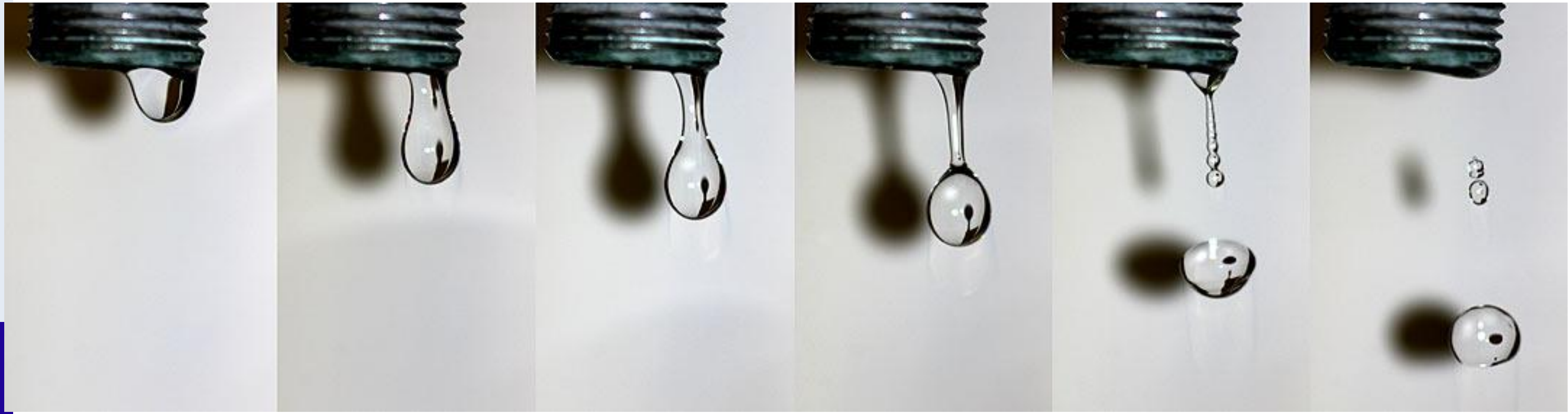
Υδραυλική & Υδραυλικά Έργα

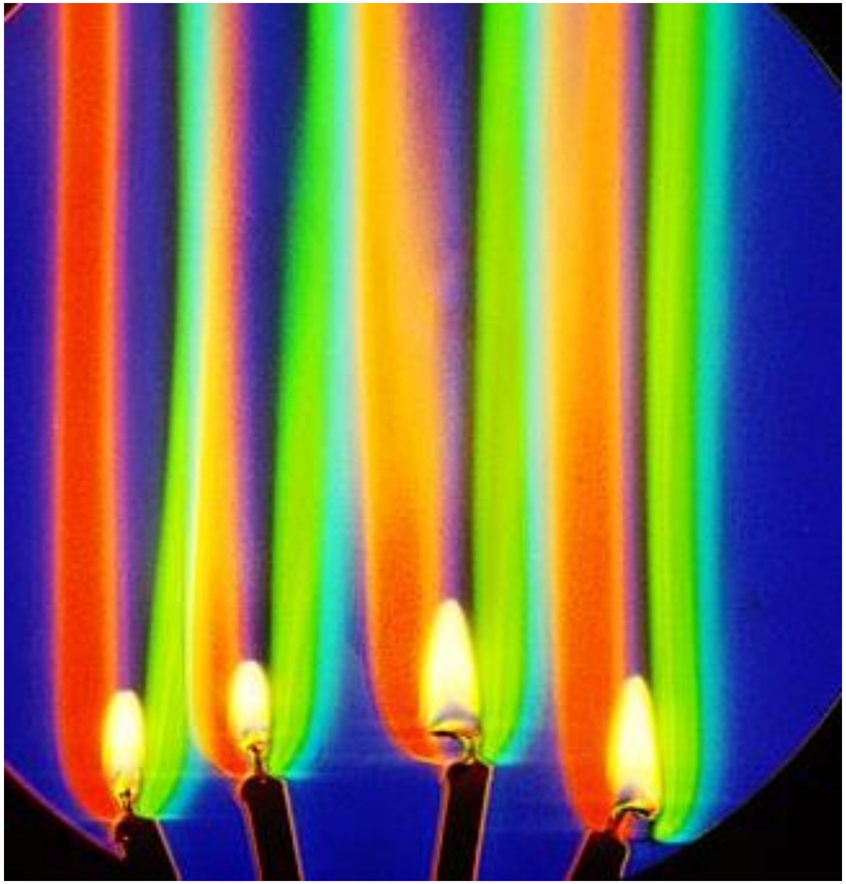
Ανασκόπηση εννοιών ρευστομηχανικής

Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

