Στοχαστικές Μέθοδοι
Απλά πολυμεταβλητά στάσιμα και κυκλοστάσιμα μοντέλα
(με παραρτήματα για το πρόγραμμα SMUSH και την προσομοίωση ταμιευτήρων)

Δημήτρης Κουτσογιάννης

Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος,
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα – Αναθεώρηση 2019

1. Εισαγωγή στα προβλήματα πολλών μεταβλητών
Διανύσματα και μητρώα (1)

Διάνυσμα (μεγέθους n): $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Μητρώο (μεγέθους $n \times k$): $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$

Ανάστροφο* διάνυσμα: $\boldsymbol{x}^\mathrm{T} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$

Ανάστροφο μητρώο: $\boldsymbol{A}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$

Πρόσθεση: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2k}+b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nk}+b_{nk} \end{bmatrix}$$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: $\lambda\, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \vdots \\ \lambda\, x_n \end{bmatrix}$

$$\lambda\, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} & \cdots & \lambda\, a_{1k} \\ \lambda\, a_{21} & \lambda\, a_{22} & \cdots & \lambda\, a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\, a_{n1} & \lambda\, a_{n2} & \cdots & \lambda\, a_{nk} \end{bmatrix}$$

---

* Συνάρτηση EXCEL: TRANSPOSE(***A***) όπου ***A***: range (array formula)

Διανύσματα και μητρώα (2)

Πολλαπλασιασμός μητρώων ή/και διανυσμάτων*:

$$\boldsymbol{A}_{(n \times k)} \quad \cdot \quad \boldsymbol{B}_{(k \times l)} \quad = \quad \boldsymbol{C}_{(n \times l)}$$

$$\text{n γραμμές}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}}_{\text{k στήλες}} \right. \cdot \text{k γραμμές}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} \end{bmatrix}}_{\text{l στήλες}} \right. = \text{n γραμμές}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nl} \end{bmatrix}}_{\text{l στήλες}} \right.$$

όπου $c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}\, b_{rj}$ (π.χ. $c_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + \Lambda + a_{2k}\, b_{k1}$)

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων: $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> \;:= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}$ (βαθμωτό μέγεθος)

Νόρμα διανύσματος: $\|\boldsymbol{x}\| = <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>^{1/2} \;:= (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x})^{1/2}$

Τετραγωνική μορφή: η συνάρτηση της μορφής $f(\boldsymbol{x}) = <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}> = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{A}$ τετραγωνικό συμμετρικό μητρώο και $\boldsymbol{x}$ διάνυσμα.

Θετικά ορισμένο μητρώο: Ένα τετραγωνικό συμμετρικό μητρώο $\boldsymbol{A}$ για το οποίο ισχύει $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}> \; > 0$ για κάθε x ≠ 0. (Θετικά ημιορισμένο μητρώο: $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}> \; \geq 0$)

---

* Συνάρτηση EXCEL: MMULT(***A***, ***B***), όπου ***A***, ***B***: ranges (array formula)

Διανύσματα και μητρώα (3)

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού μητρώων: $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}$, $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

Μοναδιαίο μητρώο (μεγέθους $n \times n$): $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Αντίστροφο μητρώο*: Ένα τετραγωνικό μητρώο $\boldsymbol{A}$ (μεγέθους $n \times n$) ονομάζεται ομαλό (non-singular) αν υπάρχει ένα *αντίστροφο μητρώο* (συμβολικά $\boldsymbol{A}^{-1}$) που να ικανοποιεί τη σχέση

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{I}$$

Σε αντίθετη περίπτωση το μητρώο $\boldsymbol{A}$ ονομάζεται ανώμαλο (singular).

Ιδιότητα αντιστροφής: $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{A}^{-1}$

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων: Ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους, της μορφής

$$\begin{gathered} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{gathered}$$

γράφεται σε διανυσματική μορφή: $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ και η λύση του (για ομαλό $\boldsymbol{A}$) είναι $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$.

---

*Συνάρτηση EXCEL: MINVERSE(***A***) όπου ***A***: range (array formula).

Διανύσματα τυχαίων μεταβλητών και ροπές τους

Έστω $\underline{\boldsymbol{x}}$ και $\underline{\boldsymbol{y}}$ διανύσματα που αποτελούνται από n συνιστώσες, καθεμιά από τις οποίες είναι μια τυχαία μεταβλητή, ήτοι

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \end{bmatrix}, \underline{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα ένα τέτοιο διάνυσμα μπορεί να παριστάνει τη βροχή ή την απορροή σε n θέσεις. Με απλό τρόπο ορίζονται οι μέσες τιμές των $\underline{\boldsymbol{x}}$ και $\underline{\boldsymbol{y}}$ ως τα διανύσματα

$$\mathrm{E}[\underline{\boldsymbol{x}}] = \begin{bmatrix} \mathrm{E}[\underline{x}_1] \\ \mathrm{E}[\underline{x}_2] \\ \vdots \\ \mathrm{E}[\underline{x}_n] \end{bmatrix}, \quad E[\underline{\boldsymbol{y}}] = \begin{bmatrix} \mathrm{E}[\underline{y}_1] \\ \mathrm{E}[\underline{y}_2] \\ \vdots \\ \mathrm{E}[\underline{y}_n] \end{bmatrix}$$

