Στοχαστικές Μέθοδοι
Στάσιμα στοχαστικά μοντέλα μιας μεταβλητής

Δημήτρης Κουτσογιάννης

Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος,
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα – Αναθεώρηση 2019

Μοντέλα Μάρκοφ – Φυσική θεμελίωση

Γραμμικό σύστημα: Ένα σύστημα, του οποίου η είσοδος $v(t)$ και η έξοδος $x(t)$, όπου t ο χρόνος, συνδέονται με γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, δηλ. της μορφής

$$\alpha_n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + \alpha_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + \alpha_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha_0 \, q = v$$

όπου a_i συντελεστές. Αποδεικνύεται η λύση της εξίσωσης είναι μια συνελικτική σχέση της μορφής

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) \, u(t - h) \, \mathrm{d}h$$

όπου $u(t)$ είναι η λεγόμενη *συνάρτηση απόκρισης* (*response function*) του συστήματος.

Γραμμική λεκάνη απορροής: Μια λεκάνη απορροής για την οποία υποτίθεται βάσιμα ότι μπορεί να θεωρηθεί γραμμικό σύστημα ως προς το μετασχηματισμό της καθαρής βροχής σε απορροή. Εν προκειμένω η είσοδος $v(t)$ είναι η καθαρή βροχόπτωση στη λεκάνη (= ολική βροχόπτωση – απώλειες) και $x(t)$ είναι η παροχή σε δεδομένη διατομή του υδατορεύματος.

Γραμμική λεκάνη πρώτης τάξης: Έστω ότι μια λεκάνη μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας γραμμικός ταμιευτήρας, στον οποίο η εκροή x είναι ανάλογη του αποθέματος S, ήτοι $x = S/\alpha$, όπου α είναι σταθερά με διαστάσεις χρόνου. Η εξίσωση συνέχειας είναι $dS / dt + x = v$, οπότε προκύπτει η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, με σταθερούς συντελεστές:

$$\alpha \frac{dx}{\mathrm{d}t} + x = v$$

Μοντέλα Μάρκοφ – Φυσική θεμελίωση (2)

Επίλυση της εξίσωσης της γραμμικής λεκάνης πρώτης τάξης: Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με e^{kt} προκύπτει

$$\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)\, \mathrm{e}^{t/\alpha}] = v(t)\, \mathrm{e}^{t/\alpha}$$

Οπότε η εξίσωση ολοκληρώνεται άμεσα και δίνει

$$x(t) = x(0)\, \mathrm{e}^{-t/\alpha} + \frac{e^{-t/\alpha}}{\alpha} \int_0^t v(\xi)\, \mathrm{e}^{\xi/\alpha}\, \mathrm{d}\xi$$

Στοχαστική θεώρηση της διαφορικής εξίσωσης και της λύσης της: Αν η εισροή θεωρηθεί ότι αποτελεί στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο, $\underline{v}(t)$, τότε και η εκροή, $\underline{x}(t)$, αποτελεί στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο. Θα υποθέσουμε ότι η $\underline{v}(t)$ αποτελεί λευκό θόρυβο. Συγκεκριμένα, αποτελεί στάσιμη ανέλιξη, το $\underline{v}(t)$ είναι ανεξάρτητο του $\underline{v}(t')$ για κάθε $t' \neq t$, η μέση τιμή είναι $\mathrm{E}[\underline{v}(t)] = \mu$ και η αυτοσυνδιασπορά είναι

$$c_v(h) := \mathrm{cov}[v(t), v(t+h)] = \sigma^2\, \delta(h)$$

όπου δ( ) η συνάρτηση δέλτα του Dirac ($\delta(0) = \infty$, $\delta(h) = 0$ για $h \neq 0$). Προφανώς, η $\underline{x}(t)$ δεν είναι λευκός θόρυβος, αφού η παραπάνω λύση της διαφορικής εξίσωσης δείχνει ότι τα μεγέθη $\underline{x}(t)$ και $\underline{x}(0)$ είναι εξαρτημένα. Παρακάτω θα εκφράσουμε ποσοτικά την εξάρτηση.