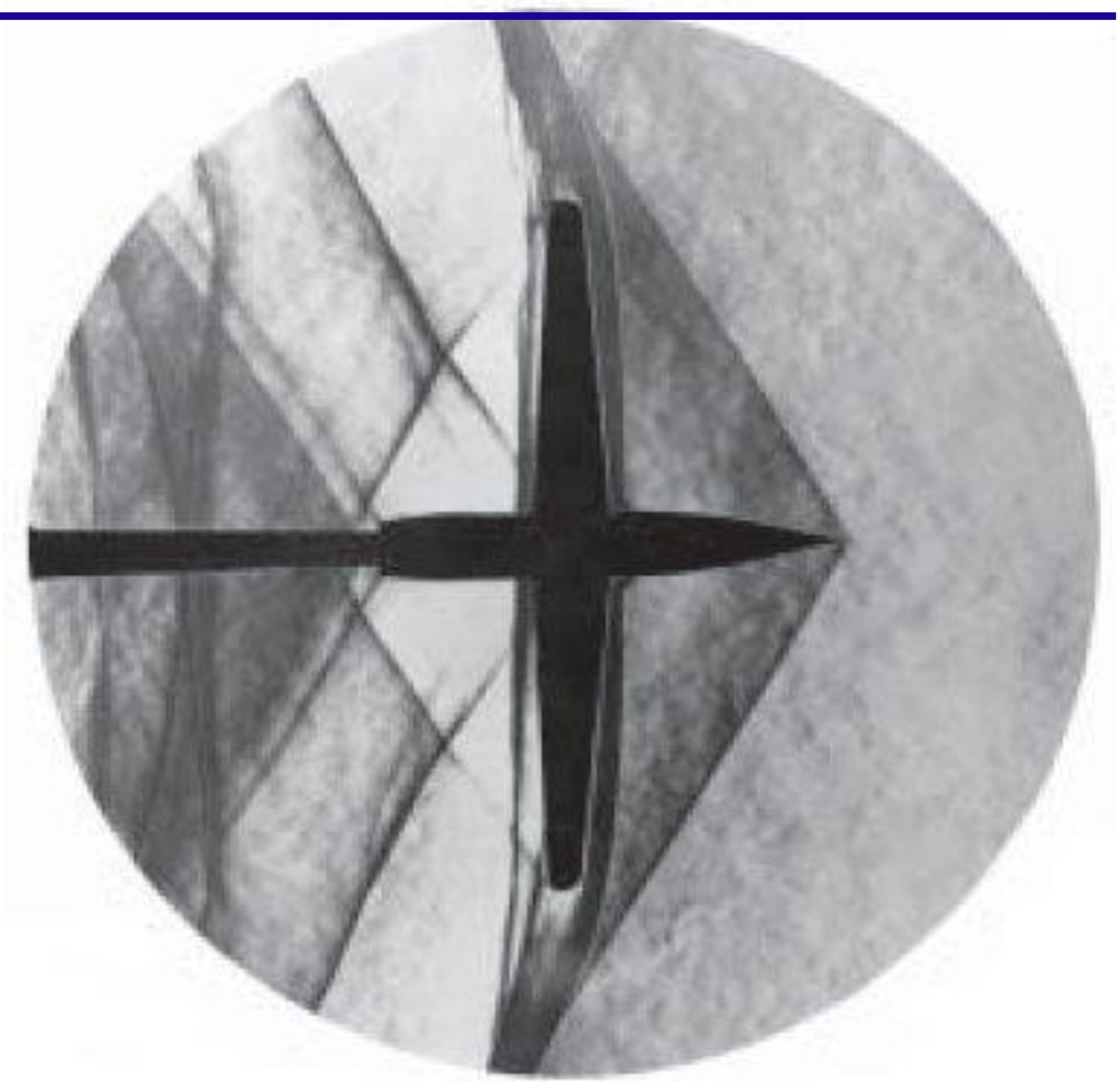
Φωτογραφίες σχηματισμού σταγόνων νερού



Φωτογραφίες schlieren θερμικά επαγόμενων ροών



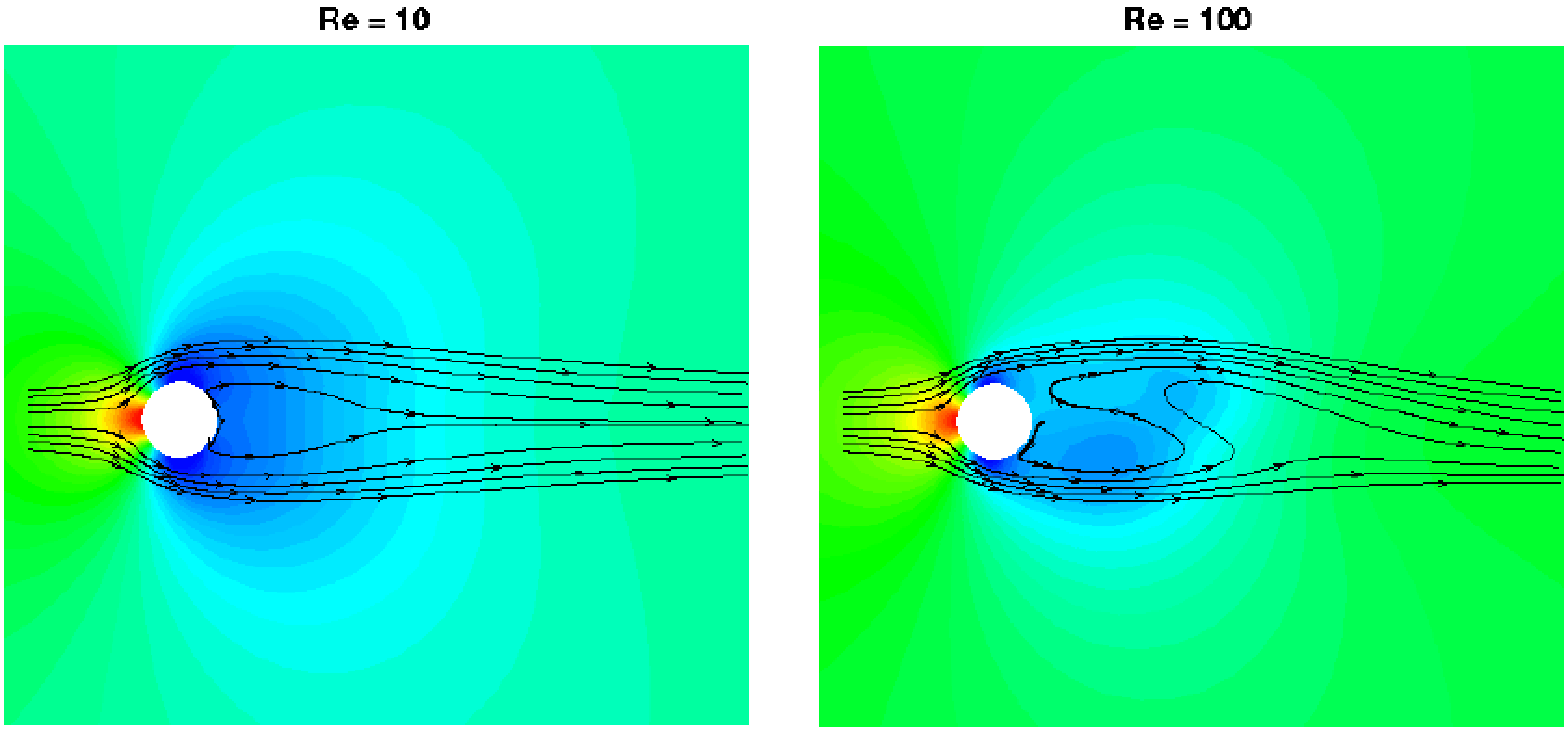
Φωτογραφία schlieren υπερηχητικού αεροπλάνου



