R(0) = \sigma^2 \quad (2.33)$$

Στην περίπτωση όπου Z δεν είναι στάσιμη τότε $\gamma(h)$ τείνει στο άπειρο για $h \rightarrow \infty$

Ιδιότητες στοχαστικών ανεξίτητων και τυχαίων πεδίων

Στασιμότητα: Μια ανέλιξη ονομάζεται στάσιμη με την αυστηρή έννοια όταν η συνάρτηση κατανομής της δεν αλλάζει από την μετατόπιση στην διάσταση t . Μια ανέλιξη ονομάζεται στάσιμη με την ευρεία έννοια εάν η μέση τιμή της είναι σταθερή και η αυτοσυνδιασπορά της εξαρτάται μόνο από την μετατόπιση στη διάσταση t . Στην περίπτωση τυχαίων πεδίων αυτά συνήθως χαρακτηρίζονται ως ομογενή αντί για στάσιμα. Πιο συγκεκριμένα, ομογενές καλείται ένα πεδίο όταν για οποιαδήποτε μεταφορά, χωρίς στροφή, του διανύσματος \mathbf{v} στον παραμετρικό χώρο η συνάρτηση κατανομής παραμένει αναλλοίωτη.

Εργοδικότητα: Μία ανέλιξη και ένα πεδίο ονομάζονται εργοδικά όταν κάθε παράμετρος της κατανομής της μπορεί να προσδιοριστεί από μια απλή δειγματοσυνάρτηση της ανέλιξης η του πεδίου.

Ισοτροπο πεδίο: Ένα πεδίο ονομάζεται ισότροπο εάν οι συναρτήσεις κατανομής παραμένουν ανεπηρέαστες από την στροφή του διανύσματος \mathbf{v} . Η έννοια της ισοτροπικότητας δεν υφίσταται για ανεξίτητες που ορίζονται σε μία διάσταση.

Ορισμοί από φασματική ανάλυση Fourier

Ο γραμμικός μετασχηματισμός που ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier ορίζεται ως

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi x\omega i} dx, \text{ όπου } i \text{ η φανταστική μονάδα} \quad (2.34)$$

και ανήκει στην κατηγορία των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών και έχει πυρήνα $e^{-2\pi x\omega i}$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ορίζεται ως

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i2\pi\omega x} d\omega \quad (2.35)$$

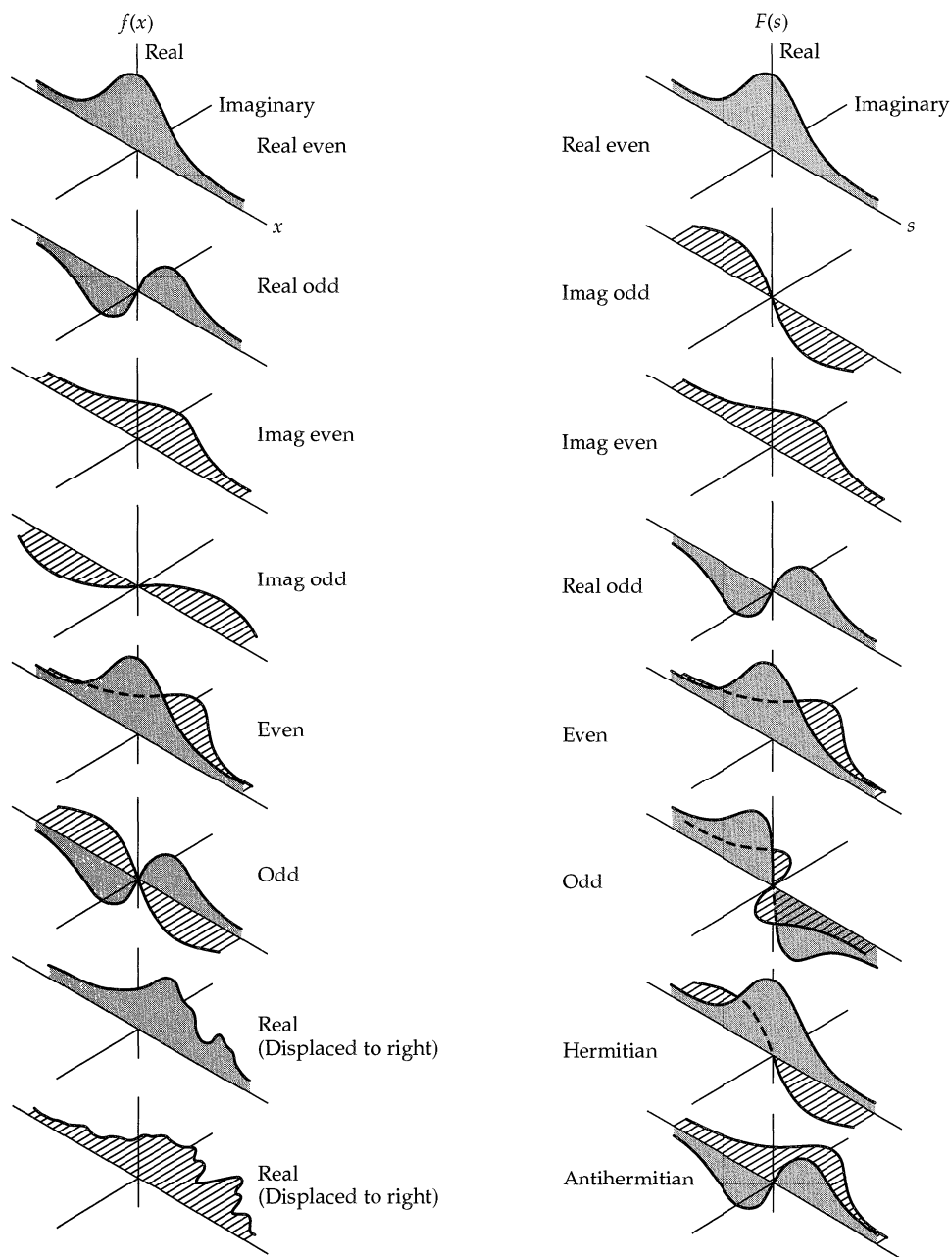
Συνήθως το μεγέθη x και ω νοούνται ως χρόνος και συχνότητα αντίστοιχα.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

Η μορφή του μετασχηματισμού Fourier εξαρτάται από την μορφή της αρχικής συνάρτησης ως εξής

$f(x)$	$F(\omega)$
πραγματική και άρτια	πραγματική και άρτια
πραγματική και περιττή	φανταστική και περιττή
φανταστική και άρτια	φανταστική και άρτια
σύνθετη περιττή	σύνθετη περιττή
σύνθετη άρτια	σύνθετη άρτια
Άρτια	Άρτια
Περιττή	Περιττή
πραγματική άρτια συν φανταστική περιττή	Πραγματική
πραγματική περιττή συν φανταστική άρτια	Φανταστική

Πίνακας 2.1 (μετάφραση από αγγλικό κείμενο: Bracewell, 2000)



Σχήμα 2.1 Μετασχηματισμοί Fourier

(πηγή: Bracewell, 2000)

Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα του Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, τότε στην περίπτωση που $f(x)$ πραγματική και άρτια συνάρτηση, δηλαδή $f(-x) = f(x)$ ο μετασχηματισμός Fourier απλοποιείται στην εξής μορφή

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(2\pi\omega x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(2\pi\omega x) dx \quad (2.36)$$

και αντίστοιχα ο αντίστροφος μετασχηματισμός απλοποιείται ως εξής

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos(2\pi\omega x) d\omega = 2 \int_0^{\infty} F(\omega) \cos(2\pi\omega x) d\omega \quad (2.37)$$

Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο 1, τότε ο μετασχηματισμός Fourier μηδενίζεται για κάθε μη ακέραια τιμή του ω , Αυτό δίνει το έναυσμα για τον ορισμό μιας ειδικής περίπτωσης μετασχηματισμού Fourier με το x να κινείται σε ένα από τα επαναλαμβανόμενα περιοδικά διαστήματα (έστω το $[-0.5,0.5]$) και το ω να παίρνει μόνο ακέραιες τιμές k . Έτσι για τη συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται ο πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier F_k που ο αντίστροφος του είναι άθροισμα αντί ολοκλήρωμα.

$$F_k = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^{-2\pi kx} dx, \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i2\pi kx} \quad (2.38)$$

Αν η $f(x)$ είναι πραγματική και άρτια, όπως προαναφέρθηκε, η F_k είναι επίσης πραγματική και άρτια και η μορφή της απλοποιείται ως εξής

$$F_k = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \cos(2\pi kx) dx = 2 \int_0^{1/2} f(x) \cos(2\pi kx) dx \quad (2.39)$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός απλοποιείται ως εξής

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cos(2\pi kx) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos(2\pi kx) \quad (2.40)$$

Ανάλογα με το διάστημα στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να ορισθεί μια πληθώρα πεπερασμένων μετασχηματισμών Fourier.

Επειδή θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια, κρίνεται σκόπιμο να ορισθεί ο πεπερασμένος μετασχηματισμός συνημιτόνου στο διάστημα $[0,1/2]$.

Έστω ότι η πραγματική συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται στο διάστημα $[0,1/2]$. Ορίζουμε ως πεπερασμένο μετασχηματισμό συνημιτόνου για κάθε ακέραιο k (άρτια συνάρτηση του k)

$$f_k^c = \int_0^{1/2} f(x) \cos(2\pi kx) dx \quad (2.41)$$

Αν επεκτείνουμε την $f(x)$ προς τις αρνητικές τιμές, υποθέτοντας την συμμετρική, τότε εύκολα προκύπτει ότι $F_k^c = (1/2)F_k$, όπου F_k είναι ο πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$, οπότε από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι ο $2f(x)$, ή

$$f_k^c(x) = 2f(x) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cos(2\pi kx) = 2F_0 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos(2\pi kx) \quad (2.42)$$

Ως φάσμα ισχύος $S(\omega)$ μίας στοχαστικής ανέλιξης X_t σε διακριτό χρόνο $t = 0,1,2 \dots$ με συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς $\gamma_m = \text{Cov}[X_t, X_{t+m}]$, $m = 0,1,2 \dots$ ορίζεται ο αντίστροφος πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς με ω στο διάστημα $[0,1/2]$. Επειδή η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς είναι άρτια συνάρτηση, ισχύει

$$s(\omega) = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m \cos(2\pi m\omega) = 2\gamma_0 + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \cos(2\pi m\omega) \quad (2.43)$$

Η σχέση αντιστροφής είναι

$$\gamma_m = \int_0^{1/2} s(\omega) \cos(2\pi m\omega) d\omega \quad (2.44)$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι το φάσμα ισχύος (Bracewell, 2000) ισούται και με

$$s(\omega) = |\mathbf{F}\{f(x)\}|^2 \quad (2.45)$$

όπου \mathbf{F} ο συναρτησιακός τελεστής που ορίζεται ως

$$\mathbf{F}\{f(x)\} = F(\omega) \text{ και } \mathbf{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) \quad (2.46)$$

Επειδή στην παρούσα εργασία θα γίνει επέκταση και στις 2 διαστάσεις κρίνεται σκόπιμο να οριστεί και ο μετασχηματισμός Fourier στις 2 διαστάσεις.

Στην περίπτωση των 2 διαστάσεων, ο μετασχηματισμός Fourier της εξίσωσης $f(x, y)$

Ορίζεται ως

$$F(\varphi, \omega) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(x\varphi+y\omega)} d\varphi d\omega \quad (2.47)$$

Και ο αντίστροφος του

$$f(x, y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} F(\varphi, \omega) e^{2\pi i(x\varphi+y\omega)} dx dy \quad (2.48)$$

Στην ειδική περίπτωση που θα χρησιμοποιηθεί και στην περαιτέρω ανάλυση όπου $f(x, y)$ παρουσιάζει κυκλική συμμετρία, δηλαδή $f(x, y) = f(r)$ όπου r η καρτεσιανή απόσταση από την αρχή των αξόνων, τότε και ο μετασχηματισμός θα παρουσιάζει κυκλική συμμετρία και μπορεί να υπολογιστεί ως εξής

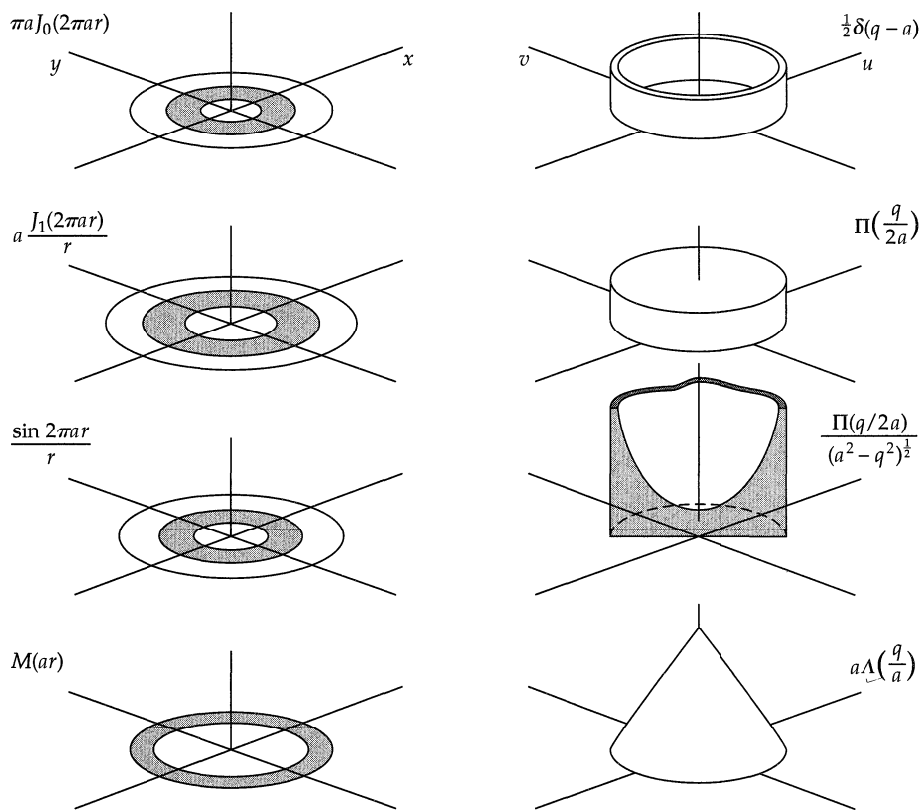
$$F(q) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi qr) r dr \quad (2.49)$$

$$\text{και } f(r) = 2\pi \int_0^{\infty} F(q) J_0(2\pi qr) q dq \quad (2.50)$$

όπου $F(q)$ ονομάζεται μετασχηματισμός Hankel (μηδενικής τάξης) της $f(r)$ και J_0 η συνάρτηση Bessel η οποία είναι ο πυρήνας του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού Hankel. Η συνάρτηση Bessel J_n , με n ακέραιο, ορίζεται ως η λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (2.51)$$

Μερικοί μετασχηματισμοί Hankel φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 2.2 Μετασχηματισμοί Hankel

(πηγή: Bracewell, 2000)

2.3 Στοχαστική ανέλιξη FGN

Ο Benoit Mandelbrot (1965) προσπαθώντας να αναπαραγάγει μαθηματικά το φαινόμενο Hurst, εισήγαγε την διαδικασία (ανέλιξη) γνωστή ως κλασματικός Γκαουσιανός θόρυβος (fractional Gaussian noise FGN). Η ανέλιξη αυτή μπορεί να ορισθεί σε διακριτό χρόνο με τρόπο όμοιο με αυτόν που ορίζεται για συνεχή χρόνο. Ειδικότερα μπορεί να ορισθεί ως ανέλιξη η οποία πληροί την συνθήκη

$$(Z_i^{(k)} - \mu) =_d \left(k/l\right)^{H-1} (Z_j^{(l)} - \mu) \quad (2.52)$$

Όπου $=_d$ συμβολίζει ισότητα στην πεπερασμένης διάστασης από κοινού κατανομή και H θετική σταθερά ορισμένη στο διάστημα $(0,1)$ γνωστή και ως συντελεστής Hurst και $Z_i^{(k)}$ η συναθροισμένη ανέλιξη σε κλίμακα k για την οποία ισχύει

$$Z_i^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=(j-1)k+1}^{jk} Z_i^{(1)} \quad (2.53)$$

και $Z_i^{(1)} \equiv X_i$. Η εξίσωση 2.52 ισχύει για κάθε ακέραια i και j (εφόσον η διαδικασία είναι στάσιμη) και για κάθε κλίμακα k και l . Για $i = j = l = 1$ παίρνουμε

$$\gamma_0^{(k)} = k^{2H-2}\gamma_0 \quad (2.54)$$

Κατά συνέπεια η τυπική απόκλιση κλίμακας k είναι ανάλογη του k^{H-1} το οποίο είναι σύμφωνο με τις παρατηρημένες στην φύση διεργασίες. Η σχέση 2.54 οδηγεί στον εύκολο προσδιορισμό του συντελεστή Hurst καθώς αυτός υπολογίζεται από την κλίση της ευθείας που προκύπτει από την αναπαράσταση της τυπικής απόκλισης κλίμακας k συναρτήσει της κλίμακας αυτής σε διπλό λογαριθμικό διάγραμμα (Montanari *et al.*, 1997).

Είναι εύκολο λοιπόν να δειχθεί ότι για κάθε κλίμακα συνάθροισης k η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητη της κλίμακας (Koutsoyiannis, 2002)

$$\rho_j^{(k)} = \rho_j = \left(\frac{1}{2}\right) [(j+1)^{2H} + (j-1)^{2H}] - j^{2H}, \quad j > 0 \quad (2.55)$$

Για μεγάλα j η εξίσωση αυτή προσεγγίζεται ικανοποιητικά με την απλοποιημένη μορφή

$$\rho_j^{(k)} = \rho_j = H(2H-1)j^{2H-2} \quad (2.56)$$

που δείχνει ότι η αυτοσυσχέτιση είναι συνάρτηση δύναμης της υστέρησης.

Η εξίσωση 2.55 μπορεί να προκύψει από μία ανέλιξη $\Xi(t)$ σε συνεχή χρόνο με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $Cov[\Xi(t), \Xi(t+\tau)] = \alpha\tau^{2H-2}$, διακριτοποιώντας την ανέλιξη σε διαστήματα μήκους δ και λαμβάνοντας ως X_i την μέση τιμή της ανέλιξης $\Xi(t)$ στο διάστημα $[(i-1)\delta, id]$. Ένας προσεγγιστικός υπολογισμός του φάσματος ισχύος της ανέλιξης είναι

$$s_\gamma^{(k)}(\omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j^{(k)} \cos(2\pi j\omega) \approx 4 \int_0^{\infty} \alpha\tau^{2H-2} \cos(2\pi\tau\omega) d\tau \quad (2.57)$$

που καταλήγει στην προσεγγιστική σχέση $s_\gamma^{(k)}(\omega) \approx \alpha' \omega^{1-2H}$. Για να προσδιοριστεί η σταθερά α' προκειμένου να διατηρεί ακριβώς την διασπορά γ_0 της ανέλιξης, χρησιμοποιείται η εξίσωση 2.54 απ όπου προκύπτει $\gamma_0^{(k)} = \frac{\alpha'}{[(2-2H)2^{2-2H}]}$ και τελικά:

$$s_\gamma^{(k)}(\omega) \approx 4(1-H)\gamma_0^{(k)}(2\omega)^{1-2H} \quad (2.58)$$

όπου είναι συνάρτηση δύναμης της συχνότητας ω .

Η μαθηματική τεκμηρίωση του μοντέλου, όπως αναφέρεται (Mandelbrot, 1965) βασίσθηκε σε προηγούμενη εργασία του A.N. Kolmogorov.

Κεφάλαιο 3

Επεξεργασία δεδομένων

3.1 Εκτίμηση μέσω κλασικής στατιστικής

Παραδοσιακά ο χειρισμός σειρών δεδομένων προκειμένου να εξαχθούν συμπεράσματα για τα χαρακτηριστικά ενός δείγματος γίνεται μέσω των εκτιμητριών των ροπών της κλασικής στατιστικής του δείγματος αυτού.

Εκτιμήτριες συναρτήσεις ονομάζονται οι στατιστικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση παραμέτρων του πληθυσμού. Για κάθε παράμετρο η μπορούν να βρεθούν μια ή περισσότερες συναρτήσεις της μορφής

$$\theta = g(X_1, \dots, X_n) \quad (3.1)$$

Κατάλληλες για την εκτίμηση της παραμέτρου αυτής.

Στην περίπτωση αυτή $\theta = g(X_1, \dots, X_n)$ είναι η εκτιμήτρια συνάρτηση και $\theta = g(x_1, \dots, x_n)$ η εκτίμηση της η .

1. Μια στατιστική συνάρτηση θ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου η αν $E[\theta] = \eta$. Διαφορετικά είναι μεροληπτική εκτιμήτρια και η διαφορά $E[\theta] - \eta$ λέγεται μεροληψία.
2. Μια στατιστική συνάρτηση θ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμέτρου η αν το σφάλμα εκτίμησης $\theta - \eta$ τείνει στο μηδέν με πιθανότητα 1 για $n \rightarrow \infty$. Διαφορετικά είναι ασυνεπής εκτιμήτρια της παραμέτρου η .
3. Μια στατιστική συνάρτηση θ είναι βέλτιστη εκτιμήτρια της παραμέτρου η αν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης $(\theta - \eta)^2$ είναι ελάχιστο.
4. Μία στατιστική συνάρτηση θ είναι η πιο αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμέτρου η αν είναι αμερόληπτη και έχει την ελάχιστη διασπορά.

3.2 Τυπικές σημειακές εκτιμήτριες

Στην ενότητα αυτή θα δοθούν οι τυπικές εκτιμήτριες που αναφέρονται σε στατιστικές ροπές του πληθυσμού και είναι ανεξάρτητες της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας.

Δειγματική μέση τιμή

Η πιο κοινή στατιστική συνάρτηση είναι η δειγματική μέση τιμή, η οποία αποτελεί εκτιμήτρια της μέσης τιμής και ορίζεται από την σχέση

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.2)$$

Η αριθμητική τιμή της

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.3)$$

ονομάζεται παρατηρημένη η αριθμητική μέση τιμή ή απλώς μέσος όρος του δείγματος.

Επειδή ισχύει

$$E[\bar{X}] = E[X] \text{ και } \text{Var}[\bar{X}] = \frac{\text{Var}[X]}{n} \quad (3.4)$$

η εκτιμήτρια είναι αμερόληπτη και συνεπής.

Διασπορά και τυπική απόκλιση

Η μεροληπτική εκτιμήτρια της διασποράς σ_X^2 του πληθυσμού δίνεται από τη σχέση

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \quad (3.5)$$

ενώ για την παραδοχή ότι X_i ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, η αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς είναι

$$S_X^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad (3.6)$$

Τρίτη κεντρική ροπή και συντελεστής ασυμμετρίας

Η μεροληπτική εκτιμήτρια της τρίτης κεντρικής ροπής του πληθυσμού δίνεται από την σχέση

$$\widehat{M_X^{(3)}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{n} \quad (3.7)$$

ενώ για την παραδοχή ότι X_i ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, η αμερόληπτη εκτιμήτρια της τρίτης ροπής είναι

$$M_X^{*(3)} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{(n-1)(n-2)} \quad (3.8)$$

Η εκτιμήτρια του συντελεστή ασυμμετρίας δίνεται από την σχέση

$$\widehat{C}_{S_X} = \frac{\widehat{M_X^{(3)}}}{S_X^3} \quad (3.9)$$

Συνδιασπορά και συσχέτιση

Η μεροληπτική εκτιμήτρια της συνδιασποράς δύο ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών X, Y δίνεται από την σχέση

$$S_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n} \quad (3.10)$$

και η αμερόληπτη σύμφωνα με τις ίδιες παραδοχές

$$S_{XY}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n - 1} \quad (3.11)$$

Η εκτιμήτρια του συντελεστή συσχέτισης δίνεται από την σχέση

$$R_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{S_{XY}^*}{S_X^* S_Y^*} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (3.12)$$

Τυπικά όρια εμπιστοσύνης

Στην περίπτωση όπου θεωρούμε ότι η μεταβλητή X είναι κανονικά κατανομημένη, η εκτίμηση των ορίων εμπιστοσύνης της κατανομής είναι

$$P\left(\bar{X} - \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}} * S_X^*}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}} * S_X^*}{\sqrt{n}}\right) = \gamma \quad (3.13)$$

όπου $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ το $\frac{1+\gamma}{2}$ ποσοστημόριο της κατανομής του Student $t(n - 1)$ και αξιοπιστία γ

3.3 Στατιστικές εκτιμήτριες και προβλήματα

Ως τώρα κατά τον προσδιορισμό των στατιστικών χαρακτηριστικών από δεδομένα υδρολογικών μετρήσεων, έχουν χρησιμοποιηθεί οι εκτιμήτριες της κλασικής στατιστικής. Ωστόσο η χρήση τους προϋποθέτει ότι το δείγμα προέρχεται από ανεξάρτητες όμοια κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές. Όπως έχουμε ήδη τονίσει, τα υδρολογικά δεδομένα κάθε άλλο παρά ανεξάρτητα μπορούν να θεωρηθούν εφ' όσον έχουμε δείξει την συμπεριφορά απλής ομοιοθεσίας που τα χαρακτηρίζει, καθώς αυτό υποδεικνύει μια ισχυρή δομή αυτοσυσχέτισης μεταξύ των δεδομένων. Αυτό καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι εκτιμήτριες της κλασικής στατιστικής δεν είναι αμερόληπτες όταν το δείγμα παρουσιάζει κάποια δομή αυτοσυσχέτισης. Εξετάζουμε για αυτό τον λόγω παρακάτω, τις εκτιμήσεις αυτές με την υπόθεση απλής ομοιοθετικής συμπεριφοράς. Έστω δείγμα $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$

3.3.1 Εκτίμηση σε συσχετιζόμενες τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε μία διάσταση

Στη ανάλυση που θα γίνει σε αυτή την παράγραφο, έχει θεωρηθεί ότι η συναθροισμένη ανέλιξη είναι

$$Z_i^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=(j-1)k+1}^{jk} Z_i^{(1)} \quad (3.14)$$

και συνεπώς

$$\gamma_0^{(k)} = k^{2H-2} \gamma_0 \quad (3.15)$$

Εκτίμηση μέσης τιμής

Το απλούστερο στατιστικό μέγεθος από ένα δείγμα είναι η μέση τιμή \bar{X} με εκτιμήτρια $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Ανεξαρτήτως του τύπου της διαδικασίας η εκτιμήτρια \bar{X} είναι αμερόληπτη. Επίσης είναι πιο κοντά στην βέλτιστη γραμμική αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής διαδικασίας απλής ομοιοθεσίας (Adenstedt, 1974; Beran, 1994, p. 150).

Στην κλασική στατιστική η διασπορά της εκτιμήτριας είναι

$$\text{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \quad (3.16)$$

η οποία όμως δεν ισχύει στην περίπτωση απλής ομοιοθεσίας. Εν αντιθέσει παρατηρώντας ότι

$$\bar{X} = Z_1^{(n)} \quad (3.17)$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση 3.15 καταλήγουμε ότι

$$\text{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n^{2-2H}} \quad (3.18)$$

(Adenstedt, 1974; Beran, 1994, p. 54) Ως γνωστόν, η τετραγωνική ρίζα της διασποράς $\text{Var}[\bar{X}]$ είναι το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της μέσης τιμής. Για $H = 0,5$ οι δύο εξισώσεις 3.16 και 3.18 καταλήγουν προφανώς στην ίδια εκτίμηση τυπικού σφάλματος η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη του της τετραγωνικής ρίζας του μήκους του δείγματος. Ωστόσο για υψηλές τιμές του συντελεστή H διαφορά των δύο εκτιμήσεων αυξάνει ραγδαία. Για την ακρίβεια, το τυπικό σφάλμα στην περίπτωση όπου H είναι υψηλό αυξάνει, ένδειξη του ότι αυξάνει και η αβεβαιότητα υπολογισμού της μέσης τιμής. Παραδείγματος χάριν σε ένα δείγμα όπου $n = 100$ σύμφωνα με την εκτιμήτρια της κλασικής στατιστικής, το τυπικό σφάλμα θα είναι $\sigma/100$ ενώ για το ίδιο μήκος δείγματος και $H = 0,8$ το σωστό τυπικό σφάλμα θα είναι $\sigma/2,5$. Για να έχουμε το ίδιο τυπικό σφάλμα σύμφωνα με την κλασική στατιστική θα έπρεπε το δείγμα να είχε $n = 100000$. Αν θεωρήσουμε δηλαδή ως n' το ισοδύναμο δείγμα από ασυσχέτιστα πανομοιότυπα καταναμεημένα δεδομένα τότε θα έχουμε ότι για n δεδομένα με συντελεστή Hurst H (Koytsoyiannis, 2003)

$$n' = n^{2(1-H)} \quad (3.19)$$

Εκτίμηση τυπικής απόκλισης

Η κλασική εκτιμήτρια της διασποράς η οποία είναι

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (3.20)$$

Δεν είναι πια αμερόληπτη. Έχει δειχθεί (Bergan, 1994, p. 156) ότι μία συνεπής εκτιμήτρια της διασποράς στην περίπτωση απλής ομοιοθεσίας που γίνεται αμερόληπτη για γνωστή τιμή του συντελεστή H είναι

$$\tilde{S}^2 := \frac{n-1}{n-n^{2H-1}} S^2 = \frac{1}{n-n^{2H-1}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (3.21)$$

Για $H = 0,5$ οι εξισώσεις 3,20 και 3,21 ταυτίζονται. Η έκφραση αυτή έχει ομοιότητες με παλαιότερες εκφράσεις που διόρθωναν την εκτιμήτρια της διασποράς σε όρους αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης (Salas, 1993).

Το στατιστικό μέγεθος \tilde{S} (τετραγωνική ρίζα του \tilde{S}^2) μπορεί να θεωρηθεί σαν εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης σ . Ωστόσο επειδή η τετραγωνική ρίζα (όπως και κάθε μη γραμμικός μετασχηματισμός) δεν διατηρεί την αμεροληψία, η εκτίμηση \tilde{S} δεν είναι αμερόληπτη. Μια πιο συνεπής εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης (σχεδόν αμερόληπτη για γνωστή τιμή του συντελεστή H και κανονικά κατανεμημένο δείγμα) είναι

$$\tilde{\tilde{S}} := \sqrt{\frac{n-1/2}{n-n^{2H-1}}} S = \sqrt{\frac{n-1/2}{(n-1)(n-n^{2H-1})}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (3.22)$$

Η προσέγγιση αυτή βασίζεται σε συστηματική μελέτη Monte Carlo. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι όταν $H=0,5$, $\tilde{\tilde{S}} = \sqrt{[(n-1/2)/(n-1)]} S$. Αυτή είναι μια πολύ καλή προσέγγιση της αληθινής αμερόληπτης εκτιμήτριας που για ανεξάρτητα κανονικά κατανεμημένα X_i είναι

$$\tilde{\tilde{S}} = \{[(n-1)/2]^{0.5} \Gamma[(n-1)/2]/\Gamma[n/2]\} S \quad (3.23)$$

Η διασπορά της S για κανονικά κατανεμημένα X_i είναι κατά την κλασική στατιστική

$$\text{Var}[S] \approx \frac{\sigma^2}{2(n-c)} \quad (3.24)$$

Όπου c τυπικά λαμβάνεται ως 0 ή 1 αλλά ακριβέστερα 0,75 (η ακριβής τιμή του είναι $\{1 - [2/(n-1)]\Gamma^2(n/2)/\Gamma^2[(n-1)/2]\} \sigma^2$. Στην περίπτωση απλής ομοιοθεσίας σύμφωνα με την ίδια μελέτη Monte Carlo έχει βρεθεί ότι (Koytsoyiannis, 2003)

$$\text{Var}[\tilde{\tilde{S}}] \approx \frac{(0.1n + 0.8)^{\lambda(H)} \sigma^2}{2(n-1)} \quad \text{όπου } \lambda(H) := 0,088(4H^2 - 1)^2 \quad (3.25)$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση η εκτιμήτρια της διασποράς αυξάνει συγκριτικά με την αντίστοιχη κλασική εκτιμήτρια για αυξανόμενη τιμή του H (για $H > 0,5$). Οι εξισώσεις 3.23 και 3.25 έχουν προκύψει για κανονικά κατανεμημένο δείγμα. Ωστόσο έρευνα έχει δείξει ότι η εξίσωση 3.23 μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης όταν το δείγμα

είναι κατανεμημένα σύμφωνα με την κατανομή γάμα αλλά στην περίπτωση αυτή η μεταβλητότητα είναι μεγαλύτερη απ αυτή που δίνεται απ την εξίσωση 3.25.

Από τα παραπάνω φαίνεται πως είναι ακατάλληλη η χρήση των εκτιμητριών της κλασικής στατιστικής διότι :Υποεκτιμούν την διασπορά , η οποία για μικρές κλίμακες μπορεί να είναι μικρή, ωστόσο για μεγάλες κλίμακες αυξάνει δραματικά. Η συνέπεια αυτή της υποεκτίμησης της διασποράς σε μεγάλες κλίμακες, μπορεί να επισκιάσει το φαινόμενο Hurst σε μικρά δείγματα. Πιο συγκεκριμένα, σε διπλή λογαριθμική απεικόνιση διασποράς-κλίμακας, η κλίση της γραμμής σε περίπτωση χρήσης κλασικών εκτιμητριών θα είναι συνεχώς φθίνουσα αυξανομένης της κλίμακας, πράγμα το οποί όχι μόνον οδηγεί στην υποεκτίμηση του συντελεστή Hurst αλλά μπορεί να οδηγήσει στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι αυτός για μεγάλες κλίμακες τείνει στο 0,5, δηλαδή δε απουσία του φαινομένου Hurst.

Υπολογισμός συντελεστή Hurst

Όλα όσα προαναφέρθηκαν σχετικά με την καταλληλότητα των εκτιμητριών της κλασικής στατιστικής, απαιτούν την γνώση του συντελεστή Hurst. Ωστόσο ο συντελεστής Hurst είναι άγνωστος όταν έχουμε να κάνουμε με καταγεγραμμένα δεδομένα. Γι αυτό προτείνεται ένας νέος αλγόριθμος για τον υπολογισμό του συντελεστή συνεπής με τα στατιστικά απλής ομοιοθεσίας. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στις κλασικές δειγματικές εκτιμήτριες $s^{(k)}$ των τυπικών αποκλίσεων $\sigma^{(k)}$ Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 3.23 και 3.15 και υποθέτοντας ότι $E[\tilde{S}] = \sigma$ παίρνουμε

$$S^{(k)} \approx c_k(H)k^{H-1}\sigma \text{ με } c_k(H) := \sqrt{\frac{\frac{n}{k} - (\frac{n}{k})^{2H-1}}{\frac{n}{k} - 1/2}} \quad (3.26)$$

Μια συστηματική προσέγγιση υπολογισμού του συντελεστή H μπορεί να γίνει σε όρους ελαχιστοποίησης του σφάλματος

$$e^2(\sigma, H) := \sum_{k=1}^{k'} \frac{[\ln\sigma^k - \ln s^{(k)}]^2}{k^p} = \sum_{k=1}^{k'} \frac{[\ln\sigma + H\ln k + \ln c_k(H) - \ln k s'^{(k)}]^2}{k^p} \quad (3.27)$$

όπου $1/k^p$ βάρος σχετιζόμενο με το μερικό σφάλμα κάθε κλίμακας. Για $p = 0$ τα βάρη είναι ίσα, ενώ για $p = 1, 2, \dots$ τα βάρη μειώνονται αυξανομένης της κλίμακας. Αυτό είναι δόκιμο καθώς αυξανομένης της κλίμακας, το δείγμα μικραίνει και η αβεβαιότητα μεγαλώνει. Με την χρήση πειραμάτων Monte Carlo έχει βρεθεί ότι παρότι υπάρχουν διαφορές στις εκτιμήσεις για διάφορες τιμές του p , όταν p βρίσκεται σε ένα εύρος τιμών 0-2 οι διαφορές αυτές δεν είναι σημαντικές. Για $p = 2$ καταλήγουμε σε πιο ικανοποιητικές εκτιμήσεις και γι αυτόν τον λόγω επιλέγεται.

Ο αλγόριθμος που επιλέγεται για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος έχει προταθεί από τον (Koutsoyiannis, 2003) και έχει ως εξής.

