Σημειώσεις Υδρομετεωρολογίας
Αθήνα, 2011

Απλές φυσικές αρχές για πολύπλοκα συστήματα

Δημήτρης Κουτσογιάννης

Τμήμα Υδατικών Πόρων και Μηχανικής Περιβάλλοντος
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
(dk@itia.ntua.gr, http://www.itia.ntua.gr/dk/)

Συνηθισμένες παρανοήσεις σχετικά με τη φυσική—και οι διορθώσεις τους

- Παρανοήσεις:
  - Οι νόμοι των πολύπλοκων φυσικών συστημάτων μπορούν να εξαχθούν από τη σύνθεση λεπτομερών απεικονίσεων των στοιχείων τους (αναγωγική προσέγγιση).
  - Οι φυσικοί νόμοι εκφράζονται μαθηματικά μόνο με εξισώσεις.
  - Οι φυσικοί νόμοι είναι αιτιοκρατικοί και μηχανιστικοί.
- Διορθώσεις:
  - Η αρχή της φειδούς.
  - Αρχές του λογισμού μεταβολών και η μέθοδος της ακραιοποίησης.
  - Αναγνώριση του θεμελιώδους χαρακτήρα της αβεβαιότητας και χρήση στοχαστικών προσεγγίσεων.

Τι είναι η αρχή της φειδούς?

- Μια αρχή που μας συμβουλεύει να προτιμάμε την πιο απλή θεωρία μεταξύ εκείνων που ταιριάζουν στα δεδομένα εξίσου καλά.
- Εναλλακτικά ονόματα: **αρχή της απλότητας, αρχή της οικονομίας, ξυράφι του Ockham**.
- Παράδειγμα ενός φειδωλού φυσικού νόμου:
  - Οι σκύλοι γαυγίζουν.
- Παραδείγματα μη φειδωλών φυσικών νόμων:
  - Οι μαύροι και οι λευκοί σκύλοι γαυγίζουν. Όπως επίσης και αυτοί που έχουν βούλες.
  - Οι σκύλοι γαυγίζουν κάθε Δευτέρα, Τετάρτη και Κυριακή. Μετά τις 11 και πριν τις 3.
- Διαισθητικά, ο παραπάνω νόμος δεν αποκλείει πως ένας συγκεκριμένος σκύλος είναι βουβός.
  - Δεν θα πρέπει να τον κατανοήσουμε ως «δεν υπάρχει σκύλος που δεν γαυγίζει».
- Με άλλα λόγια, οι νόμοι των πολύπλοκων συστημάτων (π.χ. το βιολογικό σύστημα «σκύλος») έχουν αναγκαστικά πιθανοτική φύση:
  - «Οι σκύλοι γαυγίζουν» σημαίνει «κάθε σκύλος είναι πολύ πιθανό να γαυγίζει».

Η αποτυχία να αναγνωριστεί ο πιθανοτικός χαρακτήρας της αρχής της φειδούς στα πολύπλοκα συστήματα μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση (βλ. π.χ. Courtney and Courtney, 2008, και το παράδειγμά τους «όλα τα κοράκια είναι μαύρα»).

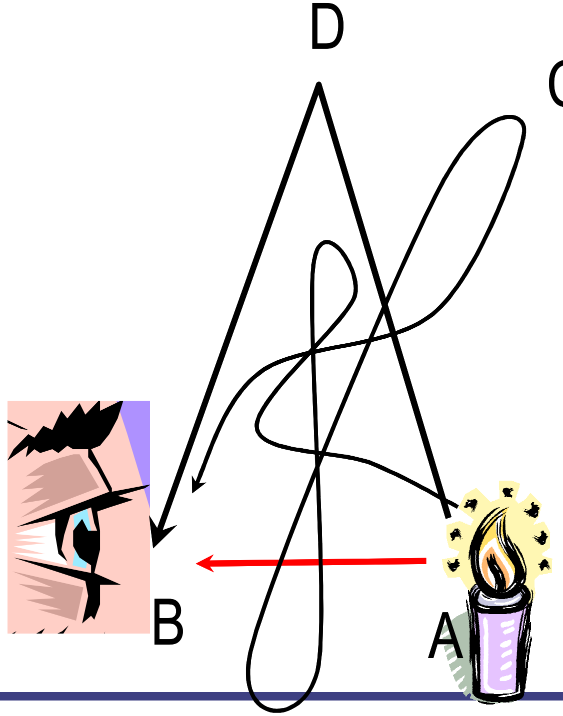
Αρχή της φειδούς: ιστορική αναδρομή

- Αριστοτέλης (384–322 BC):
  - [Αναλυτικά Ύστερα, I, 25] « *Ἔστω γὰρ αὕτη ἡ ἀπόδειξις βελτίων τῶν ἄλλων τῶν αὐτῶν ὑπαρχόντων, ἡ ἐξ ἐλαττόνων αἰτημάτων ἢ υποθέσεων ἢ προτάσεων.* »
  - [Περί Ουρανού, III, 4] «*Φανερὸν ὅτι μακρῷ βέλτιον πεπερασμένας ποιεῖν τὰς ἀρχὰς, καὶ ταύτας ὡς ἐλαχίστας πάντων γε τῶν αὐτῶν μελλόντων δείκνυσθαι, καθάπερ ἀξιοῦσι καὶ οἱ ἐν τοῖς μαθήμασιν.*»
- Φιλόσοφοι του Μεσαίωνα: Robert Grosseteste (περ. 1168-1253), Thomas Aquinas (περ. 1225-1274), William of Ockham (περ. 1285-1347, «*Η πολυμορφία δεν πρέπει να τίθεται άνευ ανάγκης*»).
- Nicolaus Copernicus (1473-1543), Galileo Galilei (1564-1642), Isaac Newton (1642-1727)—όλοι χρησιμοποίησαν την αρχή της φειδούς στην ανάπτυξη των θεωριών τους.
- Η διατύπωση του Albert Einstein για την αρχή της φειδούς: «Όλα πρέπει να φτιάχνονται όσο πιο απλά γίνεται, αλλά όχι απλούστερα».