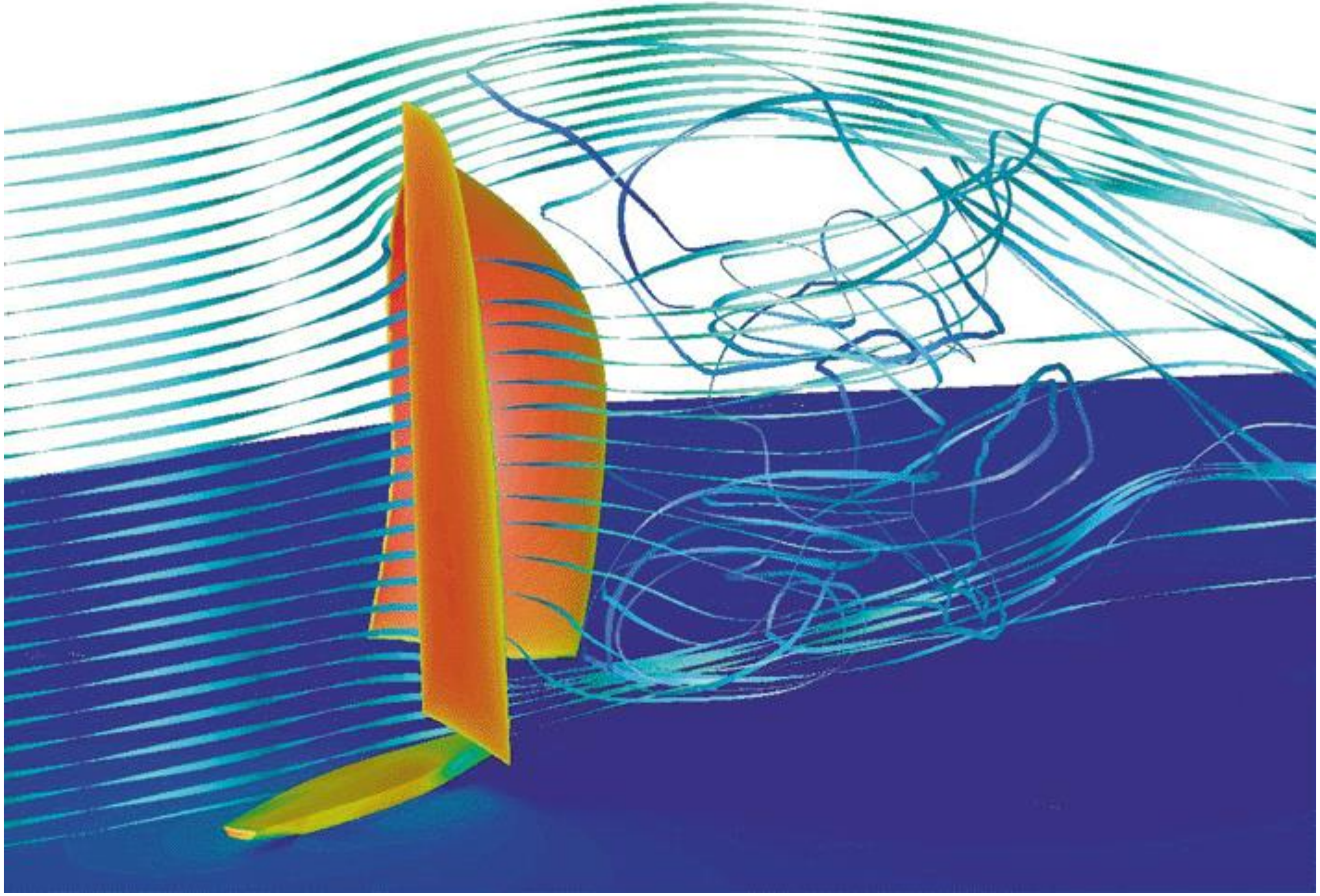
Mach 1.2

Φωτογραφίες schlieren και σκιογράφημα (shadowgraph) υπερηχητικού βλήματος

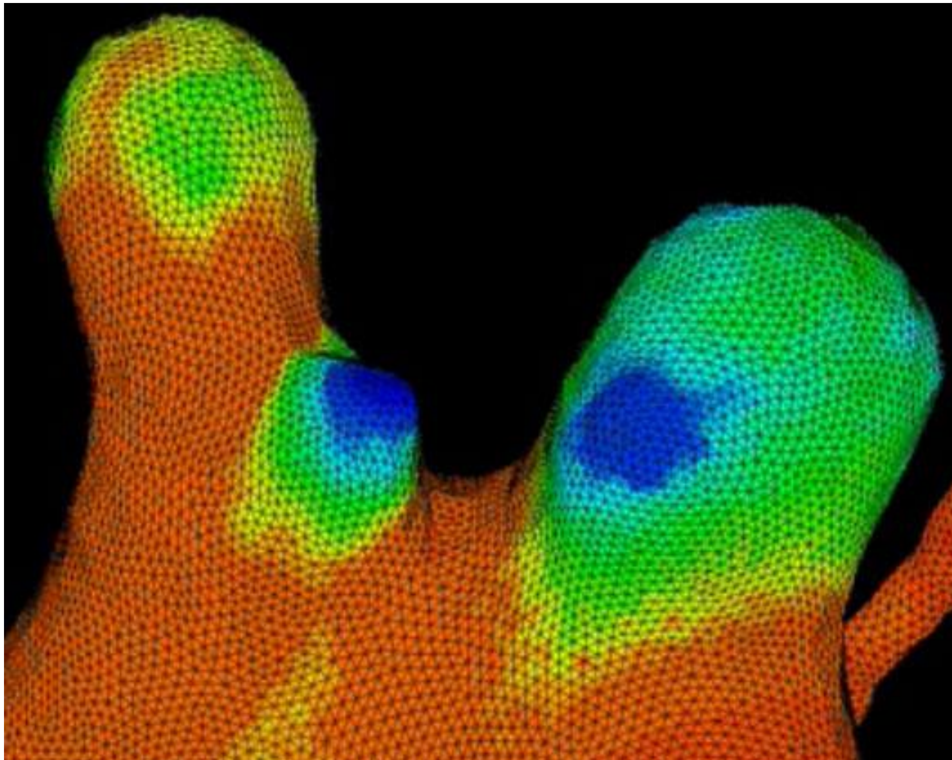