Σημείωση: Σύμφωνα με τα παραπάνω η διασπορά του $\underline{v}(t)$ είναι άπειρη. Σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, k]$ μήκους k, αποδεικνύεται ότι η διασπορά του ολοκληρώματος του $\underline{v}(t)$ είναι πεπερασμένη, ίση με $\sigma^2 k$. Κατά συνέπεια το μέγεθος σ έχει διαστάσεις $[\mathrm{h}]\mathrm{T}^{1/2}$.

Μοντέλα Μάρκοφ – Φυσική θεμελίωση (3)

Τιμή της ανέλιξης εκροής στο μελλοντικό χρόνο $t + h$: Ας υποθέσουμε ότι είναι γνωστές οι τιμές της ανέλιξης $\underline{x}(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή του διαστήματος $[0, t]$, θεωρώντας ότι το διάστημα $[0, t)$ αποτελεί το παρελθόν και η χρονική στιγμή t το παρόν. Ενδιαφερόμαστε για τη μελλοντική τιμή $\underline{x}(t + h)$. Από τη γενική λύση της διαφορικής προκύπτει:

$$\underline{x}(t + h) = \underline{x}(0)\, \mathrm{e}^{-(t + \tau)/\alpha} + \frac{e^{-k(t + \tau)}}{\alpha} \int_0^{t+h} \underline{v}(\xi)\, \mathrm{e}^{\xi/\alpha}\, \mathrm{d}\xi$$

Αν αυτή συνδυαστεί με την αντίστοιχη έκφραση της $\underline{x}(t)$, προκύπτει η απλοποίηση:

$$\underline{x}(t + h) = \underline{x}(t)\, \mathrm{e}^{-h/\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+h} \underline{v}(\xi)\, \mathrm{e}^{(\xi - t - h)/\alpha}\, \mathrm{d}\xi$$

Στην τελευταία εξίσωση παρατηρούμε:

(1) Οι δύο όροι του δεξιού μέλους είναι στοχαστικά ανεξάρτητοι, αφού οι τιμές του $\underline{v}(\xi)$ αναφέρονται σε χρόνους ξ μελλοντικούς και η εκροή του παρόντος $\underline{x}(t)$ δεν μπορεί να εξαρτάται από την εισροή του μέλλοντος $\underline{v}(\xi)$.

(2) Στην έκφραση δεν υπεισέρχονται καθόλου οι τιμές $\underline{x}(\xi)$ του παρελθόντος παρά μόνο η τιμή $\underline{x}(t)$ του παρόντος.

Μια ανέλιξη $\underline{x}(t)$ στην οποία, αν είναι γνωστό το παρόν, το μέλλον δεν εξαρτάται από παρελθόν όταν είναι γνωστό το παρόν, λέγεται **ανέλιξη Μάρκοφ**. Συμβολικά, για $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$, και $h > 0$,

$$P\{\underline{x}(t + h) \le x \mid x(t), x(t_n), \ldots, x(t_1)\} = P\{\underline{x}(t + h) \le x \mid x(t)\}$$

Μοντέλα Μάρκοφ – Φυσική θεμελίωση (4)

Μέση τιμή της ανέλιξης εκροής: Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές στη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης και επεκτείνοντας την αθροιστική ιδιότητα αναμενόμενων τιμών αθροισμάτων σε ολοκληρώματα, προκύπτει

$$\mathrm{E}[\underline{x}(t)] = \mathrm{E}[\underline{x}(0)]\, \mathrm{e}^{-t/\alpha} + \frac{\mathrm{e}^{-t/\alpha}}{\alpha} \int_0^t \mathrm{E}[\underline{v}(\xi)]\, \mathrm{e}^{\xi/\alpha}\, \mathrm{d}\xi$$

Δεδομένου ότι $\mathrm{E}[\underline{v}(\xi)] = \mu$, θα έχουμε $\mathrm{E}[\underline{x}(t)] = \mathrm{E}[\underline{x}(0)]\, \mathrm{e}^{-t/\alpha} + \mathrm{e}^{-t/\alpha} \mu\, (\mathrm{e}^{t/\alpha} - 1) = \mu + \mathrm{e}^{-t/\alpha} \{\mathrm{E}[\underline{x}(0)] - \mu\}$.
Αν $E[\underline{x}(0)] = \mu$, τότε $E[\underline{x}(t)] = \mu$ (στασιμότητα της μέσης τιμής της εκροής και ισότητα με αυτήν της εισροής, όπως είναι άλλωστε λογικό).

