



ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΔΕΥΚΑΛΙΩΝ – Εκτίμηση πλημμυρικών ροών στην Ελλάδα σε συνθήκες υδροκλιματικής μεταβλητότητας: Ανάπτυξη φυσικά εδραιωμένου εννοιολογικού-πιθανοτικού πλαισίου και υπολογιστικών εργαλείων

Συνεργαζόμενοι φορείς:



ΕΤΜΕ: Πέππας & Συνεργάτες Ε.Ε.



Γραφείο Μαχάιρα Α.Ε.



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο – Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος



Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών – Ινστιτούτο Ερευνών Περιβάλλοντος και Βιώσιμης Ανάπτυξης

Ενότητα Εργασίας 3

Ανάπτυξη φυσικά εδραιωμένων εργαλείων υδρολογίας πλημμυρών

Παραδοτέο Π3.2

Περιγραφή μεθοδολογίας ανάλυσης ισχυρών επεισοδίων βροχής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της έκθεσης είναι η διερεύνηση και υλοποίηση του μεθοδολογικού πλαισίου στατιστικής ανάλυσης των ισχυρών βροχοπτώσεων. Στην έκθεση γίνεται, αρχικά, μια επισκόπηση βασικών εννοιών της στατιστικής υδρολογίας και περιγράφονται οι στατιστικές κατανομές μεγίστων, καθώς και άλλες κατανομές γενικής χρήσης, που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση ακραίων βροχοπτώσεων. Ακόμη, παρουσιάζονται οι μεθοδολογίες στατιστικής ανάλυσης των ημερήσιων χρονοσειρών βροχής, που βρίσκουν εφαρμογή στα μοντέλα στοχαστικής προσομοίωσης. Η έμφαση δίνεται στην ανάπτυξη της μεθοδολογίας κατάρτισης ομβρίων καμπυλών, που αποτελούν τυπικό εργαλείο στον υδρολογικό σχεδιασμό. Τέλος, παρουσιάζεται το υπολογιστικό σύστημα παραγωγής ομβρίων καμπυλών (λογισμικό Όμβρος), και εξηγείται η λειτουργία του τόσο σε θεωρητικό πλαίσιο όσο και σε επίπεδο τελικού χρήστη, με χρήση παραδειγμάτων.

ABSTRACT

The objective of the research report is the investigation and implementation of the methodological framework for the statistical analysis of intense rains. In the report are initially reviewed the main concepts of statistical hydrology and are described the extreme statistical distributions, as well as other distributions of general use, which are applied for the analysis of intense rains. Moreover, we describe the statistical methods for the daily rainfall time series, which are employed within stochastic simulation models. Emphasis is given to the development of a methodology for constructing the idf (ombrian) curves, which are typical tools in hydrologic design. Finally, we present the computational system for the extraction of ombrian curves (Ombros software), and we explain its operation with regard to its theoretical context as well as from the end user perspective, by means of examples.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

1	Εισαγωγή	6
1.1	Αντικείμενο του τεύχους - Ιστορικό	6
1.2	Διάρθρωση του τεύχους.....	7
2	Θεμελιώδεις έννοιες στατιστικής υδρολογίας	8
2.1	Στοχαστικές ανελίξεις - Ορισμοί	8
2.1.1	Γενικά	8
2.1.2	Η έννοια της στοχαστικής ανελίξης	8
2.1.3	Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής.....	8
2.1.4	Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.....	9
2.1.5	Η έννοια της περιόδου επαναφοράς	9
2.2	Αναμενόμενες τιμές και παράμετροι κατανομών	10
2.3	Στατιστική ανάλυση υδρολογικών μεταβλητών	11
2.3.1	Εκτίμηση δειγματικών στατιστικών χαρακτηριστικών	11
2.3.2	Εκτίμηση με χρήση των L-ροπών	13
2.3.3	Κατασκευή εμπειρικής συνάρτησης κατανομής	13
2.3.4	Προσαρμογή θεωρητικής συνάρτησης κατανομής	14
3	Στατιστική ανάλυση ακραίων βροχοπτώσεων	15
3.1	Βασικές έννοιες στατιστικής ανάλυσης ακροτάτων	15
3.1.1	Ανελίξεις ακροτάτων	15
3.1.2	Ασυμπτωτικές κατανομές ακροτάτων	16
3.1.3	Η σημασία της ανάλυσης ακροτάτων στην υδρολογία πλημμυρών.....	16
3.2	Τυπικές κατανομές μεγίστων στην υδρολογία	17
3.2.1	Κατανομή Gumbel μεγίστων.....	17
3.2.2	Γενική Ακραίων Τιμών.....	17
3.2.3	Σχόλια σχετικά με την επιλογή της συνάρτησης κατανομής	20
3.3	Λοιπές κατανομές για την περιγραφή υδρολογικών μεγίστων.....	22
3.3.1	Λογαριθμοκανονική κατανομή δύο και τριών παραμέτρων	22
3.3.2	Κατανομή γάμα τριών παραμέτρων (Pearson III).....	23
3.3.3	Κατανομή Log-Pearson III	24
3.3.4	Γενικευμένη κατανομή Pareto	24
3.4	Ανάλυση μεγίστων ημερήσιων βροχοπτώσεων.....	24
4	Ανάλυση βροχοπτώσεων σε μορφή χρονοσειράς	26
4.1	Τοποθέτηση του προβλήματος	26
4.2	Τυπικές κατανομές ανάλυσης ημερήσιων βροχοπτώσεων.....	26
4.2.1	Στατιστική περιγραφή της βροχόπτωσης στην ημερήσια κλίμακα	26
4.2.2	Η κατανομή Burr τύπου VII	27

5	Όμβριες καμπύλες	29
5.1	Σημειακές όμβριες καμπύλες.....	29
5.1.1	Γενική μεθοδολογία.....	29
5.1.2	Δεδομένα που χρησιμοποιούνται.....	29
5.1.3	Συμβατική μέθοδος κατάρτισης όμβριων καμπυλών.....	30
5.1.4	Γενικευμένη μαθηματική έκφραση όμβριων καμπυλών.....	31
5.1.5	Τελική εξίσωση όμβριων καμπυλών.....	31
5.1.6	Εκτίμηση παραμέτρων.....	32
5.2	Ταυτόχρονη χρήση δειγμάτων από πολλές θέσεις.....	33
5.3	Όρια εμπιστοσύνης όμβριων καμπυλών.....	34
5.4	Επιφανειακές όμβριες καμπύλες.....	35
5.4.1	Τοποθέτηση του προβλήματος.....	35
5.4.2	Συντελεστής επιφανειακής αναγωγής.....	35
5.4.3	Σχόλια σχετικά με την καταλληλότητα του δείκτη.....	36
6	Υπολογιστικό σύστημα κατάρτισης όμβριων καμπυλών	37
6.1	Το λογισμικό Υδρογνώμων.....	37
6.1.1	Ιστορικό.....	37
6.1.2	Δομή και λειτουργίες του προγράμματος.....	37
6.2	Υποσύστημα κατάρτισης ομβρίων καμπυλών (Ομβρος).....	38
6.2.1	Γενική περιγραφή υποσυστήματος.....	38
6.2.2	Υπολογισμός μηνιαίων/ετήσιων μεγίστων εντάσεων βροχής.....	38
6.2.3	Έλεγχος συνέπειας χρονοσειρών.....	39
6.2.4	Επίδραση χρονικής ευκρίνειας.....	40
6.2.5	Σχέση σειρών ετήσιων μεγίστων και σειρών υπεράνω κατωφλίου.....	40
6.2.6	Επιλογή στατιστικών κατανομών.....	41
6.2.7	Κατάρτιση όμβριων καμπυλών με τη συμβατική μέθοδο.....	43
6.2.8	Κατάρτιση όμβριων καμπυλών με τη μέθοδο ενοποίησης διαρκειών.....	44
6.3	Παράδειγμα εφαρμογής.....	46
	Αναφορές	52

1 Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο του τεύχους - Ιστορικό

Στα πλαίσια της Δράσης «Συνεργασία» του ΕΣΠΑ 2007-2013, η Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας ανέθεσε στη σύμπραξη τεσσάρων φορέων (ΕΤΜΕ: Πέππας & Συνεργάτες, Γραφείο Μαχαίρα, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, και Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών) το ερευνητικό έργο “*ΔΕΥΚΑΛΙΩΝ – Εκτίμηση πλημμυρικών ροών στην Ελλάδα σε συνθήκες υδροκλιματικής μεταβλητότητας: Ανάπτυξη φυσικά εδραιωμένου εννοιολογικού-πιθανοτικού πλαισίου και υπολογιστικών εργαλείων*”. Το έργο αποσκοπεί στην ανάπτυξη φυσικά εδραιωμένων μεθοδολογιών μοντελοποίησης και πρόγνωσης των ισχυρών καταιγίδων και των επαγόμενων πλημμυρικών φαινομένων, προσαρμοσμένων στις ιδιαιτερότητες των ελληνικών υδροκλιματικών και γεωμορφολογικών συνθηκών. Στα πλαίσια του έργου προβλέπεται η ανάπτυξη ενός δικτύου ερευνητικών λεκανών, υφιστάμενων και νέων, στην Ελλάδα και την Κύπρο. Από την ανάλυση των δεδομένων πεδίου (υδρολογικών, μετεωρολογικών, γεωγραφικών) των εν λόγω λεκανών θα εξαχθούν φυσικά τεκμηριωμένες περιοχικές σχέσεις για την εκτίμηση χαρακτηριστικών υδρολογικών μεγεθών σχεδιασμού. Ακόμη, θα αναπτυχθούν υδρολογικά-υδραυλικά μοντέλα που θα ολοκληρωθούν σε ένα επιχειρησιακό σύστημα υδρομετεωρολογικής πρόγνωσης. Τέλος, προβλέπεται ακόμη η προετοιμασία (υπό μορφή προσχεδίου για επιστημονική συζήτηση) ενός πλαισίου κριτηρίων σχεδιασμού και μεθοδολογιών εκπόνησης μελετών υδρολογίας αντιπλημμυρικών έργων.

Σκοπός της Ενότητας Εργασίας 3 με τίτλο “*Ανάπτυξη φυσικά εδραιωμένων εργαλείων υδρολογίας πλημμυρών*” είναι η αξιοποίηση των ιστορικών πληροφοριών και των δεδομένων πεδίου που θα συλλεχθούν από το νέο μετρητικό δίκτυο, για την διατύπωση ενός φυσικά εδραιωμένου μεθοδολογικού πλαισίου, το οποίο αφορά στη μοντελοποίηση των πλημμυρών, προσαρμοσμένου στις ελληνικές συνθήκες. Το πλαίσιο αυτό περιλαμβάνει ένα φάσμα μεθοδολογικών προσεγγίσεων, από στοιχειώδεις εμπειρικές σχέσεις έως προχωρημένα μοντέλα προσομοίωσης, τα οποία θα ελεγχθούν στις πιλοτικές περιοχές του έργου και θα συγκριθούν με κοινές πρακτικές των μελετητών και καταξιωμένα υπολογιστικά εργαλεία της βιβλιογραφίας.

Στην παρούσα τεχνική έκθεση αναπτύσσεται η μεθοδολογία στατιστικής ανάλυσης των ισχυρών βροχοπτώσεων, με στόχο την κατάρτιση της καταιγίδας σχεδιασμού, με βάση την οποία εκτιμάται, μέσω κάποιας διαδικασίας μετασχηματισμού (π.χ. ορθολογική μέθοδος, μέθοδος μοναδιαίου υδρογραφήματος), η αντίστοιχη παροχή ή και το πλήρες υδρογράφημα σχεδιασμού. Σύμφωνα με το Τεχνικό Παράρτημα της Σύμβασης, στην έκθεση εξηγούνται το μεθοδολογικό πλαίσιο στατιστικής ανάλυσης των ισχυρών επεισοδίων βροχής, η κατασκευή των ομβρίων καμπυλών, με χρήση παραδειγμάτων, και η σχετική εφαρμογή λογισμικού.

Η ομάδα εκπόνησης του παρόντος τεύχους είναι:

- Ανδρέας Ευστρατιάδης, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός
- Δημήτρης Κουτσογιάννης, Καθηγητής ΕΜΠ
- Σίμων-Μιχαήλ Παπαλεξίου, Περιβαλλοντολόγος, Υποψήφιος Δρ. ΕΜΠ

Συντονιστής του συνόλου των εργασιών της Ενότητας Εργασίας 3 είναι ο Δ. Κουτσογιάννης, Καθηγητής ΕΜΠ.

1.2 Διάρθρωση του τεύχους

Το τεύχος διαρθρώνεται, μαζί με την παρούσα εισαγωγή (Κεφάλαιο 1), σε έξι κεφάλαια.

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζεται το πιθανοθεωρητικό πλαίσιο περιγραφής των ακραίων υδρολογικών γεγονότων και δίνονται οι βασικοί ορισμοί και έννοιες.

Στο **Κεφάλαιο 3** περιγράφονται οι στατιστικές κατανομές μεγίστων, καθώς και άλλες κατανομές γενικής χρήσης, που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση ακραίων βροχοπτώσεων, με κύριο πεδίο εφαρμογής την κατάρτιση όμβριων καμπυλών.

Στο **Κεφάλαιο 4** εξηγείται το γενικό πλαίσιο στατιστικής ανάλυσης ημερήσιων χρονοσειρών βροχής, με κύριο πεδίο εφαρμογής τη στοχαστική προσομοίωση, δηλαδή τη γέννηση συνθετικών χρονοσειρών βροχόπτωσης, σε ημερήσια κλίμακα.

Στο **Κεφάλαιο 5** περιγράφεται η μεθοδολογία ανάλυσης των ισχυρών επεισοδίων βροχής, με τη μέθοδο των ομβρίων καμπυλών, και περιγράφονται οι συνήθεις διαδικασίες επιφανειακής αναγωγής των σημειακών εκτιμήσεων, με τη χρήση μειωτικών συντελεστών.

Τέλος, στο **Κεφάλαιο 6** παρουσιάζεται το υπολογιστικό σύστημα παραγωγής ομβρίων καμπυλών (Ομβρος), και εξηγείται η λειτουργία του τόσο σε θεωρητικό πλαίσιο όσο και σε επίπεδο τελικού χρήστη, με χρήση παραδειγμάτων.

2 Θεμελιώδεις έννοιες στατιστικής υδρολογίας

2.1 Στοχαστικές ανελίξεις - Ορισμοί

2.1.1 Γενικά

Το μαθηματικό υπόβαθρο για τη στατιστική ανάλυση των υδρολογικών διεργασιών βασίζεται στη θεωρία πιθανοτήτων, και ειδικότερα στη γενική θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων. Ειδικότερα, η ανάλυση των ισχυρών βροχοπτώσεων, που αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσας έκθεσης, βασίζεται σε μια εξειδικευμένη πτυχή της εν λόγω θεωρίας, που αφορά στις ανελίξεις ακροτάτων, η ανάπτυξη της οποίας γίνεται στο Κεφάλαιο 3. Στο παρόν κεφάλαιο δίνονται ορισμένοι θεμελιώδεις ορισμοί της θεωρίας στοχαστικών ανελίξεων, που είναι απαραίτητοι για την κατανόηση των επόμενων εννοιών, και περιγράφονται οι βασικές έννοιες της στατιστικής υδρολογίας.

2.1.2 Η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης

Στοχαστική ανέλιξη (stochastic process) ονομάζεται μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_t , όπου t παράμετρος που λαμβάνει τιμές από ένα σύνολο T , και το οποίο συνήθως παριστάνει χρόνο (Κουτσογιάννης, 1997, σ. 34). Μια υλοποίηση της στοχαστικής ανέλιξης, δηλαδή ένα σύνολο παρατηρήσεων x_t της X_t , διατεταγμένο σε αυστηρή χρονική ακολουθία, καλείται *χρονοσειρά* (time series). Στην περίπτωση που τα στατιστικά χαρακτηριστικά μιας ανέλιξης δεν μεταβάλλονται με το χρόνο, αυτή καλείται *στάσιμη* (stationary).

Από την οπτική γωνία της θεωρίας πιθανοτήτων, οι υδρολογικές διεργασίες αντιμετωπίζονται ως στοχαστικές ανελίξεις. Για παράδειγμα, η βροχόπτωση ή η παροχή ενός ποταμού σε μια συγκεκριμένη θέση κατά την χρονική στιγμή t είναι μια τυχαία μεταβλητή, δεδομένου ότι δεν υπάρχει προσδιοριστική μέθοδος καθορισμού της τιμής της με πλήρη βεβαιότητα. Συνεπώς, η εν λόγω διεργασία είναι μια στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή μάλιστα χρόνο, ενώ μια σειρά μετρήσεων της ανά τακτά χρονικά διαστήματα αποτελεί μια χρονοσειρά.

Το γεγονός ότι μια φυσική διεργασία, όπως η βροχόπτωση ή η παροχή, περιγράφεται από μια στοχαστική ανέλιξη, δεν σημαίνει ότι η πρώτη δεν υπακούει σε κανενός είδους αιτιοκρατία. Αντίθετα, είναι γνωστό ότι τα υδρομετεωρολογικά μεγέθη εμφανίζουν *περιοδικές διακυμάνσεις* κατά την διάρκεια του έτους, οι οποίες προφανώς οφείλονται στην ετήσια κίνηση της γης και στα κλιματικά φαινόμενα που αυτή προκαλεί. Αυτές οι περιοδικές διακυμάνσεις αποτελούν την προσδιοριστική συνιστώσα των διεργασιών. Η στοχαστική ανέλιξη X_t μπορεί να συμπεριλάβει και να περιγράψει μαθηματικά την εν λόγω συνιστώσα, με την υπόθεση ότι η ανέλιξη δεν είναι στάσιμη, καθώς τα στατιστικά χαρακτηριστικά της μεταβάλλονται περιοδικά, ανάλογα με την εποχή του έτους.

2.1.3 Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής

Τυχαία μεταβλητή (random variable) είναι μια συνάρτηση ορισμένη επί ενός δειγματικού χώρου Ω . Εφόσον αναφερόμαστε σε υδρολογικές διεργασίες, ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής και ταυτίζεται με το σύνολο $[0, +\infty)$. Συμβατικά, η τυχαία μεταβλητή συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα X , ενώ η αριθμητική τιμή της συμβολίζεται με μικρό, x . Η παράσταση

$\{X \leq x\}$ υποδηλώνει το γεγονός εκείνο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου, τέτοια ώστε οι τιμές της X να είναι μικρότερες ή ίσες της ποσότητας x . Η πιθανότητα αυτού του γεγονότος συμβολίζεται με $P(X \leq x)$.

2.1.4 Συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X είναι μια συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x που δίνεται από την εξίσωση:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (2.1)$$

Η συνάρτηση κατανομής συχνά αποκαλείται *αθροιστική συνάρτηση κατανομής* ή *πιθανότητα μη υπέρβασης*, και λαμβάνει τιμές από 0 έως 1. Αντίστοιχα, λέγεται *πιθανότητα υπέρβασης* η παράσταση:

$$F_{1X}(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x) \quad (2.2)$$

που είναι φθίνουσα συνάρτηση και υπακούει στη σχέση:

$$1 = F_{1X}(-\infty) \geq F_{1X}(x) \geq F_{1X}(+\infty) = 0 \quad (2.3)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής, ήτοι η:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.4)$$

ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*. Για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές η εν λόγω συνάρτηση αυτή ορίζεται παντού.

Για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $F^{-1}_X(u)$ της $F_X(x)$. Κατά συνέπεια η εξίσωση $u = F_X(x)$ έχει μία μοναδική λύση ως προς x , την $x_u = F^{-1}_X(u)$. Η τιμή x_u , η οποία αντιστοιχεί σε δεδομένη τιμή u της συνάρτησης κατανομής, λέγεται *u-ποσοστημόριο* της μεταβλητής X .

2.1.5 Η έννοια της περιόδου επαναφοράς

Η *περίοδος επαναφοράς* είναι θεμελιώδης έννοια της στατιστικής, με ευρεία εφαρμογή στον την ανάλυση ισχυρών βροχοπτώσεων και γενικότερα τον υδρολογικό σχεδιασμό. Γενικά, η περίοδος επαναφοράς T μιας δεδομένης τιμής x της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως ο μέσος αριθμός των χρονικών διαστημάτων (στην προκειμένη περίπτωση, υδρολογικών ετών) που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών εμφανίσεων της μεταβλητής, με μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο της δεδομένης τιμής x . Αποδεικνύεται ότι η περίοδος επαναφοράς της τιμής x είναι (Kottegoda, 1980, σ. 213):

$$T = \frac{1}{P(X > x)} = \frac{1}{F_{1X}(X > x)} = \frac{1}{1 - F_X(X > x)} \quad (2.5)$$

Κατά συνέπεια, η περίοδος επαναφοράς είναι το αντίστροφο της πιθανότητας υπέρβασης. Προϋποθέσεις για να ισχύει αυτό είναι: (α) να είναι συνεχής η τυχαία μεταβλητή και (β) να ισχύει η παραδοχή ανεξαρτησίας, δηλαδή κάθε εμφάνιση να είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από τις προηγούμενες και επόμενες της. Δεδομένου ότι οι προϋποθέσεις αυτές ισχύουν για τα μεγέθη ακροτάτων της υδρολογίας πλημμυρών, μπορούμε να θεωρούμε την εξίσωση (2.5) ως ισοδύναμο ορισμό της περιόδου επαναφοράς.

2.2 Αναμενόμενες τιμές και παράμετροι κατανομών

Αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και $g(X)$ είναι μια συνάρτηση της X , τότε ορίζεται ως *αναμενόμενη τιμή* ή *προσδοκία* της $g(X)$ το μέγεθος:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (2.6)$$

Ειδικότερα, για $g(X) = X$, το μέγεθος:

$$m_X = E[X] \quad (2.7)$$

ονομάζεται *αναμενόμενη τιμή* ή *μέση τιμή* της τυχαίας μεταβλητής X . Η μέση τιμή περιγράφει τη θέση του κέντρου βάρους του σχήματος που ορίζει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής. Εφόσον η εν λόγω κατανομή είναι συμμετρική, η μέση τιμή ταυτίζεται με την *πιθανότερη τιμή*, ήτοι την τιμή του X για την οποία μεγιστοποιείται η $f_X(x)$, καθώς και με την *διάμεσο* της κατανομής, ήτοι την τιμή του X για την οποία $P(X \leq x) = 0.50$.

Τονίζεται ότι μια δειγματική συνάρτηση της μορφής $\theta = \theta(x_1, \dots, x_n)$ ονομάζεται *αμερόληπτη* (unbiased) εκτιμήτρια μιας παραμέτρου θ_0 του πληθυσμού, εφόσον $E[\theta] = \theta_0$. Αυτό σημαίνει ότι αν ληφθούν άπειρα δείγματα, για κάθε ένα από τα οποία υπολογίζεται η εκτιμήτρια θ , τότε η μέση τιμή των θ ταυτίζεται με την τιμή της παραμέτρου θ_0 του πληθυσμού.

Για $g(X) = (X - m_X)^r$, το μέγεθος:

$$\mu_X^{(r)} = E[(X - m_X)^r] \quad (2.8)$$

ονομάζεται *κεντρική ροπή τάξης r* της τυχαίας μεταβλητής X .

Η κεντρική ροπή δεύτερης τάξης, ήτοι το μέγεθος:

$$\sigma_X^2 = \mu_X^{(2)} = E[(X - m_X)^2] \quad (2.9)$$

ονομάζεται *διασπορά* της τυχαίας μεταβλητής X , και συμβολίζεται με $\text{Var}[X]$. Η διασπορά μιας μεταβλητής είναι μέτρο της συγκέντρωσης της πυκνότητας πιθανότητας γύρω από την μέση τιμή.

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς, η οποία έχει ίδιες διαστάσεις με την τυχαία μεταβλητή, ονομάζεται *τυπική απόκλιση*. Η αδιάστατη παράμετρος:

$$C_{vX} = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (2.10)$$

ονομάζεται *συντελεστής μεταβλητότητας* και αποτελεί μέτρο της αβεβαιότητας ως προς την εκτίμηση της μεταβλητής X . Μεγάλη τιμή του συντελεστή C_{vX} , ήτοι μεγάλη διασπορά σε σχέση με την μέση τιμή, συνεπάγεται μεγάλη αβεβαιότητα ως προς την εκτίμηση της μ_X . Η οριακή τιμή μηδενικού συντελεστή μεταβλητότητας αντιστοιχεί σε μεταβλητή που λαμβάνει μία μόνο τιμή με πλήρη βεβαιότητα, και η οποία προφανώς ισούται με την μέση τιμή.

Η κεντρική ροπή τρίτης τάξης, ήτοι το μέγεθος:

$$\mu_X^{(3)} = E[(X - m_X)^3] \quad (2.11)$$

σχετίζεται με την *ασυμμετρία* της τυχαίας μεταβλητής X . Μηδενική τιμή της τρίτης κεντρικής ροπής δείχνει συμμετρική κατανομή. Αν η τρίτη ροπή είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το μηδέν, τότε η κατανομή είναι θετικά ασύμμετρη ή αρνητικά ασύμμετρη, αντίστοιχα. Εφόσον η κατανομή είναι θετικά ασύμμετρη (κάτι που αποτελεί τυπικό χαρακτηριστικό των

υδρολογικών μεταβλητών, καθώς οι εξαιρετικά υψηλές τιμές εμφανίζονται με χαμηλή συχνότητα), η μέση τιμή της μεταβλητής είναι μεγαλύτερη από την διάμεσο.

Αδιάστατο μέτρο ασυμμετρίας είναι ο *συντελεστής ασυμμετρίας* που ορίζεται από την σχέση:

$$C_{sX} = \frac{\mu_X^{(3)}}{\sigma_X^3} \quad (2.12)$$

Στην υδρολογία, πολύ συχνά ενδιαφέρει η ταυτόχρονη ανάλυση δύο μεταβλητών X και Y . Στην περίπτωση αυτή ορίζεται η *από κοινού συνάρτηση κατανομής* του ζεύγους μεταβλητών (X, Y) ως:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (2.13)$$

Οι συναρτήσεις $F_X(x) = P(X \leq x)$ και $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ ονομάζονται *περιθώριες συναρτήσεις κατανομής* των X και Y , αντίστοιχα.

