Βελτιστοποίηση Συστημάτων &
Υδροπληροφορική

Ασαφής Λογική

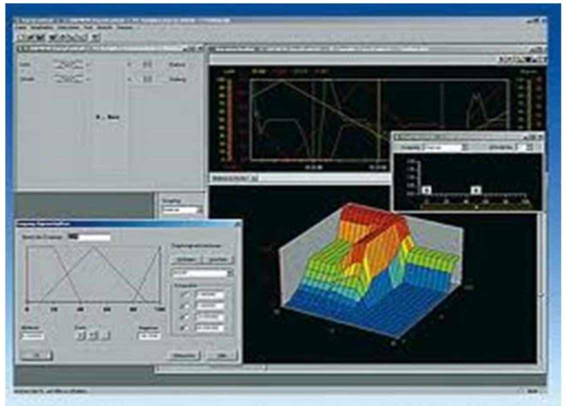
Χρήστος Μακρόπουλος & Ανδρέας Ευστρατιάδης
Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Μάρτιος 2011

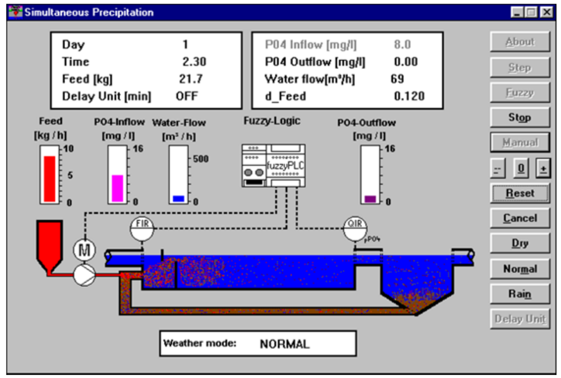
Ιστορία..

- L. A. Zadeh (1965) "Fuzzy sets". Information and Control 8 (3) 338–353.
- Αζερμπαϊτζάν, Τεχεράνη, MIT, Columbia, UCB..

Εφαρμογές…

- Identification of river water **quality** using the **fuzzy synthetic evaluation** approach
- A **fuzzy compromise** approach to water resource systems planning under uncertainty
- An interval-parameter fuzzy two-stage **stochastic program** for water resources management under uncertainty
- Fuzzy **optimization** model for water quality management of a river system
- Fuzzy logic spatial decision support system for **urban water management**
- Planning against long term **water scarcity**: a fuzzy multicriteria approach





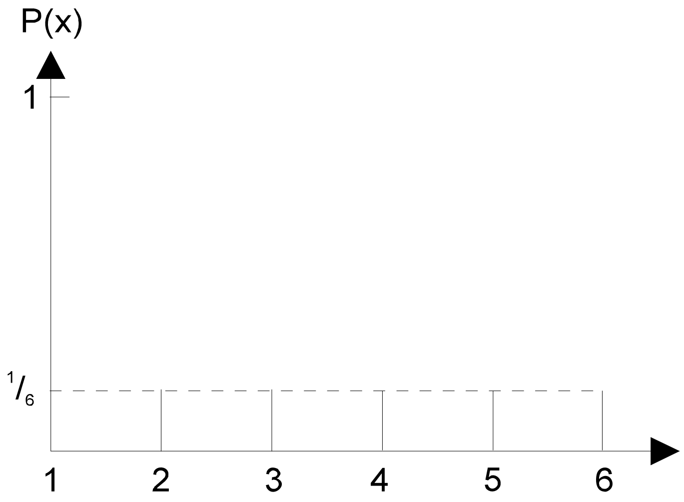
Και βέβαια…

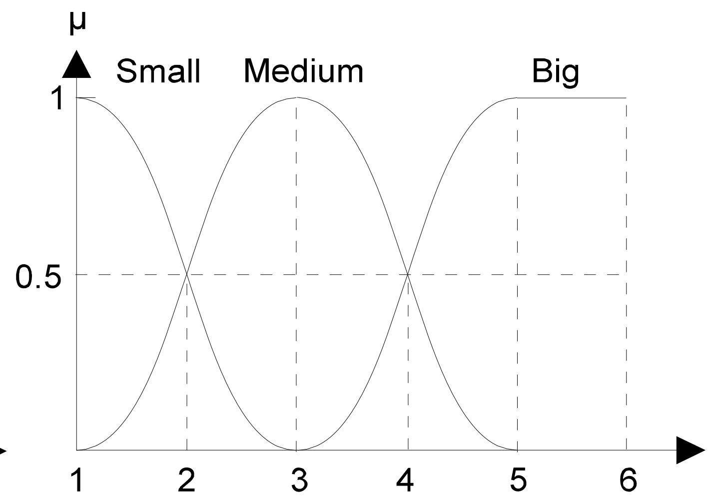
Οι πολλές μορφές της αβεβαιότητας

- Η θεωρία πιθανοτήτων δεν μπορεί να περιγράψει όλες τις μορφές αβεβαιότητας.
- Όταν A είναι ένα σύνολο και x είναι ένα στοιχείο, η πρόταση "το x ανήκει στο A" δεν είναι απαραίτητα είτε σωστή είτε λάθος (και εμείς «απλά» το αγνοούμε). Μπορεί να είναι σωστή σε ένα βαθμό.
- Παράδειγμα: ο καιρός σήμερα
- Έχει ηλιοφάνεια: πχ αν ορίσουμε ως **μέρα με ηλιοφάνεια** μια μέρα στην οποία η νεφοκάλυψη είναι κάτω του 25%.
- Και αν υπάρχουν σύννεφα πάνω από τη περιοχή ενδιαφέροντος για το 26% της ημέρας; Δεν έχουμε ηλιοφάνεια;
- "Απροσδιοριστία" (ή ασάφεια) ως μια άλλη μορφή αβεβαιότητας (vagueness).

Ασαφής λογική – Πιθανότητες (ζάρια…)

Dice	1	2	3	4	5	6
P	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$
$_A$ small number	1	0.5	0	0	0	0





Η ασαφής Λογική βασίζεται (ή στην ουσία επεκτείνει τη θεωρία συνόλων)

- Διακριτά (crisp) σύνολα και τα ασαφή (fuzzy) σύνολα:
  - Κάθε διακριτό/crisp σύνολο χωρίζει τα στοιχεία ενός χώρου σε δύο μέρη: τα στοιχεία που **ανήκουν στο σύνολο** και τα στοιχεία που **δεν ανήκουν στο σύνολο**.
  - Δυστυχώς πολλά προβλήματα κατηγοριοποίησης δεν ακολουθούν ικανοποιητικά αυτό τον κανόνα (το σύνολο των ψηλών ανθρώπων, το σύνολο των διαβασμένων φοιτητών!)
  - Ένα ασαφές σύνολο μπορεί να οριστεί μαθηματικά αντιστοιχώντας σε κάθε στοιχείο του χώρου μια τιμή η οποία αντιπροσωπεύει το **βαθμό συμμετοχής** (degree of membership) του στοιχείου στο ασαφές σύνολο.
- **Παράδειγμα**: για να δημιουργήσουμε το ασαφές σύνολο «μέρα με ηλιοφάνεια» αντιστοιχούμε βαθμό συμμετοχής 1 σε νεφοκάλυψη 0%, 0.8 σε νεφοκάλυψη πάνω από 20%, 0.4 σε νεφοκάλυψη πάνω από 30%, and 0 σε νεφοκάλυψη πάνω από 75%.

Πώς φτιάχνουμε σύνολα

Τρείς βασικές μέθοδοι:

Ορίζουμε τα στοιχεία (με μια **λίστα**) ένα προς ένα.

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Ορίζουμε ένα **κανόνα** τον οποίο τηρούν τα μέλη του συνόλου.

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

$P(x)$: κανόνας της μορφής "το x έχει το χαρακτηριστικό/ιδιότητα P"

Δημιουργούμε μια **χαρακτηριστική συνάρτηση**

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \notin A \end{cases} \qquad \chi_A : X \to \{0,1\}$$

Ιδιότητες (διακριτών) συνόλων

TABLE 1.1 FUNDAMENTAL PROPERTIES OF CRISP SET OPERATIONS

Involution	$\overline{\overline{A}} = A$
Commutativity	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Associativity	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivity	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotence	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$
Absorption by X and $\varnothing$	$A \cup X = X$
	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Identity	$A \cup \varnothing = A$
	$A \cap X = A$
Law of contradiction	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Law of excluded middle	$A \cup \overline{A} = X$
De Morgan's laws	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Κυρτά (convex) σύνολα

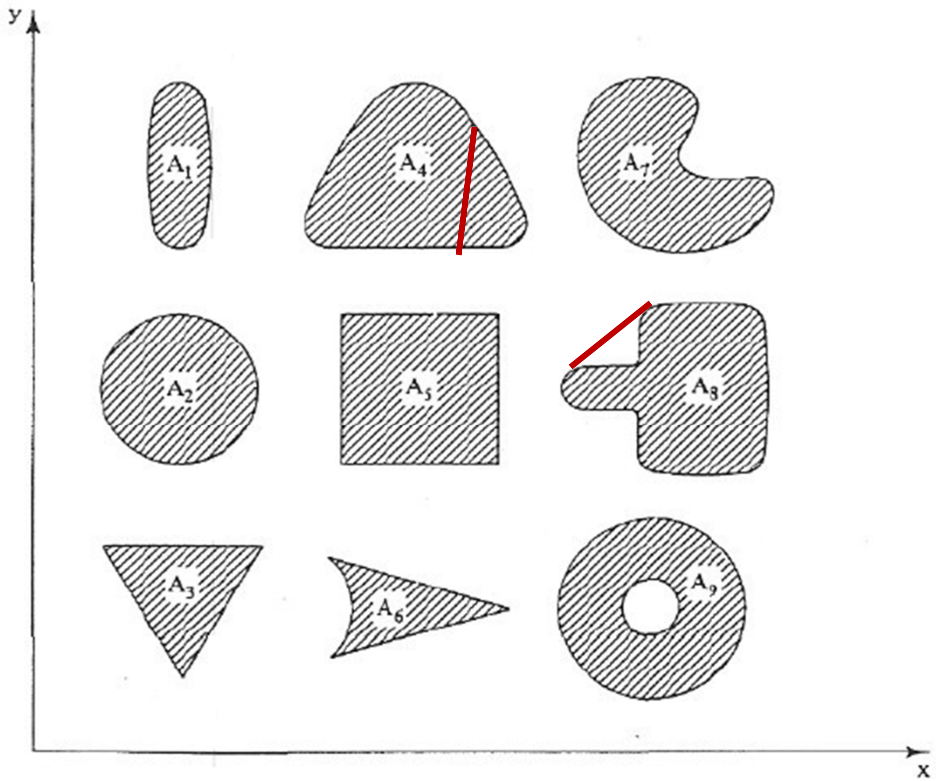


Figure 1.1 Example of sets in $\mathbb{R}^2$ that are convex (A_1–A_5) or nonconvex (A_6–A_9).

Το A=[0,2]∪[3,5] είναι μη-κυρτό.

Χαρακτηριστικά Ασαφών Συνόλων

- Μια συνάρτηση συμμετοχής (membership function)
- Μεγαλύτερες τιμές της συνάρτησης σημαίνουν μεγαλύτερη συμμετοχή στο σύνολο.
- Κάθε σύνολο που ορίζεται μέσω μιας συνάρτησης συμμετοχής είναι ένα ασαφές σύνολο (fuzzy set).
- Το πιο συνηθισμένο εύρος για τις τιμές μια συνάρτησης συμμετοχής είναι [0,1].
- Το ευρύτερο δυνατό σύνολο (universal set X) μέσα στο οποίο ορίζονται τα υπόλοιπα σύνολα είναι πάντα **διακριτό**.
- Γράφουμε:

– Η συνάρτηση συμμετοχής ενός συνόλου A:

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

– Ή αλλιώς συνάρτηση και σύνολο γράφονται και τα δύο ως A:

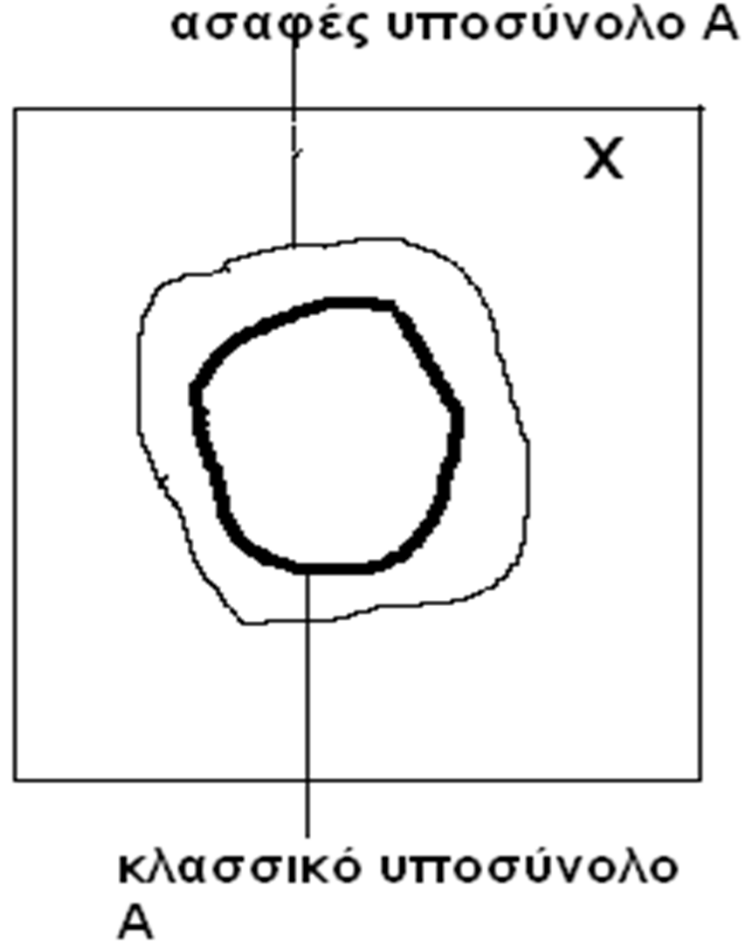
$$A : X \to [0,1]$$

Έστω Χ υπερσύνολο αναφοράς και Α υποσύνολο του Χ τότε:

Το Α καλείται ασαφές υποσύνολο του Χ

όταν και μόνο όταν

$A = \{ (\chi, \mu_A(\chi) \mid \chi \varepsilon X, \mu_A(\chi): X$ $[0,1] \}$



Βασικοί τύποι Ασαφών Συνόλων (μορφές συναρτήσεων συμμετοχής)

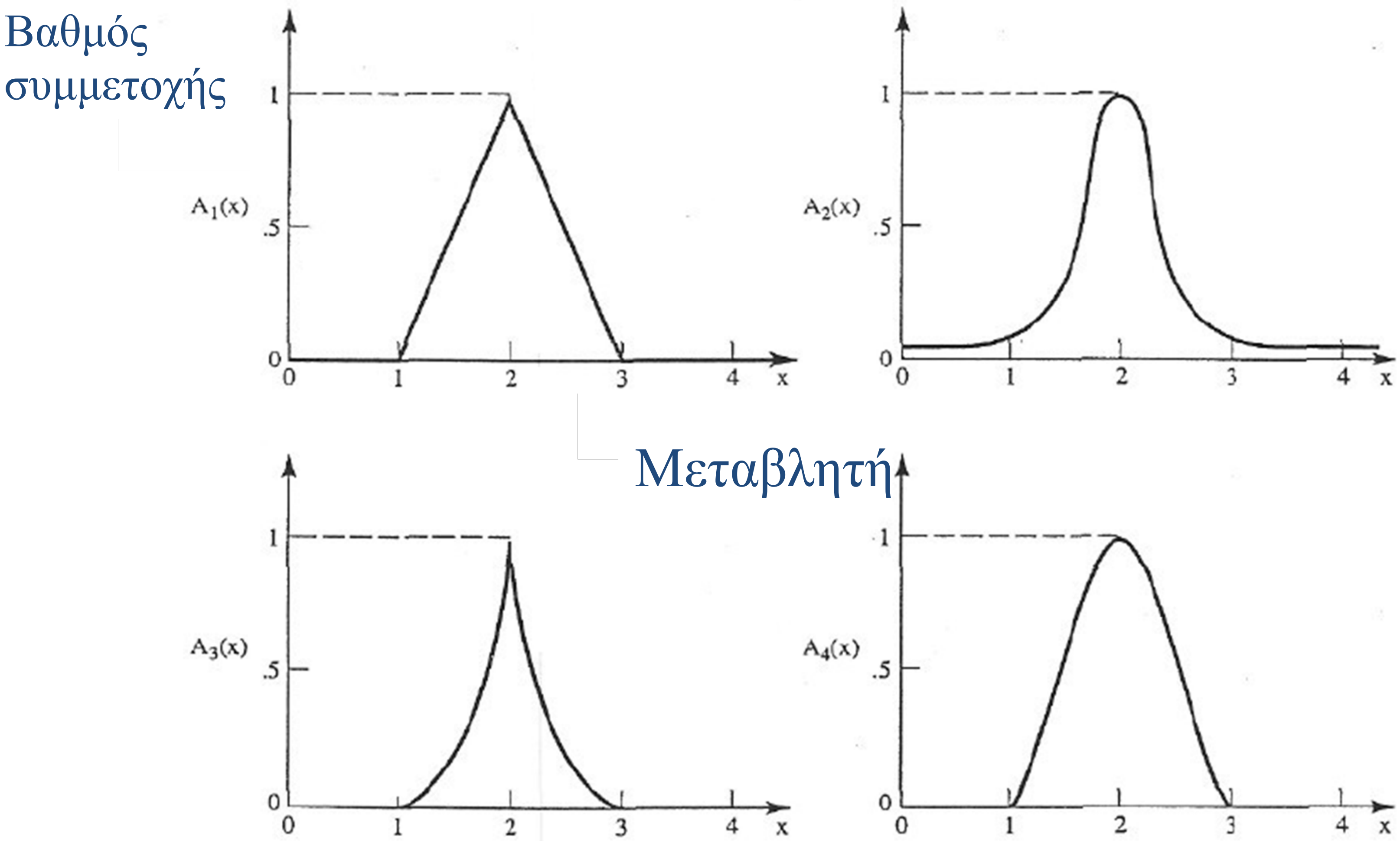


Figure 1.2 Examples of membership functions that may be used in different contexts for characterizing fuzzy sets of real numbers close to 2.