Διασπορά της ανέλιξης εκροής: Αφαιρώντας από τη γενική λύση της διαφορικής την παραπάνω εξίσωση μέσων τιμών και αντικαθιστώντας $\underline{x}'(t) = \underline{x}(t) - \mathrm{E}[\underline{x}(t)] = \underline{x}(t) - \mu$, και $\underline{v}'(t) = \underline{v}(t) - \mathrm{E}[\underline{v}(t)] = \underline{v}(t) - \mu$, παίρνουμε

$$\underline{x}'(t) = \underline{x}'(0)\, \mathrm{e}^{-t/\alpha} + \frac{\mathrm{e}^{-t/\alpha}}{\alpha} \int_0^t \underline{v}'(\xi)\, \mathrm{e}^{\xi/\alpha}\, \mathrm{d}\xi$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνοντας αναμενόμενες τιμές και προσέχοντας ότι (α) οι δύο όροι του δεύτερου μέλους είναι ανεξάρτητοι, (β) τα $\underline{v}'(\xi)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα για διαφορετικές τιμές του ξ, (γ) $\mathrm{E}[\underline{x}'^2(t)] = \mathrm{Var}[\underline{x}(t)]$, $\mathrm{E}[\underline{v}'^2(t)] = \mathrm{var}[\underline{v}(t)] = \sigma^2\, \delta(0)$, παίρνουμε:

$$\mathrm{var}[\underline{x}(t)] = \mathrm{Var}[\underline{x}(0)]\, \mathrm{e}^{-2t/\alpha} + \frac{\mathrm{e}^{-2t/\alpha}}{\alpha^2} \int_0^t \sigma^2\, \mathrm{e}^{2\xi/\alpha}\, \mathrm{d}\xi = \sigma^2 / 2\alpha + \mathrm{e}^{-2t/\alpha} \{\mathrm{Var}[\underline{x}(0)] - k\, \sigma^2 / 2\alpha\}$$

Αν $\mathrm{var}[\underline{x}(0)] = k\, \sigma^2 / 2\alpha$, τότε $\mathrm{var}[\underline{x}(t)] = k\, \sigma^2 / 2\alpha$ (στασιμότητα της διασποράς της εκροής).

Μοντέλα Μάρκοφ – Φυσική θεμελίωση (5)

Αυτοσυνδιασπορά της ανέλιξης εκροής: Η εξίσωση που συνδέει τις τιμές $\underline{x}(t+h)$ και $\underline{x}(t)$ είναι:

$$\underline{x}(t+h) = \underline{x}(t)\,\mathrm{e}^{-h/\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_t^{t+h} \underline{v}(\xi)\,\mathrm{e}^{(\xi - t - h)/\alpha}\,\mathrm{d}\xi$$

Αφαιρώντας από αυτή τις μέσες τιμές και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της προηγούμενης σελίδας γράφουμε:

$$\underline{x}'(t+h) = \underline{x}'(t)\,\mathrm{e}^{-h/\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_t^{t+h} \underline{v}'(\xi)\,\mathrm{e}^{(\xi - t - h)/\alpha}\,\mathrm{d}\xi$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\underline{x}'(t)$, παίρνοντας αναμενόμενες τιμές, αξιοποιώντας την ανεξαρτησία των δύο όρων του δεύτερου μέλους και παρατηρώντας ότι $\mathrm{E}[\underline{x}'^2(t)] = \mathrm{var}[\underline{x}(t)]$, $\mathrm{E}[\underline{x}'(t+h)\,\underline{x}'(t)] = \mathrm{cov}[\underline{x}(t+h), \underline{x}(t)]$, βρίσκουμε

$$\mathrm{cov}[\underline{x}(t+h), \underline{x}(t)] = \mathrm{e}^{-h/\alpha}\,\mathrm{var}[\underline{x}(t)]$$

Η τελευταία εξίσωση που δείχνει εκθετική μείωση της αυτοσυνδιασποράς (ή της αυτοσυσχέτισης) με τη χρονική υστέρηση τ είναι χαρακτηριστική των ανελίξεων Μάρκοφ.