Γραμμές ροής πίσω από κύλινδρο

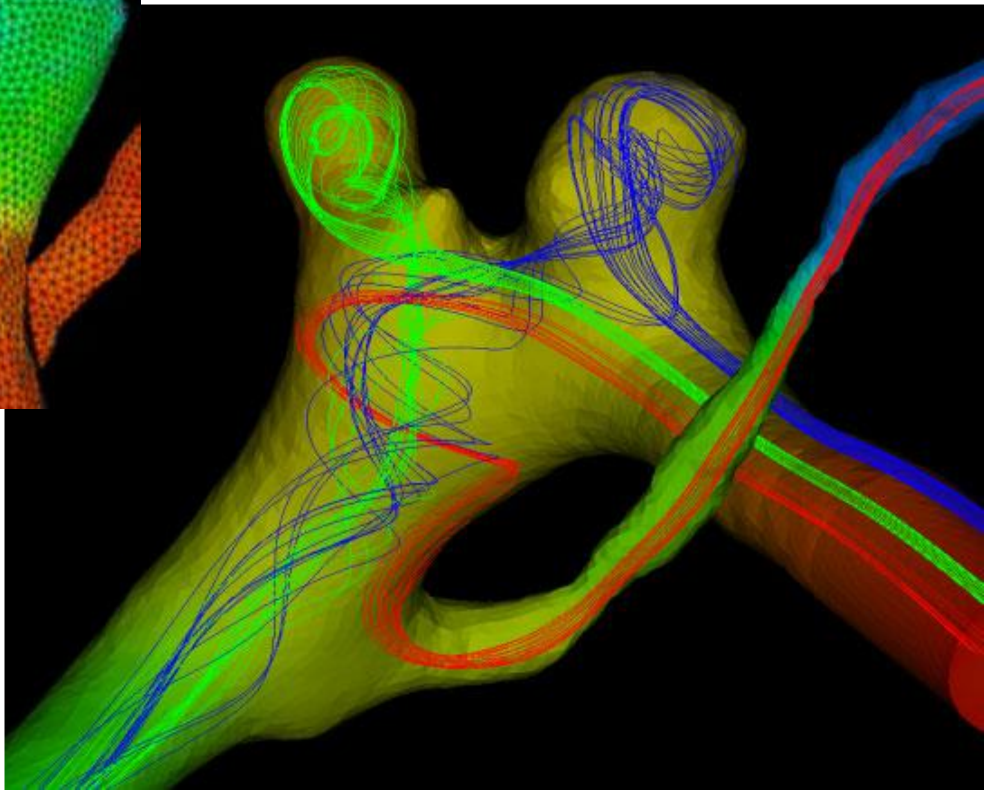


Γραμμές ροής σε ιστιοφόρο



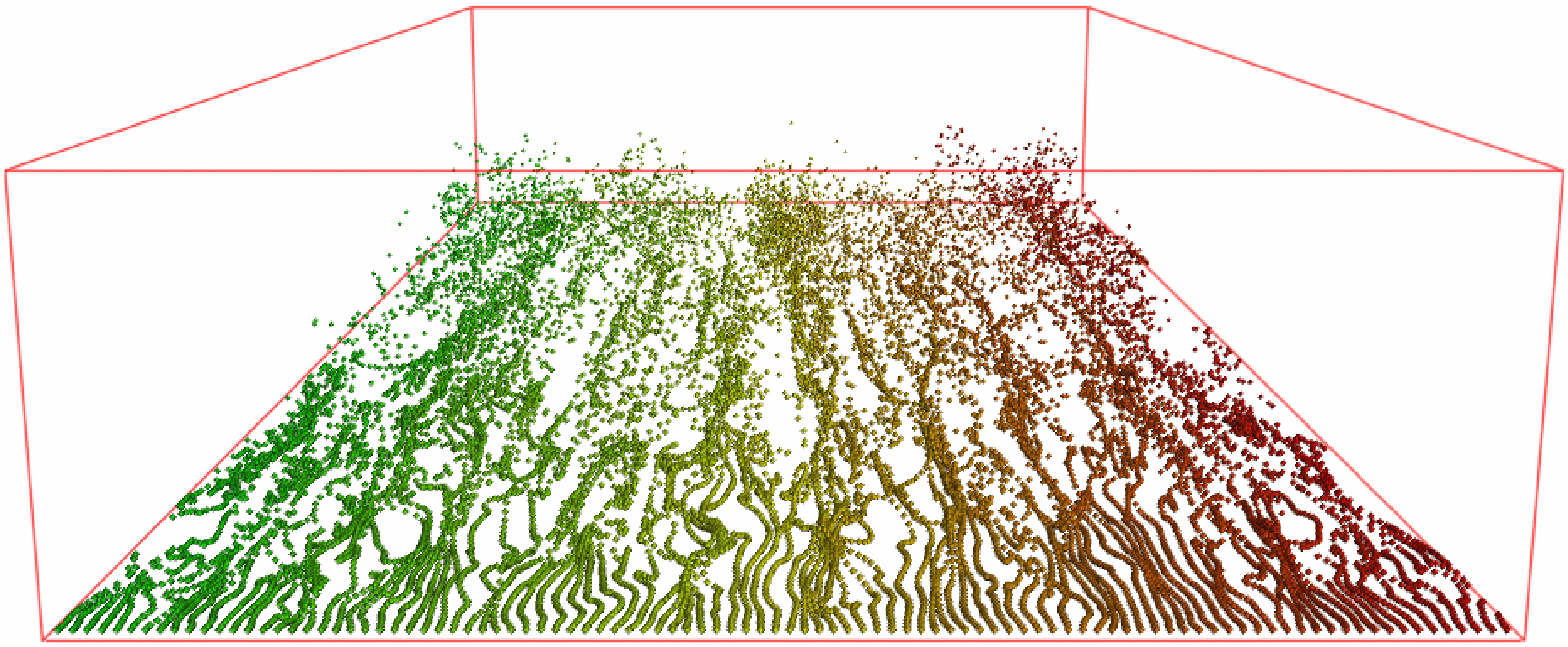