Ανάλογα, ορίζονται διανύσματα διασπορών, τρίτων κεντρικών ροπών κτλ. Επίσης, ορίζεται ως συνδιασπορά Cov[$\underline{\boldsymbol{x}}$, $\underline{\boldsymbol{y}}$] το μητρώο

$$\mathrm{cov}[\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}] := E[(\underline{\boldsymbol{x}} - E[\underline{\boldsymbol{x}}])\,(\underline{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} - E[\underline{\boldsymbol{y}}]^{\mathrm{T}})] = \begin{bmatrix} \mathrm{cov}[\underline{x}_1, \underline{y}_1] & \mathrm{cov}[\underline{x}_1, \underline{y}_2] & \cdots & \mathrm{cov}[\underline{x}_1, \underline{y}_n] \\ \mathrm{cov}[\underline{x}_2, \underline{y}_1] & \mathrm{cov}[\underline{x}_2, \underline{y}_2] & \cdots & \mathrm{cov}[\underline{x}_2, \underline{y}_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}[\underline{x}_n, \underline{y}_1] & \mathrm{cov}[\underline{x}_n, \underline{y}_2] & \cdots & \mathrm{cov}[\underline{x}_n, \underline{y}_n] \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Αν $\underline{\boldsymbol{x}} \equiv \underline{\boldsymbol{y}}$, τότε τα διαγώνια στοιχεία του μητρώου είναι διασπορές.

2. Διατύπωση απλών πολυμεταβλητών στοχαστικών μοντέλων

Στάσιμο μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης τάξης 1 (AR(1))

$$\underline{\boldsymbol{x}}^t = \boldsymbol{A}\,\underline{\boldsymbol{x}}^{t-1} + \boldsymbol{B}\,\underline{\boldsymbol{v}}^t$$

όπου:

t δείκτης που συμβολίζει χρονική θέση (περίοδο, π.χ. έτος),

$\underline{\boldsymbol{x}}^t$ διάνυσμα n προς γέννηση στοχαστικών μεταβλητών της περιόδου t, εξαρτημένων μεταξύ τους και με τις αντίστοιχες μεταβλητές προηγούμενων περιόδων,

$\underline{\boldsymbol{v}}^t$ διάνυσμα n βοηθητικών τυχαίων μεταβλητών της περιόδου t, ανεξάρτητων μεταξύ τους και από τις μεταβλητές $\underline{\boldsymbol{x}}$ και $\underline{\boldsymbol{v}}$ προηγούμενων περιόδων, και

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ μητρώα παραμέτρων μεγέθους $n \times n$, ήτοι

$$\underline{\boldsymbol{x}}^t = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^t \\ \underline{x}_2^t \\ \vdots \\ \underline{x}_n^t \end{bmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{v}}^t = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^t \\ \underline{v}_2^t \\ \vdots \\ \underline{v}_n^t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Κυκλοστάσιμο (περιοδικό, εποχιακό) μοντέλο αυτοπαλινδρόμισης τάξης 1 (PAR(1))

$$\underline{\boldsymbol{x}}^s = \boldsymbol{A}^s \, \underline{\boldsymbol{x}}^{s-1} + \boldsymbol{B}^s \, \underline{\boldsymbol{v}}^s$$

όπου s δείκτης που συμβολίζει χρονική θέση (υποπερίοδο, π.χ. μήνα), και τα υπόλοιπα μεγέθη έχουν την ίδια σημασία όπως στο στάσιμο μοντέλο, με τη διαφορά ότι τα μητρώα παραμέτρων $\boldsymbol{A}^s$ και $\boldsymbol{B}^s$ εξαρτώνται με περιοδικό τρόπο από την υποπερίοδο (π.χ. μήνα) s:

$$\underline{\boldsymbol{x}}^s = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^s \\ \underline{x}_2^s \\ \vdots \\ \underline{x}_n^s \end{bmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{v}}^s = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^s \\ \underline{v}_2^s \\ \vdots \\ \underline{v}_n^s \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^s = \begin{bmatrix} a_{11}^s & a_{12}^s & \cdots & a_{1n}^s \\ a_{21}^s & a_{22}^s & \cdots & a_{2n}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^s & a_{n2}^s & \cdots & a_{nn}^s \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^s = \begin{bmatrix} b_{11}^s & b_{12}^s & \cdots & b_{1n}^s \\ b_{21}^s & b_{22}^s & \cdots & b_{2n}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^s & b_{n2}^s & \cdots & b_{nn}^s \end{bmatrix}$$