Παραγωγίζοντας το τετραγωνικό σφάλμα ως προς $\ln\sigma$ και H και εξισώνοντας το με το 0 έχουμε

$$\frac{1}{2} \frac{\partial e^2(\sigma, H)}{\partial \ln\sigma} = \alpha_{11} \ln\sigma + \alpha_{12} H - b_1(H) = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial e^2(\sigma, H)}{\partial H} = a_{21}(H) \ln\sigma + a_{22}(H) H - b_2(H) = 0 \quad (3.29)$$

Όπου

$$\alpha_{11} = \sum_{k=1}^{k'} \frac{1}{k^p}, \quad (3.31)$$

$$\alpha_{12} = \sum_{k=1}^k \frac{\ln k}{k^p} \quad (3.31)$$

$$b_1(H) = \sum_{k=1}^{k'} \frac{\ln s'^{(k)}}{k^p} - \sum_{k=1}^{k'} \frac{\ln c_k(H)}{k^p} \quad (3.32)$$

$$a_{21}(H) = \sum_{k=1}^{k'} \frac{d_k(H)}{k^p} \quad (3.33)$$

$$a_{22}(H) = \sum_{k=1}^{k'} \frac{d_k(H) \ln k}{k^p} \quad (3.34)$$

$$b_2(H) = \sum_{k=1}^k \frac{d_k(H) \ln s'^{(k)}}{k^p} - \sum_{k=1}^{k'} \frac{d_k(H) \ln c_k(H)}{k^p} \quad (3.35)$$

$$d_k(H) = \ln k + \frac{\partial \ln c_k(H)}{\partial H} = \ln k + \frac{\ln\left(\frac{n}{k}\right)}{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^{2-2H}} \quad (3.36)$$

$$\text{όπου } s'^{(k)} = k s^{(k)}$$

Απαλείφοντας $\ln\sigma$ έχουμε ότι

$$H = \frac{\alpha_{11} b_2(H) - a_{21}(H) b_1(H)}{a_{11} a_{22}(H) - a_{21}(H) a_{12}} \quad (3.37)$$

Στην εξίσωση αυτή ο συντελεστής Hurst εμφανίζεται και στις 2 πλευρές, μπορεί ωστόσο να λυθεί εύκολα αριθμητικά ξεκινώντας από μια τιμή $H = 0,5$ και υπολογίζοντας το δεξί

μέλος. Εν συνεχεία επαναλαμβάνεται η κυκλική αυτή διαδικασία μέχρι σύγκλισης. Σε περίπτωση που η τιμή του συντελεστή Hurst είναι πολύ υψηλή, πχ μεγαλύτερη από 0,98 προστίθεται στο τετραγωνικό σφάλμα ο όρος $H^{q+1}/(q+1)$ για μεγάλο q (πχ 50). Αυτό οδηγεί σε έναν επιπρόσθετο όρο $-H^q$ στο $b_2(H)$

Μια άλλη μέθοδος υπολογισμού είναι η εξής. Αγνοώντας τον όρο $c_k(H)$ στην εξίσωση 3.26 υπολογίζεται ο συντελεστής Hurst με γραμμική παλινδρόμηση μεταξύ των όρων $\ln s^{(k)}$ και $\ln(k)$. Εν συνεχεία για την υπολογισμένη τιμή του συντελεστή Hurst υπολογίζουμε την νέα του τιμή με γραμμική παλινδρόμηση μεταξύ των όρων $\ln s^{(k)}$ και $\ln[c_k(H)k]$. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι σύγκλισης.

Εκτίμηση ποσοστημορίων κατανομής

Όπως και στα προηγούμενα, η εκτίμηση των ποσοστημορίων μια κατανομής, από υδρολογικά δεδομένα τα οποία παρουσιάζουν ομοιοθετική συμπεριφορά, άρα έχουν δομή αυτοσυσχέτισης, αλλάζει ραγδαία συγκριτικά με τις εκτιμήσεις της κλασικής στατιστικής. Θα δείξουμε εδώ πώς προκύπτει ο υπολογισμός των ποσοστημορίων για κανονικά κατανεμημένα δεδομένα. Η κλασική εκτιμήτρια του u ποσοστημορίου είναι

$$\widehat{X}_u = \bar{X} + \zeta_u S \quad (3.38)$$

όπου ζ_u το u ποσοστημόριο της τυπικής κανονικής κατανομής. Τα κλασσικά όρια εμπιστοσύνης για συντελεστή αξιοπιστίας γ , δίνονται από τις σχέσεις (e.g. Stedinger *et al.*, 1993)

$$\hat{x}_{u_{1.2}} = \hat{x}_u \pm \zeta_{(1+\frac{\gamma}{2})\varepsilon_u} \mu \varepsilon \varepsilon_u = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{\zeta_u^2}{2}} \quad (3.39)$$

Στην περίπτωση απλής ομοιοθεσίας, με γνωστό συντελεστή H , η εκτίμηση του u ποσοστημορίου για κάθε κλίμακα k γίνεται

$$\hat{Z}_u^{(k)} = k\bar{X} + \zeta_u k^H \tilde{S} \quad (3.40)$$

Τα όρια εμπιστοσύνης μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις 3.25 και 3.16 και υποθέτοντας ότι για κανονικά κατανεμημένα δεδομένα X_i , \bar{X} , \tilde{S} είναι ανεξάρτητα (όπως στην κλασική περίπτωση), γεγονός που επαληθεύεται με προσομοιώσεις Monte Carlo. Μετά από αλγεβρικές πράξεις προκύπτει ότι

$$\hat{z}_{u_{1.2}}^{(k)} = \hat{z}_u^{(k)} \pm \zeta_{(1+\frac{\gamma}{2})\varepsilon_u^{(k)}} \mu \varepsilon \varepsilon_u^{(k)} = k \frac{\tilde{S}}{n^{1-H}} \sqrt{1 + \frac{\zeta_u^2 (0.1n + 0.8)^{\lambda(H)}}{2 \left(\frac{k}{n}\right)^{2-2H} (n-1)}} \quad (3.41)$$

Εκτίμηση αυτοσυνδιασποράς και συντελεστή αυτοσυσχέτισης

Είναι γνωστό ότι για μη μηδενικές αυτοσυσχετίσεις, η τυπική εκτιμήτρια της αυτοσυνδιασποράς εισάγει αρνητική μεροληψία (Salas, 1993). Η τυπική εκτιμήτρια για υστέρηση l της αυτοσυνδιασποράς είναι

$$G_l := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-l} (X_i - \bar{X})(X_{i+l} - \bar{X}) \quad (3.42)$$

Και είναι μη αμερόληπτη για την περίπτωση απλής ομοιοθεσίας. Προσεγγιστικά αμερόληπτη εκτιμήτρια είναι (Koytsoyiannis, 2003)

$$\tilde{G}_l = G_l + \frac{1}{n^{2-2H}} \tilde{S}^2 = G_l + \frac{n-1}{n^{3-2H} - n} S^2 \quad (3.43)$$

Συνεπώς η εκτιμήτρια του συντελεστή αυτοσυσχέτισης θα είναι

$$\tilde{R}_l := \frac{\tilde{G}_l}{\tilde{S}^2} = R_l \left(1 - \frac{1}{n^{2-2H}}\right) + \frac{1}{n^{2-2H}} \quad (3.44)$$

όπου R_l η κλασική εκτιμήτρια του συντελεστή αυτοσυσχέτισης

$$R_l := \frac{n}{n-1} \frac{G_l}{S^2} \quad (3.45)$$

Και οι δύο εξισώσεις 3.43 και 3.44 συμφωνούν με τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα που ορίστηκαν από τον Hosking (1996) για κανονικά κατανομημένα δεδομένα με απλή ομοιοθετική συμπεριφορά και για $n \rightarrow \infty$.

Είναι προφανές λοιπόν ότι οι κλασικές εκτιμήτριες του συντελεστή αυτοσυσχέτισης δεν είναι αμερόληπτες, και για την ακρίβεια οι εκτιμήσεις τους είναι αρκετά μικρότερες αυξανόμενου του H . Επίσης οι κλασικές εκτιμήσεις όχι μόνον είναι χαμηλότερες αλλά μηδενίζονται για υστερήσεις 5-10 οπότε επισκιάζουν την μακρά εμμονή της διαδικασίας. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στο να θεωρηθεί εσφαλμένα μια διαδικασία ως μικρής εμμονής.

3.3.2 Εκτίμηση σε αυτοσυσχετιζόμενο πεδίο

Κατ' αντιστοιχία με τα προηγούμενα, αν ορισθεί στην περίπτωση αυτή η συναθροισμένη ανέλιξη ως

$$X^{(n)}(m, l) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=(m-1)n+1}^{mn} \sum_{j=(l-1)n+1}^{nl} X(i, j) \quad (3.46)$$

Έχουμε ότι

$$\text{Var}[Z^{(k)}] = k^{4H-4} \text{Var}[Z^{(1)}] \quad (3.47)$$

(Η απόδειξη της σχέσης αυτής θα γίνει στο κεφάλαιο 4)

και

$$\bar{X} = X_{(1,1)}^{(n)} \quad (3.48)$$

οπότε όμοια προκύπτουν οι σχέσεις

$$\text{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n^{4-4H}} \quad (3.49)$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι το ισοδύναμο δείγμα ανεξάρτητου πανομοιότυπα κατανεμημένου τυχαίου πεδίου θα είναι

$$n' = n^{4-4H} \quad (3.50)$$

και από αυτό συμπεραίνεται ότι η αμερόληπτη εκτίμηση της διασποράς θα είναι

$$\tilde{S}^2 := \frac{n-1}{n-n^{4H-3}} S^2 = \frac{1}{n-n^{4H-3}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (3.51)$$

Αντίστοιχα η αμερόληπτη εκτίμηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης

$$\tilde{R}_l := \frac{\tilde{G}_l}{\tilde{S}^2} = R_l \left(1 - \frac{1}{n^{4-4H}}\right) + \frac{1}{n^{4-4H}} \quad (3.52)$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή Hurst θα ισχύει

$$S^{2(k)} \approx c_k(H) k^{4H-4} \sigma^2 \quad \text{με} \quad c_k(H) := \frac{\frac{n}{k^2} - \left(\frac{n}{k^2}\right)^{4H-3}}{\frac{n}{k^2} - 1} \quad (3.53)$$

Και ο αλγόριθμος που οδηγεί στον υπολογισμό του συντελεστή Hurst είναι αυτός όπου ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα

$$e^2(\sigma^2, H) := \sum_{k=1}^{k'} \frac{[\ln \sigma^{2(k)} - \ln s^{2(k)}]^2}{k^p} \quad (3.54)$$

$$= \sum_{k=1}^{k'} \frac{[\ln \sigma^2 + H \ln k^4 + \ln c_k(H) - \ln k^4 s'^{2(k)}]^2}{k^p}$$

Και επιλύεται ως εξής

$$\frac{1}{2} \frac{\partial e^2(\sigma^2, H)}{\partial \ln \sigma^2} = \alpha_{11} \ln \sigma^2 + \alpha_{12} H - b_1(H) = 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial e^2(\sigma^2, H)}{\partial H} = a_{21}(H) \ln \sigma^2 + a_{22}(H) H - b_2(H) = 0 \quad (3.56)$$

απ' όπου προκύπτουν οι συντελεστές

$$\alpha_{11} = \sum_{k=1}^{k'} \frac{1}{k^p}, \quad (3.57)$$

$$\alpha_{12} = \sum_{k=1}^k \frac{\ln k^4}{k^p} \quad (3.58)$$

$$b_1(H) = \sum_{k=1}^{k'} \frac{\ln s'^{(k)}}{k^p} - \sum_{k=1}^{k'} \frac{\ln c_k(H)}{k^p} \quad (3.59)$$

$$a_{21}(H) = \sum_{k=1}^{k'} \frac{d_k(H)}{k^p} \quad (3.60)$$

$$a_{22}(H) = \sum_{k=1}^{k'} \frac{d_k(H) \ln k^4}{k^p} \quad (3.61)$$

$$b_2(H) = \sum_{k=1}^k \frac{d_k(H) \ln s'^{(k)}}{k^p} - \sum_{k=1}^{k'} \frac{d_k(H) \ln c_k(H)}{k^p} \quad (3.62)$$

$$d_k(H) = \ln k^4 + \frac{\partial \ln c_k(H)}{\partial H} = \ln k^4 - \frac{4 * \ln \left(\frac{n}{k^2} \right) \left(\frac{n}{k^2} \right)^{4H-3}}{\left(\frac{n}{k^2} \right) - \left(\frac{n}{k^2} \right)^{4H-3}} \quad (3.63)$$

όπου $s'^{(k)} = k^4 s^{(k)}$

και ο συντελεστής Hurst προκύπτει από την σχέση

$$H = \frac{\alpha_{11}b_2(H) - a_{21}(H)b_1(H)}{\alpha_{11}a_{22}(H) - a_{21}(H)a_{12}} \quad (3.64)$$

Σε περίπτωση όπου ο συντελεστής Hurst είναι πολύ υψηλός προστίθεται στο $b_2(H)$ ένας όρος $-H^q$ όπου q υψηλό πχ 50.

3.4 Ημμεταβλητόγραμμα

Ως ημμεταβλητόγραμμα (semivariogram) τυχαίου πεδίου ορίζεται η απεικόνιση της συνάρτησης $\gamma(h)$ για την οποία ισχύει (Kitanidis, 2000)

$$2\gamma(h) = E\{[z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{x}')]^2\} = 2\text{Var}[z(\mathbf{x})] - 2\text{Cov}[z(\mathbf{x})], h = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (3.65)$$

Στην περίπτωση ομοιόμορφου, ισότροπου πεδίου, ισχύει ότι η συνάρτηση ημμεταβλητογράμματος συνδέεται με την συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς με την εξής σχέση

$$\gamma(h) = R(0) - R(h) \quad (3.66)$$

ενώ για

$$h \rightarrow \infty, \gamma(h) \rightarrow R(0) = \sigma^2 \quad (3.67)$$

Στην περίπτωση όπου Z δεν είναι μόνιμη τότε $\gamma(h)$ τείνει στο άπειρο για $h \rightarrow \infty$.

Προκειμένου να μελετηθεί η χωρική μεταβλητότητα ενός δείγματος μετρήσεων κατανεμημένο στον χώρο, καταρτίζεται το πειραματικό ημμεταβλητόγραμμα για το οποίο ισχύει (Kitanidis, 2000)

$$\hat{\gamma}(h_k) = \frac{1}{2N_k} \sum_{i=1}^{N_k} [z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}'_i)]^2 \quad (3.68)$$

όπου i αναφέρεται σε κάθε ζεύγος $z(\mathbf{x}_i)$ και $z(\mathbf{x}'_i)$ για τα οποία ισχύει

$$h_k^l \leq \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i\| < h_k^u \quad (3.69)$$

και

$[h_k^l, h_k^u]$ το k - ισοστό διάστημα στον άξονα των αποστάσεων

Τα διαστήματα αντιπροσωπεύονται από ένα σημείο h_k για το οποίο ισχύει

$$h_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i\| \quad (3.70)$$

Μέσω της κατάρτισης του πειραματικού ημιμεταβλητογράμματος, μπορούμε μέσω των χαρακτηριστικών του να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα σχετικά με την δομή του καταγεγραμμένου πεδίου δεδομένων.

Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι

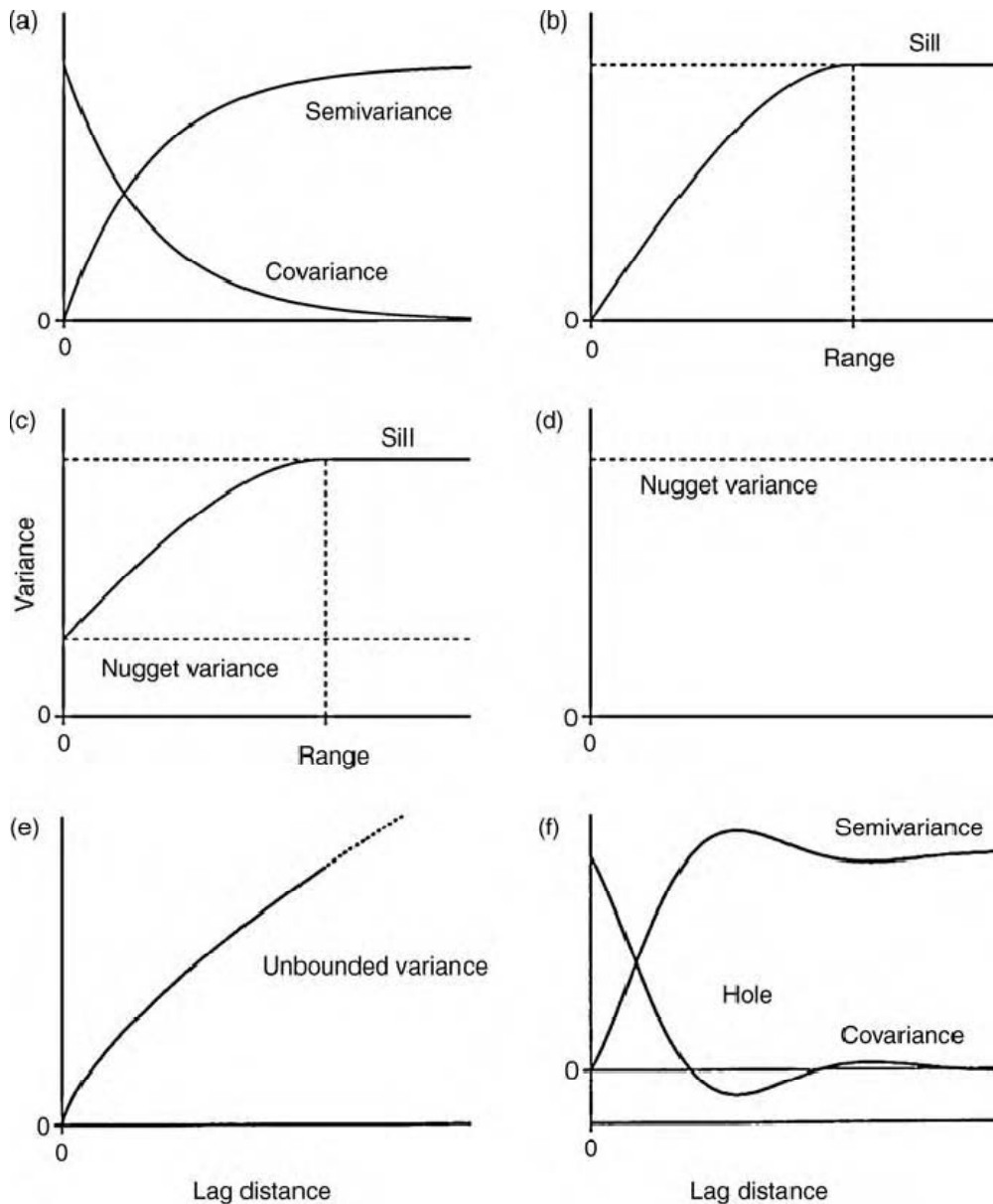
Κατώφλι (sill) και εύρος (range). Το κατώφλι είναι μια σταθερή τιμή στην οποία φτάνει το ημιμεταβλητόγραμμα σε μια απόσταση η οποία ονομάζεται εύρος. Το κατώφλι σχετίζεται με τη διασπορά του δείγματος ενώ το εύρος δείχνει την απόσταση πέρα από την οποία τα δεδομένα μπορούν να θεωρηθούν ασυσχέτιστα. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να έχουμε μια εικόνα σχετικά με την δομή αυτοσυσχέτισης του πεδίου.

Nugget effect. Η ημιδιασπορά μπορεί να μην είναι μηδέν στην μηδενική απόσταση γεγονός που εξηγείται όταν οι μετρήσεις παρουσιάζουν λάθη, δεν είναι ταυτόχρονες ή περιέχουν θόρυβο (μικρομεταβλητότητα, διακυμάνσεις σε κλίμακα μικρότερη από την κλίμακα διαστήματος [h_k^l, h_k^u] (Kitanidis, 2000)).

Επίδραση της διεύθυνσης Η παρουσία ανισοτροπίας μπορεί να ανιχνευτεί με την κατάρτιση ημιμεταβλητογραμμάτων σε διαφορετικές διευθύνσεις.

Στρωμάτωση (stratification) Ο διαχωρισμός ενός συνόλου δεδομένων σε ομάδες πολλές φορές ελαττώνει την χωρική μεταβλητότητα.

Επίδραση του χρόνου Δεδομένου ότι οι υδρολογικές μεταβλητές αλλάζουν με τον χρόνο, η χωρική μεταβλητότητα συγκεκριμένης περιοχής εξαρτάται από τον χρόνο δειγματοληψίας.



Σχήμα 3.1 Ιδιότητες ημιμεταβλητογραμμμάτων

(πηγή: Webster-Oliver, 2007)

3.5 Κανονικοποίηση αρχικών δεδομένων

Η κατανομή Gauss ή κανονική κατανομή είναι η πιο γνωστή και ευρέως χρησιμοποιούμενη κατανομή στην στατιστική ανάλυση δεδομένων. Υπάρχουν δύο θεωρητικοί λόγοι που τεκμηριώνουν την χρήση της κατανομής αυτής στην στατιστική και στις εφαρμογές της, όπως και σε άλλα επιστημονικά πεδία. Ο πρώτος είναι το κεντρικό οριακό θεώρημα το οποίο λέει ότι το άθροισμα ανεξάρτητων και όμοια κατανομημένων τυχαίων μεταβλητών τείνει στην κανονική κατανομή όσο το άθροισμα των προσθετών τείνει στο άπειρο. Ο δεύτερος λόγος αφορά της αρχή της μεγίστης εντροπίας (Jaynes, 1957) η οποία δηλώνει ότι απ' όλες τις γνωστές κατανομές με γνωστή μέση τιμή και διασπορά, η κανονική κατανομή είναι αυτή που μεγιστοποιεί την (εντροπία της πληροφορίας) (Shanon,

1948). Η εντροπία κατά Boltzman-Gibbs-Shannon για συνεχή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ ορίζεται ως

$$S = E(-\ln f(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln(f(x)) dx \text{ (Shannon, 1949; Papoulis, 1991)} \quad (3.71)$$

Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι τα γεωφυσικά δεδομένα που παρέχονται από μετρήσεις είναι σπάνια κανονικά κατανεμημένα. Εμπειρικά δεδομένα δείχνουν ότι οι πιθανοτικές κατανομές γεωφυσικών διεργασιών όπως παραδείγματος χάρις, απορροές ποταμών, και φυσικά βροχοπτώσεις που μας απασχολεί και στην παρούσα εργασία, μπορούν να αποκλίνουν αρκετά από την κατανομή Gauss. Ειδικότερα, αποκλίσεις από την κανονικότητα μπορούν να παρατηρηθούν στην συμμετρία της κατανομής (πχ. Θετικά η αρνητικά ασύμμετρες κατανομές), στην ασυμπτωτική συμπεριφορά στην "ουρά" της κατανομής (πχ. εκτεταμένες εκθετικές "ουρές" ή "ουρές" τύπου δύναμης), και φυσικά στο εύρος της τυχαίας μεταβλητής.

Αν και υπάρχουν όπως προαναφέρθηκαν θεωρητικοί λόγοι που οδηγούν στην κανονικότητα, υπάρχουν επίσης και θεωρητικοί λόγοι οι οποίοι που δεν την υποστηρίζουν (Koutsoyiannis, 2005). Αρχικά, όπως είναι γνωστό, μία κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή παίρνει τιμές σε όλο το εύρος τιμών, εν αντιθέσει με τις φυσικές διεργασίες όπου ορίζονται μόνο θετικά. Αυτό σημαίνει ότι ως τυχαίες μεταβλητές είναι κάτω φραγμένες απ το μηδέν ενώ δεν υπάρχει κάποιος προφανής φυσικός λόγος που να τεκμηριώνει ότι μπορούν να θεωρηθούν και άνω φραγμένες. Επίσης, παρόλο που οι φυσικές διεργασίες αναφερόμενες σε μεγάλες κλίμακες προκύπτουν ως άθροισμα των αντίστοιχων διεργασιών σε μικρότερες κλίμακες, και γι αυτό τον λόγω η κανονικότητα θα έπρεπε να είναι αναμενόμενη λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος, αυτό δεν είναι το σύνηθες διότι οι βασικές παραδοχές του κεντρικού οριακού θεωρήματος παραβιάζονται. Πάει να ισχύει η παραδοχή ότι τα δεδομένα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα διότι σε όλες τις φυσικές διεργασίες υπάρχει δομή αυτοσυσχέτισης μεταξύ των δεδομένων.

Παρόλο που οι παραπάνω λόγοι δικαιολογούν την απόκλιση από την κανονικότητα, δεν υπάρχει πλήθος μεθόδων που να προσομοιώνουν μη κανονικά κατανεμημένα δεδομένα με συγκεκριμένη δομή αυτοσυσχέτισης. Εν αντιθέσει υπάρχουν πολλές μέθοδοι οι οποίες προσομοιώνουν από δεδομένα κανονικά κατανεμημένα αναπαράγοντας εμμονές μακράς η μικρής κλίμακας. Γι' αυτό λοιπόν τον λόγω στην παρούσα εργασία θα επιχειρηθεί να χρησιμοποιηθεί μια τεχνική μετασχηματισμού των αρχικών δεδομένων από μη κανονικά σε κανονικά. Στο τέλος, μετά την προσομοίωση, θα χρησιμοποιηθεί ο ανάστροφος μετασχηματισμός έτσι ώστε να πάρουμε δεδομένα συνεπή με τα αρχικά.

Ωστόσο το να βρεθεί ο κατάλληλος μετασχηματισμός δεν είναι εύκολη διαδικασία καθώς δεν υπάρχει γενική μέθοδος που να μπορεί να μετασχηματίζει ικανοποιητικά όλα τα δεδομένα από μη κανονικά σε κανονικά. Υπάρχουν βέβαια γενικές και συχνά χρησιμοποιούμενες οικογένειες μετασχηματισμών όπως παραδείγματος χάρις οι μετασχηματισμοί Box-Cox. (Box and Cox, 1964), οι οποίοι γενικά δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Για να επιτευχθεί η κανονικοποίηση των δεδομένων στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί ένα πενταπαραμετρικός μετασχηματισμός $Z = g(X)$ όπου X θα είναι τα ύψη βροχής και Z τα κανονικοποιημένα ύψη (Papalexίου et al., 2007).

$$g(x) = (\alpha x^{-\nu} + \beta) \left\{ \psi + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \ln[\kappa(x - \psi)^2 + 1]} \right\} \quad (3.72)$$

όπου z, x είναι τιμές των τυχαίων μεταβλητών Z, X αντίστοιχα και $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta$ είναι οι παράμετροι που θα πρέπει να υπολογισθούν. Το πρώτο μέρος του μετασχηματισμού

$$(\alpha x^{-\zeta} + \beta) \quad (3.73)$$

εισάγεται για να κανονικοποιήσει τιμές κοντά στο μηδέν ενώ το δεύτερο μέρος

$$\left\{ \psi + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \ln[\kappa(x - \psi)^2 + 1]} \right\} \quad (3.73)$$

κανονικοποιεί επαρκώς τις μεγαλύτερες τιμές.

Αν και ο μετασχηματισμός αυτός εισήχθη αυθαίρετα, δυο θεωρητικοί παράμετροι λαμβάνονται υπ όψιν. Πρώτον, καθώς η μεταβλητή $Z \sim N(0,1)$ θα πρέπει να παίρνει τιμές στο $(-\infty, +\infty)$. Αυτός συνεπάγεται ότι για $\{\alpha, \beta, \delta, \zeta\} \in (0, \infty)$ και $\gamma \in (-\infty, 0)$, η τυχαία μεταβλητή $Z \in (-\infty, \infty)$, καθώς $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. Δεύτερον, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X , $f_X(x) = f_Z(g(x))g'(x)$ πρέπει να είναι τύπου δύναμης καθώς αυτό υποδεικνύεται απ' τα αρχικά μας δεδομένα. Παρατηρώντας τον μετασχηματισμό, φαίνεται ότι για μεγάλες τιμές του x , $g(x) \sim [2\beta^2(1 + 1/\delta) \ln x]^{1/2}$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $f_Z(z) \sim \exp(-\frac{z^2}{2})$ και συνδυάζοντας τα αυτά παίρνουμε ότι $f_X(x) \sim f_Z(g(x)) \sim x^{-\beta^2(1 + \frac{1}{\delta})}$ και για τον λόγο αυτό η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X θα είναι τύπου δύναμης. Γι αυτό τον λόγο, είναι σύμφωνος με την κατανομή του Tsallis η οποία εισάγει ουρά τύπου δύναμης. Η κατανομή του Tsallis βασίζεται στην αρχή της μεγίστης εντροπίας.

Ο υπολογισμός των παραμέτρων της εξίσωσης μετασχηματισμού θα γίνει αριθμητικά σύμφωνα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Πιο συγκεκριμένα θα γίνει αριθμητική βελτιστοποίηση έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ των τιμών της τυπικής κανονικής μεταβλητής που αντιστοιχούν στην εμπειρική πιθανότητα μη υπέρβασης των αρχικών δεδομένων με τις αντίστοιχες τιμές που υπολογίζονται με την χρήση του μετασχηματισμού.

Ο μετασχηματισμός αυτός αν και μπορεί να μετασχηματίσει ικανοποιητικά τιμές κοντά στο 0, ωστόσο παρουσιάζει το πρόβλημα ότι δεν ορίζεται για $x = 0$. Στην περίπτωση μελέτης αυτής της διπλωματικής εργασίας όπου είναι τα δισδιάστατα πεδία βροχής, η ύπαρξη πληθώρας μηδενικών τιμών, ειδικά όταν αναφερόμαστε σε εκτεταμένο πεδίο, είναι συνήθης και καθιστά τον μετασχηματισμό αυτό ακατάλληλο. Ωστόσο στα δεδομένα που υπάρχουν για την κατάρτιση του στοχαστικού μοντέλου στην παρούσα εργασία, δεν παρουσιάζονταν μηδενικές τιμές οπότε ο μετασχηματισμός κρίνεται κατάλληλος.

Κεφάλαιο 4

Περιγραφή στοχαστικού μοντέλου

4.1 Περί μοντέλων και αναπαραγωγής φαινομένου Hurst

Στην διεθνή βιβλιογραφία υπάρχει πλήθος αλγορίθμων που προσπαθούν να αναπαράγουν απεικονίσεις ανελίξεων που είναι σύμφωνες με την δυναμική Hurst-Kolmogorov. Παρόλα αυτά πολύ απ τους αλγορίθμους αυτούς δεν είναι εύκολοι ούτε στην κατανόηση αλλά ούτε και στην εφαρμογή. Απ' τους αλγορίθμους αυτούς οι περισσότεροι βασίζονται στις ιδιότητες της ανέλιξης του κλασματικού γκαουσιανού θορύβου (FGN) και παρέχουν προσεγγίσεις τις ανέλιξης αυτής. Πιο γνωστοί αλγόριθμοι απ αυτούς είναι: (προσέγγιση διακύμανσης πολλαπλής κλίμακας (Mandelbrot, 1971), (Προσέγγιση διαχωρισμού), προσέγγιση συμμετρικού κινούμενου μέσου όρου (Koutsoyiannis, 2000). Παρακάτω θα δοθεί λεπτομερής περιγραφή της τελευταίας προσέγγισης καθώς αυτή θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία.

4.2 Μοντέλο συμμετρικού κυλιόμενου μέσου όρου (SMA) σε μεταβλητές ορισμένες σε μία διάσταση

Το σχήμα SMA (Symmetric moving average scheme) εισήχθη από τον Koutsoyiannis (2000). Το σχήμα SMA μπορεί να παράγει όλα τα είδη στοχαστικών ανελίξεων με οποιαδήποτε δομή αυτοσυσχέτισης ή φάσματος ισχύος. Το μοντέλο αυτό ανήκει στην κατηγορία των μοντέλων BFMA (Backward-Forward Moving Average) και όπως και το απλό μοντέλο κινούμενου μέσου όρου, μετασχηματίζει ακολουθίες διακριτού λευκού θορύβου V_i σε ανέλιξη με δομή αυτοσυσχέτισης λαμβάνοντας τη σταθμισμένη μέση τιμή από ένα πλήθος V_i . Η αναλυτική σχέση της ανέλιξης δίνεται απ' τον τύπο

$$X_i = \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+j} = a_q V_{i-q} + \dots + a_1 V_{i-1} + a_0 V_i + a_1 V_{i+1} + \dots + a_q V_{i+q} \quad (4.1)$$

όπου q θεωρητικά τείνει στο άπειρο αλλά στην πράξη περιορίζεται σε πεπερασμένο αριθμό καθώς η ακολουθία a_j είναι φθίνουσα και τείνει στο μηδεν αυξανομένου του j .

Το σχήμα SMA είναι μία επέκταση του μοντέλου MA (κυλιόμενου μέσου όρου) που παρουσιάζει αρκετά πλεονεκτήματα συγκριτικά με αυτό.

Πιο συγκεκριμένα, το μοντέλο SMA μπορεί να εισάγει μη μηδενικές αυτοσυσχετίσεις ακόμα και για υστερήσεις μεγαλύτερες από τα αριθμητικό όριο q . πχ για $j = q + 1$ εισάγει αυτοσυσχετίσεις μέχρι $j = 2q$, εν αντιθέσει με το απλά μοντέλο MA που θεωρεί όλες τις αυτοσυσχετίσεις για $j > q$ ίσες με μηδέν. Επίσης το μοντέλο SMA έχει την ικανότητα διατήρησης της ασυμμετρίας που απαντάται συχνά σε υδρολογικά δεδομένα. Παρ' όλο που στην παρούσα εργασία το δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν προς προσομοίωση θα είναι κανονικοποιημένα, αξίζει να αναφερθεί το παραπάνω. Ακόμη η ακολουθία των βαρών

a_i έτσι όπως ορίζεται, είναι άρτια ακολουθία, πράγμα που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας αυτής θα είναι και αυτός άρτιος και πραγματικός, που όπως θα δούμε, εξυπηρετεί στον προσδιορισμό των συντελεστών αυτών.

Στην περίπτωση όπου έχουμε

$$\sigma_V^2 = \text{Var}[V_i] = 1 \text{ και } \mu_X = 0 \quad (4.2)$$

η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \text{Cov}[X_i, X_{i+k}] = E[X_i X_{i+k}] = E\left[\sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+j} \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} \right] = \\ &= E\left[a_q V_{i-q} \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} + \dots + a_1 V_{i-1} \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} + a_0 V_i \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} + \dots \right] = \\ &= E\left[a_q V_{i-q} \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} \right] + \dots + E\left[a_1 V_{i-1} \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} \right] + E\left[a_0 V_i \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} \right] \\ &\quad + \dots = \\ &= \sum_{n=-q}^q E\left[a_{|n|} V_{i+n} \sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+k+j} \right] = \\ &= \sum_{n=-q}^q E\left[a_{|n|} V_{i+n} \cdot a_q V_{i+k-q} + \dots + a_{|n|} V_{i+n} \cdot a_1 V_{i+k-1} + a_{|n|} V_{i+n} \cdot a_0 V_{i+k} + \dots \right] = \\ &= \sum_{n=-q}^q (E[a_{|n|} V_{i+n} \cdot a_q V_{i+k-q}] + \dots + E[a_{|n|} V_{i+n} \cdot a_1 V_{i+k-1}] + E[a_{|n|} V_{i+n} \cdot a_0 V_{i+k} + \dots]) = \\ &= \sum_{n=-q}^q \sum_{m=-q}^q E[a_{|n|} V_{i+n} \cdot a_{|m|} V_{i+k+m}] = \sum_{n=-q}^q \sum_{m=-q}^q \text{Cov}[a_{|n|} V_{i+n}, a_{|m|} V_{i+k+m}] \quad (4.3) \end{aligned}$$

Επειδή V_{i+n}, V_{i+k+m} ανεξάρτητα μεταξύ τους για $i+n \neq i+k+m$ έχουμε ότι

$$\text{Cov}[V_{i+n}, V_{i+k+m}] = 0 \quad (4.4)$$

Και για $i+n = i+k+m$

$$\text{Cov}[V_{i+n}, V_{i+k+m}] = \text{Var}[V_i] = 1 \quad (4.5)$$

Συνεπώς το άθροισμα απλοποιείται ως εξής

$$\sum_{n=-q}^q \sum_{m=-q}^q \text{Cov}[a_{|n|} V_{i+n}, a_{|m|} V_{i+k+m}] = \sum_{j=-q}^q a_{|j|} a_{|j+k|} \quad (4.6)$$

Απ' όπου

$$\gamma_k = \sum_{j=-q}^{q-k} a_{|j|} a_{|j+k|}, \text{ όπου } \gamma_k \text{ η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς} \quad (4.7)$$

Σε περίπτωση που $E[X_i] = \mu_X \neq 0$ τότε ισχύει η ίδια σχέση με την διαφορά ότι

$E[V_i] = \mu_V \neq 0$ όπου παίρνοντας αναμενόμενες τιμές στην σχέση ορισμού του μοντέλου έχουμε

$$\begin{aligned} E[X_i] = \mu_X &= E \left[\sum_{j=-q}^q a_{|j|} V_{i+j} \right] = \sum_{j=-q}^q E[a_{|j|} V_{i+j}] = \sum_{j=-q}^q a_{|j|} E[V_{i+j}] = \sum_{j=-q}^q a_{|j|} \mu_V = \\ &= (a_0 + 2 \sum_{j=1}^q a_{|j|}) \mu_V \end{aligned}$$

Συμπεπώς,

$$\mu_X = (a_0 + 2 \sum_{j=1}^q a_{|j|}) \mu_V \quad (4.8)$$

Στην περίπτωση όπου X_i ασύμμετρη, χωρίς βλάβη της γενικότητας για $\mu_X = 0$ έχουμε ότι ο συντελεστής ασυμμετρίας θα είναι

$$\xi_X = \frac{\mu_X^{(3)}}{\sigma_X^{(3)}} = \frac{\mu_X^{(3)}}{\gamma_0^{3/2}} \Leftrightarrow \mu_X^{(3)} \xi_X \gamma_0^{3/2} \quad (4.9)$$

Εξ' ορισμού όμως

$$\mu_X^{(3)} = E[(X - \mu_X)^3] = E[X^3] = E \left[\left(\sum_{i=-q}^q a_i V_i \right)^3 \right] \quad (4.10)$$

Δεδομένου ότι

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_i a_j a_k \quad (4.11)$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_X^{(3)} &= E \left[\sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q \sum_{k=-q}^q a_i V_i a_j V_j a_k V_k \right] = \sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q \sum_{k=-q}^q E[a_i V_i a_j V_j a_k V_k] = \\ &= \sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q \sum_{k=-q}^q a_i a_j a_k E[V_i V_j V_k] = \end{aligned}$$

Για $i = j = k$ έχουμε ότι $E[V_i V_j V_k] = E[(V_i)^3] = \mu_V^{(3)}$ αλλιώς $E[V_i V_j V_k] = 0$ οπότε

το άθροισμα απλοποιείται στο

$$\mu_X^{(3)} = \sum_{i=-q}^q (a_i^3 \mu_V^{(3)}) = \left(\sum_{i=-q}^q a_i^3 \right) \mu_V^{(3)} = (a_0^3 + 2 \sum_{i=1}^q a_i^3) \mu_V^{(3)} \quad (4.12)$$

και αφού $\sigma_V = 1$ θα έχουμε ότι $\mu_V^{(3)} = \xi_V$, άρα

$$\xi_X \gamma_0^{3/2} = (a_0^3 + 2 \sum_{i=1}^q a_i^3) \mu_V^{(3)} \quad (4.13)$$

Στο μοντέλο SMA οι συντελεστές του μοντέλου a_i προσδιορίζονται από κλειστή αναλυτική σχέση το οποίο είναι μεγάλο πλεονέκτημα του μοντέλου αυτού καθώς είναι πλήρως μαθηματικά τεκμηριωμένο και όχι προσεγγιστικό. Ο προσδιορισμός των συντελεστών αυτών γίνεται μέσω του μετασχηματισμού Fourier της ανέλιξης X_i .