Υπό την προϋπόθεση ότι η F_{XY} είναι παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.14)$$

ονομάζεται *από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* των μεταβλητών (X, Y) . Με αντίστοιχο τρόπο ορίζονται οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Επίσης, κατά παρόμοιο τρόπο ορίζονται οι *από κοινού κεντρικές ροπές* των μεταβλητών. Από τις ροπές αυτές, συχνότερα χρησιμοποιείται η:

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \quad (2.15)$$

που ονομάζεται *συνδιασπορά* των τυχαίων μεταβλητών X και Y , και συμβολίζεται με σ_{XY} . Διαιρώντας την συνδιασπορά με τις τυπικές αποκλίσεις των επιμέρους μεταβλητών, προκύπτει το αδιάστατο μέγεθος:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.16)$$

που ονομάζεται *συντελεστής συσχέτισης* και λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$. Ο εν λόγω συντελεστής αποτελεί σημαντική παράμετρο για την μελέτη της γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών. Αν η τιμή του r_{XY} είναι κοντά στο 1, τότε οι μεταβλητές X και Y παρουσιάζουν ισχυρή θετική συσχέτιση. Αν η τιμή του r_{XY} είναι κοντά στο -1 , τότε οι μεταβλητές παρουσιάζουν ισχυρή αρνητική συσχέτιση. Τέλος, αν η τιμή του r_{XY} είναι κοντά στο μηδέν, τότε οι μεταβλητές δεν παρουσιάζουν καμία συσχέτιση.

2.3 Στατιστική ανάλυση υδρολογικών μεταβλητών

2.3.1 Εκτίμηση δειγματικών στατιστικών χαρακτηριστικών

Οι εκτιμήτριες που ορίστηκαν στο υποκεφάλαιο 2.2 είναι θεωρητικά μεγέθη που αναφέρονται στον πληθυσμό, δηλαδή το σύνολο όλων των δυνατών πραγματοποιήσεων της μεταβλητής X . Στην πράξη βεβαίως, αυτό που είναι γνωστό είναι ένα δείγμα n χρονικά διατεταγμένων παρατηρήσεων της X , δηλαδή μια χρονοσειρά, η οποία συμβολίζεται με (x_1, x_2, \dots, x_n) . Στα πλαίσια της ανάλυσης μιας χρονοσειράς υπολογίζονται τα λεγόμενα *δειγματικά στατιστικά χαρακτηριστικά*, ήτοι ένα σύνολο αριθμητικών δεικτών που περιγράφουν τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του δείγματος και αποτελούν εκτιμήτριες των στατιστικών παραμέτρων του πληθυσμού.

Συγκεκριμένα, η δειγματική μέση τιμή, που αποτελεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής του πληθυσμού μ_X , υπολογίζεται από την σχέση:

$$\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t \quad (2.17)$$

Η δειγματική διασπορά, που αποτελεί αμερόληπτη εκτίμηση της πραγματικής διασποράς σ_X^2 , υπολογίζεται από την σχέση:

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (x_t - \mu_X)^2 \quad (2.18)$$

Η δειγματική τυπική απόκλιση, s_X , υπολογίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της δειγματικής διασποράς.

Η δειγματική τρίτη κεντρική ροπή, που αποτελεί αμερόληπτη εκτίμηση της αντίστοιχης πραγματικής ροπής $\mu_X^{(3)}$, υπολογίζεται από την σχέση:

$$\hat{\mu}_X^{(3)} = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{t=1}^n (x_t - \mu_X)^3 \quad (2.19)$$

Αντίστοιχα, η δειγματική, μη αμερόληπτη ωστόσο, εκτιμήτρια του συντελεστή ασυμμετρίας είναι:

$$\zeta_X = \frac{\hat{\mu}_X^{(3)}}{s_X^3} \quad (2.20)$$

Τα δειγματικά χαρακτηριστικά των από κοινού συναρτήσεων κατανομής που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην υδρολογία είναι οι αυτοσυνδιασπορές και ετεροσυνδιασπορές.

Η δειγματική *αυτοσυνδιασπορά* (autocovariance) μιας χρονοσειράς για *χρονική υστέρηση* (lag) j υπολογίζεται από την σχέση:

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-j} (x_{t+j} - \mu_X)(x_t - \mu_X) \quad (2.21)$$

Διαιρώντας την αυτοσυνδιασπορά με την δειγματική διασπορά, προκύπτει ο αδιάστατος *συντελεστής αυτοσυσχέτισης για υστέρηση j* , που συμβολίζεται με ρ_j και λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$. Η γραφική απεικόνιση των ρ_j συναρτήσεως του j ονομάζεται *αυτοσυσχετόγραμμα*. Το πλέον χαρακτηριστικό στοιχείο της ακολουθίας ρ_j είναι ο πρώτος όρος της, ήτοι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1, που υπολογίζεται ως:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (x_{t+1} - \mu_X)(x_t - \mu_X)}{\sum_{t=1}^n (x_t - \mu_X)^2} \quad (2.22)$$

Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης για υστέρηση 1 αποτελεί μέτρο της βραχυπρόθεσμης μνήμης μιας υδρολογικής διεργασίας.

Παρόμοια με τον δειγματικό συντελεστή αυτοσυσχέτισης, ορίζεται ο δειγματικός *συντελεστής ετεροσυσχέτισης για υστέρηση j* δύο χρονοσειρών X και Y . Πιο πολύ ενδιαφέρον παρουσιάζει ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης μηδενικής υστέρησης, που υπολογίζεται από την σχέση:

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_Y)^2}} \quad (2.23)$$

Ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης αποτελεί μέτρο της αλληλεξάρτησης δυο υδρολογικών διεργασιών, που είτε συνδέονται με σχέση αιτίου-αποτελέσματος (π.χ. βροχή-απορροή) ή αναφέρονται στην ίδια διεργασία αλλά σε γειτονικές θέσεις, που χαρακτηρίζονται με κοινή υδρολογική δίαυτα (π.χ. βροχόπτωση σε δύο κοντινούς μετεωρολογικούς σταθμούς).

2.3.2 Εκτίμηση με χρήση των L-ροπών

Οι L-ροπές (Hosking, 1990) έχουν οριστεί ως γραμμικός συνδυασμός των αναμενόμενων τιμών των διατεταγμένων στατιστικών και έκτοτε έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως στην υδρολογία τόσο ως μέθοδος προσαρμογής κατανομών αλλά και όσο και ως περιγραφικά στατιστικά μέτρα (Kroll and Vogel, 2002· Lim and Lye, 2003). Το βασικό πλεονέκτημα των L-ροπών είναι πως οι δειγματικές εκτιμήσεις τους ως γραμμικοί συνδυασμοί του διατεταγμένου δείγματος, δεν υψώνουν τις παρατηρήσεις του δείγματος σε τετραγωνικές ή κυβικές δυνάμεις, όπως συμβαίνει με την κλασική μέθοδο των ροπών. Ως αποτέλεσμα, οι εκτιμήσεις των L-αδιάστατων συντελεστών διασποράς λ_2 / λ_1 , L-ασυμμετρίας $L-C_s = \lambda_3 / \lambda_2$, και L-κύρτωσης $L-C_k = \lambda_4 / \lambda_2$, είναι αμερόληπτες με κανονική σχεδόν κατανομή, όπου λ_i είναι η i -οστή L-ροπή (Sankarasubramanian and Srinivasan, 1999· Vogel and Fennessey, 1993). Τιμή του $L-C_s < 0$ υποδηλώνει αρνητική ασυμμετρία ενώ τιμή του $L-C_s > 0$ θετική ασυμμετρία. Αντίστοιχα, για τη κύρτωση, τιμή του $L-C_k > 0.1226$, που είναι η τιμή της κανονικής κατανομής, υποδηλώνει λεπτόκυρτη κατανομή, ενώ $L-C_k < 0.1226$ πλατύκυρτη κατανομή.

2.3.3 Κατασκευή εμπειρικής συνάρτησης κατανομής

Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και το δείγμα της X_1, X_2, \dots, X_n . Συμβολίζουμε με $X(1)$ τη μεγαλύτερη από τις μεταβλητές του δείγματος, $X(2)$ την αμέσως μικρότερη, κοκ., έτσι ώστε οι μεταβλητές $X(1) \geq X(2) \dots \geq X(n)$ να παριστάνουν το δείγμα διατεταγμένο σε φθίνουσα σειρά.

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της, η εμπειρική συνάρτηση κατανομής είναι κλιμακωτή και ορίζεται από τη σχέση:

$$F^*(x) = n_x / n \quad (2.24)$$

όπου n_x είναι το πλήθος των τιμών του δείγματος που δεν υπερβαίνουν την τιμή x . Η $F^*(x)$ αποτελεί σημειακή εκτίμηση της άγνωστης συνάρτησης κατανομής του πληθυσμού $F(x)$.

Ονομάζουμε θέση σχεδίασης (plotting position) q_i της τιμής $x(i)$ του διατεταγμένου δείγματος την εμπειρική πιθανότητα υπέρβασης της τιμής αυτής. Η απλούστερη εκτίμηση της εν λόγω θέσης είναι η:

$$q_i = i / (n + 1) \quad (2.25)$$

η οποία είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως θέση σχεδίασης Weibull ή αμερόληπτη ως προς την πιθανότητα υπέρβασης θέση σχεδίασης. Οι τυπικές εκτιμήτριες της σχέσης σχεδίασης, για τον υπολογισμό εμπειρικών πιθανοτήτων υπέρβασης, στην υδρολογία δίνονται στον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1: Εναλλακτικοί τύποι υπολογισμού εμπειρικών πιθανοτήτων υπέρβασης (Πηγή: Κουτσογιάννης, 1997, σ. 117).

Όνομασία	Τύπος	Περίοδος επαναφοράς μέγιστης τιμής	Πεδίο εφαρμογής
Weibull	$\frac{i}{n+1}$	$n+1$	Όλες οι κατανομές, αμερόληπτη εκτίμηση πιθανότητας υπέρβασης
Blom	$\frac{i-0.375}{n+0.25}$	$1.6n+0.4$	Κανονική κατανομή, αμερόληπτη εκτίμηση ποσοστημορίων
Cunnane	$\frac{i-0.4}{n+0.2}$	$1.667n+0.33$	Μεγάλο εύρος κατανομών, κατά προσέγγιση αμερόληπτη εκτίμηση ποσοστημορίων
Gringorten	$\frac{i-0.44}{n+0.12}$	$1.786n+0.21$	Κατανομή Gumbel

2.3.4 Προσαρμογή θεωρητικής συνάρτησης κατανομής

Εφόσον μια χρονοσειρά προέρχεται από μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη έχει νόημα ο προσδιορισμός της μίας και μοναδικής συνάρτησης κατανομής της υπόψη μεταβλητής. Μέσω της συνάρτησης κατανομής είναι δυνατή η ποσοτικοποίηση της υδρολογικής αβεβαιότητας και η πραγματοποίηση προγνώσεων, καθώς κάθε τιμή της μεταβλητής συνδέεται με μια συγκεκριμένη πιθανότητα υπέρβασης.

Στην βιβλιογραφία διατίθεται ένα πολύ μεγάλο φάσμα μοντέλων κατανομών πιθανοτήτων, ορισμένα από τα οποία ενδείκνυνται για υδρολογικές εφαρμογές (Κουτσογιάννης, 1997, κεφ. 6). Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου εξαρτάται από την φύση της εξεταζόμενης ανέλιξης. Σε ορισμένες περιπτώσεις, υπάρχουν θεωρητικοί λόγοι για τους οποίους μια υδρολογική μεταβλητή αναμένεται να ακολουθεί συγκεκριμένο τύπο κατανομής, ενώ άλλες φορές ο τύπος της κατανομής επιλέγεται με βάση την υδρολογική εμπειρία ή ακόμη τα ιδιαίτερα στατιστικά χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου δείγματος. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η επιλογή της καταλληλότερης κατανομής γίνεται με βάση την προσαρμογή της πάνω στο γράφημα της εμπειρικής κατανομής. Η διαδικασία αυτή θεωρείται ασφαλής, για το σύνθετο εύρος τιμών πιθανοτήτων υπέρβασης (π.χ., από 5 ως 95%), όχι όμως για τις ακραίες τιμές του δείγματος, για τις οποίες η εμπειρική κατανομή ενδέχεται να δώσει παραπλανητικές ενδείξεις.

Για παράδειγμα, τα ετήσια ύψη βροχόπτωσης και απορροής γενικά ακολουθούν κανονική κατανομή. Αυτό αποτελεί απόρροια του κεντρικού οριακού θεωρήματος, βάσει του οποίου ένα άθροισμα τυχαίων μεταβλητών οποιασδήποτε κατανομής είναι επίσης τυχαία μεταβλητή, η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή. Στη μηνιαία κλίμακα, η συνήθης κατανομή που επιλέγεται για την περιγραφή των διεργασιών είναι η κατανομή γάμα, που είναι κατάλληλη για δείγματα με μη μηδενικό συντελεστή ασυμμετρίας. Όσο μειώνεται η χρονική κλίμακα, οι διεργασίες εμφανίζουν ιδιαιτερότητες που απαιτούν τη χρήση εξειδικευμένων κατανομών. Για παράδειγμα, από την ημερήσια κλίμακα και κάτω, η βροχόπτωση χαρακτηρίζεται από *διαλείπουσα* (intermittent), δηλαδή μη συνεχή, συμπεριφορά. Το γεγονός ότι εμφανίζονται πολλές μηδενικές τιμές στις εν λόγω χρονοσειρές δημιουργεί την ανάγκη χρήσης κατανομών που αναπαράγουν την πιθανότητα εμφάνισης μηδενικών τιμών και χαρακτηρίζονται από εξαιρετικά υψηλή ασυμμετρία. Τέτοιες κατανομές εξετάζονται στο Κεφάλαιο 4.

Ιδιαίτερη κατηγορία αποτελούν οι ακραίες τιμών των υδρολογικών μεγεθών, που συχνά αναλύονται χωριστά από το υπόλοιπο δείγμα. Οι τυπικές κατανομές που χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη περίπτωση, και το σχετικό μεθοδολογικό πλαίσιο, περιγράφονται στο Κεφάλαιο 3, που εστιάζει στις λεγόμενες κατανομές ακροτάτων.

3 Στατιστική ανάλυση ακραίων βροχοπτώσεων

3.1 Βασικές έννοιες στατιστικής ανάλυσης ακροτάτων

3.1.1 Ανελίξεις ακροτάτων

Στη στατιστική ανάλυση των πλημμυρικών διεργασιών, ενδιαφέρουν τα ακρότατα μεγέθη τους, δηλαδή τα μέγιστα των βροχοπτώσεων και πλημμυρικών παροχών. Κατά κανόνα, για τη μελέτη αυτών των μεγεθών σχηματίζεται η λεγόμενη *ανελέλιξη των στιγμιαίων ετήσιων μεγίστων* $Z_0(\tau)$, λαμβάνοντας σε κάθε υδρολογικό έτος τ μόνο μια τιμή, που είναι η στιγμιαία μέγιστη τιμή που εμφανίζεται κατά τη διάρκεια όλου του υδρολογικού έτους, δηλαδή:

$$Z_0(\tau) := \max \{X(t)\}, \tau - 1 \leq t < \tau \quad (3.1)$$

όπου $X(t)$ η ανελέλιξη σε συνεχή χρόνο. Παρόμοιος είναι ο ορισμός των ανελέιξεων μεγίστων που αναφέρονται σε συγκεκριμένη διάρκεια. Στην περίπτωση αυτή, αντί της μέγιστης ετήσιας στιγμιαίας τιμής λαμβάνεται είτε η μέγιστη ετήσια αθροιστική τιμή της εν λόγω μεταβλητής, στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (π.χ. μέγιστα ωριαία ύψη βροχής), είτε η αντίστοιχη μέγιστη ετήσια μέση τιμή της (π.χ. μέγιστες ωριαίες παροχές).

Προφανώς, οι ανελέιξεις των μεγίστων (όπως και των ελαχίστων) δεν έχουν περιοδικότητα, δεδομένου ότι λαμβάνεται μία μόνο τιμή ανά έτος, ούτε αυτοσυσχέτιση, καθώς πρόκειται για απομακρυσμένες χρονικά τιμές που προέρχονται από εντελώς διαφορετικά υδρομετεωρολογικά φαινόμενα. Το γεγονός αυτό διευκολύνει αρκετά τον μαθηματικό χειρισμό των συναφών κατανομών ακροτάτων. Από την άλλη πλευρά, επειδή πρόκειται για ακραία μεγέθη (π.χ. πλημμυρικές αιχμές), υπάρχει σημαντική αβεβαιότητα ακόμα και στην ίδια τη μέτρηση. Η αβεβαιότητα αυτή είναι περισσότερο εμφανής στην περιγραφή των πολύ ακραίων τιμών του δείγματος, δηλαδή στην απεικόνιση της ουράς της κατανομής.

Μια άλλη τυπική σειρά μεγίστων είναι η λεγόμενη *σειρά υπεράνω κατώφλιου* ή *σειρά μερικής διάρκειας*, η οποία προκύπτει από την ανελέλιξη διακριτού χρόνου $X_\Delta(k)$. Στην περίπτωση αυτή, αντί της μέγιστης τιμή κάθε υδρολογικού έτους, σχηματίζεται η σειρά όλων των τιμών που υπερβαίνουν ένα όριο c , ανεξάρτητα από τη χρονική εμφάνιση των τιμών αυτών στα διάφορα υδρολογικά έτη, δηλαδή:

$$\{W_\Delta(i), i = 1, 2, \dots, n\} := \{X_\Delta(k): X_\Delta(k) \geq c, k = 1, 2, \dots, n\} \quad (3.2)$$

Στην περίπτωση αυτή, η μεταβλητή i , η οποία επέχει θέση χρόνου, στην πραγματικότητα αντιπροσωπεύει απλώς τον αύξοντα αριθμό που έχει η κάθε τιμή στη σειρά των χρονικά διαδοχικών τιμών. Το κατώφλι c συνήθως επιλέγεται έτσι ώστε σε κάθε έτος να αντιστοιχεί κατά μέσο όρο μια τιμή μεγαλύτερη από το κατώφλι, με τρόπο ώστε να λαμβάνονται n τιμές σε σύνολο n υδρολογικών ετών. Το γεγονός ότι στις σειρές μερικής διάρκειας μπορεί να εμφανίζονται τιμές που αντιστοιχούν σε γειτονικές θέσεις του πραγματικού χρόνου ενδέχεται να εισάγει μη αμελητέα στοχαστική εξάρτηση στις διαδοχικές τιμές της ανελέιξης. Αν είναι επιθυμητή η κατασκευή σειράς ανεξάρτητων τιμών θα πρέπει είτε να τεθεί και ένα όριο ελάχιστης χρονικής απόστασης διαδοχικών τιμών (ώστε να εξασφαλιστεί η ανεξαρτησία των γεγονότων), ή να χρησιμοποιηθούν άλλες εμπειρικές μέθοδοι (βλ. Kottegod, 1980, σ. 247).

3.1.2 Ασυμπτωτικές κατανομές ακροτάτων

Ο όρος *ασυμπτωτική κατανομή ακροτάτων* αναφέρεται στην οριακή κατανομή της ακρότατης (δηλαδή της μεγαλύτερης ή, εναλλακτικά, της μικρότερης) από k ισόνομες μεταβλητές, όταν ο αριθμός k τείνει στο άπειρο. Συμβολικά, αν Y_1, \dots, Y_k είναι μια ακολουθία ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και

$$X_k = \max(Y_1, \dots, Y_k) \quad (3.3)$$

τότε η αντίστοιχη ασυμπτωτική κατανομή μεγίστων είναι η

$$F_X(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{X_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(X_k \leq y) \quad (3.4)$$

Αντίστοιχα ορίζεται και η ασυμπτωτική κατανομή ελαχίστων, που προφανώς δεν έχει χρησιμότητα στην ανάλυση των πλημμυρικών διεργασιών, αλλά αφορά σε άλλου τύπου υδρολογικές εφαρμογές (εκτίμηση ελάχιστων θερινών παροχών, ανάλυση ξηρασιών, κτλ.). Στην περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές Y_i είναι ανεξάρτητες, ο προσδιορισμός της $F_X(x)$ απλοποιείται αρκετά, δεδομένου ότι:

$$F_{X_k}(x) = [F_Y(x)]^k \quad (3.5)$$

όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί παίρνοντας υπόψη την ανεξαρτησία των μεταβλητών.

Σε πολλές περιπτώσεις η παραπάνω ασυμπτωτική κατανομή δεν εξαρτάται από το ακριβές σχήμα της αρχικής συνάρτησης κατανομής $F_Y(y)$. Οι περιπτώσεις αυτές, που έχουν μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, έχουν μελετηθεί σε λεπτομέρεια από τον Gumbel (1958). Αναφέρονται σε τυχαίες μεταβλητές Y_i ανεξάρτητες και ισόνομες, των οποίων οι κατανομές ικανοποιούν ορισμένες γενικές συνθήκες.

3.1.3 Η σημασία της ανάλυσης ακροτάτων στην υδρολογία πλημμυρών

Η σημασία των κατανομών ακροτάτων στην τεχνική υδρολογία προκύπτει από την ομοιότητα της έννοιας των ακροτάτων, όπως ορίζεται πιο πάνω, με την ανέλιξη ακροτάτων, όπως έχει οριστεί παραπάνω. Έτσι, για παράδειγμα, αν συμβολίσουμε με Y_i την ημερήσια παροχή σε μια διατομή ποταμού κατά την ημέρα i και με X_{365} την μέγιστη ημερήσια παροχή κατά τη διάρκεια ενός έτους, είναι προφανής η σύνδεση των μεταβλητών αυτών με την (3.3). Στα πρακτικά προβλήματα αντιπλημμυρικού σχεδιασμού αυτό που ενδιαφέρει είναι η κατανομή μεταβλητών, όπως η X_{365} του παραδείγματος (παρά η κατανομή της Y_i). Ωστόσο, οι αυστηρές προϋποθέσεις, κάτω από τις οποίες προκύπτουν θεωρητικά οι κατανομές ακροτάτων, σπάνια ικανοποιούνται από τις φυσικές υδρολογικές μεταβλητές. Στο παραπάνω παράδειγμα, οι διάφορες Y_i ούτε ανεξάρτητες ούτε ισόνομες μπορούν να θεωρηθούν. Εξ άλλου η σύγκλιση προς την οριακή κατανομή είναι κατά κανόνα πολύ αργή. Για όλους αυτούς τους λόγους δεν είναι ποτέ αυτονόητο ότι μια συγκεκριμένη μέγιστη ή ελάχιστη υδρολογική μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή που προβλέπεται θεωρητικά. Η υιοθέτηση της συγκεκριμένης κατανομής θα πρέπει να γίνεται μετά από έλεγχο προσαρμογής στα πραγματικά δεδομένα.

Στο υποκεφάλαιο 3.2 εξετάζονται οι πιο διαδεδομένες ασυμπτωτικές κατανομές ακροτάτων της τεχνικής υδρολογίας, και συγκεκριμένα οι κατανομές μεγίστων, που είναι κατάλληλες για την στατιστική ανάλυση των μεγίστων υψών βροχής και των πλημμυρικών αιχμών. Εκτός από τις ασυμπτωτικές κατανομές, συχνά εφαρμόζονται επιτυχώς και άλλοι τύποι κατανομών για την περιγραφή των υδρολογικών μεγίστων, όπως είναι η λογαριθμοκανονική κατανομή, οι κατανομές γάμα δύο και τριών παραμέτρων, η Log Pearson III και η γενικευμένη κατανομή Pareto. Οι κατανομές αυτές εξετάζονται στο υποκεφάλαιο 3.3.

3.2 Τυπικές κατανομές μεγίστων στην υδρολογία

3.2.1 Κατανομή Gumbel μεγίστων

Η κατανομή Gumbel, που είναι γνωστή και ως *κατανομή μεγίστων τύπου I* (extreme value I, EV1), είναι μια τυπική ασυμπτωτική κατανομή ακροτάτων, που δίνεται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \lambda \exp\{-\lambda(x-c) - \exp[-\lambda(x-c)]\} \quad (3.6)$$

όπου c παράμετρος θέσης και $\lambda > 0$ παράμετρος κλίμακας. Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x) = \exp\{-\exp[-\lambda(x-c)]\} \quad (3.7)$$

Λόγω της απλής μαθηματικής έκφρασης της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, οι τυπικοί υπολογισμοί είναι αναλυτικοί, καθώς η συνάρτηση κατανομής προκύπτει άμεσα, για τη δεδομένη τιμή της μεταβλητής x . Η αντίστροφη συνάρτηση Gumbel υπολογίζεται επίσης αναλυτικά. Συγκεκριμένα, το u -ποσοστημόριο της κατανομής δίνεται από την:

$$x_u = c - \frac{\ln(-\ln u)}{\lambda} \quad (3.8)$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ως συνάρτηση της περιόδου επαναφοράς T στην μορφή:

$$x_T = c - \frac{\ln[-\ln(1-1/T)]}{\lambda} \quad (3.9)$$

Οι παράμετροι της κατανομής εκτιμώνται συναρτήσει των στατιστικών χαρακτηριστικών του δείγματος, και συγκεκριμένα της μέσης τιμής \bar{x} και της τυπικής απόκλισης s_X . Η εκτίμηση με τη μέθοδο των ροπών γίνεται από τις σχέσεις:

$$\lambda = 1 / (0.78 s_X), \quad c = \bar{x} - 0.45 s_X \quad (3.10)$$

Για τη γραφική απεικόνιση της κατανομής Gumbel χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός:

$$k = -\ln[-\ln(1-1/T)] \quad (3.11)$$

όπου k η ανηγμένη μεταβλητή Gumbel. Με τον παραπάνω μετασχηματισμό, η κατανομή απεικονίζεται ως ευθεία.