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την ιστορία και τη φιλοσοφία της αρχής της φειδούς καθώς και την επιστημονική μέθοδο, βλ. Gauch (2003).

Η αρχή της φειδούς είναι επιστημολογική ή οντολογική?

- Ο Ockham έθεσε την αρχή της φειδούς ως επιστημολογική αρχή για την επιλογή της καλύτερης θεωρίας.
- Όμως, οι προγενέστεροι φιλόσοφοι, από τον Αριστοτέλη μέχρι τον Grosseteste είχαν ερμηνεύσει την αρχή της φειδούς ως οντολογική αρχή και ως εκ τούτου περίμεναν πως η Φύση είναι απλή.
- Ένα απλό παράδειγμα μπορεί να μας βοηθήσει να δούμε την οντολογική βάση της αρχής: Το φως ακολουθεί τη συντομότερη διαδρομή από το A στο B (κόκκινη γραμμή) και όχι κάποια άλλη πιο πολύπλοκη (π.χ. τις μαύρες γραμμές ACB, ADB)?
- Όμως τι σημαίνει «απλούστερη»;



Αν η Φύση δεν ήταν φειδωλή (π.χ. αν τα οι διαδρομές ACB, ADB υλοποιούνταν) θα ήταν δύσκολο να την καταλάβουμε και η ζωή μας θα ήταν δύσκολη.

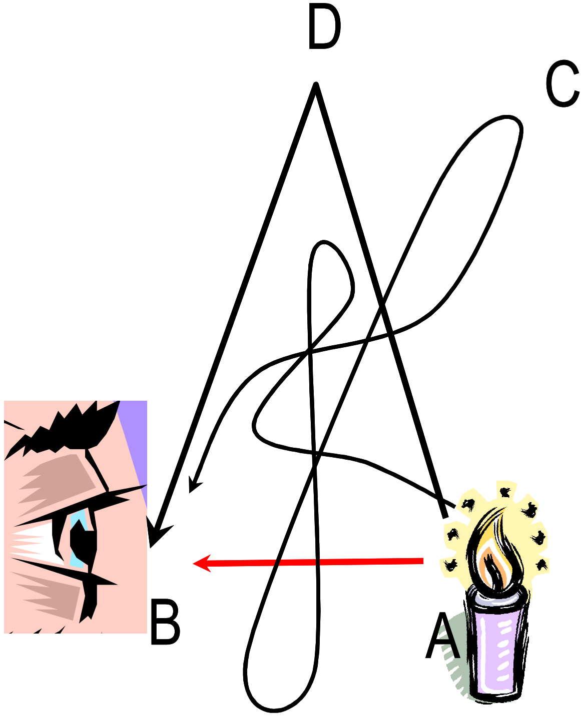
Ποσοτικοποίηση της απλότητας

- Η παραδοσιακή προσέγγιση στη φυσική βασίζεται στην κατάστρωση εξισώσεων, οι οποίες εκφράζουν νόμους διατήρησης. Αυτοί οι νόμοι όμως διέπουν μόνο τα παρακάτω μεγέθη:
  - Μάζα (βαθμωτή εξίσωση),
  - Ορμή (διανυσματική εξίσωση),
  - Στροφορμή (διανυσματική εξίσωση),
  - Ενέργεια (βαθμωτή εξίσωση),
  - Ηλεκτρικό φορτίο (βαθμωτή εξίσωση).
- Παρόλα αυτά, για να βρεθούν καταστάσεις ή διαδρομές οι οποίες είναι «**όσο το δυνατόν απλούστερες**» φαίνεται πιο φυσικό να διατυπώσουμε το πρόβλημα σε όρους βελτιστοποίησης από ότι το να χρησιμοποιήσουμε εξισώσεις.
- Μαθηματικά, είναι πιο ισχυρό να ακραιοποιούμε, απ' ότι να εξισώνουμε:
  - Ένα σύστημα εξισώσεων “$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s}) = \mathbf{0}$” μπορεί να επιλυθεί μόνο αν ο αριθμός των εξισώσεων ισούται με τον αριθμό των αγνώστων.
  - Μία και μοναδική έκφραση μεγιστοποίησης, όπως π.χ. «$f(\boldsymbol{s}) = \max$» μπορεί να επιλυθεί ασχέτως από τον αριθμό των αγνώστων (είναι ισοδύναμη με τόσες εξισώσεις όσες ακριβώς απαιτούνται).

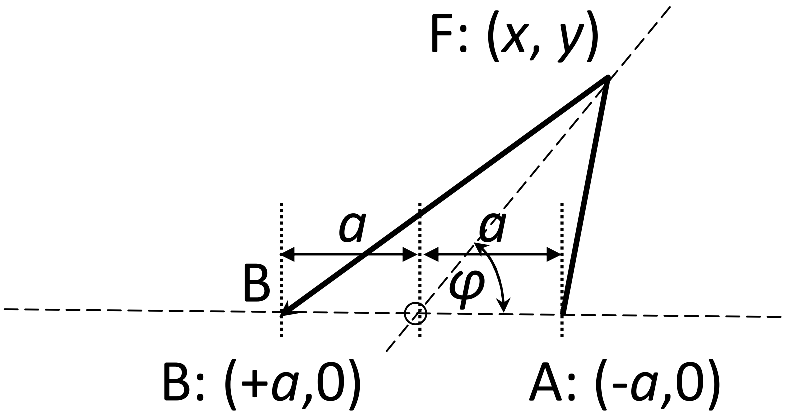
Η Φύση είναι **εξτρεμίστρια**—όχι **εξισώτρια**.