Το φάσμα ισχύος της ανέλιξης δίνεται από την σχέση

$$s_Y(\omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{2i\pi j\omega} \quad (4.14)$$

Αντικαθιστώντας από την σχέση 4.7 παίρνουμε

$$s_Y(\omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l a_{k+l} e^{2i\pi j\omega} = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{l+j} e^{2i\pi j\omega} =$$

(θέτοντας όπου $n = j + 1$ προκύπτει)

$$= 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2i\pi(n-l)\omega} = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{-2i\pi l\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2i\pi n\omega}$$

οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$s_Y(\omega) = 2 \frac{s_a^*(\omega)}{2} \frac{s_a(\omega)}{2} = \frac{s_a^*(\omega) s_a(\omega)}{2} \quad (4.15)$$

όπου $s_a^*(\omega)$ ο συζυγής του $s_a(\omega)$

Το μεγάλο πλεονέκτημα του μοντέλου αυτού είναι ότι η αλληλουχία των συντελεστών είναι πραγματική και άρτια οπότε και το φάσμα ισχύος τους θα είναι πραγματικό και άρτιο και γι' αυτό τον λόγο έχουμε ότι

$$s_a(\omega) = s_a^*(\omega) \quad (4.16)$$

οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$s_\gamma(\omega) = \frac{[s_a(\omega)]^2}{2} \quad \text{ή} \quad s_a(\omega) = \sqrt{2s_\gamma(\omega)} \quad (4.17)$$

απ' όπου μπορεί να υπολογιστεί και το φάσμα ισχύος $s_a(\omega)$.

Η ακολουθία των συντελεστών προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$\alpha_j = \int_0^{1/2} s_a(\omega) \cos(2\pi j\omega) \quad (4.18)$$

μιας και το φάσμα ισχύος όπως προαναφέρθηκε είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση.

Συμπερασματικά έχουμε ότι με την βοήθεια του μοντέλου αυτού μπορούν να παραχθούν ανελίξεις με γνωστή συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς.

Εφαρμογή ανέλιξης SMA για γένεση χρονοσειρών

Ο Koutsoyiannis (2002) ανέπτυξε μια απλή διαδικασία για την γένεση χρονοσειρών με διατήρηση της εμμονής σύμφωνα με το μοντέλο SMA.

Σύμφωνα με αυτή έχουμε ότι

$$s_a(\omega) = \sqrt{2s_\gamma(\omega)} \quad (4.19)$$

και δεδομένης της σχέσης 2.58 προκύπτει ότι

$$s_a(\omega) \approx 2\sqrt{(2-2H)\gamma_0}(2\omega)^{0,5-H} \quad (4.20)$$

και θέτοντας όπου

$$0,5 - H = 1 - 2H' \Rightarrow H' = \frac{H + 0,5}{2} \quad (4.21)$$

και

$$4(1 - H')\alpha_0 = 2\sqrt{(2 - 2H)\gamma_0} \Rightarrow$$

βρίσκουμε

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{(2 - 2H)\gamma_0}}{1,5 - H} \quad (4.22)$$

Σύμφωνα λοιπόν με τις σχέσεις 4.20 και 2.58 παρατηρείται ότι το φάσμα ισχύος των συντελεστών α_i $s_a(\omega)$ ισούται με το φάσμα ισχύος ανέλιξης κλασματικού γκαουσιανου θορύβου με συντελεστή Hurst H' και διασπορά α_0 . Για τον λόγω αυτό, σύμφωνα με τις σχέσεις 2.55 και 2.56 Η ακολουθία των βαρών προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned}
a_j &= \frac{a_0}{2} [(j+1)^{2H'} + (j-1)^{2H'} - 2j^{2H'}] \\
&= \frac{a_0}{2} [(j+1)^{H+0.5} + (j-1)^{H+0.5} - 2j^{H+0.5}]
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Μια σχέση που προσεγγίζει ικανοποιητικά την παραπάνω είναι η εξής

$$\alpha_j = H'(2H' - 1)j^{2H'-2} \tag{4.24}$$

Άρα τα α_j είναι συνάρτηση δύναμης της υστέρησης με εκθέτη $b' = 2H' - 2$.

Για την επιλογή του πλήθους των συντελεστών που θα χρησιμοποιηθούν υπάρχουν οι εξής περιορισμοί. Όταν υπάρχουν $q + 1$ συντελεστές το μοντέλο μπορεί να διατηρήσει αυτοσυσχετίσεις μέχρι τάξης $q + 1$ της ανέλιξης X_i . Επίσης οι όροι α_j που αγνοούνται για $j > q$ δεν θα πρέπει να ξεπερνούν το αποδεκτό όριο ανοχής $\beta\alpha_0$. Οπότε σε περίπτωση που επιθυμείται να διατηρηθούν αυτοσυσχετίσεις m τάξης προκύπτει το κριτήριο

$$q \geq \max\left[m, \left(\frac{H^2 - 0.25}{2\beta}\right)^{1/(1.5-H)}\right] \tag{4.25}$$

Σε περίπτωση όπου το H είναι μεγάλο το πλήθος q μπορεί να είναι πολύ μεγάλο (της τάξεως των χιλιάδων). Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου εξαρτάται άμεσα από το πλήθος των συντελεστών που θα επιλεγούν, ωστόσο ακόμη και για $q \rightarrow \infty$ η μέθοδος δεν είναι απόλυτα ακριβής εξ' αιτίας του γεγονότος ότι η σχέση 4.24 είναι προσεγγιστική. Ωστόσο πιο ακριβείς προσεγγίσεις μπορούν να ληφθούν σύμφωνα με την μέθοδο που πρότεινε ο Koutsoyiannis (2000).

4.3 Μοντέλο συμμετρικού κυλιόμενου μέσου όρου (SMA) σε μεταβλητές ορισμένες σε δύο διαστάσεις

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει την συμπεριφορά πεδίων βροχής όσον αφορά τα στατιστικά χαρακτηριστικά της και την ύπαρξη χωρικής εμμονής και να προσπαθήσει να προσομοιώσει τέτοια πεδία βροχής.

Η έννοια της εμμονής στον χώρο είναι ίσως πιο εύληπτη σε σχέση με την χρονική εμμονή όπως διατυπώθηκε προηγουμένως. Η έννοια της χωρικής εμμονής συνίσταται στο γεγονός ότι υψηλές εντάσεις βροχής συγκεντρώνονται στον χώρο. Στην περίπτωση μεμονωμένου επεισοδίου βροχής, αυτό είναι κατανοητό μέσω του φυσικού μηχανισμού γένεσης των βροχοπτώσεων.

Παρακάτω θα γίνει προσπάθεια επέκτασης του μοντέλου SMA από την μια διάσταση στις δύο.

4.3.1 Μοντέλο

Το τυχαίο πεδίο που θα αναπαραχθεί είναι της μορφής $Z(x, y): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

Κατ' απόλυτη αντιστοιχία με την μονοδιάστατη ανέλιξη SMA, ορίζουμε τυχαίο πεδίο με

$$Z(x, y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \alpha(u, v)V(x - u, y - v)dudv \quad (4.26)$$

Για την περίπτωση πεδίου σε διακριτό χώρο έχουμε

$$Z(i, j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(m, n)V(i - m, j - n) \quad (4.27)$$

και αν το πλήθος των βαρών είναι πεπερασμένο

$$Z(i, j) = \sum_{m=-q}^q \sum_{n=-q}^q a(m, n)V(i - m, j - n) \quad (4.28)$$

V είναι τυχαίο ανεξάρτητο πανομοιότυπα κατανεμημένο πεδίο παραγόμενο από ολοκλήρωση λευκού θορύβου δύο διαστάσεων.

Στη παρακάτω προσέγγιση του θέματος θεωρούμε ότι το τυχαίο πεδίο Z θεωρείται ισότροπο και ομογενές.

Επίσης το τυχαίο πεδίο V θεωρούμε ότι έχει μέση τιμή $E[V] = 0$ και διασπορά $Var[V] = 1$.

Επειδή το τυχαίο πεδίο Z θεωρείται ισότροπο και ομοιογενές θα έχουμε ότι

$$Z(x, y) = Z(r), \text{ όπου } r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.29)$$

και κατ' αντιστοιχία σε διακριτό χώρο

$$Z(i, j) = Z(r), \text{ όπου } r = \sqrt{i^2 + j^2} \quad (4.30)$$

Η ανάλυση θα γίνει με την παραδοχή ότι

$$E[Z] = \mu_Z = 0 \quad (4.31)$$

Υπολογισμός συντελεστών

Για υπολογιστική ευκολία η ανάλυση θα γίνει σε όρους τυχαίου πεδίου αρχικά σε συνεχή χώρο, και στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην διακριτοποίηση της ανάλυσης αυτής.

Όπως προαναφέρθηκε για σημείο $\Sigma_1(x, y)$ του χώρου ισχύει:

$$Z(x, y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \alpha(u_1, v_1)V(x - u_1, y - v_1)du_1dv_1 \quad (4.32)$$

Ομοίως για σημείο $\Sigma_2(x + \eta, y + \xi)$ έχουμε

$$Z(x + \eta, y + \xi) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \alpha(u_2, v_2) V(x + \eta - u_2, y + \xi - v_2) du_2 dv_2 \quad (4.33)$$

Η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς μεταξύ των σημείων αυτών εξ' ορισμού είναι

$$\begin{aligned} \gamma(\eta, \xi) &= \text{Cov}[Z(x, y), Z(x + \eta, y + \xi)] = E[Z(x, y) \cdot Z(x + \eta, y + \xi)] \\ &= E \left[\left(\iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \alpha(u_1, v_1) V(x - u_1, y - v_1) du_1 dv_1 \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \alpha(u_2, v_2) V(x + \eta - u_2, y + \xi - v_2) du_2 dv_2 \right) \right] = \\ &= E \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(u_1, v_1) \alpha(u_2, v_2) V(x - u_1, y - v_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot V(x + \eta - u_2, y + \xi - v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2 \right) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[V(x - u_1, y - v_1) \\ &\quad \cdot V(x + \eta - u_2, y + \xi - v_2) \alpha(u_1, v_1) \alpha(u_2, v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Cov}[V(x - u_1, y - v_1), V(x + \eta - u_2, y + \xi - v_2)] \\ &\quad \cdot \alpha(u_1, v_1) \alpha(u_2, v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Επειδή όμως το πεδίο V παράγεται από λευκό θόρυβο, εξ' ορισμού

$$\text{Cov}[V(x, y), V(x', y')] = 0 \text{ για } x \neq x' \text{ ή } y \neq y' \quad (4.35)$$

και

$$\text{Cov}[V(x, y), V(x', y')] = \infty \text{ για } x = x' \text{ και } y = y' \quad (4.36)$$

Οπότε εκφράζοντας την παραπάνω σχέση συνάρτηση της συνάρτησης δ του Dirac παίρνουμε ότι

$$\text{Cov}[V(x, y), V(x', y')] = \delta(x' - x) \delta(y' - y) \quad (4.37)$$

όπου

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{για } x = 0 \\ 0 & \text{για } x \neq 0 \end{cases} \text{ και } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (4.38)$$

οπότε έχουμε ότι

$$\gamma(\eta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u_1 + \eta - u_2) \cdot \delta(v_1 + \xi - v_2) \alpha(u_1, v_1) \alpha(u_2, v_2) du_1 dv_1 \quad (4.39)$$

Λόγω των συναρτήσεων δ στο πολλαπλό αυτό ολοκλήρωμα, για

$$\begin{cases} u_2 = \eta - u_1 \\ v_2 = \xi + v_1 \end{cases} \quad (4.40)$$

το ολοκλήρωμα εκφυλίζεται στο

$$\begin{aligned} \gamma(\eta, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(u_1, v_1) \alpha(u_1 + \eta, v_1 + \xi) du_1 dv_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(u, v) \alpha(u + \eta, v + \xi) dudv \end{aligned} \quad (4.41)$$

ενώ για όλες τις άλλες τιμές μηδενίζεται.

Κατά συνέπεια

$$\gamma_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(u, v)]^2 dudv \quad (4.42)$$

Και για την περίπτωση τυχαίου πεδίου σε διακριτό χώρο με πεπερασμένο αριθμό συντελεστών

$$\gamma_0 \approx \sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q (a(i, j))^2 \quad (4.43)$$

Το φάσμα ισχύος της ανέλιξης θα είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς.

$$\begin{aligned} s_\gamma(\varphi, \omega) &= F^{-1}(\gamma(\eta, \xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\eta, \xi) e^{2\pi i(\eta\varphi + \xi\omega)} d\eta d\xi = \\ &= \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \left[\int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} \alpha(u, v) \alpha(u + \eta, v + \xi) dudv \right] e^{2\pi i(\eta\varphi + \xi\omega)} d\eta d\xi = \\ &= \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} \alpha(u, v) \alpha(u + \eta, v + \xi) e^{2\pi i(\eta\varphi + \xi\omega)} dudv d\eta d\xi = \\ &= \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} \alpha(u, v) \left[\int_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \alpha(u + \eta, v + \xi) e^{2\pi i(\eta\varphi + \xi\omega)} d\eta d\xi \right] dudv \end{aligned} \quad (4.44)$$

Θέτουμε

$$\begin{cases} u + \eta = z \\ v + \xi = w \end{cases} \quad (4.45)$$

και παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός έχει Ιακωβιανή ορίζουσα ίση με την μονάδα,

Υπενθυμίζουμε ότι για $z = z(u, v)$ και $w = w(u, v)$ η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού ορίζεται ως

$$JF = \frac{\partial(z, w)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ w_u & w_v \end{vmatrix} \quad (4.46)$$

όπου

$$z_u = \frac{\partial z}{\partial u}, z_v = \frac{\partial z}{\partial v}, w_u = \frac{\partial w}{\partial u}, w_v = \frac{\partial w}{\partial v} \quad (4.47)$$

και (Παντελίδης, 2001)

$$\iint_{F(G)} h(z, w) dz dw = \iint_G h(z(u, v), w(u, v)) |JF| du dv \quad (4.48)$$

Κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα μετά τον μετασχηματισμό γράφεται

$$\begin{aligned} & \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} a(u, v) \left[\int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{w=-\infty}^{\infty} a(z, w) e^{2\pi i(z\varphi - u\varphi + w\omega - v\omega)} dz dw \right] du dv = \\ & = \left[\int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} a(u, v) e^{-2\pi i(u\varphi + v\omega)} du dv \right] * \left[\int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{w=-\infty}^{\infty} a(z, w) e^{2\pi i(z\varphi + w\omega)} dz dw \right] = \\ & = s_a^*(\varphi, \omega) s_a(\varphi, \omega) \end{aligned} \quad (4.49)$$

όπου $s_a^*(\varphi, \omega)$ ο συζυγής του $s_a(\varphi, \omega)$

Αφού η συνάρτηση των βαρών ορίσθηκε να είναι πραγματική και άρτια, το φάσμα ισχύος της θα είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση οπότε

$$s_a^*(\varphi, \omega) = s_a(\varphi, \omega) \quad (4.50)$$

Επομένως

$$s_\gamma(\varphi, \omega) = [s_a(\varphi, \omega)]^2 \Rightarrow s_a(\varphi, \omega) = \sqrt{s_\gamma(\varphi, \omega)} \quad (4.51)$$

οπότε αν είναι γνωστή η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς μπορεί να βρεθεί και η συνάρτηση των συντελεστών του μοντέλου SMA σε δυο διαστάσεις.

Υπολογισμός Φάσματος ισχύος

Όπως προαναφέρθηκε, το πεδίο θα θεωρηθεί ισότροπο. Συνεπώς η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς μπορεί να απλοποιηθεί καθώς είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης μεταξύ των σημείων.

Σε συνεχή ισότροπο και ομογενή χώρο, η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς τυχαίου πεδίου κλασματικού γκαουσιανού θορύβου μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση δύναμης της απόστασης r , κατ' αντιστοιχία με την ανέλιξη FGN σε συνεχή χρόνο ως

$$\gamma(r) = Ar^{-b} \quad (4.52)$$

όπου

$$b = 4(1 - H) \Leftrightarrow H = 1 - \frac{b}{4} \quad (4.53)$$

Το φάσμα ισχύος πεδίου με κυκλική συμμετρία υπολογίζεται εισάγοντας τον μετασχηματισμό Hankel (Bracewell 2000). Ο μετασχηματισμός Hankel ορίζεται ως ο μονοδιάστατος μετασχηματισμός με πυρήνα την συνάρτηση Bessel.

Όταν υπάρχει κυκλική συμμετρία, τότε

$$f'(x, y) = f(r) \quad (4.54)$$

όπου

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (4.55)$$

Τότε και ο μετασχηματισμός Fourier θα είναι κυκλικά συμμετρικός

$$F'(u, v) = F(q) \quad (4.56)$$

όπου

$$q^2 = u^2 + v^2 \quad (4.57)$$

Προκύπτει ότι (Bracewell, 2000)

$$F(q) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi qr) r dr \quad (4.58)$$

$$\text{και } f(r) = 2\pi \int_0^{\infty} F(q) J_0(2\pi qr) q dq \quad (4.59)$$

Άρα στην περίπτωση το φάσματος ισχύος του πεδίου θα έχουμε

$$s_\gamma(q) = 2\pi \int_0^{\infty} \gamma(r) J_0(2\pi qr) r dr = 2\pi \int_0^{\infty} r^{1-b} J_0(2\pi qr) dr \quad (4.60)$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος οδηγεί στη λύση

$$s_{\gamma}(q) = A\pi^{b-1} \frac{\Gamma(1 - \frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{b}{2})} q^{b-2} \quad (4.61)$$

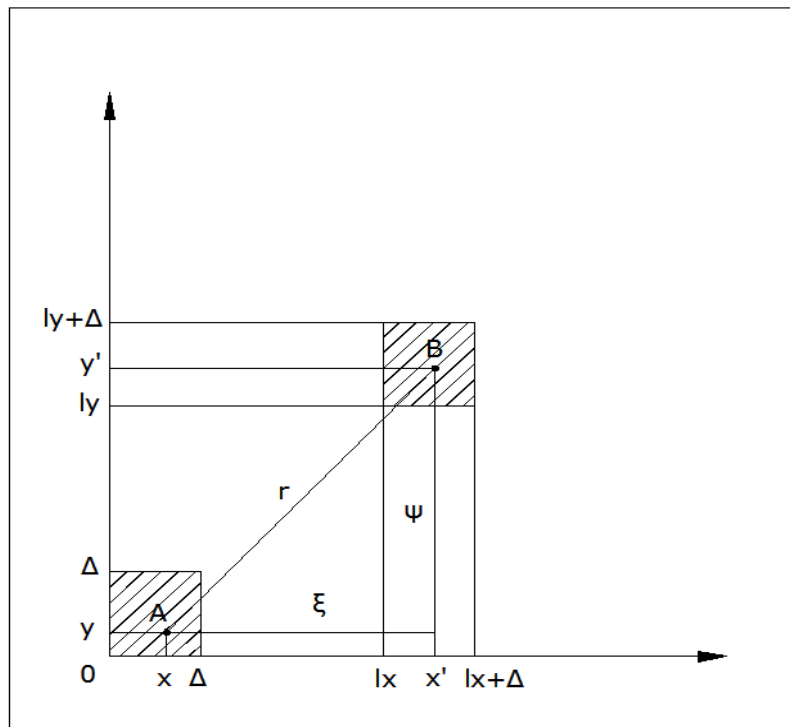
όπου $\Gamma(x)$ η συνάρτηση Γαμα

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (4.62)$$

Διακριτοποίηση της συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς

Επειδή σε πραγματικά προβλήματα, οι μετρήσεις είναι σε διακριτό χώρο, κρίνεται σκόπιμο να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς σε διακριτό χώρο.

Έστω δύο σημεία του χώρου (x, y) και (x', y') όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1 διακριτοποίηση συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

Η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς σε διακριτό χώρο προκύπτει με την ολοκλήρωση της σχέσης 4.52 πάνω στα στοιχεία A και B. Το σημείο (x, y) ανήκει στο A και το σημείο (x', y') στο B. Η μεταξύ τους απόσταση είναι

$$r = \sqrt{\xi^2 + \psi^2} \text{ όπου } \begin{cases} \xi = x - x' \\ \psi = y - y' \end{cases} \quad (4.63)$$

Τα στοιχεία A και B απέχουν κατά $\sqrt{l_x^2 + l_y^2}$, όπου $\begin{cases} l_x = k_x \Delta \\ l_y = k_y \Delta \end{cases}$, η υστέρηση στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα.

Η αυτοσυνδιασπορά λοιπόν των δύο στοιχείων ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς πάνω στα στοιχεία αυτά.

$$\begin{aligned} \gamma(k_x, k_y) = I &= \int_{x=0}^{\Delta} \int_{y=0}^{\Delta} \int_{x'=lx}^{lx+\Delta} \int_{y'=ly}^{ly+\Delta} f(r^2) dx dy dx' dy' = \\ &= \int_{x=0}^{\Delta} \int_{y=0}^{\Delta} \int_{x'=kx\Delta}^{(kx+1)\Delta} \int_{y'=ky\Delta}^{(ky+1)\Delta} f((x-x')^2 + (y-y')^2) dx dy dx' dy' \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\text{όπου } f(r^2) = \gamma(r) \quad (4.65)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ \xi = x - x' \\ \psi = y - y' \end{cases} \quad (4.66)$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού θα είναι

$$JF = \begin{vmatrix} x_x & x_y & x_\xi & x_\psi \\ y_x & y_y & y_\xi & y_\psi \\ x'_x & x'_y & x'_\xi & x'_\psi \\ y'_x & y'_y & y'_\xi & y'_\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Και ο νέος τόπος ολοκλήρωσης προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 \leq x \leq \Delta \\ l_x \leq x' \leq l_x + \Delta \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \Delta \\ k_x \Delta \leq x' \leq (k_x + 1)\Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \Delta \\ k_x \Delta \leq x - \xi \leq (k_x + 1)\Delta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \Delta \\ -(k_x + 1)\Delta \leq x' \leq -k_x \Delta \end{cases} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \Delta \\ -(k_x + 1)\Delta \leq \xi \leq -(k_x - 1)\Delta \end{cases} \quad (4.68)$$

Μελετώνται οι εξής δυο περιπτώσεις.

$$(A) -(k_x + 1)\Delta \leq \xi \leq -k_x \Delta$$

$$(B) -k_x \Delta \leq \xi \leq -(k_x - 1)\Delta$$

Στην περίπτωση (Α) όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2 η συνάρτηση $\xi = x - x'$ παριστάνεται με ευθεία σε επίπεδο με άξονες x, x'

Ισχύει ότι

$$0 \leq x \leq \Delta \text{ και } k_x \Delta \leq x' \leq (k_x + 1)\Delta \quad (4.69)$$

Για να ισχύει

$$-(k_x + 1)\Delta \leq \xi \leq -k_x \Delta \quad (4.70)$$

θα πρέπει το σύνολο των σημείων (x, x') να ανήκει στο γραμμοσκιασμένο χωρίο.

Επίσης θα πρέπει να ισχύει

$$x + k_x \leq x' \quad (4.71)$$

Από το σχήμα 4.2 προκύπτει ότι για

$$\xi = -k_x \Delta - \alpha \Leftrightarrow \alpha = -k_x \Delta - \xi \quad (4.72)$$

με

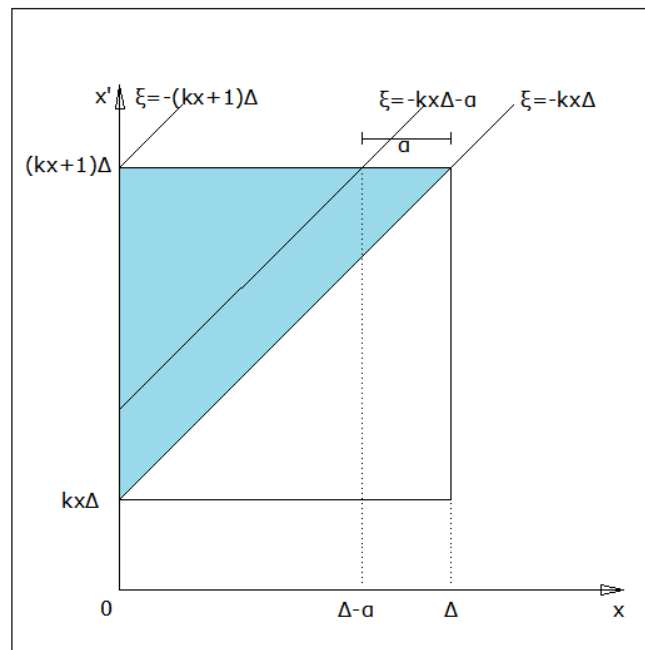
$$0 \leq \alpha \leq \Delta \quad (4.73)$$

θα πρέπει

$$0 \leq x \leq \Delta - \alpha \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \Delta + k_x \Delta + \xi \Leftrightarrow 0 \leq x \leq (k_x + 1)\Delta + \xi \quad (4.74)$$

Οπότε τελικά έχουμε

$$-(k_x + 1)\Delta \leq \xi \leq -k_x \Delta \Leftrightarrow 0 \leq x \leq (k_x + 1)\Delta + \xi \quad (4.75)$$



Σχήμα 4.2

Στην περίπτωση (B) ομοίως με προηγουμένως έχουμε ότι σύμφωνα με το Σχήμα 4.3

για

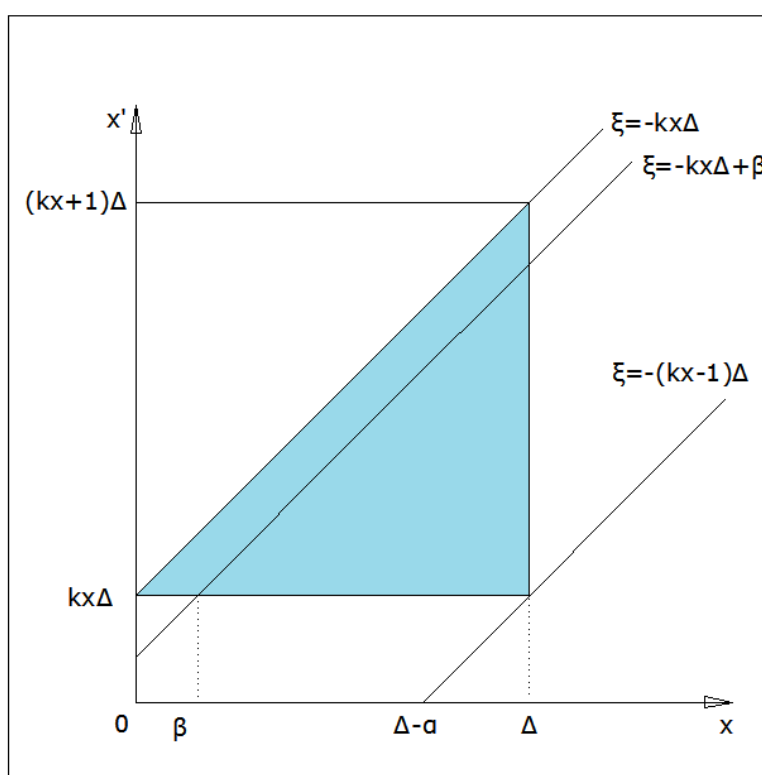
$$\xi = -k_x \Delta + \beta \Leftrightarrow \beta = k_x \Delta + \xi \text{ με } 0 \leq \beta \leq \Delta \quad (4.76)$$

θα πρέπει

$$\beta \leq x \leq \Delta \Leftrightarrow k_x \Delta + \xi \leq x \leq \Delta \quad (4.77)$$

και τελικά

$$-k_x \Delta \leq \xi \leq -(k_x + 1)\Delta \Leftrightarrow k_x \Delta + \xi \leq x \leq \Delta \quad (4.78)$$



Σχήμα 4.3

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία σε επίπεδο με άξονες y, y' , προκύπτουν ακριβώς όμοια

$$\begin{cases} -(k_y + 1)\Delta \leq \psi \leq -k_y \Delta \Leftrightarrow 0 \leq y \leq (k_y + 1)\Delta + \psi \\ -k_y \Delta \leq \psi \leq -(k_y - 1)\Delta \Leftrightarrow k_y \Delta + \psi \leq y \leq \Delta \end{cases} \quad (4.79)$$

Αθροιστικά ο αρχικός τύπος ολοκλήρωσης μετά τον μετασχηματισμό μετατρέπεται σε αυτόν του Πίνακα 4.1.

Τόπος ολοκλήρωσης μετασχηματισμένου ολοκληρώματος	$-(k_x + 1)\Delta \leq \xi \leq -k_x\Delta$	$-k_x\Delta \leq \xi \leq -(k_x - 1)\Delta$
$-(k_y + 1)\Delta \leq \psi \leq -k_y\Delta$	$0 \leq x \leq (k_x + 1)\Delta + \xi$ $0 \leq y \leq (k_y + 1)\Delta + \psi$ (1)	$k_x\Delta + \xi \leq x \leq \Delta$ $0 \leq y \leq (k_y + 1)\Delta + \psi$ (2)
$-k_y\Delta \leq \psi \leq -(k_y - 1)\Delta$	$0 \leq x \leq (k_x + 1)\Delta + \xi$ $k_y\Delta + \psi \leq y \leq \Delta$ (3)	$k_x\Delta + \xi \leq x \leq \Delta$ $k_y\Delta + \psi \leq y \leq \Delta$ (4)

Πίνακας 4.1

Το συνολικό ολοκλήρωμα θα προκύψει ως άθροισμα του ολοκληρώματος στις 4 επιμέρους περιοχές του συνολικού τόπου ολοκλήρωσης.

Για την πρώτη περιοχή

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\xi=-(k_x+1)\Delta}^{-k_x\Delta} \int_{\psi=(k_y+1)\Delta}^{-k_y\Delta} \int_{x=0}^{(k_x+1)\Delta+\xi} \int_{y=0}^{(k_y+1)\Delta+\psi} f(\xi^2 + \psi^2) dx dy d\xi d\psi = \\
&= \int_{\xi=(k_x+1)\Delta}^{-k_x\Delta} \int_{\psi=(k_y+1)\Delta}^{-k_y\Delta} f(\xi^2 + \psi^2) ((k_x + 1)\Delta + \xi) ((k_y + 1)\Delta + \psi) d\xi d\psi \quad (4.80)
\end{aligned}$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές

$$\begin{cases} \xi' = k_x\Delta + \xi \\ \psi' = k_y\Delta + \psi \end{cases} \quad (4.81)$$

τα όρια ολοκλήρωσης μετασχηματίζονται σε

$$\begin{cases} \xi' - k_x\Delta = -(k_x + 1)\Delta \\ \xi' - k_x\Delta = -k_x\Delta \\ \psi' - k_y\Delta = -(k_y + 1)\Delta \\ \psi' - k_y\Delta = -k_y\Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi' = -\Delta \\ \xi' = 0 \\ \psi' = -\Delta \\ \psi' = 0 \end{cases} \quad (4.82)$$

οπότε

$$I_1 = \int_{\xi'=-\Delta}^0 \int_{\psi'=-\Delta}^0 f [(\xi' - k_x\Delta)^2 + (\psi' - k_y\Delta)^2] (\Delta + \xi') (\Delta + \psi') d\xi' d\psi' \quad (4.83)$$

Αφού έχουμε ότι

$$\begin{cases} \xi' \leq 0 \\ \psi' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\xi'| = -\xi' \\ |\psi'| = -\psi' \end{cases} \quad (4.84)$$

το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί και ως

$$I_1 = \int_{\xi'=-\Delta}^0 \int_{\psi'=-\Delta}^0 f [(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta - |\xi'|) (\Delta - |\psi'|) d\xi' d\psi' \quad (4.85)$$

Ομοίως θα έχουμε για την περιοχή 2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\xi=-k_x \Delta}^{-(k_x-1)\Delta} \int_{\psi=(k_y+1)\Delta}^{-k_y \Delta} \int_{x=k_x \Delta + \xi}^{\Delta} \int_{y=0}^{(k_y+1)\Delta + \psi} f(\xi^2 + \psi^2) dx dy d\xi d\psi = \\ &= \int_{\xi=-k_x \Delta}^{-(k_x-1)\Delta} \int_{\psi=(k_y+1)\Delta}^{-k_y \Delta} f(\xi^2 + \psi^2) (-(k_x - 1)\Delta - \xi) ((k_y + 1)\Delta + \psi) d\xi d\psi \end{aligned} \quad (4.86)$$

με την αντίστοιχη αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\xi'=0}^{\Delta} \int_{\psi'=-\Delta}^0 f [(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta - \xi') (\Delta + \psi') d\xi' d\psi' \\ I_2 &= \int_{\xi'=0}^{\Delta} \int_{\psi'=-\Delta}^0 f [(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta - |\xi'|) (\Delta - |\psi'|) d\xi' d\psi' \end{aligned} \quad (4.87)$$

Ομοίως για την περιοχή 3

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\xi=-(k_x+1)\Delta}^{-k_x \Delta} \int_{\psi=k_y \Delta}^{-(k_y-1)\Delta} \int_{x=0}^{(k_x+1)\Delta + \xi} \int_{y=k_y \Delta + \psi}^{\Delta} f(\xi^2 + \psi^2) dx dy d\xi d\psi = \\ &= \int_{\xi=-(k_x+1)\Delta}^{-k_x \Delta} \int_{\psi=k_y \Delta}^{-(k_y-1)\Delta} f(\xi^2 + \psi^2) ((k_x + 1)\Delta + \xi) (-(k_y - 1)\Delta - \psi) d\xi d\psi \end{aligned} \quad (4.88)$$

και με την αντίστοιχη αλλαγή μεταβλητών

$$I_3 = \int_{\xi'=-\Delta}^0 \int_{\psi'=0}^{\Delta} f [(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta + \xi') (\Delta - \psi') d\xi' d\psi'$$

$$I_3 = \int_{\xi'=-\Delta}^0 \int_{\psi'=0}^{\Delta} f [(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta - |\xi'|) (\Delta - |\psi'|) d\xi' d\psi' \quad (4.89)$$

Τέλος για την περιοχή 4

$$I_4 = \int_{\xi=-k_x \Delta}^{-(k_x-1)\Delta} \int_{\psi=k_y \Delta + \xi}^{-(k_y-1)\Delta} \int_{x=0}^{\Delta} \int_{y=k_y \Delta + \psi}^{\Delta} f(\xi^2 + \psi^2) dx dy d\xi d\psi =$$

$$= \int_{\xi=-k_x \Delta}^{-(k_x-1)\Delta} \int_{\psi=k_y \Delta + \xi}^{-(k_y-1)\Delta} f(\xi^2 + \psi^2) (-(k_x - 1)\Delta - \xi) (-(k_y - 1)\Delta - \psi) d\xi d\psi \quad (4.90)$$

και με την αντίστοιχη αλλαγή μεταβλητών

$$I_4 = \int_{\xi'=0}^{\Delta} \int_{\psi'=0}^{\Delta} f [(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta - \xi') (\Delta - \psi') d\xi' d\psi'$$

$$I_4 = \int_{\xi'=-\Delta}^{\Delta} \int_{\psi'=0}^{\Delta} f [(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta - |\xi'|) (\Delta - |\psi'|) d\xi' d\psi' \quad (4.91)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (4.92)$$

οπότε

$$I = 2 \int_{\xi'=-\Delta}^{\Delta} \int_{\psi'=\Delta}^{\Delta} f [(\xi' - k_x \Delta)^2 + (\psi' - k_y \Delta)^2] (\Delta - |\xi'|) (\Delta - |\psi'|) d\xi' d\psi' \quad (4.93)$$

απ' όπου συνεπάγεται

$$I = 2 \int_{\xi=-\Delta}^{\Delta} \int_{\psi=\Delta}^{\Delta} f [(\xi - k_x \Delta)^2 + (\psi - k_y \Delta)^2] (\Delta - |\xi|) (\Delta - |\psi|) d\xi d\psi \quad (4.94)$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος μπορεί να γίνει αριθμητικά θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο χώρος ολοκλήρωσης έχει $\Delta = 1$ (μιας και η κλίμακα απεικόνισης των δεδομένων μπορεί να είναι οποιαδήποτε πχ $\Delta = 1$ μπορεί να αντιστοιχεί σε πραγματική απόσταση 53 km) και υπολογίζεται η τιμή του ολοκληρώματος αυτού για διάφορες τιμές των k_x , k_y και b .