Βασικοί τύποι Ασαφών Συνόλων

•Τα 4 ασαφή σύνολα που ορίζουν οι συναρτήσεις στη προηγούμενη διαφάνεια έχουν κάποια **κοινά χαρακτηριστικά**:

(i) $A_i(2) = 1$ and $A_i(x) < 1$ for all $x \neq 2$;
(ii) A_i is symmetric with respect to $x = 2$, that is $A_i(2+x) = A_i(2-x)$ for all $x \in \mathbb{R}$;
(iii) $A_i(x)$ decreases monotonically from 1 to 0 with the increasing difference $|2-x|$.

•Κάθε συνάρτηση του προηγούμενου σχήματος είναι μέλος μιας οικογένειας συναρτήσεων:

$$A_1(x) = \begin{cases} p_1(x-r)+1 & \text{when } x \in [r-1/p_1, r] \\ p_1(r-x)+1 & \text{when } x \in [r, r+1/p_1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_2(x) = \frac{1}{1+p_2(x-r)^2}$$

$$A_3(x) = \mathrm{e}^{-|p_3(x-r)|}$$

$$A_4(x) = \begin{cases} (1+\cos(p_4\pi(x-r)))/2 & \text{when } x \in [r-1/p_4, r+1/p_4] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Στο σχήμα ποια είναι τα p_1, p_2, p_3, p_4;

Ασαφείς μεταβλητές

•Πολύ συχνά τα ασαφή σύνολα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν μαθηματικά λεκτικούς προσδιορισμούς fuzzy sets representing (λίγο, μέτρια, πολύ, κτλ)

•Πολλές φορές χρησιμοποιούνται για να κατηγοριοποιήσουν μεταβλητές (ασαφείς μεταβλητές):

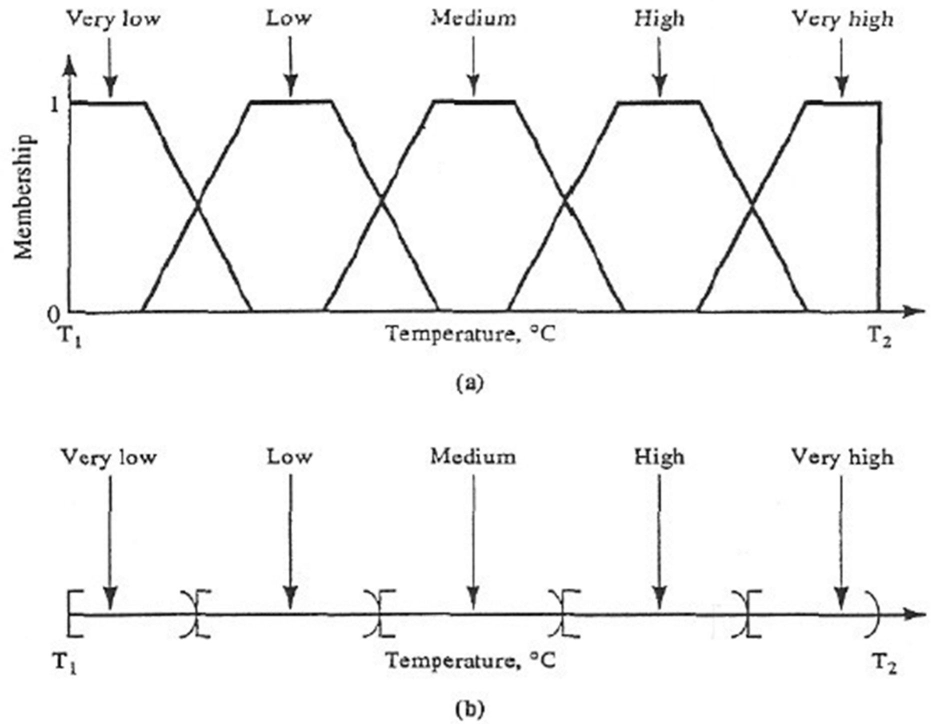


Figure 1.4 Temperature in the range $[T_1, T_2]$ conceived as: (a) a fuzzy variable; (b) a traditional (crisp) variable.

Παράδειγμα

•Τρία σύνολα: [Λίγο μορφωμένοι], [Μορφωμένοι], [Πολύ μορφωμένοι]

– Παράμετροι εισόδου, 7 βαθμοί εκπαίδευσης:

0 – no education
1 – elementary school
2 – high school
3 – two-year college degree
4 – bachelor's degree
5 – master's degree
6 – doctoral degree

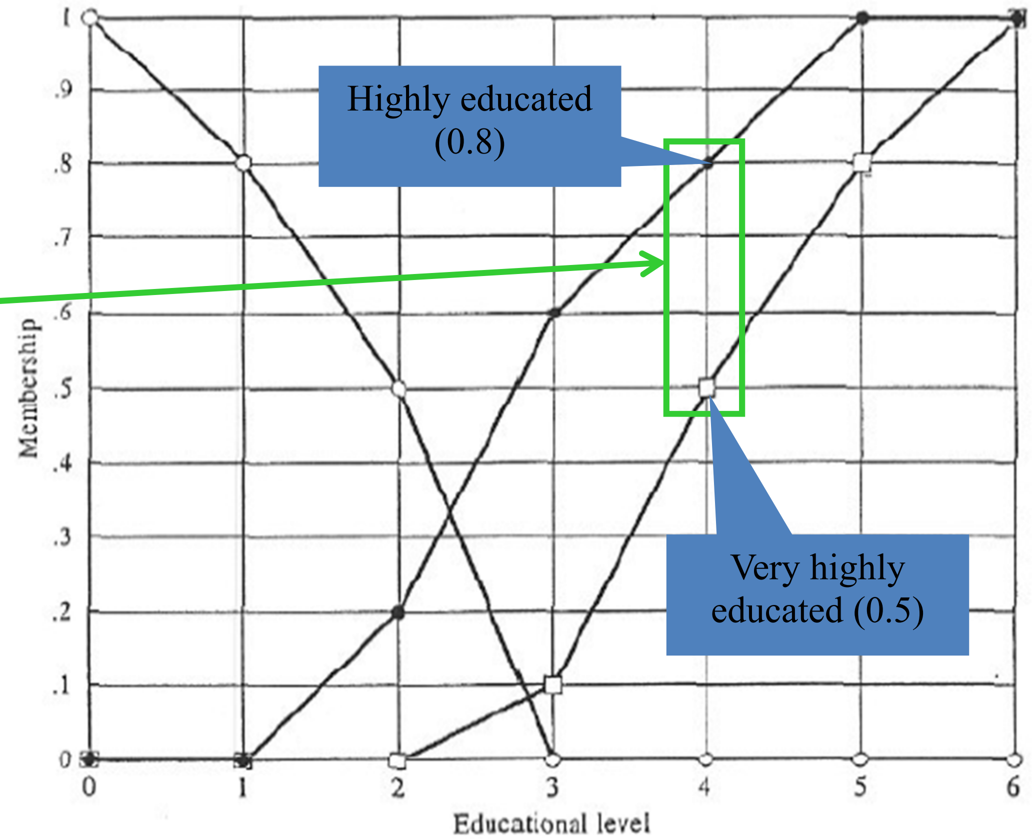
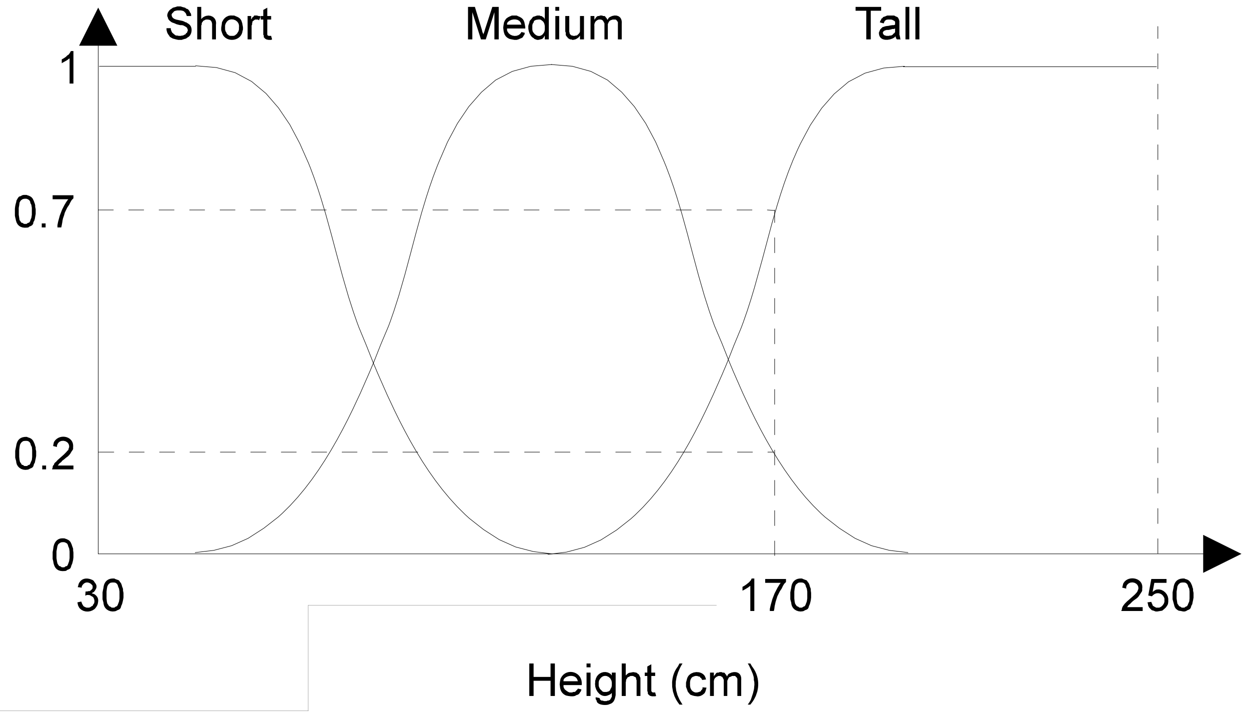


Figure 1.3 Examples of fuzzy sets expressing the concepts of people that are little educated (○), highly educated (●), and very highly educated (□).

Συναρτήσεις συμμετοχής



Ακόμα και αν ήταν στη Κίνα;

- –Δεν υπάρχει προκαθορισμένος τρόπος ορισμού τους.
- –Έχουν υποκειμενικό στοιχείο
- –Αναπαράσταση αβεβαιότητας – όχι πιθανότητας!!!

Ασαφή σύνολα

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

Ασαφές σύνολο **Συνάρτηση συμμετοχής** **Χώρος ορισμού (Universe of discourse)**

Εναλλακτικά:

X διακριτό $\Rightarrow$ $$A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) / x_i$$

X συνεχές $\Rightarrow$ $$A = \int_X \mu_A(x) / x$$

Είδη ασαφών συνόλων

•Αυτό είναι το ένα είδος ασαφών συνόλων.

$$A : X \to [0,1]$$

(συνήθη ασαφή σύνολα - ordinary fuzzy sets – Τύπου 1).

•Interval και Τύπου 2:

–Η συνάρτηση συμμετοχής στα τύπου 1 είναι συνήθως πολύ συγκεκριμένη.

–Μπορεί όμως κάτι τέτοιο να μην είναι πάντα εφικτό..

–Στα ασαφή σύνολα τύπου 2 η συνάρτηση συμμετοχής δεν αντιστοιχεί σε κάθε μεταβλητή ένα βαθμό συμμετοχής αλλά ένα εύρος τιμών μεταξύ ενός άνω και ενός κάτω ορίου (interval) ή ορίζεται και αυτός με μια συνάρτηση συμμετοχής (type 2).

$$A : X \to \varepsilon([0,1]),$$

Είδη ασαφών συνόλων

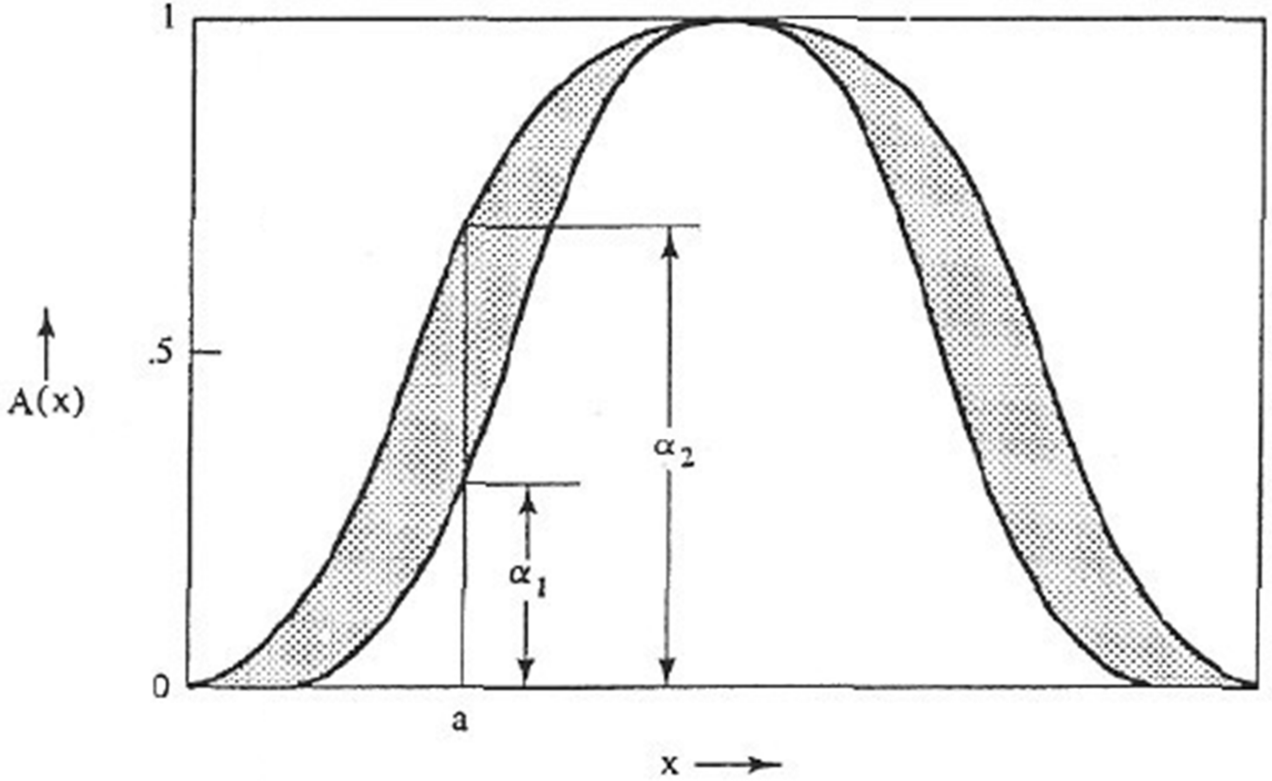


Figure 1.5 An example of an interval-valued fuzzy set $(A(a) = [\alpha_1, \alpha_2])$.

Είδη ασαφών συνόλων

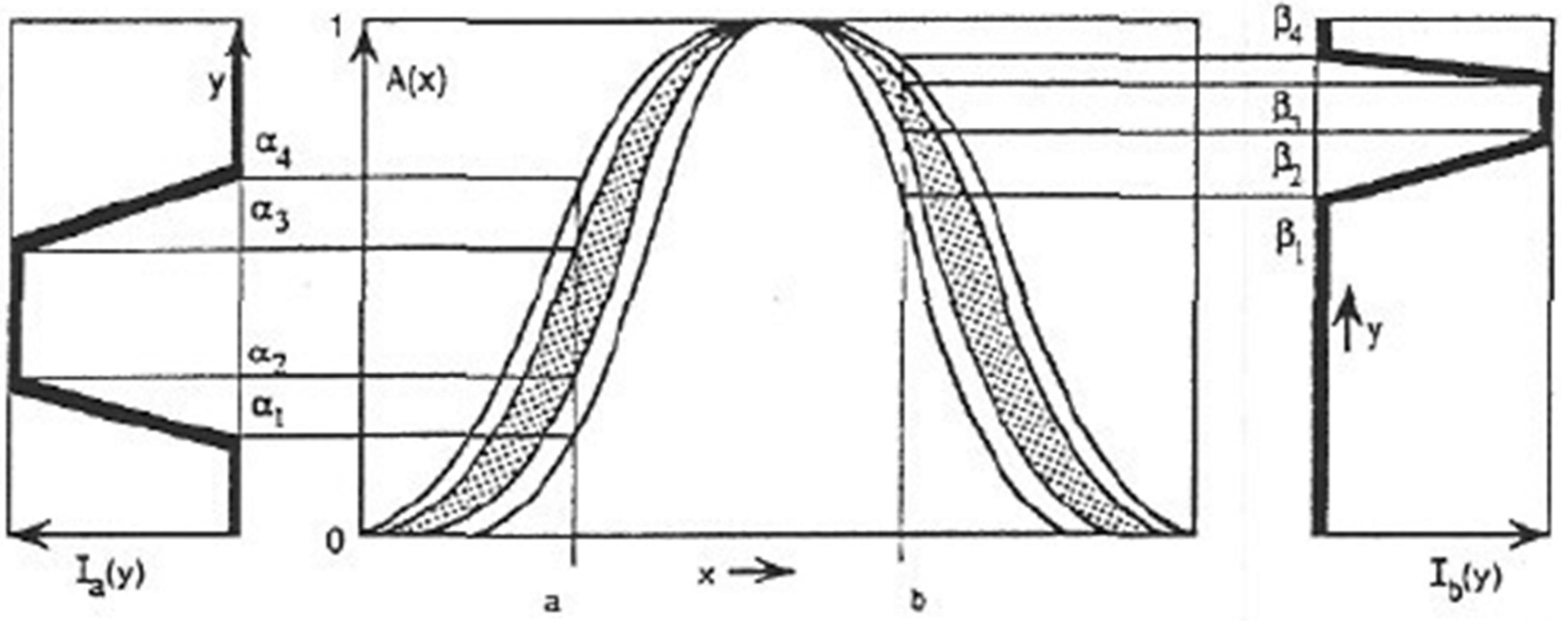


Figure 1.6 Illustration of the concept of a fuzzy set of type 2.

