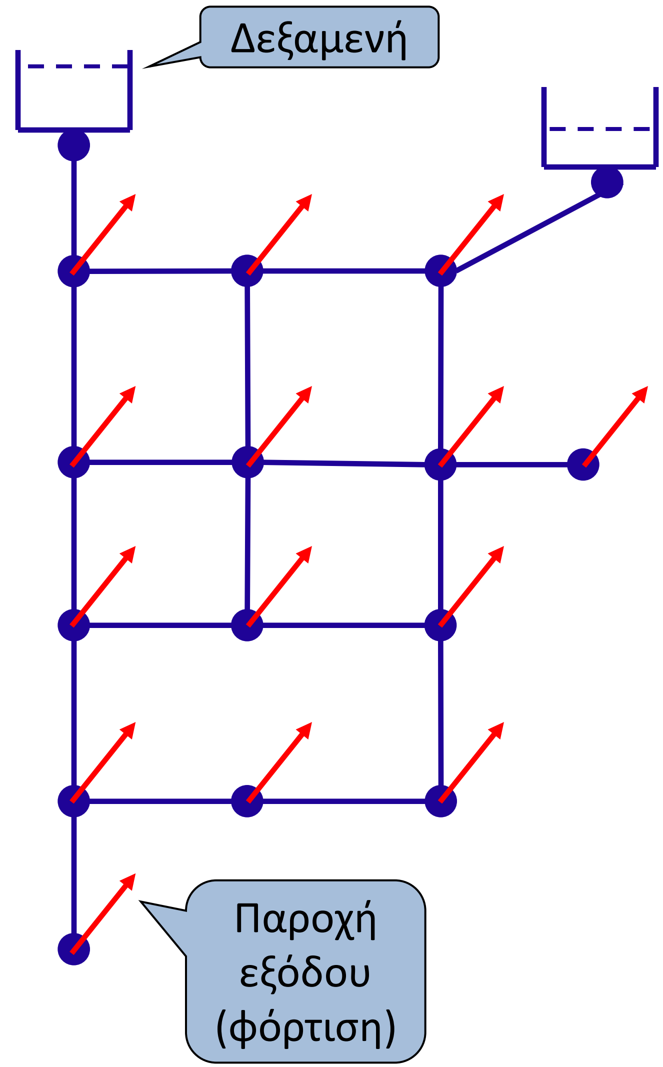
Κεφάλαιο 12: Υδραυλική ανάλυση δικτύων διανομής

Εννοιολογική αναπαράσταση δίκτυων διανομής

- **Σχηματοποίηση**: δικτυακή απεικόνιση των συνιστωσών του φυσικού συστήματος ως συνιστώσες ενός εννοιολογικού μοντέλου γράφου (κόμβοι, κλάδοι)
- **Μαθηματική περιγραφή**: διατύπωση εξισώσεων που αναφέρονται στην υδραυλική λειτουργία των συνιστωσών του δικτύου
- **Περιγραφικά-γεωμετρικά δεδομένα**: τοπολογία δικτύου, υψόμετρα κόμβων, χαρακτηριστικά αγωγών, δεξαμενών και ειδικών διατάξεων
- **Αρχικές συνθήκες**: στάθμες δεξαμενών
- **Φόρτιση δικτύου**: κατανάλωση νερού (σταθερή ή χρονικά μεταβαλλόμενη), επιμερισμένη στους κόμβους του δικτύου (= παροχές εξόδου)
- **Επίλυση δικτύου**: υπολογισμός υδραυλικών χαρακτηριστικών ροής σε συνθήκες σταθερής (στιγμιαίας) κατανάλωσης
- **Προσομοίωση δικτύου**: διαδοχικές επιλύσεις δικτύου σε συνθήκες μεταβαλλόμενης κατανάλωσης