Η απλότητα της τροχιάς του φωτός: Απόπειρα 1

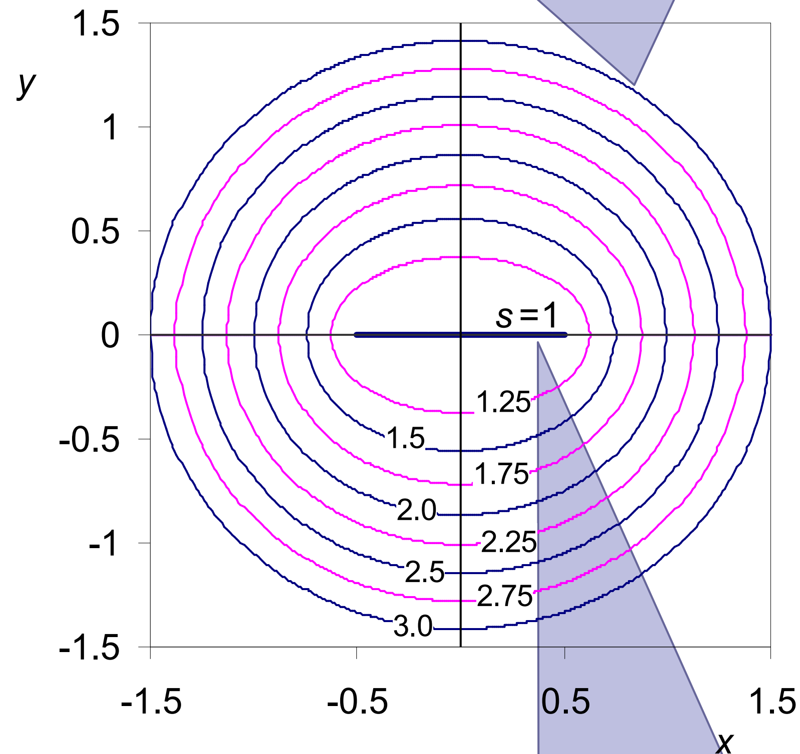
- Το φως ακολουθεί τη μικρότερη δυνατή διαδρομή από το A στο B.
  - Ένας φειδωλός νόμος για μία φειδωλή φυσική συμπεριφορά.
  - Η περαιτέρω διερεύνηση θα δείξει πως αυτό δεν είναι σωστό (η διατύπωση αυτή είναι απλούστερη από την «απλούστερη δυνατή»).



Η τροχιά του φωτός: Ποσοτικοποίηση της απόπειρας 1



Contours of the distance $s(x, y)$ assuming a = 0.5



Line of minimum distance $s(x, y)$ = 1
Infinite points F essentially describing the same path

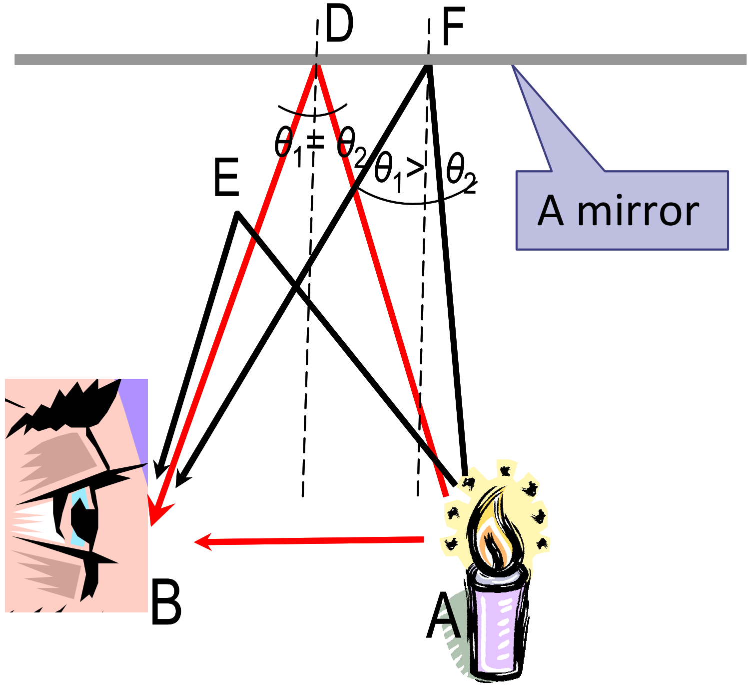
- Υποθέτουμε πως το φως μπορεί να ταξιδέψει από το Α στο Β, κατά μήκος μιας τεθλασμένης γραμμής με ένα σημείο θλάσης F με συντεταγμένες (x, y).
  Αυτό δεν είναι περιοριστικό: μπορούμε να προσθέσουμε και ένα δεύτερο, τρίτο, ... σημείο θλ (εργασία για το σπίτι).
- Η διαδρομή που διανύει το φως είναι
  $s(x, y)$ = AF + FB, όπου:

$$\mathrm{AF} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\mathrm{FB} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

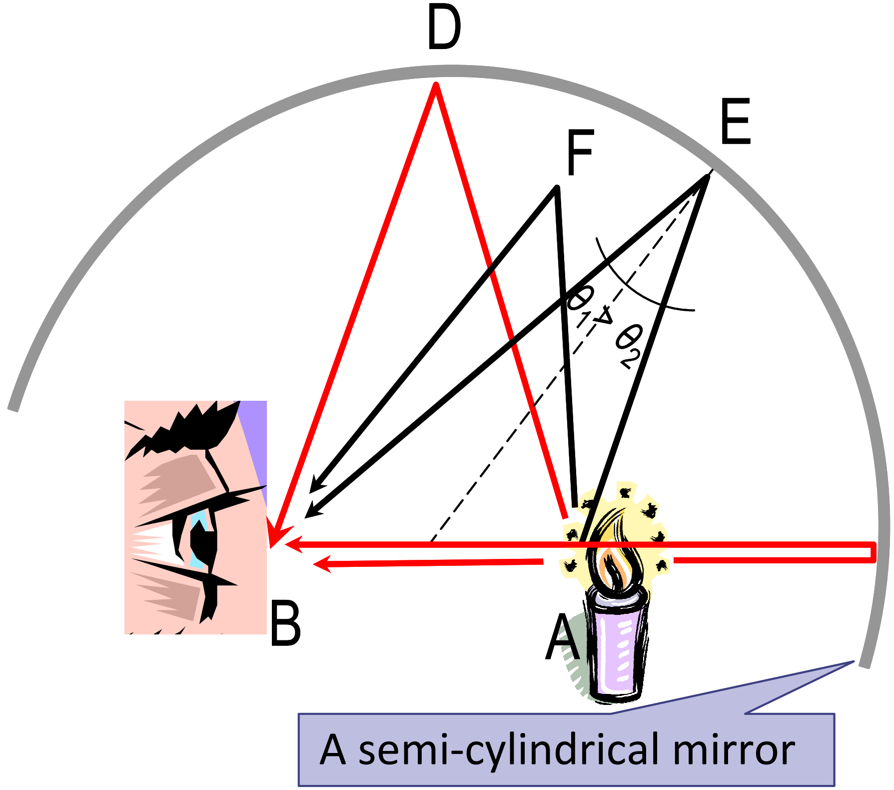
Η απλότητα της τροχιάς του φωτός: Απόπειρα 2