Εν συνεχεία προκύπτει με αριθμητική βελτιστοποίηση ότι οι λύσεις του παραπάνω ολοκληρώματος μπορούν να προσεγγισθούν ικανοποιητικά από την σχέση (Κουτσογιάννης, προσωπικές σημειώσεις)

$$\gamma(s) = A(b) \left(s - \frac{0.1b^{1.4}}{s} \right)^{-b} \quad (4.95)$$

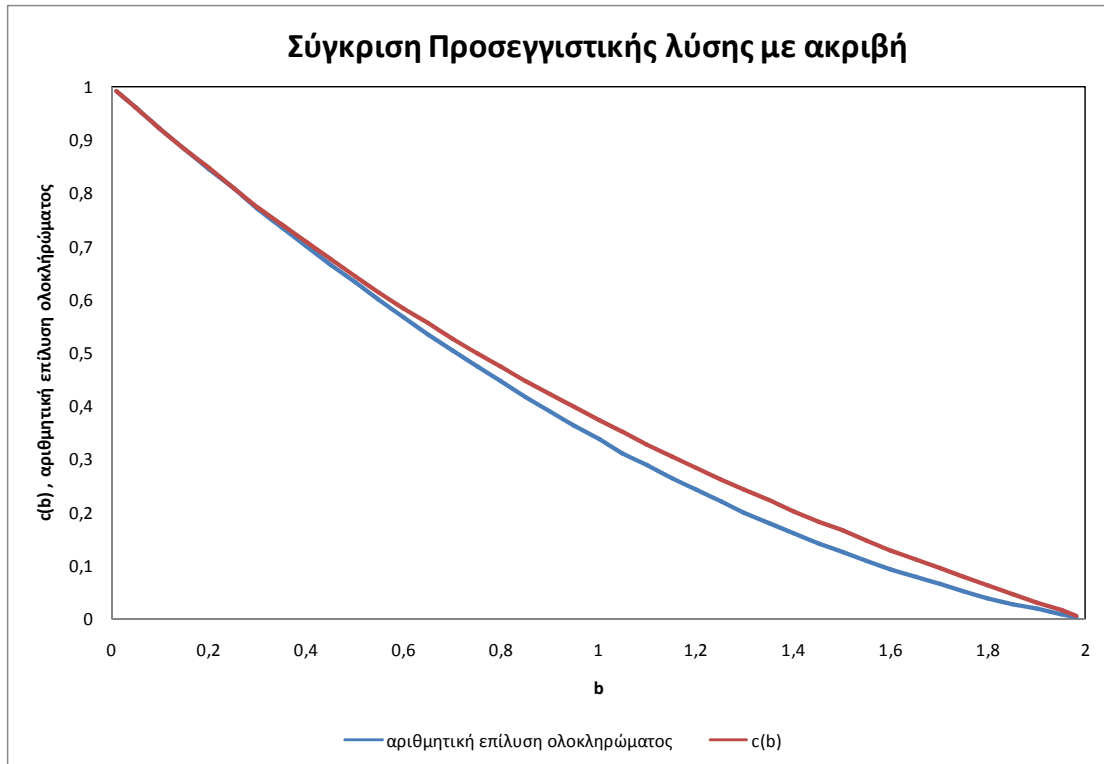
στην οποία

$$A(b) = \frac{\gamma_0}{\frac{2\pi}{2-b} - \frac{7\pi-6}{2(3-b)} + \frac{2\pi}{3(4-b)}} \quad (4.96)$$

$$A(b) = \gamma_0 c(b) \quad (4.97)$$

όπου

$$c(b) = \frac{1}{\frac{2\pi}{2-b} - \frac{7\pi-6}{2(3-b)} + \frac{2\pi}{3(4-b)}} \quad (4.98)$$



Σχήμα 4.4

Συνεπώς διαιρώντας με την διασπορά προκύπτει η προσεγγιστική συνάρτηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης

$$\rho(s) = c(b) \left(s - \frac{0.1b^{1.4}}{s} \right)^{-b}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\frac{2\pi}{2-b} - \frac{7\pi-6}{2(3-b)} + \frac{2\pi}{3(4-b)}} \left(s - \frac{0.1b^{1.4}}{s} \right)^{-b}, & s \geq 1 \\ 1, & s = 0 \end{cases} \quad (4.99)$$

Υπολογισμός ακολουθίας συντελεστών βάρους

Όπως είδαμε

$$s_\gamma(q) = A\pi^{b-1} \frac{\Gamma(1-\frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{b}{2})} q^{b-2} \quad (4.100)$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$s_\gamma(q) = \gamma_0 c(b) d(b) q^{b-2} \quad (4.101)$$

$$\text{με } d(b) = \pi^{b-1} \frac{\Gamma(1 - \frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{b}{2})} \quad (4.102)$$

Επίσης, για το φάσμα ισχύος των συντελεστών όπως είδαμε ισχύει

$$s_a(\varphi, \omega) = \sqrt{s_\gamma(\varphi, \omega)} \quad (4.103)$$

και επειδή θεωρείται το πεδίο ισότροπο,

$$s_a(q) = \sqrt{s_\gamma(q)} \quad (4.104)$$

οπότε συνδυάζοντας τις 4.104 και 4.101 καταλήγουμε στη σχέση

$$s_a(q) = \sqrt{\gamma_0 c(b) d(b) q^{b-2}} = \sqrt{\gamma_0 c(b) d(b) q^{\frac{b}{2}-1}} \quad (4.105)$$

Θέτοντας

$$b' - 2 = \frac{b}{2} - 1 \Leftrightarrow b' = \frac{b}{2} + 1 \Leftrightarrow b = 2b' - 2 \quad (4.106)$$

έχουμε ότι

$$s_a(q) = \alpha_0 c(b') d(b') q^{b'-2} \quad (4.107)$$

όπου

$$\sqrt{\gamma_0 c(b) d(b)} = \alpha_0 c(b') d(b') \Leftrightarrow \alpha_0 = \sqrt{\gamma_0} \frac{\sqrt{c(b)} \sqrt{d(b)}}{c(b') d(b')} \quad (4.108)$$

Η σχέση 4.107 είναι ισοδύναμη με το φάσμα ισχύος τυχαίου πεδίου με διασπορά α_0 και $b = b'$.

Συνεπώς από την σχέση 4.95 προκύπτει ότι η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς του πεδίου αυτού που θα ισούται με την συνάρτηση των συντελεστών $\alpha(s)$ του συνθετικού τυχαίου πεδίου θα είναι

$$\alpha(s) = \alpha_0 c(b') \left(s - \frac{0.1b'^{1.4}}{s} \right)^{-b'} \quad (4.109)$$

όπου s η απόσταση, ήτοι

$$s = \sqrt{i^2 + j^2} \quad (4.110)$$

4.3.2 Εκτίμηση παραμέτρων

Για την αναπαραγωγή τυχαίου πεδίου σύμφωνα με το μοντέλο SMA σε δυο διαστάσεις, απαιτείται αρχικά από το δείγμα (μιας και το πεδίο θεωρείται εργοδικό) να υπολογιστεί ο συντελεστής Hurst του πεδίου αυτού.

Η διαδικασία υπολογισμού βασίζεται όπως και στην περίπτωση των μονοδιάστατων τυχαίων μεταβλητών στον υπολογισμό των διασπορών σε συναθροισμένες κλίμακες.

Για την περίπτωση του τυχαίου πεδίου έχουμε ότι το συναθροισμένο πεδίο σε κλίμακα k είναι

$$Z^{(k)}(m, n) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=(m-1)k+1}^{mk} \sum_{j=(n-1)k+1}^{nk} Z(i, j) \quad (4.111)$$

και κατ'αντιστοιχία ορίζεται η ανέλιξη FGN στις δύο διαστάσεις ως

$$(Z_i^{(k)} - \mu) =_d \left(\frac{k^2}{l^2} \right)^{H-1} (Z_j^{(l)} - \mu) \quad (4.112)$$

οπότε υψώνοντας την 4.112 στο τετράγωνο για $l = 1$ και παίρνοντας αναμενόμενες τιμές βρίσκουμε ότι

$$\gamma_0^{(k)} = k^{4H-4} \gamma_0 \quad (4.113)$$

Ορισμός ημιμεταβλητογράμματος

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο εδάφιο, ως αυτοσυσχετόγραμμα ορίζεται η απεικόνιση της συνάρτησης

$$2\gamma(h) = E\{[z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{x}')]^2\} = 2\text{Var}[z(\mathbf{x})] - 2\text{Cov}[z(\mathbf{x}), z(\mathbf{x}')] \quad h = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (4.114)$$

Στην περίπτωση του παραγόμενου πεδίου από το σχήμα SMA, παρουσιάζεται το πρόβλημα ότι σε συνεχή χώρο όπου

$$Z(x, y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \alpha(u, v)V(x - u, y - v)dudv \quad (4.115)$$

$$\text{με } \text{Var}[V] = \infty$$

Τότε θα ισχύει και

$$\text{Var}[Z(x)] = \infty \text{ για κάθε } x \quad (4.116)$$

Συνεπώς το ημιμεταβλητόγραμμα δεν ορίζεται σε συνεχή χώρο.

Εν αντιθέσει, σε διακριτό χώρο, όπου

$$Z(i, j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(m, n)V(i - m, j - n) \quad (4.117)$$

με

$$\text{Var}[V] = c, \quad c \in R \quad (4.118)$$

διότι το V προκύπτει από ολοκλήρωση πεδίου λευκού θορύβου, άρα έχει πεπερασμένη διασπορά, μπορεί να ορισθεί το ημιμεταβλητόγραμμα του διακριτού πεδίου σύμφωνα με την σχέση 3.68.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή μοντέλου

5.1 Δεδομένα

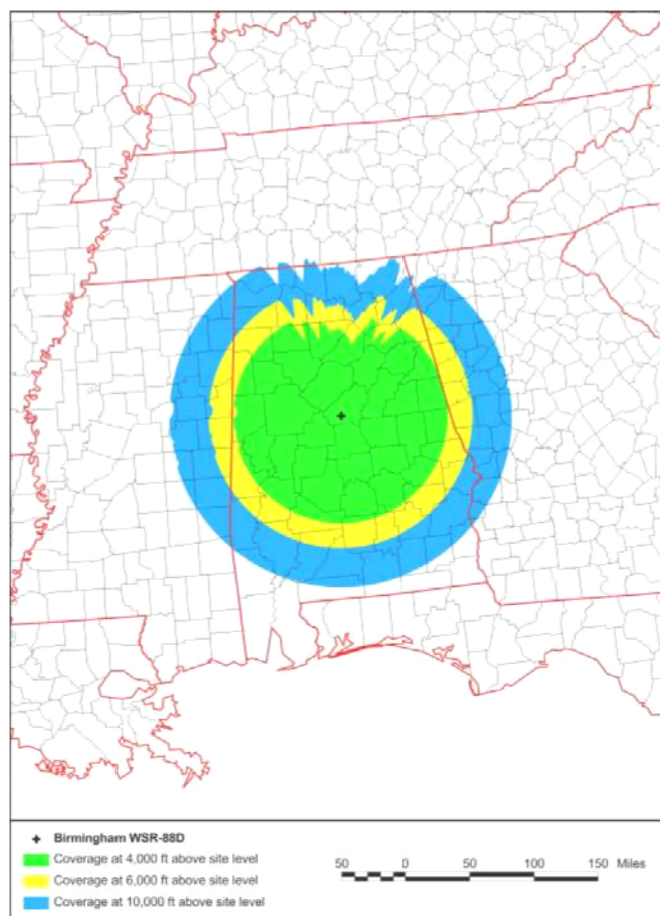
Η εφαρμογή περιλαμβάνει ανάλυση και επεξεργασία από μετρήσεις δυο πεδίων βροχής. Τα δυο αυτό πεδία διαφέρουν μεταξύ τους στον τρόπο καταγραφής τους, στην γεωγραφική έκταση που καλύπτουν καθώς και στον χρόνο αναφοράς μέτρησης των δεδομένων. Αυτό έχει ως στόχο να δείξει την γενικότητα εμφάνισης του φαινομένου της εμμονής μακράς κλίμακας.

Το πρώτο δείγμα μετρήσεων, αναφέρεται στις 9-10 Ιανουαρίου 2006, σε γεωγραφική περιοχή με συντεταγμένες: γεωγραφικό μήκος (78°E-92°E), γεωγραφικό πλάτος (55°S-9°N). (Ινδικός ωκεανός, νοτιοανατολικά της Ινδίας). Οι μετρήσεις έχουν καταγραφεί σε κানাβο 0,25°×0,25° και αφορούν σε συνολικό ύψος βροχής κατά τη διάρκεια του διημέρου αυτού.

Ο τρόπος καταγραφής των δεδομένων, είναι μέσω δορυφόρου και τα δεδομένα είναι διαθέσιμα μέσω της βάσης δεδομένων της NASA (http://disc2.nascom.nasa.gov/Giovanni/tovas/TRMM_V6.3B42.shtml). Γενικότερα, (Κουτσογιάννης και Ξανθόπουλος, 1999), οι πληροφορίες λαμβάνονται από δορυφόρους τόσο στην αόρατη όσο και στην ορατή και υπέρυθρη περιοχή του φάσματος ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (Engman and Gurney, 1991. Engman, 1993). Ιδιαίτερη σημασία έχουν τα είδωλα την υπέρυθρη περιοχή, δεδομένου ότι από τις μετρήσεις της ενέργειας των υπέρυθρων ακτινοβολιών μπορεί να εξαχθεί, μέσω του νόμου των Stefan – Boltzmann, η θερμοκρασία των σωμάτων που εκπέμπουν την ακτινοβολία και εν προκειμένω των σύννεφων στην ανώτερη περιοχή τους. Με δεδομένη την θερμοβαθμίδα της ατμόσφαιρας, η θερμοκρασία της ανώτερης περιοχής των σύννεφων μπορεί να αξιοποιηθεί για την εκτίμηση του ύψους των σύννεφων. Μικρή θερμοκρασία της κορυφής των σύννεφων σημαίνει μεγάλο πάχος σύννεφων και συνεπώς μεγαλύτερη πιθανότητα κατακρήμνισης. Με σύγκριση των αναλύσεων των υπέρυθρων ειδώλων με πραγματικά βροχομετρικά δεδομένα εδάφους, προκύπτουν οι εμπειρικές σχέσεις που μπορούν να οδηγήσουν στην εκτίμηση του ύψους βροχής σε περιοχές όπου δεν υπάρχουν εγκατεστημένοι βροχομετρικοί σταθμοί. Δυστυχώς όμως οι εκτιμήσεις των υψών βροχής από μετρήσεις δορυφόρων είναι χονδροειδείς, ωστόσο μπορούν να δείξουν αρκετά ικανοποιητικά την τάση συγκέντρωσης υψηλών η χαμηλών τιμών οπότε μπορούν να απεικονίσουν την δομή της αυτοσυσχέτισης του πεδίου βροχής, φαινόμενο που κυρίως μας απασχολεί στην εργασία αυτή. Ωστόσο οι καταγραφές μέσω δορυφόρων της NASA που λαμβάνουν μέρος στο πρόγραμμα TRMM (Tropical Rainfall Measuring Mission) προκειμένου να μειωθεί η αβεβαιότητα στην εκτίμηση της έντασης των πεδίων βροχόπτωσης, χρησιμοποιούν συνδυασμό της τεχνολογίας radar εγκατεστημένων στους δορυφόρους, μαζί με τον τρόπο καταγραφής που προαναφέρθηκε. Πιο συγκεκριμένα για την καταγραφή μέσω δορυφόρων την χωρικής δομής επεισοδίων βροχόπτωσης χρησιμοποιούνται δύο δέκτες ακτινοβολίας στο φάσμα των μικροκυμάτων και της υπέρυθρης-ορατής ακτινοβολίας καθώς και ένα εγκατεστημένο radar η λειτουργία του οποίου θα αναλυθεί

παρακάτω. Τα όργανα που χρησιμοποιούνται έχουν τις εξής ονομασίες. Η συσκευή radar ως (PR Precipitation radar), η συσκευή ανίχνευσης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στο φάσμα των μικροκυμάτων (TRMM Microwave Imager) που μπορεί να αναγνωρίσει συχνότητες από 10.7 GHz – 85.5 GHz που με κατάλληλη επεξεργασία τις αντιστοιχεί σε ένταση βροχόπτωσης και τέλος η συσκευή ανίχνευσης υπέρυθρης και ορατής ακτινοβολίας (VIRS Visible and Infrared Scanner) που μπορεί να επεξεργαστεί ακτινοβολίες με μήκη κύματος από 0.63 μm – 12 μm .

Το δεύτερο δείγμα καταγραφών αφορά μετρήσεις με τη χρήση radar – Doppler εγκατεστημένα στη γήινη επιφάνεια. Το δείγμα που επελέγη αφορά επεισόδιο βροχόπτωσης στις 21 Φεβρουαρίου 2006 και για την ακρίβεια οι μετρήσεις είναι στιγμιαία ένταση βροχόπτωσης στις 16:00. Το δείγμα αυτό κατεγράφη από την εγκατάσταση μετεωρολογικού σταθμού στην πολιτεία Alabama των Ηνωμένων πολιτών περιοχή Brandon. Η ονομασία της εγκατάστασης radar είναι KDGX και τα δεδομένα καλύπτουν ακτίνα 240 km.



Σχήμα 5.1

Τα δεδομένα διατίθενται ελεύθερα από την μετεωρολογική υπηρεσία των Ηνωμένων πολιτών NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) στην διεύθυνση (<http://www.ncdc.noaa.gov/nexradinv/index.jsp>). Πιο συγκεκριμένα η εγκατάσταση απ' την οποία επιλέχθηκαν τα δεδομένα, είναι μέρος του δικτύου radar NEXRAD το οποίο αποτελείται από 159 εγκαταστάσεις radar – Doppler που καλύπτουν όλη την έκταση των

Ηνωμένων Πολιτειών. Η λειτουργία των radar-Doppler, βασίζεται στην ανάκλαση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (Κουτσογιάννης, Ξανθόπουλος, 1999). Το ραντάρ αποτελείται από ένα πομπό και ένα δέκτη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στην περιοχή των μικροκυμάτων. Ο πομπός εκπέμπει παλμούς μικροκυμάτων, οι οποίοι ανακλώνται από τα υδρομετέωρα που συναντούν στη διαδρομή τους και το σήμα που επιστρέφει λαμβάνεται από τον δέκτη, μεγεθύνεται και αναλύεται κατάλληλα. Ο χρόνος που μεσολαβεί από την εκπομπή και την λήψη, δείχνει την απόσταση στην οποία γίνεται η αντανάκλαση, ενώ η ισχύς του σήματος που επιστρέφει αντιστοιχεί στην ένταση βροχόπτωσης στην θέση ανάκλασης. Στην περίπτωση των radar-Doppler υπάρχει και η δυνατότητα μέτρησης πεδίων ταχυτήτων που μεταφέρουν τα σύννεφα, γεγονός που δεν μας απασχολεί στην παρούσα εργασία.

5.2 Παραγωγή Συνθετικών Πεδίων

Για την εφαρμογή του μοντέλου SMA σε δύο διαστάσεις προκειμένου να αναπαράγουμε απεικονίσεις τυχαίων πεδίων με δεδομένα στατιστικά χαρακτηριστικά ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία.

1. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό 3.72 που εισήχθη, μετασχηματίζονται τα δεδομένα μας έτσι ώστε να ακολουθούν με καλύτερη προσέγγιση την κανονική κατανομή.
2. Εν συνεχεία υπολογίζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά του κανονικοποιημένου δείγματος καθώς και ο συντελεστής Hurst σύμφωνα με την εδάφιο 3.3.2.
3. Έπειτα υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις 4.109, 4.108, 4.106, 4.102, 4.98, 4.96 οι συντελεστές $b, b', c(b), c(b'), d(b), d(b'), B$, και με την βοήθεια αυτών υπολογίζεται η ακολουθία συντελεστών βάρους $\alpha_{i,j}$ η οποία ειδικά για υψηλές τιμές του συντελεστή Hurst θα πρέπει να υπολογιστεί για μεγάλη "ακτίνα", μιας και οι συντελεστές παρουσιάζουν κυκλική συμμετρία.
4. Ύστερα παράγεται ανεξάρτητο τυχαίο πεδίο που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.
5. Από την σχέση ορισμού του μοντέλου παράγεται το τελικό κανονικοποιημένο συνθετικό πεδίο.
6. Τέλος, με αριθμητική επίλυση του αντίστροφου μετασχηματισμού κανονικοποίησης, οι παραγόμενες απεικονίσεις του συνθετικού τυχαίου πεδίου μπορούν να αποκανονικοποιηθούν προκειμένου να είναι σύμφωνες με τα αρχικά δεδομένα.

Πιο συγκεκριμένα λόγω της απλότητας του μοντέλου αυτού, οι απεικονίσεις των συνθετικών πεδίων θα αναπαραχθούν μέσω απλού προγράμματος τύπου spreadsheet.

Κρίνεται σκόπιμο πριν παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της αναπαραγωγής των τυχαίων πεδίων, να αναλυθεί λίγο εκτενέστερα η διαδικασία και η θεωρητική βάση των βημάτων 1 και 6.

Όσον αφορά το πρώτο βήμα, ο υπολογισμός των παραμέτρων της εξίσωσης μετασχηματισμού γίνεται αριθμητικά σύμφωνα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Πιο συγκεκριμένα γίνεται αριθμητική βελτιστοποίηση έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ των τιμών της τυπικής κανονικής μεταβλητής που αντιστοιχούν στην εμπειρική πιθανότητα μη υπέρβασης των αρχικών δεδομένων με τις αντίστοιχες τιμές που υπολογίζονται με την χρήση του μετασχηματισμού. Η αριθμητική βελτιστοποίηση θα γίνει με την χρήση γενετικού (εξελικτικού) αλγορίθμου κωδικοποιημένου σε πρόγραμμα υπολογιστικού φύλλου (spreadsheet). Η μεθοδολογία αυτή κρίνεται κατάλληλη για την περίπτωση αυτή λόγω της πολυπλοκότητας του προβλήματος (καθώς είναι πολυμεταβλητό μιας και πέντε συντελεστές επηρεάζουν την βελτιστοποίηση). Επίσης λόγω της πολυμεταβλητότητας του καθώς και της μη γραμμικής συμπεριφοράς, υπάρχει κίνδυνος αν επιλεγεί άλλη μέθοδος αριθμητικής βελτιστοποίησης, η λύση που θα προκύψει να έχει «εγκλωβιστεί» σε λάθος διάστημα (τοπικό ελάχιστο). Εν αντιθέσει με αυτά η χρήση γενετικού αλγορίθμου είναι αξιόπιστη και ανεξαρτήτως απ τη δομή του προβλήματος, η βέλτιστη λύση μπορεί να προσεγγιστεί με επαρκή ακρίβεια. Επίσης δεν υπάρχει κίνδυνος εγκλωβισμού της λύσης σε τοπικό ακρότατο, καθώς η τελική λύση θα προσεγγίζει το ολικό ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης (Holland, 1975).

Όσον αφορά το βήμα 6 εγείρεται η ανάγκη αριθμητικής επίλυσης για την αποκανονικοποίηση των δεδομένων βροχόπτωσης. Όπως προαναφέρθηκε, ο μετασχηματισμός που εισήχθη προκειμένου να μετασχηματίσουμε τα αρχικά δεδομένα σε κανονικά τυποποιημένα, δεν έχει αναλυτική λύση αντίστροφου μετασχηματισμού προκειμένου να αποκανονικοποιηθεί η απεικόνιση του τυχαίου πεδίου που παρήχθη μέσω του μοντέλου που παρουσιάζεται στην εργασία αυτή. Για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιηθεί ένας αριθμητικός αλγόριθμος προκειμένου να αποκανονικοποιηθούν τα δεδομένα αυτά. Η αριθμητική βελτιστοποίηση γίνεται σε πρόγραμμα τύπου spreadsheet και βασίζεται στη μέθοδο της διχοτόμησης. Αυτή η μέθοδος σύγκλισης είναι κατάλληλη για την συγκεκριμένη επίλυση καθώς η συνάρτηση μετασχηματισμού καθώς και η αντίστροφη της είναι συνεχείς μονότονες συναρτήσεις. Για τον λόγο αυτό δεν υπάρχει κίνδυνος «εγκλωβισμού» της λύσης της μεθόδου σε λανθασμένο διάστημα. Επίσης λόγω της απλότητας της η μέθοδος αυτή προσφέρεται λόγω του πολύ μικρού χρόνου εκτέλεσης που απαιτείται.

Η αριθμητική αυτή μέθοδος έχει ως εξής (Σοφιανός και Τυχόπουλος, 2005)

Η μέθοδος εφαρμόζεται για την εύρεση ριζών της εξίσωσης

$$f(x) = 0 \text{ με } f \in C[a, b] \quad (5.1)$$

δηλαδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$ και ικανοποιεί την ανισότητα

$$f(a) \cdot f(b) \leq 0 \quad (5.2)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano στην περίπτωση αυτή η f έχει ρίζα ή περιττό αριθμό ριζών στο διάστημα $[a, b]$

Σε περίπτωση όπου

$$f(a) \cdot f(b) > 0 \quad (5.3)$$

τότε η f δεν έχει ρίζα ή έχει άρτιο αριθμό ριζών στο διάστημα $[a, b]$.

Στην περίπτωση όπου αντιμετωπίζουμε εδώ η λύση είναι μοναδική καθώς f και f^{-1} μονότονες συναρτήσεις.

Για να βρούμε την λύση της f διχοτομούμε το διάστημα $[a, b]$ και θέτουμε,

$$a = a_0, b = b_0, \text{ και } x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \quad (5.4)$$

Αν $f(x_0) = 0$, τότε x_0 είναι ρίζα της f

Αν $f(x_0) \neq 0$, τότε διαλέγουμε ένα από τα διαστήματα $[a_0, x_0]$ ή $[x_0, b_0]$ στα άκρα του οποίου η f παίρνει αντίθετα πρόσημα.

Το διάστημα αυτό το συμβολίζουμε με $[a_1, b_1]$ και εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία. Συνεχίζοντας έτσι, τελικά σε κάποιο στάδιο της μεθόδου θα πάρουμε την ακριβή ή γενικά μια προσεγγιστική τιμή της ρίζας της f .

Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται μια ακολουθία σημείων

$$x_0, x_1, \dots, x_n \quad (5.5)$$

και μια ακολουθία διαστημάτων

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n] \quad (5.6)$$

τέτοια ώστε

$$f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0, n = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

και

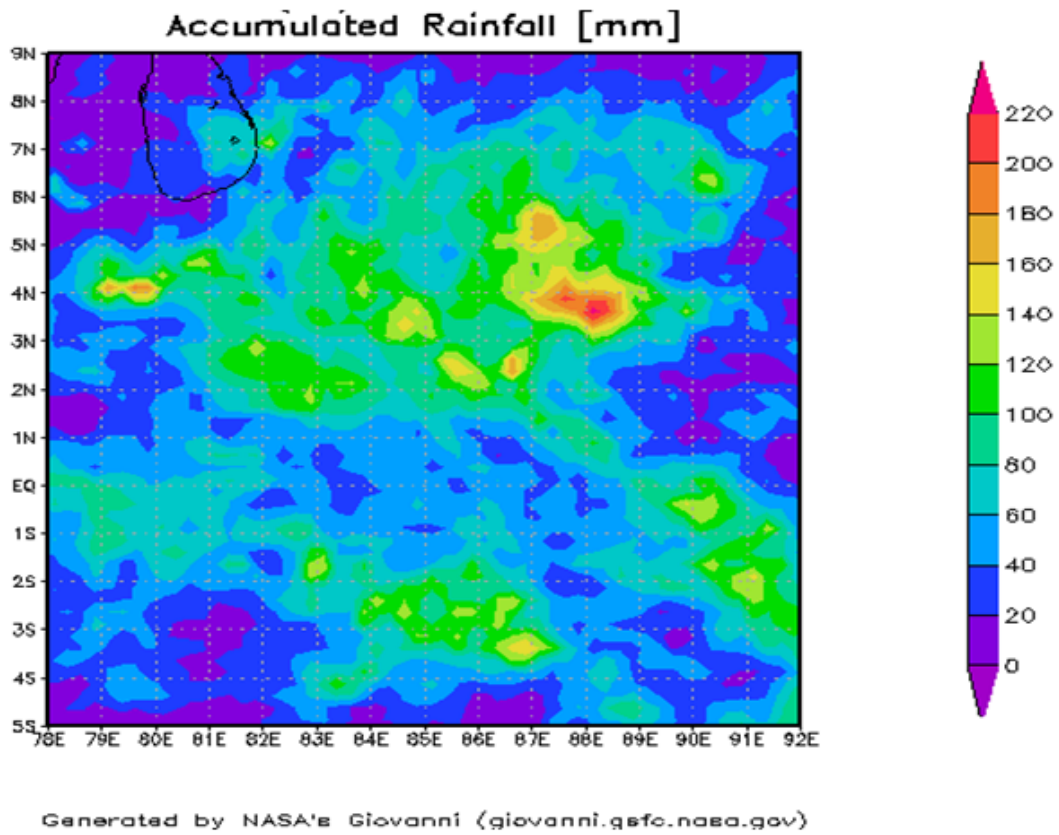
$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (5.8)$$

5.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

5.3.1 Δείγμα από δορυφορικές μετρήσεις

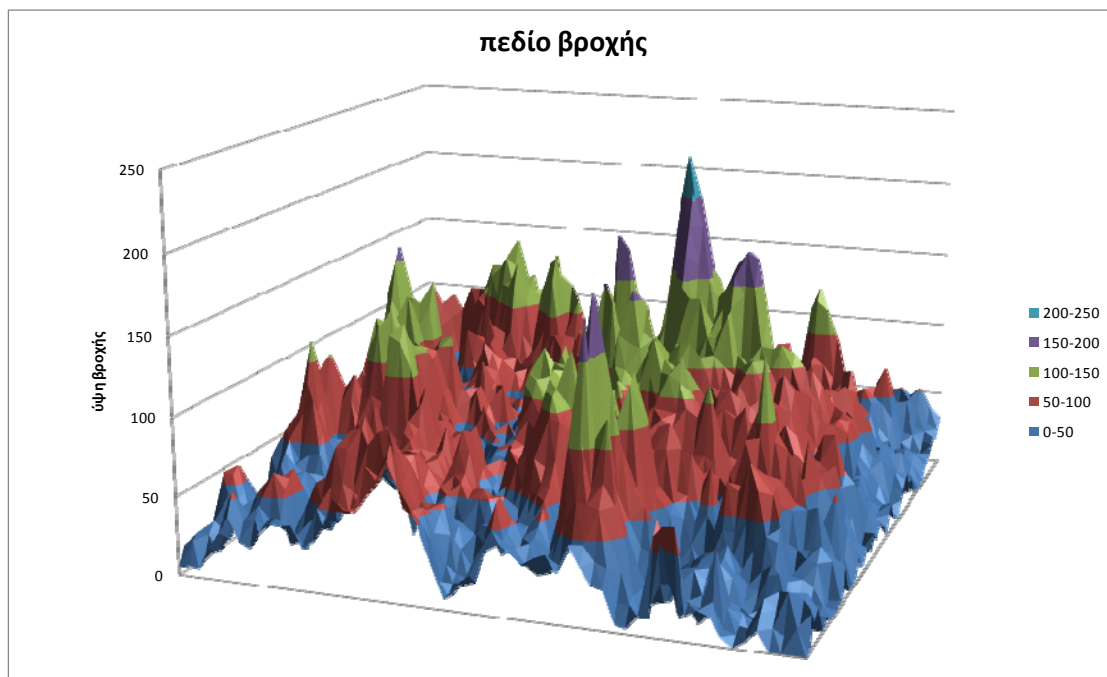
Όπως προαναφέρθηκε το πρώτο δείγμα υψών βροχοπτώσεων έχει μετρηθεί με την βοήθεια δορυφόρου. Οι μετρήσεις έχουν γίνει σε κάναβο $0,25^\circ \times 0,25^\circ$. Στην παρούσα εφαρμογή, λόγω της σχετικά μικρής έκτασης του μετρούμενου πεδίου βροχής, μπορεί να γίνει η απλοποίηση ότι οι σημειακές μετρήσεις αναφέρονται στην μέση τιμή της βροχόπτωσης σε στοιχείο που αντιστοιχεί σε εμβαδόν $0,25^\circ \times 0,25^\circ$ το οποίο για την περιοχή μελέτης της Γής, προσεγγιστικά αντιστοιχεί σε έκταση $3 \text{ km} \times 3 \text{ km}$ η οποία έκταση θα θεωρηθεί σταθερή αμελώντας την παραμόρφωση λόγω ελλειψοειδούς σχήματος της Γής.

Τα δεδομένα του πεδίου βροχής φαίνονται στον παρακάτω χάρτη (Σχήμα 5.2)



Σχήμα 5.2 Καταγεγραμμένο πεδίο βροχόπτωσης

και σε τρισδιάστατη απεικόνιση (Σχήμα 5.3)



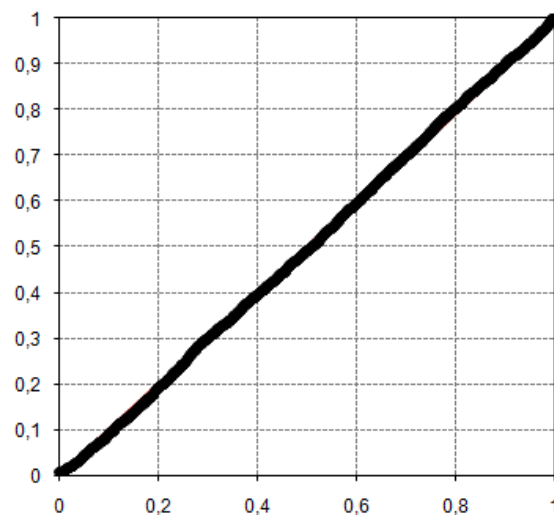
Σχήμα 5.3

Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του αυτού του πεδίου βροχής φαίνονται στον πίνακα 5.1

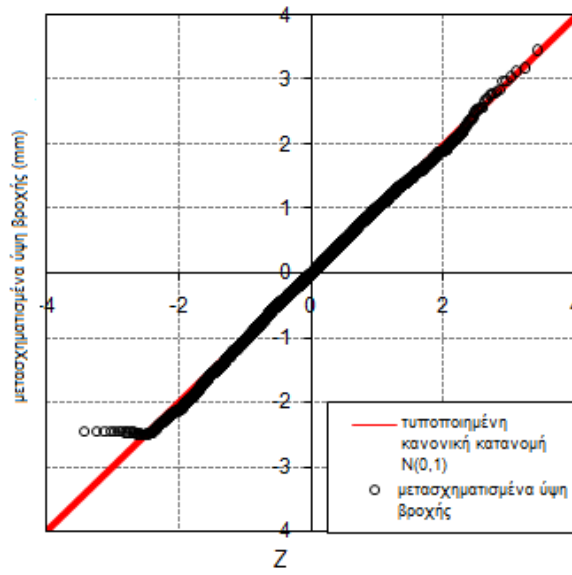
Στατιστικά χαρακτηριστικά (εκτιμήσεις κλασικής στατιστικής)	
μέση τιμή	56.54
τυπική απόκλιση	33.58
συντελεστής ασυμμετρίας	0.83
συντελεστής κύρτωσης	0.88

Πίνακας 5.1

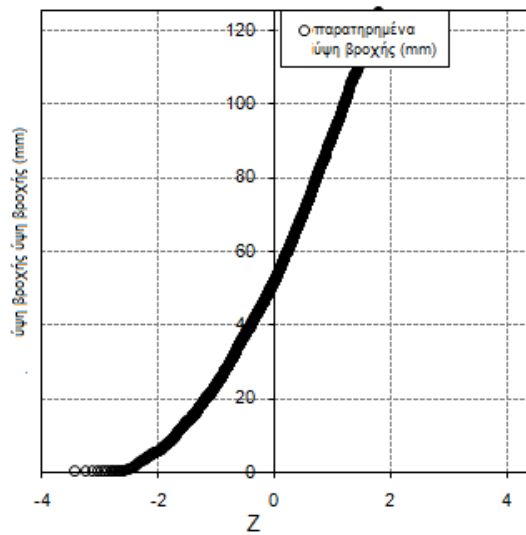
Εν συνεχεία έγινε μετασχηματισμός των δεδομένων αυτών έτσι ώστε να ακολουθούν με την βέλτιστη δυνατή προσέγγιση την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$. Στα σχήματα 5.4, 5.5, 5.6 φαίνεται η μετατροπή αυτή.