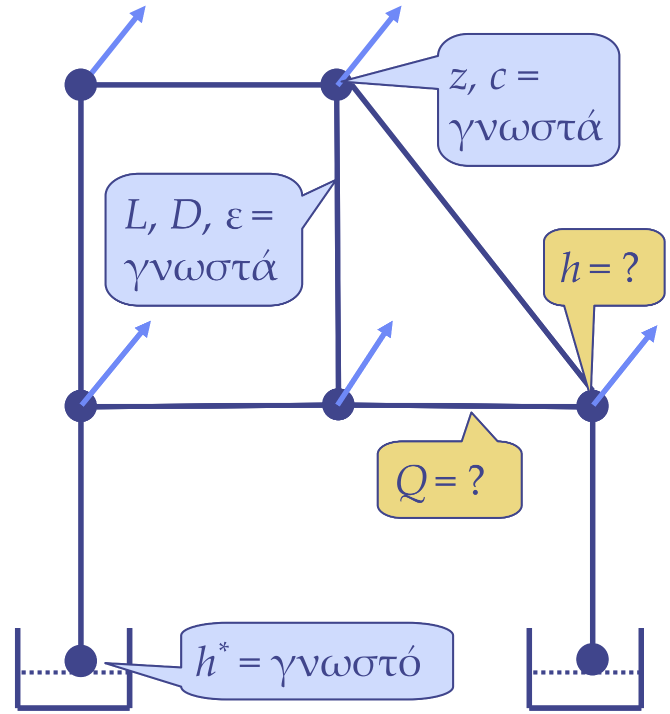
Διατύπωση του προβλήματος υδραυλικής ανάλυσης

Δεδομένου ενός δικτύου αγωγών υπό πίεση με:

- γνωστά γεωμετρικά χαρακτηριστικά αγωγών (μήκος *L*, εσωτερική διάμετρος *D*, τραχύτητα *ε*)·
- γνωστά τοπογραφικά υψόμετρα *z* και γνωστές παροχές εξόδου *c* κόμβων·
- γνωστά ενεργειακά υψόμετρα h^* των σημείων ελέγχου της πιεζομετρικής γραμμής (δεξαμενές, φρεάτια)·

ζητείται ο υπολογισμός:

- των ενεργειακών υψομέτρων *h* (ισοδύναμα, των πιέσεων *p/γ*) σε όλους τους κόμβους·
- των διερχόμενων παροχών *Q* (ισοδύναμα, των ταχυτήτων *V*) σε όλους τους κλάδους.



Θεμελιώδης παραδοχή: Οι κατανεμημένες καταναλώσεις του δικτύου (συνολική ζήτηση νερού για κάθε χρήση) ανάγονται σε σημειακές παροχές εξόδου κόμβων.

Ζητούμενο: Ο έλεγχος των περιορισμών που αναφέρονται στις συνιστώσες του δικτύου (ύψη πίεσης κόμβων, ταχύτητες ροής αγωγών).

Τοπολογία δικτύων – Θεμελιώδεις σχέσεις

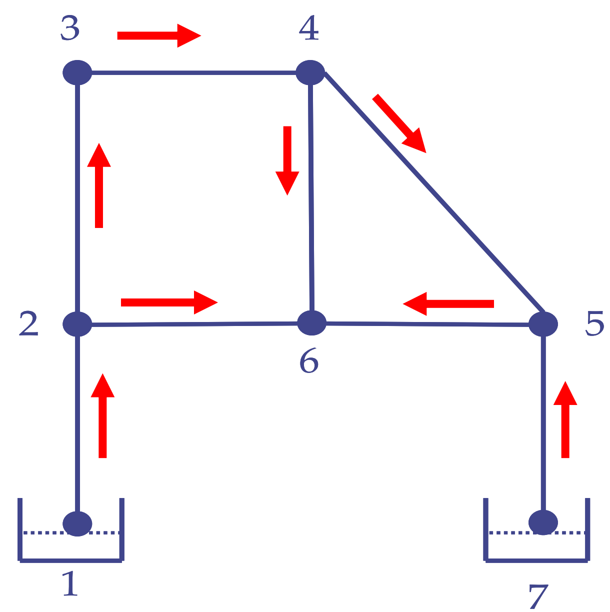
- Σε ένα δίκτυο n κόμβων, m κλάδων και r βρόχων ισχύει η θεμελιώδης σχέση:

$$m = n + r - 1$$

- Αν το δίκτυο είναι ακτινωτό (χωρίς βρόχους), η σχέση απλοποιείται σε $m = n - 1$.
- Αν στο δίκτυο υπάρχουν $n_0 > 1$ σημεία γνωστού ενεργειακού υψομέτρου, θεωρούνται $n_0 - 1$ επιπλέον ιδεατοί βρόχοι, τοποθετώντας εικονικούς κλάδους μηδενικής παροχής που συνδέουν τα σημεία αυτά ανά δύο, οπότε ισχύει (δεν καταμετρώνται οι εικονικοί κλάδοι) :

$$m = n + r - n_0$$

- Η τοπολογία του δικτύου (γράφου) περιγράφεται από το $n \times m$ **μητρώο πρόσπτωσης** (incidence matrix), με στοιχεία $a_{ik} = -1$ αν ο κλάδος k ξεκινά από τον κόμβο i, $a_{ik} = 1$ αν ο κλάδος καταλήγει στον κόμβο i, και $a_{ik} = 0$ διαφορετικά (η φορά της ροής ορίζεται αυθαίρετα).



	1-2	2-3	2-6	3-4	4-5	4-6	5-6	7-5
1	-1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	-1	-1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	-1	-1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	-1	1
6	0	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	-1

Εξισώσεις συνέχειας κόμβων

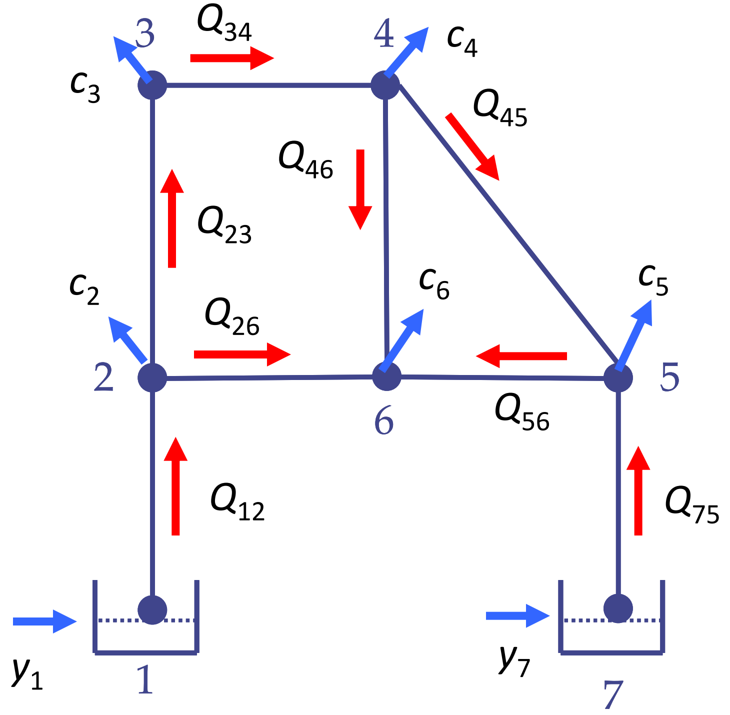
- Με την υπόθεση ότι κατά μήκος των κλάδων δεν υπάρχουν εισροές ή εκροές νερού, σε κάθε κόμβο *i* ισχύει η εξίσωση συνέχειας (αρχή διατήρησης μάζας):

$$\Sigma\, a_{ij} Q_{ij} = y_i - c_i$$

  όπου a_{ij} το στοιχείο του μητρώου πρόσπτωσης, y_i η παροχή εισόδου (άγνωστη), c_i η παροχή εξόδου και Q_{ij} η παροχή (άγνωστη) από ή προς τον κόμβο *i*.
- Αφού στο δίκτυο η συνολική προσφορά ισούται με τη συνολική ζήτηση, το άθροισμα των παροχών εισόδου ισούται με το άθροισμα των παροχών εξόδου στους κόμβους (καθολική εξίσωση συνέχειας):

$$\sum y_i = \sum c_i$$

- Σε ένα δίκτυο n κόμβων και n_0 σημείων γνωστού ενεργειακού υψομέτρου (δεξαμενές), μπορούν να διατυπωθούν $n - n_0$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις συνέχειας ως προς τις m άγνωστες παροχές.
- Συνεπώς, για τον προσδιορισμό των παροχών απαιτούνται $m - (n - n_0)$ επιπλέον εξισώσεις.
- Αν το δίκτυο είναι ακτινωτό, δεν απαιτούνται επιπλέον εξισώσεις – το πρόβλημα είναι πλήρως ορισμένο μόνο από τις εξισώσεις συνέχειας των κόμβων.