Στατιστικές παράμετροι που διατηρούνται

- Στα μοντέλα AR(1) και PAR(1) διατηρείται (αναπαράγεται) το ελάχιστο σύνολο ουσιωδών στατιστικών παραμέτρων (φειδωλή χρήση παραμέτρων – parsimony of parameters) που περιλαμβάνει τις ακόλουθες κατηγορίες:
  - *Παράμετροι των περιθώριων συναρτήσεων κατανομής κάθε μεταβλητής*
    - (1) Μέσες τιμές των μεταβλητών.
    - (2) Διασπορές των μεταβλητών.
    - (3) Συντελεστές ασυμμετρίας των μεταβλητών (και, κατά συνέπεια, τρίτες ροπές).
  - *Παράμετροι των από κοινού συναρτήσεων κατανομής των μεταβλητών*
    - (4) Συντελεστές ετεροσυσχέτισης με μηδενικό χρονικό βήμα μεταξύ μεταβλητών διαφορετικής θέσης.
    - (5) Για το μοντέλο με διαγώνιο μητρώο $\boldsymbol{A}$: Συντελεστές αυτοσυσχέτισης με μοναδιαίο χρονικό βήμα μεταξύ μεταβλητών της ίδιας θέσης.
    - (5α) Για το μοντέλο με πλήρες μητρώο $\boldsymbol{A}$: Συντελεστές αυτοσυσχέτισης με μοναδιαίο χρονικό βήμα μεταξύ καθεμιάς μεταβλητής και όλων των άλλων μεταβλητών.

3. Εκτίμηση παραμέτρων

(α) Μητρώο παραμέτρων *A*

Λύση 1: Πλήρες μητρώο παραμέτρων ***A***

$$\boldsymbol{A}^s = \mathrm{cov}[\underline{\boldsymbol{x}}^s, \underline{\boldsymbol{x}}^{s-1}]\ (\mathrm{cov}[\underline{\boldsymbol{x}}^{s-1}, \underline{\boldsymbol{x}}^{s-1}]\}^{-1}$$

Λύση 2: Διαγώνιο μητρώο παραμέτρων ***A*** (εναλλακτική απλουστευμένη περίπτωση)

$$\boldsymbol{A}^s = \mathrm{diag}\left(\mathrm{cov}[\underline{x}_1^s, \underline{x}_1^{s-1}] \,/\, \mathrm{var}[\underline{x}_1^{s-1}], \ldots, \mathrm{cov}[\underline{x}_n^s, \underline{x}_n^{s-1}] \,/\, \mathrm{var}[\underline{x}_n^{s-1}]\right)$$

Σημείωση 1: Τα παραπάνω καθώς και όσα ακολουθούν καλύπτονται βιβλιογραφικά από τους Matalas and Wallis (1976, σ. 63)· Bras and Rodriguez-Iturbe (1985)· Salas et al. (1988, σ. 381)· Salas (1993, σ. 19.31)· Koutsoyiannis and Manetas (1996)· Koutsoyiannis (1999).

Σημείωση 2: Για το στάσιμο μοντέλο AR(1) εφαρμόζονται κατ’ αναλογία οι ίδιες εξισώσεις μια μόνο φορά, δεδομένου ότι οι παράμετροι παραμένουν σταθερές.

(β) Μητρώο παραμέτρων *B*

Υπολογισμός του γινομένου $\boldsymbol{B}^s (\boldsymbol{B}^s)^\mathrm{T} =: \boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{B}^s (\boldsymbol{B}^s)^\mathrm{T} = \mathrm{cov}[\underline{\boldsymbol{x}}^s, \underline{\boldsymbol{x}}^s] - \boldsymbol{A}^s \,\mathrm{cov}[\underline{\boldsymbol{x}}^{s-1}, \underline{\boldsymbol{x}}^{s-1}] (\boldsymbol{A}^s)^\mathrm{T}$$

Προσδιορισμός του μητρώου $\boldsymbol{B}^s$

- είναι γνωστός ως εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας του $\boldsymbol{C}$·
- αποτελεί αδύνατο πρόβλημα (καμία λύση) όταν το $\boldsymbol{C}$ δεν είναι θετικά ορισμένο·
- αποτελεί αόριστο πρόβλημα (άπειρες λύσεις) εφόσον το $\boldsymbol{C}$ είναι θετικά ορισμένο.

Για την τελευταία περίπτωση υπάρχουν δύο διαδεδομένοι αλγόριθμοι για τον προσδιορισμό δύο διαφορετικών λύσεων

- αποσύνθεση σε τριγωνικό μητρώο με τον αλγόριθμο Cholesky, και
- αποσύνθεση σε πλήρες μητρώο με χρήση των ιδιοδιανυσμάτων του $\boldsymbol{C}$.

