Σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος:

Βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων – Υδροπληροφορική

Γραμμική και δικτυακή βελτιστοποίηση και στοιχεία θεωρίας γράφων

Ανδρέας Ευστρατιάδης & Χρήστος Μακρόπουλος
Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Μάρτιος 2011

Μαθηματική διατύπωση προβλημάτων γραμμικής βελτιστοποίησης

- Γενική διατύπωση προβλημάτων βελτιστοποίησης:

$$\text{minimize / maximize } f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ όπου } \mathbf{x} \in X$$

- Απαιτήσεις γραμμικής βελτιστοποίησης:
  - Γραμμική στοχική συνάρτηση:

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

  - Γραμμικοί περιορισμοί:

$$g_i(\mathbf{x}) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \le b_i \;\; \forall\; i = 1, \ldots, m$$

  - Συνεχείς και μη αρνητικές μεταβλητές ελέγχου:

$$x_j \ge 0 \;\forall\; j = 1, \ldots, n$$

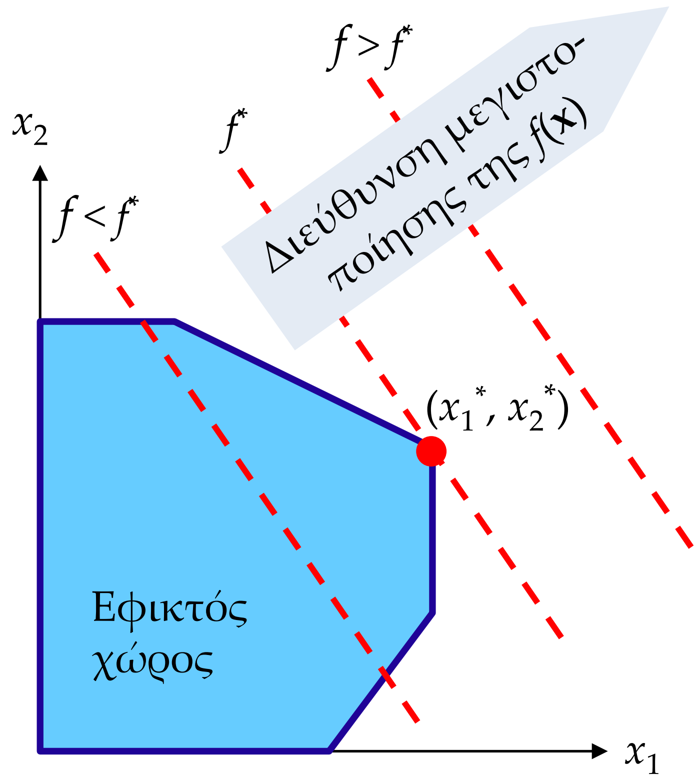
- Μητρωική διατύπωση:

$$\begin{aligned} \text{minimize / maximize} \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

όπου **x**: $n \times 1$ διάνυσμα μεταβλητών ελέγχου, **c**: $n \times 1$ διάνυσμα συντελεστών, **A**: $m \times n$ μητρώο συντελεστών, **b**: $m \times 1$ διάνυσμα συντελεστών, και **0**: $n \times 1$ μηδενικό διάνυσμα.

Γεωμετρική ερμηνεία

- Ο εφικτός χώρος που ορίζουν οι περιορισμοί $\mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ και $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ ένα n-διάστατο κυρτό γεωμετρικό σχήμα (πολύεδρο), με πλήθος ακμών ίσο με $m + n$.
- Οι λύσεις που βρίσκονται στις κορυφές του πολυέδρου υπολογίζονται από την επίλυση όλων των συνδυασμών συστημάτων των n μεταβλητών ελέγχου και των $m + n$ περιορισμών, απ' όπου προκύπτουν $q = (m + n)! \,/\, (m!\; n!)$ σημεία.
- Ισχύουν οι ακόλουθες θεμελιώδεις ιδιότητες:
  - Ο αριθμός των εφικτών λύσεων (κορυφές πολυέδρου) είναι πεπερασμένος.
  - Αν υπάρχει μοναδική βέλτιστη λύση, αυτή βρίσκεται σε μια κορυφή του πολυέδρου, ήτοι στην τομή κάποιων περιορισμών.
  - Αν μια εφικτή λύση ακραίου σημείου είναι καλύτερη από όλες τις γειτονικές της, τότε είναι η βέλτιστη του προβλήματος.
- **Παρατήρηση**: Αν και ο αριθμός των κορυφών του χώρου πολιτικής είναι πεπερασμένος, η αναζήτησή τους μέσω απαρίθμησής τους είναι πρακτικά αδύνατη (π.χ. για $n = m = 20$, $q \sim 10^{11}$).



Οικονομική ερμηνεία

- Η έρευνα στη γραμμική βελτιστοποίηση ξεκίνησε από το πρόβλημα εύρεσης της οικονομικότερης κατανομής ή προγραμματισμού ενός πλήθους ανταγωνιστικών δραστηριοτήτων σε συνθήκες πεπερασμένης διαθεσιμότητας των σχετικών πόρων (απ' όπου ο όρος *γραμμικός προγραμματισμός*).
- Ερμηνεία συνιστωσών προβλήματος:
  - f: κόστος (προς ελαχιστοποίηση) ή όφελος (προς μεγιστοποίηση)
  - x_j: δραστηριότητες των οποίων ζητείται η βέλτιστη κατανομή
  - c_j: κέρδος ή κόστος ανά μονάδα δραστηριότητας j
  - a_{ij}: ποσότητα πόρου i που παράγεται ή καταναλώνεται ανά μονάδα δραστηριότητας j
  - b_i: διαθεσιμότητα (για περιορισμούς τύπου ≤) ή ελάχιστη απαίτηση-ζήτηση (για περιορισμούς τύπου ≥) πόρου i.
- **Σκιώδης τιμή** (shadow price) καλείται η μεταβολή της βέλτιστης τιμής της στοχικής συνάρτησης λόγω μοναδιαίας μεταβολής ενός περιορισμού, ήτοι το *περιθώριο όφελος* (marginal utility) που προκύπτει λόγω της «χαλάρωσης» ενός περιορισμού κατά μία μονάδα ή το *περιθώριο κόστος* (marginal cost) που προκύπτει λόγω της «ενίσχυσης» του περιορισμού κατά μία μονάδα.