Σχήμα 5.4



Σχήμα 5.5



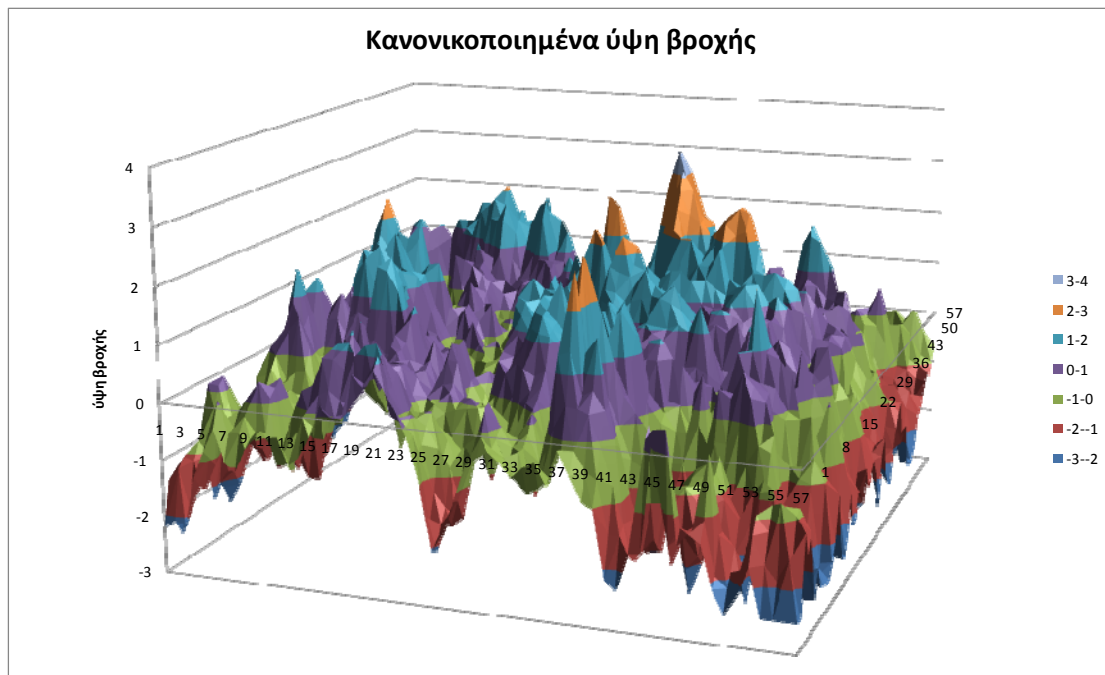
Σχήμα 5.6

Η αριθμητική βελτιστοποίηση που έγινε κατέληξε στην επιλογή συντελεστών του μετασχηματισμού όπως δείχνει ο πίνακας 5.2.

Συντελεστές μετασχηματισμού	
α	0.62524
ν	-0.49168
β	6.43984
ψ	-6.12041
κ	$5,459 \cdot 10^9$

Πίνακας 5.2

Το κανονικοποιημένο πεδίο βροχής παρουσιάζει την παρακάτω εικόνα (Σχήμα 5.7)



Σχήμα 5.7

Και τα εξής στατιστικά χαρακτηριστικά

Στατιστικά χαρακτηριστικά (κλασικές εκτιμήσεις)	
μέση τιμή	-0.03
τυπική απόκλιση	1.01
συντελεστής ασυμμετρίας	-0.04
συντελεστής κύρτωσης	-0.18

Πίνακας 5.3

Συναθροίζοντας το πεδίο βροχόπτωσης σε διάφορες κλίμακες, σύμφωνα με την σχέση

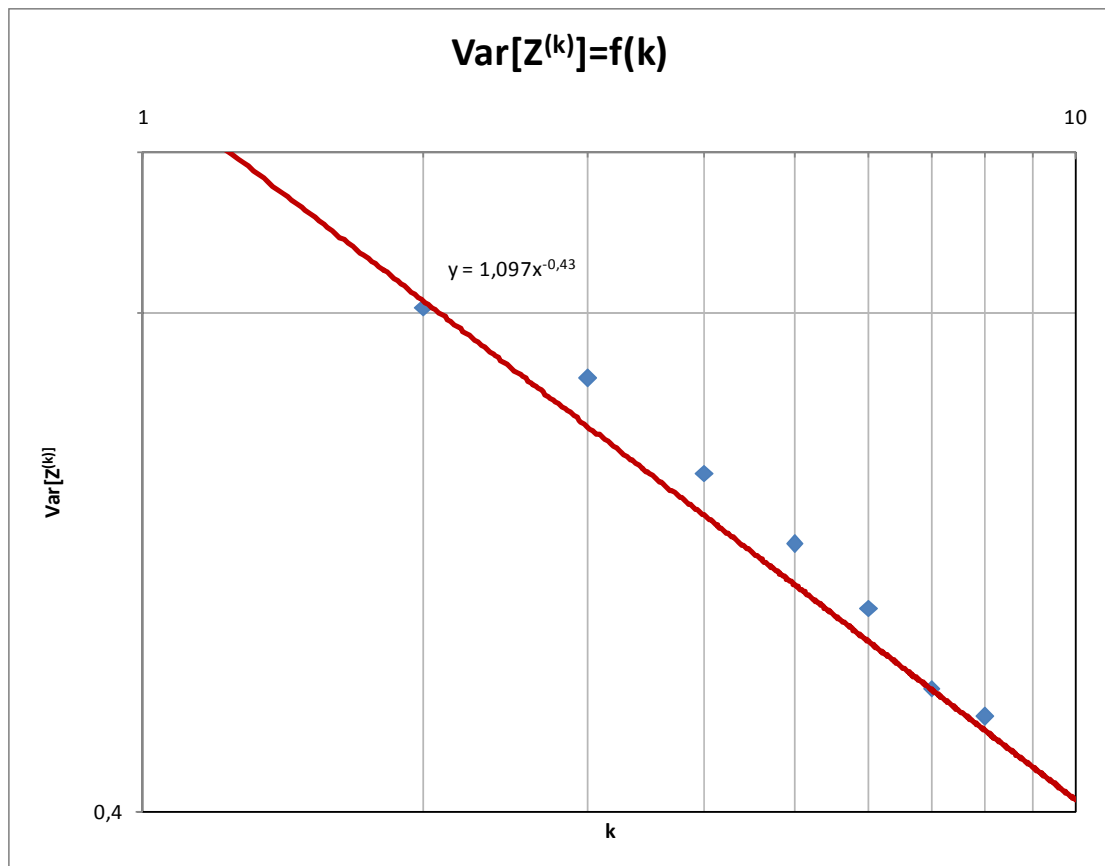
$$Z^{(k)}(m, n) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=(m-1)k+1}^{mk} \sum_{j=(n-1)k+1}^{nk} Z(i, j)$$

και υπολογίζοντας την κλασική εκτίμηση της διασποράς στην κλίμακα αυτή έχουμε ότι

$$\text{Var}[Z^{(k)}] = k^{4H-4} \text{Var}[Z] \leftrightarrow \log(\text{Var}[Z^{(k)}]) = \log(k^{4H-4} \text{Var}[Z])$$

$$\log(\text{Var}[Z^{(k)}]) = (4H - 4) \log k + \log(\text{Var}[Z])$$

οπότε η εκτίμηση του συντελεστή Hurst μπορεί να υπολογιστεί μέσω της κλίσης της ευθείας σε διπλό λογαριθμικό χαρτί της διασποράς ανά κλίμακα συναρτήσει της κλίμακας αυτής.



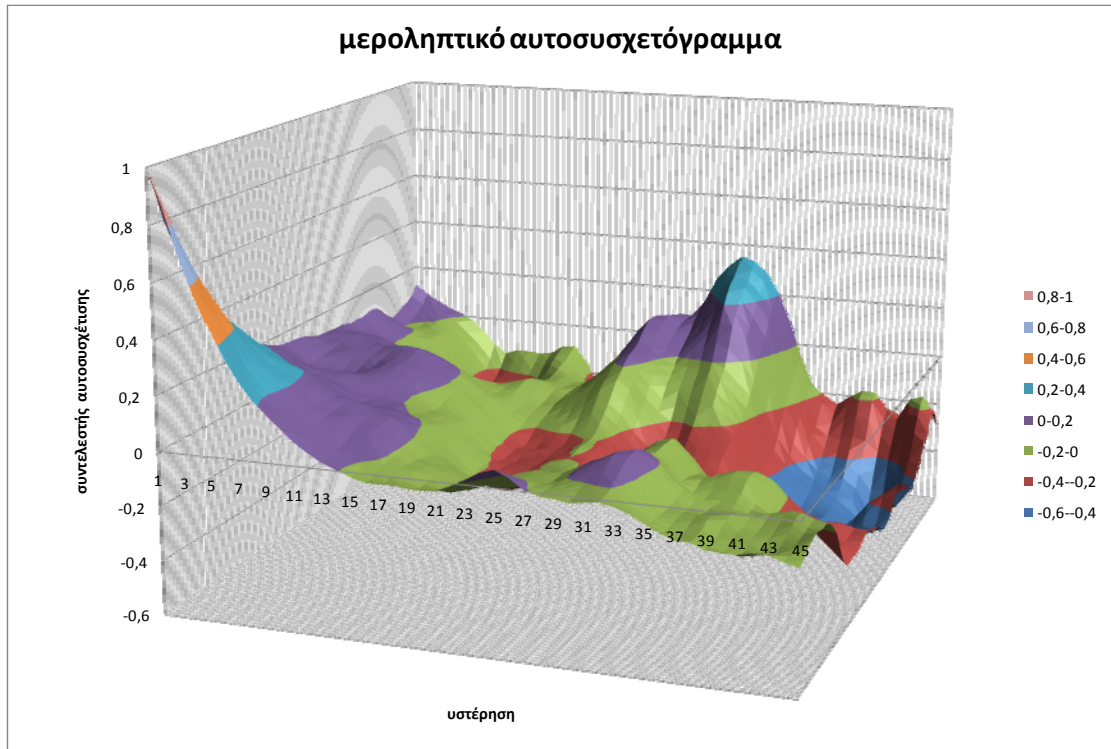
Σχήμα 5.8 Υπολογισμός συντελεστή Hurst

Προκύπτει λοιπόν ότι η εκτίμηση του συντελεστή Hurst είναι $H = 0,89$ (Σχήμα 5.8).

Ωστόσο όπως προαναφέρθηκε, η εκτίμηση με τον τρόπο αυτό του συντελεστή Hurst εισάγει αρνητική μεροληψία, για τον λόγο αυτό, ακολουθώντας την μεθοδολογία του εδαφίου 3.3.2 καταλήγουμε στην αμερόληπτη εκτίμηση του συντελεστή Hurst ο οποίος είναι $H = 0,94$ ο οποίος συγκρινόμενος με τις συνήθεις τιμές του συντελεστή αυτού για υδρολογικές χρονοσειρές, είναι αρκετά μεγάλος, απόδειξη της ισχυρής δομής αυτοσυσχέτισης στον χώρο των δεδομένων.

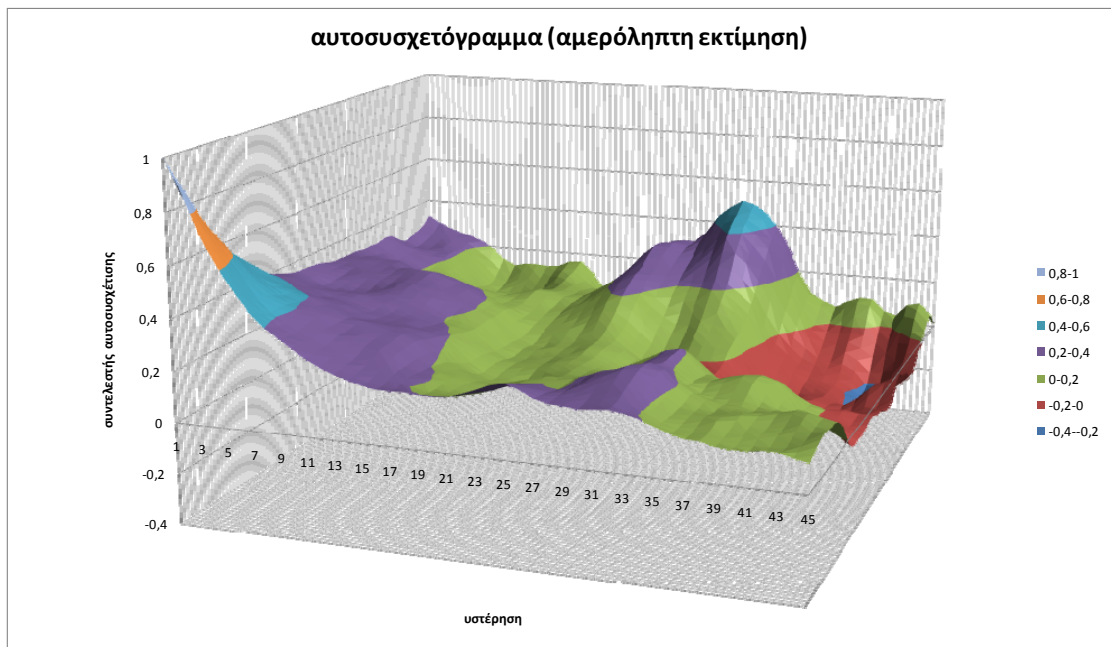
Στην περίπτωση της ύπαρξης φαινομένου Hurst η αβεβαιότητα των εκτιμήσεων αυξάνεται δραματικά. Για την περίπτωση που εξετάζεται εδώ, το πεδίο το οποίο αποτελείται από $n = 3249$ σημειακές μετρήσεις αυτοσυσχετιζόμενες, σύμφωνα με την σχέση 3.50 είναι ισοδύναμο με $n' = 2,7 \approx 3$ μόνο μετρήσεις ανεξάρτητου τυχαίου πεδίου.

Ο υπολογισμός του αυτοσυσχετογράμματος των αρχικών δεδομένων, σύμφωνα με τις κλασικές εκτιμήσεις 4.99, οδηγεί στην απεικόνιση του σχήματος 5.9.



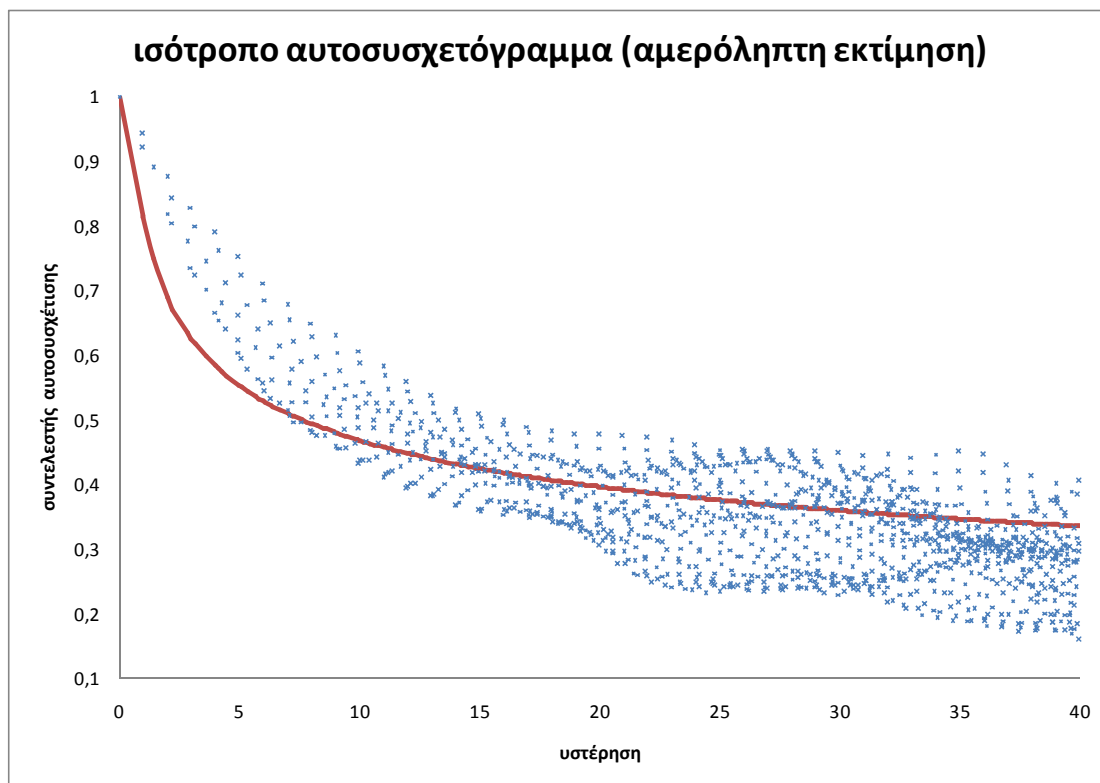
Σχήμα 5.9

Για τους ίδιου λόγους που προαναφέρθηκε, για να γίνει αμερόληπτη η εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης θα πρέπει να εφαρμοσθούν οι διορθώσεις του εδαφίου 3.3.2 Το διορθωμένο αμερόληπτο αυτοσυσχετόγραμμα έχει μορφή που φαίνεται στο σχήμα 5.10.



Σχήμα 5.10

Κατά την μελέτη του φαινομένου αυτού έχει γίνει η παραδοχή ότι μπορεί να προσεγγισθεί επαρκώς σαν ισότροπο ομοιογενές πεδίο βροχής. Συνεπώς ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης εξαρτάται μόνον από την απόσταση ανεξαρτήτως διεύθυνσης. Έτσι καταλήξαμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μπορεί να προσεγγισθεί ικανοποιητικά από την σχέση 4.99. Στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 5.11) απεικονίζονται οι αμερόληπτες εκτιμήσεις του συντελεστή αυτοσυσχέτισης του δείγματος, καθώς και η αντίστοιχη θεωρητική σχέση.

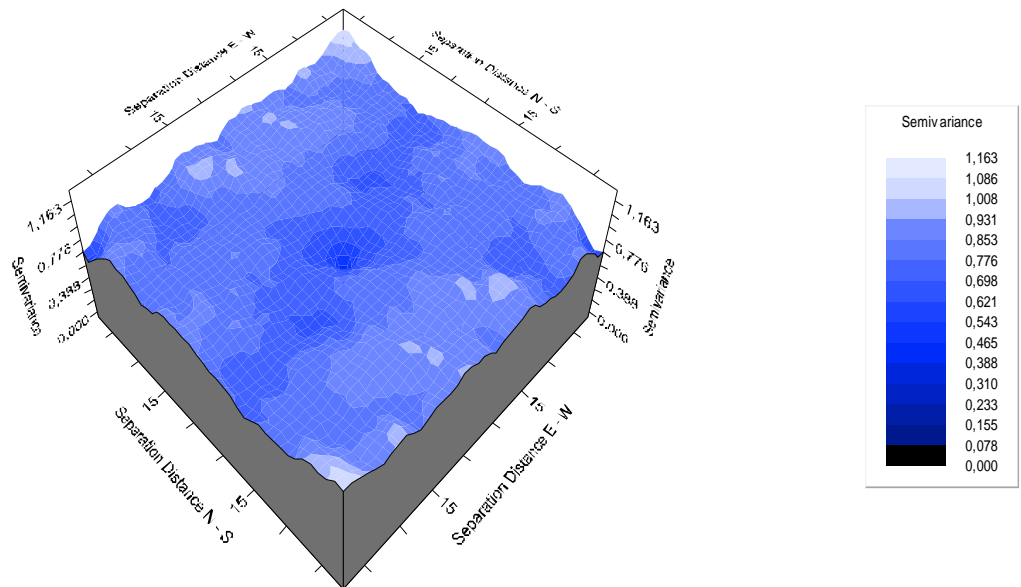


Σχήμα 5.11

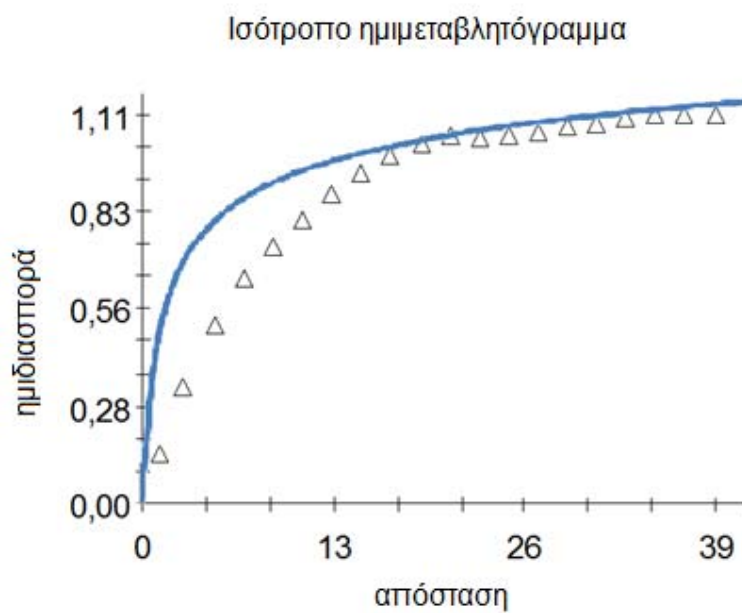
Από το διάγραμμα (Σχήμα 5.11) βλέπουμε ότι είναι ικανοποιητική η προσέγγιση αυτή έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο που αναλύθηκε.

Επίσης ο έλεγχος του κατά πόσον μπορεί να θεωρηθεί το πεδίο ισότροπο, μπορεί κατ'αντιστοιχία να προκύψει και από την σύγκριση του θεωρητικού ισότροπου ημιμεταβλητογράμματος το οποίο ορίζεται σύμφωνα με τις σχέσεις 3.68 και του πειραματικού ημιμεταβλητογράμματος.

Η τρισδιάστατη απεικόνιση του ημιμεταβλητογράμματος (ανισότροπο) φαίνεται στο σχήμα 5.12 ενώ η σύγκριση του θεωρητικού ισότροπου ημιμεταβλητογράμματος και του αντίστοιχου πειραματικού φαίνονται στο σχήμα 5.13.



Σχήμα 5.12 τρισδιάστατη απεικόνιση ημιμεταβλητογράμματος



Σχήμα 5.13

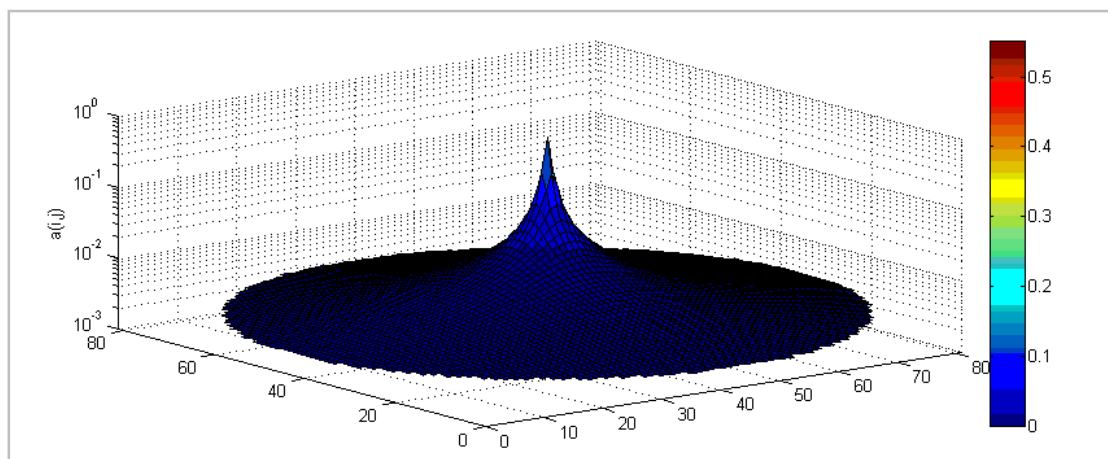
Για την εφαρμογή του μοντέλου θα πρέπει πρώτα να υπολογιστούν οι συντελεστές $b, b', c(b), c(b'), d(b), d(b'), B, a_0$

Προκύπτουν λοιπόν οι λύσεις όπως φαίνονται στον πίνακα 5.4.

Συντελεστές προσαρμογής μοντέλου	
b	0.24
$c(b)$	0.812966
$d(b)$	0.057825
b'	1.12
$d(b')$	1
$c(b')$	0.276683
B	1.2
γ_0	1.016202
a_0	0.652026

Πίνακας 5.4

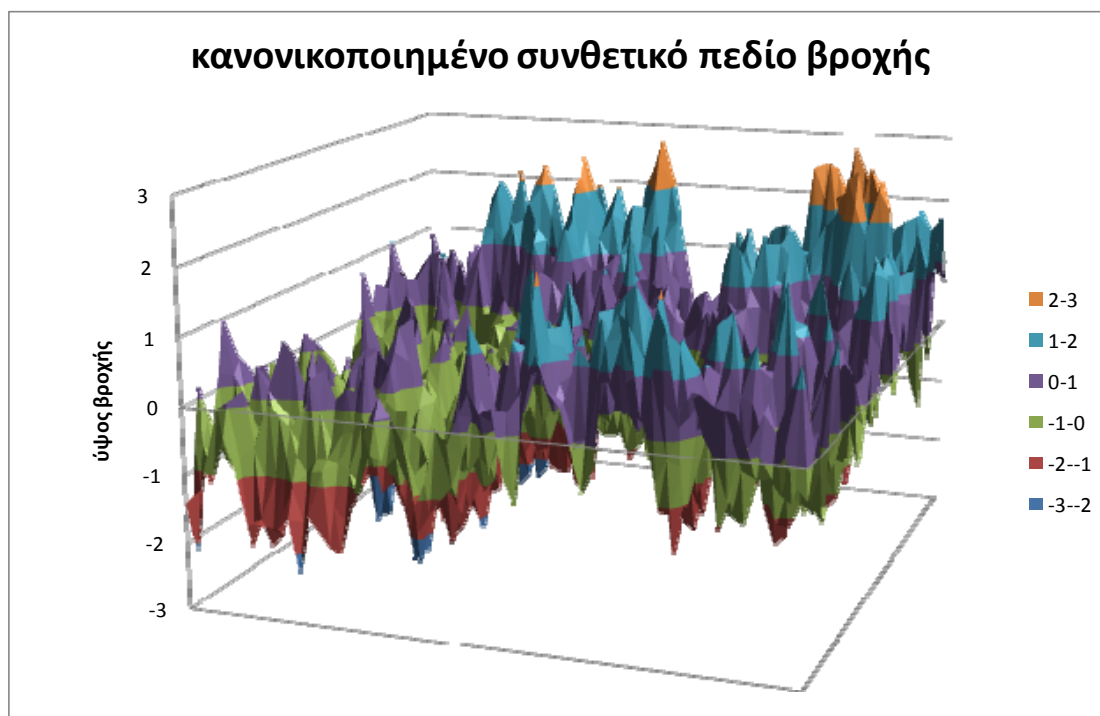
Με τον προσδιορισμό των συντελεστών αυτών μπορεί να υπολογιστεί εν συνεχεία και η ακολουθία των συντελεστών $a_{i,j}$ για την αναπαραγωγή του συνθετικού πεδίου. Οι συντελεστές αυτοί θα παρουσιάζουν κυκλική συμμετρία. Λόγω του υψηλού συντελεστή Hurst, επελέγη μεγάλη ακτίνα υπολογισμού συντελεστών έτσι ώστε να προσεγγισθεί ικανοποιητικά η πραγματικότητα. Για την ακρίβεια υπολογίστηκαν οι συντελεστές μέχρι ακτίνας $s = \sqrt{i^2 + j^2} = 45$ που αντιστοιχεί σε 6360 συντελεστές. Σε απεικόνιση σε λογαριθμική κλίμακα οι συντελεστές που προέκυψαν φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 5.14).



Σχήμα 5.14 τρισδιάστατη απεικόνιση συντελεστών βάρους

Εν συνεχεία παράγεται ανεξάρτητο κανονικά κατανομημένο τυχαίο πεδίο $V_{i,j}$ και σύμφωνα με την σχέση ορισμού του μοντέλου 4.28 παράγεται το συνθετικό πεδίο βροχής. Το συνθετικό πεδίο θα ακολουθεί και αυτό την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Η απεικόνιση του παραγόμενου πεδίου φαίνεται στο σχήμα 5.15.



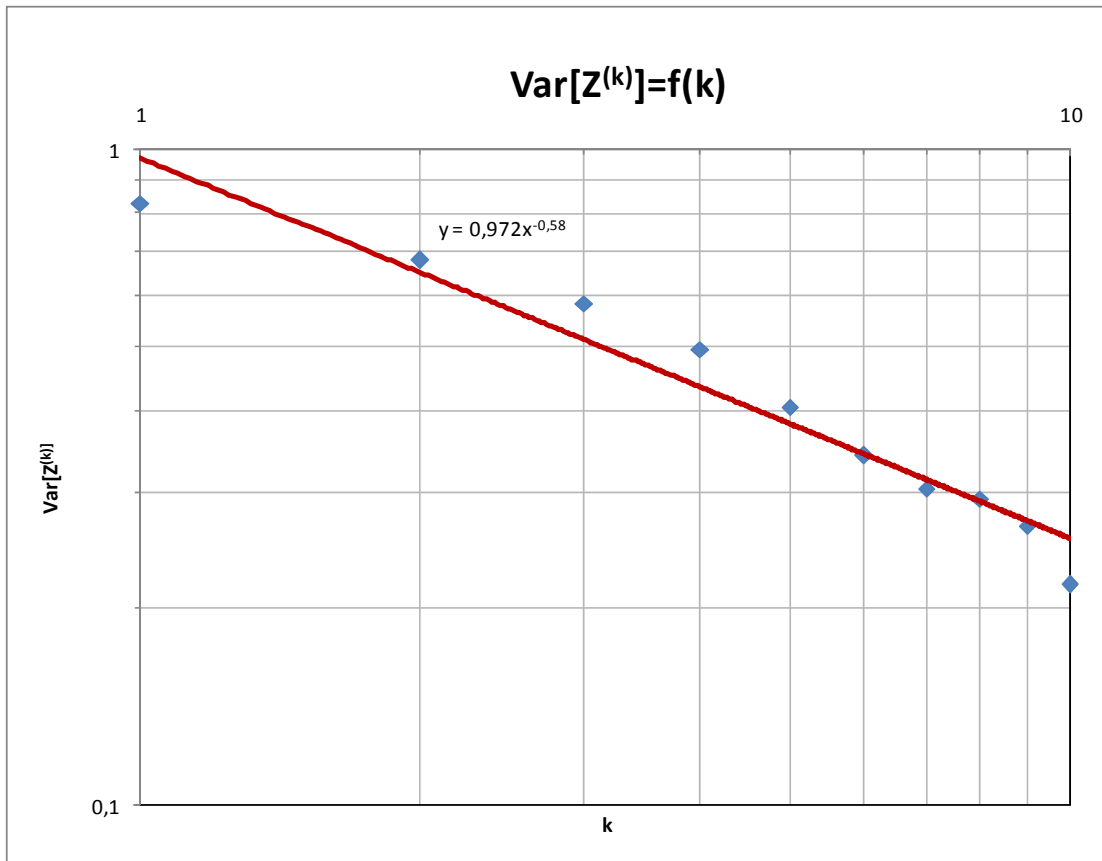
Σχήμα 5.15

Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του κανονικοποιημένου πεδίου βροχής φαίνονται στον πίνακα 5.5

Στατιστικά χαρακτηριστικά (κλασικές εκτιμήσεις)	
μέση τιμή	-0.06
τυπική απόκλιση	0.91
συντελεστής ασυμμετρίας	0.21
συντελεστής κύρτωσης	-0.07

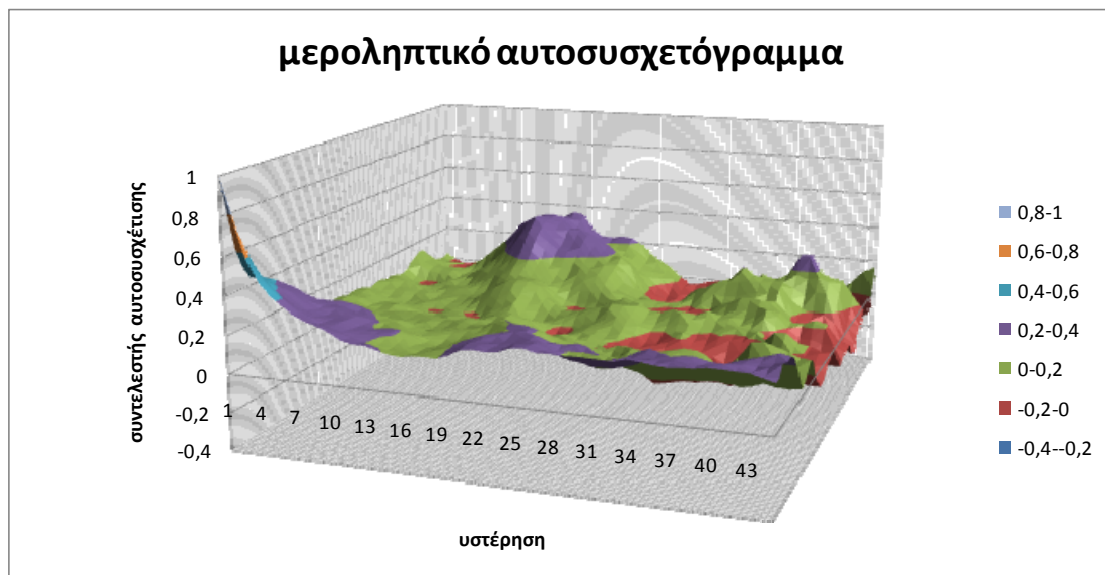
Πίνακας 5.5

Ακριβώς όπως και προηγουμένως, έχουμε για την μεροληπτική εκτίμηση του συντελεστή Hurst, μέσω του σχήματος 5.16 $H = (4 - 0,58)/4 = 0,85$, ενώ ακολουθώντας την διαδικασία του εδαφίου 3.3.2 προκύπτει η αμερόληπτη εκτίμηση του συντελεστή Hurst $H = 0.92$.



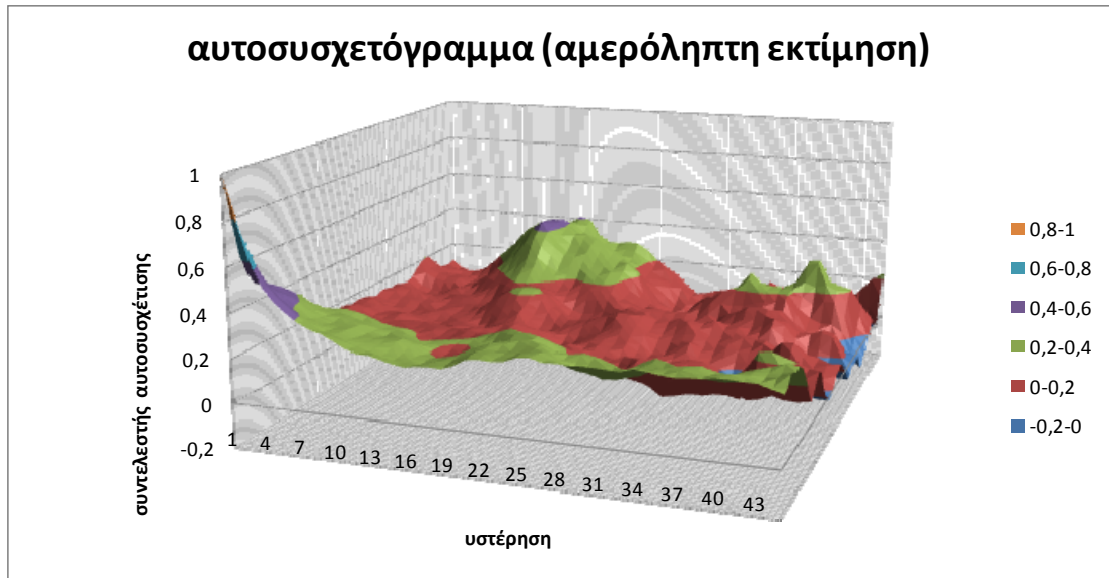
Σχήμα 5.16 Υπολογισμός συντελεστή Hurst

Η μεροληπτική εκτίμηση του αυτοσυσχετογράμματος μέσω των κλασικών στατιστικών εκτιμητριών απεικονίζεται στο σχήμα 5.17



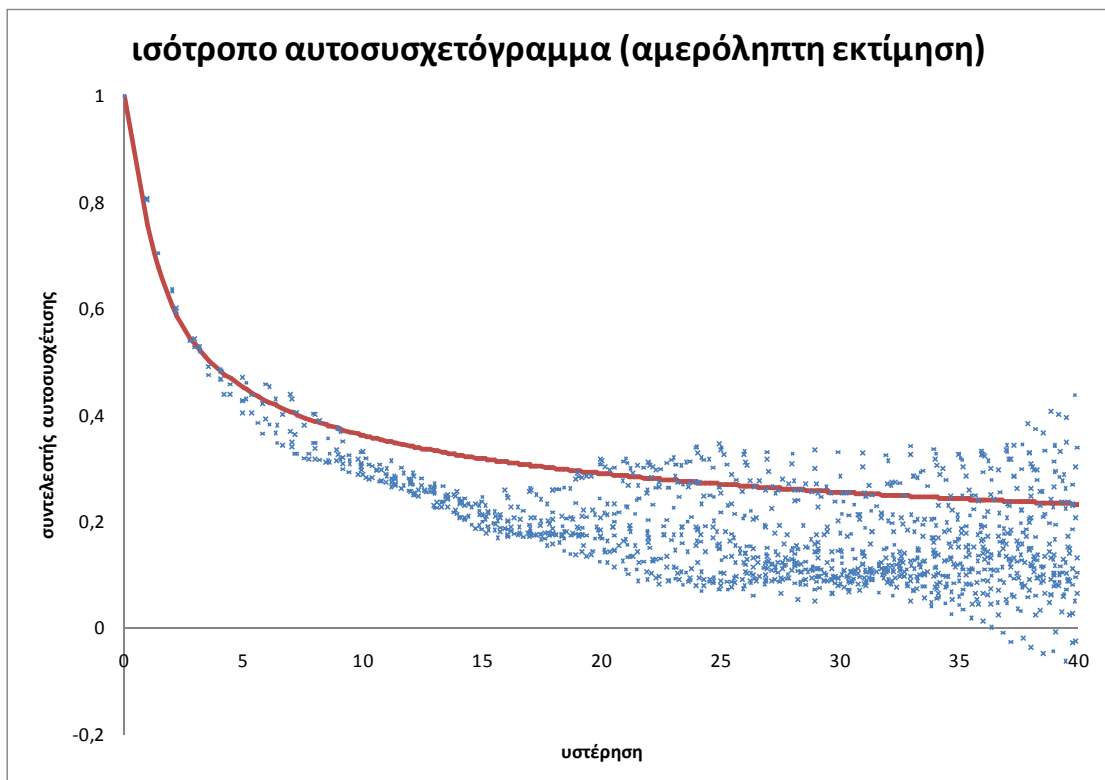
Σχήμα 5.17

ενώ το διορθωμένο αμερόληπτο για $H = 0,92$ φαίνεται στο σχήμα 5.18.