Εφόσον οι παράμετροι της κατανομής Gumbel εκτιμώνται με τη μέθοδο των ροπών, τα όρια εμπιστοσύνης του u -ποσοστημορίου για βαθμό εμπιστοσύνης γ για δείγμα μεγέθους n εκτιμώνται από την προσεγγιστική σχέση:

$$\tilde{x}_u = (\bar{x} + k_u s_X) \pm z_{(1+\gamma)/2} \frac{s_X}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 1.1396 k_u + 1.1 k_u^2} \quad (3.12)$$

όπου:

$$k_u = -0.45 - 0.7797 \ln[-\ln(1-u)] \quad (3.13)$$

και $z_{(1+\gamma)/2}$ το $(1+\gamma)/2$ ποσοστημόριο της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής.

3.2.2 Γενική Ακραίων Τιμών

Μια συνάρτηση κατανομής που αποδεικνύεται κατάλληλη για την περιγραφή ακραίων υδρολογικών γεγονότων σε μεγάλο εύρος περιπτώσεων είναι η κατανομή *Γενική Ακραίων Τιμών* (ΓΑΤ· διεθνώς General Extreme Value – GEV – distribution). Αυτή η κατανομή ενσωματώνει τις κατανομές ακραίων τιμών τύπου I, II, και III και έχει την έκφραση:

$$F(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \kappa \left(\frac{x}{\lambda} - \psi \right) \right]^{-1/\kappa} \right\} \quad x \geq \lambda (\psi - 1/\kappa) \quad (3.14)$$

όπου $F(x)$ η συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής x , και $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ και ψ οι παράμετροι σχήματος, κλίμακας και θέσης, αντίστοιχα. (Η περίπτωση $\kappa < 0$, αν και μαθηματικά είναι δυνατή, δεν είναι κατάλληλη για μέγιστες εντάσεις βροχής, γιατί συνεπάγεται άνω φραγμένη τιμή της έντασης, γεγονός που αντίκειται στη φυσική πραγματικότητα). Η μεταβλητή x αντιπροσωπεύει είτε την ένταση βροχής i είτε, ισοδύναμα, το γινόμενο $i b(d)$ (για δεδομένη έκφραση της $b(d)$)· στην τελευταία περίπτωση η επίλυση της (3.14) ως προς x δίνει αμέσως τη συνάρτηση $a(T)$ και, στη συνέχεια, η επίλυση ως προς i δίνει αμέσως την έκφραση της όμβριας καμπύλης χωρίς να απαιτείται καμία άλλη πρόσθετη, εμπειρική ή όχι, παραδοχή (Κουτσογιάννης, 1997· Koutsoyiannis *et. al.*, 1998).

Η (3.14) επιλύεται άμεσα ως προς x , οπότε με την προϋπόθεση ότι $F(x) = 1 - 1/T$ (προϋπόθεση που ισχύει για σειρές ετήσιων μέγιστων) προκύπτει:

$$x_T = \lambda \left\{ \psi + \frac{\left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\kappa} - 1}{\kappa} \right\} = \lambda' \left\{ \psi' + \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\kappa} \right\} \quad (3.15)$$

όπου για απλοποίηση έχει τεθεί $\lambda' = \lambda / \kappa$ and $\psi' = \kappa \psi - 1$.

Για $\kappa = 0$, η κατανομή ΓΑΤ μεταπίπτει στην κατανομή μεγίστων τύπου I (Gumbel), οπότε η (3.14) παίρνει τη ειδική μορφή:

$$F(x) = \exp [-\exp (-x/\lambda + \psi)] \quad (3.16)$$

όπου λ και ψ παράμετροι κλίμακας και θέσης. Αντίστοιχα, η (3.15) παίρνει τη μορφή:

$$x_T = \lambda \left\{ \psi - \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right] \right\} \quad (3.17)$$

Για $\kappa = 1/\psi$ (ή ισοδύναμα $\psi' = 0$), η ΓΑΤ μεταπίπτει στην κατανομή μεγίστων τύπου II.

Ειδικότερα, η εκτίμηση των παραμέτρων λ , ψ και κ της κατανομής ΓΑΤ μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους της στατιστικής, από τις οποίες εδώ παρουσιάζονται οι δύο συνηθέστερες. Η πρώτη είναι η διαδεδομένη μέθοδος των ροπών, η οποία βασίζεται στις εξισώσεις:

$$C_s = \frac{\Gamma(1-3\kappa) - 3\Gamma(1-2\kappa)\Gamma(1-\kappa) + 2\Gamma^3(1-\kappa)}{[\Gamma(1-2\kappa) - \Gamma^2(1-\kappa)]^{3/2}} \quad (3.18)$$

$$\lambda = \frac{\kappa \sigma}{\sqrt{\Gamma(1-2\kappa) - \Gamma^2(1-\kappa)}} \quad (3.19)$$

$$\psi = \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\Gamma(1-\kappa) - 1}{\kappa} \quad (3.20)$$

όπου μ η μέση τιμή, σ η τυπική απόκλιση και C_s ο συντελεστής ασυμμετρίας της κατανομής, ενώ $\Gamma(\cdot)$ είναι η συνάρτηση γάμα. Η (3.18) λύνεται μόνο αριθμητικά και δίνει την παράμετρο κ . Μια πολύ καλή προσέγγιση δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση (Koutsoyiannis, 2004b):

$$\kappa = \frac{1}{3} - \frac{1}{0.31 + 0.91C_s + \sqrt{(0.91C_s)^2 + 1.8}} \quad (3.21)$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε σχετικά μικρά δείγματα 24ωρων υψών βροχής, αντί της (3.18) μπορούμε να χρησιμοποιούμε βιβλιογραφικές τιμές του κ (βλ. 3.2.3), δεδομένου ότι η εκτίμηση του συντελεστή ασυμμετρίας C_s της κατανομής είναι επισφαλής.

Η δεύτερη είναι η μέθοδος των L -ροπών, μια σχετικά νέα μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων (βλ. εδάφιο 2.3.2). Σε αντίθεση με την κλασική μέθοδο, η μέθοδος των L -ροπών αποφεύγει την ύψωση στο τετράγωνο ή στον κύβο των τιμών του δείγματος: για το λόγο αυτό οδηγεί σε πιο εύρωστες εκτιμήσεις, αφού δεν αποδίδει υπερβολική σημασία σε τυχόν εμφάνιση μίας ή περισσότερων εξαιρετικά ακραίων τιμών στο δείγμα. Η μέθοδος στηρίζεται στις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\kappa = 7.8 c - 1.43 c^2 \quad (3.22)^1$$

$$\lambda = \frac{\kappa \lambda_2}{\Gamma(1 - \kappa) (2^\kappa - 1)} \quad (3.23)$$

$$\psi = \frac{\lambda_1}{\lambda} - \frac{\Gamma(1 - \kappa) - 1}{\kappa} \quad (3.24)$$

όπου:

$$c := \frac{\ln 2}{\ln 3} - \frac{2 \lambda_2}{\lambda_3 + 3 \lambda_2} \quad (3.25)$$

και λ_1 , λ_2 και λ_3 οι τρεις πρώτες L -ροπές της κατανομής. Αμερόληπτες εκτιμήσεις των τριών πρώτων L -ροπών δίνονται από τις εξισώσεις (βλ. Stedinger *et al.*, 1993, σ. 18.6):

$$\hat{\lambda}_1 = b_0 \quad (3.26)$$

$$\hat{\lambda}_2 = 2 b_1 - b_0 \quad (3.27)$$

$$\hat{\lambda}_3 = 6 b_2 - 6 b_1 + b_0 \quad (3.28)$$

όπου b_0 , b_1 και b_2 οι εκτιμήσεις των πιθανοτικά σταθμισμένων ροπών (probability-weighted moments). Οι τελευταίες δίνονται από τις εξισώσεις:

$$b_0 = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{(j)} \quad (3.29)$$

$$b_1 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) x_{(j)} \quad (3.30)$$

$$b_2 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{j=1}^{n-2} (n-j)(n-j-1) x_{(j)} \quad (3.31)$$

όπου n το μέγεθος του δείγματος και $x_{(j)}$ ($j = 1, \dots, n$) η τιμή του δείγματος που έχει σειρά j στο καταταγμένο σε φθίνουσα σειρά δείγμα.

¹ Οι συντελεστές που φαίνονται στην (3.22) είναι ακριβέστεροι από αυτούς της βιβλιογραφίας (π.χ. Stedinger *et al.*, 1993, σ. 18.18) για θετικές τιμές του κ που είναι και η συνηθέστερη περίπτωση. Για $\kappa < 0$ είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται οι συντελεστές της βιβλιογραφίας, δηλαδή $\kappa = 7.859 c - 2.9554 c^2$.

3.2.3 Σχόλια σχετικά με την επιλογή της συνάρτησης κατανομής

Είναι γνωστό ότι η κατανομή Gumbel έχει γίνει αποδεκτή ευρύτατα στην Ελλάδα και διεθνώς για την περιγραφή μέγιστων εντάσεων βροχής, χρησιμοποιώντας συνήθως δείγματα μήκους λίγων δεκάδων ετών. Ωστόσο, η μελέτη ενός δείγματος αρκετά μεγαλύτερου μήκους, ήτοι του δείγματος ημερήσιων μέγιστων βροχοπτώσεων του Αστεροσκοπείου Αθηνών, μήκους 136 ετών, έδειξε ότι η κατανομή Gumbel απορρίπτεται στατιστικώς, παρόλο που δεν θα απορριπτόταν αν το μήκος του δείγματος ήταν μικρότερο (Σχήμα 3.1). Αντίστοιχα είναι τα συμπεράσματα για την κατανομή μεγίστων τύπου II. Αντίθετα, η κατανομή ΓΑΤ με παράμετρο σχήματος $\kappa = 0.16$ έως 0.19 φάνηκε να είναι κατάλληλη για το υπόψη δείγμα (Koutsoyiannis and Baloutsos, 2000· Koutsoyiannis, 2004a, b).

Επιπλέον, από στατιστική διερεύνηση (Koutsoyiannis, 1999, 2004b) των δεδομένων από 2645 σταθμούς όλου του κόσμου, με συνολικό πλήθος μετρήσεων 95 000 σταθμών-ετών, τα οποία είχαν μελετηθεί παλιότερα από τον Hershfield (1961, 1965) και αποτέλεσαν τη βάση για τη διατύπωση της φερώνυμης μεθόδου εκτίμησης της πιθανής μέγιστης κατακρήμνισης διαπιστώθηκε ότι: (α) η κατανομή ΓΑΤ είναι γενικά κατάλληλη για ετήσιες σειρές μέγιστων βροχοπτώσεων, (β) η τιμή που υπολογίζεται τη μέθοδο Hershfield (1961, 1965) ως ΠΜΚ, αντιστοιχεί σε περίοδο επαναφοράς περίπου 60 000 ετών, και (γ) η τιμή της παραμέτρου σχήματος της κατανομής ΓΑΤ δίνεται ως συνάρτηση της μέσης τιμής της ετήσιας μέγιστης 24ωρης βροχόπτωσης h_{\max} , από τη σχέση:

$$\kappa = 0.183 - 0.00049 h_{\max} \quad (3.32)$$

όπου η τιμή της h_{\max} δίνεται σε mm. Η σύγκριση της παραπάνω εναλλακτικής διατύπωσης της μεθόδου Hershfield με την κατανομή που προκύπτει από το δείγμα 136 ετών του Αστεροσκοπείου Αθηνών έδειξε πλήρη συμφωνία (Koutsoyiannis, 1999).

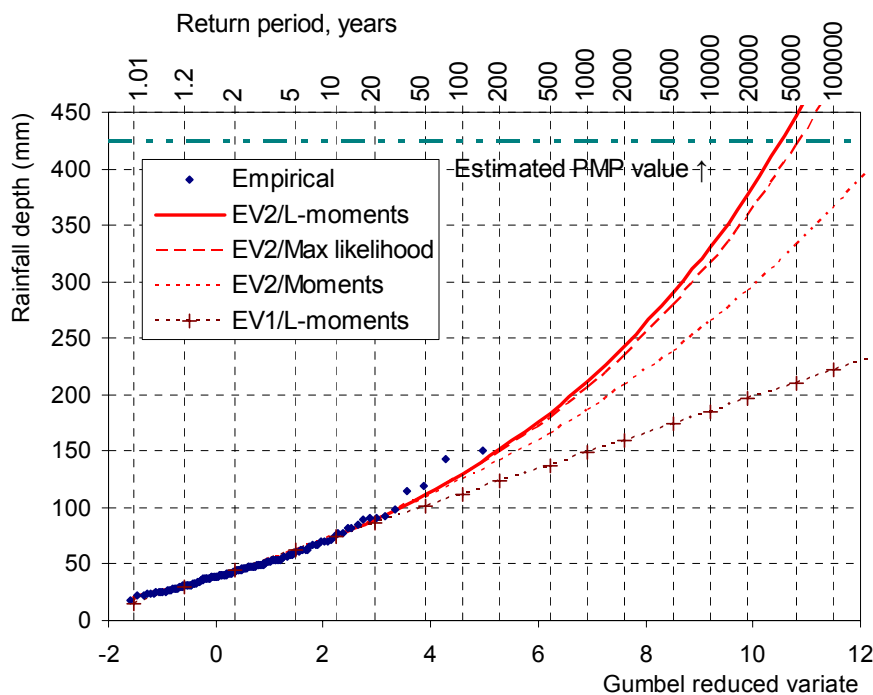
Ειδικότερα, στη διερεύνηση του Koutsoyiannis (2004b) εξετάστηκε μια σειρά μεγάλου μήκους δειγμάτων ημερήσιας βροχής από 169 σταθμούς από όλο τον κόσμο. Καθένα από τα δείγματα είχε τουλάχιστον 100 χρόνια μετρήσεων. Η στατιστική ανάλυση των 169 δειγμάτων (από τα οποία προέκυψε ένα δείγμα 18 065 σημείων, που απεικονίζονται στο Σχήμα 3.2), έδειξε ότι υπάρχουν σημαντικές διαφοροποιήσεις στις μέσες τιμές των επιμέρους σταθμών, τόσο μεταξύ διάφορων κλιματικών ζωνών, όσο και μέσα στην κάθε ζώνη. Η προσαρμογή της κατανομής ΓΑΤ στους επιμέρους σταθμούς έδειξε να είναι ικανοποιητική. Ειδικότερα στο 92% των δειγμάτων προέκυψε θετικός συντελεστής σχήματος, πράγμα που αποτελεί σοβαρή ένδειξη για γενικευμένη εφαρμογή της κατανομής ΓΑΤ με θετική παράμετρο κ . Κατ' αρχάς φάνηκε να υπάρχει αξιοσημείωτη διασπορά στις 169 επιμέρους τιμές των συντελεστών σχήματος, η οποία όμως δεν φάνηκε να σχετίζεται με τις κλιματικές διαφοροποιήσεις. Ίδια συμπεριφορά έδειξαν και μια σειρά άλλων αδιάστατων στατιστικών χαρακτηριστικών.

Λεπτομερέστερη διερεύνηση κατέδειξε ότι οι διασπορές που εμφανίζονται οφείλονται πρωτίστως σε στατιστικούς λόγους παρά σε φυσικά (κλιματικά) αίτια. Συγκεκριμένα, με προσομοιώσεις Monte Carlo αποδείχτηκε ότι η διασπορά όλων των αδιαστατοποιημένων στατιστικών παραμέτρων εξηγείται, πρακτικώς στο σύνολό της, από στατιστικούς (δειγματοληπτικούς) λόγους, ενώ για τις διαφοροποιήσεις που παρατηρούνται στις μέσες τιμές δεν αρκούν οι στατιστικοί λόγοι, αλλά χρειάζεται να υποτεθούν επιπρόσθετα φυσικά αίτια. Με βάση τις αναλύσεις αυτές προέκυψε το εντυπωσιακό συμπέρασμα ότι αν οι τιμές κάθε σταθμού αναχθούν με διαίρεση με τη μέση τιμή του δείγματος του υπόψη σταθμού, τότε όλα τα ανηγμένα δείγματα έχουν πρακτικώς την ίδια κατανομή, ανεξάρτητα από την κλιματική ζώνη ή τη γεωγραφική και υψομετρική θέση. Ως αποτέλεσμα, μπορούν να ενοποιηθούν όλα τα ανηγμένα δείγματα, οπότε μπορεί να αποκτηθεί ευκρινέστερη εικόνα για

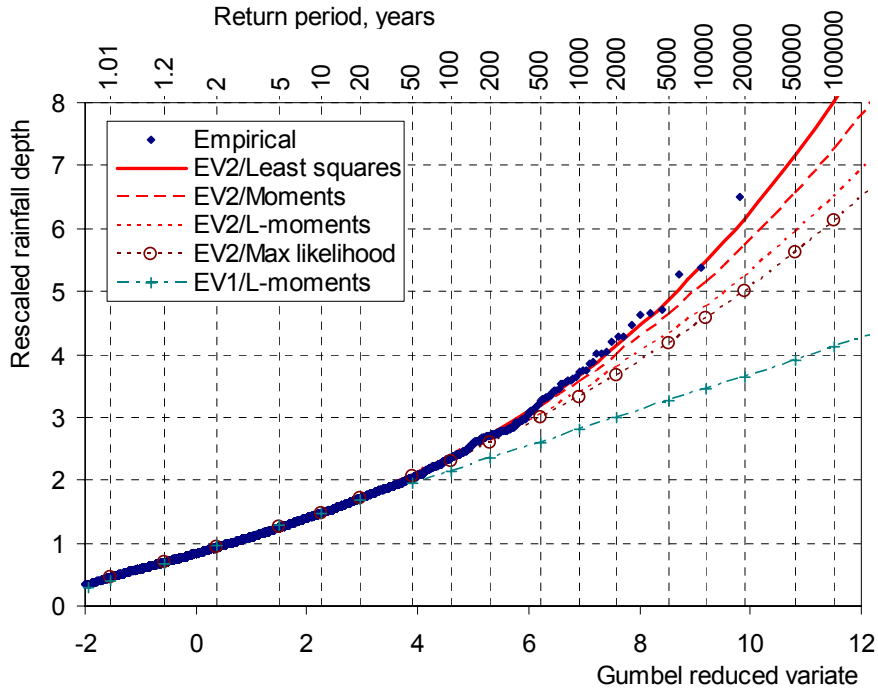
την ενιαία αυτή κατανομή. Τα τελικά συμπεράσματα αυτής της μελέτης είναι τα ακόλουθα: (α) η κατανομή Gumbel είναι ακατάλληλη, (β) η κατανομή ΓΑΤ προσαρμόζεται πολύ καλύτερα στις εμπειρικές πιθανότητες, και (γ) η τελική εκτίμηση του συντελεστή σχήματος κ της κατανομής ΓΑΤ για το σύνολο των δεδομένων είναι $\kappa = 0.15$.

Τα παραπάνω συνηγορούν στην αποδοχή της ΓΑΤ ως κατάλληλης κατανομής για μέγιστες βροχοπτώσεις. Αντίθετα, η χρήση της κατανομής Gumbel (EV1) θα πρέπει να αποφεύγεται, δεδομένου ότι οδηγεί σε σοβαρή υπεκτίμηση των εντάσεων βροχής για μεγάλες περιόδους επαναφοράς, συγκεκριμένα για $T > 50$ έτη. Σε περίπτωση που υπάρχει μεγάλου μήκους δείγμα, η παράμετρος σχήματος της κατανομής ΓΑΤ μπορεί να εκτιμάται άμεσα από το δείγμα. Σε αντίθετη περίπτωση, προτείνεται η εφαρμογή της «παγκόσμιας» βιβλιογραφικής τιμής $\kappa = 0.15$.

Γενικά, στην ανάλυση ακραίων βροχοπτώσεων, είναι εξαιρετικά σημαντική η εφαρμογή στατιστικών μοντέλων που χαρακτηρίζονται από τη λεγόμενη μακριά ουρά, δηλαδή την απότομη καμπύλωση του γραφήματος της κατανομής στις μεγάλες περιόδους επαναφοράς (Papalexiou *et al.*, 2012). Τυπικές κατανομές που δημιουργούν ιδιαίτερα έντονη ουρά είναι η Λογαριθμοκανονική, η Γάμα και η Pareto, που θεωρούνται κατάλληλες για την προσαρμογή δειγμάτων μέγιστων βροχοπτώσεων, παρόλο που πρόκειται για κατανομές γενικού σκοπού. Οι εν λόγω κατανομές εξετάζονται στο υποκεφάλαιο 3.3.



Σχήμα 3.1: Προσαρμογή των κατανομών Gumbel (EV1) και GEV στην εμπειρική κατανομή του δείγματος μέγιστων ημερήσιων βροχοπτώσεων της Αθήνας.



Σχήμα 3.2: Προσαρμογή των κατανομών Gumbel (EV1) και GEV στην εμπειρική κατανομή του δείγματος μέγιστων ημερήσιων βροχοπτώσεων του ενοποιημένου δείγματος των 169 σταθμών από όλο τον κόσμο (18 065 σημεία).

3.3 Λοιπές κατανομές για την περιγραφή υδρολογικών μεγίστων

3.3.1 Λογαριθμοκανονική κατανομή δύο και τριών παραμέτρων

Η λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων προκύπτει από την κανονική κατανομή και το μετασχηματισμό:

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = \exp(y) \quad (3.33)$$

Συνεπώς, η μεταβλητή X ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων, αν η Y ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\bar{y}, \sigma_Y)$. Άμεση συνέπεια του παραπάνω μετασχηματισμού, είναι το γεγονός ότι η μεταβλητή X είναι πάντα θετική και, επιπλέον, έχει πάντα θετική ασυμμετρία. Κατά συνέπεια, το σχήμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας είναι πάντα κωδωνοειδές και θετικά ασύμμετρο, το οποίο την καθιστά κατάλληλη για την περιγραφή ακραίων υδρολογικών μεγεθών.

Οι τυπικοί υπολογισμοί της λογαριθμοκανονικής κατανομής βασίζονται στους αντίστοιχους υπολογισμούς της κανονικής κατανομής. Η τυποποιημένη μεταβλητή ορίζεται ως:

$$y_u = \bar{y} + z_u \sigma_Y \Leftrightarrow x_u = \exp(\bar{y} + z_u \sigma_Y) \quad (3.34)$$

όπου z_u το u -ποσοστημόριο της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής. Το τελευταίο μπορεί να βρεθεί από πίνακες ή να υπολογιστεί αριθμητικά.

Για την εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής, η μέθοδος των ροπών δίνει:

$$\sigma_Y = \sqrt{\ln(1 + \sigma_X^2 / \bar{x}^2)} \quad (3.35)$$

$$\bar{y} = \ln \bar{x} - \sigma_Y^2 / 2 \quad (3.36)$$

ενώ η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας δίνει:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \ln x_i / n \quad (3.37)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \bar{y})^2 / n} \quad (3.38)$$

Επέκταση της παραπάνω κατανομής είναι λογαριθμοκανονική κατανομή τριών παραμέτρων ή *κατανομή Galton*, η οποία βασίζεται στον μετασχηματισμό:

$$y = \ln(x - c) \Leftrightarrow x = c + \exp(y) \quad (3.39)$$

όπου c παράμετρος θέσης, που αποτελεί και το κάτω όριο της μεταβλητής. Η προσθήκη μίας ακόμη παραμέτρου εξασφαλίζει καλύτερη προσαρμογή της κατανομής στα δεδομένα, καθώς η τρίτη παράμετρος επιτρέπει τη διατήρηση του συντελεστή ασυμμετρίας της μεταβλητής.

3.3.2 Κατανομή γάμα τριών παραμέτρων (Pearson III)

Η κατανομή γάμα τριών παραμέτρων ή κατανομή Pearson III, ορίζεται από την παράμετρο θέσης c , την παράμετρο κλίμακας $\lambda > 0$ και την παράμετρο σχήματος $\kappa > 0$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής είναι:

$$f_x(x) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} (x - c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(x-c)} \quad (3.40)$$

όπου $\Gamma(\kappa)$ η ομώνυμη συνάρτηση γάμα, η οποία δίνεται από την:

$$\Gamma(\kappa) = \int_0^\infty x^{\kappa-1} e^{-x} dx \quad (3.41)$$

Οι παράμετροι της κατανομής, εκτιμώμενες με την μέθοδο των ροπών, είναι:

$$\kappa = \frac{4}{\zeta_X^2} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\kappa}}{s_X} \quad c = \bar{x} - \frac{\kappa}{\lambda} \quad (3.42)$$

όπου \bar{x} η μέση τιμή, s_X η τυπική απόκλιση και ζ_X ο συντελεστής ασυμμετρίας του δείγματος. Η παράμετρος θέσης c , η οποία αποτελεί το κάτω όριο της μεταβλητής x , επιτρέπει την καλύτερη προσαρμογή της κατανομής στα δεδομένα.

Το σχήμα της κατανομής εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου σχήματος κ . Για $\kappa = 1$ η κατανομή ταυτίζεται με την εκθετική. Για μεγάλες τιμές της παραμέτρου ($15 < \kappa < 30$), η κατανομή γάμα προσεγγίζει την κανονική. Τέλος, για ακέραιο κ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής είναι:

$$f_x(x) = \frac{\lambda^\kappa}{(\kappa - 1)!} (x - c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(x-c)} \quad (3.43)$$

Η παραπάνω είναι γνωστή και ως *κατανομή Erlang*. Αποδεικνύεται ότι η τυχαία μεταβλητή x που ακολουθεί την κατανομή Erlang προκύπτει ως άθροισμα κ τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Η κατανομή γάμα είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση. Κατά συνέπεια το άθροισμα δυο ανεξάρτητων μεταβλητών x_1, x_2 που ακολουθούν κατανομές γάμα με κοινή παράμετρο

κλίμακας λ και παραμέτρους σχήματος κ_1 και κ_2 αντίστοιχα, ακολουθεί επίσης κατανομή γάμα, με παραμέτρους λ και $\kappa_1 + \kappa_2$.