Βασικές Έννοιες

•Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 3 σύνολα **young**, **middle-aged**, **old person**. Ορίζουμε πχ τις συναρτήσεις συμμετοχής (membership functions) στο διάστημα [0,80] ως εξής:

$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x \leq 20 \\ (35 - x)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ 0 & \text{when } x \geq 35 \end{cases}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{when either } x \leq 20 \text{ or } \geq 60 \\ (x - 20)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ (60 - x)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$A_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{when } x \leq 45 \\ (x - 45)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } x \geq 60 \end{cases}$$

Βασικές Έννοιες

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{when either } x \le 20 \text{ or } \ge 60 \\ (x-20)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ (60-x)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } 35 \le x \le 45 \end{cases}$$

TABLE 1.2 DISCRETE APPROXIMATION OF MEMBERSHIP FUNCTION A_2 (FIG. 1.7) BY FUNCTION D_2 OF THE FORM:
$D_2 : \{0, 2, 4, \ldots, 80\} \rightarrow [0, 1]$

x	$D_2(x)$
$x \notin \{22, 24, \ldots, 58\}$	0.00
$x \in \{22, 58\}$	0.13
$x \in \{24, 56\}$	0.27
$x \in \{26, 54\}$	0.40
$x \in \{28, 52\}$	0.53
$x \in \{30, 50\}$	0.67
$x \in \{32, 48\}$	0.80
$x \in \{34, 46\}$	0.93
$x \in \{36, 38, \ldots, 44\}$	1.00

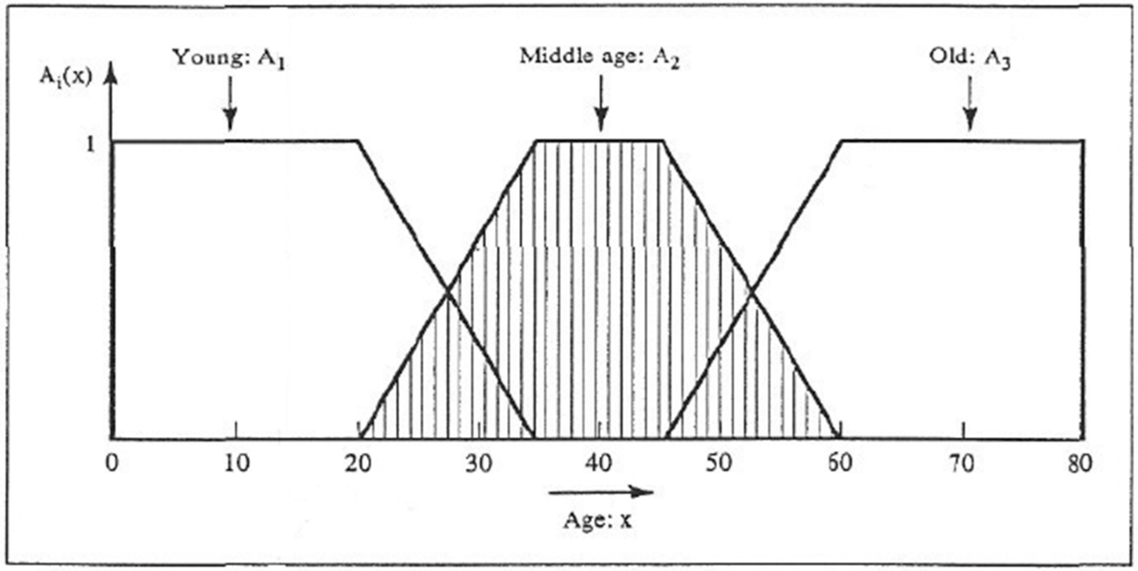


Figure 1.7 Membership functions representing the concepts of a young, middle-aged, and old person. Shown discrete approximation D_2 of A_2 is defined numerically in Table 1.2.

Βασικές Έννοιες: α-cut

- α-cut και αυστηρό (strong) α-cut

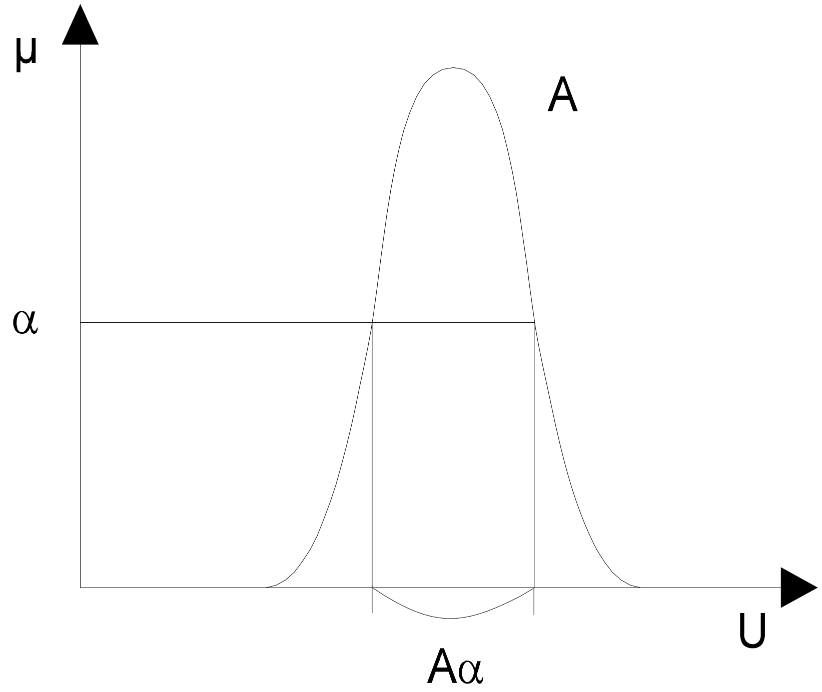
–Για δεδομένο ασαφές σύνολο A στο X και ένα αριθμό $\alpha \in [0,1]$,

το α-cut και το αυστηρό α-cut είναι διακριτά σύνολα:

$$^{\alpha}A = \{x | A(x) \geq \alpha\}$$

$$^{\alpha+}A = \{x | A(x) > \alpha\}.$$

–Το α-cut ενός ασαφούς συνόλου A είναι ένα διακριτό σύνολο που περιέχει **όλα τα στοιχεία των οποίων ο βαθμός συμμετοχής στο Α είναι μεγαλύτερος ή ίσος** (ή αυστηρά μεγαλύτερος) από τον αριθμό α.



Βασικές Έννοιες

- Παράδειγμα:

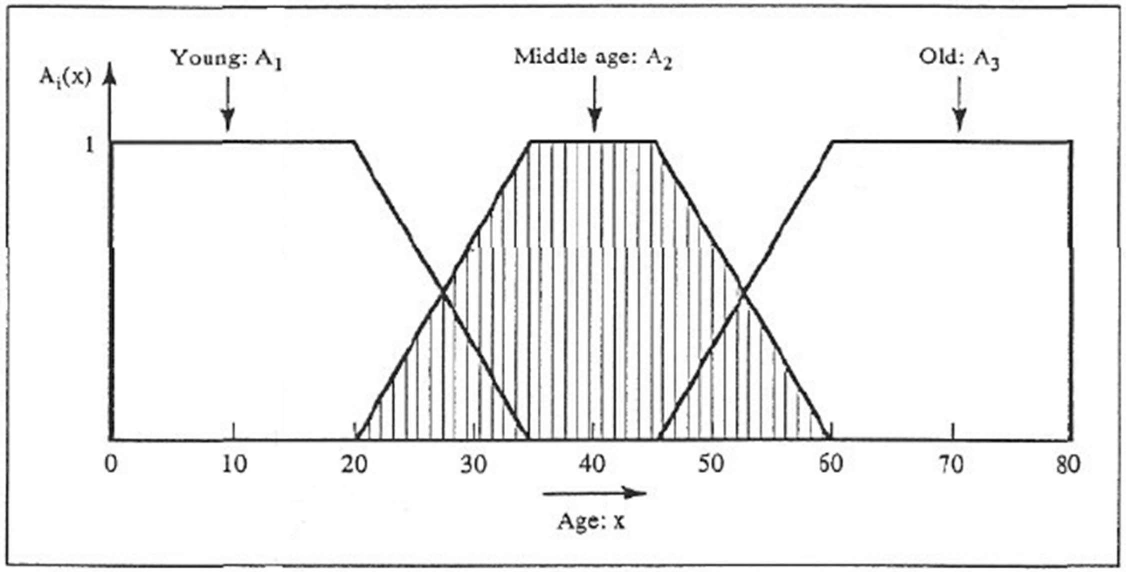


Figure 1.7 Membership functions representing the concepts of a young, middle-aged, and old person. Shown discrete approximation D_2 of A_2 is defined numerically in Table 1.2.

$$
\begin{aligned}
{}^0A_1 &= {}^0A_2 = {}^0A_3 = [0, 80] = X; \\
{}^\alpha A_1 &= [0, 35 - 15\alpha], {}^\alpha A_2 = [15\alpha + 20, 60 - 15\alpha], {}^\alpha A_3 = [15\alpha + 45, 80] \text{ for all } \\
&\quad \alpha \in (0, 1]; \\
{}^{\alpha+}A_1 &= (0, 35 - 15\alpha), {}^{\alpha+}A_2 = (15\alpha + 20, 60 - 15\alpha), {}^{\alpha+}A_3 = (15\alpha + 45, 80) \text{ for all } \\
&\quad \alpha \in [0, 1); \\
{}^{1+}A_1 &= {}^{1+}A_2 = {}^{1+}A_3 = \varnothing.
\end{aligned}
$$

Βασικές Έννοιες

- Ιδιότητες των α-cut

–Για κάθε ασαφές σύνολο A και δύο τιμές $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$

–Για τις οποίες ισχύει $\alpha_1 < \alpha_2$

$$^{\alpha_1}A \supseteq {}^{\alpha_2}A \quad \text{and} \quad {}^{\alpha_1 +}A \supseteq {}^{\alpha_2 +}A$$

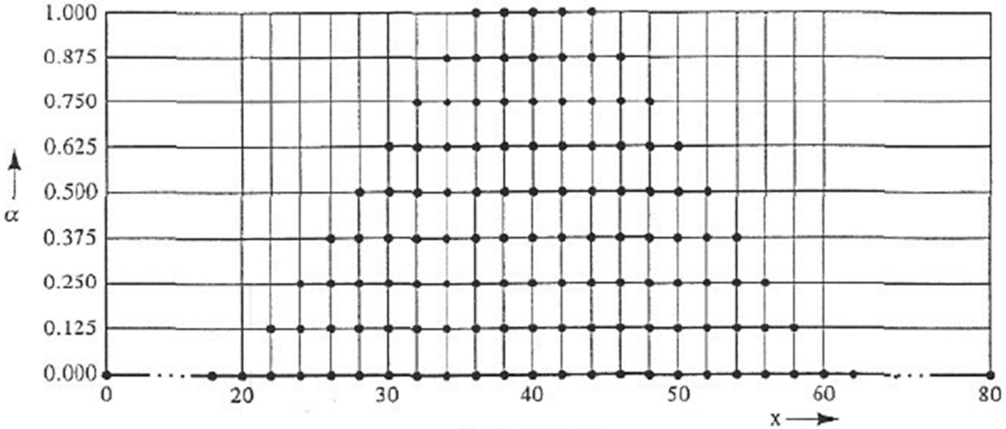
$$^{\alpha_1}A \cap {}^{\alpha_2}A = {}^{\alpha_2}A, \; {}^{\alpha_1}A \cup {}^{\alpha_2}A = {}^{\alpha_1}A$$

$$^{\alpha_1 +}A \cap {}^{\alpha_2 +}A = {}^{\alpha_2 +}A, \; {}^{\alpha_1 +}A \cup {}^{\alpha_2 +}A = {}^{\alpha_1 +}A$$

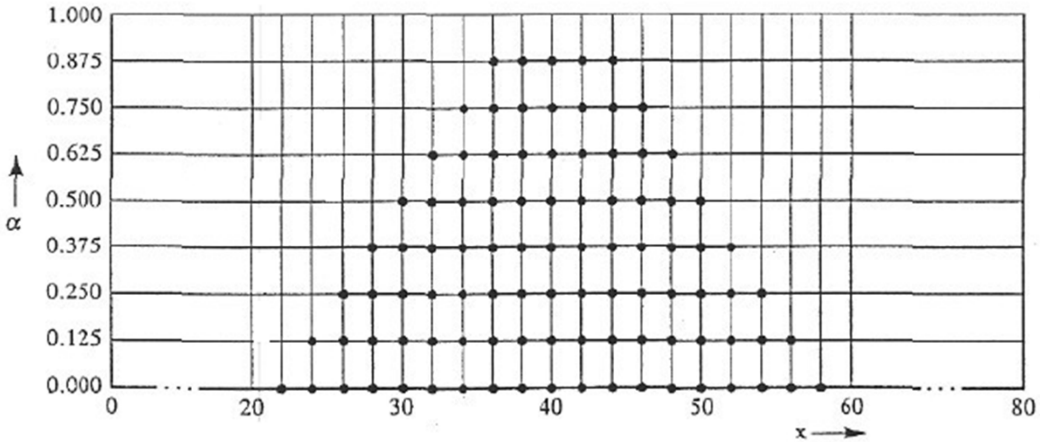
–Τα α-cuts οποιουδήποτε ασαφούς συνόλου είναι οικογένειες από nested διακριτά σύνολα.

Βασικές Έννοιες

•Παράδειγμα: δείτε το διακριτό σύνολο D_2 που προσεγγίζει το ασαφές σύνολο A_2



(a) α - cuts ${}^{\alpha}D_2$



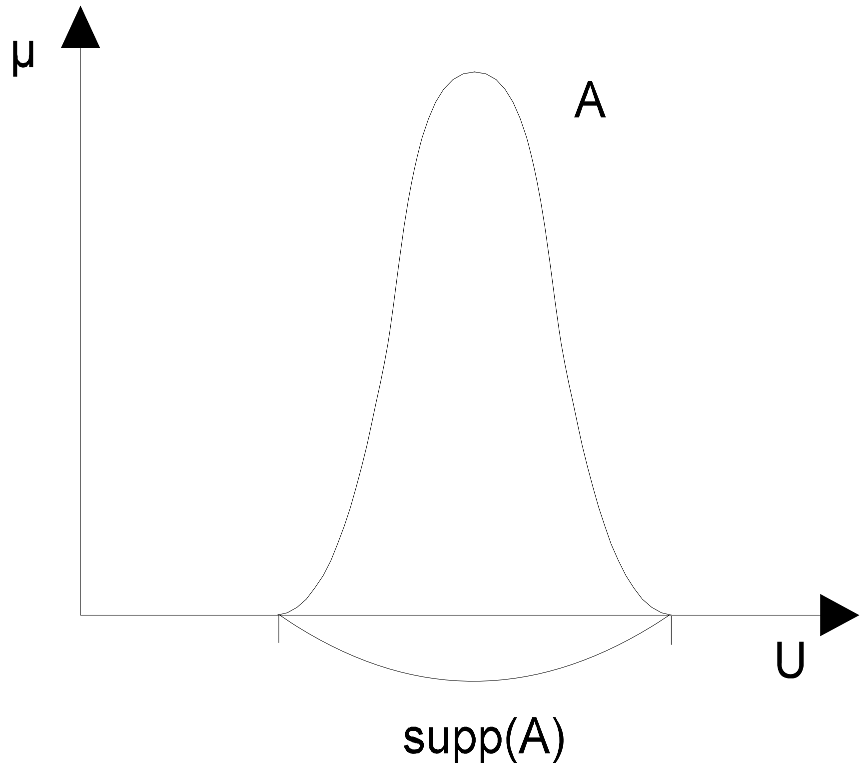
(b) Strong α - cuts ${}^{\alpha+}D_2$

TABLE 1.2 DISCRETE APPROXIMATION OF MEMBERSHIP FUNCTION A_2 (FIG. 1.7) BY FUNCTION D_2 OF THE FORM: $D_2 : \{0, 2, 4, \ldots, 80\} \to [0, 1]$

x	$D_2(x)$
$x \notin \{22, 24, \ldots, 58\}$	0.00
$x \in \{22, 58\}$	0.13
$x \in \{24, 56\}$	0.27
$x \in \{26, 54\}$	0.40
$x \in \{28, 52\}$	0.53
$x \in \{30, 50\}$	0.67
$x \in \{32, 48\}$	0.80
$x \in \{34, 46\}$	0.93
$x \in \{36, 38, \ldots, 44\}$	1.00

Βασικές Έννοιες

- Η υποστήριξη (support) ($S(A)$ ή supp(A)) ενός ασαφούς συνόλου A που ορίζεται σε ένα υπερσύνολο X:
  - Η υποστήριξη είναι το διακριτό υποσύνολο των στοιχείων του X με μη-μηδενικούς βαθμούς συμμετοχής στο A.
  - άρα είναι το ίδιο με ένα strong α-cut του A για α=0



Βασικές Έννοιες

- Το ύψος ενός συνόλου A:

–Είναι η μεγαλύτερη τιμή του βαθμού συμμετοχής που έχει αντιστοιχηθεί σε οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου

$$h(A) = \sup_{x \in X} A(x)$$

–Ένα σύνολο ονομάζεται κανονικό (normal) αν $h(A)$ = 1.

–Και subnormal αν $h(A)$ <1.