Εξισώσεις διατήρησης ενέργειας βρόχων

- Οι επιπλέον εξισώσεις προκύπτουν με εφαρμογή της αρχής διατήρησης ενέργειας κατά μήκος των βρόχων του δικτύου, που διατυπώνεται στη γενικευμένη μορφή:

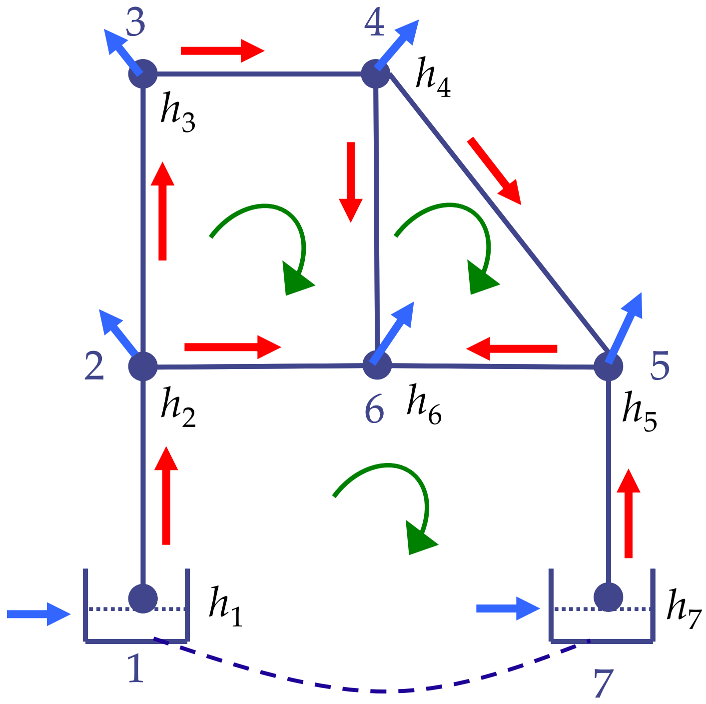
$$\Sigma\ \kappa_{ij}\ Q_{ij}\ |Q_{ij}|^{\lambda} = \sum \Delta h_{ij}$$

όπου κ, λ συντελεστές που διαφοροποιούνται ανάλογα με τη σχέση ενεργειακών απωλειών που εφαμόζεται.

- Θεωρώντας τη γενικευμένη σχέση Manning, οι τιμές των συντελεστών είναι:

$$\kappa_{ij} = L_{ij}\ [4^{3+\beta}\ N^2\ /(\pi^2\ D_{ij}^{5+\beta})]^{1/(1+\gamma)} \text{ και } \lambda = (1-\gamma)\ /\ (1+\gamma)$$

- Συμβατικά θεωρείται ότι το πρόσημο της παροχής *Q* είναι θετικό αν η φορά της συμπίπτει με τη φορά διαγραφής του βρόχου, αλλιώς είναι αρνητικό.
- Κατά μήκος των ιδεατών βρόχων, οι απώλειες ενέργειας είναι ίσες με τη γνωστή διαφορά στάθμης μεταξύ των δεξαμενών.
- Κατά μήκος των υπόλοιπων βρόχων, αν δεν παρεμβάλεται διάταξη προσφοράς ή καταστροφής της ενέργειας (αντλία, μειωτής πίεσης, δικλείδα, στρόβιλος), το αλγεβρικό άθροισμα των απωλειών ενέργειας είναι μηδενικό (η πιεζομετρική γραμμή αρχίζει και καταλήγει στην ίδια στάθμη).