Μέθοδος simplex: Ορισμοί και παραδοχές

- Αναζητά διαδοχικά καλύτερες εφικτές λύσεις του προβλήματος, μεταβαίνοντας από κορυφή σε κορυφή του εφικτού χώρου, μέχρι τον εντοπισμό της βέλτιστης.
- Το πρόβλημα αναδιατυπώνεται στην ακόλουθη τυπική μορφή (standard form), με την προσθήκη μιας *μεταβλητής απόκλισης* (slack variable) για κάθε περιορισμό:

$$\text{maximize } z = f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{s.t. } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \;\; \forall\, i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \;\; \forall\, j = 1, \ldots, n + m$$

- Οι μεταβλητές απόκλισης x_{n+i} εκφράζουν τις αποστάσεις από τους αντίστοιχους περιορισμούς τύπου ≤. Κάθε διάνυσμα $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ που ικανοποιεί τους εξισωτικούς, πλέον, περιορισμούς καλείται *επαυξημένο* (augmented). Κάθε επαυξημένο διάνυσμα που κείται σε κορυφή του εφικτού χώρου καλείται *βασικό* (basic) διάνυσμα, και περιλαμβάνει εξ ορισμού n μηδενικά και m μη μηδενικά στοιχεία, που καλούνται μη βασικές και βασικές μεταβλητές, αντίστοιχα.
- Ο αλγόριθμος διαρθρώνεται ως εξής:
  - **Αρχικοποίηση**: Επιλογή σημείου εκκίνησης $\mathbf{x}^{[0]}$ (βασική λύση)·
  - **Επαναληπτικός κύκλος**: Αντικατάσταση μιας εφικτής ακραίας (βασικής) λύσης $\mathbf{x}^{[k]}$ από μια γειτονική $\mathbf{x}^{[k+1]}$, τέτοια ώστε $f(\mathbf{x}^{[k+1]}) \geq f(\mathbf{x}^{[k]})$·
  - **Έλεγχος τερματισμού**: Αναγνώριση βέλτιστης λύσης.

Μέθοδος simplex: Επιλογή σημείου εκκίνησης

- Ως σημείο εκκίνησης της διαδικασία αναζήτησης μπορεί να ληφθεί οποιαδήποτε κορυφή του εφικτού χώρου, δηλαδή οποιαδήποτε βασική λύση του προβλήματος.
- Αν $b_i \geq 0$ για κάθε περιορισμό i, τότε ως σημείο εκκίνησης λαμβάνεται η αρχή των αξόνων, οπότε ισχύει:

  $x_j = 0 \ \forall \ j = 1, \ldots, n$ (μεταβλητές ελέγχου – μη βασικές)

  $x_{n+i} = b_i \ \forall \ i = 1, \ldots, m$ (μεταβλητές απόκλισης – βασικές)

  $z = 0$ (αρχική τιμή στοχικής συνάρτησης)

- Αν $b_i < 0$ για έναν τουλάχιστο περιορισμό i, τότε το διάνυσμα $(0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$ είναι μη εφικτό (αφού μία τουλάχιστον μεταβλητή απόκλισης είναι αρνητική). Στην περίπτωση αυτή ακολουθείται ειδική μεθοδολογία, γνωστή ως *μέθοδος δύο φάσεων* (two-phase simplex method), κατά την οποία εντοπίζεται αρχικά μια κατάλληλη βασική λύση, που στη συνέχεια χρησιμοποιείται ως σημείο εκκίνησης για την επίλυση του αρχικού προβλήματος.
- **Παρατήρηση**: Περιορισμοί της μορφής $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$ γράφονται στην ισοδύναμη μορφή $-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i$, ώστε να είναι συνεπείς με την τυπική διατύπωση του προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή, ο όρος στο δεξί μέλος του περιορισμού γίνεται αρνητικός, οπότε εφαρμόζεται η μέθοδος των δύο φάσεων για τον εντοπισμό της αρχικής βασικής λύσης.

Μέθοδος simplex: Επαναληπτική διαδικασία

- Αναζητείται μια νέα βασική λύση που προκύπτει με την αντικατάσταση μιας τρέχουσας βασικής μεταβλητής (*εξερχόμενη μεταβλητή*, x_l) από μια μη βασική (*εισερχόμενη μεταβλητή*, x_e), δηλαδή με μετάβαση από την τρέχουσα κορυφή του εφικτού χώρου σε μια γειτονική.
- **Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής**: Μεταξύ του συνόλου των μη βασικών μεταβλητών που μπορούν να βελτιώσουν την τιμή της συνάρτησης, δηλαδή των x_j με μηδενική τρέχουσα τιμή και θετική μοναδιαία αξία, επιλέγεται η μεταβλητή x_e με τη μέγιστη μοναδιαία αξία.
- **Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής**: Κάθε περιοριστική εξίσωση $i = 1, \ldots, m$ επιλύεται ως προς την εισερχόμενη μεταβλητή x_e, μηδενίζοντας την τρέχουσα βασική μεταβλητή x_i. Από τις m τιμές της x_e, επιλέγεται αυτή που εξασφαλίζει μη αρνητικές τιμές για το σύνολο των λοιπών βασικών μεταβλητών. Ισοδύναμα, επιλέγεται η μεταβλητή x_i που τείνει γρηγορότερα προς το μηδέν καθώς αυξάνει η τιμή της εισερχόμενης μεταβλητής x_e, ήτοι αυτή για την οποία $b_i / a_{ie} = \min$.
- **Αναδιατύπωση προβλήματος**: Διαμορφώνεται μια ισοδύναμη μορφή του προβλήματος, αντικαθιστώντας την εισερχόμενη μεταβλητή σε όλες τις αλγεβρικές σχέσεις (στοχική συνάρτηση και εξισωτικοί περιορισμοί) από έναν γραμμικό συνδυασμό των μη βασικών μεταβλητών.

Αριθμητικό παράδειγμα

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

maximize $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

subject to
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 8 \end{aligned}\right\}$$

Περιορισμοί τύπου ≤, μη αρνητικά b_i

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Για κάθε έναν από τους ανισωτικούς περιορισμούς εισάγεται μία μεταβλητή απόκλισης έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

Το αρχικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το:

maximize $z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

subject to $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$

Κάθε εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος (x_1, x_2, x_3) είναι ισοδύναμη με την επαυξημένη λύση (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) και αντίστροφα.