Σubnormal convex fuzzy set

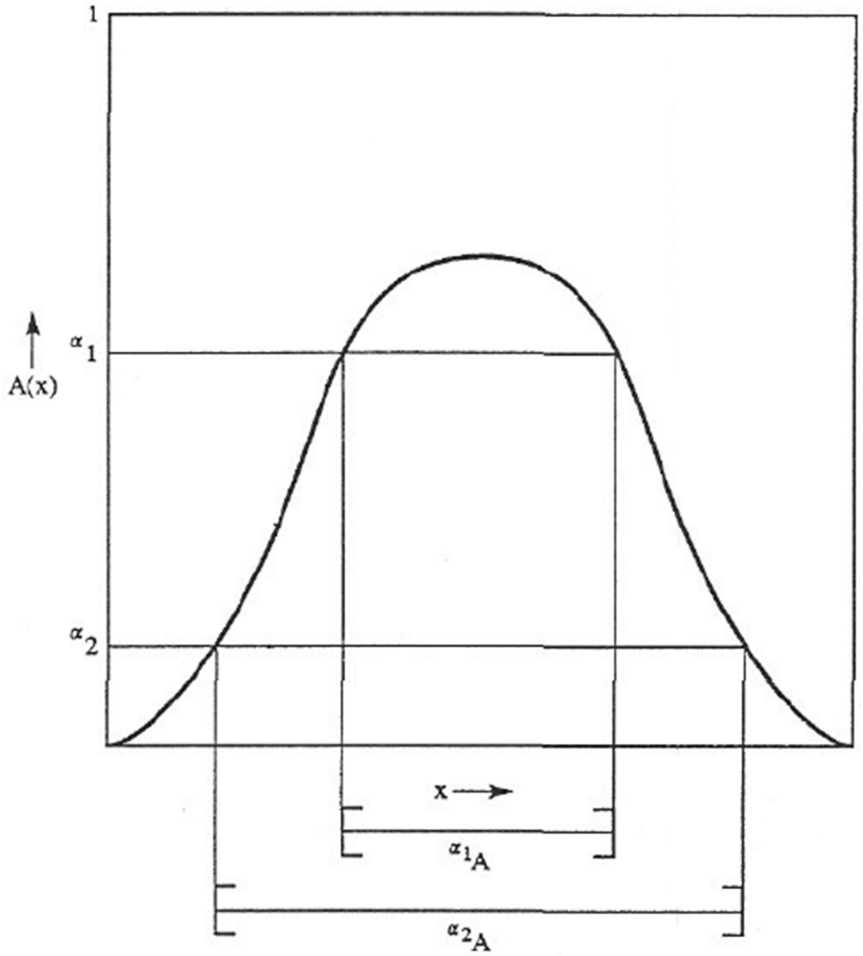


Figure 1.9 Subnormal fuzzy set that is convex.

Normal non convex fuzzy set

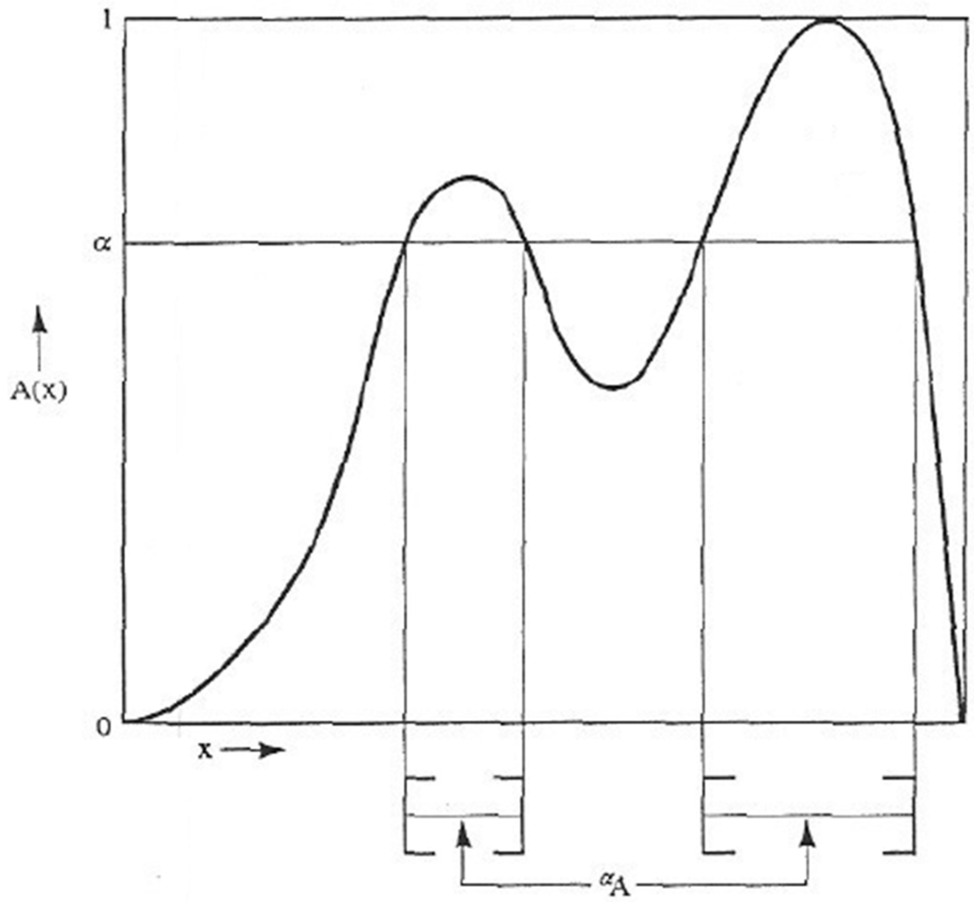


Fig. 1.10 Normal fuzzy set that is not convex.

Normal fuzzy set οριζόμενο στο (x,y) μέσω α-cuts

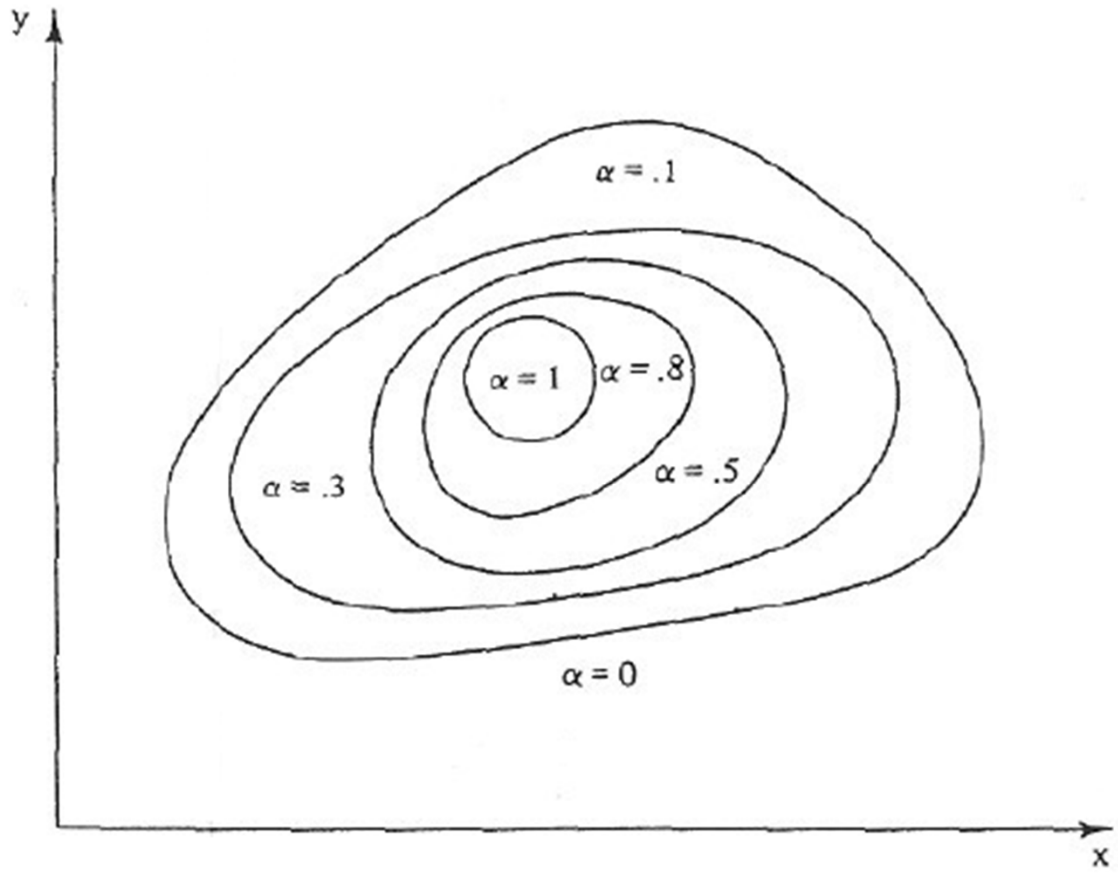
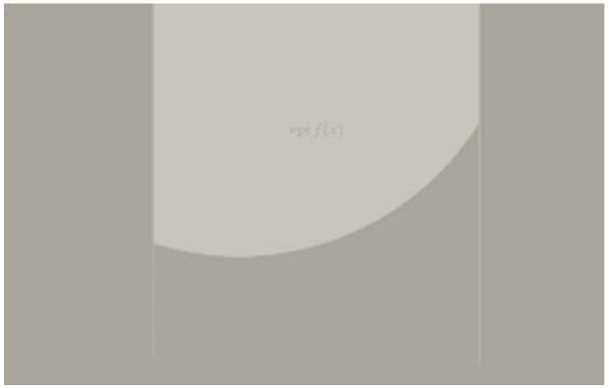
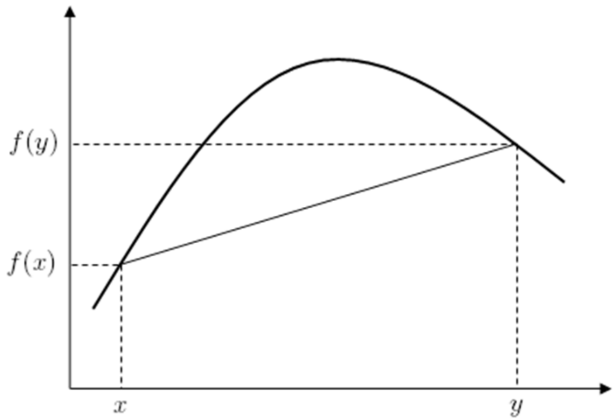


Figure 1.11 Normal and convex fuzzy set A defined by its α-cuts ${}^{.1}A$, ${}^{.3}A$, ${}^{.5}A$, ${}^{.8}A$, ${}^{1}A$.

Προσοχή

•Δεν λέμε ότι η συνάρτηση συμμετοχής ενός **κυρτού** ασαφούς συνόλου είναι **κυρτή** – συγκεκριμένα είναι κοίλη!





Βασικές έννοιες: συμπληρωματικό

$$\overline{A}(x) = 1 - A(x)$$

Τα στοιχεία του X για τα οποία $\overline{A}(x) = A(x)$ ονομάζονται **σημεία ισορροπίας** του A. Για το A_2 στο Fig. 1.7 είναι τα 27.5 και 52.5.

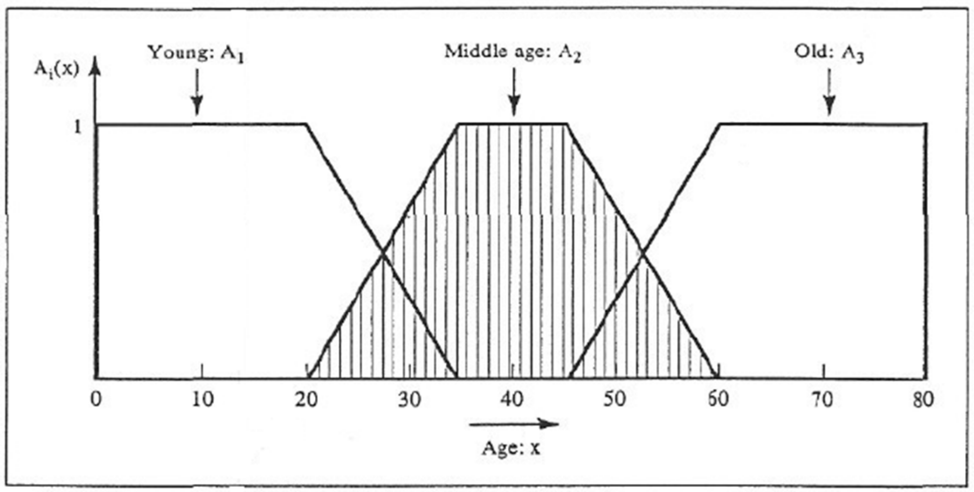
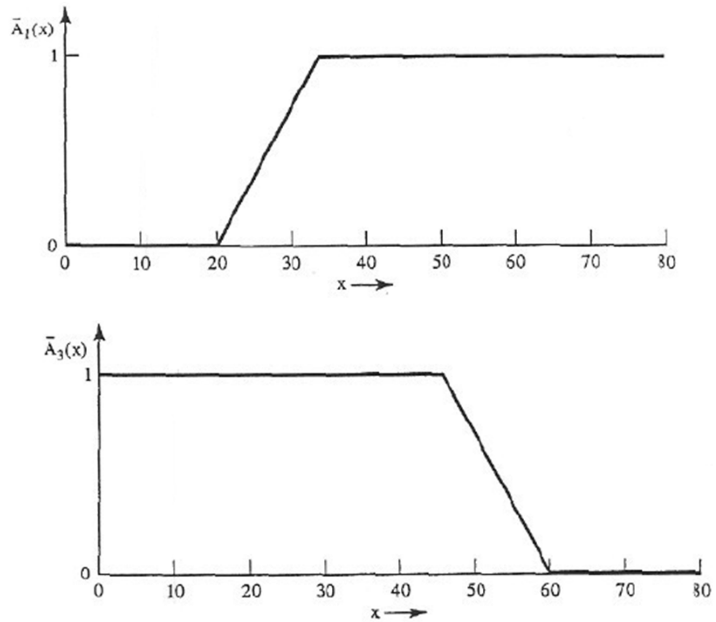


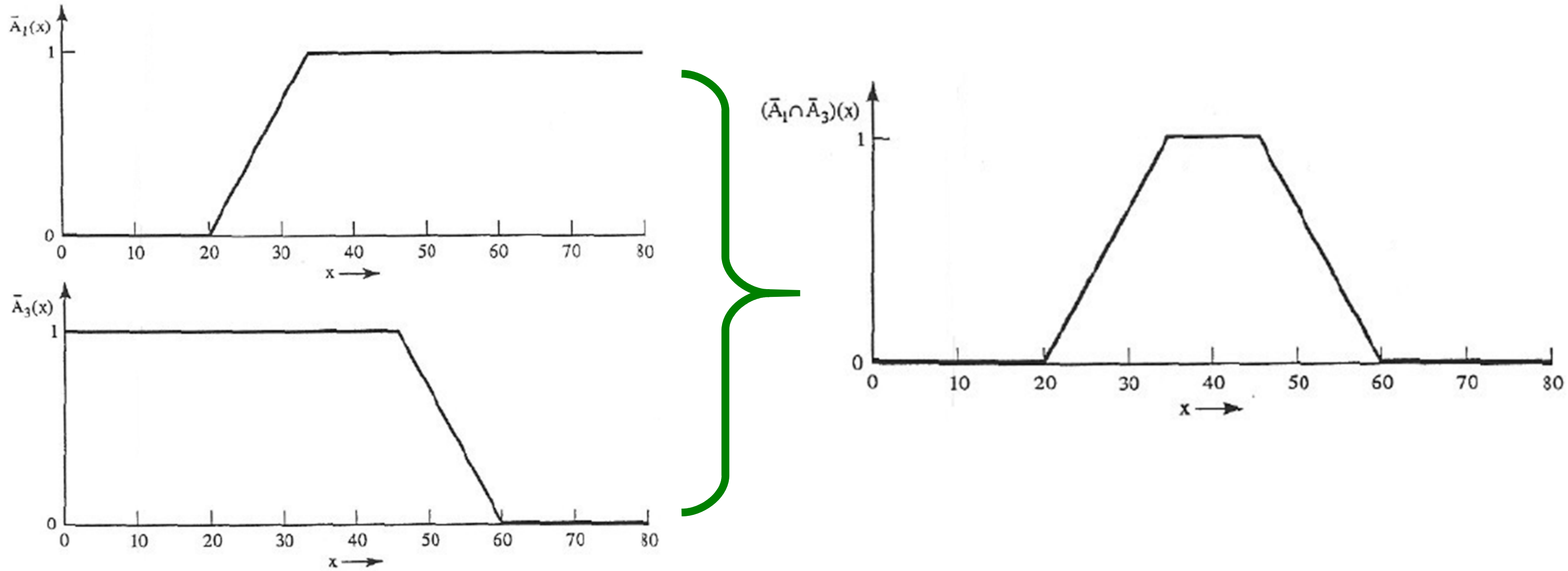
Figure 1.7 Membership functions representing the concepts of a young, middle-aged, and old person. Shown discrete approximation D_2 of A_2 is defined numerically in Table 1.2.



Βασικές έννοιες

- Τομή και Ένωση

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)],$$
$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)],$$



Βασικές Έννοιες

•Παράδειγμα:

–A_1, A_2, A_3 normal.

–B and C subnormal.

–B and C κυρτά.

– $B \cup C$ and $\overline{B \cup C}$ μη-κυρτά

Η κανονικότητα (normality) και η κυρτότητα (convexity) μπορεί να χαθούν όταν κάνουμε πράξεις μεταξύ ασαφών συνόλων χρησιμοποιώντας τομή ή συμπλήρωμα.

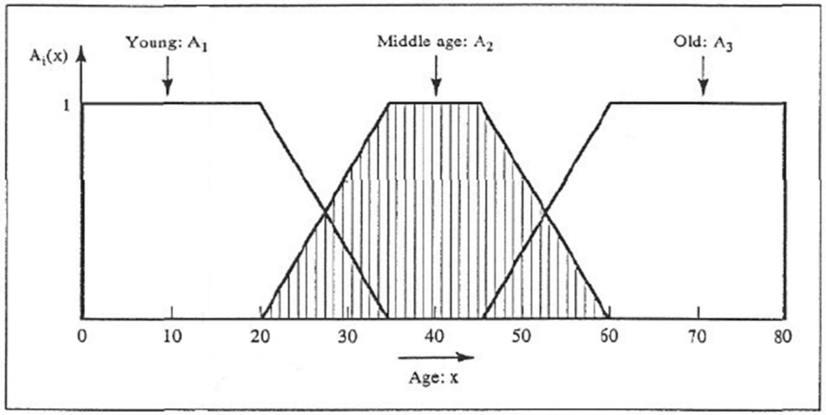
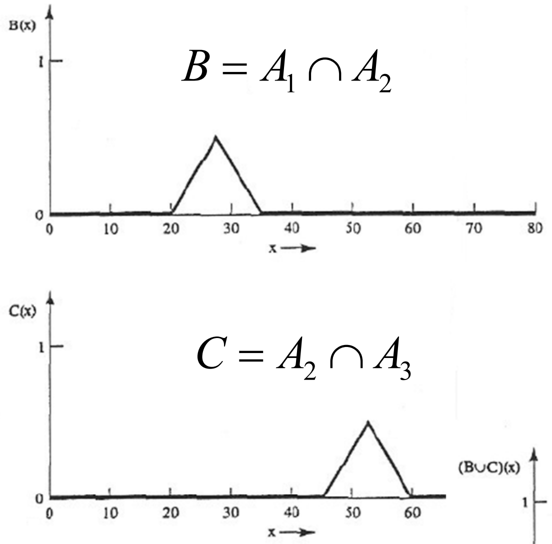


Figure 1.7 Membership functions representing the concepts of a young, middle-aged, and old person. Shown discrete approximation D_2 of A_2 is defined numerically in Table 1.2.