Γραμμές ροής σε ανεύρυσμα καρωτίδας



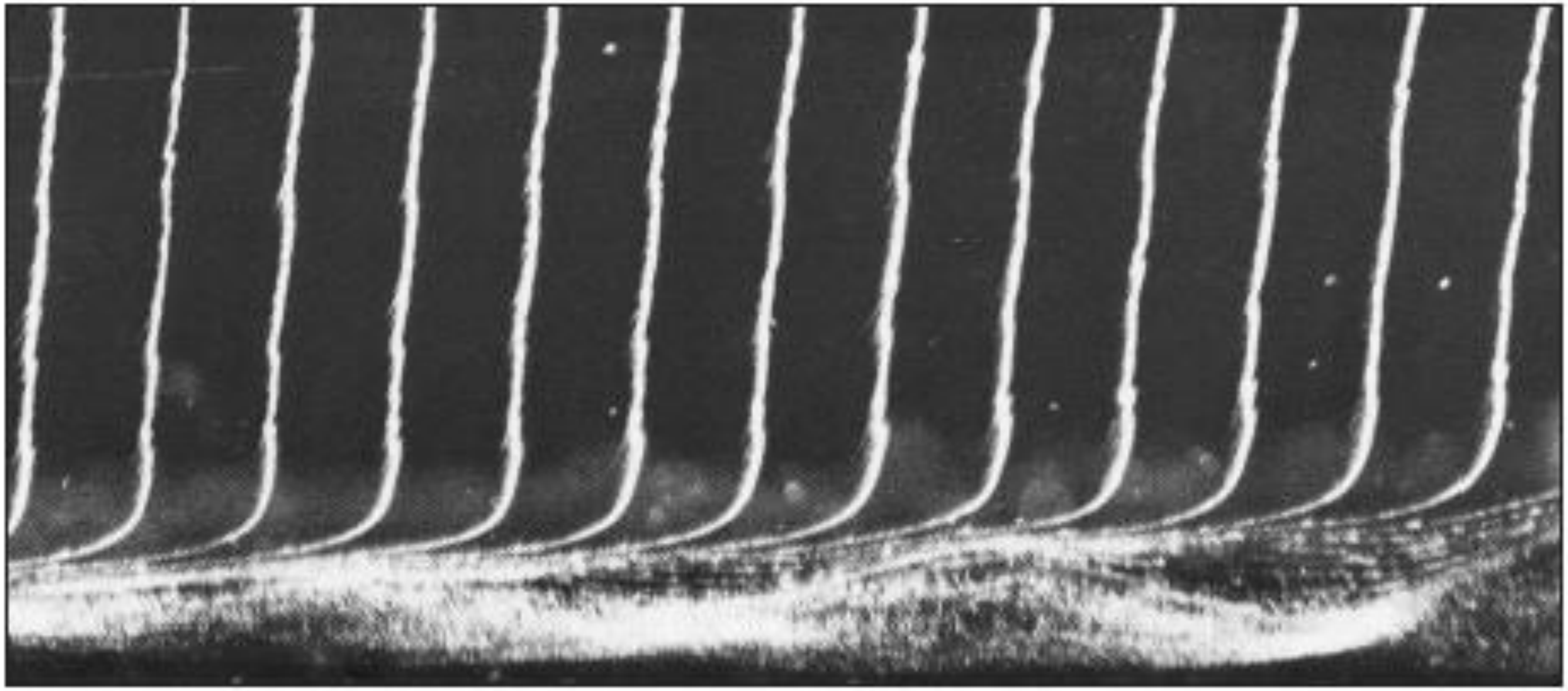


Yiannis Ventikos, LTNT, ETH Zürich, Switzerland

Ακολουθίες (streamlines)