Αριθμητικό παράδειγμα – 1η δοκιμή

- Σημείο εκκίνησης: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (μη βασικές μεταβλητές), $x_4 = 5$, $x_5 = 11$, $x_6 = 8$ (βασικές μεταβλητές), με $z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$.
- Εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_1, καθώς $c_1 = \max c_j = \max \{5, 4, 3\}$.
- Επιλύοντας τους περιορισμούς ως προς x_1, με μηδενισμό της αντίστοιχης βασικής μεταβλητής, λαμβάνονται οι εναλλακτικές τιμές $x_1 \in \{5/2, 11/4, 8/3\}$.
- Για $x_1 = 5/2$ (εξερχόμενη μεταβλητή η x_4) προκύπτει $x_5 = 1.00$ και $x_6 = 0.50$, για $x_1 = 11/4$ (εξερχόμενη μεταβλητή η x_5) προκύπτει $x_4 = -0.50$ και $x_6 = -0.25$, ενώ για $x_1 = 8/3$ (εξερχόμενη μεταβλητή η x_6) προκύπτει $x_4 = -0.33$ και $x_5 = -0.33$.
- Επειδή $x_4, x_5, x_6 \geq 0$, μοναδική εφικτή λύση είναι η $x_1 = 5/2$, άρα ως εξερχόμενη μεταβλητή λαμβάνεται η x_4, οπότε η εισερχομένη διατυπώνεται στη μορφή:

$$x_1 = 5/2 - 3/2\, x_2 - 1/2\, x_3 - 1/2 x_4$$

- Ισοδύναμα (και απλούστερα), εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_4 (περιορισμός 1), αφού = min (b_1/α_{11}, b_2/α_{21}, b_3/α_{31}) = min (5/2, 11/4, 8/3) = 5/2 = b_1/α_{11}.
- Το πρόβλημα αναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 12.5 - 3.5x_2 + 0.5x_3 - 2.5x_4 \\
\text{subject to} & x_1 = 2.5 - 1.5x_2 - 0.5x_3 - 0.5x_4 \\
 & x_5 = 1.0 + 5x_2 + 2.0x_4 \\
 & x_6 = 0.5 + 0.5x_2 - 0.5x_3 - 1.5x_4
\end{array}$$

Αριθμητικό παράδειγμα – 2η δοκιμή

- Σημείο εκκίνησης: $x_2 = x_3 = x_6 = 0$ (μη βασικές μεταβλητές), $x_1 = 2.5$, $x_5 = 1.0$, $x_6 = 0.5$ (βασικές μεταβλητές), με $z = 12.5 – 3.5x_2 + 0.5x_3 – 2.5x_4 = 12.5$.
- Εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_3 (η μοναδική με θετική μοναδιαία αξία).
- Επιλύοντας τους περιορισμούς ως προς x_3, με μηδενισμό της αντίστοιχης βασικής μεταβλητής, λαμβάνονται οι εναλλακτικές τιμές $x_3 \in \{5, 1\}$.
- Για $x_3 = 5$ (εξερχόμενη μεταβλητή η x_1) προκύπτει $x_6 = -2$, ενώ για $x_3 = 1$ (εξερχόμενη μεταβλητή η x_6) προκύπτει $x_1 = 2$ (η βασική μεταβλητή x_5 δεν εξαρτάται από τη x_3, συνεπώς $x_5 = 1$).
- Επειδή $x_4, x_5, x_6 \geq 0$, μοναδική εφικτή λύση είναι η $x_3 = 1$, άρα ως εξερχόμενη μεταβλητή λαμβάνεται η x_6, οπότε η εισερχομένη διατυπώνεται στη μορφή:

$$x_3 = 1 + x_2 – 3x_4 –2x_6$$

- Ισοδύναμα (και απλούστερα), εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_6 (περιορισμός 3), αφού = min $(b_3/\alpha_{13}, b_2/\alpha_{23}, b_3/\alpha_{33})$ = min (2.5/0.5, 1/0, 0.5/0.5) = 1 = b_3/α_{33}.
- Το πρόβλημα αναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 13.0 – 3x_2 – 4x_4 – x_6 \\ \text{subject to} & x_1 = 2.0 – 2.0x_2 + x_4 + x_6 \\ & x_3 = 1.0 + x_2 – 3.0x_4 –2.0x_6 \\ & x_5 = 1.0 + 5x_2 + 2.0x_4 \end{array}$$

Αφού όλοι οι συντελεστές της z είναι αρνητικοί, δεν υπάρχει καμία υποψήφια εισερχόμενη μεταβλητή, άρα έχει εντοπιστεί η **βέλτιστη λύση**.

Μέθοδος simplex: Παρατηρήσεις

- Το κριτήριο επιλογής της εισερχόμενης μεταβλητής, με βάση τη μέγιστη μοναδιαία αξία, δεν εξασφαλίζει την ταχύτερη βελτίωση της στοχικής συνάρτησης, καθώς δεν λαμβάνονται υπόψη οι περιορισμοί.
- Αν περισσότερες από μία μη βασικές μεταβλητές ικανοποιούν το κριτήριο εξόδου, η επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής γίνεται αυθαίρετα, καθώς δεν είναι δυνατό να εντοπιστεί εκ των προτέρων (χωρίς επίλυση των περιορισμών) η μέγιστη βελτίωση της συνάρτησης, δηλαδή η ταχύτερη διαδρομή.
- Αν καμία μη βασική μεταβλητή δεν ικανοποιεί το εν λόγω κριτήριο εισόδου, τότε δεν μπορεί να αυξηθεί περαιτέρω η τιμή της συνάρτησης και η τρέχουσα λύση είναι η *βέλτιστη*.
- Αν περισσότερες από μία βασικές μεταβλητές ικανοποιούν το κριτήριο εξόδου, οποιαδήποτε μπορεί να ληφθεί ως εξερχόμενη (και να λάβει εξ ορισμού μηδενική τιμή), ενώ και οι υπόλοιπες θα πρέπει να λάβουν μηδενική τιμή, οπότε καλούνται *εκφυλισμένες* (degenerated). Η περίπτωση αυτή συχνά οδηγεί σε ανακύκλωση των βασικών λύσεων, και συνεπώς εγκλωβισμό του αλγορίθμου.
- Αν καμία βασική μεταβλητή δεν ικανοποιεί το κριτήριο εξόδου, η εισερχόμενη μεταβλητή μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα, δηλαδή δεν υπάρχει άνω όριο στην τιμή της στοχικής συνάρτησης.