(γ) Ροπές των βοηθητικών μεταβλητών

- Μέσες τιμές:

$$\mathrm{E}[\underline{\boldsymbol{v}}^s] = (\boldsymbol{B}^s)^{-1} (\mathrm{E}[\underline{\boldsymbol{x}}^s] - \boldsymbol{A}^s\, \mathrm{E}[\underline{\boldsymbol{x}}^{s-1}])$$

- Διασπορές (εξ ορισμού 1):

$$\mathrm{var}[\underline{\boldsymbol{v}}^s] = [1, \ldots, 1]^\mathrm{T}$$

- Τρίτες κεντρικές ροπές:

$$\mu_3[\underline{\boldsymbol{v}}^s] = \left(\boldsymbol{B}^{s(3)}\right)^{-1} \{\mu_3[\underline{\boldsymbol{x}}^s] - \mu_3[\boldsymbol{A}^s\, \underline{\boldsymbol{x}}^{s-1}]\}$$

όπου με $\mu_3[\ ]$ συμβολίζεται το διάνυσμα των τρίτων κεντρικών ροπών οποιουδήποτε διανύσματος τυχαίων μεταβλητών, π.χ. $\mu_3[\underline{\boldsymbol{v}}^s] := \mathrm{E}[(\underline{\boldsymbol{v}}^s - E[\underline{\boldsymbol{v}}^s])^{(3)}]$, και ο εκθέτης $^{(3)}$ συμβολίζει την ύψωση στον κύβο όλων των στοιχείων ενός διανύσματος ή μητρώου.

Εναλλακτικά, για διαγώνιο μητρώο $\boldsymbol{A}^s$

$$\mu_3[\underline{\boldsymbol{v}}^s] = \left(\boldsymbol{B}^{s(3)}\right)^{-1} \{\mu_3[\underline{\boldsymbol{x}}^s] - \boldsymbol{A}^{s(3)}\, \mu_3[\underline{\boldsymbol{x}}^{s-1}]\}$$

Εφαρμογές

1. Να αναλυθούν οι ιστορικές χρονοσειρές βροχής στην Αλίαρτο και απορροής στη θέση Διώρυγα Καρδίτσας του Βοιωτικού Κηφισού σε μηνιαία κλίμακα.
2. Να παραχθούν συνθετικές χρονοσειρές των δύο μεταβλητών μεγέθους 1000 ετών.
3. Να ελεγχθεί η διατήρηση των ουσιωδών στατιστικών χαρακτηριστικών στις παραπάνω συνθετικές χρονοσειρές.
4. Η απορροή του Βοιωτικού Κηφισού, καθώς και μια πρόσθετη ποσότητα απορροής που εκτιμάται στο 4% της απορροής του Βοιωτικού Κηφισού καταλήγει στη φυσική λίμνη Υλίκη. Κάνοντας εύλογες παραδοχές σχετικά με την εξάτμιση από τη λίμνη, και χρησιμοποιώντας αποτελέσματα σχετικών μελετών σχετικά με τις υπόγειες διαφυγές της λίμνης, να βρεθεί η απολήψιμη ποσότητα νερού από την Υλίκη συναρτήσει της αποδεκτής αξιοπιστίας.

Αναφορές

- Bras, R. L. and Rodriguez-Iturbe, I., *Random functions and hydrology*, Addison-Wesley, USA, 1985.
- Clark, E. J., New York control curves, *J. Am. Water Works Assoc.*, *42*(9), 823-857, 1950.
- Clark, E. J., Impounding reservoirs, *J. Am. Water Works Assoc.*, *48*(4), 349-354, 1956.
- Johnson, S. A., J. R. Stedinger, and K. Staschus, Heuristic operating policies for reservoir system simulation, *Water Resour. Res.*, *27*(5), 673-685, 1991.
- Koutsoyiannis, D., Optimal decomposition of covariance matrices for multivariate stochastic models in hydrology, *Water Resources Research* 35(4), 1219-1229, 1999.
- D. Koutsoyiannis, and A. Economou, Evaluation of the parameterization-simulation-optimization approach for the control of reservoir systems, *Water Resources Research*, 39 (6), 1170, doi:10.1029/2003WR002148, 2003.
- Koutsoyiannis, D., and A. Manetas, Simple disaggregation by accurate adjusting procedures, *Water Resources Research*, 32(7) 2105-2117, 1996.
- Matalas, N.C. and Wallis, J.R., Generation of synthetic flow sequences, in *Systems approach to water management*, A.K. Biswas editor, McGraw Hill, 1976.
- Nalbantis, I., and D. Koutsoyiannis, A parametric rule for planning and management of multiple reservoir systems, *Water Resources Research*, 33(9), 2165-2177, 1997.
- Salas, J. D., Analysis and modeling of hydrologic time series, Chapter 19, *Handbook of Hydrology*, edited by D. Maidment, McGraw-Hill, New York, 1993.
- Salas, J. D., Delleur, J. W., Yevjevich, V., and Lane, W. L., *Applied Modelling of Hydrologic Time Series*, Water Resources Publications, Littleton, Co., USA, 1988.