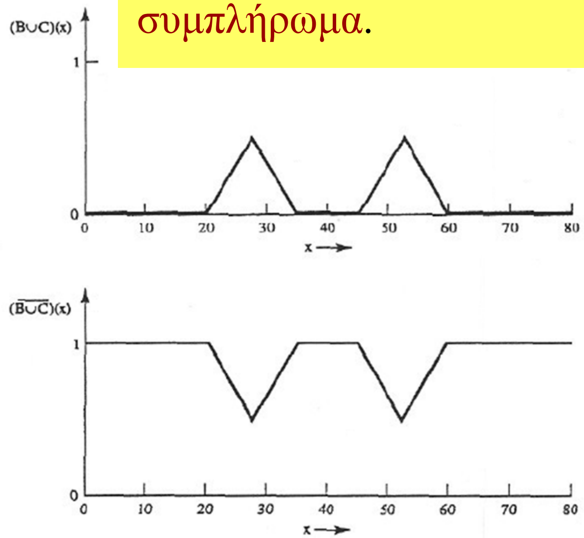


Figure 1.13 Illustration of standard operation on fuzzy sets $B = A_1 \cap A_2$ and $C = A_2 \cap A_3$ (A_1, A_2, A_3 are given in Fig. 1.7).

Βασικές Έννοιες

- Κάτι που **ΔΕΝ** ισχύει στα ασαφή σύνολα

$$A \cap \overline{A} = \phi$$

- Αρκεί να δείξουμε ότι το $\min[A(x), 1 - A(x)] = 0$
- ΔΕΝ ισχύει για τουλάχιστον ένα $x \in X$
- Στην ουσία ΔΕΝ ισχύει για κανένα $A(x) \in (0,1)$
- Και ισχύει μόνο για $A(x) \in \{0,1\}$.

Πράξεις

Έστω X υπερσύνολο αναφοράς και A,B ασαφή υποσύνολα του X , τότε ορίζουμε τα ακόλουθα :

1. Αλγεβρικό άθροισμα:

$A+B = \{ (\chi,\mu_{A+B}(\chi) \mid \chi\varepsilon X, \mu_{A+B}(\chi) = \mu_A(\chi)+\mu_B(\chi)-\mu_A(\chi)*\mu_B(\chi)\}$

2. Αλγεβρικό γινόμενο :

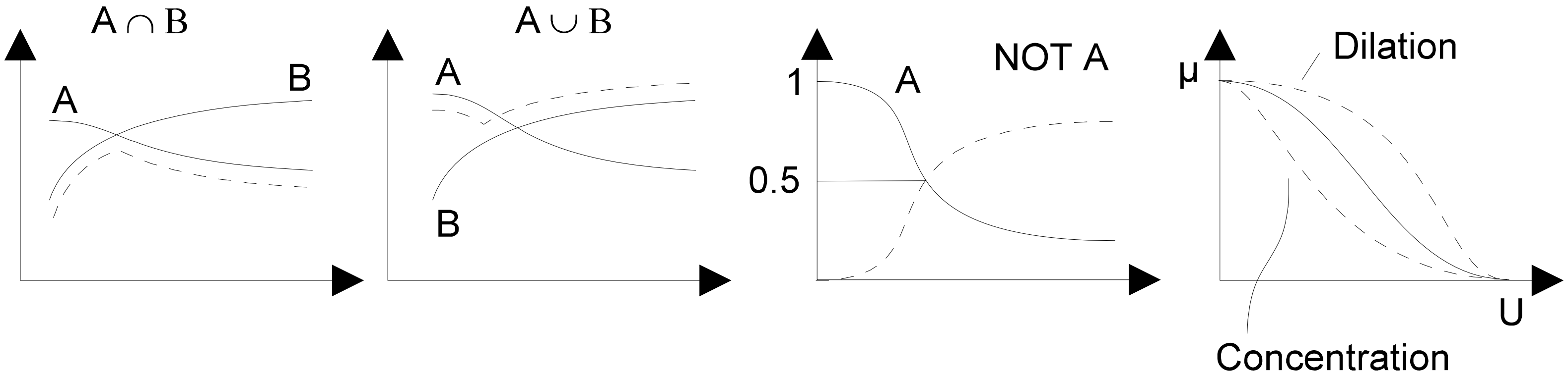
$AB = \{ (\chi,\mu_{AB}(\chi) \mid \chi\varepsilon X, \mu_{AB}(\chi) = \mu_A(\chi) * \mu_B(\chi) \}$

3.Τομή : $C=A\cap B = \{ (\chi,\mu_C(\chi) \mid \chi\varepsilon X, \mu_C(\chi) = \min(\mu_A(\chi),\mu_B(\chi)) \}$

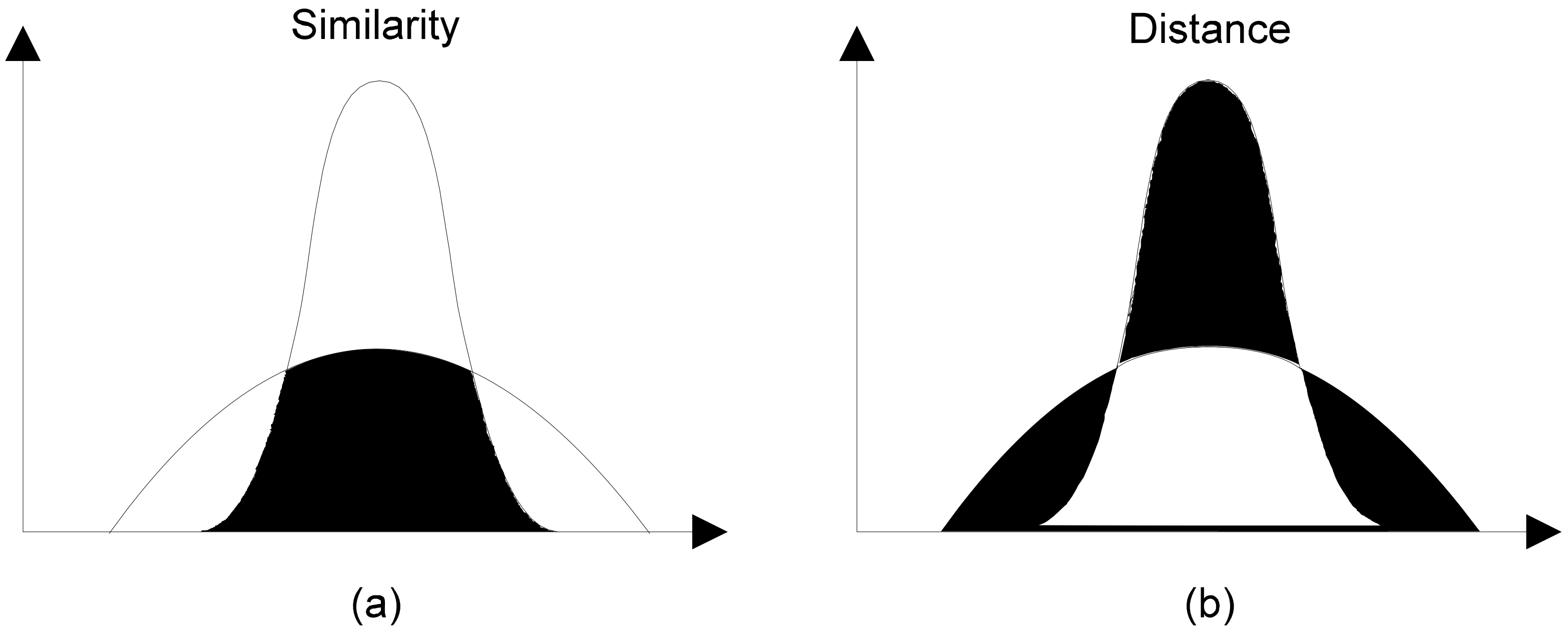
4.Ένωση:$D=A\cup B= \{ (x,\mu_D(\chi) \mid \chi\varepsilon X, \mu_D(\chi) = \max(\mu_A(\chi),\mu_B(\chi) \}$

5.Συμπλήρωμα: $A^c= \{ (\chi,\mu_A{}^c(\chi) \mid \chi\varepsilon X, \mu_A{}^c(\chi) = 1-\mu_A(\chi) \}$

Πράξεις



Ομοιότητα/Απόσταση μεταξύ δύο ασαφών συνόλων



Παράδειγμα

Έστω X = { σπίτια με 1 ή 2 ή 3…ή 10 δωμάτια }

A = { σπίτια «κατάλληλα» για 4-μελή οικογένεια }

B = { σπίτια «μεγάλα» σε επιφάνεια }

Τα A, B αποτελούν ασαφή υποσύνολα του X.

Αν $A = 0{,}2/1 + 0{,}5/2 + 0{,}8/3 + 1/4 + 0{,}7/5 + 0{,}3/6$

$B = 0{,}2/3 + 0{,}4/4 + 0{,}6/5 + 0{,}8/6 + 1/7 + 1/8$

Τότε $C= A \cap B$ = { σπίτια «κατάλληλα» για 4-μελή οικογένεια και \`μεγάλα΄ σε επιφάνεια } $= 0.2/3 + 0.4/4 + 0.6/5 + 0.3/6$

$D = A \cup B$ = {σπίτια «κατάλληλα» για 4-μελή οικογένεια ή μεγάλα σε επιφάνεια } $=0.2/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.7/5 + 0.8/6 + 1/7 + 1/8$

A^c= {σπίτια ακατάλληλα για 4-μελή οικ.}$=0.8/1 + 0.5/2 + 0.2/3 + O.3/5 + 0.7/6$

B^c= {σπίτια μικρά σε επιφάνεια}$=1/1 + ½ + 0{,}8/3 + 0.6/4 + 0.4/5 + 0.2/6$

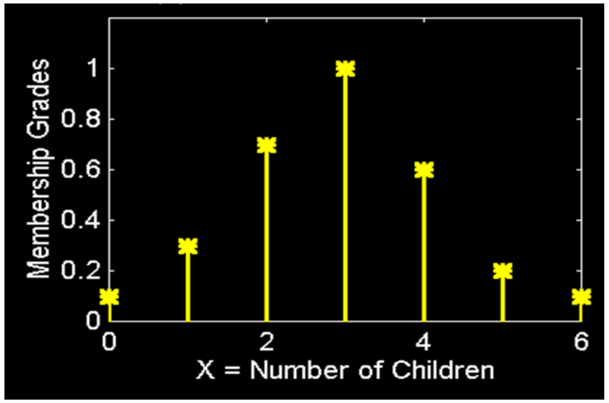
Διακριτός χώρος

Ασαφές σύνολο C = “επιθυμητή πόλη για διαβίωση”

- X = {Athens, Boston, Paris} (διακριτός και μη διατεταγμένος χώρος)
- C = {(Athens, 0.9), (Boston, 0.8), (Paris, 0.6)}

Ασαφές σύνολο A = “επιθυμητός αριθμός παιδιών”

- X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} (διακριτός χώρος)
- A = {(0, .1), (1, .3), (2, .7), (3, 1), (4, .6), (5, .2), (6, .1)}



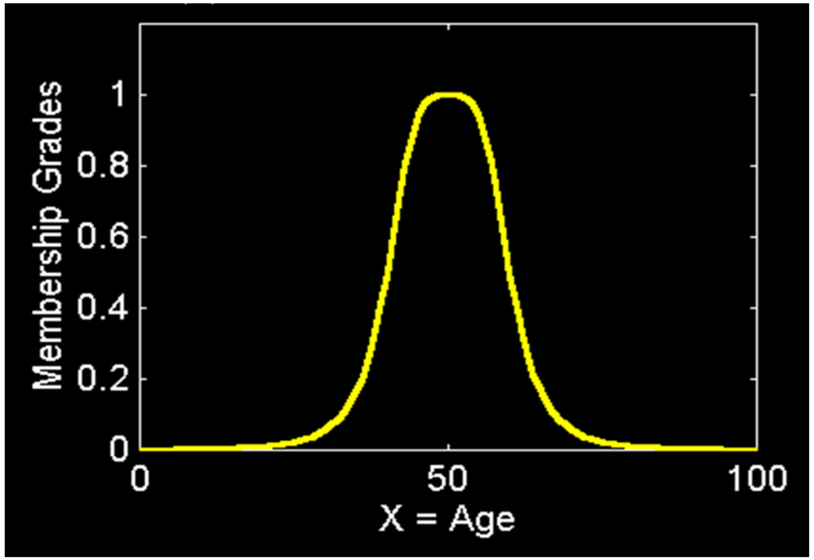
Συνεχής χώρος

- Ασαφές σύνολο B = “περίπου 50 ετών”

  X = Σύνολο θετικών αριθμών (συνεχές)

  B = {(x, μ_B(x)) | x in X}

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^2}$$



Συνήθεις συναρτήσεις συμμετοχής

Τριγωνοειδής:

$$\mu_{\text{tri}}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

Τραπεζοειδής:

$$\mu_{\text{trap}}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

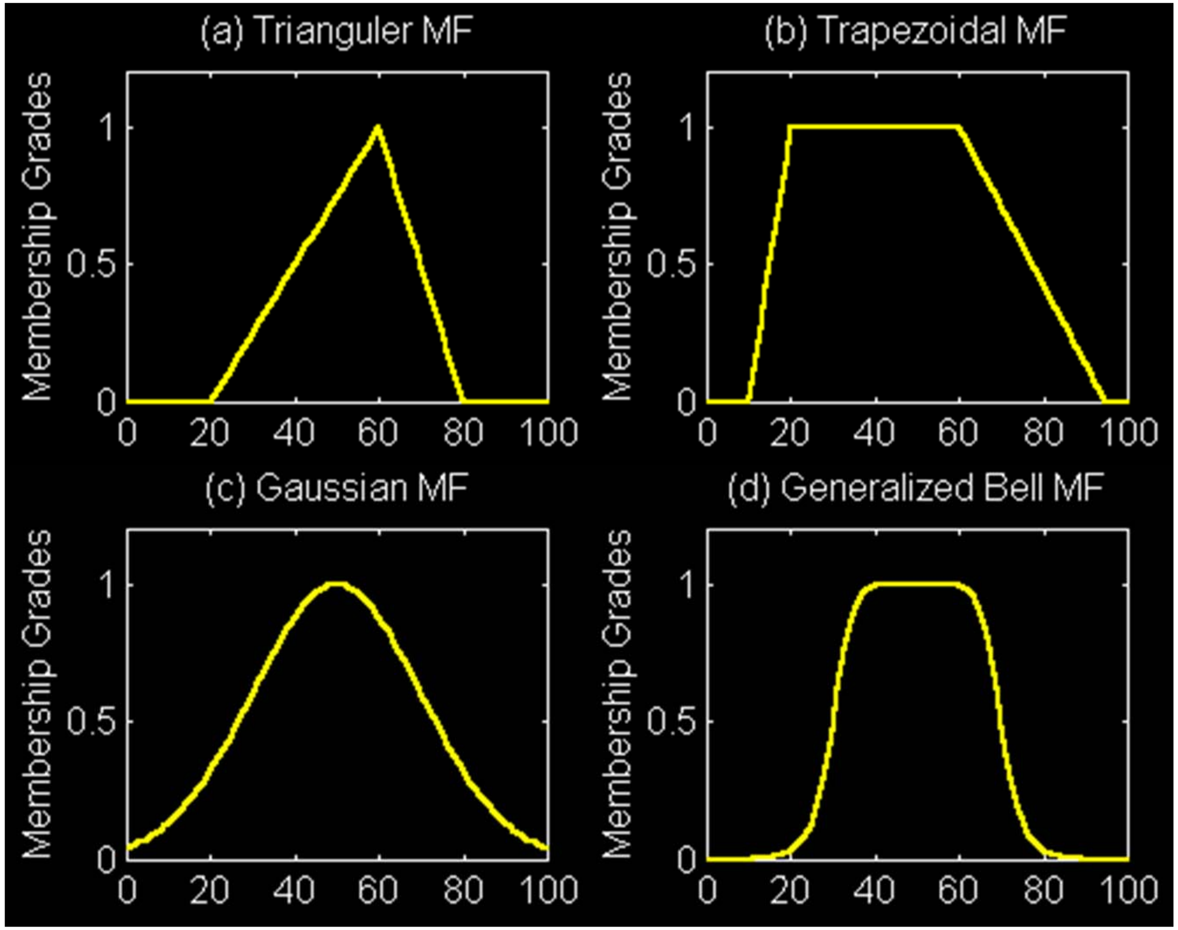
Gaussian:

$$\mu_{\text{gauss}}(x; c, \sigma) = e^{-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