Μοντέλα Μάρκοφ – Η εξίσωση Fokker-Planck

Η πυκνότητα πιθανότητας της ανέλιξης: Αν $f(x, t)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας πρώτης τάξης της ανέλιξης $\underline{x}(t)$, αποδεικνύεται* ότι αυτή ακολουθεί την εξίσωση Fokker-Planck (ή Kolmogorov forward equation):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta(x,t)f) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2(q,t)f\right) = 0$$

όπου $\eta(x,t)$ και $\sigma^2(x,t)$ οι παράγωγοι ως προς τον χρόνο t των εξισώσεων που δίνουν τη μέση τιμή και διασπορά, αντίστοιχα, της $\underline{x}(t)$.

Η πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης της ανέλιξης: Ορίζεται ως υπό τη συνθήκη πυκνότητα πιθανότητας για μετάβαση από την τιμή x_0 στον χρόνο t_0 στην τιμή x στον χρόνο t, ήτοι $\pi(x, x_0; t, t_0) := f_{\underline{x}(t)}(x|x(t_0) = x_0)$. Αποδεικνύεται ότι η π ακολουθεί επίσης την εξίσωση Fokker-Planck*.

Μια ειδική λύση της εξίσωσης Fokker-Planck: Με την προϋπόθεση ότι η πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης είναι συνάρτηση του $u := x - x_0$ (και όχι του x_0 καθεαυτού), αποδεικνύεται* ότι η ανέλιξη ακολουθεί κανονική κατανομή.

---

*Papoulis, A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3rd ed.; McGraw-Hill: New York, NY, USA, 1991.

Μοντέλα Μάρκοφ σε διακριτό χρόνο

Αν μας ενδιαφέρουν οι τιμές της εκροής σε διακριτές χρονικές στιγμές $t_i := \tau D$, τ = 1, 2., …, όπου D συμβολίζει χρονικό βήμα, αξιοποιούμε την εξίσωση που συνδέει τις τιμές $\underline{x}(t + D)$ και $\underline{x}(t)$ για $t = (\tau - 1)D$ και γράφουμε:

$$\underline{x}(\tau D) = \underline{x}((\tau - 1)D + D) = \underline{x}((\tau - 1)D)\, \mathrm{e}^{-D/\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_{(\tau-1)D}^{\tau D} \underline{v}(\xi)\, \mathrm{e}^{(\xi - \tau D)/\alpha} \mathrm{d}\xi$$

Εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς, προσανατολισμένους στη διακριτοποίηση του χρόνου:

$$\underline{x}_\tau := \underline{x}(\tau D), \quad \underline{v}_\tau = \frac{1}{\alpha} \int_{(\tau-1)D}^{\tau D} \underline{v}(\xi)\, \mathrm{e}^{(\xi - \tau D)/\alpha} \mathrm{d}\xi$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\underline{x}_i = a\, \underline{x}_{i-1} + \underline{v}_i$$

όπου $a := \mathrm{e}^{-D/\alpha}$. Η $\underline{x}_\tau$ είναι στάσιμη ανέλιξη σε διακριτό χρόνο. Η ακολουθία των $\underline{v}_i$ αποτελεί λευκό θόρυβο σε διακριτό χρόνο. Η πιο πάνω σχέση ορίζει το **μοντέλο Μάρκοφ δειγματισμένο σε διακριτό χρόνο** ή αλλιώς **μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης** (autoregression) **τάξης 1** (συμβολικά AR(1)).

Αν μ_x και μ_v οι μέσες τιμές των $\underline{x}_i$ και $\underline{v}_i$, αντίστοιχα, c_η η αυτοσυνδιασπορά της $\underline{x}_\tau$ για υστέρηση η, σ_v^2 η διασπορά της $\underline{v}_\tau$, και μ_{3x} και μ_{3v} οι τρίτες κεντρικές ροπές των $\underline{x}_i$ και $\underline{v}_i$, αντίστοιχα, τότε εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\mathrm{cov}[\underline{x}_1, \underline{v}_\tau] = \mathrm{Cov}[\underline{x}_{\tau-1}, \underline{v}_\tau] = 0,\ \mathrm{Cov}[\underline{x}_\tau, \underline{v}_\tau] = \sigma_v^2,\ \mathrm{Cov}[\underline{x}_{\tau+\eta}, \underline{v}_\tau] = a^\eta \sigma_v^2 \quad (\eta > 0)$$

$$c_\eta = a^\eta c_0 \text{ (ειδικότερα } \boxed{c_1 = a\, c_0}\text{)}$$

$$\boxed{\mu_v = \mu_x (1 - a),\ \sigma_v^2 = c_0 (1 - a^2),\ \mu_{3v} = \mu_{3x} (1 - a^3)}$$

Οι εξισώσεις μέσα σε πλαίσια χρησιμοποιούνται για την προσαρμογή του μοντέλου.