Σχήμα 5.18

Με την παραδοχή ισότροπου πεδίου, στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 5.19) φαίνεται η σύγκριση μεταξύ θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος και αμερόληπτων εκτιμήσεων από το συνθετικό πεδίο



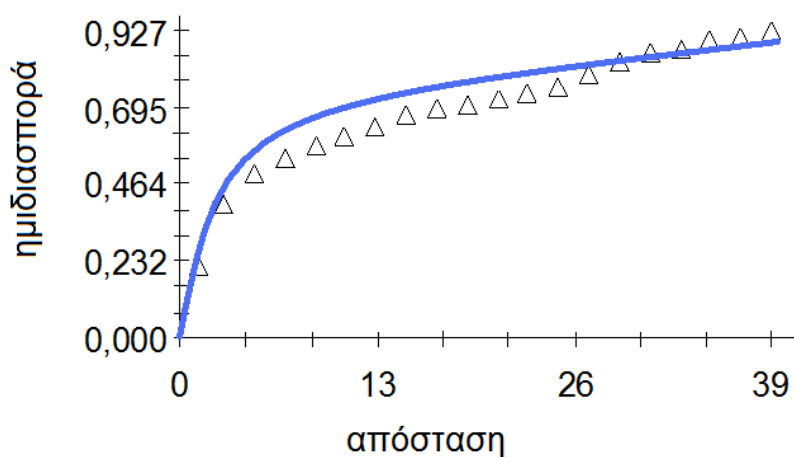
Σχήμα 5.19

η οποία κρίνεται ικανοποιητική.

Για να ελεγχθεί η συνέπεια του παραγόμενου πεδίου θα συγκριθεί και το θεωρητικό ημιμεταβλητόγραμμα με το πειραματικό. Στην περίπτωση εφαρμογής του μοντέλου αυτού σε συνεχή χώρο, υπάρχει πρόβλημα ορισμού του θεωρητικού ημιμεταβλητογράμματος όπως προαναφέρθηκε. Ωστόσο με την θεώρηση ότι κάθε σημείο μέτρησης αντιστοιχεί στην μέση τιμή ανά μοναδιαίο εμβαδόν κανάβου, αυτή η δυσκολία προσπερνιέται και μπορεί να ορισθεί το θεωρητικό ημιμεταβλητόγραμμα σύμφωνα με την σχέση 2.23 καθώς και να υπολογιστεί το πειραματικό σύμφωνα με τη σχέση 3.68.

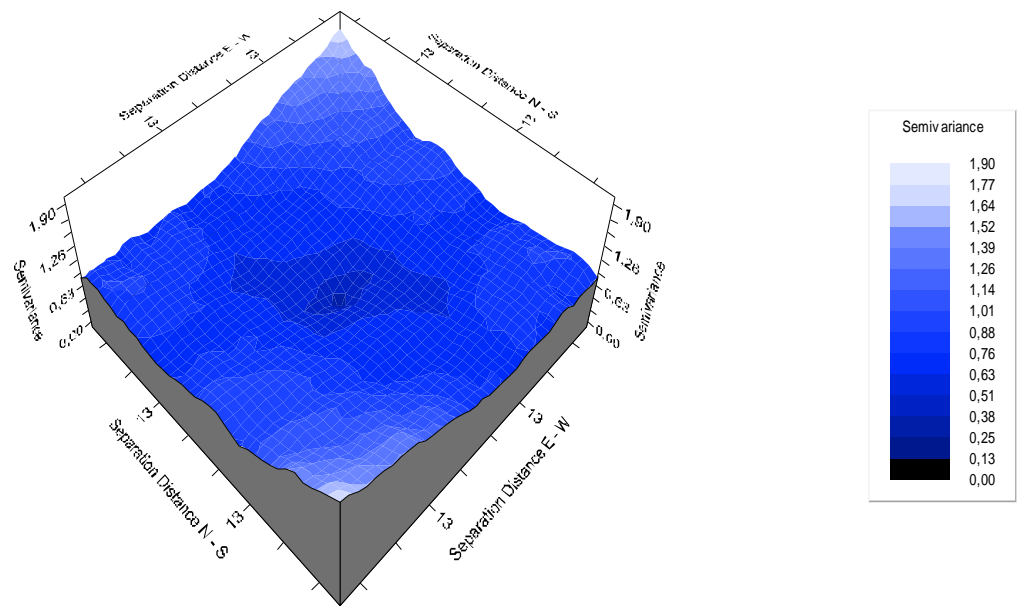
Η σύγκριση τους παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα 5.20.

Ισότροπο ημιμεταβλητόγραμμα



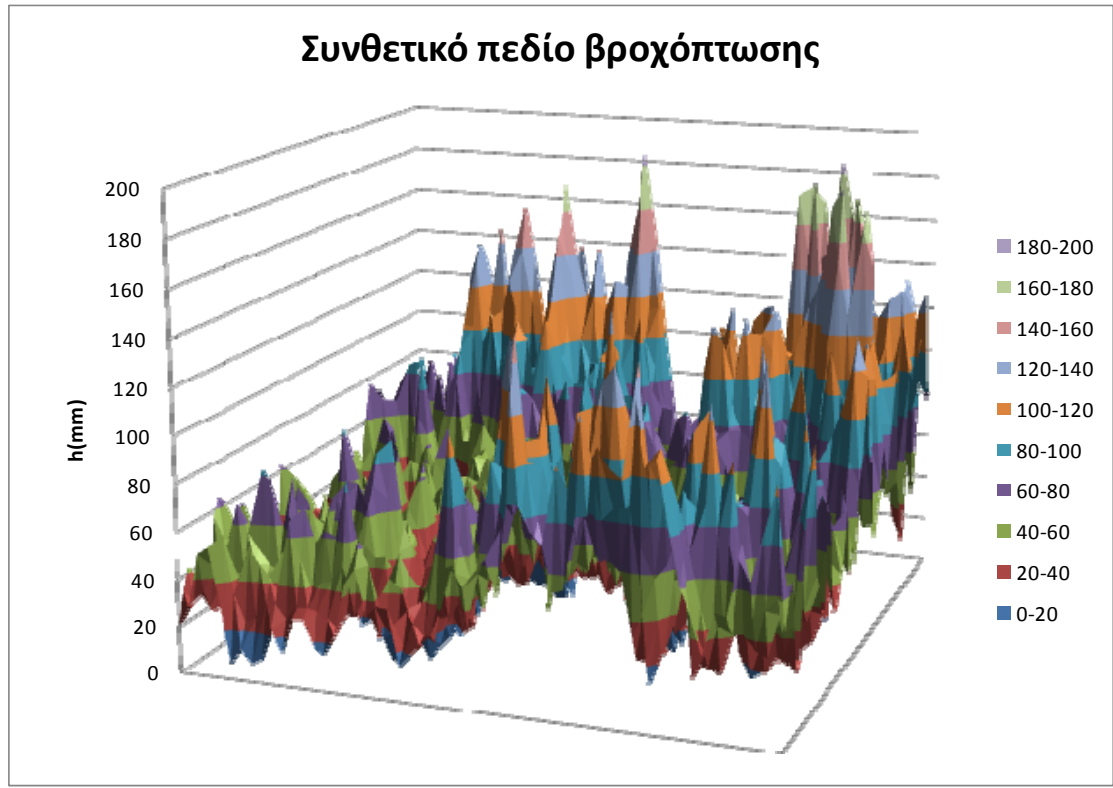
Σχήμα 5.20

Καθώς και για να δειχθεί ότι το πεδίο είναι προσεγγιστικά ισότροπο μπορούμε να καταρτίσουμε το ανισότροπο ημιμεταβλητόγραμμα στον χώρο, το οποίο φαίνεται στο σχήμα (5.21).



Σχήμα 5.21 Τρισδιάστατη απεικόνιση ημιμεταβλητογράμματος

Τέλος επιλύοντας αριθμητικά τον αντίστροφο μετασχηματισμό κανονικοποίησης έχουμε του παραγόμενο συνθετικό αποκανονικοποιημένο πεδίο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.22.



Σχήμα 5.22

Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του οποίου φαίνονται στον πίνακα 5.5.

Στατιστικά χαρακτηριστικά (κλασικές εκτιμήσεις)	
μέση τιμή	54.57
τυπική απόκλιση	30.88
συντελεστής ασυμμετρίας	1.02
συντελεστής κύρτωσης	1.14

Πίνακας 5.5

Συνολικά συγκρίνοντας το αρχικό με το παραγόμενο πεδίο βροχής έχουμε όπως φαίνεται στον πίνακα 5.6.

Σύγκριση μετρήσεων και παραγομένου πεδίου			
κανονικοποιημένα πεδία			
		ιστορικό	συνθετικό
κλασικές εκτιμήσεις	μέση τιμή	-0.03	-0.06
	τυπική απόκλιση	1.01	0.91
	συντελεστής ασυμμετρίας	-0.04	0.21
	συντελεστής κύρτωσης	-0.18	-0.07
	συντελεστής Hurst	0.89	0.85
αμερόληπτες εκτιμήσεις	ισοδύναμο δείγμα	6.96	13.30
	συντελεστής Hurst	0.94	0.92
	διασπορά	1.4	0.87
αποκανονικοποιημένα πεδία			
κλασικές εκτιμήσεις	μέση τιμή	56.54	54.57
	τυπική απόκλιση	33.58	30.88
	συντελεστής ασυμμετρίας	0.83	1.02
	συντελεστής κύρτωσης	0.88	1.14

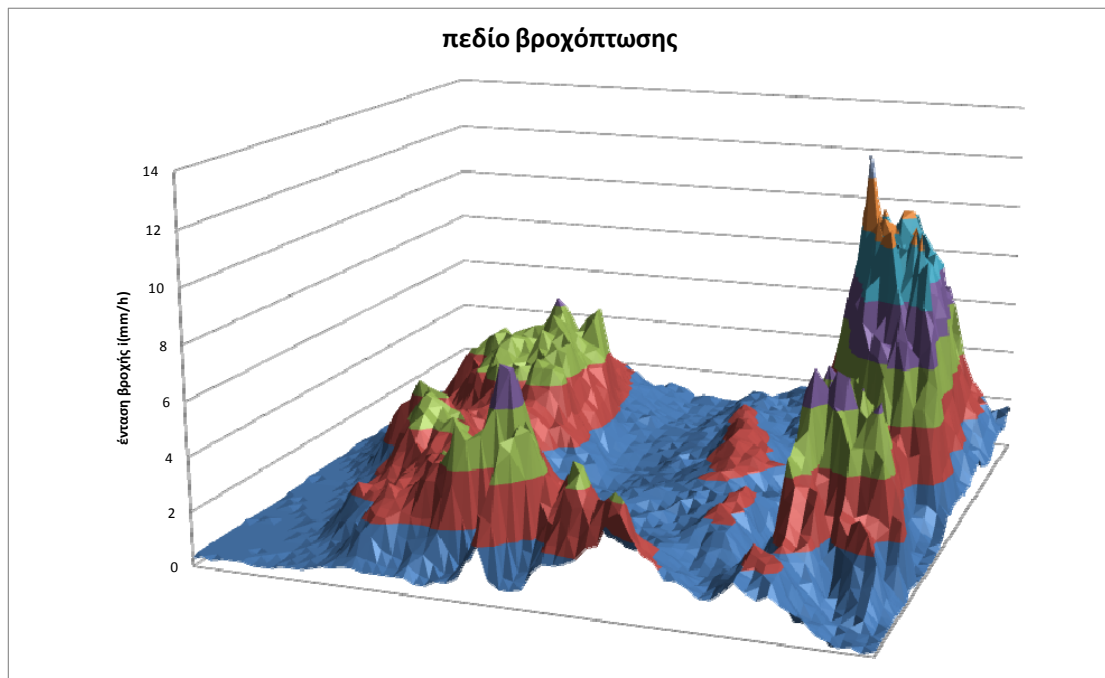
Πίνακας 5.6

5.3.2 Δείγμα από μετρήσεις radar

Κατά την δεύτερη περίπτωση, εξετάστηκε δείγμα από στιγμιαία ένταση βροχής από μετρήσεις μέσω radar – Doppler.

Ο κানাβος μέτρησης είναι διαστάσεων 0,25 km × 0,25 km.

Το καταγεγραμμένο πεδίο βροχόπτωσης έχει την εξής μορφή του σχήματος 5.23



Σχήμα 5.23

Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του δείγματος προκύπτουν όπως φαίνεται στον πίνακα 5.7

Στατιστικά χαρακτηριστικά (εκτιμήσεις κλασικής στατιστικής)	
μέση τιμή	2.51
τυπική απόκλιση	2.00
συντελεστής ασυμμετρίας	1.61
συντελεστής κύρτωσης	2.76

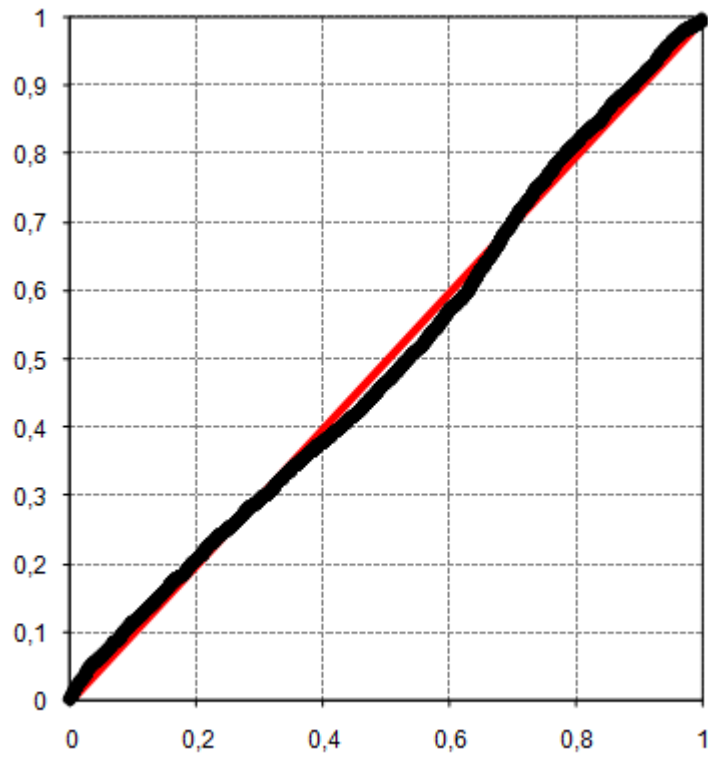
Πίνακας 5.7

Πραγματοποιώντας τον μετασχηματισμό κανονικοποίησης θα έχουμε τους επιθυμητούς συντελεστές όπως φαίνονται στον πίνακα 5.8

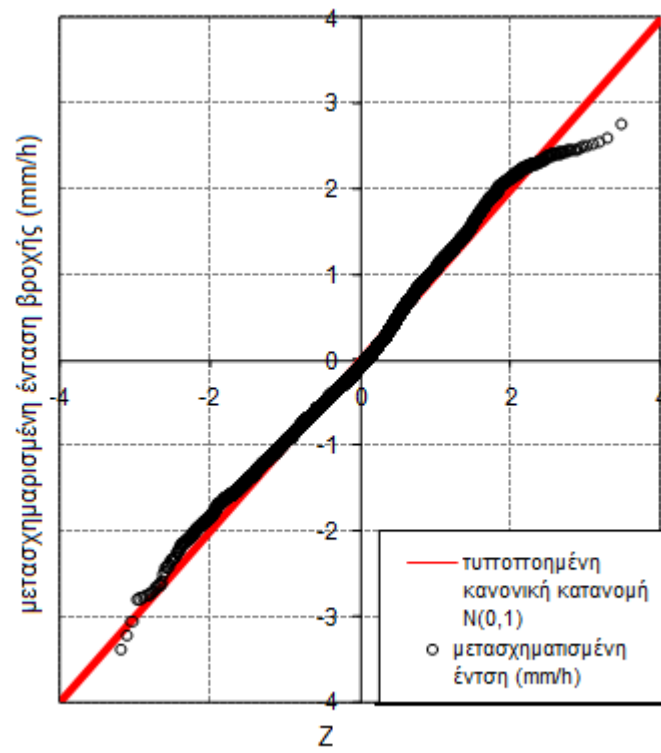
Συντελεστές μετασχηματισμού	
α	6.48931
ν	0.17430
β	2.73770
ψ	-2.78656
κ	93.75485

Πίνακας 5.8

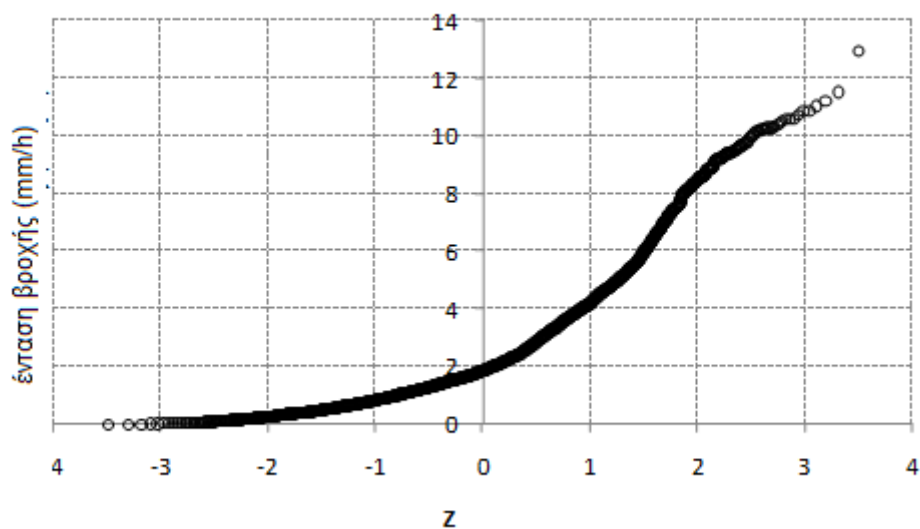
και η κανονικοποίηση που έγινε φαίνεται στα σχήματα 5.24, 5.25, 5.26,



Σχήμα 5.24

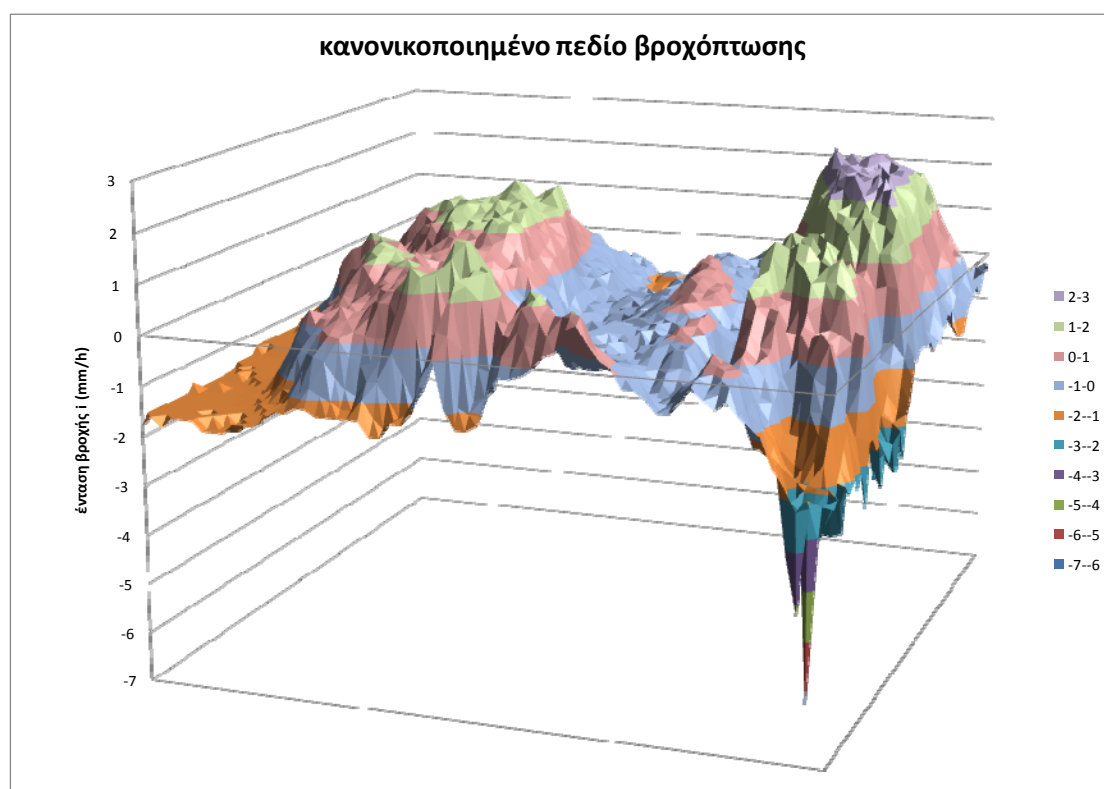


Σχήμα 5.25



Σχήμα 5.26

Το κανονικοποιημένο μετασχηματισμένο πεδίο βροχής παρουσιάζει την μορφή του σχήματος 5.27.



Σχήμα 5.27

Συναθροίζοντας το πεδίο βροχόπτωσης σε διάφορες κλίμακες, σύμφωνα με την σχέση

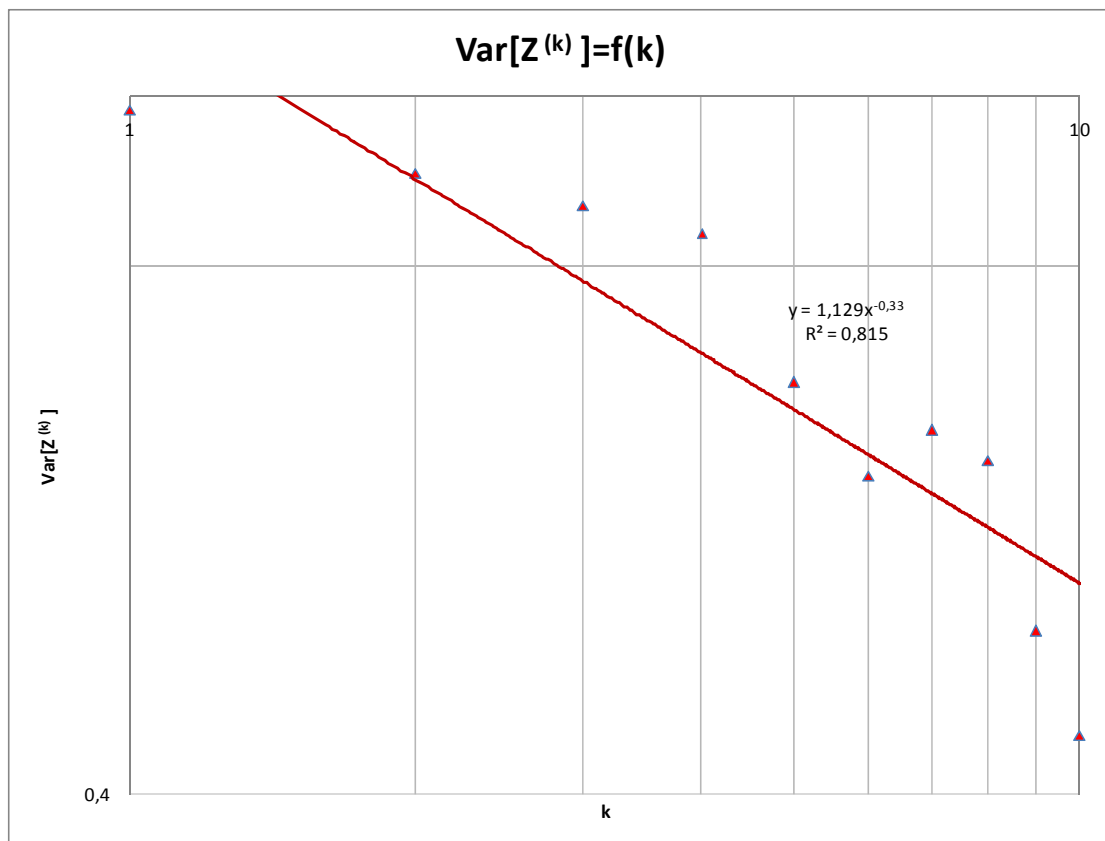
$$Z^{(k)}(m, n) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=(m-1)k+1}^{mk} \sum_{j=(n-1)k+1}^{nk} Z(i, j)$$

και υπολογίζοντας την κλασική εκτίμηση της διασποράς στην κλίμακα αυτή έχουμε ότι

$$\text{Var}[Z^{(k)}] = k^{4H-4}\text{Var}[Z] \leftrightarrow \log(\text{Var}[Z^{(k)}]) = \log(k^{4H-4}\text{Var}[Z])$$

$$\log(\text{Var}[Z^{(k)}]) = (4H - 4)\log k + \log(\text{Var}[Z])$$

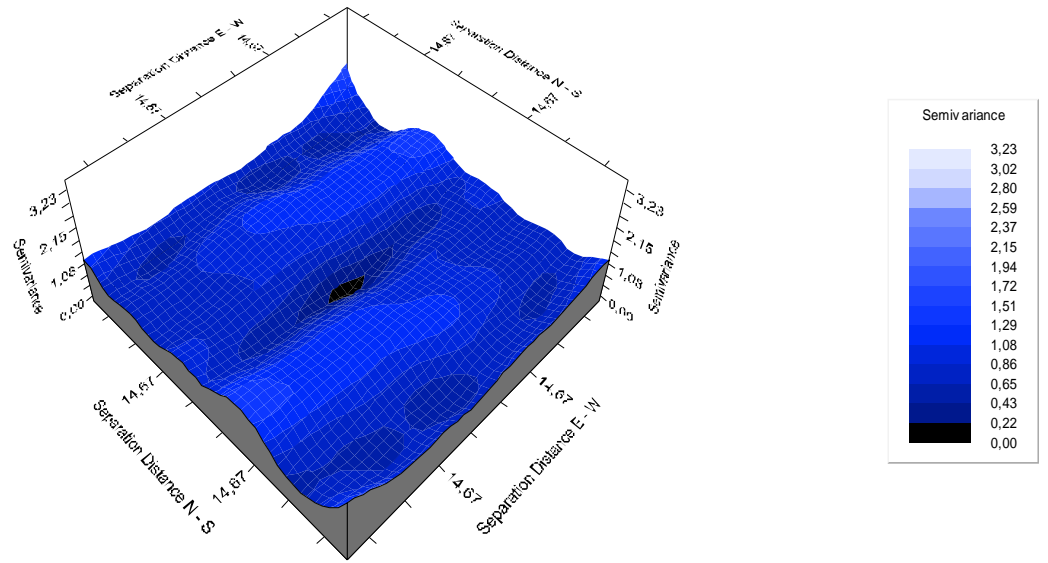
οπότε η εκτίμηση του συντελεστή Hurst μπορεί να υπολογιστεί μέσω της κλίσης της ευθείας σε διπλό λογαριθμικό χαρτί της διασποράς ανά κλίμακα συναρτήσει της κλίμακας αυτής.



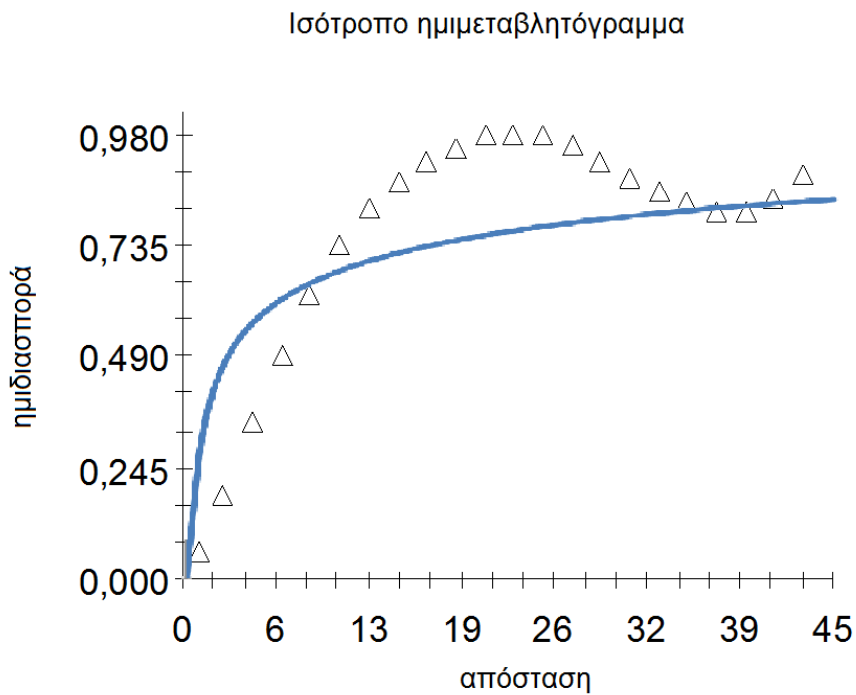
Σχήμα 5.28 Υπολογισμός συντελεστή Hurst

Απ' το σχήμα 5.28 προκύπτει ότι $H = 0,89$. Ωστόσο η αμερόληπτη εκτίμηση του συντελεστή Hurst πραγματοποιείται σύμφωνα με το εδάφιο 3.3.2 και είναι $H = 0,96$

Για να δούμε κατά πόσο μπορεί να προσομοιωθεί το πεδίο βροχόπτωσης ως ισότροπο, θα εξετάσουμε το κατά πόσο το πειραματικό ημιμεταβλητόγραμμα, προσεγγίζει το θεωρητικό για συγκεκριμένη τιμή του συντελεστή Hurst. Όπως προηγουμένως, προκύπτει η τρισδιάστατη απεικόνιση του πειραματικού ημιμεταβλητογράμματος του σχήματος 5.29 και η αντίστοιχη ισότροπη απεικόνιση του συγκριτικά με το θεωρητικό ημιμεταβλητόγραμμα όπως φαίνεται στο σχήμα 5.30.



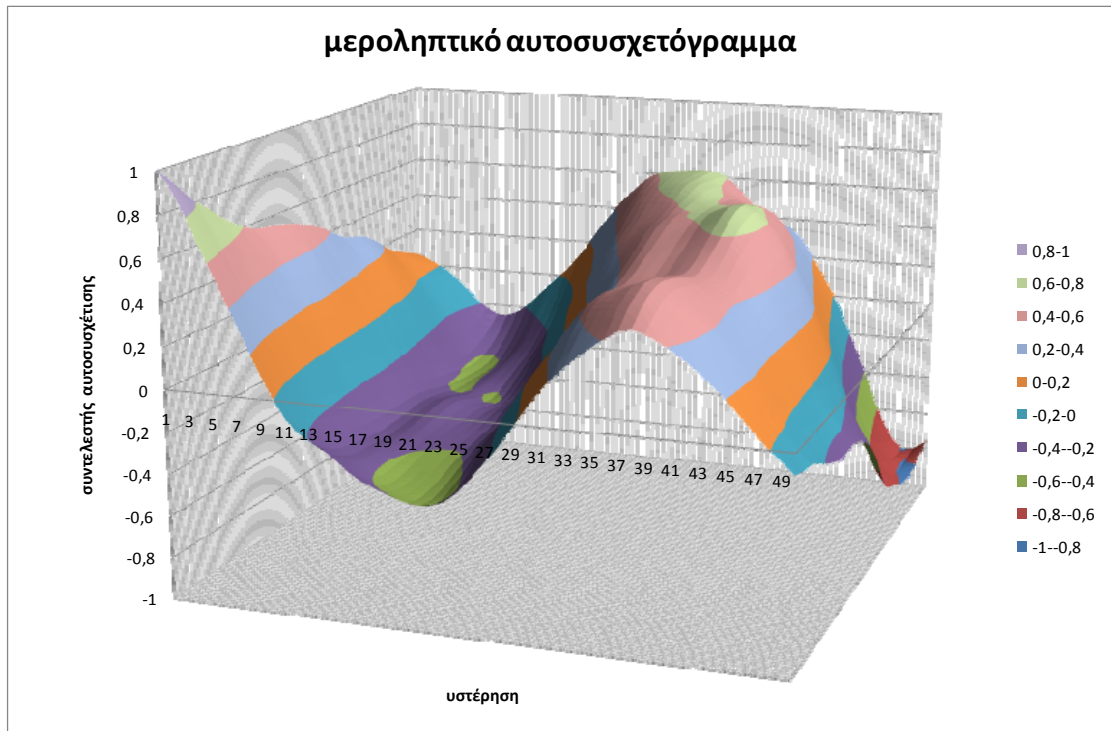
Σχήμα 5.29 τρισδιάστατη απεικόνιση ημιμεταβλητογράμματος



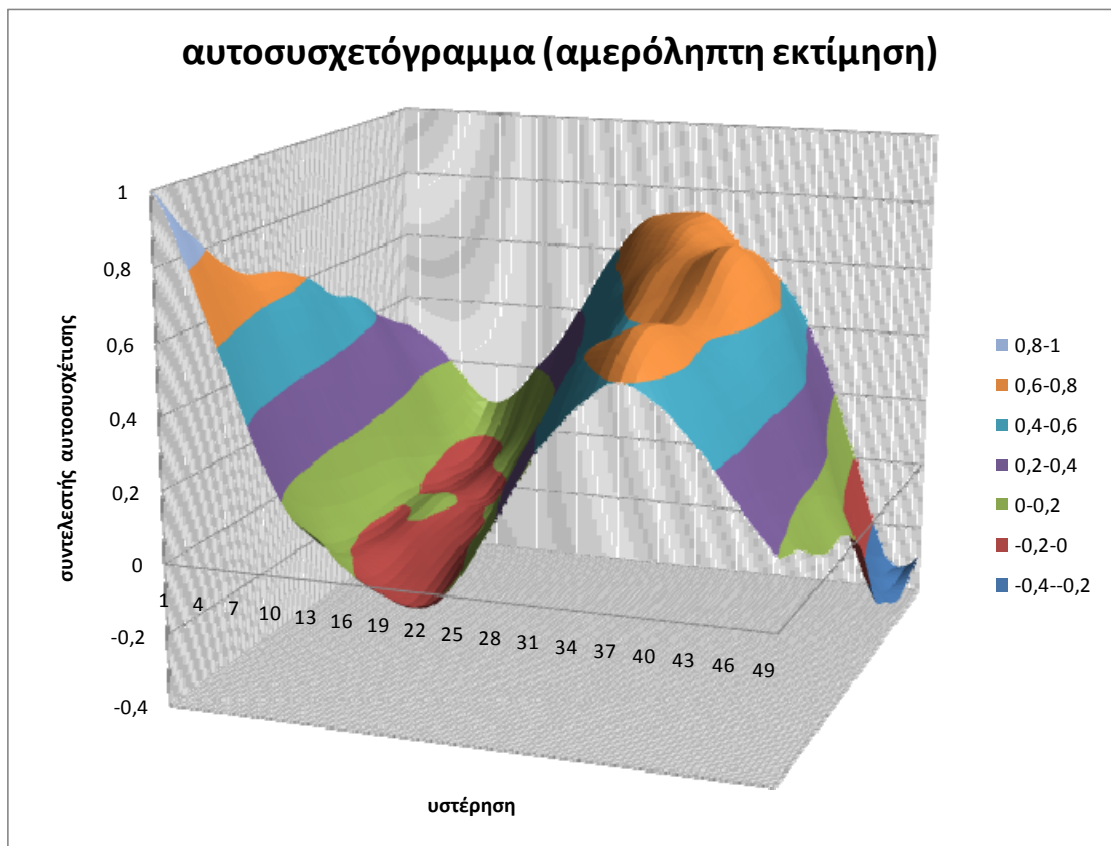
Σχήμα 5.30

Όπως φαίνεται από τις δύο αυτές αναπαραστάσεις, η προσομοίωση του πεδίου ως ισότροπο, είναι ίσως αρκετά χονδροειδής προσέγγιση.

Η μεροληπτική εκτίμηση του αυτοσυσχετογράμματος μέσω της κλασικής εκτιμήτριας της αυτοσυσχέτισης φαίνεται στο σχήμα 5.31 ενώ το διορθωμένο αυτοσυσχετογράμμα απεικονίζεται στο σχήμα 5.32.