Δυαδική θεωρία γραμμικού προγραμματισμού

Για κάθε *πρωτεύον* (primal) πρόβλημα ΓΠ μπορεί να διατυπωθεί ένα αντίστοιχο *δυαδικό* (dual), μεταξύ των οποίων ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

	Πρωτεύον	**Δυαδικό**
Μεταβλητές ελέγχου	x_j	y_i
Αριθμός μεταβλητών	n	m
Αριθμός περιορισμών	m	n
Στόχος	maximize	minimize
Συντελεστές στοχικής συνάρτησης	c_j	b_i
Περιορισμοί	$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$

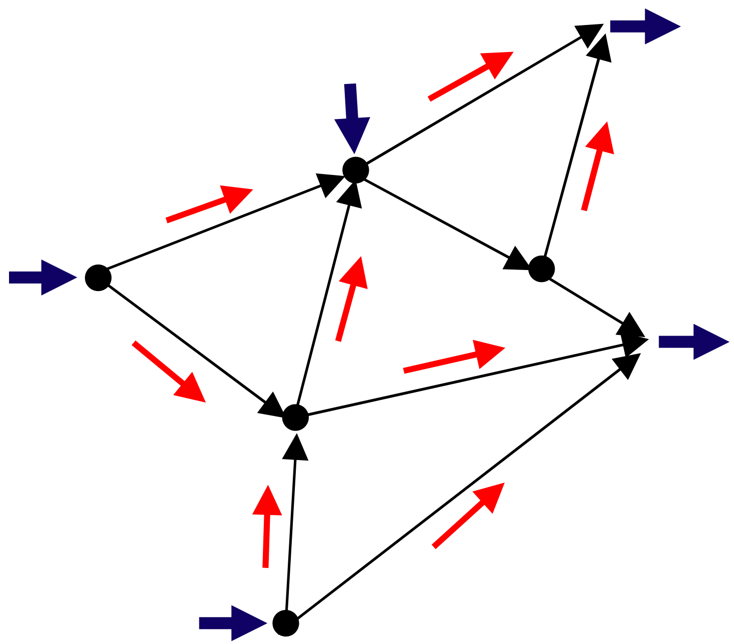
Θεμελιώδες θεώρημα: Αν το πρωτεύον πρόβλημα έχει μια βέλτιστη λύση $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, τότε το δυαδικό του έχει μια βέλτιστη λύση $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ τέτοια

ώστε: $\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i^*$ → **σκιώδεις τιμές**

Παρατήρηση: Στη μέθοδο simplex, το πλήθος των επαναλήψεων είναι ανάλογο του αριθμού των περιορισμών m (διπλάσιο ως τριπλάσιο), ενώ παραμένει σχετικά αδιάφορο έναντι του πλήθους των μεταβλητών n. Εφόσον $m > n$, επιτυγχάνεται σημαντική μείωση του υπολογιστικού φόρτου με επίλυση του δυαδικού αντί του πρωτεύοντος προβλήματος.

Δικτυακές μορφές προβλημάτων γραμμικής βελτιστοποίησης (προβλήματα γράφων)

- **Γενική διατύπωση προβλήματος** : Ποια είναι η οικονομικότερη ροή των διαθέσιμων πόρων μέσω ενός δικτύου μεταφοράς, το οποίο συνδέει ένα πλήθος σημείων προσφοράς με ένα πλήθος σημείων ζήτησης;
- **Ειδικές διατυπώσεις**:
  - Πρόβλημα *μεταφόρτωσης* (transshipment): πεπερασμένη μεταφορική ικανότητα (χωρητικότητα) κλάδων δικτύου·
  - Πρόβλημα *μεταφοράς* (transportation): δίκτυο χωρίς ενδιάμεσους κόμβους, στο οποίο όλα τα σημεία προσφοράς συνδέονται απευθείας με ίσο αριθμό σημείων ζήτησης·
  - Πρόβλημα *εκχώρησης* (assignment): αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση ενός πλήθους σημείων προέλευσης σε αντίστοιχο πλήθος σημείων προορισμού.



Βασικές έννοιες θεωρίας γράφων

- **Γράφος** (graph) καλείται ένα σύνολο σημείων (κόμβων) $\mathcal{N}$ και ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών αυτών $\mathcal{A}$ (στοιχεία μεταφοράς, που καλούνται τόξα ή κλάδοι), και μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$.
- **Διγράφος** (digraph) είναι ένας γράφος με προσανατολισμένη φορά κλάδων.
- **Δίκτυο** (network) είναι ένας γράφος στα στοιχεία του οποίου (κόμβοι και κλάδοι) αντιστοιχούν κάποιες ιδιότητες.
- **Δίαυλος** (chain) καλείται ένα σύνολο κλάδων που συνδέουν δύο κόμβους s και t. Εάν όλοι οι κλάδοι έχουν κοινή φορά, ο δίαυλος καλείται **διαδρομή** (path), ενώ αν οι κόμβοι s και t ταυτίζονται τότε καλείται **κύκλωμα** (circuit) ή **βρόχος** (loop).
- **Συνδεδεμένος** (connected) καλείται ο γράφος για τον οποίο ορίζεται ένας τουλάχιστον δίαυλος για κάθε ζεύγους κόμβων.
- **Δένδρο** (tree) καλείται ένας συνδεδεμένος γράφος που δεν σχηματίζει βρόχους. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:
  - κάθε δένδρο αποτελείται από n κόμβους και $n-1$ κλάδους·
  - κάθε ζεύγος κόμβων του δένδρου συνδέεται με ένα και μόνο δίαυλο·
  - η διαγραφή ενός έστω κλάδου δημιουργεί μη συνδεδεμένο γράφο.
- Κάθε γράφος $(\mathcal{N}, \mathcal{A}')$ που προκύπτει από τον αρχικό $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ με θεώρηση ενός υποσυνόλου των κλάδων του καλείται **μερικός γράφος** (partial graph).