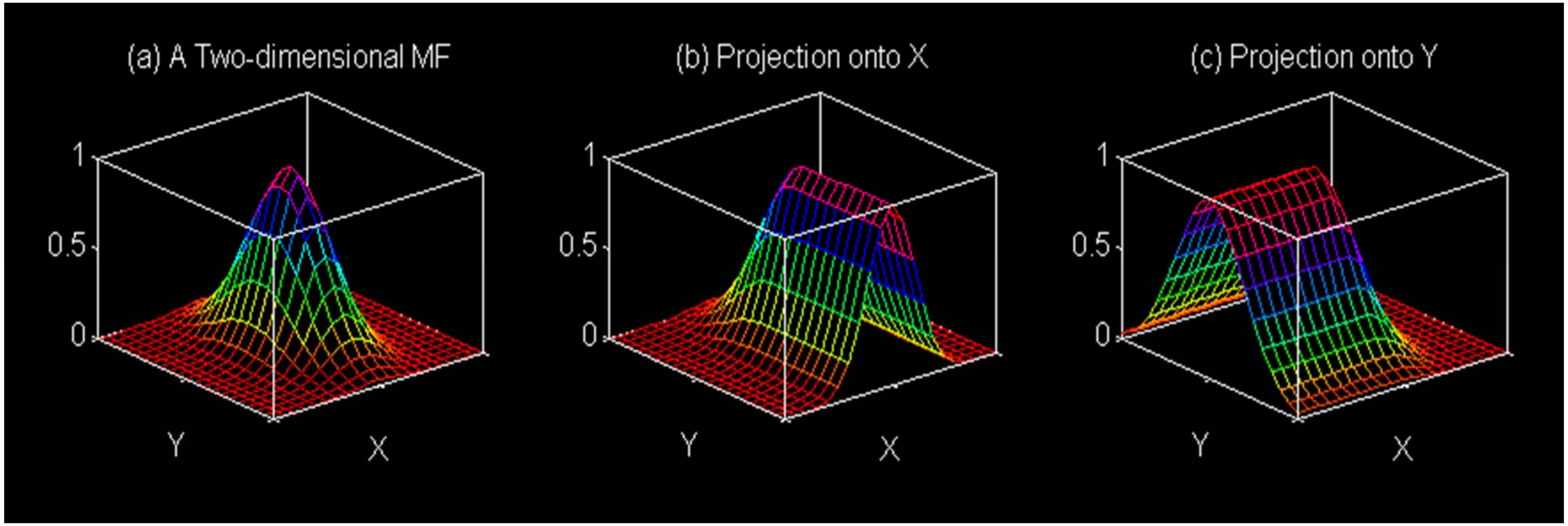
Generalized bell:

$$\mu_{\text{gbell}}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}, \quad b > 0$$

Συναρτήσεις συμμετοχής



Δυσδιάστατη συνάρτηση συμμετοχής

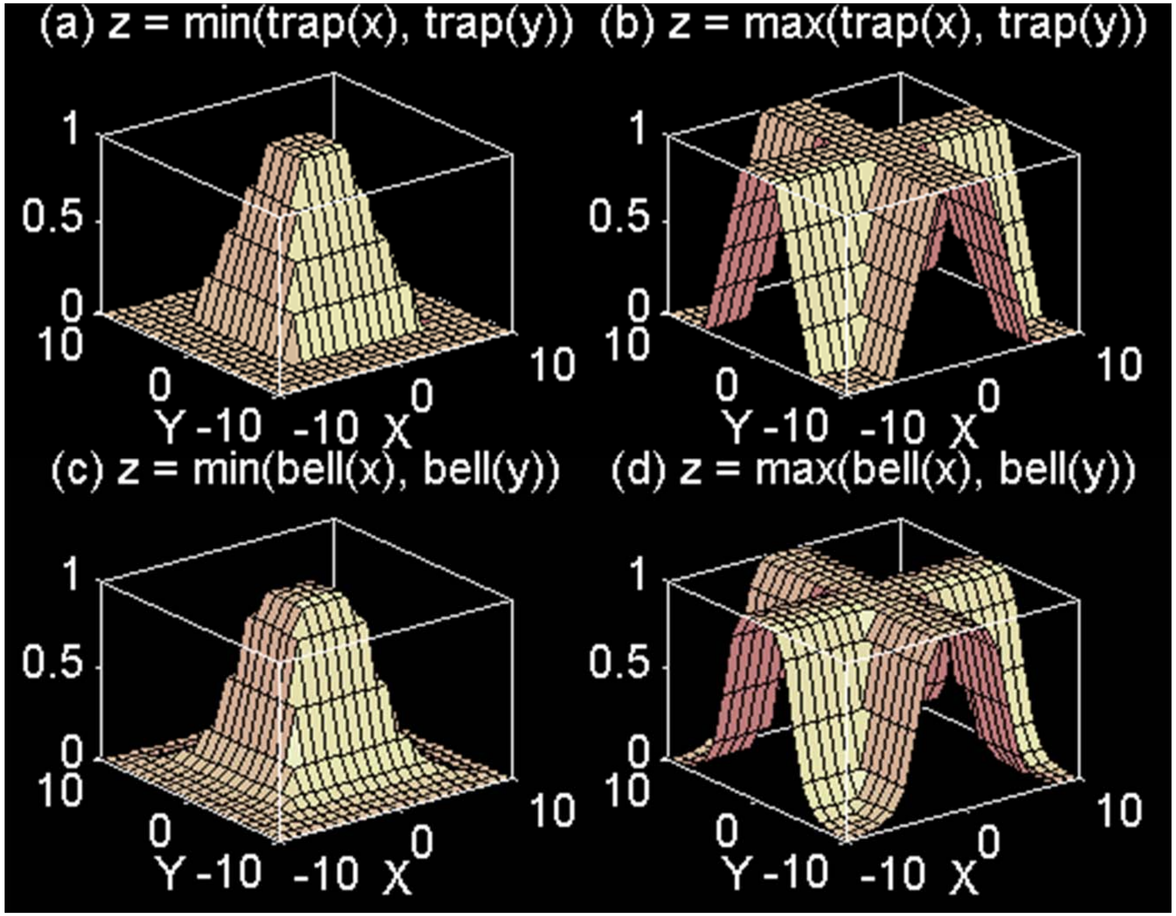


$\mu_R(x, y)$

$\mu_A(x) = \max\limits_{y} \mu_R(x, y)$

$\mu_B(y) = \max\limits_{x} \mu_R(x, y)$

Δυσδιάστατη συνάρτηση συμμετοχής



Πράξεις συνόλων

- Ισότητα:

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in X$$

- Υποσύνολο:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad \forall x \in X$$

- Συμπλήρωμα:

$$A^c = X - A \Leftrightarrow \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X$$

- Ένωση:

$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \quad \forall x \in X$$

- Τομή:

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \quad \forall x \in X$$

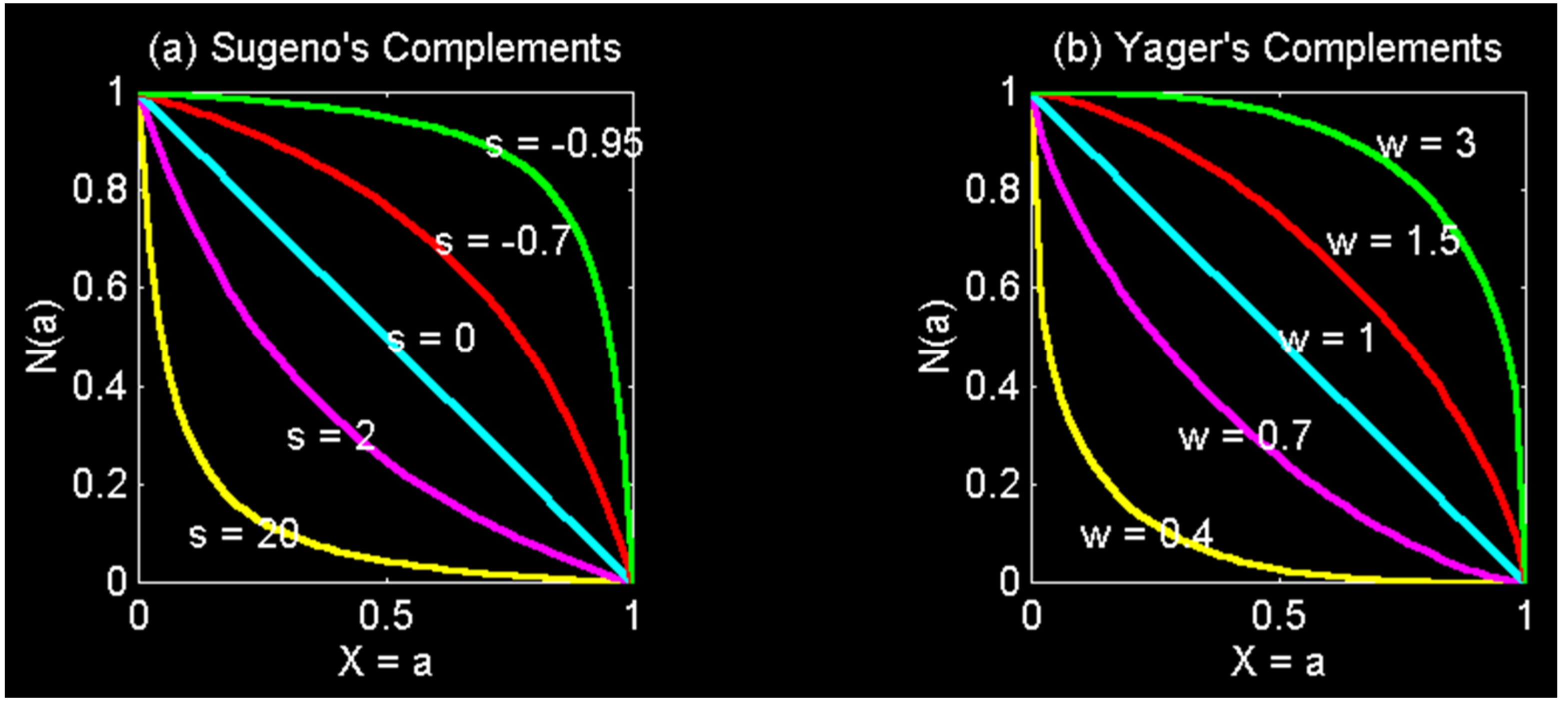
Γενικευμένοι τελεστές: Ασαφές συμπλήρωμα

Sugeno

$$N_s(a) = \frac{1-a}{1+sa}$$

Yager

$$N_w(a) = (1-a^w)^{1/w}$$



Γενικευμένοι τελεστές: Ασαφής τομή: T-norm

• *Απαιτήσεις :*

– Οριακές συνθήκες: $T(0, 0) = 0$, $T(a, 1) = T(1, a) = a$

– Μονοτονία: $T(a, b) < T(c, d)$ αν $a < c$ και $b < d$

– Αντιμεταθετικότητα: $T(a, b) = T(b, a)$

– Προσεταιριστικότητα: $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$

• *Παραδείγματα :*

– **Minimum: $T_m(a, b) = \min(a, b) = a \wedge b$**

– Algebraic product: $T_a(a, b) = ab$

– Bounded product: $T_b(a, b) = \max(0, a+b-1)$

– Drastic product: $T_d(a, b) = \begin{cases} a, & \text{αν } b=1 \\ b, & \text{αν } a=1 \\ 0, & \text{αν } a, b < 1 \end{cases}$

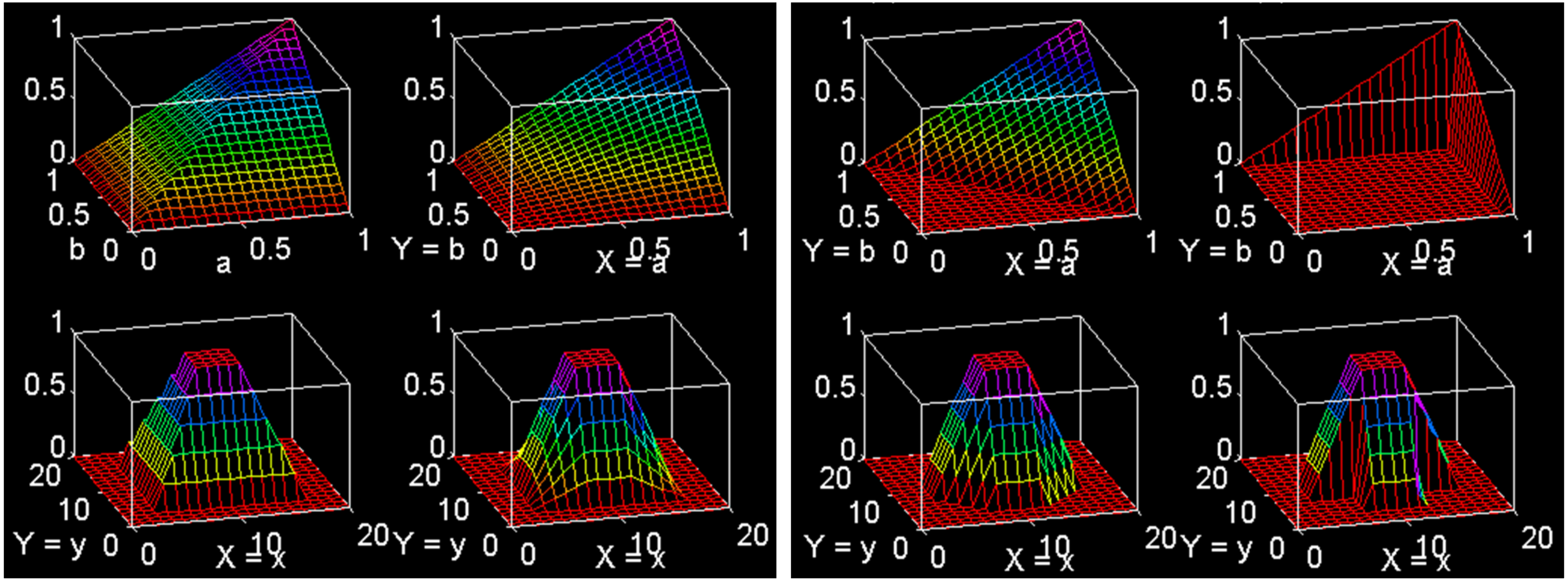
T-norm

Minimum:
$T_m(a, b)$

Algebraic product:
$T_a(a, b)$

Bounded product:
$T_b(a, b)$

Drastic product:
$T_d(a, b)$



Γενικευμένοι τελεστές: Ασαφής ένωση: T-conorm (S-norm)

- *Απαιτήσεις :*
  - Οριακές συνθήκες: $S(1, 1) = 1$, $S(a, 0) = S(0, a) = a$
  - Μονοτονία: $S(a, b) < S(c, d)$ αν $a < c$ και $b < d$
  - Αντιμεταθετικότητα: $S(a, b) = S(b, a)$
  - Προσεταιριστικότητα: $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$
- *Παραδείγματα :*
  - **Maximum: $S_m(a, b) = \max(a, b) = a \vee b$**
  - Algebraic sum: $S_a(a, b) = a + b - ab$
  - Bounded sum: $S_b(a, b) = \min(1, a + b)$
  - Drastic sum: $S_d(a, b) = \begin{cases} a, & \text{αν } b=0 \\ b, & \text{αν } a=0 \\ 1, & \text{αν } a, b > 0 \end{cases}$

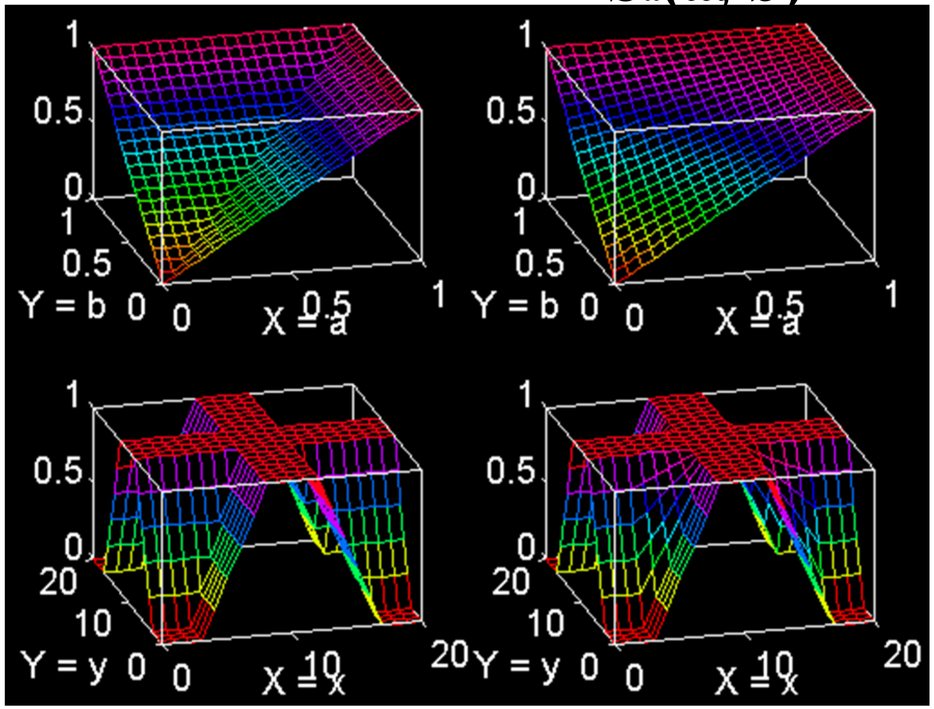
T-conorm (S-norm)

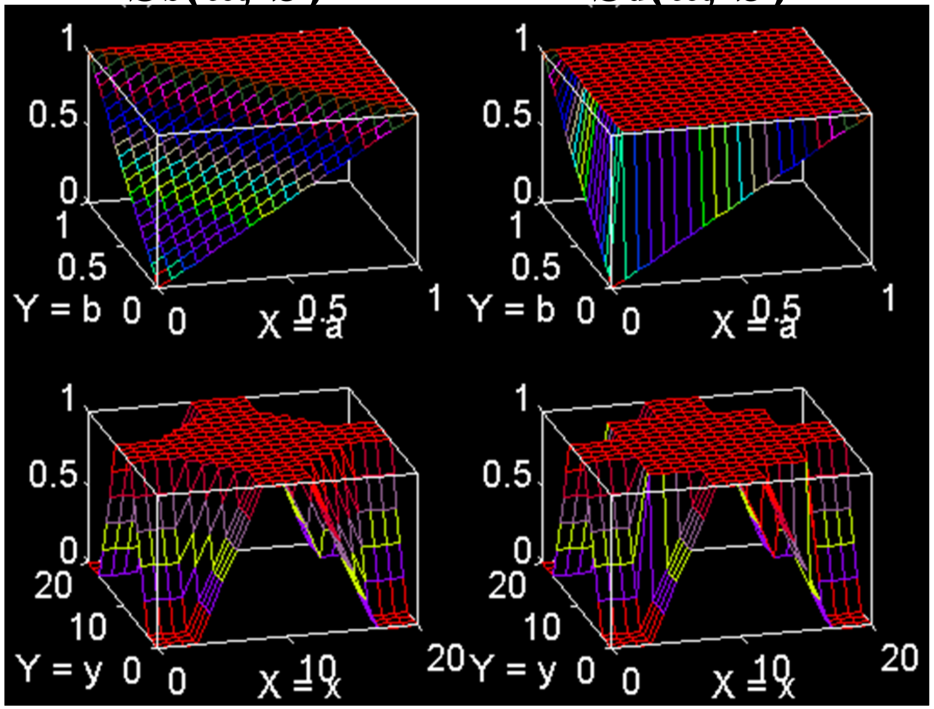
Maximum: $S_m(a, b)$

Algebraic sum: $S_a(a, b)$

Bounded sum: $S_b(a, b)$

Drastic sum: $S_d(a, b)$





Η αρχή της επέκτασης (extension principle)

Ασαφές σύνολο *A* :

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n$$

Απεικόνιση του *A* στο *B* μέσω της *f(x)* :

$$B = \mu_A(x_1)/y_1 + \mu_A(x_2)/y_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/y_n$$

όπου $y_i = f(x_i)$, $i = 1,\ldots,n$.