3.3.3 Κατανομή Log-Pearson III

Σε αντιστοιχία με τη λογαριθμοκανονική κατανομή, η κατανομή Log-Pearson III προέρχεται από την κατανομή Pearson III, με την εφαρμογή του μετασχηματισμού:

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = \exp(y) \quad (3.44)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Log-Pearson III μπορεί να πάρει διάφορα σχήματα, όπως κωδωνοειδές, ανεστραμμένο J, U, κτλ. Επιπλέον, η τρίτη ροπή της κατανομής μπορεί να γίνει ακόμη και άπειρη, για $\lambda \leq 3$. Γενικά, η κατανομή μπορεί να έχει πολύ μεγάλο συντελεστή ασυμμετρίας, και για το λόγο αυτό θεωρείται κατάλληλη για την περιγραφή ακραίων πλημμυρικών παροχών. Ειδικά στις ΗΠΑ έχει υιοθετηθεί ως η τυπική κατανομή για τη μελέτη πλημμυρών, από όλες τις κρατικές υπηρεσίες.

Οι υπολογισμοί της κατανομής Log-Pearson III βασίζονται στους αντίστοιχους υπολογισμούς της κατανομής Pearson III. Ωστόσο, η εκτίμηση των παραμέτρων της είτε με τη μέθοδο των ροπών, είτε με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας απαιτεί μια αρκετά πολύπλοκη διαδικασία (Bobée and Ashkar, 1991, σ. 85). Για το λόγο αυτό, κατά κανόνα εφαρμόζεται η απλούστερη έμμεση μέθοδος των ροπών. Σύμφωνα με αυτή, από το αρχικό δείγμα των x_i υπολογίζονται οι τιμές $y_i = \ln x_i$. Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά του μετασχηματισμένου δείγματος y_i και τέλος εφαρμόζονται οι εξισώσεις της μεθόδου των ροπών για τη μεταβλητή Y , που είναι παρόμοιοι με την κατανομή Pearson III.

3.3.4 Γενικευμένη κατανομή Pareto

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της γενικευμένης κατανομής Pareto είναι:

$$f_X(x) = \frac{1}{a} \left(1 - \kappa \frac{x-c}{a} \right)^{1/\kappa-1} \quad (3.45)$$

όπου c παράμετρος θέσης, $a > 0$ παράμετρος κλίμακας και κ παράμετρος σχήματος, που εκτιμώνται συναρτήσει της μέσης τιμής, της διασποράς και του συντελεστή ασυμμετρίας του δείγματος. Συγκεκριμένα:

Η γενικευμένη κατανομή Pareto χρησιμοποιείται στην τεχνική υδρολογία για την περιγραφή μεταβλητών που ξεπερνούν ένα δεδομένο κατώφλι. Κατά συνέπεια, είναι κατάλληλη για την ανάλυση μεταβλητών που προέρχονται από σειρές μετρικής διάρκειας.

3.4 Ανάλυση μέγιστων ημερήσιων βροχοπτώσεων

Αν και για τις μελέτες πλημμυρών είναι επιθυμητή η στατιστική ανάλυση των υψών βροχής σε μικρές χρονικές κλίμακες (ακόμα και λίγων λεπτών), αυτό προϋποθέτει την ύπαρξη καταγραφών από βροχογράφους. Ωστόσο, η βασική πληροφορία που διατίθεται στις πλείστες των περιπτώσεων αναφέρεται σε παρατηρήσεις συμβατικών βροχομέτρων, από τις οποίες λαμβάνονται τα ημερήσια δείγματα βροχόπτωσης, από τα οποία λαμβάνονται τα δείγματα μεγίστων. Τονίζεται ότι η μέγιστη ημερήσια βροχόπτωση δεν ταυτίζεται, κατ' ανάγκη, με τη μέγιστη 24ωρη (κατά μέσο όρο, είναι μικρότερη κατά περίπου 13%, βλ. Πίνακα 5.1), παρόλο που στις συνήθεις αναλύσεις οι δύο έννοιες λαμβάνονται ως ισοδύναμες.

Θεωρητικά, αν η κατανομή της ημερήσιας βροχόπτωσης είναι γνωστή, ή μπορεί να εκτιμηθεί με εμπιστοσύνη, τότε με βάση την θεωρία ακραίων τιμών, η κατανομή των ημερήσιων ετήσιων μεγίστων μπορεί να προσεγγιστεί με έναν από τους τρεις τύπους κατανομών ακροτάτων: (α) τύπος I, γνωστός ως Gumbel, (β) τύπος II, γνωστός ως Fréchet, και (γ) τύπος III, γνωστός ως ανεστραμμένος Weibull. Ωστόσο, συνήθως η γεννήτρια κατανομή δεν είναι γνωστή και πολλές φορές μόνο τα δείγματα των ετήσιων μεγίστων είναι διαθέσιμα. Έτσι, το ερώτημα που φυσικά προκύπτει είναι ποιος από τους τρεις τύπους περιγράφει καλύτερα τα ετήσια μέγιστα της ημερήσιας βροχόπτωσης.

Σε πρόσφατη ανάλυση 15 137 δειγμάτων ετήσιων μεγίστων ημερήσιας βροχόπτωσης από όλο τον κόσμο, με μήκη που κυμαίνονται από 40 ως 163 έτη, προσαρμόστηκε η Γενική Ακραίων Τιμών (GEV), που περιέχει και τους τρεις τύπους, ως ειδικές περιπτώσεις για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου σχήματος (Papalexiou and Koutsoyiannis, 2012). Από τις αναλύσεις προέκυψε ότι η παράμετρος σχήματος κ ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέση τιμή 0.114 και τυπική απόκλιση 0.045. Η μέση τιμή είναι κοντά στην προτεινόμενη εκτιμήτρια $\kappa = 0.15$, που αναφέρθηκε στο εδάφιο 3.2.3.

Η εν λόγω παράμετρος διαφοροποιείται σε παγκόσμια κλίμακα, και μάλιστα σε ορισμένες περιοχές γίνεται αρνητική. Ωστόσο, η εφαρμογή αρνητικών τιμών της παραμέτρου σχήματος πρέπει να αποφεύγεται, καθώς μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική υποεκτίμηση των μεγεθών σχεδιασμού.

4 Ανάλυση βροχοπτώσεων σε μορφή χρονοσειράς

4.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

Στα λεγόμενα υδρολογικά μοντέλα συνεχούς προσομοίωσης, απαιτείται η χρήση συνθετικών χρονοσειρών βροχόπτωσης, οι οποίες παράγονται από κάποιο στοχαστικό μοντέλο. Το τυπικό χρονικό βήμα των εν λόγω μοντέλων είναι από ωριαίο έως ημερήσιο. Κατά συνέπεια, η βροχόπτωση, που αποτελεί το κύριο δεδομένο εισόδου των μοντέλων, πρέπει να δοθεί με τη μορφή ωριαίας ή ημερήσιας χρονοσειράς, αντίστοιχα. Οι συνθετικές χρονοσειρές οφείλουν να είναι στατιστικά συνεπείς με τα ιστορικά δείγματα, δηλαδή να αναπαράγουν είτε την ίδια την κατανομή είτε τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά του δείγματος. Σε κάθε περίπτωση, είναι απαραίτητη η προσαρμογή μιας θεωρητικής κατανομής στα ιστορικά δεδομένα, τα οποία καλύπτουν το σύνολο του δείγματος και όχι μόνο τις ακραίες τιμές του, όπως συμβαίνει με τις κατανομές που εξετάστηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Το παρόν κεφάλαιο εστιάζει στη στατιστική ανάλυση των ημερήσιων χρονοσειρών βροχής. Τα δεδομένα τους λαμβάνονται από συμβατικούς βροχομετρικούς σταθμούς και αποτελούν την ευκολότερα διαθέσιμη υδρολογική πληροφορία. Σε σύγκριση με την ανάλυση μεγίστων, η μόνη ουσιαστική διαφοροποίηση έγκειται στην εκτίμηση της περιόδου επαναφοράς κάθε παρατηρημένης τιμής. Έτσι, ενώ στην πρώτη περίπτωση σε κάθε μία από τις n τιμές ετήσιων μεγίστων αποδίδεται μια ακέραια τιμή της περιόδου επαναφοράς, με βάση την αντίστοιχη εμπειρική πιθανότητα υπέρβασης και σύμφωνα με τον ορισμό που δίνεται στο εδάφιο 2.1.5, όταν λαμβάνεται το πλήρες δείγμα των ημερήσιων τιμών οι περίοδοι επαναφοράς διαιρούνται με τον αριθμό των ημερών του έτους. Με τον τρόπο αυτό, τα δύο δείγματα, ήτοι η σειρά των ετήσιων μεγίστων και η ημερήσια χρονοσειρά, καθίστανται στατιστικά ισοδύναμες.

4.2 Τυπικές κατανομές ανάλυσης ημερήσιων βροχοπτώσεων

4.2.1 Στατιστική περιγραφή της βροχόπτωσης στην ημερήσια κλίμακα

Η ημερήσιες χρονοσειρές βροχόπτωσης παρουσιάζουν έντονες διαφορές, σε σχέση με υψηλότερες κλίμακες (μηνιαία, ετήσια). Η κυριότερη εντοπίζεται στο διαλείποντα χαρακτήρα της ημερήσιας βροχόπτωσης, την ιδιότητά της δηλαδή κάποια χρονικά διαστήματα να βρέχει και κάποια άλλα να μην βρέχει. Για το λόγο αυτό, οι κατανομές που χρησιμοποιούνται είναι μικτού τύπου, καθώς περιλαμβάνουν δύο συνιστώσες. Η πρώτη συνιστώσα είναι διακριτή, και αναφέρεται στη μηδενική βροχόπτωση, στην οποία αντιστοιχίζεται μια συγκεκριμένη πιθανότητα μεγαλύτερη του μηδενός, που καλείται *πιθανότητα μηδενικής βροχής* (probability dry). Η δεύτερη συνιστώσα αναφέρεται στη μη μηδενική βροχόπτωση, η οποία θεωρείται συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Στην ανάλυση των ημερήσιων βροχοπτώσεων, εκτός από την εκτίμηση της πιθανότητας μηδενικής βροχής, είναι ιδιαίτερα σημαντική η επιλογή της κατανομής που περιγράφει τη θετική ημερήσια βροχόπτωση, δηλαδή την κατανομή της βροχόπτωσης δεδομένου ότι βρέχει. Είναι προφανές (και γνωστό από τη σχετική βιβλιογραφία) πως η εν λόγω κατανομή παρουσιάζει έντονη θετική ασυμμετρία. Παραδοσιακά, η κατανομές που έχουν περισσότερο

χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή της ημερήσιας βροχοπτώσης είναι η εκθετική, η κατανομή γάμα καθώς και διάφορες μίξεις εκθετικών κατανομών (Waymire and Gupta, 1981· Wilks, 1998; Woolhiser and Roldan, 1982). Παρόλα αυτά, άλλες εργασίες (Fraedrich and Larnder, 1993· Veneziano *et al.*, 1996· Wilks, 1999) προτείνουν αντί της χρήσης εκθετικών κατανομών τη χρήση κατανομών τύπου Pareto, με ουρά δηλαδή τύπου δύναμης.

4.2.2 Η κατανομή Burr τύπου VII

Πρόσφατα, έχει προταθεί (Papalexiou and Koutsoyiannis, 2009a, 2008) και δοκιμαστεί με επιτυχία μια εξαιρετικά ευέλικτη τετρα-παραμετρική κατανομή τύπου δύναμης, γνωστή ως κατανομή JH, που είναι κατάλληλη για ένα μεγάλο εύρος χρονικών κλιμάκων. Ειδικότερα, για τις ημερήσιες βροχοπτώσεις προτείνεται η χρήση μιας απλοποιημένης τρι-παραμετρικής μορφής της εν λόγω κατανομής, για την οποία υπάρχει αναλυτική και απλή έκφραση τόσο της συνάρτησης κατανομής όσο και του ποσοστημορίου της (Papalexiou and Koutsoyiannis, 2009b). Η κατανομή αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως κατανομή Burr τύπου VII (Rodriguez, 1977· Tadikamalla, 1980). Τα βασικά χαρακτηριστικά της κατανομής δίνονται στην Πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1: Χαρακτηριστικά μεγέθη της κατανομής Burr VII.

Πυκνότητα πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{bc}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^b\right]^{-c-1}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^b\right]^{-c}$
Ποσοστημόριο	$Q_X(u) = a \left[(1-u)^{-1/c} - 1 \right]^{1/b}$
Πεδίο ορισμού μεταβλητής	$X \in \mathbb{R}^+$
Περιορισμοί παραμέτρων	$a > 0, b > 0, c > 0$
Ροπή τάξης q	$m_q = c a^q B\left(1 + \frac{q}{b}, c - \frac{q}{b}\right)$ $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$
Υπαρξη ροπών	$m_q < \infty$ αν $bc > q$
Ασυμπτωτική συμπεριφορά	$P(X > x) \sim a^{-b} x^{-bc}$
Χαρακτηριστικά σχήματος	$b < 1 \Rightarrow f_X(0) \rightarrow \infty$ $b = 1 \Rightarrow f_X(0) \rightarrow \frac{c}{a}$ $b > 1 \Rightarrow f_X(0) \rightarrow 0$

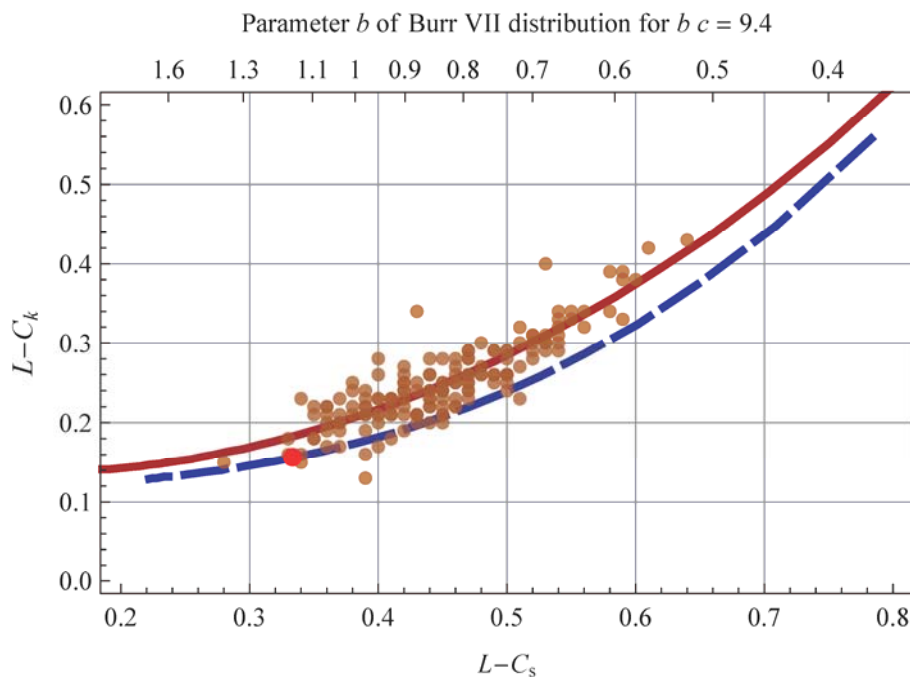
Για την προσαρμογή της κατανομής Burr VII στα δείγματα των θετικών ημερήσιων βροχοπτώσεων, σε μηνιαία βάση, μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των ροπών. Σύμφωνα με την κλασική μέθοδο των ροπών, η εκτίμηση των παραμέτρων μιας τριπαραμετρικής κατανομής προκύπτει από την επίλυση του συστήματος που σχηματίζεται από την εξίσωση των τριών πρώτων θεωρητικών ροπών της κατανομής με τις αντίστοιχες δειγματικές. Εναλλακτικά, μπορεί να εφαρμοστεί μια ελαφρά τροποποιημένη μέθοδος, στην οποία αντί

της τρίτης ροπής να χρησιμοποιηθεί η κλασματική ροπή τάξης 3/2, ώστε να αποφευχθεί η ύψωση των δειγματικών τιμών σε κυβικές δυνάμεις. Το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει δεν έχει αναλυτική λύση, οπότε οι παράμετροι εκτιμώνται από την αριθμητική επίλυση της:

$$\arg \min_{a,b,c} \sum \left[c a^q B \left(1 + \frac{q}{b}, c - \frac{q}{b} \right) - \hat{m}_q \right]^2, \quad q = \left\{ 1, \frac{3}{2}, 2 \right\} \quad (4.1)$$

όπου \hat{m}_q η δειγματική ροπή τάξης q .

Η υπεροχή της κατανομής Burr VII έναντι μιας πιο παραδοσιακής κατανομής όπως για παράδειγμα η κατανομή Γάμα ή η Εκθετική, αποδεικνύεται από το Σχήμα 4.1 που απεικονίζει το σύνολο των εμπειρικών σημείων ($L-C_s$, $L-C_k$) των χρονοσειρών της θετικής ημερήσιας βροχοπτώσεως ανά μήνα των σταθμών της λεκάνης του Βοιωτικού Κηφισού (Παπαλεξίου και Ευστρατιάδης, 2009). Στο διάγραμμα, απεικονίζονται συνολικά 156 σημεία (13 σταθμοί \times 12 μήνες). Είναι φανερό πως τα περισσότερα εντοπίζονται στη περιοχή πάνω από τη θεωρητική καμπύλη που εκφράζει την κατανομή γάμα (μπλε διακεκομμένη γραμμή) και απέχει πολύ από το θεωρητικό σημείο της εκθετικής κατανομής (κόκκινη τελεία). Επιπλέον, στο ίδιο σχήμα έχει σχεδιαστεί η θεωρητική καμπύλη που εκφράζει την κατανομή Burr VII με δείκτη ασυμπτωτικής συμπεριφοράς $b c = 9.4$, που ταιριάζει εξαιρετικά στο σύνολο του δείγματος.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα L -ασυμμετρίας και L -κύρτωσης στις χρονοσειρές ημερήσιων βροχοπτώσεων των σταθμών της λεκάνης του Βοιωτικού Κηφισού (διαφορετική χρονοσειρά ανά μήνα). Οι καφέ τελείες αναπαριστούν τα εμπειρικά σημεία ($L-C_s$, $L-C_k$) των ημερήσιων βροχοπτώσεων ανά μήνα (13 \times 12 σημεία), η συμπαγής γραμμή την κατανομής Burr VII, η διακεκομμένη γραμμή την κατανομή γάμα και η κόκκινη τελεία την εκθετική κατανομή (Πηγή: Παπαλεξίου και Ευστρατιάδης, 2009).

5 Όμβριες καμπύλες

5.1 Σημειακές όμβριες καμπύλες

5.1.1 Γενική μεθοδολογία

Η μέθοδος βασίζεται στην στατιστική ανάλυση των παρατηρημένων ακραίων υψών (h) ή εντάσεων (i) βροχής, η οποία εν τέλει οδηγεί στην κατάρτιση σχέσεων έντασης-διάρκειας (d) - περιόδου επαναφοράς (T) της βροχής, γνωστών και ως όμβριων καμπυλών.

Η συμβατική στατιστική μέθοδος εξαγωγής όμβριων καμπυλών περιλαμβάνει τα εξής τρία κύρια βήματα: (α) την προσαρμογή πιθανοτικών συναρτήσεων κατανομής της έντασης βροχής ξεχωριστά για κάθε διάρκεια d , (β) την εκτίμηση, με βάση τις προσαρμοσμένες συναρτήσεις κατανομής για όλες τις διαθέσιμες διάρκειες, των εντάσεων βροχής για μια σειρά περιόδων επαναφοράς T , και (γ) την εξαγωγή, για κάθε περίοδο επαναφοράς T , μιας κατάλληλης έκφρασης ανάμεσα στην ένταση βροχής και τη διάρκεια. Συχνά τα βήματα αυτά ακολουθούνται και από ένα τέταρτο, στο οποίο γενικεύονται οι σχέσεις του βήματος (γ), προσδιορίζοντας έτσι μια εμπειρική σχέση που ισχύει για τυχούσα περίοδο επαναφοράς.

5.1.2 Δεδομένα που χρησιμοποιούνται

Η κατασκευή των όμβριων καμπυλών στηρίζεται σε δεδομένα εντάσεων βροχής για διάρκειες που κυμαίνονται από 10-30 λεπτά (ανάλογα με την ευκρίνεια των διαθέσιμων παρατηρήσεων) μέχρι 24-48 ώρες. Για διάρκεια d βρίσκεται το ετήσιο μέγιστο ύψος βροχής $h(d)$, δηλαδή το μέγιστο ύψος βροχής που συνέβη μέσα στη δεδομένη διάρκεια για ένα υδρολογικό (ή ημερολογιακό) έτος, και υπολογίζεται η αντίστοιχη ετήσια μέγιστη μέση ένταση (ή απλούστερα ετήσια μέγιστη ένταση) $i(d) = h(d) / d$. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί για όλα τα έτη που υπάρχουν δεδομένα, προκύπτει το στατιστικό δείγμα (ή σειρά) ετήσιων μέγιστων υψών ή εντάσεων βροχής.

Στην πραγματικότητα, οι παραπάνω εργασίες γίνονται ταυτόχρονα για ένα σύνολο k διαρκειών d_j , $j = 1, \dots, k$, ξεκινώντας από ελάχιστη διάρκεια ίση με την ευκρίνεια (ή διακριτότητα, δ) των παρατηρήσεων και φθάνοντας μέχρι τη μέγιστη διάρκεια βροχής που ενδιαφέρει στα τυπικά προβλήματα του μηχανικού. Κανονικά όλες οι k σειρές θα πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό δεδομένων n , αλλά, λόγω των ελλείψεων που συχνά υπάρχουν στα πρωτογενή δεδομένα, είναι δυνατό η τιμή n_j να διαφέρει από διάρκεια σε διάρκεια.

Η χρονική ευκρίνεια δ των πρωτογενών δεδομένων (βροχογραφημάτων ή ψηφιακών μετρήσεων) είναι προφανές ότι επηρεάζει τις τιμές των μέγιστων εντάσεων βροχής και συγκεκριμένα, μεγάλη διακριτότητα έχει συνέπεια την υπεκτίμηση των μέγιστων εντάσεων. Είναι προφανές ότι το μέγεθος του σφάλματος εξαρτάται από το λόγο διάρκειας προς ευκρίνεια (d/δ), και αν ο λόγος αυτός είναι αρκετά μεγάλος τότε το σφάλμα γίνεται αμελητέο. Για την άρση του σφάλματος για μικρές τιμές του λόγου d/δ , συνήθως γίνεται αναγωγή των τιμών $i(d)$, με πολλαπλασιασμό επί ένα συντελεστή που εξαρτάται από το λόγο d/δ . Τιμές αυτού του συντελεστή έχουν βρεθεί από έρευνες στην Αμερική και δίνονται στη βιβλιογραφία, π.χ. Linsley *et al.* (1975, σ. 357), από όπου προέρχεται ο Πίνακας 5.1.

Πίνακας 5.1: Τυπικές τιμές συντελεστή άρσης του σφάλματος διακριτοποίησης κατά Linsley *et al.* (1975, σ. 357).

Λόγος διάρκειας προς ευκρίνεια (d/δ)	Συντελεστής άρσης του σφάλματος διακριτοποίησης
1	1.13
2	1.04
3-4	1.03
5-8	1.02
9-24	1.01

Παραδοσιακά, τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για την κατάρτιση όμβριων καμπυλών προέρχονται από ταινίες βροχογράφων, στις οποίες η διακριτότητα είναι αρκετά μικρή (5 έως 30 min). Για μεγάλες διάρκειες βροχής, 24 ή 48 ωρών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και δεδομένα από συνήθη βροχόμετρα ημερήσιων παρατηρήσεων. Αν συγκριθούν τα ετήσια μέγιστα ύψη βροχής, τα οποία έχουν προκύψει από βροχογράφο για διάρκειες 24 ή 48 ωρών, με τα δεδομένα από βροχόμετρο του ίδιου σταθμού, γενικά αναμένεται οι τιμές 24ώρου από το βροχογράφο να είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες από βροχόμετρο, επειδή οι τελευταίες υπόκεινται στο σφάλμα χρονικής διακριτοποίησης. Ωστόσο, είναι πολύ συχνό το φαινόμενο οι τιμές του βροχογράφου να είναι μικρότερες από αυτές του βροχομέτρου. Αυτό οφείλεται συνήθως στην κακή συντήρηση των ευαίσθητων μηχανισμών του βροχογράφου, η οποία έχει αποτέλεσμα την εσφαλμένη καταγραφή των υψών βροχής από το βροχογράφο. Επιπρόσθετος λόγος είναι το γεγονός ότι στις έντονες καταιγίδες το ύψος βροχής που εισέρχεται στο βροχογράφο κατά τη διάρκεια είτε του σιφωνισμού είτε της ανατροπής των σκαφιδίων (ανάλογα με τον μηχανισμό του βροχογράφου) δεν καταγράφεται, με αποτέλεσμα στις μεγάλες εντάσεις βροχής να γίνεται υπεκτίμηση μέχρι 15% (Molini *et al.*, 2005).

Για το λόγο αυτό, στη μεθοδολογία που προτείνεται πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όχι μόνο τα δεδομένα από βροχογράφους αλλά και αυτά από βροχόμετρα. Επιπρόσθετοι λόγοι που επίσης συνηγορούν στο να λαμβάνονται υπόψη τα δεδομένα των βροχομέτρων είναι: (α) η μεγαλύτερη πυκνότητα του δικτύου των βροχομέτρων σε σχέση με αυτό των βροχογράφων και (β) η μεγαλύτερη χρονική έκταση των παρατηρήσεων των βροχομέτρων από αυτές των βροχογράφων.