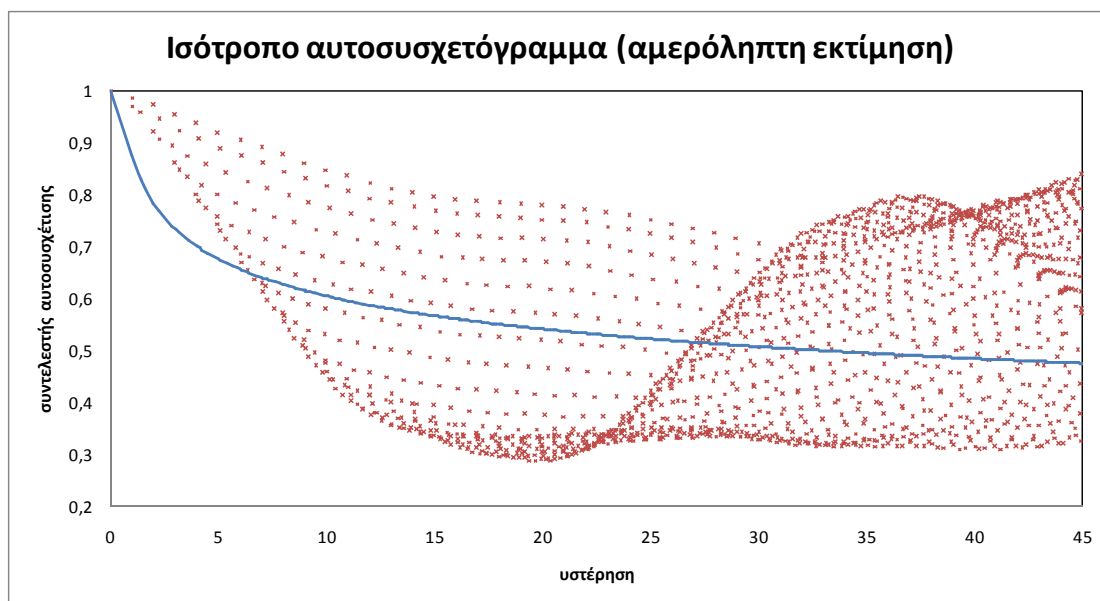


Σχήμα 5.31



Σχήμα 5.32

Η σύγκριση με την θεωρητική προσέγγιση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης φαίνεται στο σχήμα 5.33



Σχήμα 5.33

απ' όπου και πάλι φαίνεται πως η παραδοχή ισότροπου πεδίου είναι ίσως αρκετά μακριά από την πραγματικότητα.

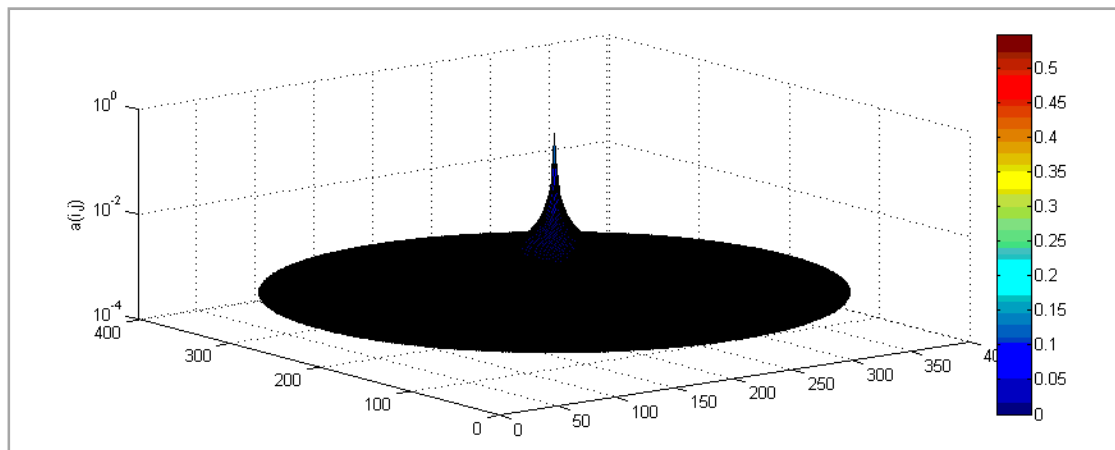
Για την εφαρμογή του μοντέλου θα πρέπει πρώτα να υπολογιστούν οι συντελεστές $b, b', c(b), c(b'), d(b), d(b'), B, a_0$

Προκύπτουν λοιπόν οι λύσεις του πίνακα 5.9

Συντελεστές προσαρμογής μοντέλου	
b	0.16
$c(b)$	0.873479
$d(b)$	0.033556
b'	1.08
$d(b')$	1.282767
$c(b')$	0.295644
B	1.21
γ_0	0.982681
a_0	0.541486

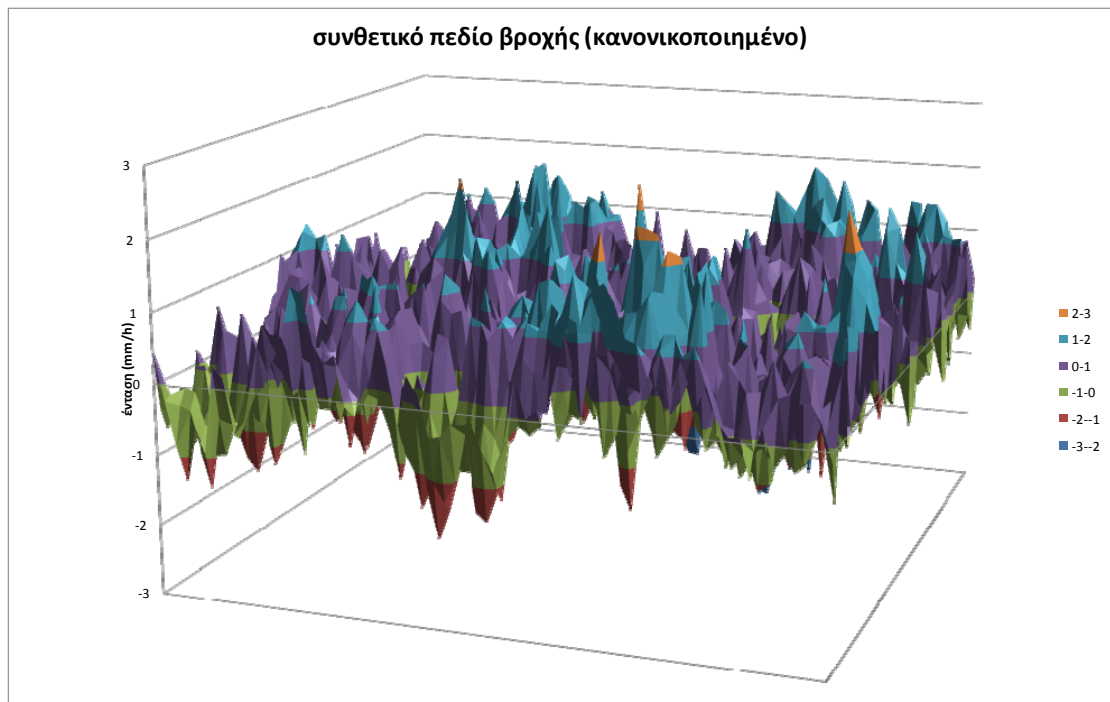
Πίνακας 5.9

Με τον προσδιορισμό των συντελεστών αυτών μπορεί να υπολογιστεί εν συνεχεία και η ακολουθία των συντελεστών $\alpha_{i,j}$ για την αναπαραγωγή του συνθετικού πεδίου. Οι συντελεστές αυτοί παρουσιάζουν κυκλική συμμετρία. Λόγω του υψηλού συντελεστή Hurst, επελέγη μεγάλη ακτίνα υπολογισμού συντελεστών έτσι ώστε να προσεγγισθεί ικανοποιητικά η πραγματικότητα. Για την ακρίβεια υπολογίστηκαν οι συντελεστές μέχρι ακτίνας $s = \sqrt{i^2 + j^2} = 200$ που ισοδυναμεί με 125664 συντελεστές. Σε απεικόνιση σε λογαριθμική κλίμακα οι συντελεστές που προέκυψαν φαίνονται στο σχήμα 5.34.



Σχήμα 5.34 τρισδιάστατη απεικόνιση συντελεστών βάρους

Μια απεικόνιση του στοχαστικού πεδίου με την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε εδώ φαίνεται στο σχήμα 5.35



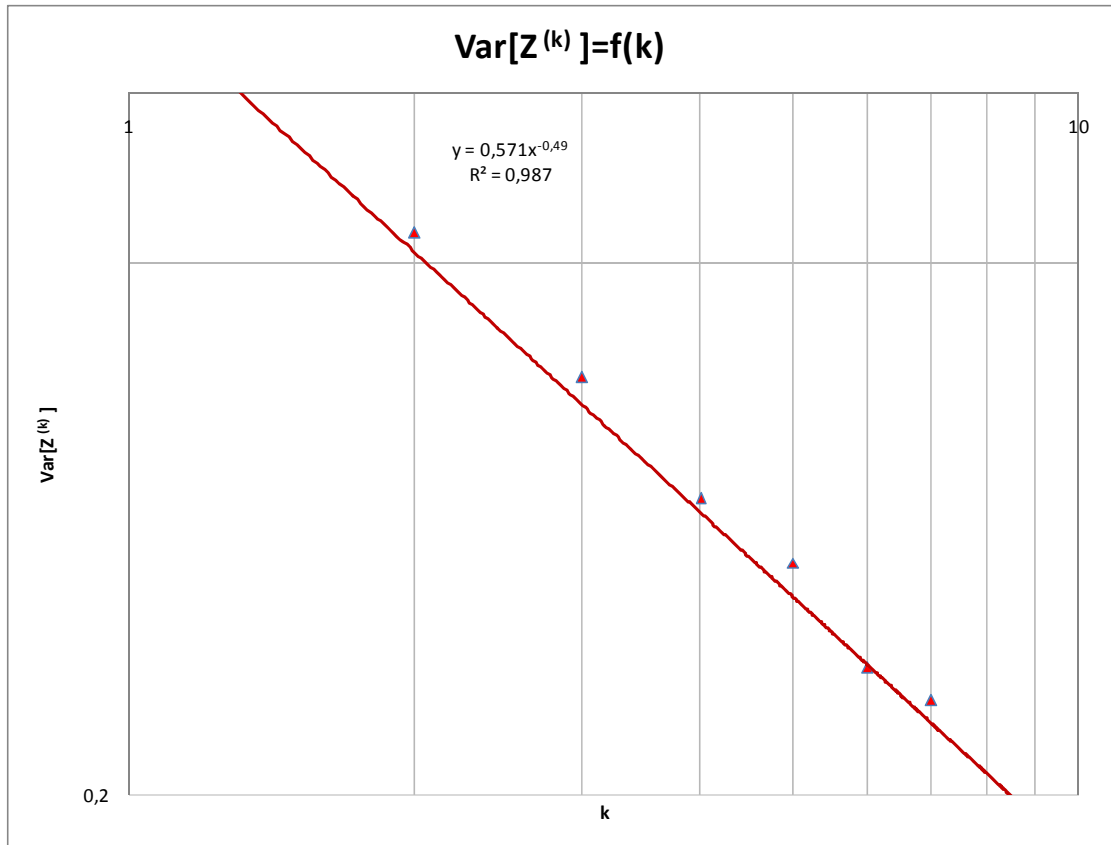
Σχήμα 5.35

Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του κανονικοποιημένου πεδίου φαίνονται στον πίνακα 5.10

Στατιστικά χαρακτηριστικά (κλασικές εκτημήτριες)	
μέση τιμή	0.04
τυπική απόκλιση	0.73
συντελεστής ασυμμετρίας	-0.08
συντελεστής κύρτωσης	-0.02

Πίνακας 5.10

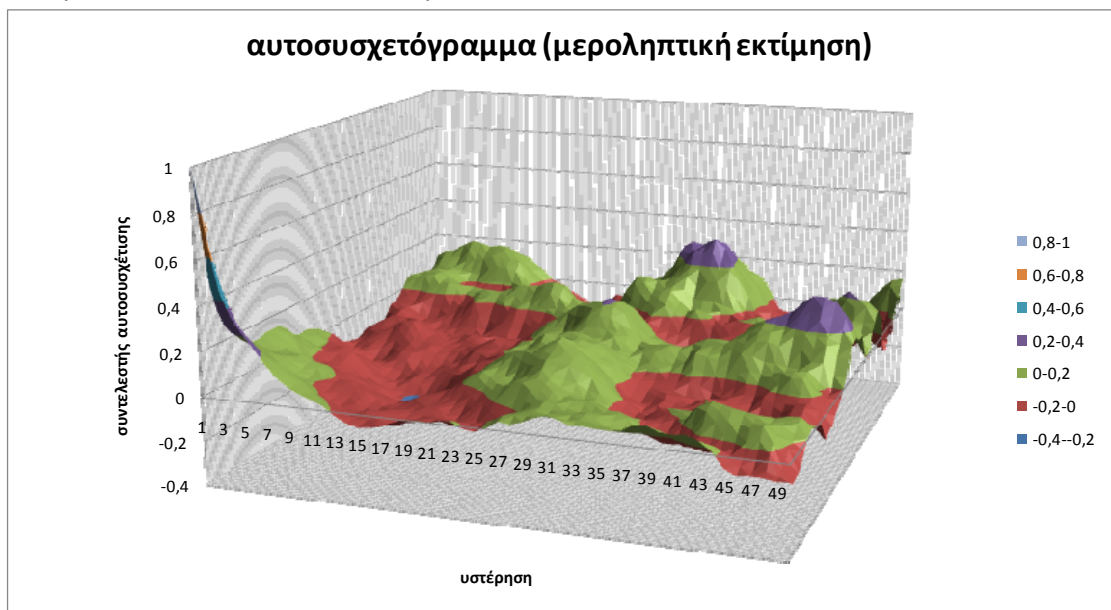
Ο υπολογισμός του συντελεστή Hurst θα γίνει με την ίδια μεθοδολογία. Όπου και θα χουμε



Σχήμα 5.36 Υπολογισμός συντελεστή Hurst

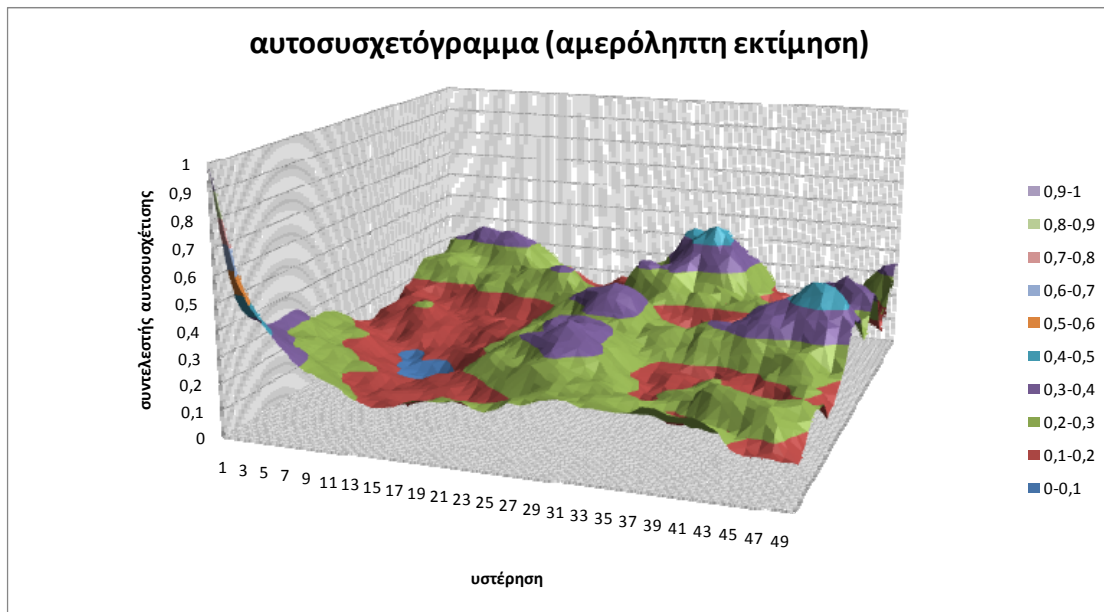
Άρα η μη αμερόληπτη εκτίμηση του συντελεστή Hurst προκύπτει από το σχήμα 5.36 $H = 0,88$ ενώ ακολουθώντας την μεθοδολογία του εδαφίου 3.3.2 η αμερόληπτη εκτίμηση του συντελεστή θα είναι $H = 0,91$.

Η μεροληπτική εκτίμηση του αυτοσυσχετογράμματος σύμφωνα με τις κλασικές εκτιμήτριες συναρτήσεις απεικονίζεται στο σχήμα 5.37



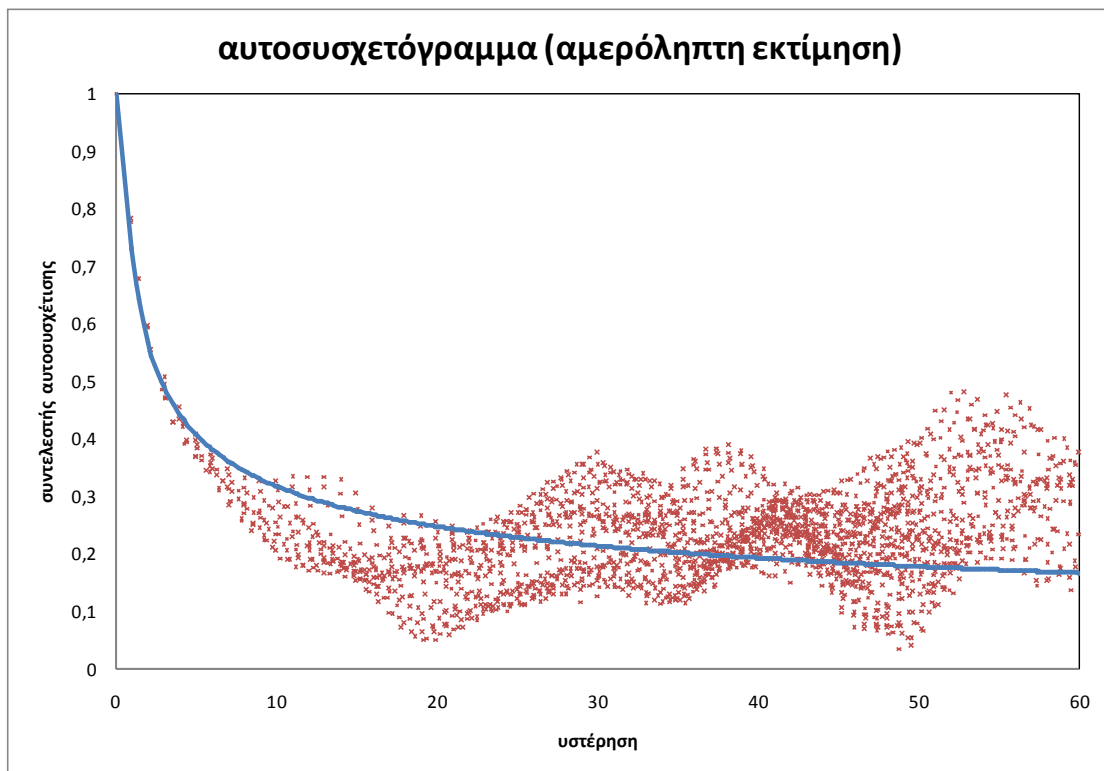
Σχήμα 5.37

ενώ η διορθωμένη εκτίμηση του αυτοσυσχετογράμματος σύμφωνα με την αμερόληπτη εκτιμήτρια συνάρτηση φαίνεται στο σχήμα 5.38.



Σχήμα 5.38

Η σύγκριση των αμερόληπτων εκτιμήσεων των συντελεστών αυτοσυσχέτισης με το θεωρητικό ισότροπο αυτοσυσχετόγραμμα φαίνεται στο σχήμα 5.39

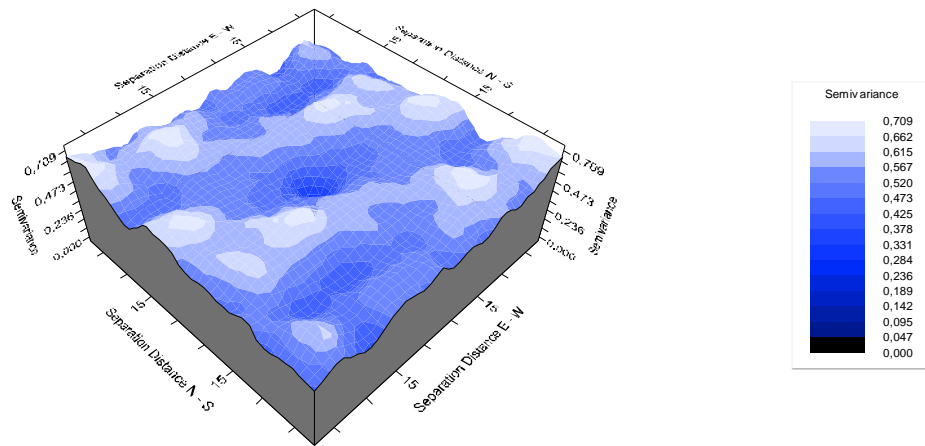


Σχήμα 5.39

απ' όπου κρίνεται ικανοποιητική η προσαρμογή.

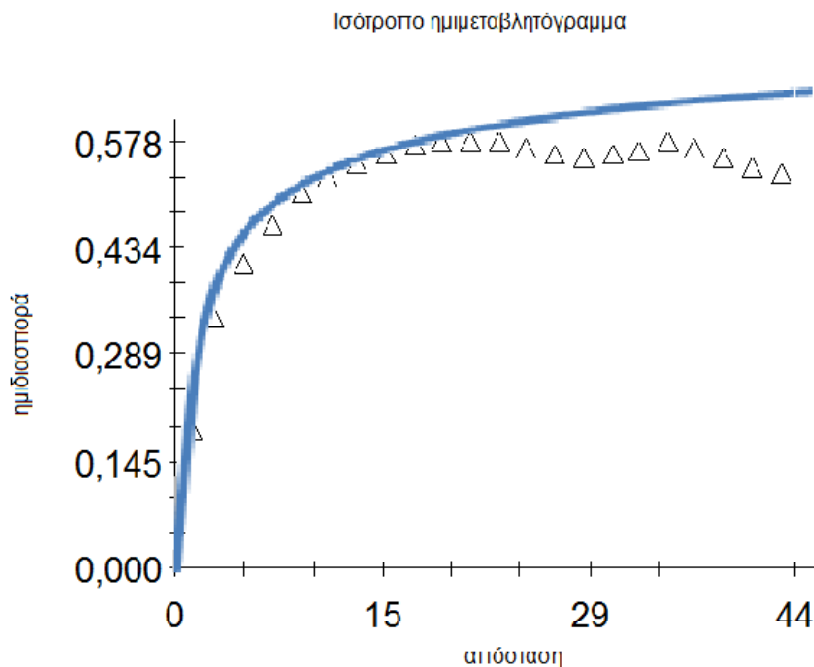
Για τον έλεγχο του κατά πόσον μπορεί η απεικόνιση αυτή του συνθετικού πεδίου να θεωρηθεί με επαρκή προσέγγιση ισότροπο, συγκρίνουμε το θεωρητικό ημιμεταβλητόγραμμα σε διακριτό χώρο με το πειραματικό από τα δεδομένα της απεικόνισης.

Η τρισδιάστατη απεικόνιση του πειραματικού ημιμεταβλητογράμματος θα έχει την μορφή του σχήματος 5.40



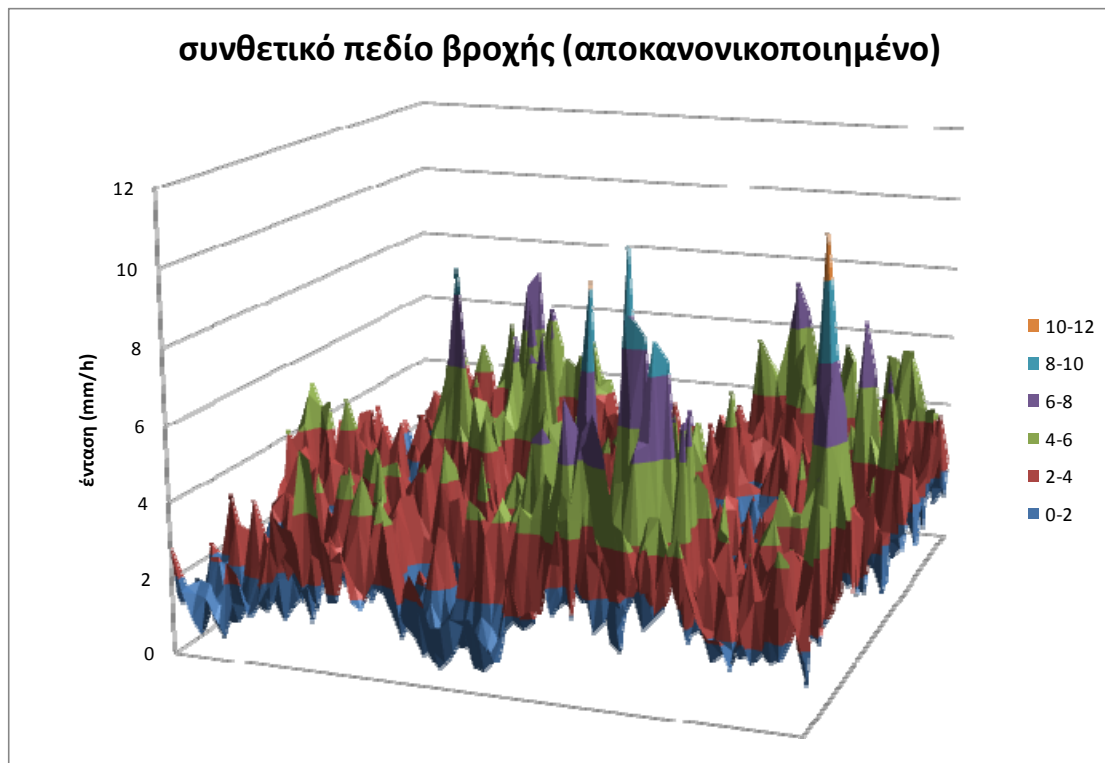
Σχήμα 5.40 τρισδιάστατη απεικόνιση ημιμεταβλητογράμματος

και η σύγκριση με την θεωρητική σχέση 2.31 φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 5.41.



Σχήμα 5.41

Τέλος η μορφή του πεδίου βροχής μετά την αριθμητική επίλυση του αντίστροφου μετασχηματισμού κανονικοποιήσης απεικονίζεται στο σχήμα 5.42.



Σχήμα 5.42

Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του χαρακτηριστικά του οποίου δίνονται στον πίνακα 5.11

<u>Στατιστικά χαρακτηριστικά (κλασικές εκτιμήτριες)</u>	
μέση τιμή	2.34
τυπική απόκλιση	1.31
συντελεστής ασυμμετρίας	1.21
συντελεστής κύρτωσης	2.57

Πίνακας 5.11

Αθροιστικά η σύγκριση του αρχικού πεδίου με το συνθετικό φαίνεται στον πίνακα 5.12

Σύγκριση μετρήσεων και παραγομένου πεδίου			
κανονικοποιημένα πεδία			
		Ιστορικό	συνθετικό
κλασικές εκτιμήσεις	μέση τιμή	-0.00	0.04
	τυπική απόκλιση	0.99	0.73
	συντελεστής ασυμμετρίας	0.13	-0.08
	συντελεστής κύρτωσης	0.12	-0.02
	συντελεστής Hurst	0.89	0.88
αμερόληπτες εκτιμήσεις	ισοδύναμο δείγμα	3.78	19.97
	συντελεστής Hurst	0.96	0.91
	διασπορά	1.33	0.76
αποκανονικοποιημένα πεδία			
κλασικές εκτιμήσεις	μέση τιμή	2.51	2.34
	τυπική απόκλιση	2.00	1.31
	συντελεστής ασυμμετρίας	1.61	1.21
	συντελεστής κύρτωσης	2.76	2.57

Πίνακας 5.12

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

6.1 Συμπεράσματα από την εφαρμογή του μοντέλου

Στην παρούσα εργασία επιχειρήθηκε η διερεύνηση της χωρικής δομής επεισοδίων βροχόπτωσης, με έμφαση στην χωρική εμμόνη, και η κατάρτιση στοχαστικού μοντέλου απλής ομοιοθεσίας που να αναπαράγει επαρκώς την συμπεριφορά αυτή.

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε, αποτελεί επέκταση στις δύο διαστάσεις του μοντέλου συμμετρικού μέσου όρου SMA (Koutsoyiannis, 2000).

Το συμπέρασμα που προέκυψε σχετικά με την χωρική δομή της βροχής είναι ότι η χωρική εμμόνη του πεδίου βροχόπτωσης είναι έντονη και αυτό εκφράζεται με το γεγονός ότι οι συντελεστές Hurst που προέκυψαν ήταν $H > 0,9$.

Για το μοντέλο που αναπτύχθηκε τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν ότι:

- Το μοντέλο αυτό μπορεί να αναπαραγάγει επαρκώς το φαινόμενο Hurst που εδώ φαίνεται ως χωρική εμμόνη του πεδίου βροχής.
- Η εφαρμογή του μοντέλου το οποίο έχει και αναλυτική λύση, είναι πολύ απλή καθώς η μόνη παράμετρος που λαμβάνεται υπ' όψιν είναι ο συντελεστής Hurst.
- Η διατήρηση των στατιστικών χαρακτηριστικών του αρχικού δείγματος κρίνεται αρκετά ικανοποιητική. Βέβαια στην διατήρηση των ροπών υψηλότερων τάξεων (ασυμμετρία, κύρτωση) δημιουργείται πρόβλημα το οποίο όμως είναι αναμενόμενο καθώς η έντονη δομή αυτοσυσχέτισης του δείγματος, αυξάνει ραγδαία την αβεβαιότητα.
- Αν και το μοντέλο έχει αναλυτική λύση, η πλήρης προσομοίωση του αρχικού πεδίου βροχής επιτυγχάνεται μόνο συμπωτικά καθώς το πλήθος των συντελεστών βάρους τείνει στο άπειρο. Ωστόσο για την προσομοίωση, χρησιμοποιείται πεπερασμένος αριθμός συντελεστών. Για να κριθεί ικανοποιητική η προσομοίωση αυτή, ειδικά για μεγάλες τιμές του συντελεστή Hurst, απαιτείται μεγάλο πλήθος τιμών. Πχ για την προσομοίωση του δεύτερου πεδίου χρησιμοποιήθηκαν περίπου οι 120000 πρώτοι συντελεστές βάρους, πράγμα το οποίο μπορεί να κάνει την υπολογιστική διαδικασία αρκετά αργή.

Όσο για τις στατιστικές εκτιμήσεις που έγιναν στην εργασία αυτή καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα

- Θα πρέπει να χρησιμοποιείται μαθηματική προσέγγιση συνεπής με τα αρχικά δεδομένα και να μην χρησιμοποιούνται οι εκτιμήτριες συναρτήσεις της κλασικής στατιστικής αυθαίρετα καθώς έχουμε λανθασμένα συμπεράσματα.
- Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει πολύ μεγάλη υποεκτίμηση της αβεβαιότητας. Πχ αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι για το δεύτερο δείγμα που χρησιμοποιήθηκε για επεξεργασία το αρχικό δείγμα ήταν $n = 4096$ του οποίου το ισοδύναμο δείγμα για ανεξάρτητα δεδομένα ήταν μόλις $n = 3!$

- Επίσης υπάρχει υποεκτίμηση όλων των στατιστικών ροπών τάξης μεγαλύτερη του 2 καθώς και υποεκτίμηση της αυτοσυσχέτισης. Η υποεκτίμηση αυτή αυξάνεται ραγδαία με την αύξηση του συντελεστή Hurst.

Είναι λοιπόν προφανές ότι αν τα αποτελέσματα της επεξεργασίας τέτοιων δεδομένων πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του πλημμυρικού κινδύνου, θα πρέπει να είναι συνεπή με την φυσική πραγματικότητα γιατί σε αντίθετη περίπτωση, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα λανθασμένης εκτίμησης του κινδύνου αυτού.

6.2 Προβληματισμοί σχετικά με την εργασία αυτή

Κατά την επεξεργασία της εργασίας αυτής προέκυψαν οι εξής προβληματισμοί που μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο περαιτέρω μελέτης:

- Στις εφαρμογές της συγκεκριμένης εργασίας, σε κάθε περιοχή μελέτης, έγινε προσομοίωση με την επεξεργασία δεδομένων από ένα μόνο επεισόδιο βροχόπτωσης. Ωστόσο για την πληρέστερη περιγραφή του πεδίου βροχής, κρίνεται αναγκαία η διερεύνηση την μεταβολής της δομής βροχόπτωσης για διάφορα επεισόδια μεγάλου εύρους συνολικής έντασης και διάρκειας, καθώς και μεταβολή τους κατά την διάσταση του χρόνου.
- Στην παρούσα εργασία, το πεδίο βροχόπτωσης το οποίο προσομοιώθηκε, θεωρήθηκε ομοιογενές και ισότροπο. Ωστόσο είναι γνωστό ότι η χωρική κατανομή της βροχής και των κατακρημνίσεων γενικότερα, εξαιτίας του φυσικού τρόπου γεννήσεως τους, επηρεάζονται από το ορεογραφικό ανάγλυφο της εκάστοτε περιοχής. Για τον λόγο αυτό, όταν η ανάλυση αφορά πχ λεκάνη απορροής γνωστού γεωγραφικού ανάγλυφου, ίσως είναι σκόπιμο το πεδίο βροχής να μην προσομοιωθεί ως ομοιογενές και ισότροπο αλλά να ληφθεί υπ όψιν και η επιρροή του γεωγραφικού ανάγλυφου στην χωρική κατανομή του τυχαίου πεδίου.
- Κατά την επεξεργασία του μοντέλου αυτού, σε κάποιες περιπτώσεις όπως αναφέρθηκε στην ανάλυση του, χρειάστηκε να προσδιοριστούν αριθμητικά προσεγγιστικές λύσεις. Θα ήταν σκόπιμο να διερευνηθεί και τι επιρροή μπορεί να έχει η απόκλιση των προσεγγιστικών λύσεων στις τελικές απεικονίσεις του τυχαίου πεδίου που επιδιώκεται να προσεγγιστεί.
- Ο μετασχηματισμός κανονικοποίησης των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκε, αν και στις περιπτώσεις που αναλύθηκαν εδώ λειτουργεί ικανοποιητικά, ωστόσο έχει την αδυναμία να μην ορίζεται για μηδενικές τιμές. Στα πεδία βροχής, κυρίως όταν η περιοχή μελέτης είναι εκτεταμένη ή το χρονικό διάστημα των δεδομένων είναι πολύ μικρό (περίπτωση καταγραφής από radar), είναι σύνθητες να υπάρχει πληθώρα μηδενικών τιμών. Για τον λόγω αυτό είναι σκόπιμο στις περιπτώσεις αυτές να χρησιμοποιηθεί ή να εισαχθεί κάποιος νέος τρόπος μετασχηματισμού των δεδομένων.
- Παρατηρώντας τα αρχικά πεδία βροχής, και πιο συγκεκριμένα την λογαριθμική απεικόνιση της διασποράς ανά κλίμακα προς την κλίμακα αυτή, η εξίσωση γραμμής που ελαχιστοποιεί ελάχιστα τετράγωνα των αποκλίσεων, δεν εφαρμόζεται σε κάποιες περιπτώσεις αρκετά ικανοποιητικά. Επίσης παρατηρείται μία τάση για αλλαγή της κλίσης αυτής για μεγαλύτερες κλίμακες. Για τον λόγο αυτό ίσως η προσέγγιση προσομοίωσης μέσω μοντέλου απλής ομοιοθεσίας δεν είναι απόλυτα ικανοποιητική καθώς δεν

αναπαραγάγει πλήρως την παρατηρούμενη συμπεριφορά. Κατά συνέπεια, υπάρχει περιθώριο για διατύπωση γενικευμένων σχέσεων στα πρότυπα του μονοδιάστατου μοντέλου (Koutsoyiannis, 2000) ή υιοθέτησης ενός μοντέλου πολλαπλής ομοιθεσίας (multi – scaling).