- Με την παρουσία ενός επίπεδου κατόπτρου, το φως ακολουθεί και τις δύο κόκκινες διαδρομές από το A στο B (AB, ADB)—αλλά καμία από τις μαύρες (π.χ. AEB, AFB).
- Η προηγούμενη διατύπωση του νόμου δεν ισχύει.
- Αντικατάσταση: Το φως ακολουθεί τη μικρότερη διαδρομή, αλλά όταν υπάρχει κάτοπτρο, ακολουθεί επίσης μια δεύτερη διαδρομή εξαιτίας της αντανάκλασης του στο κάτοπτρο, τέτοια ώστε η γωνία πρόσπτωσης του φωτός να ισούται με την γωνία ανάκλασης του.
  - Ένας μακροσκελής νόμος, όχι φειδωλός (βασισμένος σε "εξισωτική" λογική…).
- Παρατηρούμε ότι το κάτοπτρο έθεσε έναν ανισωτικό περιορισμό σε πιθανές διαδρομές (εμποδίζοντας στο φως να περάσει μέσα από αυτόν) και έτσι δημιουργήθηκε ένα δεύτερο ελάχιστο στο πρόβλημα της «συντομότερης διαδρομής».
- **Οι διαδρομές που ακολουθεί το φως έχουν το ελάχιστο μήκος (είτε ολικό είτε τοπικό ελάχιστο)**.
- Φειδωλός νόμος—Αρχή του Ήρωνα του Αλεξανδινού (~1ος αι. π.Χ.)—αλλά όχι τέλειος.



Η απλότητα της τροχιάς του φωτός: Απόπειρα 3

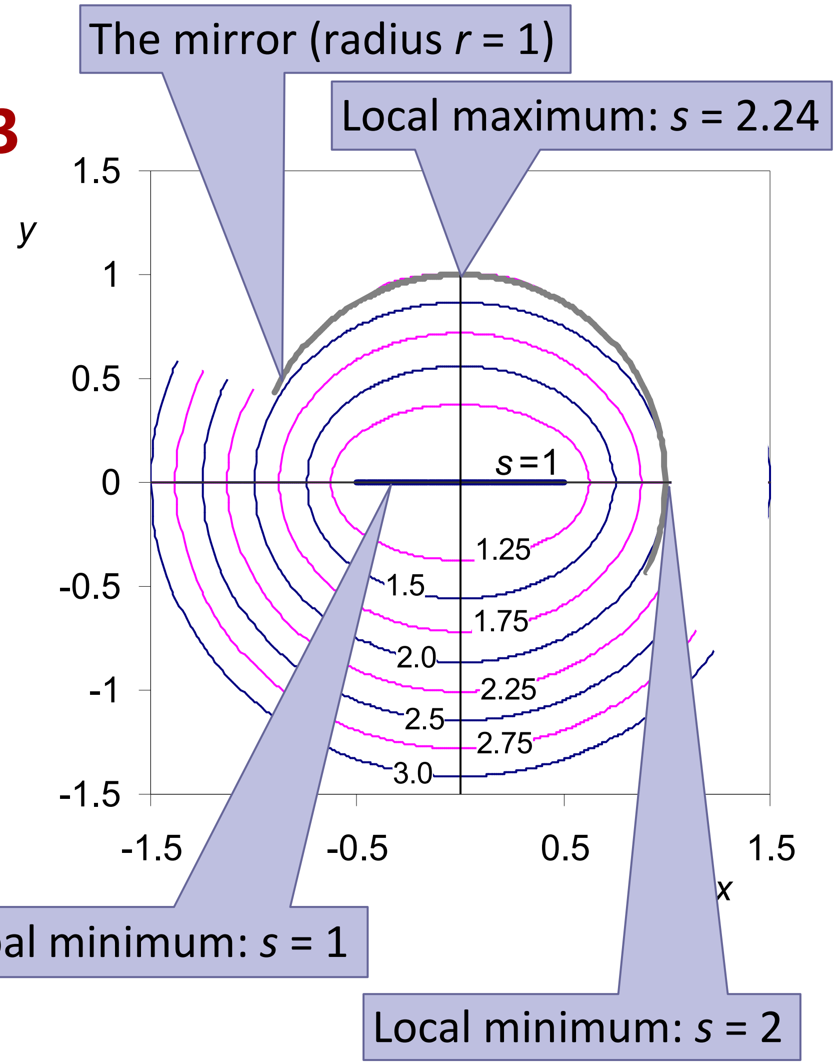
- Αν αντικαταστούμε το επίπεδο κάτοπτρο με ένα κυλινδρικό, τότε το φως ακολουθεί τρεις διαδρομές από το A στο B (τις κόκκινες γραμμές AB, ACB, ADB—αλλά όχι τις μαύρες, π.χ. AEB, AFB).
- Από αυτές, η AB είναι το ολικό ελάχιστο, η ACB είναι τοπικό ελάχιστο και η ADB είναι τοπικό μέγιστο.
- **Οι διαδρομές που ακολουθεί το φως έχουν ακραίο μήκος** (είτε ολικό είτε τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο)—εξακολουθεί να μην είναι τέλειος φυσικός νόμος