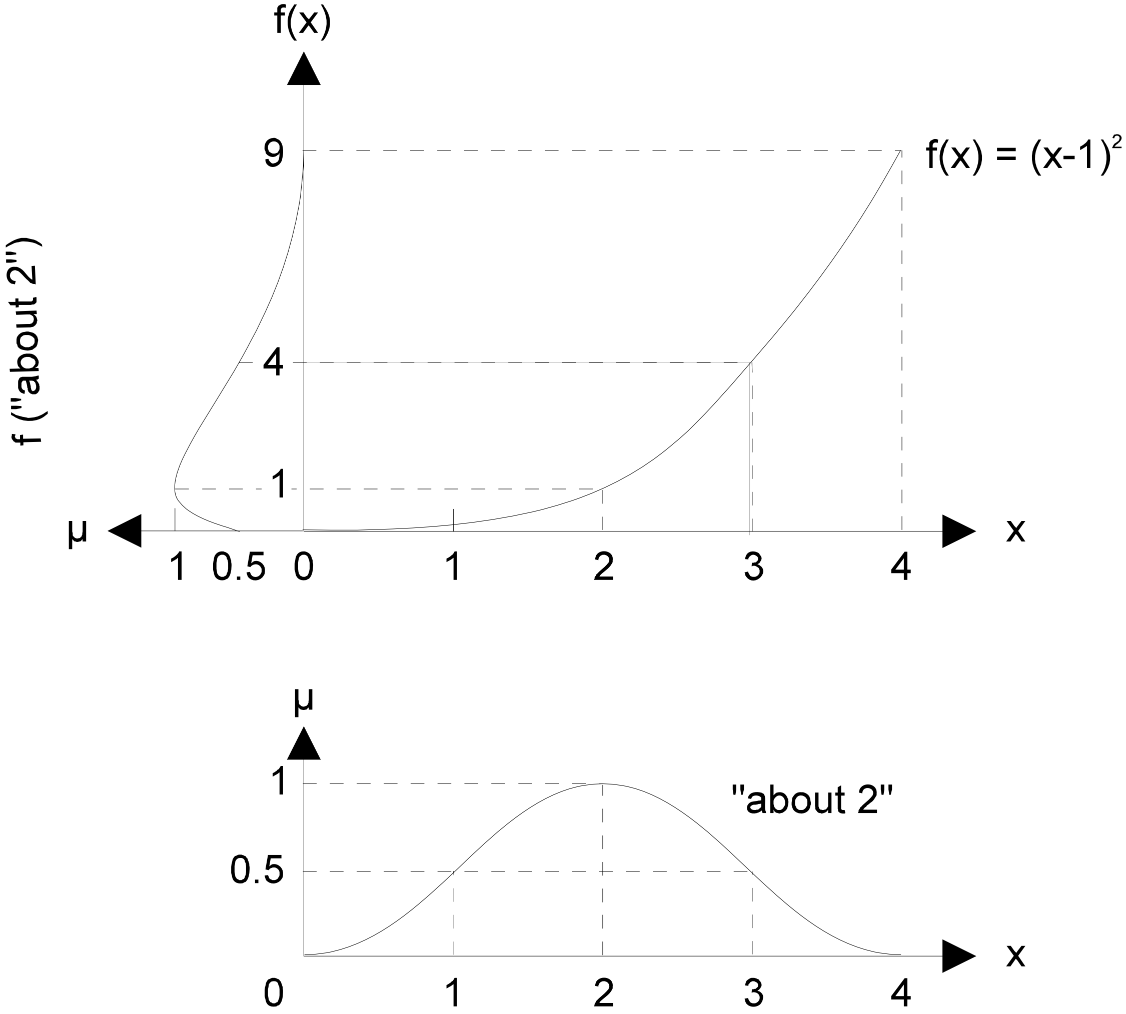
***f(χ)* μονοσήμαντη**

$$\mu_B(y) = \max_{x = f^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

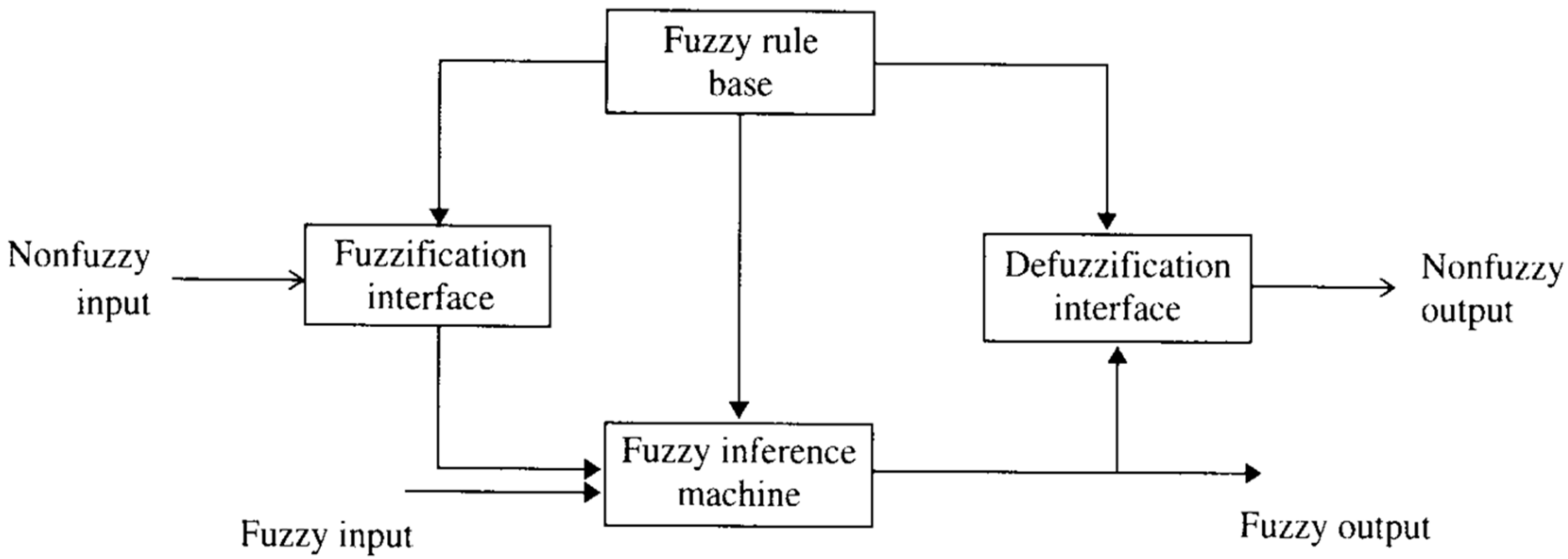
Η αρχή της επέκτασης (extension principle)

Από την ασαφή παράμετρο "x is about 2" στην "f is about f(2)" για f(x)= (x-1)^2.

Παράδειγμα: Τριγωνικό με f(x)=x^2



Συστήματα ασαφούς επαγωγής
Fuzzy Inference Systems (FIS)



Συστήματα ασαφούς επαγωγής
Fuzzy Inference Systems (FIS)

–Ασαφοποίηση (υπολογισμός βαθμών συμμετοχής)

–Αποτίμηση ασαφών κανόνων

–Αποασαφοποίηση (υπολογισμός αριθμητικών τιμών)

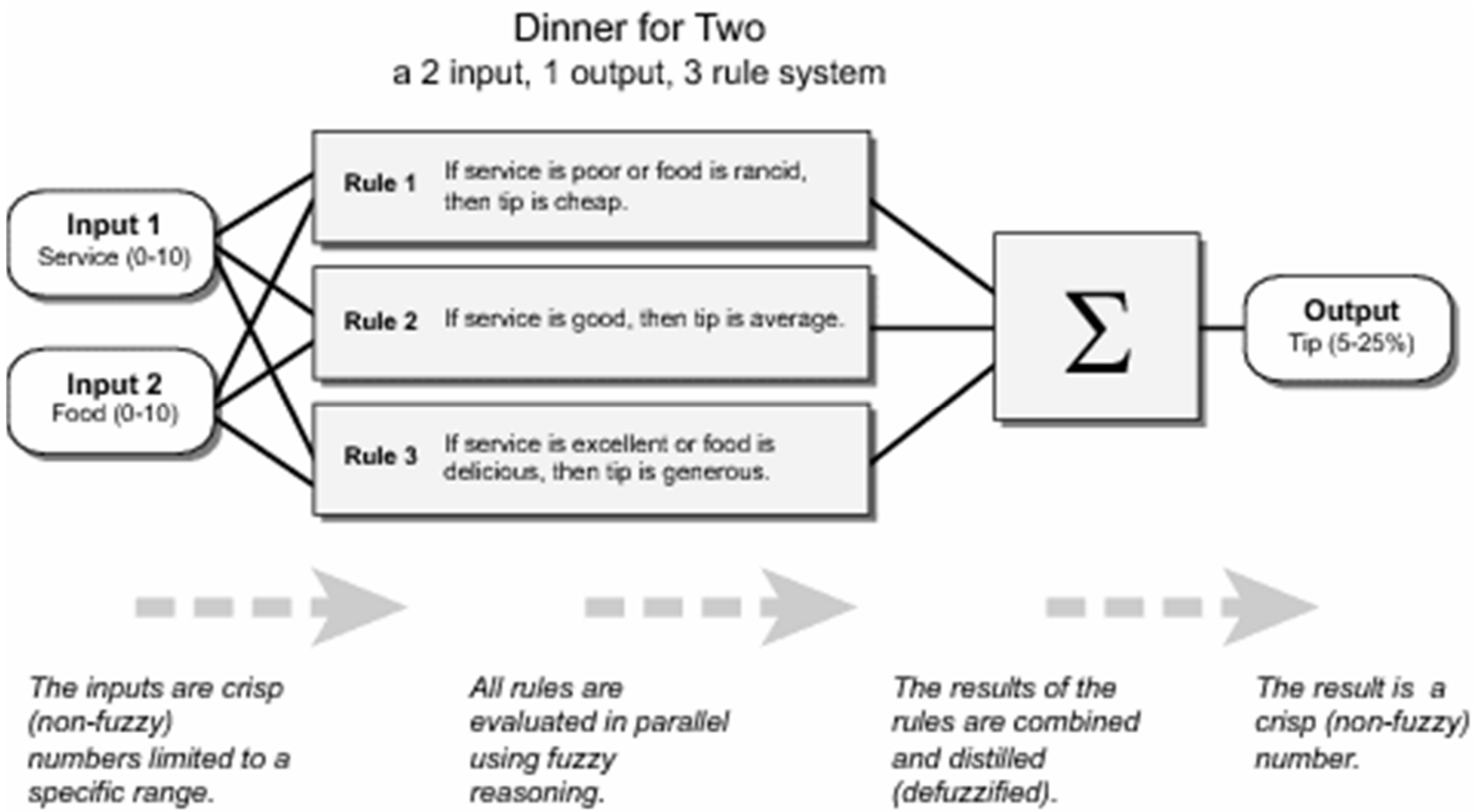
Ασαφείς κανόνες

If x is A then y is B

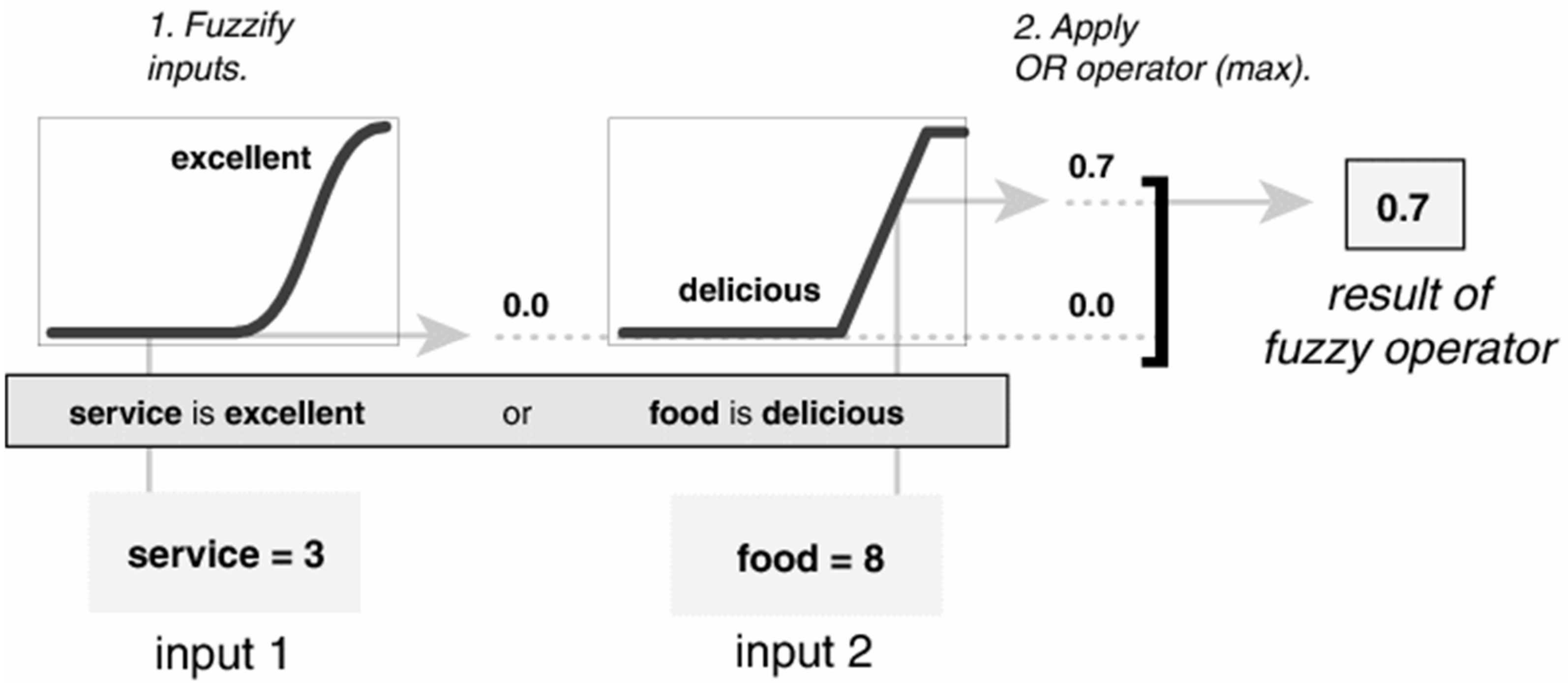
<u>Παραδείγματα:</u>

- **Εάν η πίεση είναι υψηλή, τότε ο όγκος είναι μικρός.**
- **Εάν η τομάτα είναι κόκκινη, τότε είναι ώριμη.**
- **Εάν η ταχύτητα είναι υψηλή, τότε πίεσε το φρένο ελαφρά.**