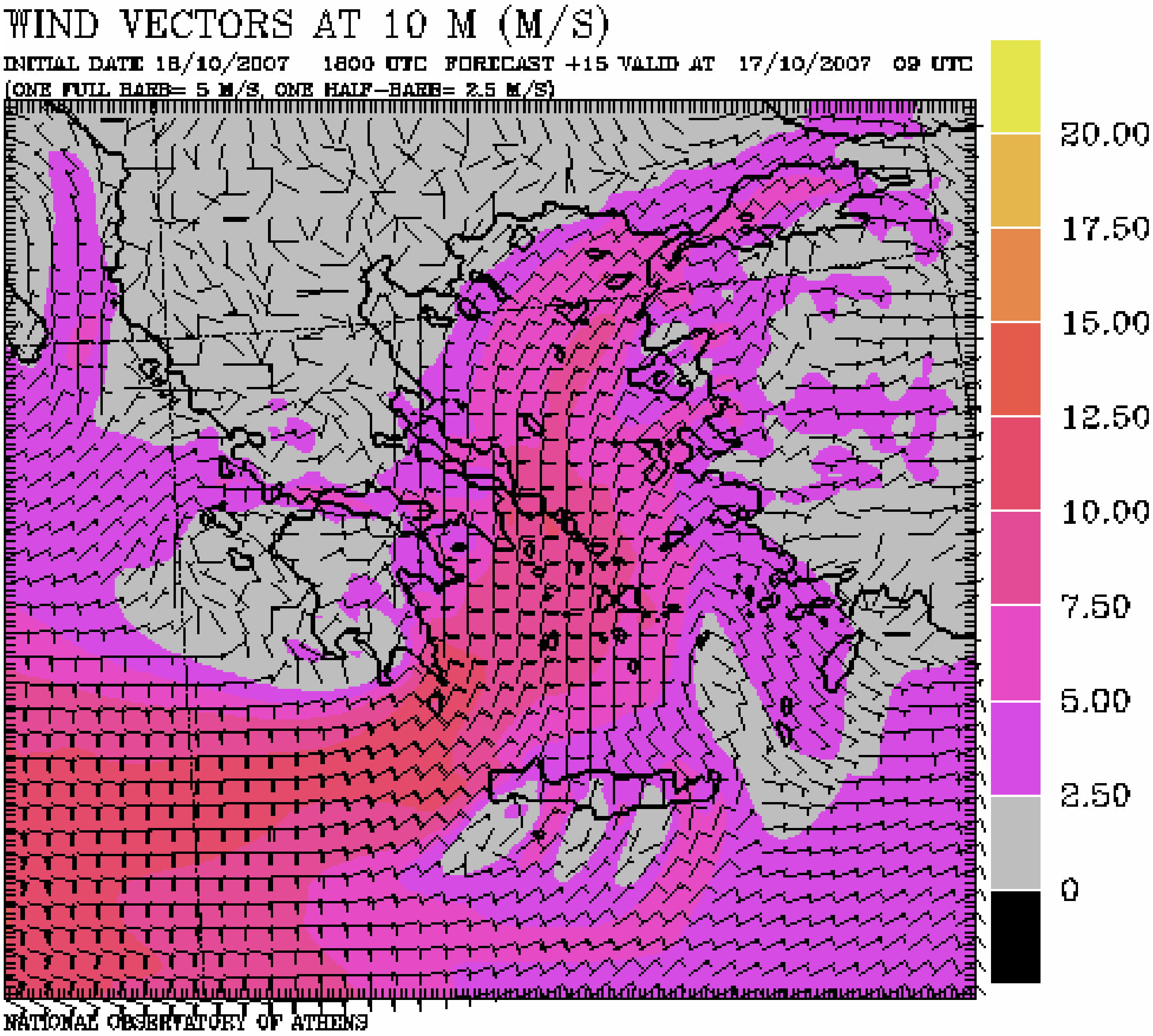


Χρονογραμμές (Timelines)



Οπτικοποίηση οριακού στρώματος σε ροή νερού πάνω από στερεό όριο—Παραγωγή από σωλήνα φυσαλίδων υδρογόνου

Διανυσματική απεικόνιση πεδίου ανέμου



Πεδίο επιτάχυνσης από πεδίο ταχύτητας

$$\vec{a}_{particle} = \frac{d\vec{V}_{particle}}{dt} \qquad \vec{V}_{particle} = \vec{V}\Big(x_{particle}(t), y_{particle}(t), z_{particle}(t)\ ,t\Big)$$

$$\vec{a}_{particle} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_{particle}}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_{particle}}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_{particle}}{dt}$$

$$\frac{dx_{particle}}{dt} = u, \frac{dy_{particle}}{dt} = v, \frac{dz_{particle}}{dt} = w$$

$$\vec{a}_{particle} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

$$\underbrace{\vec{a}(x,y,z,t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}}_{\text{Ολική, σωματιδιακή, υλική, Lagrange, Euler}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Τοπική}} + \underbrace{(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}}_{\text{Μεταθετική}}$$

Υπολογισμός γραμμών ροής και τροχιών

Γραμμές ροής

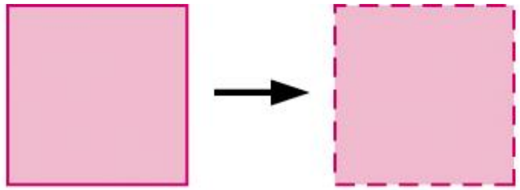
$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ παράλληλο προς $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

Άρα $$\frac{dr}{V} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

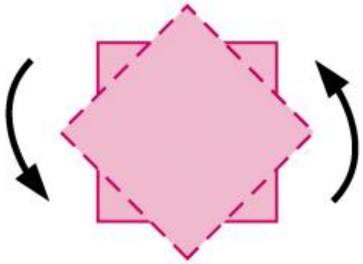
Τροχιές

$$\frac{dx_{particle}}{dt} = u, \frac{dy_{particle}}{dt} = v, \frac{dz_{particle}}{dt} = w$$