Τεχνικές επίλυσης του προβλήματος

- Σε ένα δίκτυο *n* κόμβων, n_0 σημείων γνωστού ενεργειακού υψομέτρου και *r* βρόχων προκύπτει ένα μικτό σύστημα από $n - n_0$ γραμμικές εξισώσεις συνέχειας και *r* μη γραμμικές εξισώσεις διατήρησης ενέργειας, ως προς τις $m = n + r - n_0$ παροχές.
- Εξαιτίας του μεγάλου πλήθους των μεταβλητών (που μπορεί να είναι εκατοντάδες ή χιλιάδες, σε πραγματικά προβλήματα υδραυλικής ανάλυσης δικτύων υπό πίεση), για την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιούνται **αριθμητικές μέθοδοι** που βασίζονται στις ακόλουθες εναλλακτικές τεχνικές:
  - τεχνικές διόρθωσης του σφάλματος ανά εξίσωση (μέθοδος Cross)·
  - τεχνικές επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων (μέθοδος Newton-Raphson)·
  - τεχνικές επίλυσης γραμμικοποιημένων συστημάτων, με χαλάρωση του σφάλματος
- Οι παραπάνω τεχνικές επίλυσης είναι επαναληπτικές, δηλαδή ξεκινούν από κάποιες αυθαίρετες αρχικές τιμές των μεταβλητών του προβλήματος και επιδιώκουν την σταδιακή μείωση του σφάλματος, μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση (δηλαδή το αριθμητικό σφάλμα να γίνει μικρότερο από κάποια επιθυμητή ανοχή).
- Υπάρχουν δύο τρόποι διατύπωσης του προβλήματος:
  - **Μέθοδος βρόχων**: δίνονται αρχικές τιμές στις παροχές των κλάδων και διορθώνονται οι εξισώσεις διατήρησης ενέργειας στους βρόχους·
  - **Μέθοδος κόμβων**: δίνονται αρχικές τιμές στα ενεργειακά υψόμετρα των κόμβων και διορθώνονται οι εξισώσεις συνέχειας στους κόμβους.

Παράδειγμα: Μέθοδος κόμβων με γραμμικοποίηση

- Στην αρχή κάθε κύκλου, είναι γνωστή μια εκτίμηση των ενεργειακών υψομέτρων h_i στους κόμβους (αρχικά, η εκτίμηση είναι αυθαίρετη).
- Με βάση τα γνωστά ενεργειακά υψόμετρα, υπολογίζονται οι ενεργειακές απώλειες Δh_{ij} και, συναρτήσει αυτών, οι παροχές Q_{ij} των κλάδων.
- Υπολογίζονται το μέγιστο και καθολικό σφάλμα παροχών στους κόμβους (δεν ισχύουν οι εξισώσεις συνέχειας) και ελέγχεται αν ξεπερνούν μια τιμή ανοχής.
- Οι παροχές διατυπώνονται συναρτήσει των ενεργειακών υψομέτρων ως εξής:

$$Q_{ij}^{[n+1]} = \frac{1}{\kappa_{ij} |Q_{ij}^{[n]}|^{\lambda}} (h_i - h_j) = r_{ij}^{[n]} (h_i - h_j)$$

  όπου $Q_{ij}^{[n]}$ οι τρέχουσες εκτιμήσεις των παροχών, μετά το πέρας του επαναληπτικού βήματος n, και $Q_{ij}^{[n+1]}$ οι νέες εκτιμήσεις.
- Οι εξισώσεις συνέχειας των κόμβων διατυπώνονται με τη μορφή του γραμμικοποιημένου συστήματος **B h** = **c**, όπου **B** μητρώο που περιέχει τους όρους r_{ij} (= συναρτήσεις των εκτιμημένων ενεργειακών υψομέτρων), **h** διάνυσμα ενεργειακών υψομέτρων και **c** διάνυσμα γνωστών παροχών εξόδου.
- Επιλύοντας το σύστημα ως προς το διάνυσμα **h**, λαμβάνεται μια βελτιωμένη εκτίμηση των ενεργειακών υψομέτρων στους κόμβους, και ελέγχεται η σχετική απόκλιση μεταξύ της αρχικής και βελτιωμένης εκτίμησης των ενεργειακών υψομέτρων.
- Η μέθοδος εγγυάται ταχεία σύγκλιση, ακόμη και για πολύ μεγάλο αριθμό κόμβων.