Μαθηματική περιγραφή τοπολογίας δικτύων

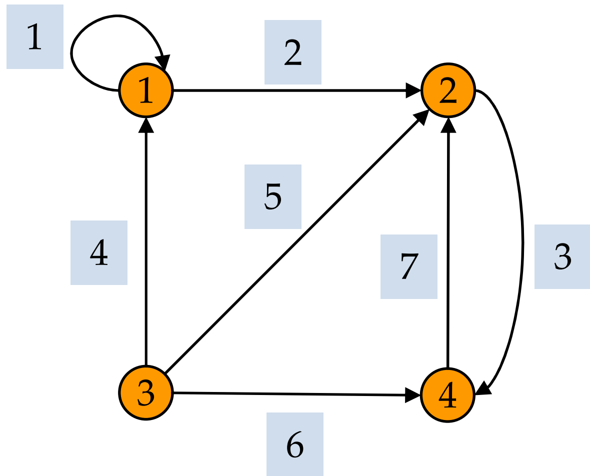
- Σε κάθε δίκτυο n κόμβων και m κλάδων διαμορφώνονται $r = m - n + 1$ βρόχοι (σε ακτινωτά δίκτυα είναι $r = 0$, οπότε $m = n - 1$).
- Η τοπολογία ενός διγράφου $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ που αποτελείται από n κόμβους και m κλάδους μπορεί να περιγραφεί αλγεβρικά μέσω δύο τύπων μητρώων:
  - Το $n \times n$ *μητρώο γειτνίασης* (adjacency matrix), με στοιχεία $a_{ij} = 1$ αν υπάρχει κλάδος που συνδέει τον κόμβο i με τον κόμβο j, και $a_{ij} = 0$ διαφορετικά·
  - Το $n \times m$ *μητρώο πρόσπτωσης* (incidence matrix) με τιμές $a_{ik} = 1$ αν ο κλάδος k ξεκινά από τον κόμβο i, $a_{ik} = -1$ αν ο κλάδος k καταλήγει στον κόμβο i, και $a_{ik} = 0$ αν δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ του κόμβου i και του κλάδου k.
- Στο μητρώο γειτνίασης δεν είναι δυνατή η απεικόνιση παράλληλων κλάδων, ενώ το μητρώο πρόσπτωσης δεν απεικονίζει ανακυκλώσεις.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μητρώο γειτνίασης $n \times n$, m μη μηδενικά στοιχεία

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Μητρώο πρόσπτωσης $n \times m$, $2m$ μη μηδενικά στοιχεία

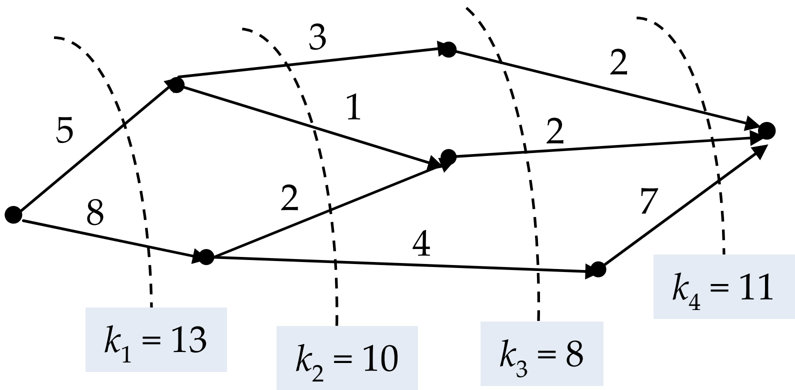


Θεώρημα ελάχιστης τομής – μέγιστης ροής δικτύων (min cut – max flow)

- **Ζητούμενο**: Εκτίμηση της μέγιστης δυνατής ποσότητας που μπορεί να μεταφερθεί από μία πηγή *s* σε έναν κόμβο προορισμού *t* μέσω ενός δικτύου, κάθε κλάδος (*i*, *j*) του οποίου έχει πεπερασμένη μεταφορική ικανότητα, u_{ij}.
- **Ορισμοί**:
  - *Τομή* (cut) του δικτύου καλείται κάθε σύνολο κόμβων C που περιλαμβάνει την πηγή *s* αλλά όχι τον κόμβο προορισμού *t*.
  - Η *χωρητικότητα* (capacity) μιας τομής C δίνεται από τη σχέση:

$$k_c = \sum u_{jk}, \text{ όπου } j \in C, k \notin C$$

- **Θεώρημα**: Κάθε δίκτυο ικανοποιεί μία ακριβώς από τις ακόλουθες συνθήκες:
  - Η μεταφορική ικανότητα του δικτύου είναι απεριόριστη, εφόσον η χωρητικότητα όλων των τομών του είναι απεριόριστη·
  - Η μέγιστη μεταφορική ικανότητα του δικτύου είναι ίση με την ελάχιστη χωρητικότητα όλων των τομών του.