5.1.3 Συμβατική μέθοδος κατάρτισης όμβριων καμπυλών

Στην απλούστερη διατύπωση, για μια δεδομένη περίοδο επαναφοράς T , οι όμβριες καμπύλες εκφράζονται ως υπερβολικές συναρτήσεις της διάρκειας d , και γράφονται στη μορφή:

$$i = \frac{\omega}{(d + \theta)^\eta} \quad (5.1)$$

όπου ω , θ και η παράμετροι, που εξαρτώνται από την περίοδο επαναφοράς. Συνήθως τίθεται $\theta = 0$, οπότε η παραπάνω σχέση απλοποιείται περαιτέρω και λαμβάνει τη μορφή:

$$i = \frac{\omega}{d^\eta} \quad (5.2)$$

Αν είναι γνωστός ο στατιστικός νόμος $i = g_d(T)$, τότε για δεδομένη περίοδο επαναφοράς T μπορεί να υπολογιστεί η ένταση βροχής i_j που αντιστοιχεί σε κάθε διάρκεια d_j , οπότε προκύπτει ένα σημειοσύνολο (d_j, i_j) . Η εκτίμηση των παραμέτρων ω και η γίνεται εύκολα, εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Σύμφωνα με τον ορισμό των ομβρίων

καμπυλών, η παράμετρος η είναι σταθερή (ανεξάρτητη της περιόδου επαναφοράς), ενώ η παράμετρος ω αυξάνει με την περίοδο επαναφοράς. Η πρώτη υπόθεση εξασφαλίζει ότι οι όμβριες καμπύλες δεν τέμνονται, ενώ η δεύτερη υπόθεση εξασφαλίζει ότι τα μεγαλύτερης έντασης επεισόδια έχουν μικρότερη συχνότητα πραγματοποίησης.

Ουσιαστικά, η προσαρμογή μιας συνάρτησης κατανομής για δεδομένη διάρκεια d_j ισοδυναμεί με τον καθορισμό μιας παραμετρικής σχέσης ανάμεσα στη μέγιστη ένταση i και την περίοδο επαναφοράς T , της μορφής $i = g_d(T)$. Η σχέση αυτή καθορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση κατανομής που έχει επιλεγεί και τις παραμέτρους της. Στην πράξη, όμως, απαιτείται συνήθως η εκτίμηση της έντασης της βροχής για διάρκειες διαφορετικές της d_j , οπότε απαιτείται κάποια παρεμβολή ή επέκταση, που είναι προφανώς μη γραμμική. Αυτός ο μη γραμμικός νόμος προσδιορίζεται με συστηματικό τρόπο, χρησιμοποιώντας όλες τις εντάσεις βροχής που αντιστοιχούν σε όλες τις δεδομένες διάρκειες d_j για δεδομένη περίοδο επαναφοράς T . Ο νόμος αυτός διατυπώνεται στη μορφή $i = g_T'(d)$, θεωρεί δηλαδή τη διάρκεια ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την περίοδο επαναφοράς ως παράμετρο.

Η τυπική συνάρτηση κατανομής που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή των σχέσεων $i = g_d(T)$ είναι η κατανομή Gumbel μεγίστων. Η εν λόγω κατανομή έχει γίνει αποδεκτή ευρύτατα στην Ελλάδα αλλά και διεθνώς για την περιγραφή μέγιστων εντάσεων βροχής, χρησιμοποιώντας συνήθως δείγματα μήκους λίγων δεκάδων ετών. Ωστόσο, πρόσφατες έρευνες αμφισβητούν την καταλληλότητα της κατανομής Gumbel για την περιγραφή δειγμάτων μέγιστων βροχοπτώσεων, προτείνοντας πληρέστερες μεθοδολογίες, όπως περιγράφεται παρακάτω.

5.1.4 Γενικευμένη μαθηματική έκφραση όμβριων καμπυλών

Στη γενικότερη περίπτωση, η συναρτησιακή σχέση όμβριων καμπυλών είναι της μορφής:

$$i = \frac{a(T)}{b(d)} \quad (5.3)$$

όπου i η μέγιστη ένταση βροχής διάρκειας d για περίοδο επαναφοράς T , και $a(T)$ και $b(d)$ κατάλληλες συναρτήσεις της περιόδου επαναφοράς και της διάρκειας, αντίστοιχα.

Η συνάρτηση $b(d)$ είναι της ακόλουθης, εμπειρικά διαπιστωμένης, γενικής μορφής:

$$b(d) = (1 + d + \theta)^\eta \quad (5.4)$$

όπου θ και η αποτελούν παραμέτρους προς εκτίμηση, όπου $\theta \geq 0$ (η παράμετρος εκφράζεται σε μονάδες χρόνου) και $0 < \eta < 1$.

Η συνάρτηση $a(T)$ προκύπτει αναλυτικά από τη συνάρτηση κατανομής που ισχύει για τη μέγιστη ένταση βροχής της υπό εξέταση περιοχής, όπως αυτή προκύπτει από την επεξεργασία των διαθέσιμων δεδομένων, ενώ αποφεύγεται η χρήση εμπειρικών συναρτήσεων. Η συγκεκριμένη έκφραση της $a(T)$ αναλύεται πιο κάτω.

5.1.5 Τελική εξίσωση όμβριων καμπυλών

Σύμφωνα με τη διερεύνηση του εδαφίου 3.2.3, για την αναλυτική έκφραση της εξίσωσης $a(T)$ ενδείκνυται η προσαρμογή της κατανομής Γενικής Ακραίων Τιμών, που είναι συνεπής για όλες τις περιόδους επαναφοράς (Koutsoyiannis, 2004a, 2004b, 2007). Η αποδοχή της ΓΑΤ σε συνδυασμό με τις (5.3) και (5.4) οδηγεί στην ακόλουθη γενικευμένη έκφραση:

$$i(d, T) = \frac{\lambda' \left\{ \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\kappa} + \psi' \right\}}{(1 + d + \theta)^\eta} \quad (\kappa \neq 0) \quad (5.5)$$

Για $\kappa = 0$, η κατανομή ΓΑΤ που βρίσκεται στον αριθμητή μεταπίπτει στην κατανομή μεγίστων τύπου I (Gumbel).

Στην εξίσωση (5.5) η περίοδος επαναφοράς αναφέρεται σε σειρές ετήσιων μεγίστων και κατά συνέπεια παίρνει τιμές μεγαλύτερες από ένα έτος. Εφόσον η περίοδος επαναφοράς οριστεί με αναφορά σε σειρές υπεράνω κατωφλίου, και συνεπώς μπορεί να πάρει και τιμές μικρότερες από ένα έτος, η αντίστοιχη εξίσωση προκύπτει θεωρητικά ότι έχει την ακόλουθη απλούστερη έκφραση (Koutsoyiannis *et al.*, 1998):

$$i(d, T) = \frac{\lambda' (T^\kappa + \psi')}{(d + \theta)^\eta} \quad (\kappa \neq 0) \quad (5.6)$$

Για μικρές περιόδους επαναφοράς, η (5.6) είναι προφανώς δυσμενέστερη από την (5.5), ενώ για μεγαλύτερες περιόδους επαναφοράς ($T > 10$) πρακτικά η πρώτη ταυτίζεται με τη δεύτερη, δεδομένου ότι για μικρές τιμές του $1/T$ ισχύει $\ln [1 - (1/T)] = -(1/T) - (1/T)^2 - \dots \approx -1/T$.

5.1.6 Εκτίμηση παραμέτρων

Για την εκτίμηση των παραμέτρων λ , ψ (ή ισοδύναμα λ' , ψ'), κ , θ και η των παραπάνω εκφράσεων όμβριων καμπυλών έχουν διατυπωθεί από τον Κουτσογιάννη (1997· βλ. και Koutsoyiannis *et al.*, 1998) δύο συνεπείς στατιστικές μέθοδοι, οι οποίες αποφεύγουν τη χρήση εμπειρικών τεχνικών που χρησιμοποιούνταν παλιότερα. Η πρώτη μέθοδος που χρησιμοποιείται εδώ εκτιμά τις παραμέτρους σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα γίνεται η εκτίμηση των παραμέτρων της συνάρτησης $b(d)$ (των θ και η) και στο δεύτερο αυτών της $a(T)$ (των λ , ψ και κ της κατανομής GEV).

Από την (5.3) προκύπτει άμεσα ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = I b(d)$ έχει συνάρτηση κατανομής ανεξάρτητη της διάρκειας d , η οποία καθορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση $a(T)$. Πρέπει λοιπόν οι παράμετροι θ και η να υπολογιστούν έτσι ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη ανεξαρτησίας της Y από τη διάρκεια.

Αν υποθέσουμε ότι είναι γνωστές οι τιμές των παραμέτρων θ και η , τότε μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές $y_{jl} = i_{jl} b(d_j)$, όπου $j = 1, \dots, k$ και $l = 1, \dots, n_j$. Ενοποιώντας όλα τα δείγματα που περιέχουν τις τιμές y_{jl} αποκτούμε ένα συνολικό δείγμα μεγέθους:

$$m = \sum_{j=1}^k n_j \quad (5.7)$$

Με βάση το δείγμα αυτό, καταταγμένο σε φθίνουσα σειρά, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε αύξοντες αριθμούς ή βαθμούς (ranks) r_{jl} σε όλες τις m τιμές y_{jl} (Για την περίπτωση που έχουμε ταυτόσημες τιμές y_{jl} χρησιμοποιούμε το μέσο όρο των αντίστοιχων βαθμών). Επανερχόμενοι στα αρχικά επιμέρους δείγματα των ξεχωριστών διαρκειών υπολογίζουμε για κάθε διάρκεια d_j το μέσο βαθμό:

$$\bar{r}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{l=1}^{n_j} r_{jl} \quad (5.8)$$

Αν όλα τα επιμέρους δείγματα έχουν την ίδια κατανομή τότε κάθε \bar{r}_j θα πρέπει να βρίσκεται πολύ κοντά στην τιμή $\bar{r} = (m + 1) / 2$, διαφορετικά οι τιμές \bar{r}_j θα διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Αυτό οδηγεί στη χρήση της στατιστικής παραμέτρου Kruskal-Wallis (Hirsch *et al.*, 1993, σ. 17.25), η οποία συνδυάζει τους μέσους βαθμούς από όλα τα επιμέρους δείγματα:

$$h = \frac{6}{\bar{r} (2\bar{r} - 1)} \sum_{j=1}^k n_j (\bar{r}_j - \bar{r})^2 \quad (5.9)$$

Κατά συνέπεια, το πρόβλημα του προσδιορισμού των παραμέτρων θ και η μπορεί να αναχθεί στην ελαχιστοποίηση της στατιστικής παραμέτρου h . Η βελτιστοποίηση είναι δυνατή μόνο με αριθμητικές μεθόδους. Επισημαίνεται ότι αν τα επιμέρους δείγματα είναι ανεξάρτητα, τότε η στατιστική συνάρτηση H , της οποίας η σημειακή εκτίμηση είναι η παραπάνω τιμή h , ακολουθεί κατανομή χ^2 με $k - 1$ βαθμούς ελευθερίας. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατός ο έλεγχος της υπόθεσης $H = 0$, που ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι όλα τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό. Ο έλεγχος αυτός είναι μη παραμετρικός με την έννοια ότι δεν κάνει καμιά υπόθεση σχετικά με την κατανομή που ακολουθεί η μεταβλητή Y . Ωστόσο, στην περίπτωση που εξετάζουμε, τα επιμέρους δείγματα που αναφέρονται σε διαφορετικές διάρκειες δεν είναι ανεξάρτητα, αλλά, αντίθετα, ισχυρώς συσχετισμένα. Έτσι δεν είναι γνωστή η κατανομή της H και δεν είναι δυνατός ο στατιστικός έλεγχος. Πάντως, ο στόχος της ελαχιστοποίησης της h εξακολουθεί να έχει νόημα και σε αυτή την περίπτωση.

Για λόγους καλύτερης προσαρμογής της συνάρτησης $b(d)$ στην περιοχή των υψηλότερων εντάσεων, είναι σκόπιμο να μη χρησιμοποιείται σε αυτό το πρώτο στάδιο υπολογισμού το σύνολο των δεδομένων κάθε επιμέρους δείγματος, αλλά ένα μέρος αυτών των δεδομένων. Για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιείται μόνο το υψηλότερο 1/2 ή 1/3 των δεδομένων από κάθε διάρκεια, αφού τα δεδομένα καταταγούν σε φθίνουσα σειρά.

Αφού προσδιοριστούν οι παράμετροι θ και η , είναι απλή υπόθεση η εκτίμηση των παραμέτρων της συνάρτησης $a(T)$, η οποία γίνεται στο δεύτερο στάδιο υπολογισμού. Συγκεκριμένα, οι τελευταίες παράμετροι εκτιμώνται με τις τυπικές μεθόδους της στατιστικής, χρησιμοποιώντας το ενοποιημένο δείγμα που περιέχει όλα τα m δεδομένα y_{ji} . Είναι βέβαια αυτονόητο ότι σε αυτό το δεύτερο στάδιο υπολογισμού πρέπει να χρησιμοποιείται το σύνολο των δεδομένων, και όχι ένα τμήμα τους.

5.2 Ταυτόχρονη χρήση δειγμάτων από πολλές θέσεις

Εφόσον διατίθενται (όπως συχνά συμβαίνει) περισσότερα του ενός δείγματα εντάσεων βροχής από διάφορους σταθμούς μιας κλιματικά ομογενούς περιοχής, ή και από τον ίδιο σταθμό για διαφορετικές χρονικές κλίμακες, προκύπτει το ζήτημα της ταυτόχρονης μελέτης του συνόλου των δειγμάτων με σκοπό την πλέον αξιόπιστη εκτίμηση των παραμέτρων μιας ενιαίας έκφρασης όμβριων καμπυλών στην κλιματικά ομογενή περιοχή μελέτης. Η διαπίστωση της κλιματικής ομογένειας μιας περιοχής μπορεί να γίνει μέσω σύγκρισης των στατιστικών χαρακτηριστικών των δειγμάτων των διαφορετικών σταθμών. Εφόσον δεν παρατηρούνται στατιστικά σημαντικές διαφορές στα εν λόγω χαρακτηριστικά, μπορούν να ενοποιηθούν όλα τα δείγματα, σχηματίζοντας έτσι ένα ενιαίο δείγμα από όλα τα επιμέρους. Εφόσον υπάρχουν σχετικά μικρές διαφορές, ιδίως στις μέσες τιμές, είναι προτιμότερο να αδιαστατοποιούνται τα δείγματα, π.χ. με διαίρεση με τη μέση τιμή της 24ωρης βροχής του καθενός, ώστε τελικά όλα τα δείγματα να έχουν κοινή μέση τιμή. Αδιαστατοποιημένα στατιστικά δείγματα μέγιστων βροχοπτώσεων που αναφέρονται σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες d μπορούν επίσης να ενοποιηθούν αν αναχθούν κατάλληλα με τη συνάρτηση χρονικής κλίμακας $b(d)$, όπως περιγράφεται στο εδάφιο 5.1.4.

Ο ουσιαστικός στόχος της ενοποίησης δειγμάτων είναι η λεγόμενη υποκατάσταση του χρόνου από το χώρο, δηλαδή η θεώρηση δειγμάτων από διαφορετικές θέσεις ως ισοδύναμου ενιαίου δείγματος από υποθετικά μεγαλύτερη χρονική διάρκεια παρατηρήσεων. Είναι γνωστό

ότι στην περίπτωση που τα δείγματα των επιμέρους σταθμών είναι στατιστικώς ανεξάρτητα, η ενοποίηση έχει αποτέλεσμα την σημαντική αύξηση της στατιστικής αξιοπιστίας των εκτιμήσεων, αφού το μήκος του ενοποιημένου δείγματος, το οποίο χαρακτηρίζει την αξιοπιστία των στατιστικών εκτιμήσεων, είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους μηκών (μέθοδος σταθμών-ετών). Ωστόσο, η ενοποίηση είναι επιτρεπτή και όταν υπάρχει στοχαστική εξάρτηση, και τα στατιστικά χαρακτηριστικά (ροπές, L -ροπές κτλ.) και οι παράμετροι της κατανομής μπορούν να υπολογίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως σε ένα ενιαίο δείγμα.

Ωστόσο, στην πραγματικότητα, η αξιοπιστία των στατιστικών εκτιμήσεων δεν αυξάνεται το ίδιο όπως στην περίπτωση των στοχαστικά ανεξάρτητων δειγμάτων. Έστω ότι τυχαίες μεταβλητές x και y αντιπροσωπεύουν τη βροχόπτωση σε δύο κλιματικά ομογενείς θέσεις, έτσι ώστε να έχουν την ίδια μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ , και υποθέτουμε ότι οι δύο μεταβλητές είναι συσχετισμένες χωρικά, με συντελεστή ετεροσυσχέτισης ρ , αλλά χρονικά ανεξάρτητες (μηδενική αυτοσυσχέτιση). Θεωρούμε ακόμη ότι στους δύο σταθμούς υπάρχουν ταυτόχρονα δείγματα μήκους n . Στην περίπτωση που οι σταθμοί είναι ασυσχέτιστοι ($\rho = 0$), τότε το ενοποιημένο δείγμα, που θεωρούμε ότι αντιπροσωπεύει την τυχαία μεταβλητή z , μπορεί να θεωρηθεί ότι περιέχει όση πληροφορία έχει ένα πλήρως ανεξάρτητο στατιστικό δείγμα μήκους $2n$. Στην συνήθη, ωστόσο, περίπτωση συσχετισμένων μεταβλητών ($\rho \neq 0$) θεωρούμε ότι η πληροφορία που προέρχεται από τη μεταβλητή z αντιστοιχεί σε μικρότερο δείγμα μήκους $n_0' = n + n' < 2n$, όπου n' το ισοδύναμο μήκος που χαρακτηρίζει την επιπλέον πληροφορία.

5.3 Όρια εμπιστοσύνης όμβριων καμπυλών

Εφόσον έχουν εκτιμηθεί οι παράμετροι της κατανομής, είναι εύκολο να εκτιμηθούν και τα όρια εμπιστοσύνης της όμβριας καμπύλης που αντιστοιχεί σε δεδομένη περίοδο επαναφοράς T ή πιθανότητα μη-υπέρβασης $u = 1 - 1/T$. Το εν λόγω όρια μπορούν να εκτιμηθούν τόσο για το δείγμα όσο και για τον πληθυσμό, εφαρμόζοντας μια πρωτότυπη μεθοδολογία Monte-Carlo (Tyralis *et al.*, 2012). Αφού βρεθούν τα όρια εμπιστοσύνης x_L και x_U της $x(T)$, τα οποία αναφέρονται σε συγκεκριμένη περίοδο επαναφοράς T , υπολογίζονται τα αντίστοιχα όρια εμπιστοσύνης της όμβριας καμπύλης $i = x(T) / b(d)$, ήτοι:

$$i_L = \frac{x_L}{(d + \theta)}, \quad i_U = \frac{x_U}{(d + \theta)} \quad (5.10)$$

Συνεπώς, προκύπτουν δύο περιβάλλουσες τιμές που αντιστοιχούν στα όρια εμπιστοσύνης της καμπύλης i για συγκεκριμένη περίοδο επαναφοράς T . Ωστόσο η δυσκολία του προβλήματος έγκειται στις παραδοχές ως προς το μέγεθος του δείγματος (Κουτσογιάννης, 1997, σ. 289). Αν λάβουμε ως μέγεθος αυτό του ενοποιημένου δείγματος m , γίνεται μια παραδοχή που οδηγεί σε πολύ μικρό διάστημα εμπιστοσύνης. Επιπλέον, αυτή η παραδοχή δεν είναι μαθηματικά ορθή, καθώς το δείγμα προκύπτει από επιμέρους δείγματα με ισχυρή στατιστική εξάρτηση. Για τον λόγο αυτό, ως μέγεθος του δείγματος n_m για την προσομοίωση λαμβάνεται η μέση τιμή από τα πλήρη δείγματα των χρονοσειρών, δηλαδή:

$$n_m = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \quad (5.11)$$

Η παραπάνω παραδοχή δίνει σχετικά μεγάλα όρια εμπιστοσύνης.

5.4 Επιφανειακές όμβριες καμπύλες

5.4.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

Οι όμβριες καμπύλες αναφέρονται σε σημειακή, κατά κανόνα, ένταση βροχής. Ωστόσο, στην περίπτωση που η έκταση της λεκάνης είναι αρκετά μεγάλη, η σημειακή ένταση βροχής, i , είναι αισθητά μεγαλύτερη από τη μέση επιφανειακή ένταση στη λεκάνη, i_m . Αλλά και στην περίπτωση που κατά τον υδρολογικό σχεδιασμό παράγονται πλήρη υετογραφήματα, χρειάζεται πάντα η αναγωγή των σημειακών εντάσεων (ή υψών βροχής) σε επιφανειακές μέσες εντάσεις (ή ύψη βροχής) της λεκάνης απορροής.

5.4.2 Συντελεστής επιφανειακής αναγωγής

Εφόσον δεν υπάρχουν στοιχεία για τον άμεσο προσδιορισμό της επιφανειακής έντασης (π.χ. επιφανειακές όμβριες καμπύλες), αυτή υπολογίζεται με την εφαρμογή του λεγόμενου *συντελεστή επιφανειακής αναγωγής* ή *συντελεστή ομοιομόρφισης* (areal reduction factor) $\varphi := i_m / i$. Ο συντελεστής αυτός έχει τις ακόλουθες, εμπειρικά διαπιστωμένες, ιδιότητες:

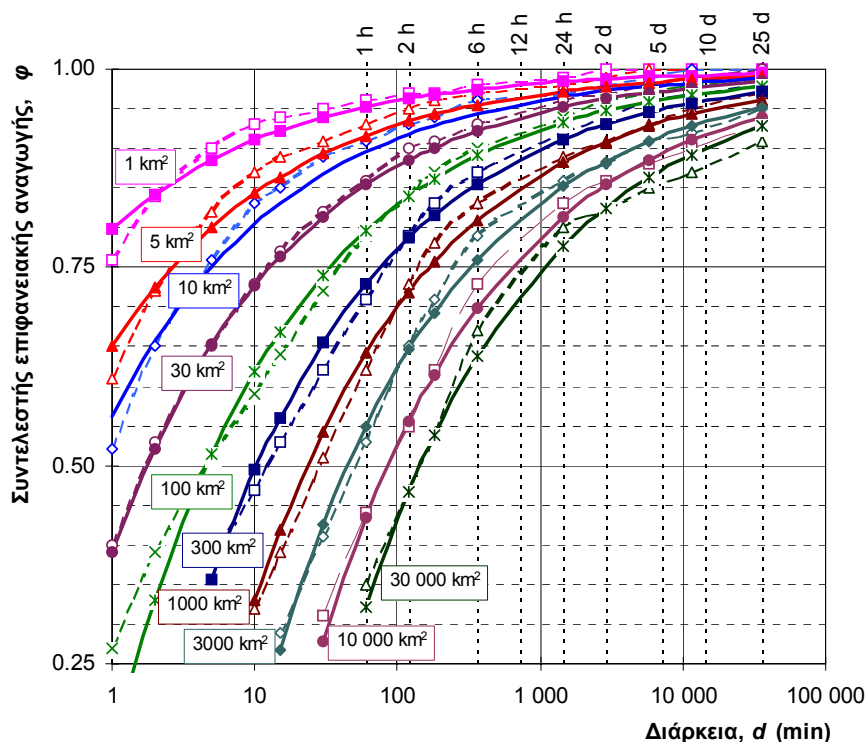
- Είναι πάντα μικρότερος της μονάδας: όταν καταγράφεται μέγιστη ένταση στη θέση του βροχογραφικού σταθμού, είναι απίθανο την ίδια στιγμή να καταγράφεται μέγιστη ένταση σε όλη την υπόψη επιφάνεια.
- Είναι φθίνουσα συνάρτηση της έκτασης: η αύξηση της έκτασης της επιφάνειας συνεπάγεται τη μείωση του συντελεστή επιφανειακής αναγωγής.
- Είναι αύξουσα συνάρτηση της διάρκειας: η αύξηση της διάρκειας βροχής συνοδεύεται από αύξηση του συντελεστή επιφανειακής αναγωγής.
- Εξαρτάται σε κάποιο βαθμό από την περίοδο επαναφοράς και φαίνεται ότι η αύξηση της περιόδου επαναφοράς οδηγεί σε ασθενή μείωση του συντελεστή επιφανειακής αναγωγής: ωστόσο δεν υπάρχουν ακόμη κατηγορηματικά συμπεράσματα για αυτή την εξάρτηση, η οποία δεν έχει διερευνηθεί σε αντίστοιχο βαθμό με αυτές που αναφέρονται στη διάρκεια και την έκταση.

Εκτεταμένες εμπειρικές διερευνήσεις σχετικά με τη μεταβολή του συντελεστή επιφανειακής αναγωγής συναρτήσει της μεταβολής της έκτασης και της διάρκειας έχουν γίνει τόσο στις ΗΠΑ, όσο και στη Μεγάλη Βρετανία. Τα αποτελέσματα των διερευνήσεων δίνονται υπό μορφή διαγραμμάτων ή πινάκων. Στα πινακοποιημένα αποτελέσματα του UK-NERC (1975), τα οποία είναι και τα πληρέστερα τόσο ως προς το εύρος μεταβολής της διάρκειας (από 1 min ως 25 ημέρες) όσο και της έκτασης (από 1 ως 30 000 km²) προσαρμόστηκε η ακόλουθη αναλυτική έκφραση (Κουτσογιάννης και Ξανθόπουλος, 1999):

$$\varphi = \left(1 - \frac{0.048 A^{0.36 - 0.01 \ln A}}{d^{0.35}}, 0.25 \right) \quad (5.12)$$

όπου φ ο συντελεστής επιφανειακής αναγωγής (αδιάστατος αριθμός), A η έκταση της λεκάνης σε km² και d η διάρκεια βροχής σε h. Γραφική απεικόνιση της (5.12), σε σύγκριση και με τις πινακοποιημένες τιμές του UK-NERC (1975), δίνεται στο Σχήμα 5.1.

Η μέθοδος μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί, με την αντικατάσταση της σημειακής έντασης βροχής i από την επιφανειακή ένταση i_m .



Σχήμα 5.1: Μεταβολή συντελεστή επιφανειακής αναγωγής συναρτήσει της έκτασης και της διάρκειας βροχής (σχέση 5.12, συνεχείς γραμμές), σε σύγκριση και με τις πινακοποιημένες τιμές του UK-NERC (διακεκομμένες γραμμές) (Πηγή: Κουτσογιάννης, 2011, σ. 49).