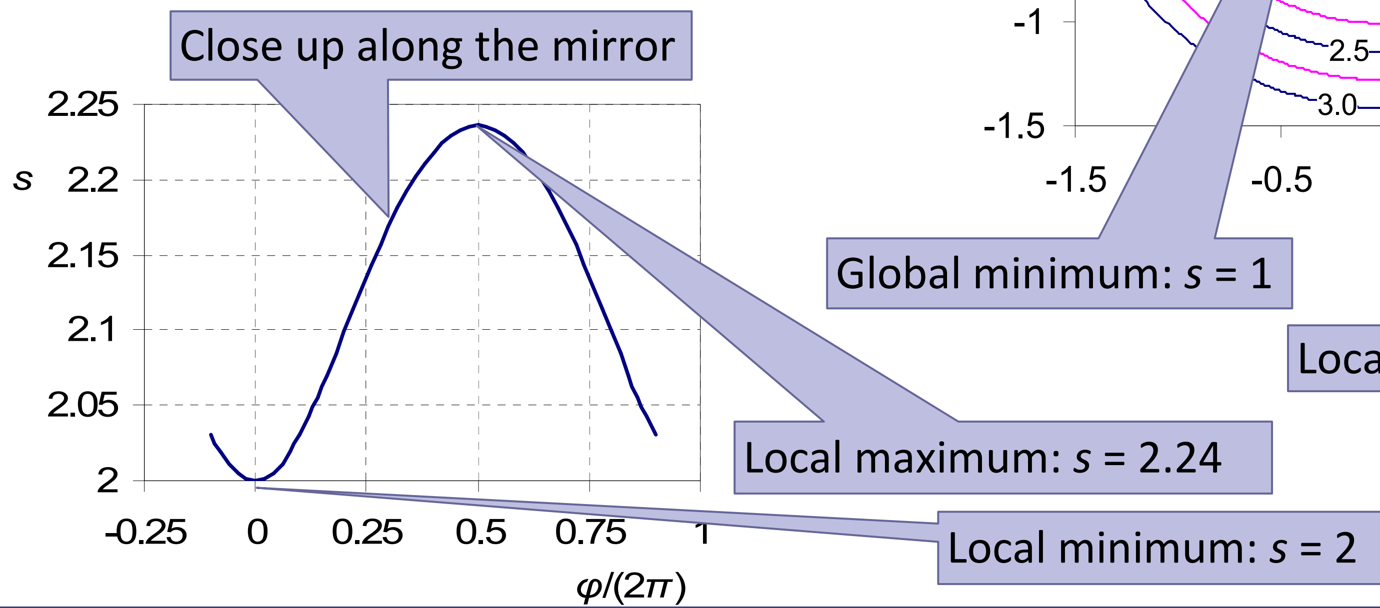


Η Φύση είναι ένας πολύ ικανός ακραιοποιητής, καθώς βρίσκει όλα τα τοπικά ελάχιστα και μέγιστα (αν τοποθετήσουμε κι άλλα κάτοπτρα θα δούμε ακόμη περισσότερες διαδρομές να δημιουργούνται).
Αν δεν το παρατηρήσουμε αυτό τότε είναι πολύ δύσκολο να εξηγήσουμε τι ακριβώς συμβαίνει, όπως δείχνει η διαμάχη των Gaertner (2003) και Schoemaker (2003).

Η τροχιά του φωτός: Ποσοτικοποίηση της απόπειρας 3

- Το κάτοπτρο εισάγει έναν ανισωτικό περιορισμό στη βελτιστοποίηση: Το σημείο F δεν μπορεί να βρίσκεται πίσω από το κάτοπτρο.
- Εμφανίζονται δύο σημεία τοπικών βέλτιστων στην επιφάνεια του κατόπτρου (δηλαδή επί της καμπύλης, όπου ο περιορισμός είναι δεσμευτικός)





Η απλότητα της τροχιάς του φωτός: Απόπειρα 4

- Το φαινόμενο της διάθλασης καθιστά σαφές ότι το φως δεν ακολουθεί πάντα τη συντομότερη (ευθύγραμμη) διαδρομή.
- Αυτό σχετίζεται με το ότι η ταχύτητα του φωτός στα υγρά είναι μικρότερη απ’ όσο στον αέρα.
- Ο χρόνος που κάνει το φως για να φτάσει στο σημείο B γίνεται ελάχιστος κατά μήκος της τεθλασμένης γραμμής ACB και όχι κατά μήκος της ευθείας AB. Το σημείο C καθορίζεται έτσι, ώστε να ελαχιστοποιείται ο συνολικός χρόνος διαδρομής. Αν θεωρήσουμε τον άξονα x στο επίπεδο του νερού (έτσι ώστε $x_C = 0$) και συμβολίσουμε με c_A και c_B την ταχύτητα του φωτός στο υγρό και στον αέρα, αντίστοιχα, τότε ο χρόνος διαδρομής του φωτός είναι:

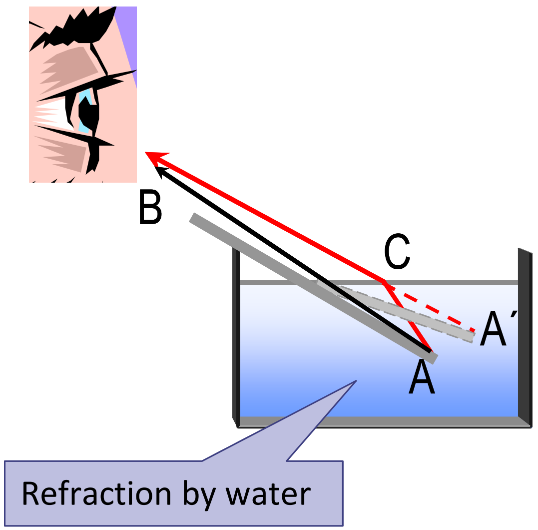
$$t_{ACB} = \frac{\sqrt{(x_A - x_c)^2 + y_A{}^2}}{c_A} + \frac{\sqrt{(x_c - x_b)^2 + y_B{}^2}}{c_B}$$

- Η ακραιοποίηση του t_{ACB} δίνει:

$$\frac{1}{c_A}\frac{x_A - x_c}{\sqrt{(x_A - x_c)^2 + y_A{}^2}} = \frac{1}{c_B}\frac{x_C - x_B}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + y_B{}^2}}$$

(παρατήρηση: τα δεξιά κλάσματα σε κάθε πλευρά της ισότητας είναι τα ημίτονα των γωνιών πρόσπτωσης και διάθλασης).