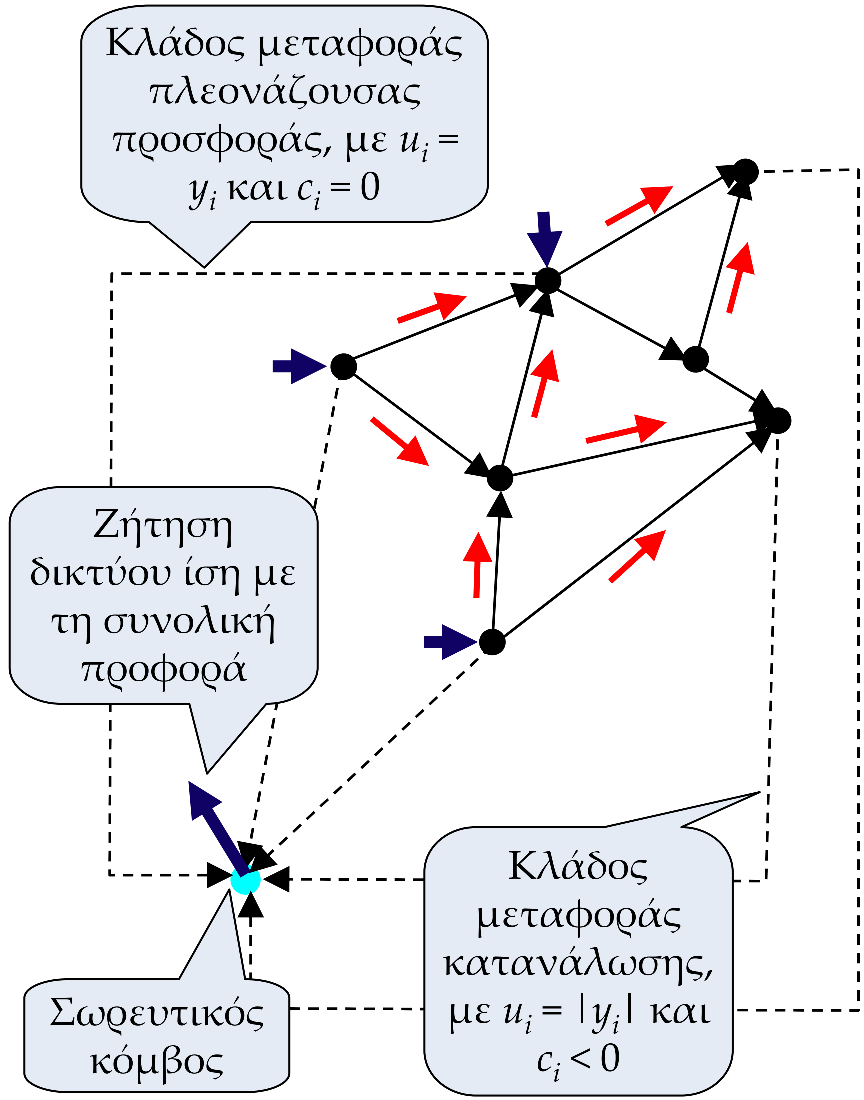
Διατύπωση προβλήματος μεταφόρτωσης

- **Στοχική συνάρτηση**: Ελαχιστοποίηση κόστους μεταφοράς ροών
- **Μεταβλητές ελέγχου**: Ποσότητες x_j, που μεταφέρονται μέσω κάθε κλάδου j
- **Χαρακτηριστικά μεγέθη δικτύου**:
  - Τοπολογία, που περιγράφεται μέσω του $n \times m$ μητρώου πρόσπτωσης $\mathbf{A}$·
  - Εισερχόμενες ($y_i > 0$) και εξερχόμενες ($y_i < 0$) ροές στους αντίστοιχους κόμβους προσφοράς και ζήτησης, που περιγράφονται από το n-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{y}$·
  - Χωρητικότητες u_j, και μοναδιαία κόστη c_j, κλάδων, που περιγράφονται από τα n-διάστατα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{c}$, αντίστοιχα.
- **Παραδοχές**:
  - Η συνολική προσφορά ισούται με τη συνολική ζήτηση (καθολική εξίσωση συνέχειας – αν δεν τηρείται διαμορφώνεται ένα ισοδύναμο εικονικό δίκτυο)·
  - Σε κάθε κόμβο, η συνολική εισερχόμενη ποσότητα ισούται με την συνολική εξερχόμενη μείον την καταναλισκόμενη (εξίσωση συνέχειας κόμβων).
- **Μαθηματική διατύπωση**:

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \\
\text{subject to} & \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y} & \text{(εξισώσεις συνέχειας)} \\
 & \mathbf{0} \le \mathbf{x} \le \mathbf{u} & \text{(εξισώσεις χωρητικότητας)}
\end{array}
$$

Επίλυση προβλήματος μεταφόρτωσης

- **Επίλυση**: Η *αραιή* (sparse) δομή του μητρώου πρόσπτωσης **A**, με στοιχεία {1, -1, 0}, επιτρέπει τη χρήση ειδικών αλγορίθμων *δικτυακής γραμμικής βελτιστοποίησης* (network simplex), που είναι 2-3 τάξεις μεγέθους ταχύτεροι από την συμβατική μέθοδο.
- **Ειδική περίπτωση**: Εφόσον δεν ισχύει η καθολική εξίσωση συνέχειας, οι κόμβοι προσφοράς και ζήτησης συνδέονται μέσω εικονικών κλάδων με έναν *σωρευτικό κόμβο* ζήτησης ίσης με τη συνολική προσφορά, που απορροφά την πλεονάζουσα προσφορά (με μηδενικό κόστος) και την κατανάλωση. Η «μεταφερόμενη» κατανάλωση έχει άνω όριο την αντίστοιχη ζήτηση και αρνητικό κόστος, το οποίο ορίζεται με βάση την ιεραρχία των εκροών.



Το πρόβλημα εκχώρησης

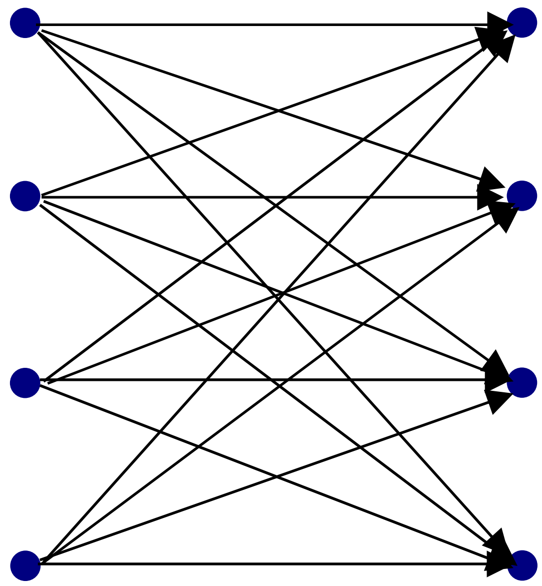
- **Ζητούμενο**: Ελαχιστοποίηση κόστους αντιστοίχισης n «στοιχείων» προέλευσης σε n «στοιχεία» προορισμού, τα οποία αναπαρίστανται ως κόμβοι
- **Μεταβλητές ελέγχου**: Δυαδικές (0 ή 1), με $x_{ij} = 1$ αν υπάρχει αντιστοίχιση μεταξύ των κόμβων i και j, και $x_{ij} = 0$ αν δεν υπάρχει
- **Μαθηματική διατύπωση**:

$$\text{minimize} \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, n$$

$$0 \le x_{ij} \le 1 \text{ για κάθε } i, j = 1, \ldots, n$$



- **Παρατήρηση**: Οι περιορισμοί δυαδικότητας ($x_{ij} = 0$ ή 1), εξασφαλίζονται από το *θεώρημα ακεραίου*, σύμφωνα με το οποίο αν σε ένα πρόβλημα μεταφόρτωσης όλα τα στοιχεία του διανύσματος προσφοράς-ζήτησης $\mathbf{y}$ είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε όλες οι εφικτές λύσεις είναι επίσης ακέραιοι αριθμοί.

Εφαρμογή 1: Εκτίμηση μεγεθών ταμιευτήρα

- **Ζητούμενο**: Προσδιορισμός ελάχιστης ωφέλιμης χωρητικότητας k, ταμιευτήρα, ώστε να ικανοποιείται μια σταθερή ζήτηση d, με δεδομένη χρονοσειρά εισροών i_t για ένα χρονικό ορίζοντα ελέγχου, μήκους n, και δεδομένο αρχικό απόθεμα s_0
- **Μεταβλητές ελέγχου**: Ωφέλιμη χωρητικότητα k, ωφέλιμο απόθεμα s_t, εκροές λόγω υπερχείλισης w_t, για το σύνολο του ορίζοντα ελέγχου ($2n + 1$ μεταβλητές)
- **Μαθηματική διατύπωση ως πρόβλημα ΓΠ**:

  minimize $z = k$

  subject to $s_t = s_{t-1} + i_t - d - w_t$ για κάθε $t = 1, \ldots, n$ (υδατικό ισοζύγιο)

  $s_t \leq k$ για κάθε $t = 1, \ldots, n$

  $s_n = s_0$ (πρόβλημα μόνιμων συνθηκών – steady state)