Παράρτημα Α. Το μοντέλο SMUSH
Γενικά χαρακτηριστικά

- Το μοντέλο **SMUSH** (*Απλό Πολυμεταβλητό Στοχαστικό Υδρολογικό* μοντέλο – *Simple MUltivariate Stochastic Hydrologic* model) γεννά συνθετικές υδρολογικές χρονοσειρές.
- Έχει τη δυνατότητα γέννησης μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών **μεγέθους μέχρι 2000 ετών** (24 000 μηνών) για **5 θέσεις** το πολύ.
- Βασίζεται στο μοντέλο PAR(1) σε πλήρη και απλοποιημένη μορφή.
- Ειδικότερα, στην απλοποιημένη μορφή, με στόχο τον περιορισμό του αριθμού των παραμέτρων, έχει γίνει η παραδοχή σταθερών σε όλους τους μήνες τιμών των συντελεστών μεταβλητότητας, ασυμμετρίας, αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης.
- Έχει κωδικοποιηθεί σε γλώσσα PASCAL και δίνεται σε μορφή βιβλιοθήκης δυναμικής σύνδεσης (Smush.dll ή Smush64.dll για κλήση από 32- ή 64-bit προγράμματα, αντί-στοιχα) ώστε να μπορεί να κληθεί από οποιοδήποτε άλλο πρόγραμμα (π.χ. EXCEL).
- Συνοδεύεται από αρχείο EXCEL (SmushTest3.xls ή .xlsm κατά περίπτωση) με πρόσθετο κώδικα σε γλώσσα Visual Basic για την κλήση των υπολογιστικών διαδικασιών και ολοκληρωμένα παραδείγματα για τη χρήση τους.

Είσοδοι του μοντέλου

- Κύριες υπολογιστικές διαδικασίες
  - ModelParametersE: Υπολογίζει τις παραμέτρους του μοντέλου.
  - GenerateE: Γεννά τις συνθετικές χρονοσειρές.
- Γενικές είσοδοι
  - Αριθμός θέσεων (*n*): ακέραιος, από 1 έως 5.
  - Μέσες τιμές των 12 *n* μηνιαίων μεταβλητών του προβλήματος.
  - Συντελεστές μεταβλητότητας (τυπική απόκλιση / μέση τιμή).
  - Συντελεστής ασυμμετρίας.
  - Συντελεστής αυτοσυσχέτισης τάξης 1.
  - Συντελεστές ετεροσυσχέτισης τάξης 0.
- Ειδικά για τη διαδικασία GenerateE
  - «Σπόρος» (seed) τυχαίων αριθμών.
  - Επιθυμητός αριθμός ετών συνθετικών χρονοσειρών.

Έξοδοι του μοντέλου

- Διαδικασία ModelParametersE
  - Μητρώα παραμέτρων $\boldsymbol{A}^s$.
  - Μητρώα παραμέτρων $\boldsymbol{B}^s$.
  - Διανύσματα μέσων τιμών βοηθητικών μεταβλητών $E[\underline{\boldsymbol{v}}^s]$ (ένα ανά μήνα).
  - Διανύσματα τρίτων κεντρικών ροπών (= συντελεστών ασυμμετρίας) βοηθητικών μεταβλητών $\mu_3[\underline{\boldsymbol{v}}^s]$ (ένα ανά μήνα).
- Διαδικασία GenerateE
  - Γεννά τις συνθετικές χρονοσειρές για το σύνολο των θέσεων, ετών και μηνών.

Οι χρονοσειρές αυτές μπορούν να ανακτηθούν σε φύλλα εργασίας του EXCEL μέσω των ακόλουθων συναρτήσεων (δίνονται στο αρχείο SmushTest3.xls)

  - Generate: Συνάρτηση VBA που καλεί τη διαδικασία GenerateE
  - SyntheticAll: Ανακτά το σύνολο των χρονοσειρών.
  - SyntheticLocation: Ανακτά τη χρονοσειρά μιας δεδομένης θέσης για όλους τους μήνες.
  - SyntheticMonth: Ανακτά τμήμα της χρονοσειράς μιας θέσης που αποτελείται από τις διαδοχικές τιμές που αναφέρονται στον ίδιο μήνα.

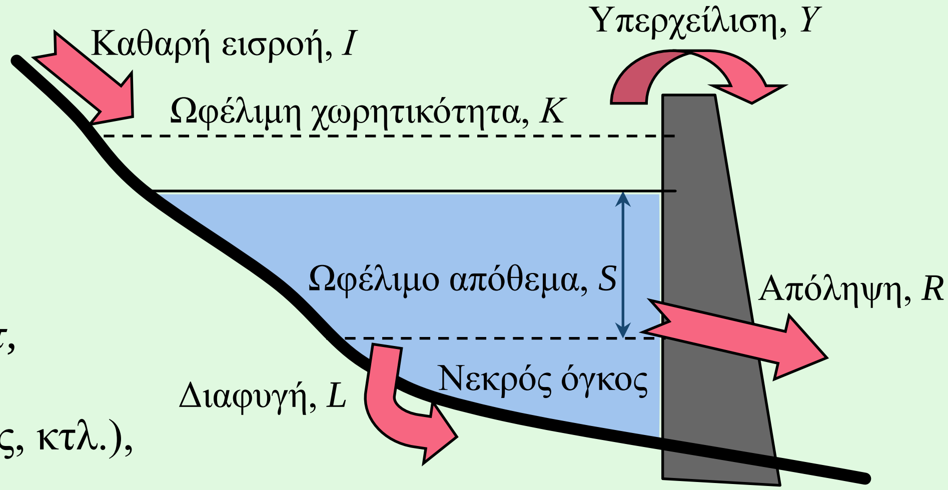
Παράρτημα Β. Εφαρμογές στην προσομοίωση ταμιευτήρων