Μοντέλο Μάρκοφ: χρονική διακριτοποίηση με τη χρονικά μέση τιμή

Αν στη διακριτοποίηση του χρόνου πάρουμε ως $\underline{x}_\tau$ όχι τη στιγμιαία τιμή της ανέλιξης συνεχούς χρόνου $\underline{x}(t)$, αλλά τη χρονικά μέση τιμή στο διάστημα $[(\tau-1)D, \tau D]$, ήτοι:

$$\underline{x}_\tau \coloneqq \frac{1}{D} \int_{(\tau-1)D}^{\tau D} \underline{x}(u) \mathrm{d}u$$

τότε αποδεικνύεται* (Koutsoyiannis, 2020) ότι η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς είναι της $\underline{x}_\tau$ είναι:

$$c_0 = \frac{2\lambda}{D/\alpha}\left(1 - \frac{1 - \mathrm{e}^{-D/\alpha}}{D/\alpha}\right)$$

$$c_\eta = \frac{\lambda\left(1 - \mathrm{e}^{-D/\alpha}\right)^2}{(D/\alpha)^2}\ \mathrm{e}^{-(\eta-1)D/\alpha}, \qquad \eta \geq 1$$

όπου $\lambda \coloneqq \sigma^2 D/2\alpha$. Παρατηρούμε πως η αυτοσυνδιασπορά διακριτού χρόνου εξακολουθεί να φθίνει εκθετικά με την υστέρηση η, αλλά η γενική σχέση διαφοροποιείται για $\eta = 0$.

D. Koutsoyiannis, *Stochastics of Hydroclimatic Extremes - A Cool Look at Risk*, 2020.

Το μοντέλο ARMA(1, 1)

Το προηγούμενο μοντέλο είναι δύσκολο να εφαρμοστεί σε προσομοιώσεις. Ένα απλούστερο μοντέλο διακριτού χρόνου με ταυτόσημη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από την εξίσωση

$$\underline{x}_\tau = a\, \underline{x}_{\tau-1} + \underline{v}_\tau + b\, \underline{v}_{\tau-1}$$

όπου η μεταβλητή $\underline{v}_\tau$ είναι ανεξάρτητη από όλα τις προηγούμενες $\underline{v}_\tau$ και $\underline{x}_j$ για $j < \tau$. Το μοντέλο είναι γνωστό ως μοντέλο **αυτοπαλινδρόμησης τάξης 1 – κινούμενου μέσου τάξης 1** (first-order autoregressive – first-order moving average / ARMA(1, 1).

Αν μ_x και μ_v και οι μέσες τιμές των x_τ και v_τ, αντίστοιχα, c_η η αυτοσυνδιασπορά της $\underline{x}_\tau$ για υστέρηση η, και σ_v^2 η διασπορά της $\underline{v}_\tau$ τότε εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\mu_{\underline{x}} = \mu_{\underline{v}}\ (1 + b) / (1 - a)$$

$$\mathrm{cov}[\underline{x}_\tau, \underline{v}_\tau] = \sigma_v^2,\ \mathrm{Cov}[\underline{x}_\tau, \underline{v}_{\tau-1}] = (a + b)\, \sigma_v^2$$

$$c_0 = a\, c_1 + (1 + a\, b + b^2)\, \sigma_v^2$$

$$c_1 = a\, c_0 + b\, \sigma_v^2$$

$$c_\eta = a\, c_{\eta-1} = a^{\eta-1}\, c_1 \text{ για } \eta > 1$$

Οι τελευταίες τρεις εξισώσεις είναι γνωστές ως εξισώσεις Yule-Walker. Η τελευταία εξίσωση, ίδια με αυτή του προηγούμενου μοντέλου διακριτού χρόνου, δείχνει ότι το μοντέλο ARMA(1, 1) είναι ουσιαστικά ισοδύναμο με το προηγούμενο. Αν η τελευταία εξίσωση εφαρμοστεί για $\eta = 2$, προκύπτει ότι $a = c_2 / c_1$. Οι παράμετροι b και σ_v^2 μπορούν να υπολογιστούν με αριθμητική επίλυση των δύο εξισώσεων που δίνουν τα c_0 και c_1.