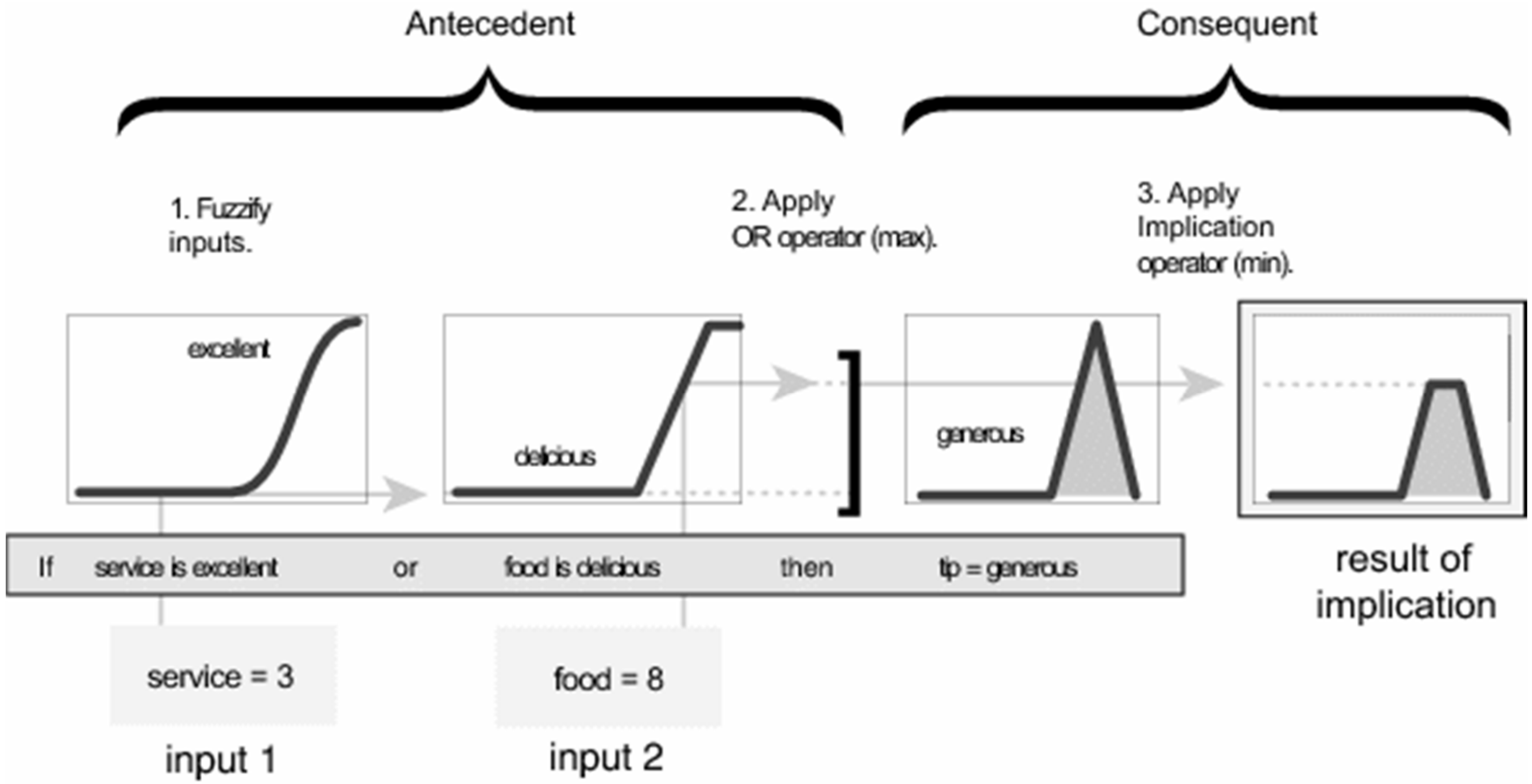
Διαδικασία ενός FIS: Συνολικά



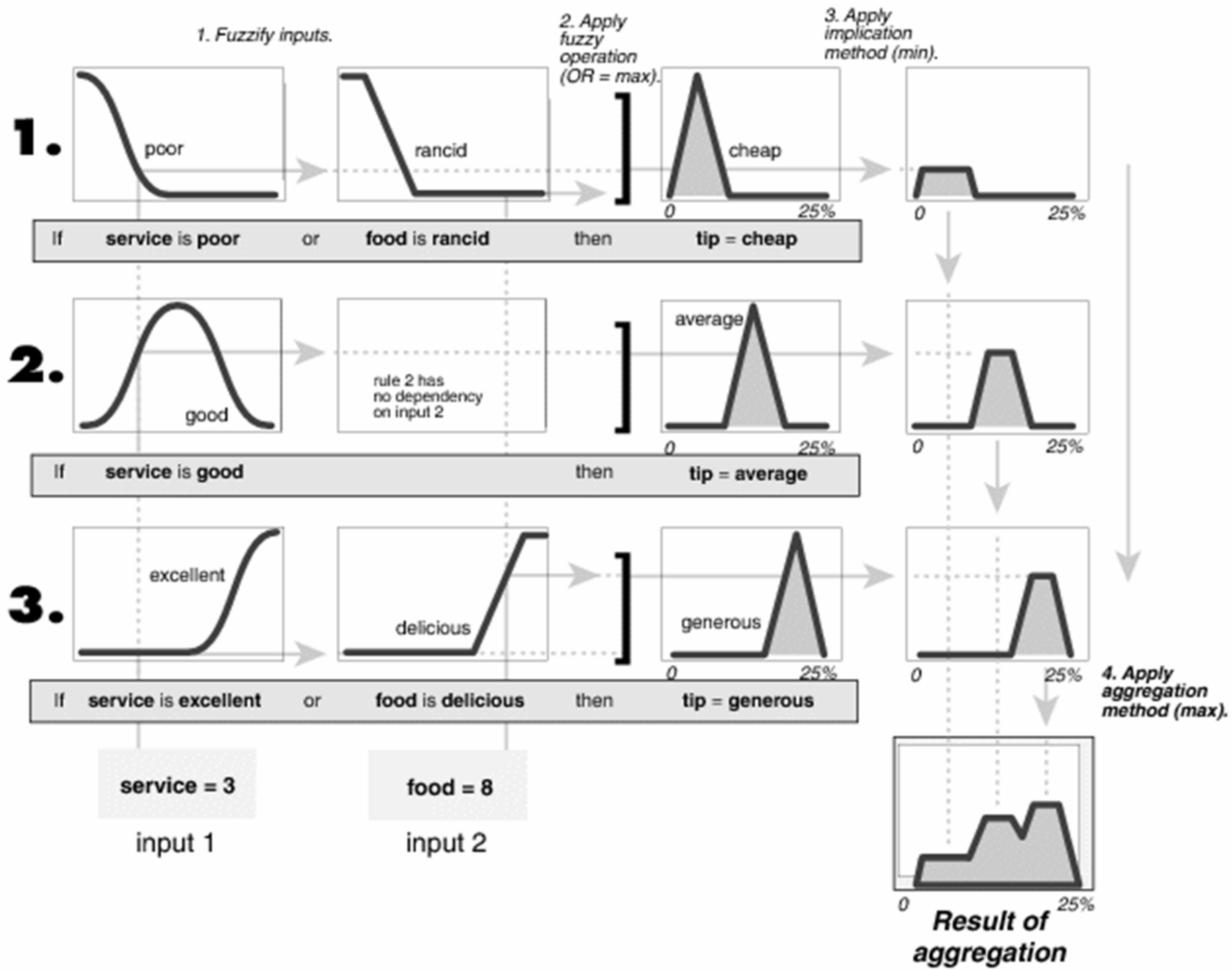
Διαδικασία ενός FIS: antecedents



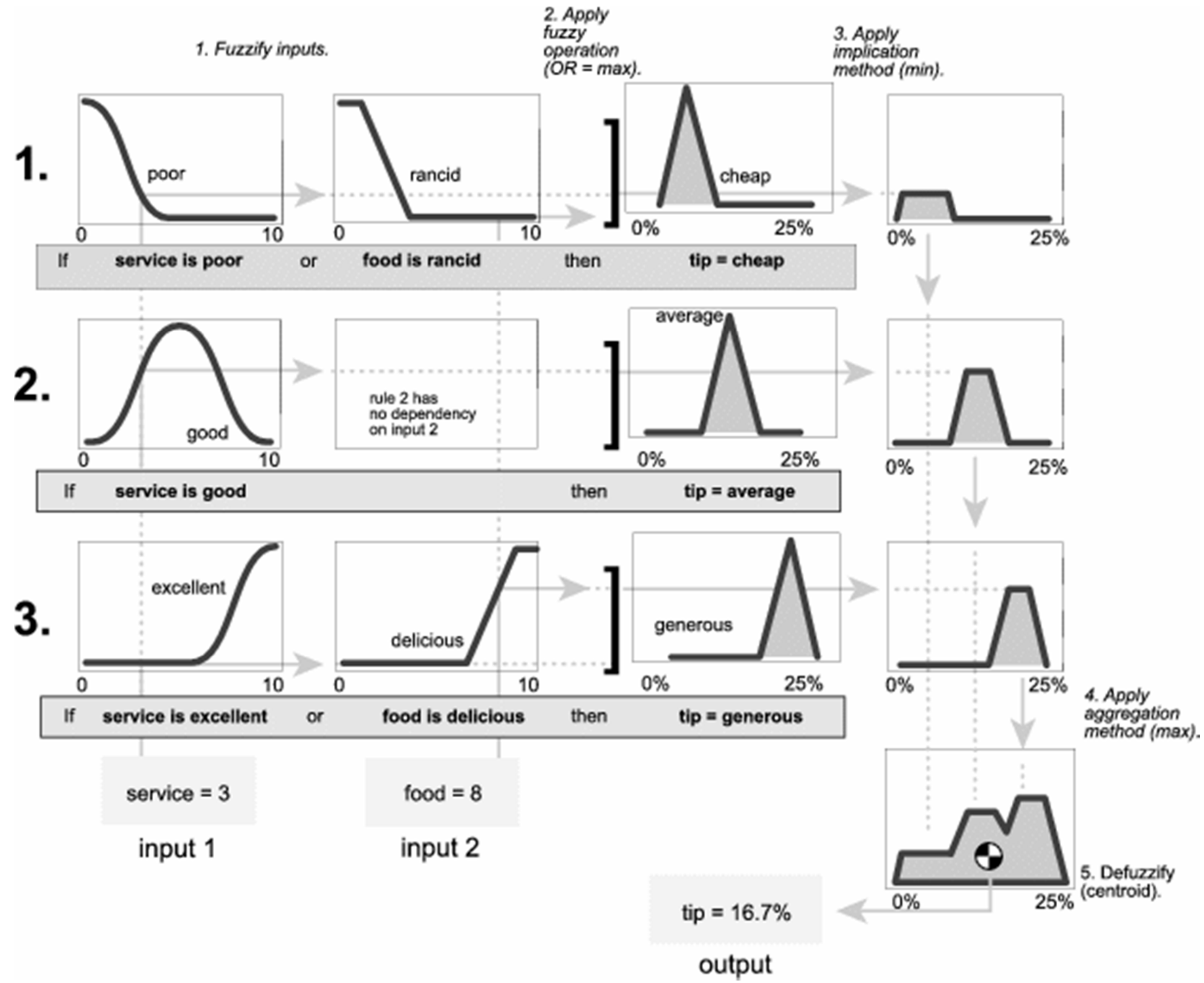
Διαδικασία ενός FIS: consequent



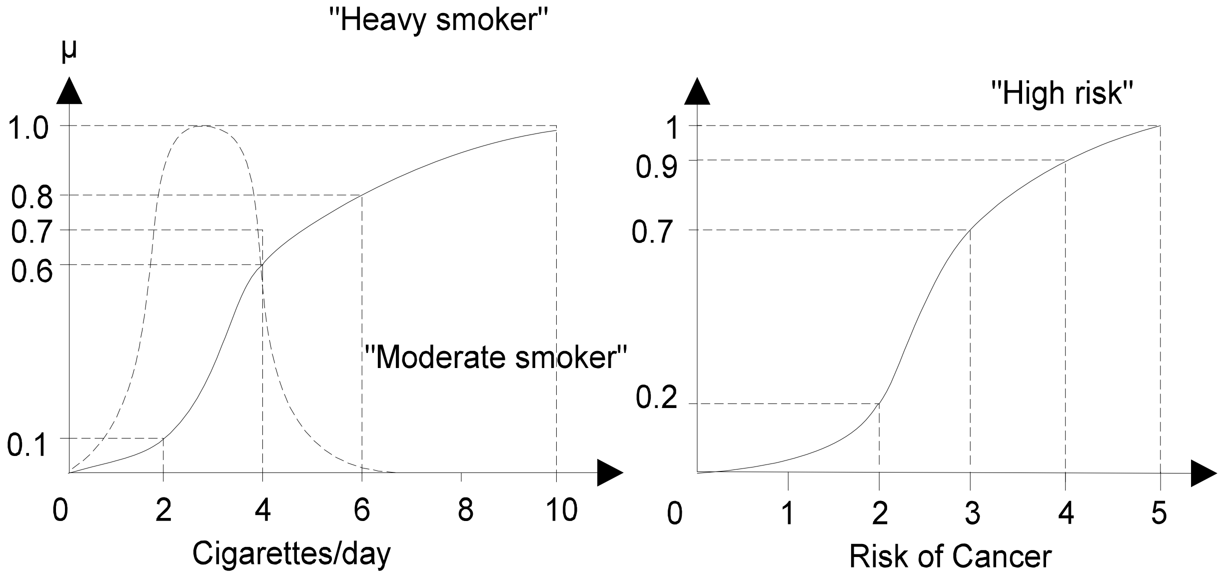
Διαδικασία ενός FIS: Συνδυασμός



Διαδικασία ενός FIS: Τελικά



Αν είσαι **βαρύς καπνιστής** έχεις **μεγάλο κίνδυνο** καρκίνου



(a)

Τι συνεπάγεται αυτό το FIS για κάποιον που καπνίζει 6 τσιγάρα την ημέρα;

Cigarettes \ Risk	1	2	3	4	5
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1
4	0.0	0.2	0.6	0.6	0.6
6	0.0	0.2	0.7	0.8	0.8
10	0.0	0.2	0.7	0.9	1.0

(b)

Συστήματα ασαφούς επαγωγής (Mamdani)

- Ένας κανόνας με μία υπόθεση

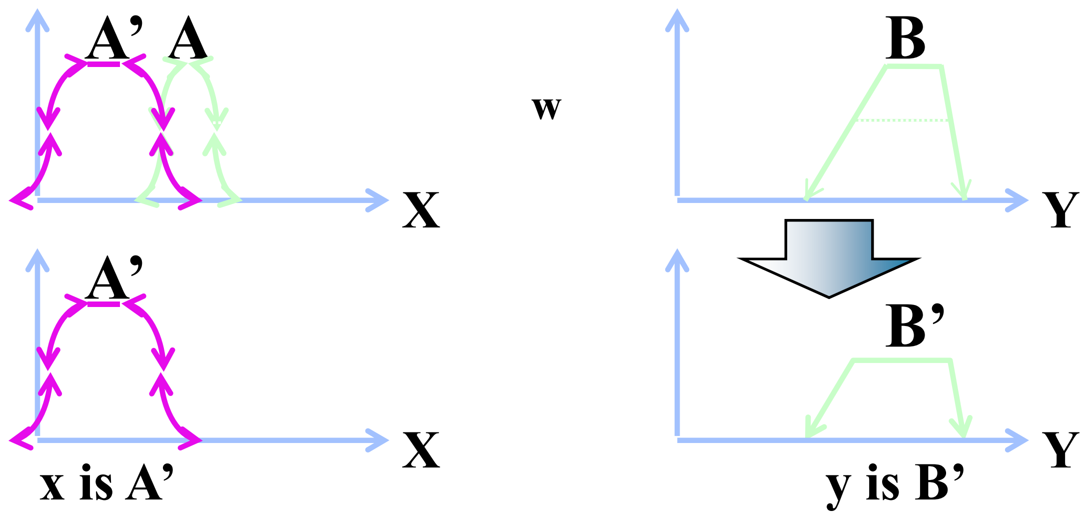
  Κανόνας: if x is A then y is B

  Γεγονός: x is A’

  Συμπέρασμα: y is B’

$$B' = A' \circ R$$

$$\mu_{B'}(y) = [\vee_x (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x))] \wedge \mu_B(y)$$
$$= w \wedge \mu_B(y)$$



Συστήματα ασαφούς επαγωγής

- Ένας κανόνας με πολλαπλές υποθέσεις

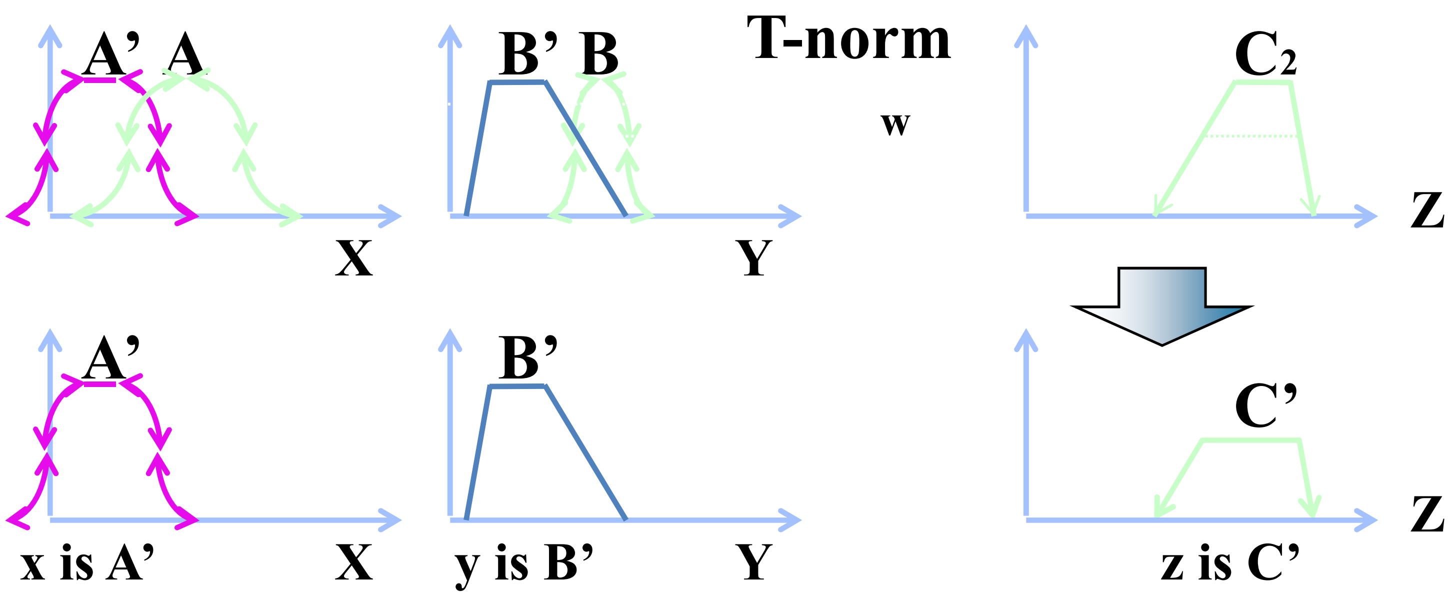
  Κανόνας: if x is A and y is B then z is C

  Γεγονός: x is A’ and y is B’

  Συμπέρασμα: z is C’

$$C' = (A' \times B') \circ R$$

$$\mu_{C'}(z) = (w_1 \wedge w_2) \wedge \mu_C(z)$$



Matlab

FIS Editor:

–Age of pipes [0-100, 4 categories, gauss] – leakage vulnerability [h, m, l], triangular

–Set “enough” rules

–View rules and surface

–Change defuzzification rules (e.g. mom)

–Save FIS, look at structure

–a = readfis(testfis');

–evalfis([…], a]

–Fuzzy(testfis)

–Add another antecedent (e.g. pressure)

–Create more complex rules: what if pressure is low and age is old?

Demo toolbox fuzzy

–control of water level in tank

–traffic patterns with clustering

Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Η παρουσίαση χρησιμοποίησε υλικό, σχήματα και παραδείγματα από αντίστοιχες παρουσιάσεις των:
  - Klir and Yuan (με σχήματα από το βιβλίο τους: Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications)
  - Παρουσίαση του Εργαστηρίου Ευφυών Υπολογιστικών Συστημάτων του ΕΜΠ (Σχολή ΗΜ)
  - N. Kasabov Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering, MIT Press, 1996
- Καθώς και από το MATLAB Fuzzy Logic Toolbox Manual