Βασικές εξισώσεις μεμονωμένου ταμιευτήρα

$$S_\tau = S_{\tau-1} + I_\tau - R_\tau - Y_\tau - L_\tau$$

$$R_t = \min(D_\tau, S_{\tau-1} + I_\tau - L_\tau)$$

$$Y_\tau = \max(0, S_{\tau-1} + I_\tau - D_\tau - L_\tau - K)$$



όπου

S_τ το απόθεμα στον ταμιευτήρα στο χρόνο τ,
I_τ η καθαρή εισροή (= ολική εισροή μείον απώλειες εξάτμισης, υπόγειας διαφυγής, κτλ.),
D_τ η ζήτηση, που θεωρείται δεδομένη (σταθερή ή μεταβλητή)
R_τ η πραγματική απόληψη
Y_τ η υπερχείλιση
L_τ η υπόγεια διαφυγή και
K η ωφέλιμη χωρητικότητα του ταμιευτήρα.

Σημείωση 1: Ο χρόνος τ θεωρείται διακριτός και τα μεγέθη D_τ, R_τ, L_τ και Y_τ αναφέρονται στο χρονικό διάστημα $((\tau-1)d, \tau d]$, όπου d το χρονικό βήμα. Όλα τα μεγέθη εκφράζονται σε μονάδες όγκου.

Σημείωση 2: Η παραπάνω περίπτωση είναι απλοποιημένη. Σε πραγματικούς ταμιευτήρες υπεισέρχονται και άλλοι περιορισμοί που προκύπτουν από την παροχετευτικότητα του υδραγωγείου, από τις περιβαλλοντικές ανάγκες κ.ά.

Αξιοπιστία ως προς την κάλυψη του στόχου

- **Επίπεδο αξιοπιστίας σε ετήσια βάση** = πιθανότητα κάλυψης της ζήτησης σε χρονική βάση $T = 1$ έτος:

  $$\alpha_T = P\{\underline{R}_T = D_T\}$$

  όπου α_T το επίπεδο αξιοπιστίας, $\underline{R}_T$ η πραγματική απόληψη (θεωρούμενη ως τυχαία μεταβλητή) στην περίοδο $T = 1$ έτος και D_T η ζήτηση στην ίδια περίοδο, ενώ με P συμβολίζεται η πιθανότητα. Εμπειρικά υπολογίζεται ως ο λόγος $k΄/k$ όπου $k΄$ είναι ο αριθμός των ετήσιων περιόδων στις οποίες ικανοποιείται η ζήτηση και k ο συνολικός αριθμός των περιόδων προσομοίωσης.
- **Επίπεδο αξιοπιστίας σε βάση χρονικού βήματος** (π.χ. μηνιαία) = πιθανότητα κάλυψης της ζήτησης σε χρονική βάση ενός υπολογιστικού χρονικού βήματος:

  $$a_\tau = P\{\underline{R}_\tau = D_\tau\}$$

  όπου a_τ το επίπεδο αξιοπιστίας, $\underline{R}_\tau$ η πραγματική απόληψη στην περίοδο ενός υπολογιστικού χρονικού βήματος (π.χ. μήνα) και D_τ η ζήτηση στην ίδια περίοδο. Εμπειρικά υπολογίζεται ως ο λόγος $n΄/n$ όπου $n΄$ είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων στα οποία ικανοποιείται η ζήτηση και n ο συνολικός αριθμός των χρονικών βημάτων προσομοίωσης.
- **Ογκομετρική έκφραση αξιοπιστίας**:

  $$a_R = \mathrm{E}[\underline{R}_T] \,/\, D_T$$

  όπου a_R το επίπεδο αξιοπιστίας, με E[.] συμβολίζεται η αναμενόμενη τιμή και τα υπόλοιπα σύμβολα όπως ορίστηκαν παραπάνω. Εμπειρικά υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των πραγματικών απολήψεων προς τη ζήτηση στο συνολικό αριθμό των ετήσιων περιόδων προσομοίωσης.

Αστοχία ως προς την κάλυψη του στόχου

- **Πιθανότητα αστοχίας σε ετήσια βάση**:

  $\beta_T = 1 - \alpha_T = P\{\underline{R}_T < D_T\}$

  Εμπειρικά υπολογίζεται ως ο λόγος k''/k όπου k'' είναι ο αριθμός των ετήσιων περιόδων στις οποίες δεν ικανοποιείται η ζήτηση και k ο συνολικός αριθμός των περιόδων προσομοίωσης.

- **Πιθανότητα αστοχίας σε βάση χρονικού βήματος**:

  $\beta_\tau = 1 - \alpha_\tau = P\{\underline{R}_\tau < D_\tau)$

  Εμπειρικά υπολογίζεται ως ο λόγος n''/n όπου n'' είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων (μηνών) στα οποία δεν ικανοποιείται η ζήτηση και n ο συνολικός αριθμός των χρονικών βημάτων προσομοίωσης.