5.4.3 Σχόλια σχετικά με την καταλληλότητα του δείκτη

Στην Ελλάδα δεν έχει γίνει ως τώρα καμία συστηματική μελέτη για την εξαγωγή καμπυλών μεταβολής του συντελεστή επιφανειακής αναγωγής. Γενικά, οι καμπύλες της Μεγάλης Βρετανίας, είτε στην αρχική τους έκφραση, είτε στη μορφή της (5.12), σε διάφορους ελέγχους φάνηκε να δίνουν λογικά αποτελέσματα και για περιοχές της Ελλάδας, όπως π.χ. στην ευρύτερη λεκάνη του Αττικού Κηφισού (Κουτσογιάννης κ.ά., 2010).

Σε κάθε περίπτωση, απαιτείται συστηματικότερη διερεύνηση, καθώς είναι πλέον αποδεκτό ότι η εφαρμογή τόσο απλουστευμένων προσεγγίσεων δεν περιγράφει ικανοποιητικά τη χωρική μεταβλητότητα της βροχόπτωσης, καθώς η τελευταία εξαρτάται από πληθώρα παραγόντων, όπως η γεωμετρία της λεκάνης, το ανάγλυφο, ο τύπος καιρού από τον οποίο παράγεται το επεισόδιο βροχής, κτλ. (π.χ. Veneziano and Langousis, 2005).

6 Υπολογιστικό σύστημα κατάρτισης όμβριων καμπυλών

6.1 Το λογισμικό Υδρογνώμων

6.1.1 Ιστορικό

Ο Υδρογνώμων είναι ένα εργαλείο λογισμικού για την επεξεργασία υδρολογικών δεδομένων. Πρόκειται για μια εφαρμογή ανοιχτού κώδικα που τρέχει σε περιβάλλον Microsoft Windows και αποτελεί τμήμα του πλαισίου openmeteo.org.

Η ανάπτυξη του λογισμικού ξεκίνησε το 2002, και εμπλουτίστηκε στα πλαίσια διαφόρων ερευνητικών έργων του ΕΜΠ (Χριστοφίδης και Κουτσογιάννης, 2002· Χριστοφίδης και Κοζάνης, 2004· Κοζάνης κ.ά., 2005· Κοζάνης κ.ά., 2009). Το λογισμικό, και επιμέρους συνιστώσες αυτού, έχει παρουσιαστεί σε διεθνή συνέδρια (Kozanis *et al.*, 2005, 2010). Στα πλαίσια του παρόντος έργου, παρουσιάζεται το υποσύστημα που αναπτύχθηκε και αφορά στην παραγωγή των ομβρίων καμπυλών, με βάση τη θεωρητική ανάλυση των προηγούμενων κεφαλαίων.

Η πλέον πρόσφατη έκδοση του προγράμματος είναι διαθέσιμη για ανάκτηση στη διεύθυνση <http://hydrognomon.org/>.

6.1.2 Δομή και λειτουργίες του προγράμματος

Στο Σχήμα 6.1 απεικονίζεται το γενικό περιβάλλον εργασίας (κύρια φόρμα) του λογισμικού Υδρογνώμων. Η βασική οντότητα του προγράμματος είναι η χρονοσειρά. Η χρονοσειρά δημιουργείται μέσα από το γραφικό περιβάλλον του προγράμματος, στο οποίο ορίζονται τα χαρακτηριστικά της χρονοσειράς (ονομασία, μονάδα μέτρησης, τύπος χρονοσειράς, χρονικό βήμα, κτλ.). Στη συνέχεια τα στοιχεία της χρονοσειράς εισάγονται μέσω τυποποιημένων αρχείων κειμένου (αρχεία *.hts), λογιστικών φύλλων ή μέσω πληκτρολόγησης. Με αφετηρία μια μεμονωμένη χρονοσειρά ή ένα σύνολο χρονοσειρών, υποστηρίζεται ένα ευρύ φάσμα από τυπικές και εξειδικευμένες εργασίες υδρολογικού ενδιαφέροντος.

Οι τυπικές επεξεργασίες του προγράμματος αναφέρονται σε τεχνικές συνάθροισης και κανονικοποίησης χρονικού βήματος, παρεμβολής, ανάλυσης παλινδρόμησης, συμπλήρωσης ελλειπουσών τιμών, έλεγχοι εγκυρότητας, φίλτρα δεδομένων, οπτικοποίηση χρονοσειρών σε πίνακες και διαγράμματα, κτλ. Υποστηρίζονται διάφορα χρονικά βήματα, από λεπτό ως δεκαετία, καθώς και ειδικές περιπτώσεις ακανόνιστων χρονικών βημάτων και ολισθήσεων.

Οι Υδρογνώμων ενσωματώνει ακόμη διάφορα υποσυστήματα, που υλοποιούν διάφορες υδρολογικές εφαρμογές, όπως αναλύσεις δεδομένων στάθμης-παροχής, ελέγχους ομογένειας, επιφανειακή ολοκλήρωση, επεξεργασίες υδρομετρικών δειγμάτων, μοντέλα εξατμοδιαπνοής, και αδιαμέριστα υδρολογικά μοντέλα. Η έμφαση εδώ δίνεται στα στατιστικά εργαλεία, για την πραγματοποίηση αναλύσεων που αναφέρονται σε προσαρμογή συναρτήσεων κατανομής, στατιστικές προγνώσεις, προσομοίωση Monte-Carlo, προσδιορισμό ορίων εμπιστοσύνης, ανάλυση ακραίων τιμών και κατασκευή όμβριων καμπυλών.

Year	rainfall intensity	rainfall intensity	rainfall intensity	rainfall intensity	rainfall intensity
1957-58	26.90	81.60	8.97	66.00	6.27
1958-59	11.20	58.80	6.75	48.00	3.98
1959-60	6.85	39.60	2.40	34.80	1.82
1960-61	6.65	54.00	3.62	34.80	2.28
1961-62	19.30	120.00	7.32	85.80	3.73
1962-63	7.20	67.20	3.03	60.00	1.94
1963-64	8.50	78.00	3.52	48.00	2.72
1964-65	10.65	96.00	4.28	63.00	2.17
1965-66	6.55	38.40	2.45	36.00	1.69
1966-67	28.40	14.10	7.55	74.40	4.88
1967-68	1.58	16.60	10.20	6.65	36.00
1968-69	1.48	43.20	26.80	15.15	126.00
1969-70	1.76	41.60	24.50	12.45	82.80
1970-71	1.55	25.20	17.70	8.95	42.00
1971-72	2.92	65.20	35.90	19.75	117.60
1972-73	2.68	39.40	33.50	17.75	68.40
1973-74	2.00	28.60	15.20	9.85	60.00
1974-75	1.30	30.60	15.90	8.30	48.00
1975-76	2.27	74.00	40.90	21.50	120.00
1976-77	1.65	41.40	23.20	14.90	115.20
1977-78	1.68	38.60	32.70	20.15	56.40
1978-79	3.37	47.60	30.00	19.55	78.00
1979-80	1.62	17.20	13.30	8.60	67.20
1980-81	1.95	30.40	19.40	11.10	58.80
1981-82	1.14	40.60	24.70	13.05	67.20
1982-83	2.29	49.60	36.20	22.90	141.60
1983-84	1.82	50.40	29.00	17.70	102.00
1984-85	3.40	16.40	12.90	12.15	40.80
1985-86	0.83	29.20	15.60	9.40	74.40
1986-87	3.85	32.20	29.10	18.55	9.50

Σχήμα 6.1: Κύρια φόρμα λογισμικού Υδρογνώμων.

6.2 Υποσύστημα κατάρτισης ομβρίων καμπυλών (Ομβρος)

6.2.1 Γενική περιγραφή υποσυστήματος

Στα πλαίσια του υποσυστήματος Όμβρος εφαρμόζεται η πρωτότυπη όσο και συνεπής μεθοδολογία του Κεφαλαίου 5. Στόχος είναι η εξαγωγή μιας ενιαίας μαθηματικής έκφρασης για τις όμβριες καμπύλες $i(d, T)$, κατά προτίμηση με εφαρμογή μιας στατιστικής κατανομής τύπου AT-2, οι παράμετροι της οποίας εκτιμώνται με τη μέθοδο των L-ροπών. Βεβαίως, το πρόγραμμα υποστηρίζει και τη συμβατική προσέγγιση, σύμφωνα με την οποία παράγεται ξεχωριστή καμπύλη για κάθε συγκεκριμένη περίοδο επαναφοράς.

Στη συνέχεια περιγράφονται οι υπολογιστικές διαδικασίες που υλοποιεί το σύστημα Όμβρος, ενώ οι λειτουργίες του λογισμικού, σε επίπεδο τελικού χρήστη, περιγράφονται μέσω του παραδείγματος του υποκεφαλαίου 6.3.

6.2.2 Υπολογισμός μηνιαίων/ετήσιων μεγίστων εντάσεων βροχής

Η παραγωγή των χρονοσειρών των μηνιαίων ή ετήσιων μεγίστων μέσων εντάσεων (ήτοι υψών βροχής προς την αντίστοιχη χρονική κλίμακα), είναι μία απλή υπολογιστική διαδικασία συνάθροισης και εύρεσης της μέγιστης τιμής. Η παραγωγή ξεκινάει από την πρωτογενή χρονοσειρά μέτρησης της βροχόπτωσης, η οποία έχει μικρό χρονικό βήμα (π.χ. πεντάλεπτο, δεκάλεπτο, ωριαίο και κάποιες φορές και ημερήσιο).

Η παραγωγή των σειρών μεγίστων μηνιαίου χρονικού βήματος ειδικά, εξυπηρετεί περισσότερο την κατάρτιση πινάκων εποχικών στατιστικών και λιγότερο την κατάρτιση όμβριων καμπυλών. Για την κατάρτιση των όμβριων καμπυλών απαιτούνται σειρές ετήσιων μεγίστων (αναφερόμενοι μάλιστα στο υδρολογικό έτος). Ωστόσο αν έχουμε στην διάθεσή μας μηνιαίες χρονοσειρές μεγίστων, μπορούμε εύκολα να μεταβούμε σε ετήσια χρονοσειρά

μεγίστων με τις διαδικασίες του προγράμματος για την παραγωγή χρονοσειρών μεγαλύτερου χρονικού βήματος (συνάθροιση). Αν οι χρονοσειρές μεγίστων πρόκειται να χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για την κατάρτιση όμβριων καμπυλών, τότε προτείνεται η απευθείας παραγωγή χρονοσειράς μεγίστων ετησίου βήματος, ώστε να αποφύγουμε, μεταξύ άλλων, προβλήματα τιμών περιθωρίου.

Η υπολογιστική διαδικασία είναι απλή. Έστω δ η διακριτότητα της χρονοσειράς μέτρησης (ουσιαστικά το χρονικό βήμα: δεκάλεπτο, ωριαίο ή ημερήσιο). Τότε μπορούμε να παράγουμε μία χρονοσειρά μεγίστων που θα αναφέρεται σε διάρκεια βροχόπτωσης d , όταν το d είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του δ ($n \times \delta$). Αυτό γίνεται δημιουργώντας ένα παράθυρο διαστάσεων $d = n \times \delta$, το οποίο μετακινείται στη χρονοσειρά μετρήσεων και συναθροίζει τις τιμές της βροχόπτωσης ώστε να προκύψει το συνολικό ύψος h που αντιστοιχεί σε αυτό το «παράθυρο». Στην συνέχεια επιλέγουμε την μέγιστη τιμή h για κάθε μήνα ή έτος, ανάλογα με το χρονικό βήμα της σειράς που θέλουμε να παράγουμε. Η αφετηρία του παραθύρου μπορεί και μετακινείται έως την τελευταία τιμή της βροχόπτωσης του μήνα ή του έτους που εξετάζεται, άρα μπορεί να συναθροίσει τιμές και από το επόμενο χρονικό βήμα. Συνεπώς, η μέγιστη τιμή ενδέχεται να περιλαμβάνει και τιμές που περιέχονται σε δύο αλληλάλληλα βήματα.

Η σειρά h των μεγίστων υψών βροχής για συγκεκριμένη διάρκεια d , μετατρέπεται εύκολα σε χρονοσειρά μεγίστων εντάσεων βροχής i , αρκεί να διαιρέσουμε το h με το d . Ωστόσο παρέχεται η δυνατότητα διατήρησης των μεγίστων υψών ως τελικό αποτέλεσμα.

Στην περίπτωση ύπαρξης ελλειπουσών τιμών ή τιμών περιθωρίου, πρέπει να γίνεται επισήμανση στον χρήστη μέσω κατάλληλης σημαιοθέτησης των τιμών. Συνεπώς, όταν στη μέγιστη τιμή που προέκυψε περιλαμβάνονται ελλείψεις, η εγγραφή επισημαίνεται με την σημαία «έλλειψης» (MISSING). Υπάρχει ωστόσο η επιλεκτική δυνατότητα απόρριψης των «παραθύρων» που περιλαμβάνουν ελλείψεις.

Επιπλέον, σε περίπτωση που η μέγιστη τιμή προκύπτει από κάποιο παράθυρο που συνορεύει με περίοδο ελλείψεων, τοποθετείται η σημαία «τιμών περιθωρίου». Η σημαιοθέτηση αυτή επιστρά την προσοχή στον μελετητή, καθώς υπάρχει περίπτωση τα μέγιστα που προέκυψαν, αν συνορεύουν με ελλείψεις, να ήταν μεγαλύτερα, οπότε πρέπει να αποφασίσει για απόρριψη ή μη της υπολογισθείσας τιμής. Επιπλέον αυτή είναι μία απαραίτητη πληροφορία αν θέλουμε να μεταβούμε από σειρά μηνιαίων μεγίστων σε σειρά ετησίων μεγίστων. Τέλος, παρέχεται, προαιρετικά, στήλη (χρονοσειρά) με το ποσοστό των ελλείψεων σε μονάδες τοις εκατό (%).

6.2.3 Έλεγχος συνέπειας χρονοσειρών

Οι χρονοσειρές που χρησιμοποιούνται για την κατάρτιση των όμβριων καμπυλών θα πρέπει να ελέγχονται αν είναι συνεπείς. Συγκεκριμένα:

- Όταν αυξάνεται η διάρκεια d , οι τιμές των μεγίστων υψών βροχόπτωσης για κάθε έτος χωριστά είναι αύξουσες, δηλαδή θα πρέπει $h(d_1) > h(d_2)$ για $d_1 > d_2$
- Αντίθετα, όσον αφορά τις εντάσεις βροχόπτωσης, είναι φθίνουσες για αντίστοιχη αύξηση της διάρκειας, δηλαδή θα πρέπει $i(d_1) < i(d_2)$ για $d_1 > d_2$.

Στους παραπάνω ελέγχους εισάγεται ένα περιθώριο σφάλματος $\varepsilon = 0.02$, που χρησιμοποιείται αυτούσιο στον έλεγχο των εντάσεων, ενώ προσαυξάνεται πολλαπλασιαζόμενο με την διάρκεια για τον έλεγχο των υψών. Ο έλεγχος μπορεί να καταλήγει σε αυτόματη διόρθωση των ασυνεπών τιμών, εξισώνοντας δύο διαδοχικές τιμές εντάσεων ή υψών, ώστε να μην παραβιάζεται καμία από τις δύο συνθήκες.

Ο παραπάνω έλεγχος μπορεί να απενεργοποιηθεί. Η δυνατότητα αυτή είναι επιθυμητή όταν εξετάζονται συνθετικές χρονοσειρές, στις οποίες δεν λαμβάνεται ειδική μέριμνα για την συνέπεια των τιμών (π.χ. δείγμα που έχει προέλθει από την ενοποίηση πολλών σταθμών).

Ένας ακόμα έλεγχος είναι ο ελάχιστος αριθμός χρονοσειρών, ο οποίος τίθεται σε ίσος με δύο εφόσον θέλουμε να προσδιορίσουμε τα στοιχεία του παρανομαστή $b(d)$. Όταν όμως θέτουμε ρητά τα στοιχεία του παρονομαστή (η και θ), τότε ο ελάχιστος αριθμός περιορίζεται σε μία χρονοσειρά. Αυτή η δυνατότητα είναι χρήσιμη, καθώς μπορούμε για παράδειγμα να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους η και θ από ένα δείγμα βροχογράφου, στην συνέχεια όμως να καταρτίσουμε τις τελικές όμβριες καμπύλες από ένα δείγμα βροχόμετρου, χρησιμοποιώντας τις τιμές των η και θ που προέκυψαν από τη χρονοσειρά του βροχογράφου.

6.2.4 Επίδραση χρονικής ευκρίνειας

Έχει παρατηρηθεί πως οι χρονοσειρές μέγιστης έντασης που προκύπτουν από την συνάθροιση διακριτών τιμών υποεκτιμούν την πραγματική μέγιστη ένταση για την δεδομένη διάρκεια συνάθροισης. Αυτή η υποεκτίμηση είναι τόσο μεγαλύτερη όσο η διάρκεια βροχόπτωσης πλησιάζει στην χρονική ευκρίνεια. Αν η χρονική ευκρίνεια είναι δ , μπορούμε να εκφράσουμε τον λόγο d/δ και στην συνέχεια να εξάγουμε συντελεστές άρσης του σφάλματος διακριτοποίησης. Οι συντελεστές έχουν προταθεί από τους Linsley *et al.* (1975, σ. 375· βλ. Πίνακα 5.1), λαμβάνουν δε τη μέγιστη τιμή 1.13 όταν η διάρκεια είναι ίση με την ευκρίνεια.

Μπορούμε να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις για την χρήση των παραπάνω συντελεστών:

- Όταν οι χρονοσειρές των μεγίστων βροχοπτώσεων έχουν προκύψει από συνάθροιση χρονοσειρών μικρής χρονικής ευκρίνειας (π.χ. από βροχογράφους με διακριτότητα 5 ή 10 λεπτά), η εφαρμογή των συντελεστών οδηγεί στην παραγωγή όμβριων καμπυλών με καλύτερη εκτίμηση (βάρος) στις μικρές διάρκειες.
- Όταν οι όμβριες καμπύλες καταρτίζονται από δείγμα βροχόμετρου (π.χ. ημερήσιου), η χρήση του συντελεστή 1.13 (ή 1.04 για χρονοσειρές διάρκειας $d = 48h$) είναι απαραίτητη, διαφορετικά υποεκτιμάται η ένταση σε όλο το εύρος των χρονικών διαρκειών.
- Όταν χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα δείγματα από βροχόμετρα και βροχογράφους πρέπει να εφαρμόζονται κατάλληλοι συντελεστές με διαφορετικά κριτήρια σε κάθε δείγμα, ώστε να αίρεται η ανομοιογένεια (τα βροχόμετρα πρέπει να συμμετέχουν με μεγαλύτερο βάρος).

Ο χρήστης μπορεί να καθορίσει ανά χρονοσειρά την χρονική ευκρίνεια (ειδικά όταν χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα χρονοσειρές από βροχόμετρα και βροχογράφους) ή αν δεν είναι γνωστή να μην την εισάγει. Στην συνέχεια, το υποσύστημα κατάρτισης των όμβριων καμπυλών μπορεί να λάβει ή όχι υπόψη την εν λόγω επίδραση.

6.2.5 Σχέση σειρών ετήσιων μεγίστων και σειρών υπεράνω κατωφλίου

Για μικρές περιόδους επαναφοράς ($T < 10$), πιο αντιπροσωπευτικές όμβριες καμπύλες είναι αυτές που προκύπτουν από χρονοσειρές υπεράνω κατωφλίου (Κουτσογιάννης, 1997, σ. 287). Οι χρονοσειρές που έχουμε στην διάθεσή μας όμως συνήθως, είναι χρονοσειρές ετήσιων μεγίστων. Είναι δυνατή δε η αναγωγή των αποτελεσμάτων που προέρχονται από επεξεργασία σειρών ετήσιων μεγίστων με τέτοιο τρόπο, ώστε να αντιστοιχούν προσεγγιστικά σε αυτά που προέρχονται από επεξεργασίες υπεράνω κατωφλίου.

Αν υποθέσουμε πως T είναι η περίοδος επαναφοράς που αντιστοιχεί στην χρονοσειρά ετησίων μεγίστων και T' η περίοδος επαναφοράς που αντιστοιχεί στην χρονοσειρά μεγίστων υπεράνω κατωφλίου, τότε τα δύο μεγέθη συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$T = \frac{1}{1 - \exp(-1/T')} \Leftrightarrow T' = \frac{1}{-\ln(1 - 1/T)} \quad (6.1)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να προσεγγιστεί με ακρίβεια δεύτερου δεκαδικού ψηφίου από την απλούστερη:

$$T = T' + 0.5 \quad (6.2)$$

Η αναγωγή αυτή (είτε με την ακριβή σχέση είτε με την παραπάνω προσέγγιση) έχει νόημα για $2 < T < 10$. Στην περίπτωση αυτή, είναι δυνατόν να ανάγουμε τις εξισώσεις των όμβριων καμπυλών αντικαθιστώντας το T με την έκφραση που περιέχει το T' . Η αναγωγή αυτή των εξισώσεων δίνει απλούστερες εκφράσεις, ειδικά στην περίπτωση των κατανομών ακραίων τιμών (AT). Η αναγωγή στο σύστημα γίνεται αυτόματα με επιλογή του χρήστη. Η διαδικασία αυτή οδηγεί σε ελαφρά μεγαλύτερες τιμές έντασης, για αντίστοιχες διάρκειες και περιόδους επαναφοράς.

6.2.6 Επιλογή στατιστικών κατανομών

Οι στατιστικές κατανομές που χρησιμοποιούνται από το σύστημα εξαγωγής όμβριων καμπυλών προέρχονται από την ομάδα των κατανομών γάμα, των κατανομών μεγίστων τύπου AT, και την κατανομή Pareto. Οι παράμετροι των κατανομών εκτιμώνται είτε με την μέθοδο των ροπών είτε με την μέθοδο των L -ροπών, όταν αυτό είναι εφικτό. Γενικά, η μέθοδος των L -ροπών προτιμάται, εφόσον αναφερόμαστε σε ακραίες βροχοπτώσεις.

Στον Πίνακα 6.1 απεικονίζονται όλοι οι τύποι κατανομών που χρησιμοποιούνται (με αναφορά στις μεθοδολογίες εκτίμησης των παραμέτρων τους) και απεικονίζεται η μαθηματική έκφραση της συνάρτησης ποσοστημορίου $x(T)$ συναρτήσει της περιόδου επαναφοράς T . Οι παράμετροι των κατανομών μπορούν να προσδιορίζονται χωριστά για κάθε δείγμα συγκεκριμένης διάρκειας d (σύμφωνα με την συμβατική μέθοδο) είτε από κάποιο ενοποιημένο δείγμα (σύμφωνα με συνεπείς μεθόδους εξαγωγής όμβριων καμπυλών). Στην τελευταία στήλη του Πίνακα 6.1 απεικονίζεται η ενιαία σχέση όμβριας καμπύλης που προκύπτει αν τελικά εφαρμοστεί η μέθοδος ενοποίησης διαρκειών. Σε αυτήν την περίπτωση, η γενικευμένη σχέση είναι:

$$i = x(T) / b(d) \quad (6.3)$$

όπου η $x(T)$ είναι η συνάρτηση ποσοστημορίου για την κατανομή που τελικά εφαρμόζεται και με παραμέτρους που αναφέρονται στο ενοποιημένο δείγμα, ενώ ο παρονομαστής $b(d)$ είναι μια παραμετρική σχέση που περιέχει έναν σταθερό όρο θ και έναν εκθέτη η , ήτοι:

$$b(d) = (d + \theta)^\eta \quad (6.4)$$

Η κλασική κατανομή που χρησιμοποιείται για την κατάρτιση των όμβριων καμπυλών είναι η AT-1 μεγίστων (Gumbel max), ωστόσο σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο εδάφιο 3.2.3, η κατανομή των μεγίστων των βροχοπτώσεων προσεγγίζεται καλύτερα από μία τύπου AT-2 μεγίστων (GEV). Για το λόγο αυτό, προτείνεται στον χρήστη (ως προκαθορισμένη κατανομή) η ΓAT μεγίστων, με παράμετρο σχήματος $\kappa = 0.15$ (οπότε προκύπτει η κατανομή AT-2, αφού $\kappa > 0$). Ο χρήστης έχει την δυνατότητα να εξετάσει και τους άλλους τύπους κατανομών, ελέγχοντας την προσαρμογή της θεωρητικής κατανομής στην αντίστοιχη εμπειρική.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.2, για τον έλεγχο της προσαρμογής χρησιμοποιείται κάποιο χαρτί κατανομής που μετασχηματίζει τον άξονα των πιθανοτήτων (ή περιόδων επαναφοράς). Εφόσον η ΓΑΤ μεγίστων είναι η προτεινόμενη κατανομή, το προκαθορισμένο χαρτί είναι αυτό της ΓΑΤ μεγίστων (με $\kappa = 0.15$), ώστε να γραμμικοποιείται η απεικόνιση της θεωρητικής κατανομής. Για την απεικόνιση των σημείων του δείγματος στο διάγραμμα, ως εμπειρική κατανομή χρησιμοποιείται η κατανομή Weibull (βλ. 2.3.3).