  $k, s_t, w_t \geq 0$
- **Εναλλακτική διατύπωση**: Γνωστή η χωρητικότητα k, άγνωστη η ζήτηση d (πρόβλημα μεγιστοποίησης, maximize $z = d$)
- **Μειονεκτήματα**:
  - Πολύ μεγάλος αριθμός μεταβλητών ελέγχου
  - Αδυναμία χειρισμού μη γραμμικών σχέσεων
  - Πλήρως ντετερμινιστική θεώρηση – απουσιάζει η έννοια της *αξιοπιστίας*
- **Εναλλακτική προσέγγιση:** στοχαστική προσομοίωση

Εφαρμογή 2: Διαστασιολόγηση ακτινωτών υδραυλικών δικτύων υπό πίεση

- **Ζητούμενο**: Διαστασιολόγηση ακτινωτού δικτύου n κλάδων, με ελαχιστοποίηση του κόστους των σωληνώσεων, οι οποίες επιλέγονται από ένα διακριτό σύνολο r διαμέτρων d_k, με κόστος c_k ανά μέτρο μήκους
- **Μεταβλητές ελέγχου**: Μήκος αγωγού x_{ijk} που εφαρμόζεται σε κάθε κλάδο (i, j) από κάθε διάμετρο εμπορίου k ($n \times r$ μεταβλητές)
- **Προεργασία**: Υπολογίζονται οι παροχές του δικτύου q_{ij} και ακολούθως η υδραυλική κλίση J_{ijk} ανά κλάδο (i, j) και διάμετρο k, μέσω μιας μη γραμμικής σχέσης απωλειών της μορφής $J = J(\varepsilon, q, d)$ (ε: ισοδύναμη τραχύτητα αγωγού)
- **Μαθηματική διατύπωση ως πρόβλημα ΓΠ**:

minimize $\quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{r} x_{ijk}$

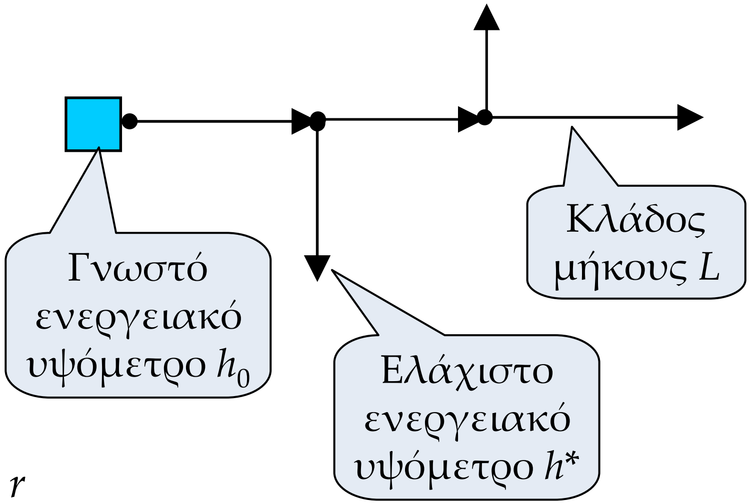
Στοιχεία μητρώου αντιστοίχισης

subject to $\quad \sum_{k=1}^{r} x_{ijk} = L_{ij}$ για κάθε κλάδο (i, j)

Συνάρτηση των ανάντη απωλειών ενέργειας

$h_i - \sum_{k=1}^{r} J_{ijk}\, x_{ijk} \geq h_j^*$ για κάθε κόμβο j

$x_{ijk} \geq 0$ για κάθε $i, j = 1, \dots, n$ και $k = 1, \dots, r$

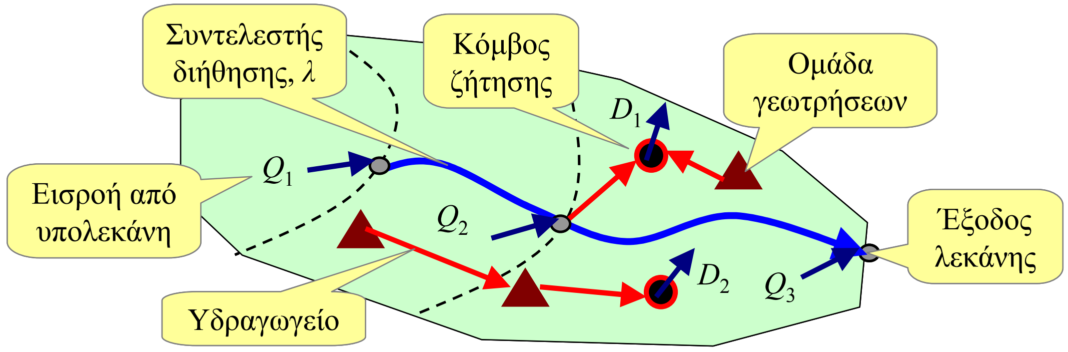


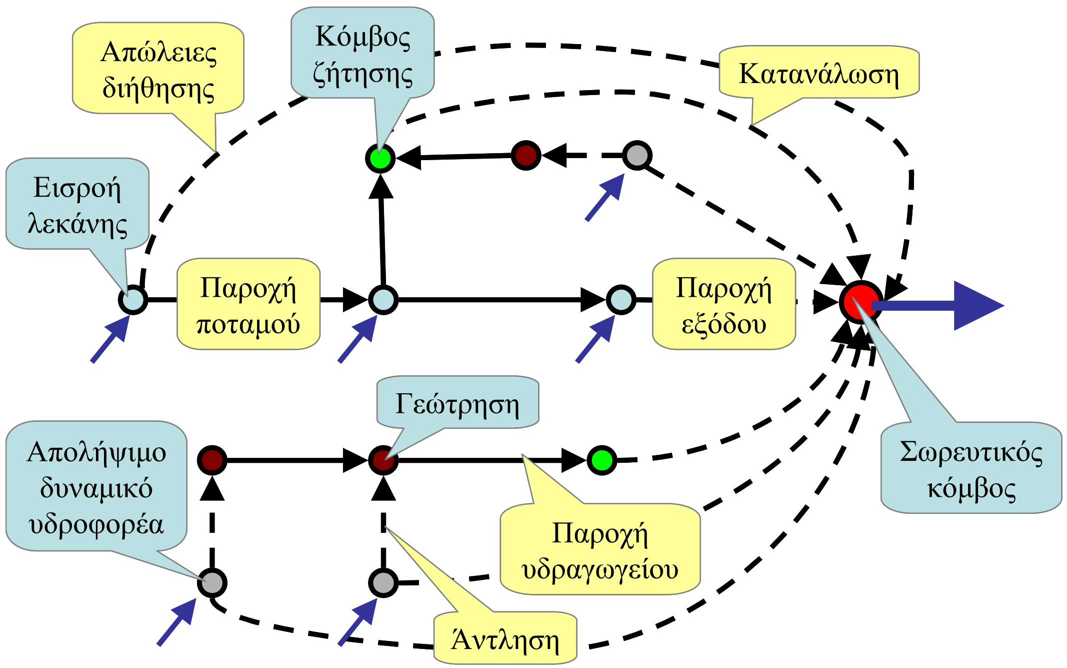
Εφαρμογή 2: Μειονεκτήματα ΓΠ και εναλλακτικές προσεγγίσεις