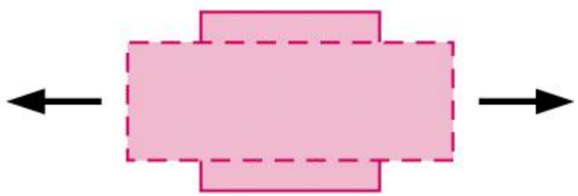
Τυπολογία της κίνησης ρευστών



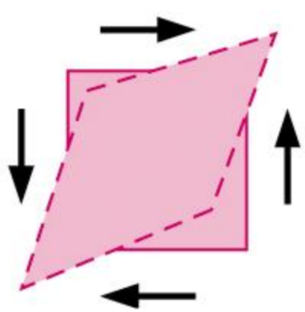
Μετάθεση



Περιστροφή



Γραμμική παραμόρφωση (τροπή)



Γωνιακή παραμόρφωση (τροπή)

Τανυστής ταχυτήτων παραμόρφωσης

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Γωνιακή ταχύτητα - Στροβιλότητα

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

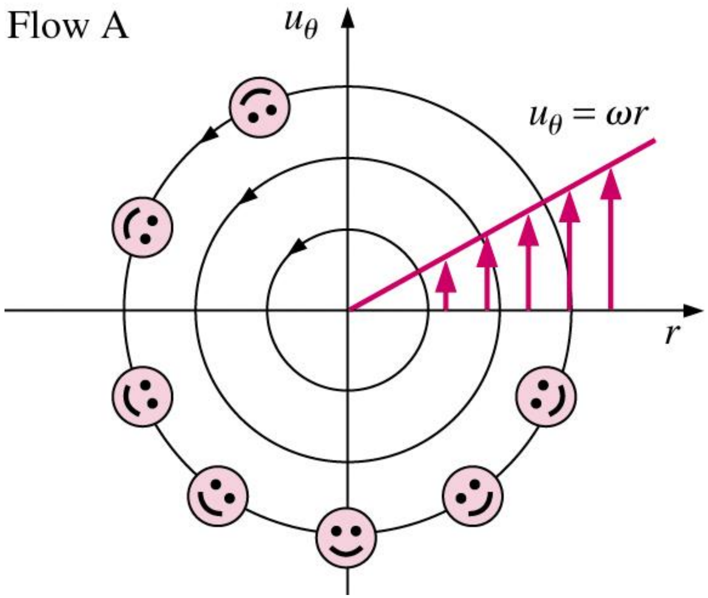
Γωνιακή ταχύτητα → $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\zeta}$ ← Στροβιλότητα

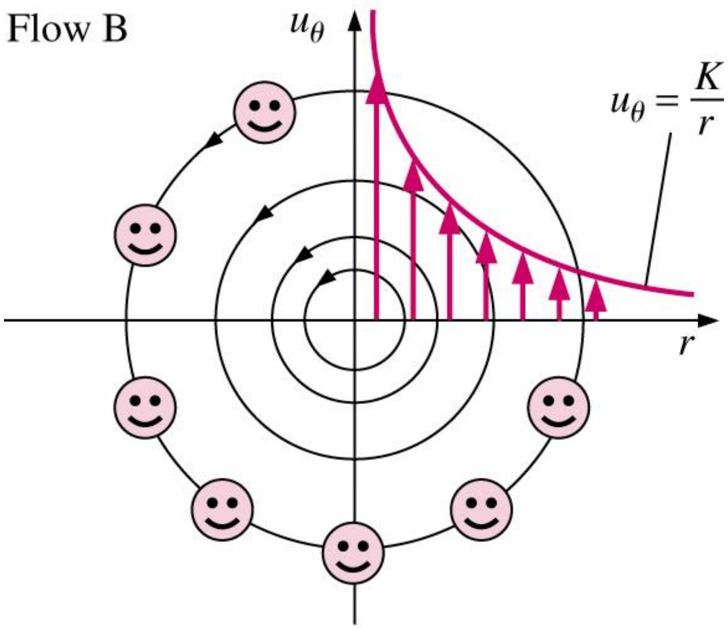
$$\vec{\zeta} = \mathrm{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial\left(r u_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

Παραδείγματα κυκλικών ροών με και χωρίς στροβιλότητα





(b)

$$u_r = 0, u_\theta = \omega r$$

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} - 0\right)\vec{e}_z = 2\omega\vec{e}_z$$

$$u_r = 0, u_\theta = \frac{K}{r}$$

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(K)}{\partial r} - 0\right)\vec{e}_z = 0\vec{e}_z$$

Ανάλυση μονοδιάστατων ροών Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds – γενική περίπτωση

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_U \rho\, a\, dU = \frac{\partial}{\partial t}\int_U \rho\, a\, dU - \int_E (\rho\, a)(\vec{V}\, d\vec{E})$$

Ολική μεταβολή μιας ιδιότητας A του ρευστού που καταλαμβάνει τον όγκο U στο χρόνο t

Ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της ιδιότητας A στον όγκο U (α «πυκνότητα» ή «ένταση» της A (α = dA/dm)

Καθαρή εισροή της ιδιότητας A μέσω της επιφάνειας E που περιβάλλει τον όγκο U

Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds – για όρια του όγκου αναφοράς σταθερά στο χρόνο

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_U \rho\, a\, dU = \frac{\partial}{\partial t}\int_U \rho\, a\, dU - \int_E (\rho\, a)\,(\vec{V}\,\vec{dE})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_U \rho\, a\, dU = \int_U \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, a)\, dU - \int_E \rho\, a\,(\vec{V}\,\vec{dE})$$

Εξίσωση συνέχειας (= διατήρησης μάζας)

- Προκύπτει από το θεώρημα Reynolds για $\alpha = 1$ και $dm/dt = 0$ (διατήρηση μάζας)
- Γενικά