- **Ογκομετρικό μέτρο αστοχίας**:

  $\beta_R = 1 - a_R = 1 - \mathrm{E}[\underline{R}_T] / D_T$

- **Περίοδος επαναφοράς εκκένωσης** (recurrence time of emptiness)

  $T_\mathrm{E} = 1 / \beta_T = 1 / (1 - \alpha_T)$

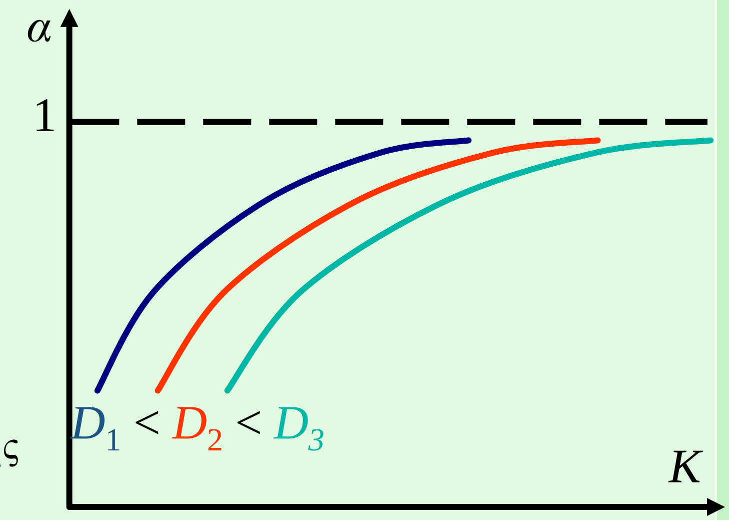
- **Σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών μέτρων αξιοπιστίας / αστοχίας**

  $a_T \le a_\tau \le a_R$ ή ισοδύναμα $\beta_T \ge \beta_\tau \ge \beta_R$

  (δεδομένου ότι η μη ικανοποίηση της ζήτησης σε ένα έτος, δε σημαίνει ότι εκτείνεται σε όλη τη διάρκεια του έτους, και ακόμα, κατά την περίοδο που δεν ικανοποιείται η ζήτηση, η απόληψη δεν είναι μηδενική αλλά $0 \le R < D$).

Τυπικά προβλήματα μεμονωμένου ταμιευτήρα

- Για δεδομένα υδρολογικά χαρακτηριστικά εισροών, η αξιοπιστία συναρτάται άμεσα με την ωφέλιμη χωρητικότητα του ταμιευτήρα K και με τη ζήτηση D.



- Κατηγορίες προβλημάτων
  - (1) Διαστασιολόγηση: Δεδομένα D, α – Ζητούμενο K.
  - (2) Λειτουργία: Δεδομένα K, α – Ζητούμενο D.
  - (3) Λειτουργία: Δεδομένα K, D – Ζητούμενο α.
- Στόχος της προσομοίωσης είναι ο προσδιορισμός της σχέσης των τριών μεγεθών, δηλαδή της αξιοπιστίας (ή, ισοδύναμα, της πιθανότητας αστοχίας), της ωφέλιμης χωρητικότητας και της ζήτησης.
- Λόγω της μαθηματικής πολυπλοκότητας του προβλήματος, η σχέση αυτή δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί με αναλυτικές μεθόδους (εκτός από εξαιρετικά απλές περιπτώσεις). Εξάλλου οι εμπειρικές/γραφικές προσεγγίσεις (π.χ. αθροιστικές καμπύλες) είναι εξαιρετικά ανακριβείς. Έτσι, η μέθοδος της προσομοίωσης παραμένει η αποτελεσματικότερη μέθοδος αριθμητικού προσδιορισμού αυτής της σχέσης.
- Μειονέκτημα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι η προσομοίωση χρειάζεται να επεκταθεί σε διάστημα (n) χιλιάδων ετών, διάστημα το οποίο εξαρτάται από το επίπεδο αξιοπιστίας ή το μέτρο αστοχίας β_T, το απαιτούμενο ποσοστό ακρίβειας c και το συντελεστή εμπιστοσύνης C, σύμφωνα με τη σχέση:

$$n = (z_{(1 + C) / 2} / c)^2 (1/ \beta_T - 1)$$

- Παράδειγμα: Για $C = 95\%$ ($z_{(1 + C) / 2} = 1.96$), $c = 10\%$, $\beta_T = 0.01 \Rightarrow n = 38\ 000$.