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Θεοδωράτος, Ν. (2004), *Στοχαστική προσομοίωση δισδιάστατων τυχαίων πεδίων με διατήρηση της εμμονής*, Διπλωματική εργασία, 69 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.
- Λαγγούσης, Α., (2003) *Ανάπτυξη κυκλοστάσιμων στοχαστικών υδρολογικών μοντέλων με διατήρηση της βραχυπρόθεσμης μνήμης και της μακροπρόθεσμης εμμονής*, Διπλωματική εργασία, 327 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Κουτσογιάννης, Δ. (1996) *Στατιστική Υδρολογία*, Έκδοση 3, 307 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα
- Κουτσογιάννης "., (2008) *Σημειώσεις Στοχαστικών Μεθόδων στους Υδατικούς Πόρους*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο (<http://www.itia.ntua.gr/el/docinfo/207/>).
- Κουτσογιάννης, Δ., και Θ. Ξανθόπουλος (1999), *Τεχνική Υδρολογία*, Έκδοση 3, 418 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο (<http://www.itia.ntua.gr/g/docinfo/115/>).
- Μαμάσης, Ν., και Δ. Κουτσογιάννης (1999) , *Σημειώσεις Προχωρημένης Υδρολογίας*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα
- Παντελίδης Γ. (2001), *Ανάλυση τόμος II*, 406 σελ, εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα.
- Σοφιανός Γ., Τυχόπουλος Ε. (2005) *Αριθμητική ανάλυση*, 373 σελ, εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, Αθήνα.
- Adenstedt, R. K. (1974) On large sample estimation for the mean of a stationary random sequence. *Ann. Statist.* **2**, 1095– 1107
- Bak, P. (1996) *How Nature Works, The Science of Self-Organized Criticality*. Copernicus, Springer-Verlag, New York, USA.
- Beard, L.R. (1965) Use of interrelated records to simulate streamflow, *Proc. A.S.C.E., J. Hydraul. Div.*, 91(HY5), 13-22.
- Beran, J. (1994), *Statistics for Long-Memory Processes*, vol. 61 of Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, New York, USA.
- Bhattacharya, R, N., Gupta, V. K. and Waymire, E. (1983) The Hurst effect under trends, *J. Appl. Prob.* **20**, 649–662.
- Bloomfield, P. (1992), Trends in global temperature, *Climatic Change* **21**, 1–16.
- Box, G.E.P. & Jenkins, G.M. (1970) *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden – Day, San Francisco, California, U.S.A

- Bracewell, R. N. (2000) *The Fourier Transform and its applications*, 616. McGraw-Hill International Editions, Singapore
- Bras, R.L. & Rodriguez-Iturbe, I. (1985) *Random Functions in Hydrology*, Addison-Wesley, U.S.A.
- Byers, D., J. Davidson, and D. Peel (2000), The dynamics of aggregate political popularity: Evidence from eight countries, *Electoral Stud.*, 19(1), 49-62.
- Eltahir, E. A. B. (1996), El Niño and the natural variability in the flow of the Nile River, *Wat. Resour. Res.* 32(1), 131–137.
- Evans, T. E. (1996), The effects of changes in the world hydrological cycle on availability of water resources. In: *Global Climate Change and Agricultural Production: Direct and Indirect Effects of Changing Hydrological, Pedological and Plant Physiological Processes* (ed. by F. Bazzaz and W. Sombroek), Chapter 2, FAO and John Wiley, Chichester, West Sussex, UK.
- Grygier, J.C. & Stedinger, J.R. (1990) SPIGOT, A synthetic streamflow generation software package, Technical description. School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, Version 2.5.
- Haslett, J. and Raftery, A. E. (1989), Space–time modelling with long-memory dependence: assessing Ireland’s wind power resource, *Appl. Statist.* 38(1), 1–50.
- Holland (1975), *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, The MIT Press.
- Hosking, J. R. M. (1996) Asymptotic distributions of the sample mean, autocovariances, and autocorrelations of longmemory time series. *J. Econometrics* **73**, 261–284.
- Hosking, J. R. M. (1984), Modeling persistence in hydrological time series using fractional differencing, *Water Resources Research*, 20(12) 1898-1908.
- Hurst, H.E. (1951) Long term storage capacities of reservoirs. *Trans. ASCE* **116**, 776-808.
- Jaynes, E. T., (1957), Information theory and statistical mechanics, I, Phys. Rev.
- Karagiannis, T., M. Molle and M. Faloutsos (2004), Long-range dependence: Ten year of Internet traffic modeling. *IEEE Internet Comput.*, 8(5), 57-64.
- Klemes, V. (1974), The Hurst phenomenon: A puzzle?, *Water Resources Research*, 10(4) 675-688.
- Kitanidis PK. (1999) , *Introduction to Geostatistics, Applications in Hydrogeology*, Stanford Cambridge Press
- Kolmogorov, A. N. (1940), Wiener’sche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbert’schen Raum, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. USSR (N.S.)* 26, 115–118.

- Koutsoyiannis D. (2009), *Hydrology Stochastics*, National Technical University of Athens (in preparation)
- Koutsoyiannis, D.(2006), Hurst, Joseph, colours and noises: The importance of names in an important natural behaviour, *Niche Modeling*.
- Koutsoyiannis, D. (2006), Nonstationarity versus scaling in hydrology, *Journal of Hydrology*.
- Koutsoyiannis, D.(2005), Hydrologic persistence and the Hurst phenomenon, *Water Encyclopedia, Vol. 4, Surface and Agricultural Water*, edited by J. H. Lehr and J. Keeley, 210–221, Wiley, New York.
- Koutsoyiannis, D. (2003), Climate change, the Hurst phenomenon, and hydrological statistics, *Hydrological Sciences Journal*, 48(1), 3-24.
- Koutsoyiannis, D. (2002) The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy. *Hydrological Sciences-Journal-des Sciences Hydrologiques* 47(4), 573-595.
- Koutsoyiannis, D. (2000) A generalized mathematical framework for stochastic simulation and forecast of hydrologic time series. *Wat. Resour. Re.* 36(6), 1519-1534.
- Koutsoyiannis, D., S.M. Papalexiou, and A. Montanari (2007), Can a simple stochastic model generate a plethora of rainfall patterns? (Invited), *The Ultimate Rainmap: Rainmap Achievements and the Future in Broad-Scale Rain Modeling*, Oxford, Engineering and Physical Sciences Research Council.
- Mandelbrot, B. B. (1977), *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York.
- Maass, A., Hufschmidt, M.M., Dorfman, R., Thomas, H.A., Marglin, S.A., and Fair, J. M. (1962) *Design of Water Resource Systems*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Matalas, N.C. & Wallis, J.R. (1976) Generation of synthetic flow sequences, in *Systems Approach to Water Management*, A.K. Biswas editor, McGraw Hill.
- Matalas, N.C. (1967) Mathematical assessment of synthetic hydrology, *Wat. Resour. Res.*, 3(4), 937-945.
- Mesa, O. J. and Poveda, G. (1993), The Hurst effect: the scale of fluctuation approach, *Wat. Resour. Res.* 29(12), 3995–4002.
- Montanari, A., Rosso, R. and Taqqu, M. S. (1997), Fractionally differenced ARIMA models applied to hydrologic time series. *Wat. Resour. Res.* 33(5), 1035–1044.
- National Research Council (Committee on Opportunities in the Hydrologic Sciences) (1991) *Opportunities in the Hydrologic Sciences*, 21. National Academy Press, Washington DC, USA.
- Papalexiou, S.M., A. Montanari, and D. Koutsoyiannis,(2007) Scaling properties of fine resolution point rainfall and inferences for its stochastic modelling, *European*

Geosciences Union General Assembly 2007, Geophysical Research Abstracts, Vol. 9, Vienna, 11253, European Geosciences Union.

- Papoulis A., (2002), *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Fourth Edition, 657, Mc-Graw Hill.
- Peng, C.-K., S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger (1994), Mosaic organization of DNA nucleotides, *Phys. Rev. E*, 49, 1685–1689.
- Poincaré, H. Chance (1956), *The World of Mathematics*, Simon & Schuster, New York.
- Popper, K.(1982), *Quantum Theory and the Schism in Physics*, Routledge.
- Radziejewski, M. and Kundzewicz, Z. W. (1997), Fractal analysis of flow of the river Warta, *J. Hydrol.* 200, 280–294.
- Ray, B. K., and R. S. Tsay (2000), Long-range dependence in daily stock volatilities, *J. Bus. Econ. Stat.*, 18(2), 254– 262.
- Rafael L. Bras, Ignacio Rodríguez-Iturbe (1975), *Random Functions and Hydrology*, Dover.
- Sakalauskiene ė, G. (2003), The Hurst phenomenon in hydrology, *Environ. Res. Eng. Manage.*, 3(25), 16– 20.
- Salas, J. D. (1993) Analysis and modeling of hydrologic time series. In: *Handbook of Hydrology* (ed. by D.Maidment), Chapter 19, 19.1–19.72. McGraw-Hill, New York, USA.
- Shannon, C. E. and Weaver, W. (1949), *The Mathematical Theory of Communication*. The University of Illinois Press, Urbana, Illinois.
- Stedinger, J. R., Vogel, R. M. & Foufoula-Georgiou, E. (1993) Frequency analysis of extreme events. In: *Handbook of Hydrology* (ed. by D. R. Maidment), Chapter 18. McGraw-Hill, New York, USA.
- Stephenson, D. B., Pavan, V. and Bojariu, R. (2000), Is the North Atlantic Oscillation a random walk? *Int. J. Clim.* 20, 1–18.
- Thomas, H.A. & Fiering, M.B. (1962) *Mathematical synthesis of streamflow sequences for the analysis of river basins by simulation*, in *Design of Water Resource Systems*, by Maass, A., Hufschmidt, M. M., Dorfman, R., Thomas, H.A., Marglin, S.A., and Fair, J. M., Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Tsallis, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *J. Stat. Phys.*, 52, 479-487.
- Vanmarcke, E. (1988) *Random Fields*, 382. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA.
- Vogel, R. M., Tsai, Y. & Limbrunner, J. F. (1998) The regional persistence and variability of annual streamflow in the United States. *Wat. Resour. Res.* 34(12), 3445–3459.

Wagenmakers, E. J., S. Farrell, and R. Ratcliff (2004), Estimation and interpretation of $1/f$ noise in human cognition, *Psychon. Bull. Rev.*, 11(4), 579–615.

Webster R., Oliver M. (2007), *Geostatistics for environmental scientists* 2nd edition, 292, John Wiley and Sons.

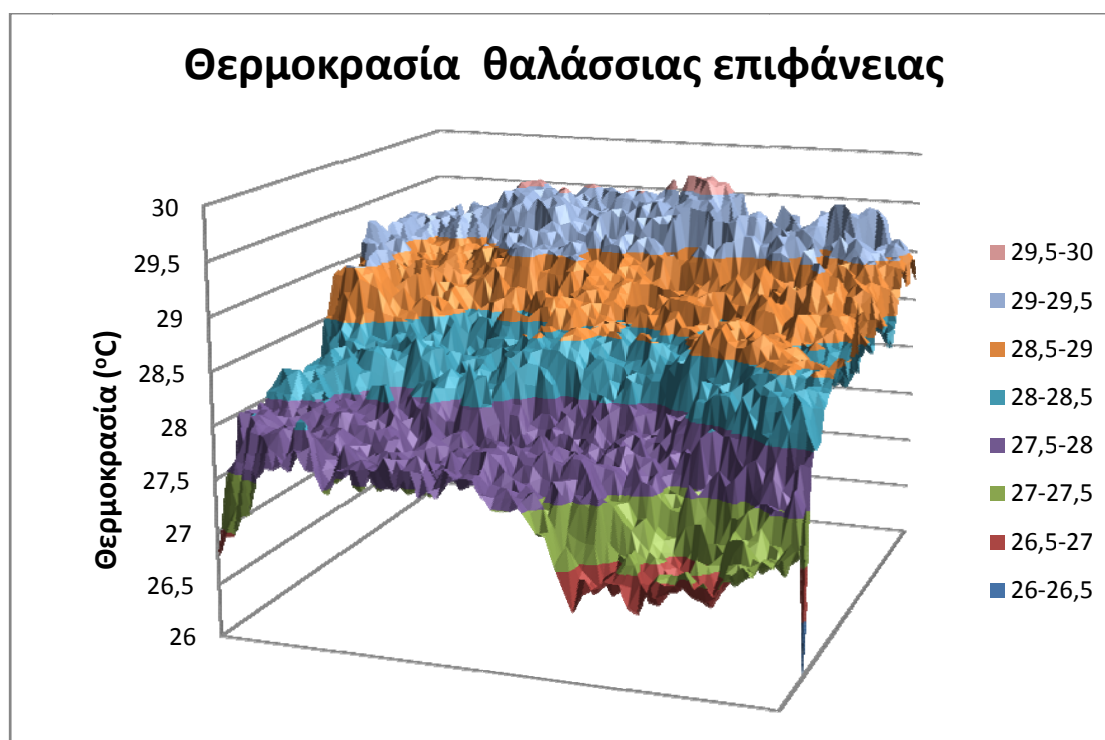
Παράρτημα Α

Στο παράρτημα αυτό της παρούσας εργασίας θα δοθεί ένα παράδειγμα προκειμένου να διερευνηθεί αν η χωρική εμμονή είναι γενικότερα εμφανιζόμενη συμπεριφορά στις γεωφυσικές διεργασίες.

Τα δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν εδώ είναι οι μέσες τιμές διημέρου θερμοκρασίας της θαλάσσιας επιφάνειας. Τα δεδομένα προέρχονται από καταγραφές μέσω δορυφορικού συστήματος και είναι διαδικτυακά διαθέσιμα από την μετεωρολογική υπηρεσία των Ηνωμένων Πολιτειών (NOAA).

Τα δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν, αφορούν χρονική περίοδο του διημέρου 24-25/5/2006 και αναφέρονται σε γεωγραφικές συντεταγμένες: Γεωγραφικό πλάτος (16,75-10,45) και Γεωγραφικό μήκος (158Ε-162.3Ε). Τα δεδομένα είναι καταγεγραμμένα σε κλίμακα $0,1^\circ \times 0,1^\circ$. Και σε αυτή την περίπτωση, ο κλίμακος θεωρείται καρτεσιανός, αμελώντας την παραμόρφωση λόγω ελλειψοειδούς σχήματος της Γής.

Τα αρχικά δεδομένα φαίνονται στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα Α1)



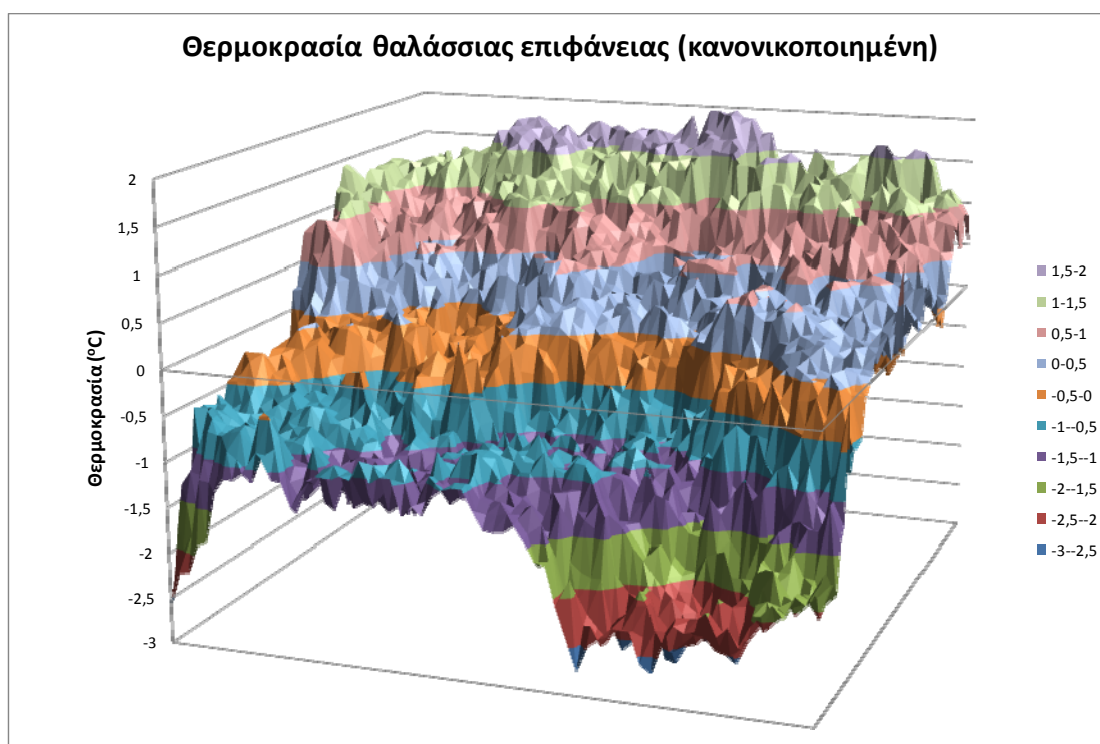
Σχήμα Α1

Εν συνεχεία μέσω του μετασχηματισμού που εισήχθη θα γίνει η κανονικοποίηση των δεδομένων. Οι συντελεστές στο μετασχηματισμό κανονικοποίησης φαίνονται στον πίνακα Α1

Συντελεστές μετασχηματισμού	
α	7.76733
ν	13.66108
β	166.13980
ψ	-3.41222
κ	100.59866

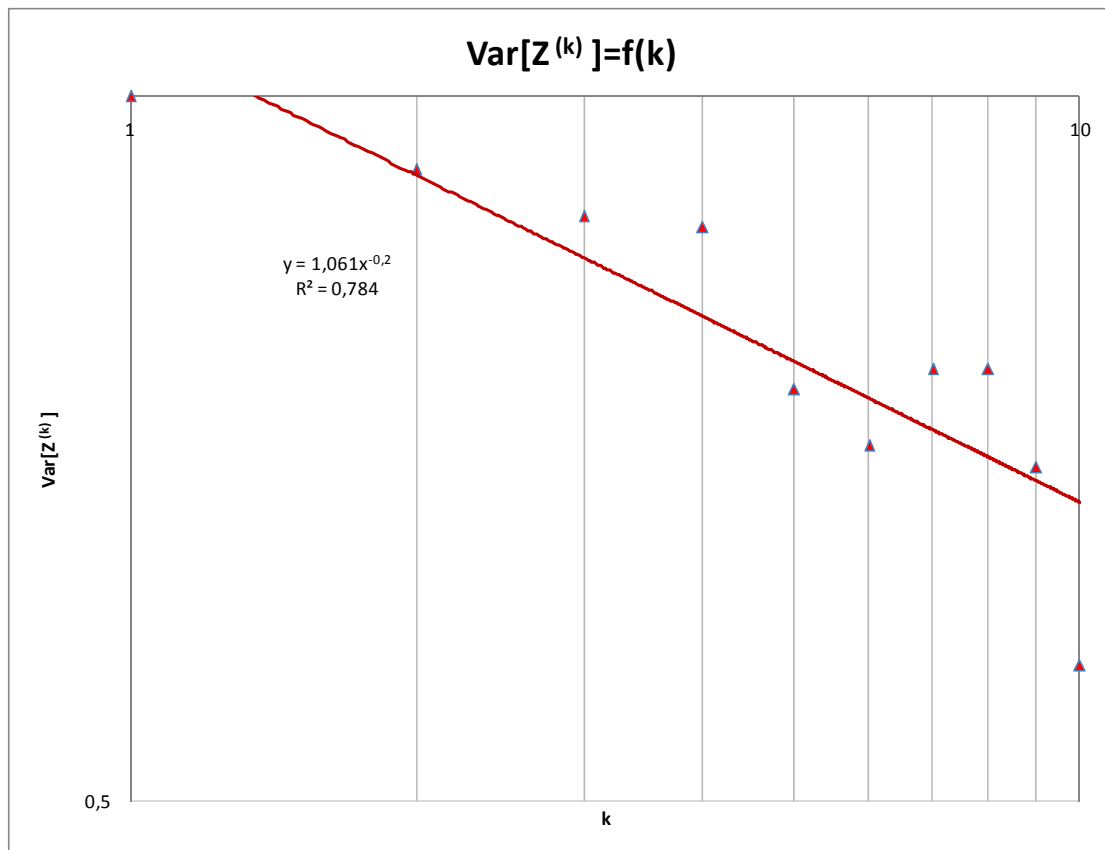
Πίνακας Α1

και το κανονικοποιημένο πεδίο θα έχει την μορφή του σχήματος Α2



Σχήμα Α2

Στη συνέχεια συναθροίζοντας το πεδίο σύμφωνα με την σχέση 4.111 προκύπτει η μεροληπτική εκτίμηση του συντελεστή Hurst



Σχήμα A3 Υπολογισμός συντελεστή Hurst

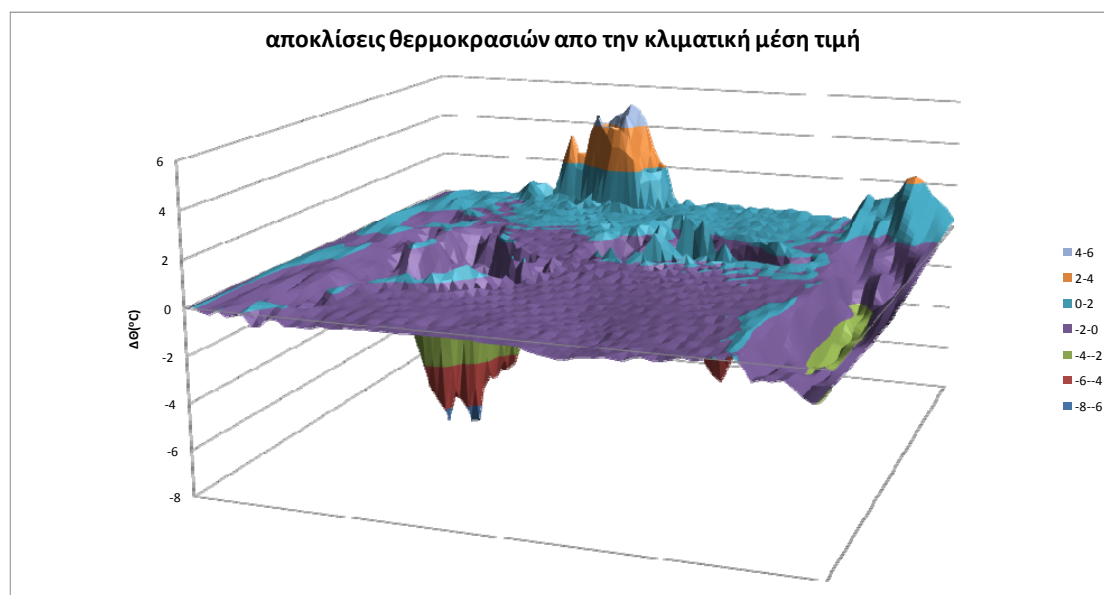
$H = 0,94$ (Σχήμα A3)

Ακολουθώντας την διαδικασία του εδαφίου 3.3.2 η αμερόληπτη εκτίμηση του συντελεστή Hurst θα είναι $H = 0,98$

Στο πεδίο από είναι προφανής η τάση για ομαδοποίηση υψηλών και χαμηλών τιμών, πράγμα το οποίο φαίνεται και στην πολύ υψηλή τιμή του συντελεστή Hurst. Επίσης οι λόγοι για την ομαδοποίηση αυτή είναι εύληπτοι καθώς είναι γνωστή εξάρτηση γεωγραφικής θέσης και θερμοκρασίας και μάλιστα καθώς μιλάμε για θερμοκρασία της επιφάνειας της θάλασσας, αυτή δεν είναι πολύ ευαίσθητη σε θερμοκρασιακές μεταβολές στην περιοχή τους οι όποιες μπορεί σε μικρή κλίμακα χρόνου να μην έχουν προφανή εξάρτηση λόγω γεωγραφικής θέσης (και σε μικρή κλίμακα χώρου). Για τον λόγω αυτό εδώ απλά παραθέτουμε την εμφάνιση του φαινομένου Hurst ως χωρική εμμονή και δεν προχωρούμε στην εφαρμογή του μοντέλου καθώς a priori καταρρίπτεται η παραδοχή ομοιομόρφου πεδίου.

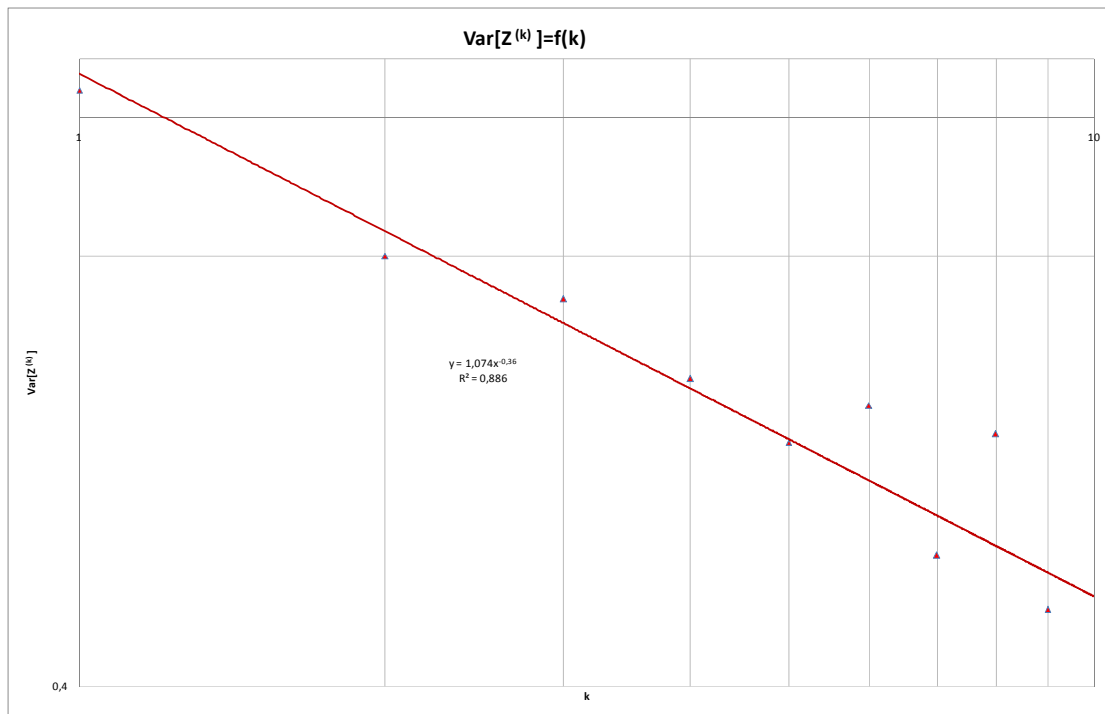
Παράρτημα Β

Στο παράρτημα αυτό, επιχειρείται η διερεύνηση της ύπαρξης μακράς εμμονής σε άλλο ένα καταγεγραμμένο φυσικό πεδίο. Στην περίπτωση αυτή εξετάζεται δείγμα από την μέση ημερήσια απόκλιση της θερμοκρασίας αέρα από την μέση κλιματική της τιμή. Οι μετρήσεις γίνονται μέσω δορυφόρου και είναι διαθέσιμες διαδικτυακά από την μετεωρολογική υπηρεσία των Ηνωμένων Πολιτειών (NOAA). Οι μετρήσεις είναι για το βόρειο ημισφαίριο, για την πρώτη Μάιου 2006, έχουν γίνει σε κানাβο $1^\circ \times 1^\circ$ και αφορούν γεωγραφικές συντεταγμένες, πλάτος 2N-72N και μήκος 74E-14E. Η μορφή του πεδίου έχει την μορφή του σχήματος Β1.



Σχήμα Β1

Και πάλι θεωρώντας τις μετρήσεις σε κανονικό κানাβο αμελώντας της παραμόρφωση λόγω καμπυλότητας του ελλειψοειδούς της γής θα γίνει η επεξεργασία. Τα δεδομένα δεν μπορούν να κανονικοποιηθούν σύμφωνα με τον μετασχηματισμό που εισήχθη καθώς περιλαμβάνουν και αρνητικές τιμές. Τελικά συναθροίζοντας το αρχικό πεδίο σύμφωνα με την σχέση 4.111 προκύπτει σύμφωνα η μεροληπτική εκτίμηση του συντελεστή Hurst $H = 0.91$ (Σχήμα Β2)



Σχήμα B2 Υπολογισμός συντελεστή Hurst

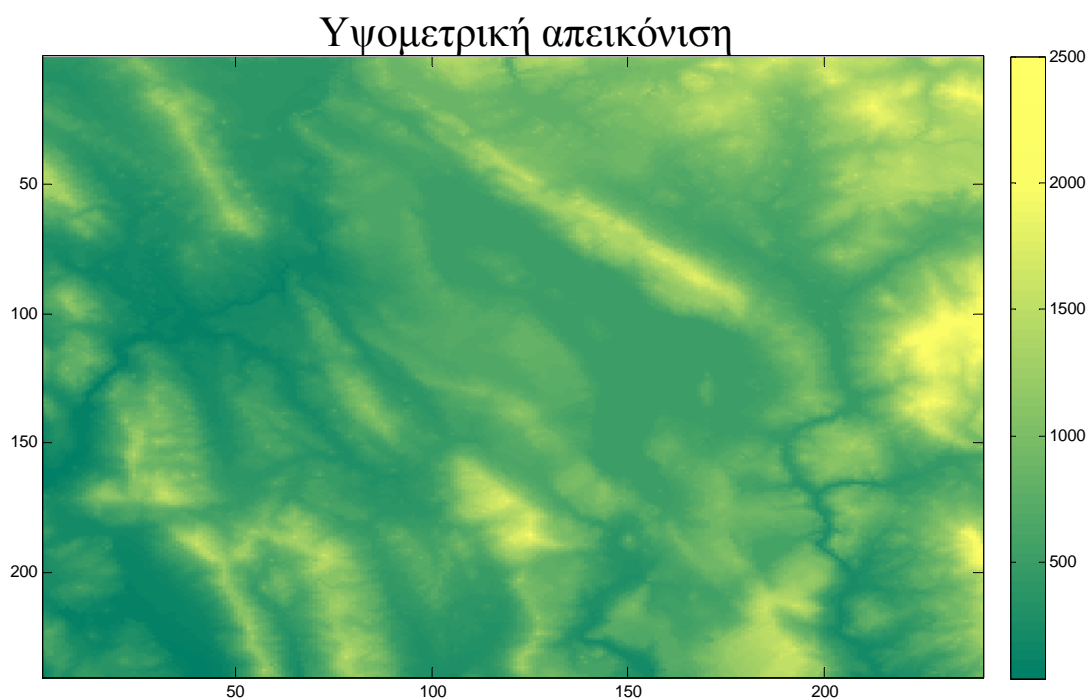
Ενώ σύμφωνα με το εδάφιο 3.3.2 η αμερόληπτη εκτίμηση ισούται με $H = 0,95$.

Και σε αυτή την περίπτωση είναι προφανής η ισχυρή δομή αυτοσυσχέτισης των δεδομένων που εκφράζεται με την υψηλή τιμή του συντελεστή Hurst. Επίσης στην περίπτωση αυτή θα μπορούσε αν εισάγαμε κάποιον άλλο μετασχηματισμό κανονικοποίηση να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο που αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή καθώς δεν υπάρχει κάποιος προφανής τουλάχιστον λόγος που να αποτρέπει την παραδοχή ομοιόμορφου ισότροπου πεδίου.

Παράρτημα Γ

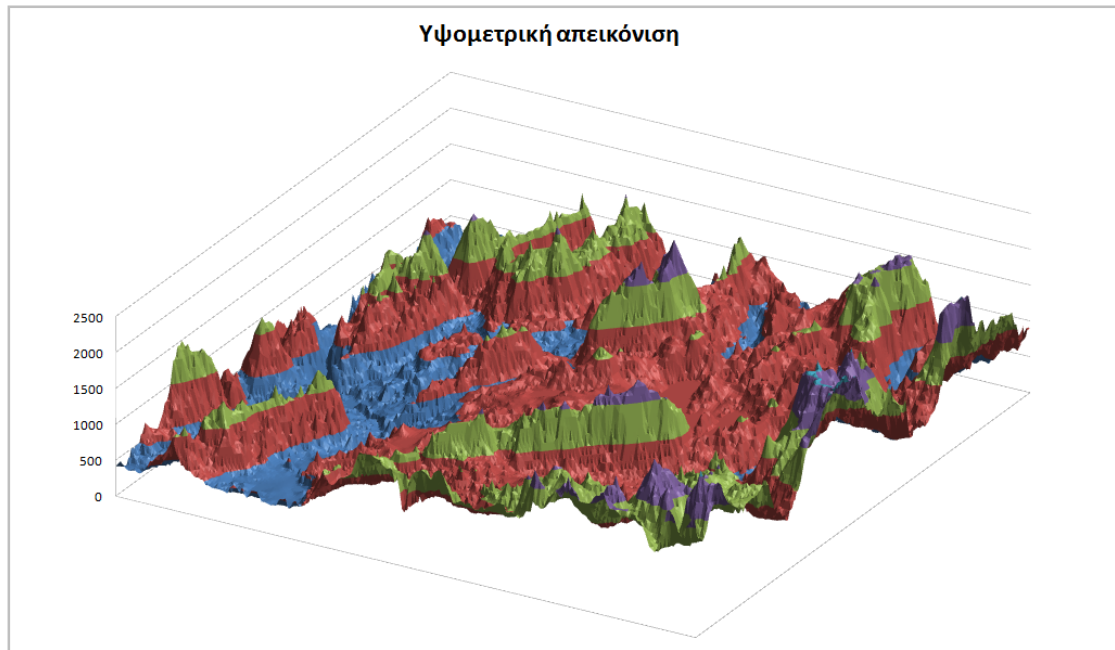
Σε αυτό το μέρος του παραρτήματος, επιχειρείται η διερεύνηση της ύπαρξης χωρικής εμμονής και στην διαμόρφωση του γεωγραφικού ανάγλυφου της επιφάνειας της γής. Η έννοια της συγκέντρωσης “υψηλών τιμών” στην περίπτωση αυτή είναι διαισθητικά προφανής καθώς είναι γνωστό λόγω της διαδικασίας της ορογένεσης, ότι οι υψηλές τιμές (υψηλά υψόμετρα) ομαδοποιούνται σε οροσειρές. Ωστόσο, είναι σκόπιμη η διερεύνηση, καθώς παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον το γεγονός ότι η χωρική δομή της βροχής που διερευνήθηκε παρουσιάζει έντονες ομοιότητες με την χωρική δομή των οροσειρών.

Στο μέρος αυτό του παραρτήματος, τα υψομετρικά δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν προέρχονται από τον ελλαδικό χώρο και πιο συγκεκριμένα περιοχή της οροσειράς της Πίνδου. Ο κλίμακας καταγραφής των υψομετρικών δεδομένων είναι τετραγωνικός με αποστάσεις 200m×200m. Η μορφή των υψομετρικών δεδομένων φαίνεται στον παρακάτω χάρτη (Σχήμα Γ1)



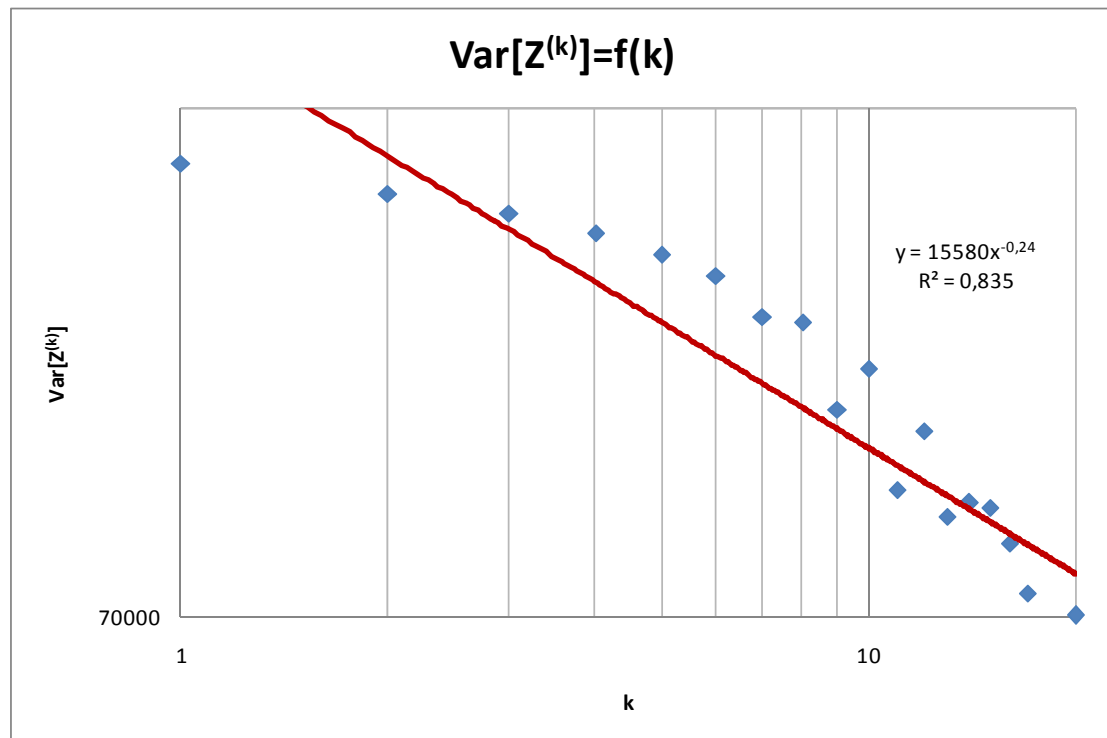
Σχήμα Γ1

Και σε τρισδιάστατη απεικόνιση (Σχήμα Γ2)



Σχήμα Γ2

Εν συνεχεία συναθροίζοντας σύμφωνα με την σχέση 4.111 το πεδίο και αναπαριστώντας σε διπλό λογαριθμικό χαρτί την κλασική εκτίμηση της διασποράς ανά κλίμακα ως προς την κλίμακα αυτή έχουμε ότι η μεροληπτική εκτίμηση του συντελεστή Hurst είναι $H = 0,94$ (Σχήμα Γ3)



Σχήμα Γ3

Ενώ σύμφωνα με την μεθοδολογία του εδαφίου 3.3.2 η αμερόληπτη εκτίμηση του συντελεστή είναι $H = 0,98$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα λοιπόν ότι και γι' αυτό το πεδίο η χωρική εμμονή όπως άλλωστε αναμενόταν είναι πολύ υψηλή.