Το μοντέλο AR (2)

Το μοντέλο ARMA(1, 1) μπορεί, όπως είδαμε, να διατηρήσει, εκτός απ’ τις μέσες τιμές, τη διασπορά c_0 και τις δύο αυτοσυνδιασπορές c_1 και c_2. Τις ίδιες παραμέτρους μπορεί να διατηρήσει και ένα άλλο μοντέλο, το μοντέλο **αυτοπαλινδρόμησης τάξης 2**, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\underline{x}_\tau = a_1\, \underline{x}_{\tau-1} + \alpha_2\, \underline{x}_{\tau-2} + \underline{v}_\tau$$

όπου η μεταβλητή $\underline{v}_\tau$ είναι ανεξάρτητη από όλα τα προηγούμενα $\underline{v}_\tau$ και $\underline{x}_j$ για $j < \tau$. Κρατώντας τους ίδιους συμβολισμούς όπως πριν, έχουμε:

$$\mu_x = \mu_v \,/\, (1 - a_1 - a_2)$$

$$\mathrm{Cov}[\underline{x}_\tau, \underline{v}_\tau] = \sigma_v^2$$

$$c_0 = a_1\, c_1 + a_2\, c_2 + \sigma_v^2$$

$$c_1 = a_1\, c_0 + a_2\, c_1$$

$$c_\eta = a_1\, c_{\eta-1} + a_2\, c_{\eta-2} \text{ για } \eta > 1$$

Αν η τελευταία εξίσωση εφαρμοστεί για $\eta = 2$ και συνδυαστεί με την εξίσωση που δίνει το c_1 προκύπτει γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, από την επίλυση του οποίου υπολογίζονται οι παράμετροι a_1 και a_2. Η άγνωστη σ_v^2 υπολογίζεται άμεσα από την εξίσωση που δίνει το c_0.

Σε αντίθεση με το ARMA(1,1), το AR(2) δεν μπορεί να διατηρήσει ασυμμετρίες και ροπές ανώτερης τάξης.

Το μοντέλο ARMA (p, q)

Με γενίκευση του μοντέλου ARMA(1, 1) διατυπώνεται το μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης – κινούμενου μέσου ARMA(p, q), το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\underline{x}_\tau = a_1\, \underline{x}_{\tau-1} + \ldots + \alpha_p\, \underline{x}_{\tau-p} + \underline{v}_\tau + b_1\, \underline{v}_{\tau-1} + \ldots + b_q\, \underline{v}_{\tau-q}$$

όπου η μεταβλητή $\underline{v}_\tau$ είναι ανεξάρτητη από όλες τις προηγούμενες $\underline{v}_j$ και $\underline{x}_j$ για $j < \tau$. Κρατώντας τους ίδιους συμβολισμούς όπως πριν, έχουμε:

$$\mu_x = \mu_v\ (1 + b_1 + \ldots + b_q) / (1 - a_1 - \ldots - a_p)$$

$$\mathrm{cov}[\underline{x}_\tau, \underline{v}_\tau] = \sigma_v^2, \mathrm{cov}[\underline{x}_\tau, \underline{v}_{\tau-1}] = (a_1 + b_1)\sigma_v^2, \mathrm{Cov}[\underline{x}_\tau, \underline{v}_{\tau-2}] = [a_1(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)]\sigma_v^2, \text{ κοκ.}$$

Έτσι, οι εξισώσεις συνδιασπορών γίνονται πολύπλοκες και μη γραμμικές για $q > 1$ και για $m < q$, ενώ για $\eta > q$ ισχύει

$$c_\eta = a_1\, c_{\eta-1} + a_2\, c_{\eta-2} + \ \ldots + a_p\, c_{\eta-p}$$

Υπενθυμίζεται ότι $c_{-\eta} = c_\eta$. Από το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων που αναφέρονται στη διασπορά c_0 και στις $p + q$ τιμές της αυτοσυνδιασποράς c_η (η = 1, …, p + q), θα προσδιοριστούν οι $p + q + 1$ άγνωστοι $a_1, \ldots, \alpha_p, b_1, \ldots, b_q, \sigma_v^2$.