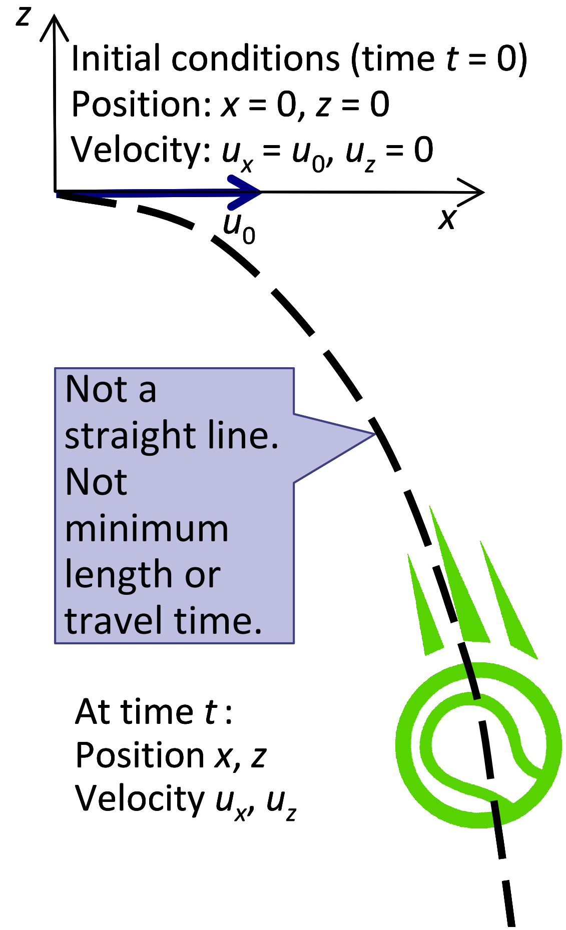
- Τελικός νόμος (Αρχή του Fermat, ακραιοποιημένη—αντί για ελάχιστη):
Το φως ακολουθεί τις διαδρομές που απαιτούν ακραίο χρόνο.



Η Φύση είναι πραγματικά φειδωλή (οντολογική φειδώ) .
Ο νόμος είναι φειδωλός (επιστημολογική φειδώ), αντανακλώντας τη φειδώ της Φύσης.

Γενίκευση στην τροχιά ενός φορτίου
Η αρχή της ακραίας (στάσιμης) δράσης

- Μεγέθη που υπεισέρχονται:
  - Δυναμική ενέργεια: $V = m\,g\,z$;
  - Κινητική ενέργεια: $T = (1/2)m\,u^2 = (1/2)m\,(u_X^2 + u_Z^2)$;
  - Λανγκραζιανή: $L = T - V = (1/2)m\,(u_X^2 + u_Z^2) - m\,g\,z$;
  - Δράση: $S = \int_\Pi L\,dt$ κατά μήκος της διαδρομής Π.
- **Αρχή της ακραίας δράσης** (Hamilton; εφαρμόσιμη τόσο στην κλασική όσο και στη κβαντική φυσική):
  - **Από όλες τις δυνατές κινήσεις μεταξύ δύο σημείων, η πραγματική κίνηση έχει ακραία (στάσιμη) δράση.**
  - Η αρχή αποδίδεται στον Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, ο οποίος έγραψε σχετικά με αυτή το 1744· ο Leonhard Euler τη διερεύνησε το 1744, ενώ ο Gottfried Leibniz προηγήθηκε και από τους δύο για 39 χρόνια.
- Λύση
  - Η ακραιοποίηση της δράσης οδηγεί στην εξίσωση Euler-Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial u_x}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial u_z}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0$



Η τροχιά ενός φορτίου
Εφαρμογή της αρχής της ακραίας δράσης

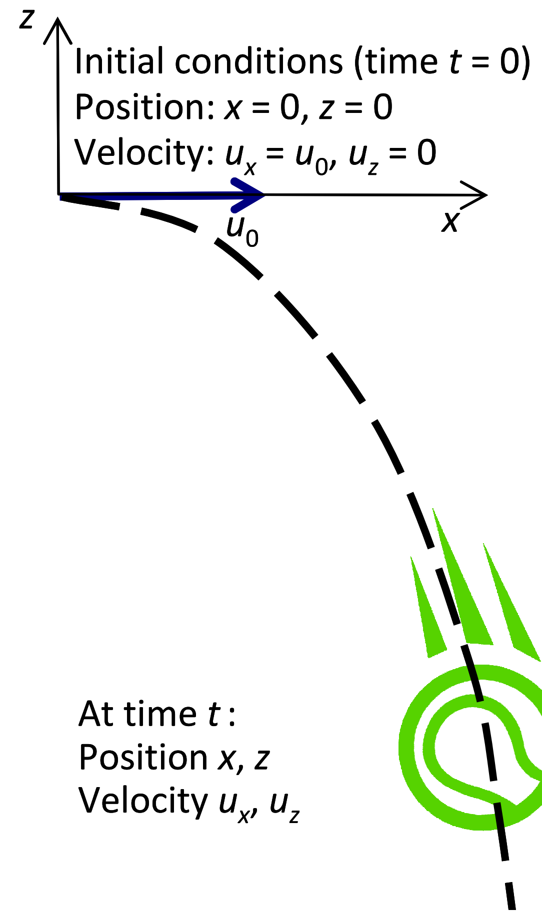
- Η εξίσωση Euler-Lagrange καταλήγει σε ένα μόνο (ολικό) ελάχιστο (ελάχιστη δράση):

  $u_x = u_0$ (= σταθερή), $u_z = -g\,t$

  από όπου έχουμε:

  $x = u_0\,t$, $z = -g\,t^2/2$ or $z = -(g\,/\,2u_0^{\,2})\,x^2$

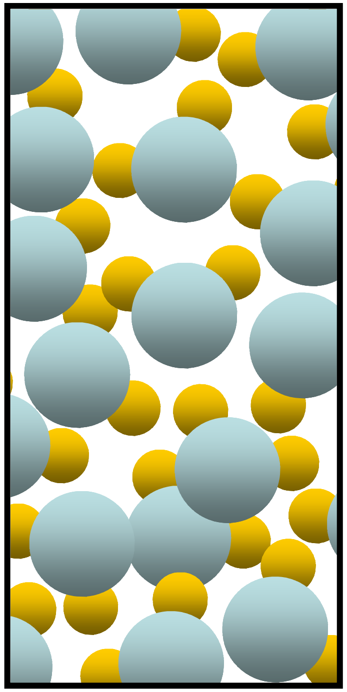
  (παραβολή, πάει προς τα κάτω).
- Στην παραπάνω διατύπωση δεν έχουμε χρησιμοποιήσει τους νευτώνειους νόμους, ούτε καν τη διατήρηση της ενέργειας.
  - Αντιθέτως, η διατήρηση της συνολικής ενέργειας $E = T + V$ προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης της ελάχιστης δράσης.
- Αυτή η εξίσωση δίνει τόσο τη γεωμετρία (παραβολή) και την κατεύθυνση (κάτω) της τροχιάς, όσο και την πλήρη περιγραφή της κίνησης του φορτίου.



Μία μόνο αρχή (Η αρχή του Hamilton με την αρχή του Fermat ως ειδική περίπτωση) περιγράφει ποικίλα φαινόμενα στην οπτική και στην κλασική μηχανική—αλλά λειτουργεί καλά μόνο σε απλά συστήματα.

Από τα απλά στα πολύπλοκα συστήματα

- Όταν εξετάζουμε ένα σύστημα πολλών "σωμάτων", π.χ. σωματίδια (όπως τα μόρια του νερού σε στερεά, υγρά ή αέρια φάση, βλέπε σχήμα), δεν μας ενδιαφέρουν οι ιδιότητες (θέση, ορμή) κάθε συγκεκριμένου σωματιδίου.
- Ακόμη κι αν μας ενδιέφεραν, θα ήταν δύσκολο (και εξαιρετικά μη φειδωλό) να τις γνωρίζουμε, π.χ. 1 m^3 ενός αερίου σε συνθήκες δωματίου περιλαμβάνει 2.7×10^{25} μόρια.
- Μονάχα οι μακροσκοπικές/στατιστικές (ή θερμοδυναμικές) ιδιότητες του συστήματος παρουσιάζουν ενδιαφέρον.
- Οι μακροσκοπικές ιδιότητες είναι καταστατικές μεταβλητές, όπως η πίεση, η εσωτερική ενέργεια, η εντροπία, η θερμοκρασία και χαρακτηριστικές σταθερές, όπως η ειδική και η λανθάνουσα θερμότητα.
- Αναπόφευκτα—μολονότι συχνά δεν αναφέρεται ρητά—οι μακροσκοπικές περιγραφές στηρίζονται στην πιθανότητα και περιλαμβάνουν κάποια αβεβαιότητα.
- Παρόλα αυτά, όταν τα συστατικά μέλη του συστήματος είναι πάρα πολλά και όμοια, εξαιτίας της εφαρμογής του νόμου των μεγάλων αριθμών, αυτή η αβεβαιότητα μετατρέπεται σε μια σχεδόν-βεβαιότητα.



Όταν μετακινούμαστε από απλά σε πολύπλοκα συστήματα, η αρχή της φειδούς απαιτεί την αντικατάσταση των μικροσκοπικών ιδιοτήτων με μακροσκοπικές και των αιτιοκρατικών περιγραφών με πιθανοτικές.

Τι ακραιοποιεί η Φύση στα πολύπλοκα συστήματα;

- Το μέγεθος που ακραιοποιείται είναι η εντροπία* (ή η παραγωγή εντροπίας όταν περιλαμβάνεται ο χρόνος, Koutsoyiannis, 2011).
- Ο επιστημονικός όρος† αποδίδεται στον Clausius (1850-1865) και η έννοια υπήρξε θεμελιώδης στη διατύπωση του Δεύτερου Θερμοδυναμικού Νόμου.
- Ο Boltzmann (1866) έδειξε πως η εντροπία μιας μακροσκοπικής στάσιμης κατάστασης είναι ανάλογη με το λογάριθμο του αριθμού W των πιθανών μικροσκοπικών καταστάσεων που αντιστοιχούν σε αυτή την μακροσκοπική κατάσταση.
- Ο Gibbs (1902) μελέτησε την έννοια περαιτέρω σε ένα στατιστικό μηχανικό πλαίσιο.
- Ο Shannon (1948) γενίκευσε τη μαθηματική διατύπωση της εντροπίας και την διερεύνησε περαιτέρω.
- Ο Kolmogorov (1956, 1958) θεμελίωσε την έννοια στη βάση της θεωρίας του μέτρου και εισήγαγε την εντροπία στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων.
- Ο Jaynes (1957) εισήγαγε την αρχή της μέγιστης εντροπίας ως εργαλείο λογικής συναγωγής (για να συνάγει άγνωστες *πιθανότητες* από τη γνωστή *πληροφορία*).
- Σήμερα η εντροπία θεωρείται μια πιθανοτική έννοια που παρέχει ένα μέτρο της αβεβαιότητας.

---

* Η αρχαία ελληνική λέξη *ἐντροπία* (θηλ. ουσ., επίσης *ἐντροπή*) σημαίνει η στροφή προς τα μέσα—επίσης σημαίνει αποφυγή· παράγεται από την πρόθεση *ἐν* (μέσα) και το ρήμα *τρέπειν* (αλλάζω, κατευθύνω προς κάτι, στρίβω γύρω από κάτι, ανατρέπω), σχετικές αρχαίες ελληνικές λέξεις: *ἐντροπαλισμός* (περιστροφή); *ἐντροπαλίζεσθαι* (περιστρέφομαι).

† Ως προς τη σύνθεση της η πρόθεση *ἐν-* συχνά εκφράζει την κατοχή κάποιας ιδιότητας, επομένως η επιστημονική έννοια του όρου *ἐντροπία* είναι η κατοχή του δυναμικού αλλαγής.