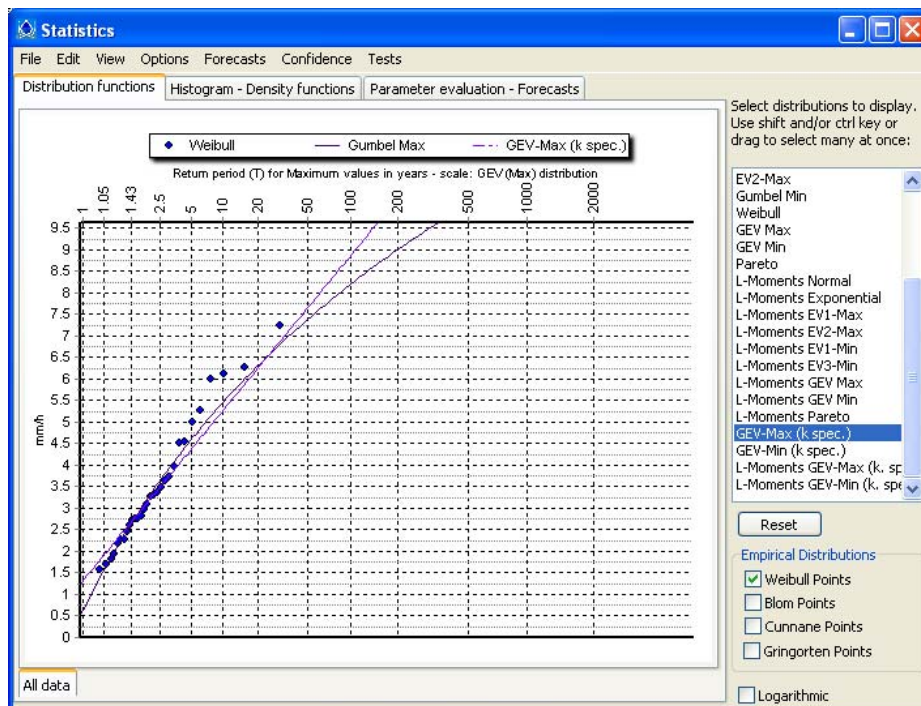
Πίνακας 6.1: Κατανομές που χρησιμοποιούνται για την κατάρτιση των όμβριων καμπυλών, συναρτήσεις της περιόδου επαναφοράς T , και γενικευμένες εξισώσεις όμβριων καμπυλών που προκύπτουν από την διαίρεση με κάποιον όρο $b(d)$ (d : διάρκεια βροχόπτωσης).

Κατανομή	Μέθοδος ροπών	Μέθοδος L-ροπών	Συνάρτηση ποσοστημορίου συναρτήσεις της περιόδου επαναφοράς T : $x(T)$	Ενιαία εξίσωση όμβριας καμπύλης i (ένταση) συναρτήσεις της περιόδου επαναφοράς T και της διάρκειας d
Εκθετική	✓	✓	$(\psi + \ln T) / \lambda$	$\frac{\lambda \psi + \ln T}{\lambda (d + \theta)^\eta}$
Γάμα	✓		$G^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}, \kappa, \lambda\right)$	$\frac{G^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}, \kappa, \lambda\right)}{(d + \theta)^\eta}$
Log-Pearson III	✓		$e^{G^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}, \kappa, \lambda\right) + \psi}$	$\frac{e^{G^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}, \kappa, \lambda\right) + \psi}}{(d + \theta)^\eta}$
ΑΤ-1 μεγίστων	✓	✓	$\lambda \psi - \lambda \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)$	$\frac{\lambda \psi - \lambda \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)}{(d + \theta)^\eta}$
ΑΤ-2 μεγίστων	✓	✓	$\frac{\lambda}{\kappa} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)^{-\kappa}$	$\frac{\lambda \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)^{-\kappa}}{\kappa (d + \theta)^\eta}$
ΓΑΤ μεγίστων	✓	✓	$\lambda \psi + \frac{\lambda}{\kappa} \left[\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)^{-\kappa} - 1 \right]$	$\frac{\lambda \psi + \frac{\lambda}{\kappa} \left[\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)^{-\kappa} - 1 \right]}{(d + \theta)^\eta}$
ΓΑΤ μεγίστων, δεδομένο κ	✓	✓		
Pareto	✓	✓	$\frac{\lambda}{\kappa} \left[1 - \left(\frac{1}{T}\right)^\kappa + \psi \kappa \right]$	$\frac{\lambda \left[1 - \left(\frac{1}{T}\right)^\kappa + \psi \kappa \right]}{\kappa (d + \theta)^\eta}$

Πίνακας 6.2: Κατανομές ΑΤ που χρησιμοποιούνται στις όμβριες καμπύλες, για (ανηγμένη) περίοδο επαναφοράς T' που αντιστοιχεί σε χρονοσειρά μεγίστων υπεράνω κατωφλίου.

Κατανομή	Συνάρτηση ποσοστημορίου συναρτήσει της περιόδου επαναφοράς, $x(T')$	Ενιαία εξίσωση όμβριας καμπύλης i (ένταση) συναρτήσει της περιόδου επαναφοράς T' και της διάρκειας d
ΑΤ-1 μεγίστων	$\lambda (\psi + \ln T')$	$\frac{\lambda (\psi + \ln T')}{(d + \theta)^\eta}$
ΑΤ-2 μεγίστων	$(\lambda / \kappa) T'^{\kappa}$	$\frac{\lambda T'^{\kappa}}{\kappa (d + \theta)^\eta}$
ΓΑΤ μεγίστων	$\lambda \psi + (\lambda / \kappa) (T'^{\kappa} - 1)$	$\frac{\lambda \psi + (\lambda / \kappa) (T'^{\kappa} - 1)}{(d + \theta)^\eta}$
ΓΑΤ μεγίστων με δεδομένο κ		

Στον Πίνακα 6.2 παρουσιάζονται οι μετασχηματισμένες συναρτήσεις ποσοστημορίου για τις κατανομές ΑΤ, εφόσον χρησιμοποιείται η περίοδος επαναφοράς T' που αντιστοιχεί σε χρονοσειρά μεγίστων υπεράνω κατωφλίου. Ο μετασχηματισμός γίνεται εισάγοντας την έκφραση της T συναρτήσει της T' . Τελικά οι σχέσεις που προκύπτουν έχουν απλούστερη μορφή και μπορούν να χρησιμοποιούνται εναλλακτικά για μικρές περιόδους επαναφοράς. Στο υπολογιστικό σύστημα αρκεί να κάνουμε τον απλό μετασχηματισμό $T = T' + 0.5$, εφόσον θέλουμε να εξάγουμε μια μεμονωμένη καμπύλη για συγκεκριμένη περίοδο επαναφοράς.



Σχήμα 6.2: Προσαρμογή στατιστικής κατανομής σε δείγμα μεγίστων εντάσεων βροχής.

6.2.7 Κατάρτιση όμβριων καμπυλών με τη συμβατική μέθοδο

Η κατάρτιση όμβριων καμπυλών βασίζεται πρωτίστως σε συνεπείς μεθόδους εξαγωγής, όπως είναι η μέθοδος ενοποίησης διαρκειών (βλ. 6.2.8). Για λόγους πληρότητας, το πρόγραμμα

μπορεί να εκτιμήσει όμβριες καμπύλες για συγκεκριμένη περίοδο επαναφοράς, σύμφωνα με τη λεγόμενη συμβατική μέθοδο, που ωστόσο παρουσιάζει τα εξής μειονεκτήματα:

- Δεν μπορεί να εξαχθεί ενιαία μαθηματική σχέση για τις όμβριες καμπύλες που να ισχύει για κάθε d και κάθε T .
- Οι καμπύλες που προκύπτουν δεν είναι συνεπείς, έτσι είναι δυνατόν για παράδειγμα να τέμνονται σε κάποια διάρκεια, το οποίο δεν είναι μαθηματικά αποδεκτό.

Τα παραπάνω μειονεκτήματα αίρονται με τις συνεπείς μεθόδους εξαγωγής.

Έστω ότι η όμβρια καμπύλη για την περίοδο επαναφοράς T περιγράφεται από την σχέση:

$$i_T = \omega / d^n \quad (6.5)$$

Στο πρόγραμμα χρησιμοποιούμε την πλέον απλή μορφή για τον παρονομαστή $b(d) = d^n$, ώστε να μπορούμε να προσδιορίσουμε τα a και η με απλή γραμμική παλινδρόμηση. Η μεθοδολογία αναλύεται στα εξής βήματα:

Βήμα 1: Θέτουμε κάποια περίοδο επαναφοράς T , για την οποία θα καταρτιστεί η καμπύλη.

Βήμα 2: Επιλέγεται μια στατιστική κατανομή για την ανάλυση των μεγίστων.

Βήμα 3: Έστω ότι διαθέτουμε k χρονοσειρές ετησίων μεγίστων και k τιμές διάρκειας d_i . Κάθε χρονοσειρά διάρκειας d_i εξετάζεται ως αυτόνομο δείγμα. Για κάθε δείγμα προσδιορίζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά του και προσαρμόζονται οι παράμετροι της επιλεγείσας κατανομής.

Βήμα 4: Με γνωστές τις παραμέτρους της κατανομής για κάθε δείγμα, γίνεται στατιστική πρόγνωση για την δεδομένη περίοδο επαναφοράς T , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του ποσοστημορίου $x(T)$ του Πίνακα 6.1. Με τον τρόπο αυτό προκύπτουν k σημεία $[d_i, x_i(T)]$, τα οποία κατά κανόνα διατάσσονται σχεδόν γραμμικά σε διπλό λογαριθμικό χαρτί.

Βήμα 5: Εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός $x_i = \ln d_i$ και $y_i = \ln x_i(T)$, οπότε προσαρμόζουμε μια ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης του τύπου:

$$y = a x + b \quad (6.6)$$

Οι παράμετροι της όμβριας καμπύλης $i_T = \omega / d^n$, για τη δεδομένη περίοδο επαναφοράς T που έχει οριστεί, υπολογίζονται από τις σχέσεις $\omega = \exp(a)$ και $\eta = -b$. Στον χρήστη παρέχονται τελικά οι τιμές των ω και η , καθώς και ο συντελεστής προσδιορισμού της προσαρμογής.

6.2.8 Κατάρτιση όμβριων καμπυλών με τη μέθοδο ενοποίησης διαρκειών

Η μεθοδολογία αυτή, που περιγράφηκε στο εδάφιο 5.1.4, επιτρέπει την εξαγωγή μιας ενιαίας μαθηματικής σχέσης για τις όμβριες καμπύλες, συναρτήσει της διάρκειας d και της περιόδου επαναφοράς T . Ως ενιαίες σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτές που εμφανίζονται στην τελευταία στήλη του Πίνακα 6.1. Η μεθοδολογία απαιτεί μια σειρά πολύπλοκων υπολογισμών, και για αυτό πλεονεκτεί ο προγραμματισμός της σε λογισμικό.

Ο προσδιορισμός των παραμέτρων του παρονομαστή $b(d) = (d + \theta)^n$ (όπου οι παράμετροι d και θ εκφράζονται σε χρονικές μονάδες, π.χ. ώρες) πραγματοποιείται μέσω μιας διαδικασίας εξαντλητικών δοκιμών. Συγκεκριμένα, γίνεται μια αρχική υπόθεση τιμών ελέγχου η και θ και στην συνέχεια υπολογίζεται ένας στατιστικός δείκτης h . Μετά από πολλές δοκιμές για διαφορετικά η και θ , υιοθετείται εκείνο το ζεύγος που ελαχιστοποιεί αυτόν τον στατιστικό δείκτη h . Συνεπώς, η κατάρτιση των όμβριων καμπυλών περιλαμβάνει δύο βήματα: (α) τον

προσδιορισμό των παραμέτρων θ και η της συνάρτησης $b(d)$, και (β) τον προσδιορισμό των παραμέτρων της κατανομής $x(T)$ του ενοποιημένου δείγματος (π.χ. κ , λ και ψ).

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως θα υπολογίζεται η στατιστική παράμετρος h συναρτήσει των δειγμάτων των βροχοπτώσεων και των παραμέτρων του παρονομαστή.

Έστω πως είναι γνωστές οι τιμές των παραμέτρων η και θ , και έστω ότι δίνονται k δείγματα ετησίων μεγίστων, που αντιστοιχούν σε k διάρκειες d_j . Αν n_j είναι το μέγεθος κάθε δείγματος, τότε ενοποιώντας όλα τα δείγματα προκύπτει ένα δείγμα μεγέθους:

$$m = \sum_{j=1}^k n_j \quad (6.7)$$

Για να γίνει η ενοποίηση, κάθε χρονοσειρά i_{jl} πολλαπλασιάζεται με τον όρο $b(d_j) = (d_j + \theta)^\eta$, οπότε προκύπτει το ενοποιημένο δείγμα $y_{jl} = i_{jl} b(d_j)$, το οποίο ταξινομείται κατά φθίνουσα σειρά. Ωστόσο, για λόγους καλύτερης προσαρμογής της συνάρτησης $b(d)$ στην περιοχή των υψηλότερων εντάσεων, είναι σκόπιμο να μην χρησιμοποιείται σε αυτό το στάδιο υπολογισμού το σύνολο των δεδομένων αλλά μέρος αυτών. Έτσι, πριν την ταξινόμηση του συνόλου του δείγματος γίνεται μία ταξινόμηση ανά επιμέρους δείγμα και λαμβάνεται ένα ποσοστό (π.χ. 1/3) από τις μέγιστες τιμές των χρονοσειρών, για να σχηματιστεί το ενιαίο δείγμα, μεγέθους $m' < m$.

Το προτεινόμενο (default) ποσοστό είναι 1/3, ωστόσο στο πρόγραμμα υπάρχει η δυνατότητα εφαρμογής εναλλακτικών τιμών από το σύνολο {10%, 20%, 33%, 50%, 67%, 100%}, όπως φαίνεται στη φόρμα του Σχήματος 6.3. Γενικά, η επιρροή του ποσοστού στα αποτελέσματα δεν είναι μεγάλη, ως εκ τούτου μπορούμε να χρησιμοποιούμε την προκαθορισμένη τιμή. Ωστόσο, αν τα δείγματα είναι μικρά απαιτείται μια αναγωγή. Συγκεκριμένα, αν το επιθυμητό ποσοστό είναι ρ και το μέγιστο πλήθος τιμών όλων των δειγμάτων είναι $n_{\max} = \max(n_j)$, τότε το τελικό ποσοστό q εκτιμάται ως εξής:

$$q = \begin{cases} \rho, & \rho n_{\max} > 10 \\ 10/n_{\max}, & n_{\max} > 10 \wedge \rho n_{\max} \leq 10 \\ 1, & n_{\max} \leq 10 \wedge \rho n_{\max} \leq 10 \end{cases} \quad (6.8)$$

Λαμβάνοντας τις $q n_j$ μεγαλύτερες τιμές από κάθε χρονοσειρά, σχηματίζεται το ενιαίο δείγμα που έχει μέγεθος:

$$m = \sum_{j=1}^k q n_j \quad (6.9)$$

Αφού γίνει τελικά η ταξινόμηση κατά φθίνουσα σειρά του ενοποιημένου δείγματος, αποδίδονται βαθμοί (ranks) r_{jl} για κάθε τιμή του δείγματος, δηλαδή η αύξουσα αριθμητική σειρά (π.χ. 1 για την μεγαλύτερη τιμή, 2 για την αμέσως επόμενη κλπ). Στην περίπτωση ταυτόσημων τιμών y_{jl} χρησιμοποιείται η μέση τιμή των αντίστοιχων βαθμών. Τελικά για κάθε δείγμα χωριστά υπολογίζεται η μέση τιμή των αντίστοιχων βαθμών, ήτοι:

$$\bar{r}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{l=1}^k r_{jl} \quad (6.10)$$

όπου στην θέση του n_j χρησιμοποιούμε ποσοστό $q n_j$. Αν όλα τα επιμέρους δείγματα είχαν την ίδια κατανομή, τότε κάθε \bar{r}_j θα βρισκόταν πολύ κοντά στην τιμή $(m + 1) / 2$. Για την επίτευξη αυτού του στόχου και τον υπολογισμό των βέλτιστων τιμών η και θ χρησιμοποιείται

η στατιστική παράμετρος ελέγχου Kruskal-Wallis, που εξετάζει τους μέσους βαθμούς από όλα τα επιμέρους δείγματα, ορίζοντας το μέτρο επίδοσης:

$$h = \frac{12}{m(m+1)} \sum_{j=1}^k n_j \left(\bar{r}_j - \frac{m+1}{2} \right)^2 \quad (6.11)$$

Η ελαχιστοποίηση του h επιτυγχάνεται έπειτα από κάποια εξαντλητικά τεστ. Στο λογισμικό χρησιμοποιείται ένα μητρώο 31×31 , όπου οι τιμές των η και θ κυμαίνονται στο διάστημα $(0, 1)$. Αφού επιτευχθεί ο βέλτιστος συνδυασμός των η , θ , σχηματίζεται ένα νέο μητρώο 31×31 με κέντρο αυτόν το συνδυασμό και διαστάσεις $1/32 \times 1/32$, ώστε να υπολογιστεί μια ακριβέστερη λύση, με ακρίβεια τρίτου δεκαδικού ψηφίου στα η και θ . Με τον τρόπο αυτό, απαιτούνται συνολικά 1922 δοκιμές για την εξαγωγή των τελικών τιμών.

Στον πρόγραμμα παρέχεται ακόμη η δυνατότητα, για κάθε επιμέρους δείγμα, να καθοριστεί αν θα χρησιμοποιείται στον προσδιορισμό των η και θ , ή αν θα χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των παραμέτρων της κατανομής ή και για τους δύο σκοπούς. Μπορούμε για παράδειγμα να εισάγουμε χρονοσειρές από βροχογράφο, με βάση τις οποίες εκτιμώνται οι παράμετροι η και θ , ενώ οι παράμετροι της κατανομής $x(T)$ προκύπτουν είτε από τις χρονοσειρές που αναφέρονται σε μεγάλες χρονικές διάρκειες (π.χ. 12, 24, 48 h) ή από μία μεμονωμένη χρονοσειρά ημερήσιων παρατηρήσεων βροχομέτρου. Τέλος υπάρχει δυνατότητα να τεθούν συγκεκριμένες τιμές των η και θ από τον χρήστη, π.χ. τιμές που χαρακτηρίζουν κάποια περιοχή και έχουν προκύψει από την ενοποίηση δειγμάτων διαφορετικών σταθμών (βλ. Κουτσογιάννης, 1997, σ. 284).

Το τελικό βήμα για την κατάρτιση των ομβρίων καμπυλών είναι ο προσδιορισμός των παραμέτρων της κατανομής $x(T)$ που υιοθετείται. Με γνωστές πλέον τις τιμές των η και θ (είτε υπολογισμένος αυτόματα, μέσω βελτιστοποίησης, είτε ορισμένες από τον χρήστη), χρησιμοποιούμε το ενοποιημένο δείγμα που προκύπτει, ήτοι η χρονοσειρά $y_{jl} = i_{jl} b(d_j)$. Αφού υπολογιστούν τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ενοποιημένου δείγματος y_{jl} , εκτιμώνται οι παράμετροι της συνάρτησης κατανομής που υιοθετείται, συναρτήσει των εν λόγω χαρακτηριστικών. Όπως αναφέρθηκε, για την ανάλυση μέγιστων εντάσεων (ή υψών) βροχής συστήνεται η εφαρμογή της κατανομής ΓΑΤ-2, με παράμετρο σχήματος $\kappa = 0.15$. Συνεπώς, ζητούμενο είναι η εκτίμηση των δύο άλλων παραμέτρων της κατανομής, λ και ψ , σύμφωνα με τη μεθοδολογία του εδαφίου 3.2.2.

6.3 Παράδειγμα εφαρμογής

Στον Πίνακα 6.3 απεικονίζεται το δείγμα των μέγιστων εντάσεων βροχής για διάρκειες από 5 min έως 24 h, που προέρχεται από τον μετεωρολογικό σταθμό της ΕΜΥ στο Ελληνικό. Με βάση το συγκεκριμένο δείγμα, που καλύπτει τα υδρολογικά έτη 1957-58 έως 1986-87, θα περιγραφεί η διαδικασία κατάρτισης των ομβρίων καμπυλών του συγκεκριμένου σταθμού, με χρήση του προγράμματος Υδρογνώμων και του υποσυστήματος Όμβρος.

Αρχικά, γίνεται η εισαγωγή των χρονοσειρών, μέσω της κύριας φόρμας του προγράμματος Υδρογνώμων (Σχήμα 6.1). Οι πρωτογενείς χρονοσειρές έχουν ήδη προετοιμαστεί, δηλαδή για κάθε διάρκεια έχει οριστεί ένα συμβατό αρχείο τύπου *.hts που περιέχει τις αντίστοιχες μέγιστες εντάσεις βροχής κάθε υδρολογικού έτους (συνολικά οκτώ χρονοσειρές). Για κάθε επιμέρους χρονοσειρά, είναι δυνατή η πραγματοποίηση τυπικών στατιστικών αναλύσεων, στο ίδιο το περιβάλλον εργασίας του λογισμικού Υδρογνώμων. Για παράδειγμα, στη φόρμα του Σχήματος 6.2 απεικονίζονται οι θεωρητικές κατανομές Gumbel και ΓΑΤ (για $\kappa = 0.15$) καθώς

και η εμπειρική κατανομή Weibull, που αναφέρονται στη χρονοσειρά μέγιστων εντάσεων βροχής διάρκειας 12 h. Στην απεικόνιση των δεδομένων χρησιμοποιείται χαρτί ΓΑΤ για $\kappa = 0.15$, και συνεπώς η εν λόγω κατανομή απεικονίζεται ως ευθεία.

Οι χρονοσειρές που έχουν ανακτηθεί στο περιβάλλον εργασίας του λογισμικού Υδρογώνων εισάγονται στο υποσύστημα Όμβρος, μέσω της φόρμας του Σχήματος 6.3. Για κάθε χρονοσειρά ορίζονται η διάρκεια, ο τύπος της μεταβλητής (ένταση ή ύψος βροχής), και το ποσοστό του δείγματος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων η και θ . Στο παράδειγμα, χρησιμοποιούμε το 1/3 των μέγιστων τιμών από κάθε χρονοσειρά, που είναι το προκαθορισμένο ποσοστό του προγράμματος (βλ. 6.2.8).

Πίνακας 6.3: Δείγμα ετήσιων μέγιστων εντάσεων βροχής στον μετεωρολογικό σταθμό του Ελληνικού (Πηγή: EMY).

Υδρ. έτος	Μέγιστη ένταση βροχής i (mm/h) για διάρκεια d							
	5 min	10 min	30 min	1 h	2 h	6 h	12 h	24 h
1957-58	81.60	66.00	53.20	35.00	26.90	8.97	6.27	
1958-59	58.80	48.00	33.00	21.50	11.20	6.75	3.98	
1959-60	39.60	34.80	20.00	11.60	6.85	2.40	1.82	
1960-61	54.00	34.80	18.40	11.00	6.65	3.62	2.28	
1961-62	120.00	85.80	41.80	24.80	19.30	7.32	3.73	
1962-63	67.20	60.00	23.60	13.80	7.20	3.03	1.94	
1963-64	78.00	48.00	27.80	14.30	8.50	3.52	2.72	
1964-65	96.00	63.00	28.00	15.50	10.65	4.28	2.17	
1965-66	38.40	36.00	23.00	12.00	6.55	2.45	1.69	
1966-67	74.40	63.60	28.40	15.10	7.55	4.88	2.46	
1967-68	36.00	24.60	16.60	10.20	6.65	3.65	2.75	1.58
1968-69	126.00	69.00	43.20	26.80	15.15	5.93	2.97	1.48
1969-70	82.80	64.20	41.60	24.50	12.45	5.45	2.75	1.76
1970-71	42.00	42.00	25.20	17.70	8.95	3.70	3.09	1.55
1971-72	117.60	85.20	65.20	35.90	19.75	10.02	5.01	2.92
1972-73	68.40	49.80	39.40	33.50	17.75	6.78	5.27	2.68
1973-74	60.00	42.00	28.60	15.20	9.85	4.20	3.47	2.00
1974-75	48.00	48.00	30.60	15.90	8.30	4.27	2.60	1.30
1975-76	120.00	120.00	74.00	40.90	21.50	7.38	4.54	2.27
1976-77	115.20	87.60	41.40	23.20	14.90	6.12	3.30	1.65
1977-78	56.40	46.20	38.60	32.70	20.15	6.73	3.37	1.68
1978-79	78.00	66.60	47.60	30.00	19.55	11.93	6.12	3.37
1979-80	67.20	40.80	17.20	13.30	8.60	4.22	2.81	1.62
1980-81	58.80	56.40	30.40	19.40	11.10	5.58	3.27	1.95
1981-82	67.20	64.80	40.60	24.70	13.05	4.35	2.28	1.14
1982-83	141.60	79.80	49.60	36.20	22.90	7.63	4.52	2.29
1983-84	102.00	69.00	50.40	29.00	17.70	7.03	3.63	1.82
1984-85	40.80	31.80	16.40	12.90	12.15	9.87	6.00	3.40
1985-86	74.40	66.00	29.20	15.60	9.40	3.13	1.57	0.83
1986-87			32.20	29.10	18.55	9.50	7.24	3.85

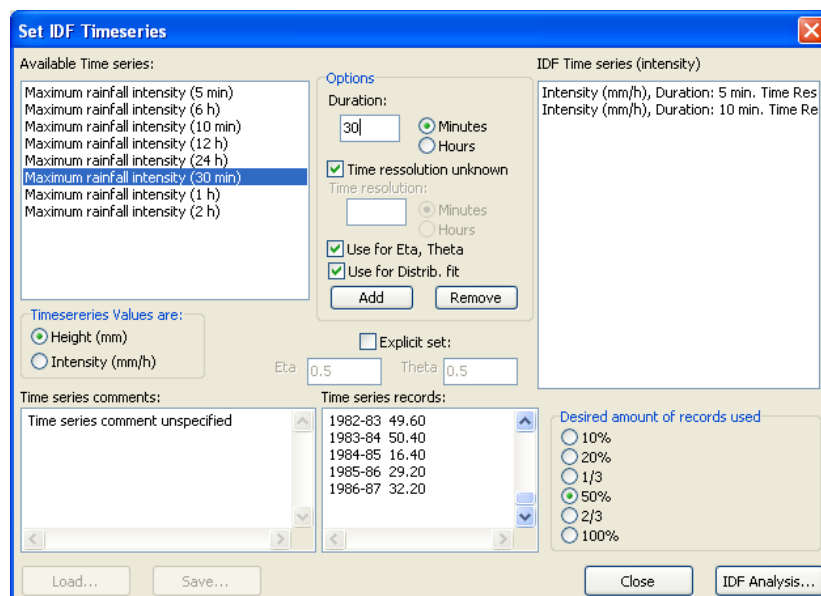
Με την επιλογή της λειτουργίας IDF Analysis παράγονται, αρχικά, οι όμβριες καμπύλες για διάφορες περιόδους επαναφοράς, σύμφωνα με τη συμβατική μέθοδο του εδαφίου 6.2.7. Μέσω του μενού Distribution, ο χρήστης επιλέγει τον τύπο της στατιστικής κατανομής. Στο παράδειγμα, εξετάζονται δύο τυπικές κατανομές, η AT1 μεγίστων (Gumbel) και η AT2 μεγίστων (GEV II), για την τυπική παράμετρο σχήματος $\kappa = 0.15$ και με εκτίμηση των

λοιπών παραμέτρων της με μέθοδο των L -ροπών. Οι αντίστοιχες όμβριες καμπύλες για περιόδους επαναφοράς 10, 100 και 1000 ετών, που αναφέρονται στις παραπάνω κατανομές, απεικονίζονται στις φόρμες των Σχημάτων 6.4 και 6.5, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, όλες οι επεξεργασίες θα αναφέρονται στην κατανομή GEV II, η οποία ενδείκνυται για την ανάλυση μέγιστων βροχοπτώσεων.