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_U \rho \, dU = \int_E \rho \vec{V} \, \vec{dE}$$

- Για όρια του όγκου αναφοράς σταθερά στο χρόνο

$$\int_U \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dU = \int_E \rho \, (\vec{V} \, \vec{dE})$$

- Για σταθερά όρια και ασυμπίεστο ρευστό

$$\int_E \rho \vec{V} \, \vec{dE} = 0$$

- Για μόνιμη ροή και ασυμπίεστο ρευστό

$$\int_E \vec{V} \, \vec{dE} = 0$$

Εξίσωση συνέχειας – ειδικές περιπτώσεις – ασυμπίεστο ρευστό

- Ορισμός της παροχής: $Q = \int_E V \, \mathrm{d}E$
- Ορισμός της μέσης ταχύτητας: $V_\mu = Q / E$
- Αγωγός με στερεά όρια (υπό πίεση), όγκος αναφοράς μεταξύ των διατομών 1 και 2: $Q_1 = Q_2$
- Όγκος αναφοράς με στερεά όρια και πολλές εισόδους και εξόδους: $\sum Q_{εισρ} = \sum Q_{εκρ}$
- Όγκος αναφοράς με ελεύθερη επιφάνεια μεταξύ των διατομών 1 και 2, μη μόνιμη ροή: $Q_1 = Q_2 + \mathrm{d}S/\mathrm{d}t$

Εξίσωση ορμής
(ή κατ' άλλους «ποσότητας κίνησης»)

- Προκύπτει από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε συνδυασμό με το θεώρημα Reynolds για $a = \vec{V}$

$$\sum \vec{F} = \frac{D}{Dt}\int \vec{V}\, dm$$

- Γενικά

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_U \rho \vec{V}\, dU - \int_E \rho \vec{V}\,(\vec{V}\, d\vec{E})$$

- Για μόνιμη ροή

$$\sum \vec{F} = -\int_E \rho \vec{V}\,(\vec{V}\, d\vec{E})$$

- Για μόνιμη ροή, και όγκο αναφοράς μεταξύ των διατομών 1 (ανάντη) και 2 (κατάντη)

$$\sum \vec{F} = (\beta\rho \vec{V}_\mu Q)_2 - (\beta\rho \vec{V}_\mu Q)_1$$

  όπου β συντελεστής συνόρθωσης ορμής:

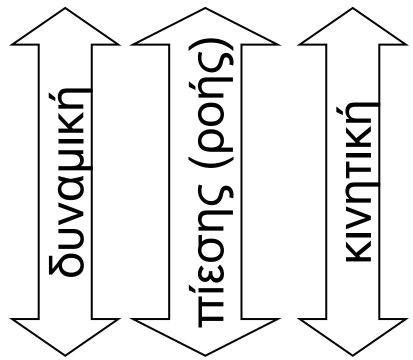
$$\beta = \frac{\int_E V^2\, dE}{V_\mu^2 E} = \frac{\int_E V\, dQ}{V_\mu Q}$$

- Απλοποίηση για ασυμπίεστο ρευστό, θεωρώντας $\beta \approx 1$

$$\sum \vec{F} = \rho Q\,(\vec{V}_{\mu_2} - \vec{V}_{\mu_1})$$

Μηχανική ενέργεια ροής

- ανά μονάδα μάζας $e = gz + p/\rho + V^2/2$ (μονάδες: ταχύτητα^2)



- ανά μονάδα βάρους $H = z + p/\rho g + V^2/2g$ (μονάδες: μήκος)

Προσεγγιστικές εξισώσεις σε απλό πεδίο ροής

- Εξίσωση **Bernoulli:** $z + p/\rho g + V^2/2g = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$
  - ισχύει κατά μήκος μιας γραμμής ροής
  - ισχύει σε περιοχές μόνιμης ασυμπίεστης ροής όπου οι δυνάμεις τριβής είναι αμελητέες
  - δεν ισχύει στο οριακό στρώμα, σε περιοχές διαταραχών ή όταν υπεισέρχονται άλλες δυνάμεις πέρα από τη βαρύτητα
  - εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας
  - παράγεται (και) από την εξίσωση διατήρησης της ορμής
- Η υδροστατική εξίσωση $z + p/\rho g = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$
  - ισχύει σε διεύθυνση κάθετη στις γραμμής ροής
  - κατά τα άλλα, ισχύει με τις ίδιες προϋποθέσεις, όπως η εξίσωση Bernoulli, ενώ δεν ισχύει και όταν υπάρχει καμπυλότητα στις γραμμές ροής
  - παράγεται από την εξίσωση διατήρησης της ορμής

Εξίσωση ενέργειας σε μονοδιάστατο όγκο αναφοράς

- Σε διατομές κάθετες στην κίνηση, ισχύει η υδροστατική κατανομή: $z + p/\rho g = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$
- Η μέση ενέργεια ανά μονάδα βάρους είναι
  $H_\mu = z + p/\rho g + \alpha V^2/2g$
  όπου $\alpha = \int_E V^3\, dE \,/\, V_\mu^2\, Q$ (συντελεστής συνόρθωσης κινητικής ενέργειας)
- Η εξίσωση ενέργειας για όγκο αναφοράς μεταξύ των διατομών 1 (ανάντη) και 2 (κατάντη) είναι
  $H_1 = H_2 + \Delta H_{\alpha\pi\omega\lambda(1\text{-}2)} + H_{\mu\eta\chi\alpha\nu}$
- Για $\alpha = 1$, $\Delta H_{\alpha\pi\omega\lambda(1\text{-}2)} = H_{\mu\eta\chi\alpha\nu} = 0$ η παραπάνω εξίσωση ταυτίζεται με την εξίσωση Bernoulli