Η γενικευμένη μορφή του μοντέλου ARMA(p, q) δεν έχει φυσικό νόημα. Υπάρχουν απλούστερα και υπολογιστικώς προσφορότερα μοντέλα που μπορούν να διατηρήσουν οποιοδήποτε αριθμό αυτοσυνδιασπορών (βλ. παρακάτω καθώς και την αναφορά σε προηγούμενη σελίδα).

Οι τεχνικές SMA και AMA

Κάθε γραμμικό στοχαστικό μοντέλο μπορεί να διατυπωθεί ως ένα μοντέλο κινούμενου (σταθμισμένου) μέσου άπειρων όρων λευκού θορύβου, οπότε προκύπτει το ασύμμετρο σχήμα κινούμενου μέσου (asymmetric moving average – AMA)

$$\underline{x}_\tau = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \, \underline{v}_{\tau+j} = \ldots + a_{-1} \, \underline{v}_{\tau-1} + a_0 \, \underline{v}_\tau + a_1 \, \underline{v}_{\tau+1} + \ldots$$

Αν $a_j = 0$ για κάθε $j < 0$, τότε προκύπτει το πλέον δημοφιλές σχήμα (ordinary backward asymmetric moving average – OBAMA, παρόλο που είναι πιο γνωστό απλώς ως MA), του οποίου όμως οι εξισώσεις είναι δύσκολες στην επίλυση στη γενική περίπτωση. Μια εξαιρετικά απλούστερη περίπτωση είναι το συμμετρικό σχήμα κινούμενου μέσου (symmetric moving average – SMA), όπου $a_j = a_{-j}$, $j = 1, 2, \ldots$ Αν (για πρακτικούς λόγους) περιορίσουμε τους άπειρους όρους σε πεπερασμένους, το SMA γράφεται:

$$\underline{x}_\tau = \sum_{j=-J}^{J} a_{|j|} \, \underline{v}_{\tau+j} = a_J \, \underline{v}_{\tau-J} + \ldots + a_1 \, \underline{v}_{\tau-1} + a_0 \, \underline{v}_\tau + a_1 \, \underline{v}_{\tau+1} + \ldots + a_J \, \underline{v}_{\tau+J},$$

Οι συντελεστές a_j σχετίζονται με τα c_η μέσω της εξίσωσης

$$\sum_{j=-J}^{J-\eta} a_{|j|} \, a_{|\eta+j|} = c_\eta, \qquad \eta = 0, 1, 2, \ldots$$

Από την αριθμητική λύση της τελευταίας προκύπτουν οι τιμές των a_j, θεωρώντας $a_j = 0$ για $|j| > J$. Ωστόσο υπάρχει και κλειστή λύση που δίνεται από τη σχέση:

$$s_a(\omega) = \sqrt{2\, s_\mathrm{d}(\omega)}$$

όπου $s_a(\omega)$ ο αντίστροφος πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας a_j και $s_\mathrm{d}(\omega)$ το φάσμα ισχύος της ανέλιξης σε διακριτό χρόνο.

Για μη συμμετρικές λύσεις (για το AMA καθεαυτό) βλ. Koutsoyiannis (2020).

Εφαρμογή

1. Να εξαχθούν οι εξισώσεις των μοντέλων AR(1), AR(2) και ARMA(1, 1).
2. Να προσαρμοστούν τα τρία αυτά μοντέλα στην ετήσια χρονοσειρά απορροής του Βοιωτικού Κηφισού. Ειδικά στο μοντέλο AR(1) να επιχειρηθεί και διατήρηση της ασυμμετρίας.
3. Να προσαρμοστούν τα ίδια τρία μοντέλα στη μηνιαία χρονοσειρά απορροής του Βοιωτικού Κηφισού, αφού προηγουμένως η τελευταία τυποποιηθεί με γραμμικό μετασχηματισμό ώστε όλοι οι μήνες να έχουν ίδια μέση τιμή και τυπική απόκλιση.
4. Να παραχθούν χρονοσειρές 1000 ετών με χρήση των μοντέλων των ερωτημάτων 2 και 3.
5. Να γραφεί έκθεση με σχολιασμό των πιο πάνω αναλύσεων.