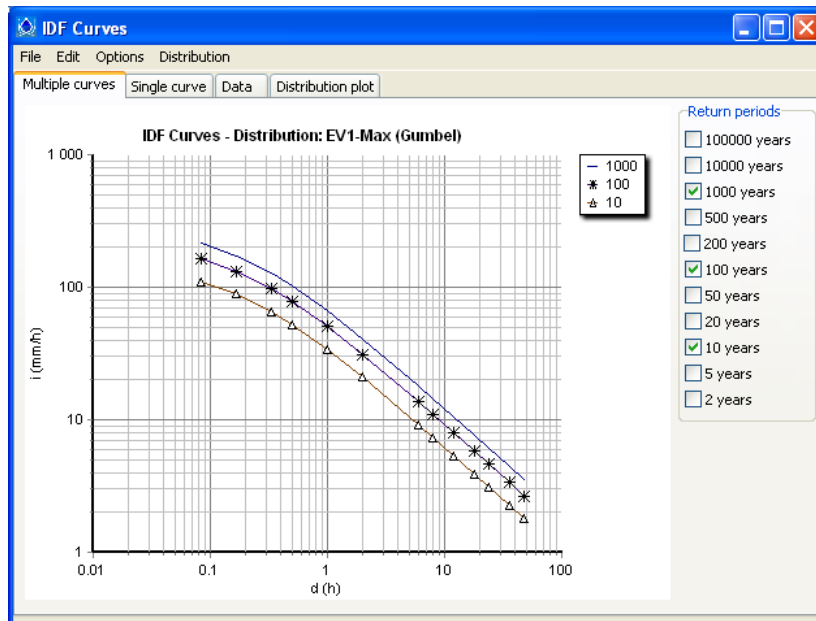
Για κάθε περίοδο επαναφοράς, είναι δυνατή η εκτίμηση των ορίων εμπιστοσύνης της κατανομής, με βάση τη μεθοδολογία στοχαστικής προσομοίωσης που αναφέρθηκε στο υποκεφάλαιο 5.3. Στη φόρμα του Σχήματος 6.6 απεικονίζονται τα διαστήματα εμπιστοσύνης 95% της όμβριας καμπύλης που παράγεται μέσω της κατανομής GEV II, για περίοδο επαναφοράς $T = 100$ έτη. Τα αποτελέσματα δίνονται και σε μορφή πίνακα (κάτω δεξιά).

Στη φόρμα του Σχήματος 6.7 δίνεται η ενιαία έκφραση, που προκύπτει με τη μέθοδο των ενοποιημένων δειγμάτων του εδαφίου 6.2.8. Όπως φαίνεται στη φόρμα, οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων η και θ είναι 0.792 και 0.186, αντίστοιχα. Στο ενοποιημένο δείγμα έχει προσαρμοστεί η κατανομή ΓΑΤ μεγίστων με $\kappa = 0.15$, για την οποία προκύπτουν $\lambda = 7.04$ και $\psi = 2.88$ (η εκτίμηση παραμέτρων γίνεται με τη μέθοδο των L -ροπών). Οι αντίστοιχες τιμές για τη συνάρτηση κατανομής AT-1 μεγίστων (Gumbel) είναι $\lambda = 7.95$ και $\psi = 2.64$.

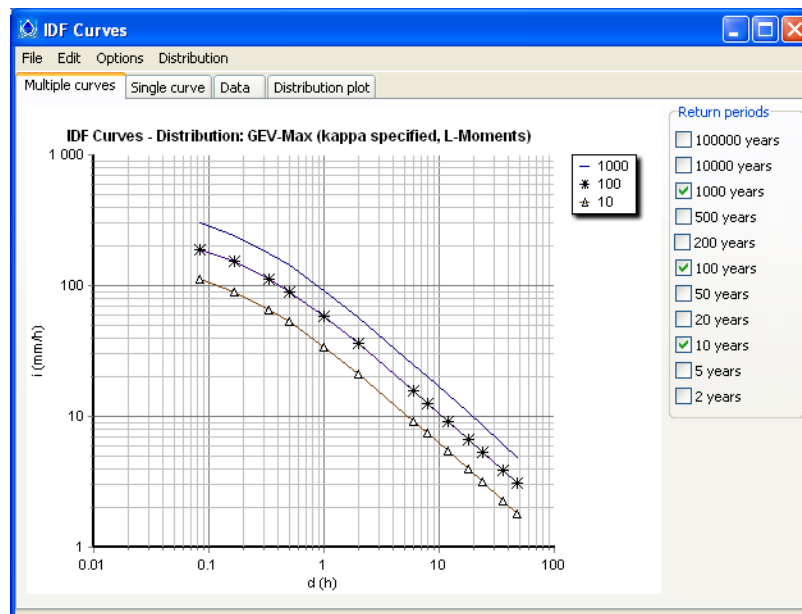
Για τον οπτικό έλεγχο της καταλληλότητας της προσαρμογής μιας συγκεκριμένης κατανομής, χρησιμοποιείται η φόρμα του Σχήματος 6.8. Στα παράδειγμα, απεικονίζονται οι συναρτήσεις κατανομής GEV II και η εμπειρική κατανομή Weibull, για τα επιμέρους δείγματα εντάσεων βροχής για διάφορες διάρκειες. Η απεικόνιση των σημείων και των εξισώσεων γίνεται σε χαρτί GEV II, με $\kappa = 0.15$. Παρατηρείται ότι για τις περισσότερες διάρκειες η προσαρμογή της επιλεγθείσας κατανομής είναι ικανοποιητική. Οι αποκλίσεις που παρατηρούνται στις πολύ μικρές διάρκειες (5 και 10 λεπτά) οφείλονται αφενός στο μικρό μήκος του ιστορικού δείγματος, και αφετέρου στην περιορισμένη ακρίβεια των υπολογισμών των εντάσεων βροχής σε τόσο μικρές χρονικές κλίμακες.



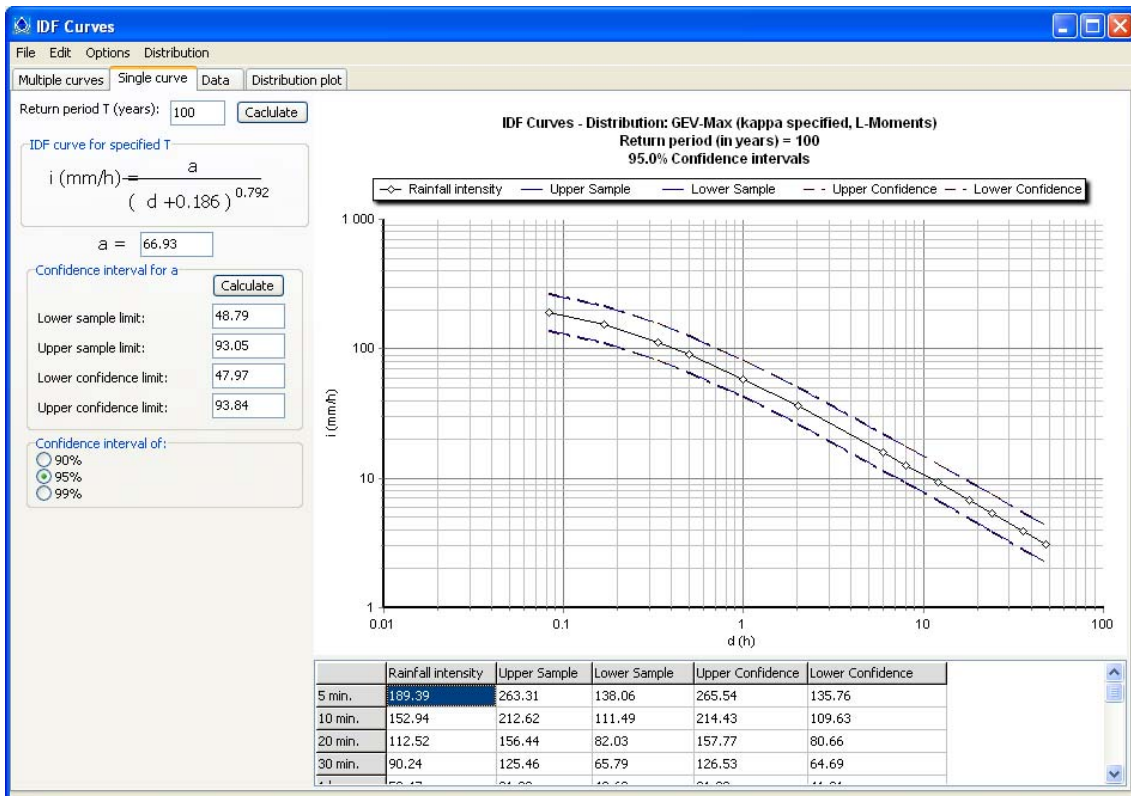
Σχήμα 6.3: Φόρμα εισαγωγής δεδομένων υποσυστήματος Όμβρος.



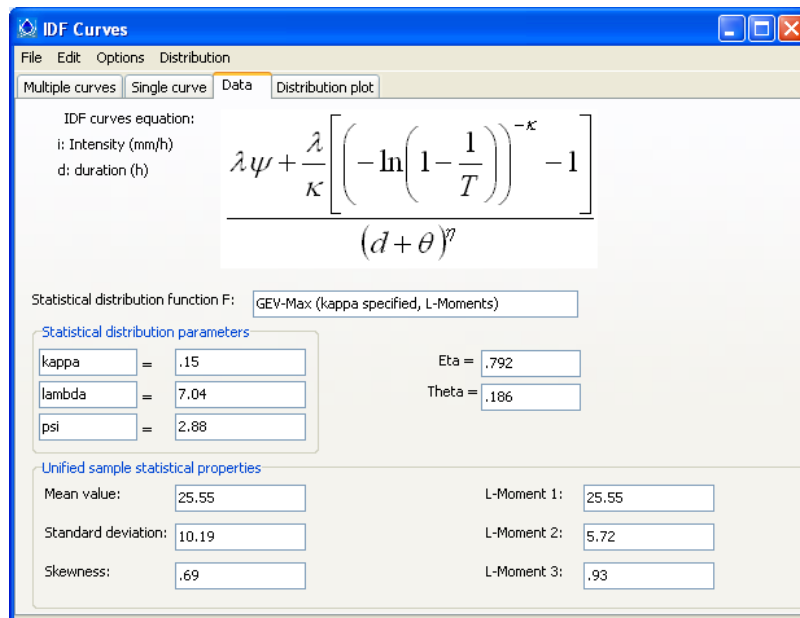
Σχήμα 6.4: Όμβριες καμπύλες για περιόδους επαναφοράς $T = 10, 100$ και 1000 ετών, υπολογισμένες με βάση τη συνάρτηση κατανομής AT1 μεγίστων (Gumbel).



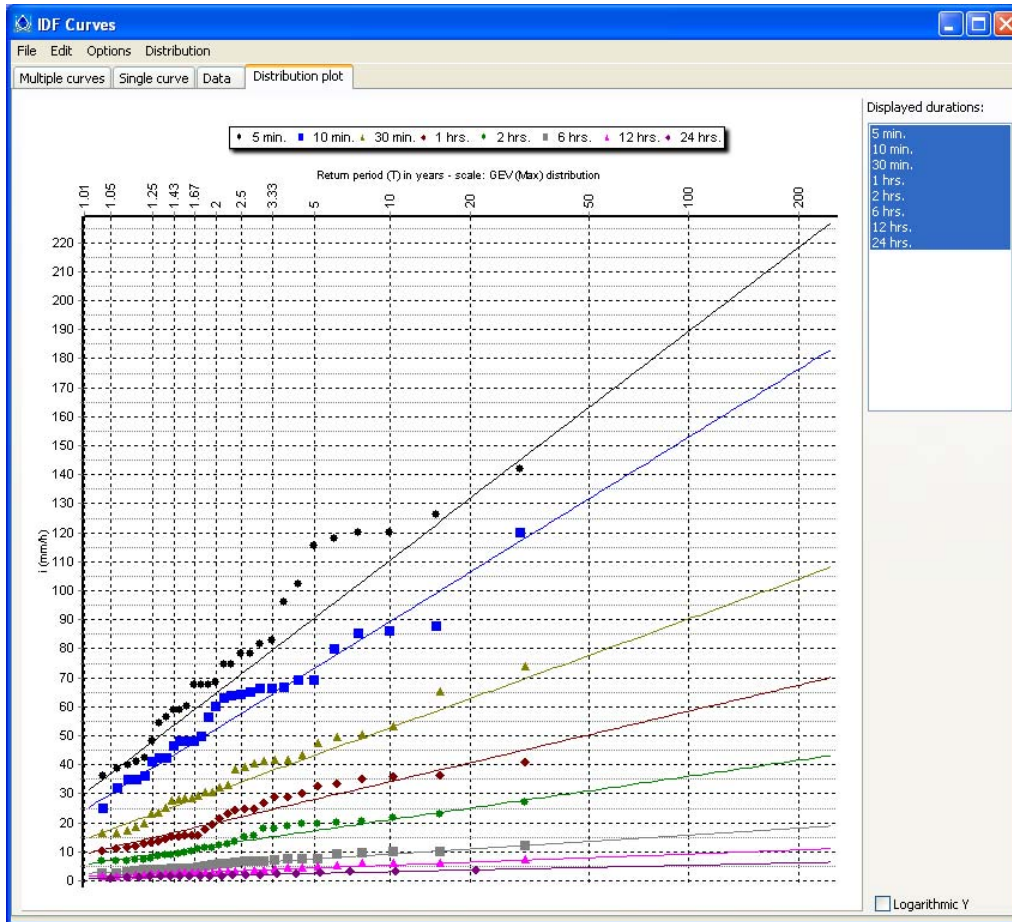
Σχήμα 6.5: Όμβριες καμπύλες για περιόδους επαναφοράς $T = 10, 100$ και 1000 ετών, υπολογισμένες με βάση τη συνάρτηση κατανομής AT2 μεγίστων (GEV II), με καθορισμένη παράμετρο σχήματος $\kappa = 0.15$ και τη μέθοδο των L -ροπών.



Σχήμα 6.6: Διαστήματα εμπιστοσύνης 95% όμβριας καμπύλης για $T = 100$ έτη, με βάση τη συνάρτηση κατανομής GEV II.



Σχήμα 6.7: Ενιαία έκφραση όμβριων καμπυλών, με βάση τη συνάρτηση κατανομής GEV II.



Σχήμα 6.8: Συναρτήσεις κατανομής GEV II και Weibull (εμπειρική κατανομή) για τον έλεγχο προσαρμογής της κατανομής στα επιμέρους δείγματα εντάσεων βροχής για διάφορες διάρκειες (απεικόνιση σε χαρτί GEV II).

Αναφορές

- Κουτσογιάννης, Δ., Ι. Μαρκόνης, Α. Κουκουβίνος, Σ.Μ. Παπαλεξίου, Ν. Μαμάσης, και Π. Δημητριάδης, *Υδρολογική μελέτη ισχυρών βροχοπτώσεων στη λεκάνη του Κηφισού*, Μελέτη διαχείρισης Κηφισού, Εργοδότης: Γενική Γραμματεία Δημοσίων Έργων – Υπουργείο Περιβάλλοντος, Χωροταξίας και Δημόσιων Έργων, Ανάδοχοι: Εξάρχου Νικολόπουλος Μπενσασσών, Denco, Γ. Καραβοκύρης, κ.ά., 154 σελίδες, Αθήνα, 2010.
- Κουτσογιάννης, Δ., και Θ. Ξανθόπουλος, *Τεχνική Υδρολογία*, Έκδοση 3, 418 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1999.
- Κουτσογιάννης, Δ., *Στατιστική Υδρολογία*, Έκδοση 4, 312 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1997.
- Παπαλεξίου, Σ. Μ., και Α. Ευστρατιάδης, Τελική έκθεση, *Εκτίμηση και πρόγνωση του πλημμυρικού κινδύνου με τη χρήση υδρολογικών μοντέλων και πιθανοτικών μεθόδων*, 116 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος, Νοέμβριος 2009.
- Χριστοφίδης, Α., και Δ. Κουτσογιάννης, *Υδρογνώμων: Βάση δεδομένων υδρολογικών και μετεωρολογικών χρονοσειρών και σύστημα επεξεργασίας χρονοσειρών*, 16 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων, Αθήνα, Φεβρουάριος 2002.
- Χριστοφίδης, Α., και Σ. Κοζάνης, *Υδρογνώμων (έκδοση 1.0) – Λογισμικό διαχείρισης δεδομένων, Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τεύχος 22, 90 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων, Αθήνα, Ιανουάριος 2004.
- Κοζάνης, Σ., Α. Χριστοφίδης, και Α. Ευστρατιάδης, Περιγραφή συστήματος διαχείρισης και επεξεργασίας δεδομένων Υδρογνώμων, *Ολοκληρωμένη Διαχείριση Υδατικών Συστημάτων σε Σύζευξη με Εξελιγμένο Υπολογιστικό Σύστημα (ΟΔΥΣΣΕΥΣ)*, Ανάδοχος: ΝΑΜΑ Σύμβουλοι Μηχανικοί και Μελετητές Α.Ε., Τεύχος 2, 141 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων, Αθήνα, Σεπτέμβριος 2005.
- Κοζάνης, Σ., Α. Χριστοφίδης, και Α. Ευστρατιάδης, Θεωρητική τεκμηρίωση για το λογισμικό Υδρογνώμων (έκδοση 4), *Ανάπτυξη βάσης δεδομένων και εφαρμογών λογισμικού σε διαδικτυακό περιβάλλον για την «Εθνική Τράπεζα Υδρολογικής και Μετεωρολογικής Πληροφορίας»*, Ανάδοχος: Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος, 173 σελίδες, Αθήνα, Ιούνιος 2010.
- Bobée, B., and F. Ashkar, *The Gamma Family and Derived Distributions Applied in Hydrology*, Water Resources Publications, Littleton, Colorado, 1991.
- Cunnane, C., Review of statistical models for flood frequency estimation, in: *Hydrologic Frequency Modelling: Proceedings of the International Symposium on Flood Frequency and Risk Analysis*, Baton Rouge, USA, 14–17 May 1986, 49–96, 1986.
- Gumbel, E.J., *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York, 1958.
- Hershfield, D.M., Estimating the probable maximum precipitation, *Proc. ASCE, J. Hydraul. Div.*, 87(HY5), 99–106, 1961.

- Hershfield, D.M., Method for estimating probable maximum precipitation, *J. American Waterworks Association*, 57, 965–972, 1965.
- Hirsch, R.M., D.R. Helsel, T.A. Cohn, and E.J. Gilroy, Statistical analysis of hydrological data, *Handbook of Hydrology*, D. R. Maidment (ed.), McGraw-Hill, 1993.
- Hosking, J.R.M., L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 105–124, 1990.
- Kottegoda, N.T., *Stochastic Water Resources Technology*, Macmillan Press, London, 1980.
- Koutsoyiannis, D., A critical review of probability of extreme rainfall: principles and models, *Advances in Urban Flood Management*, edited by R. Ashley, S. Garvin, E. Pasche, A. Vassilopoulos, and C. Zevenbergen, 139–166, Taylor and Francis, London, 2007.
- Koutsoyiannis, D., A probabilistic view of Hershfield’s method for estimating probable maximum precipitation, *Water Resources Research*, 35(4), 1313–1322, 1999.
- Koutsoyiannis, D., A stochastic disaggregation method for design storm and flood synthesis, *Journal of Hydrology*, 156, 193–225, 1994.
- Koutsoyiannis, D., and G. Baloutsos, Analysis of a long record of annual maximum rainfall in Athens, Greece, and design rainfall inferences, *Natural Hazards*, 22(1), 31–51, 2000.
- Koutsoyiannis, D., D. Kozonis, and A. Manetas, A mathematical framework for studying rainfall intensity-duration-frequency relationships, *Journal of Hydrology*, 206(1-2), 118–135, 1998.
- Koutsoyiannis, D., Statistics of extremes and estimation of extreme rainfall, 1, Theoretical investigation, *Hydrological Sciences Journal*, 49 (4), 575–590, 2004a.
- Koutsoyiannis, D., Statistics of extremes and estimation of extreme rainfall, 2, Empirical investigation of long rainfall records, *Hydrological Sciences Journal*, 49 (4), 591–610, 2004b.
- Kozanis, S., A. Christofides, N. Mamassis, A. Efstratiadis, and D. Koutsoyiannis, Hydrognomon – open source software for the analysis of hydrological data, *European Geosciences Union General Assembly 2010, Geophysical Research Abstracts, Vol. 12*, Vienna, 12419, European Geosciences Union, 2010.
- Kozanis, S., A. Christofides, N. Mamassis, A. Efstratiadis, and D. Koutsoyiannis, Hydrognomon – A hydrological data management and processing software tool, *European Geosciences Union General Assembly 2005, Geophysical Research Abstracts, Vol. 7*, Vienna, 04644, European Geosciences Union, 2005.
- Kroll, C.N., and R.M. Vogel, Probability distribution of low streamflow series in the United States, *Journal of Hydrologic Engineering*, 7(2), 137–146, 2002.
- Lim, Y.H., and L.M. Lye, Regional flood estimation for ungauged basins in Sarawak, Malaysia, *Hydrological Sciences Journal*, 48(1), 79–94, 2003.
- Linsley, R.K., M.A. Kohler, and J.L.H. Paulhus, *Hydrology for Engineers*, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, 1975.

- Molini, A., L.G. Lanza, and P. La Barbera, The impact of tipping-bucket rain gauge measurement errors on design rainfall for urban-scale applications, *Hydrological Processes*, 19(5), 1073-1088, 2005.
- National Environmental Research Council (NERC), *Flood Studies Report*, Institute of Hydrology, Wallingford, 1975.
- Papalexiou, S.M., and D. Koutsoyiannis, A global survey on the distribution of annual maxima of daily rainfall: Gumbel or Fréchet?, *European Geosciences Union General Assembly 2012, Geophysical Research Abstracts, Vol. 14*, Vienna, 10563, European Geosciences Union, 2012.
- Papalexiou, S.M., and D. Koutsoyiannis, An all-timescales rainfall probability distribution, *European Geosciences Union General Assembly 2009, Geophysical Research Abstracts, Vol. 11*, Vienna, 13469, European Geosciences Union, 2009a.
- Papalexiou, S.M., and D. Koutsoyiannis, Ombrian curves: from theoretical consistency to engineering practice, *8th IAHS Scientific Assembly / 37th IAH Congress*, Hyderabad, India, 2009b.
- Papalexiou, S.M., and D. Koutsoyiannis, Probabilistic description of rainfall intensity at multiple time scales, *IHP 2008 Capri Symposium: "The Role of Hydrology in Water Resources Management"*, Capri, Italy, UNESCO, International Association of Hydrological Sciences, 2008.
- Papalexiou, S.M., D. Koutsoyiannis, and A. Montanari, Can a simple stochastic model generate rich patterns of rainfall events? *Journal of Hydrology*, 411 (3-4), 279–289, 2011.
- Papalexiou, S.M., D. Koutsoyiannis, and C. Makropoulos, How extreme is extreme? An assessment of daily rainfall distribution tails, *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*, 9, 5757–5778, 2012.
- Raudkivi, A. J., *Hydrology: An Advanced Introduction to Hydrological Processes and Modelling*, Pergamon Press, London, UK, 1979.
- Rodriguez, R. N., A guide to the Burr type XII distributions, *Biometrika*, 64(1), 129, 1977.
- Sankarasubramanian, A., and K. Srinivasan, Investigation and comparison of sampling properties of L-moments and conventional moments, *Journal of Hydrology*, 218(1-2), 13–34, 1999.
- Stedinger, J.R., R.M. Vogel, and E. Foufoula-Georgiou, Frequency analysis of extreme events, Chapter 18 in *Handbook of Hydrology*, edited by D. R. Maidment, McGraw-Hill, 1993.
- Tadikamalla, P. R., A look at the Burr and related distributions, *International Statistical Review*, 48(3), 337–344, 1980.
- Tyralis, H., D. Koutsoyiannis, and S. Kozanis, An algorithm to construct Monte Carlo confidence intervals for an arbitrary function of probability distribution parameters, *Computational Statistics*, doi:10.1007/s00180-012-0364-7, 2012.
- U.K. National Environmental Research Council (UK-NERC), *Flood Studies Report*, Institute of Hydrology, Wallingford, 1975.
- Veneziano, D., and A. Langousis, The areal reduction factor: A multifractal analysis, *Water Resources Research*, 41, doi: 10.1029/2004WR003765, 2005.

- Vogel, R.M., and N.M. Fennessey, L moment diagrams should replace product moment diagrams, *Water Resources Research*, 29(6), 1745–1752, 1993.
- Waymire, E., and V. Gupta, The mathematical structure of rainfall representations. I. A review of the stochastic rainfall models, *Water Resources Research*, 17(5), 1261-1272, 1981.
- Wilks, D., Multisite generalization of a daily stochastic precipitation generation model, *Journal of Hydrology*, 210(1-4), 178-191, 1998.
- Wilks, D.S., Interannual variability and extreme-value characteristics of several stochastic daily precipitation models, *Agricultural and Forest Meteorology*, 93(3), 153–169, 1999.
- Woolhiser, D., and J. Roldan, Stochastic daily precipitation models: 2. A comparison of distributions of amounts, *Water Resources Research*, 18(5), 1461-1468, 1982.