Ποιο μαθηματικό εργαλείο συμβιβάζει την πολυπλοκότητα των φυσικών συστημάτων με την αρχή της φειδούς;

- Μια συνεπής θεωρία για τα πολύπλοκα συστήματα θα πρέπει απαραιτήτως να βασίζεται στις πιθανότητες—αλλά σε ένα ενισχυμένο πλαίσιο.
- Το εργαλείο αυτό είναι η **Στοχαστική Ανάλυση = Θεωρία Πιθανοτήτων + Στατιστική + Στοχαστικές Ανελίξεις**.
- Η θεωρία πιθανοτήτων προσφέρει τη θεωρητική βάση για:
  - τη μεταφορά από τη μικροσκοπική στη μακροσκοπική παρατήρηση των φαινομένων, αντιστοιχίζοντας σύνολα διαφορετικών στοιχείων ή συμβάντων σε μοναδικούς αριθμούς (σε μια τιμή πιθανότητας ή σε μια αναμενόμενη τιμή),
  - την επαγωγική διαδικασία.
- Η στατιστική προσφέρει εμπειρική βάση για:
  - τη συνόψιση δεδομένων,
  - τη συναγωγή συμπερασμάτων από τα δεδομένα,
  - την υποστήριξη της λήψης αποφάσεων.
- Οι στοχαστικές ανελίξεις και οι προσομοιώσεις Μόντε Κάρλο προσφέρουν τα μέσα για:
  - πιθανοτικές προβλέψεις,
  - την εκτίμηση της αβεβαιότητας,
  - το σχεδιασμό και τη διαχείριση πολύπλοκων συστημάτων.

Μια σημείωση πάνω στο «ενισχυμένο πλαίσιο» της στοχαστικής ανάλυσης

- Η κλασική στατιστική βασίζεται στο πρότυπο της ανεξαρτησίας και επαναληψιμότητας (το πρότυπο «κορώνα-γράμματα»).
- Αυτό το πρότυπο λειτουργεί καλά για συστήματα με πολλά όμοια σωματίδια, για τα οποία μπορεί να γίνει η παραδοχή της *ανεξαρτησίας* (π.χ. η περίπτωση των ιδανικών αερίων).
- Παρόλα αυτά, τα πιο σύνθετα φυσικά συστήματα (στον πραγματικό κόσμο), καθώς εξελίσσονται στο χρόνο μπορεί να συμπεριφερθούν πολύ διαφορετικά από το κλασικό πρότυπο (π.χ. τυρβώδεις ροές, υδρομετεωρολογικές και κλιματικές διεργασίες).
- Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητη η χρήση στοχαστικών μοντέλων, καθώς δέχονται την εξάρτηση των στοιχείων του συστήματος στο χώρο/χρόνο.
- Τα τυπικά στοχαστικά μοντέλα (ειδικά τα πολυμεταβλητά) συνήθως δεν είναι τα ίδια φειδωλά.
- Πρέπει να γίνει μια πιο προχωρημένη στοχαστική προσέγγιση έτσι ώστε τα μοντέλα να γίνουν πιο συνεπή με:
    - τις φυσικές συμπεριφορές που παρατηρούμε και
    - την αρχή της φειδούς.

Συμπεράσματα

- Η Φύση φαίνεται να είναι από τη φύση της φειδωλή.
- Είναι επομένως φυσικό να προσπαθούμε να φτιάξουμε φειδωλά μοντέλα για φυσικές διεργασίες.
- Τα απλά συστήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν φειδωλά με αιτιοκρατικές προσεγγίσεις.
- Στα πολύπλοκα συστήματα η φειδώ θα πρέπει να συνδυαστεί υποχρεωτικά με στοχαστικές περιγραφές.
- Τελευταία, το κυρίαρχο επιστημονικό ρεύμα επενδύει σε λεπτομερείς προσεγγίσεις μέσω της κατασκευής πολύπλοκων μοντέλων.
- Παρόλα αυτά, οι συγκρίσεις μεταξύ των πολύπλοκων και των φειδωλών μοντέλων υποδεικνύουν πως τα δεύτερα:
  - είναι ικανά να διευκολύνουν τη διορατικότητα και κατανόηση μας,
  - βελτιώνουν την ακρίβεια, αποδοτικότητα και προγνωστική ικανότητα, και
  - απαιτούν λιγότερα δεδομένα για να πετύχουν την ίδια ακρίβεια με τα πρώτα.
- Οι φειδωλές διατυπώσεις και λύσεις των προβλημάτων είναι πιο εύλογες και ορθολογικές, καθώς και ευκολότερες στην εφαρμογή και παρακολούθησή τους.

Αναφορές

- Boltzmann, L., *Über die Mechanische Bedeutung des Zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie*, Wiener Berichte, 53, 195–220, 1866.
- Clausius, R., *Mechanical Theory of Heat – with its Applications to the Steam Engine and to Physical Properties of Bodies*, London: John van Voorst, 1850-1865.
- Courtney, A., and M. Courtney, Comments Regarding "On the Nature of Science", *Physics in Canada*, 64(3), 7-8, 2008.
- Gaertner, H.-M., Huygens' Principle: A case against optimality, *Behavioral and Brain Sciences*, 26, 779–781, 2003.
- Gauch, H. G., Jr., *Scientific Method in Practice*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- Gibbs, J. W., *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Yale University Press, New Haven, Connecticut, 1902.
- Jaynes, E. T., Information theory and statistical mechanics, *Phys. Rev.*, 106(4), 620–630, 1957.
- Kolmogorov, A. N., The theory of transmission of information, Session of the USSR Academy of Sciences on Scientific Problems of Automating Production, Plenary Meetings 66-99, *Izd. Akad. Nauk SSSR*, Moscow (In Russian), 1956.
- Kolmogorov, A. N., A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 119, 861-864 (in Russian), 1958.
- Koutsoyiannis, D., Hurst-Kolmogorov dynamics as a result of extremal entropy production, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 390 (8), 1424–1432, 2011.
- Schoemaker, P. J. H., Huygens versus Fermat: No clear winner, *Behavioral and Brain Sciences*, 26, 781–783, 2003.
- Shannon, C. E., A mathematical theory of communication, *Bell Systems Tech. J.*, 27(379), 623-656, 1948.