- Η επίλυση του προβλήματος μέσω ΓΠ είναι εφικτή μόνο για ακτινωτά δίκτυα, στα οποία είναι δυνατός ο *εκ των προτέρων* υπολογισμός των παροχών των κλάδων (επισημαίνεται ότι, για λόγους ασφαλείας και λειτουργικότητας, τα δίκτυα διανομής υδρευτικού νερού σχεδιάζονται βροχωτά).
- Ο μεγάλος αριθμός των μεταβλητών και περιορισμών καθιστά δυσχερή την επίλυση, ακόμα και για μεσαίου μεγέθους δίκτυα.
- Δεν είναι δυνατή η προσομοίωση αντλιοστασίων και μειωτών πίεσης, τα οποία εισάγουν μη γραμμικές σχέσεις παροχής-απωλειών.
- Δεν είναι δυνατή η εφαρμογή αγωγών από διαφορετικό υλικό, γιατί προκύπτουν συναρτήσεις κόστους ασυνεχείς και μη κυρτές.
- Ο σχεδιασμός που προκύπτει παρουσιάζει κατασκευαστικές δυσκολίες, εξαιτίας της μη ελεγχόμενης εναλλαγής διαμέτρων ακόμα και σε μεμονωμένους κλάδους (στην πράξη εφαρμόζονται κοινές διάμετροι σε εκτενή τμήματα του δικτύου, τα οποία περιλαμβάνουν περισσότερους κλάδους).
- Εναλλακτικές προσεγγίσεις:
  - **ακτινωτά δίκτυα** → δυναμικός προγραμματισμός
  - **ακτινωτά και βροχωτά δίκτυα** → ευρετικοί εξελικτικοί αλγόριθμοι

Εφαρμογή 3: Κατανομή υδατικών πόρων σε υδροσυστήματα με ανταγωνιστικές χρήσεις

- Υδροσύστημα: φυσικό σύστημα και υδραυλικά έργα, στο οποίο ορίζονται χρήσεις νερού και περιορισμοί (κατά σειρά προτεραιότητας), και οι υδατικές ανάγκες.
- Ο εντοπισμός της πλέον πρόσφορης κατανομής των διαθέσιμων υδατικών πόρων διατυπώνεται ως ένα πρόβλημα **γραμμικής βελτιστοποίησης** σε ένα μετασχηματισμένο δίκτυο.
- Οι φυσικοί και λειτουργικοί περιορισμοί και η ιεραρχία των χρήσεων νερού τηρούνται με την εισαγωγή εικονικών τιμών κόστους (θετικού ή αρνητικού).





Γενική βιβλιογραφία

Γραμμικός προγραμματισμός

- Chvatal, V., *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company, 1983.
- Hillier F., and G. Lieberman, *Operations Research*, Holden-Day, Inc., 1967, 1974, 1980, 1989 (ελληνική μετάφραση από τις Εκδόσεις Παπαζήση).
- Loucks, D. P. and E. van Beek, *Water Resources Systems Planning and Management - An Introduction to Methods, Models and Applications*, UNESCO Publishing, 2005.
- Winston, W. L., *Operations Research – Applications and Algorithms*, 1440 p., Duxbury Press, 2003.
- Ευστρατιάδης, Α., και Δ. Κουτσογιάννης, *Σημειώσεις Βελτιστοποίησης Συστημάτων Υδατικών Πόρων - Μέρος 2*, 140 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2004 (http://itia.ntua.gr/el/docinfo/201/).
- Μποναζούντας, Μ., και Δ. Καλλιδρομίτου, *Σημειώσεις Ανάλυσης Συστημάτων Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 1998.

Θεωρία γράφων και δικτυακός γραμμικός προγραμματισμός

- Deo, N., *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice-Hall, Inc., 1974.
- Smith, D. K., *Network Optimization Practice: A Computational Guide*, John Wiley and Sons, 1982.

Εφαρμογές σε προβλήματα υδατικών πόρων

- Bhave, P., and V. Sonak, A critical study of the linear programming gradient method for optimal design of water supply networks, *Water Resources Research*, 28(6), 1577-1584, 1992.
- Dai, T., and J. W. Labadie, River basin network model for integrated water quantity/quality management, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 127(5), 295-305, 2001.
- Efstratiadis, A., D. Koutsoyiannis, and D. Xenos, Minimising water cost in the water resource management of Athens, *Urban Water Journal*, 1(1), 3-15, 2004.
- Efstratiadis, A., I. Nalbantis, E. Rozos, and D. Koutsoyiannis, Accounting for water management issues within hydrological simulation: Alternative modelling options and a network optimization approach, *EGU General Assembly 2010, Geophysical Research Abstracts*, Vol. 12, Vienna, 2010.
- Goulter, I. C., Systems analysis in water distribution network design: from theory to practice, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 118(3), 238-248, 1992.
- Graham, L. P., J. W. Labadie, I. P. G. Hutchison, and K. A. Ferguson, Allocation of augmented water supply under a priority water rights system, *Water Resources Research*, 22(7), 1083-1094, 1986.
- Ilich, N., Shortcomings of linear programming in optimizing river basin allocation, *Water Resources Research*, 44, W02426, doi:10.1029/2007WR006192, 2008.
- Kuczera, G., Fast multireservoir multiperiod linear programming models, *Water Resources Research*, 25(2), 169-176, 1989.
- Loucks, D. P., and E. van Beek, *Water Resources Systems Planning and Management – An Introduction to Methods, Models and Applications*, UNESCO Publishing, 2005.
- Manca, A., G. Sechi, and P. Zuddas, Water supply network optimisation using equal flow algorithms, *Water Resources Management*, 24(13), 3665-3678, 2010.
- ReVelle, C., *Optimizing Reservoir Resources*, 180 p., John Wiley & Sons, 1999.
- Βαμβακερίδου, Λ., *Δίκτυα υδρεύσεων – αρδεύσεων υπό πίεση: επίλυση – βελτιστοποίηση*, Αθήνα, 1990