Η περίπτωση συστήματος ταμιευτήρων με μεμονωμένο καταναλωτικό στόχο

- Οι βασικές εξισώσεις ισοζυγίου παραμένουν οι ίδιες για κάθε ταμιευτήρα
- Η βασική διαφορά έγκειται στον επιμερισμό της απόληψης στους επιμέρους ταμιευτήρες του συστήματος. Ο επιμερισμός αυτός παρουσιάζει βαθμούς ελευθερίας (= αριθμός ταμιευτήρων – 1).
- Λόγω των διαθέσιμων βαθμών ελευθερίας, υπάρχει απειρία λύσεων (εκτός οριακών περιπτώσεων, π.χ. σε περίπτωση που όλοι οι ταμιευτήρες εκτός από έναν έχουν αδειάσει) και έχει νόημα ο προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης.
- Η άμεση βελτιστοποίηση ως προς τις απολήψεις κάθε χρονικού βήματος στο πλαίσιο ενός μοντέλου προσομοίωσης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη λόγω των πολλών μεταβλητών απόφασης (π.χ. για περίοδο προσομοίωσης 1000 ετών με μηνιαίο βήμα και 3 ταμιευτήρες οι μεταβλητές απόφασης θα ήταν τουλάχιστον 1000 × 12 × 3 = 36 000 με ακόμη περισσότερους περιορισμούς).
- Για την αποφυγή τέτοιων καταστάσεων έχουν επινοηθεί ευρετικοί κανόνων λειτουργίας που με τη χρήση τους αποφεύγεται η βελτιστοποίηση (π.χ. κανόνας Νέας Υόρκης, χωρικός κανόνας).

Ο κανόνας Νέας Υόρκης και ο χωρικός κανόνας

Κανόνας νέας Υόρκης (Clark, 1950, 1956· Johnson et al., 1991): Αποδεικνύεται ότι οι αναμενόμενες τιμές των υπερχειλίσεων ελαχιστοποιούνται όταν οι πιθανότητες υπερχείλισης είναι ίσες για όλους τους ταμιευτήρες, ήτοι

$$P\{\Sigma \underline{I}_i \geq K_i - \underline{S}_i\} = \text{σταθερή για όλα τα } i$$

όπου $\Sigma \underline{I}_i$ η αθροιστική εισροή στον ταμιευτήρα i (από το τέλος της τρέχουσας περιόδου μέχρι το τέλος της περιόδου γεμίσματος), K_i η χωρητικότητα του ταμιευτήρα i, και $\underline{S}_i$ το απόθεμα του ταμιευτήρα i.

Χωρικός κανόνας: Με την υπόθεση ότι η κατανομή της μεταβλητής $\Sigma \mathrm{I}_i / E[\Sigma \mathrm{I}_i]$ (όπου $E[\ ]$ συμβολίζει αναμενόμενη τιμή) είναι ίδια για όλους τους ταμιευτήρες i, ο κανόνας Νέας Υόρκης παίρνει την ακόλουθη μορφή (Johnson et al., 1991) :

$$\frac{K_i - S_i}{E[\Sigma I_i]} = \frac{\sum_{j=1}^{N} K_j - V}{\sum_{j=1}^{N} E[\Sigma I_i]}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι γνωστή ως χωρικός κανόνας (space rule), και εκφράζει μαθηματικά την αναλογία του κενού χώρου προς την αναμενόμενη αθροιστική εισροή σε κάθε ταμιευτήρα.

Σημείωση: η υπόθεση ισότητας των κατανομών των μεταβλητών $\Sigma I_i / E[\Sigma I_i]$ δεν είναι υποχρεωτική. Πρακτικώς στο ίδιο συμπέρασμα (με ελαφρώς διαφοροποιημένη τελική έκφραση) οδηγούν και άλλες εναλλακτικές υποθέσεις όπως π.χ. η υπόθεση ότι όλα τα μεγέθη ΣI_i ακολουθούν κατανομή Gauss (Nalbantis and Koutsoyiannis, 1997· Koutsoyiannis and Economou, 2003).

Εφαρμογή του χωρικού κανόνα

Ισοδύναμη έκφραση του χωρικού κανόνα:

$$S_i^* = a_i + b_i V$$

όπου S_i^* το απόθεμα-στόχος στον ταμιευτήρα i, V το συνολικό απόθεμα σε όλους τους ταμιευτήρες και οι παράμετροι a_i και b_i δίνονται από τις εξισώσεις:

$$a_i = K_i - b_i \sum_{j=1}^{N} K_j \ , \qquad b_i = \frac{\mathrm{E}[\Sigma \underline{I}_i]}{\sum_{j=1}^{N} E[\Sigma \underline{I}_j]}$$

Εφόσον οι ταμιευτήρες βρίσκονται σε περιοχές με παρόμοιο κλιματικό καθεστώς, οι λόγοι b_i δεν διαφέρουν σημαντικά από μήνα σε μήνα και έτσι οι ποσότητες a_i και b_i μπορεί να θεωρηθούν σταθερές στο χρόνο (Nalbantis and Koutsoyiannis, 1997).

Ενσωμάτωση του χωρικού κανόνα σε μοντέλο προσομοίωσης:

1. Εκτίμηση του συνολικού αποθέματος V στο τέλος της τρέχουσας περιόδου (με την υπόθεση ότι καλύπτεται η συνολική ζήτηση και δεν υπάρχουν υπερχειλίσεις)
2. Εκτίμηση των όγκων-στόχων S_i^* για κάθε ταμιευτήρα από το χωρικό κανόνα
3. Καθορισμός των απολήψεων από κάθε ταμιευτήρα σε τρόπο ώστε να ικανοποιηθούν οι όγκοι-στόχοι (ή να προσεγγιστούν όσο το δυνατόν καλύτερα, αν λόγω φυσικών περιορισμών δεν είναι εφικτή η ικανοποίηση).