Σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος:

**Βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων - Υδροπληροφορική**

# Ανάλυση αβεβαιότητας (uncertainty analysis)

**Παναγιώτης Κοσσιέρης, Ανδρέας Ευστρατιάδης & Χρήστος Μακρόπουλος**

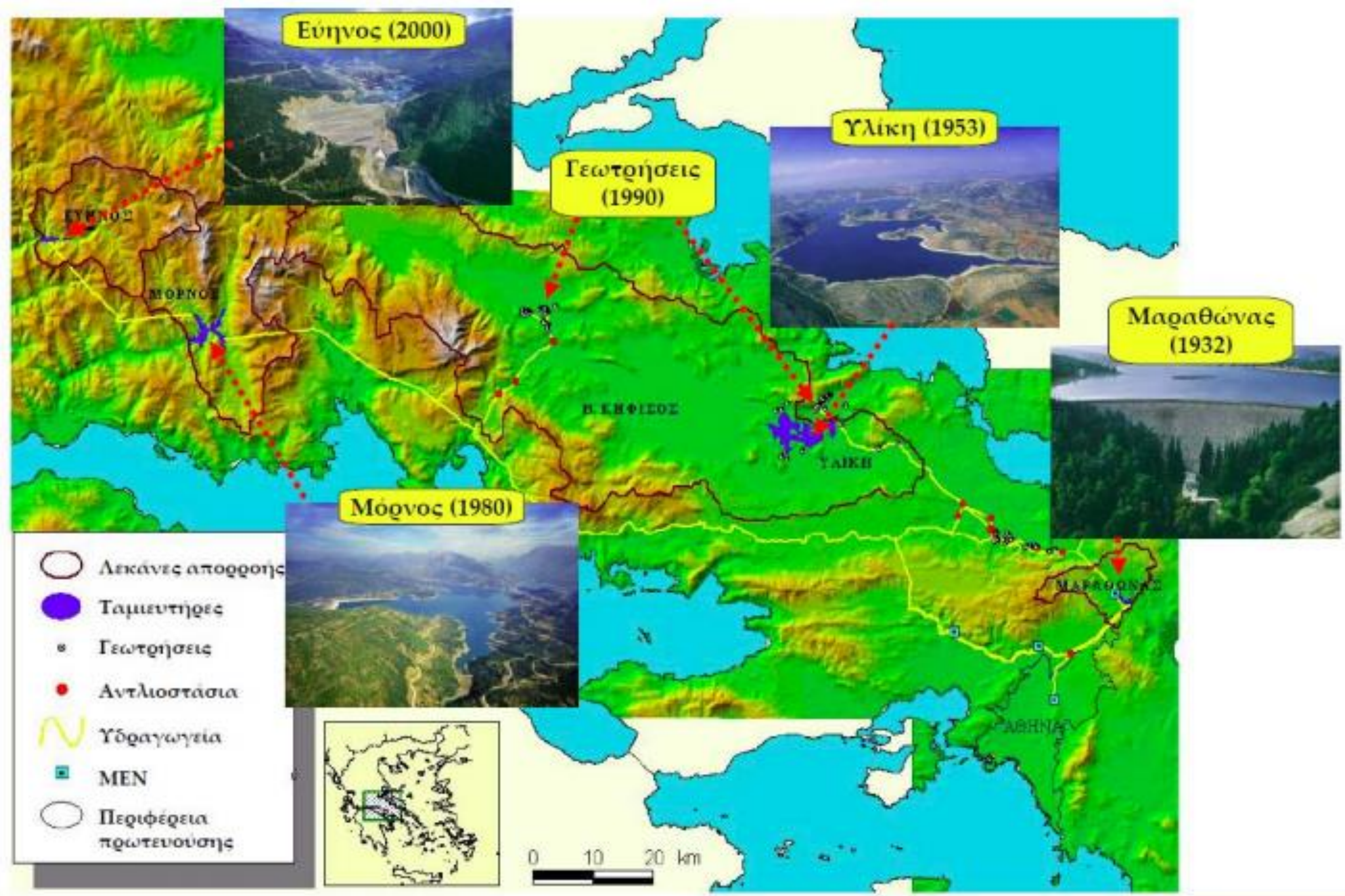
Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Μάιος 2016

# Βασικές έννοιες συστημάτων

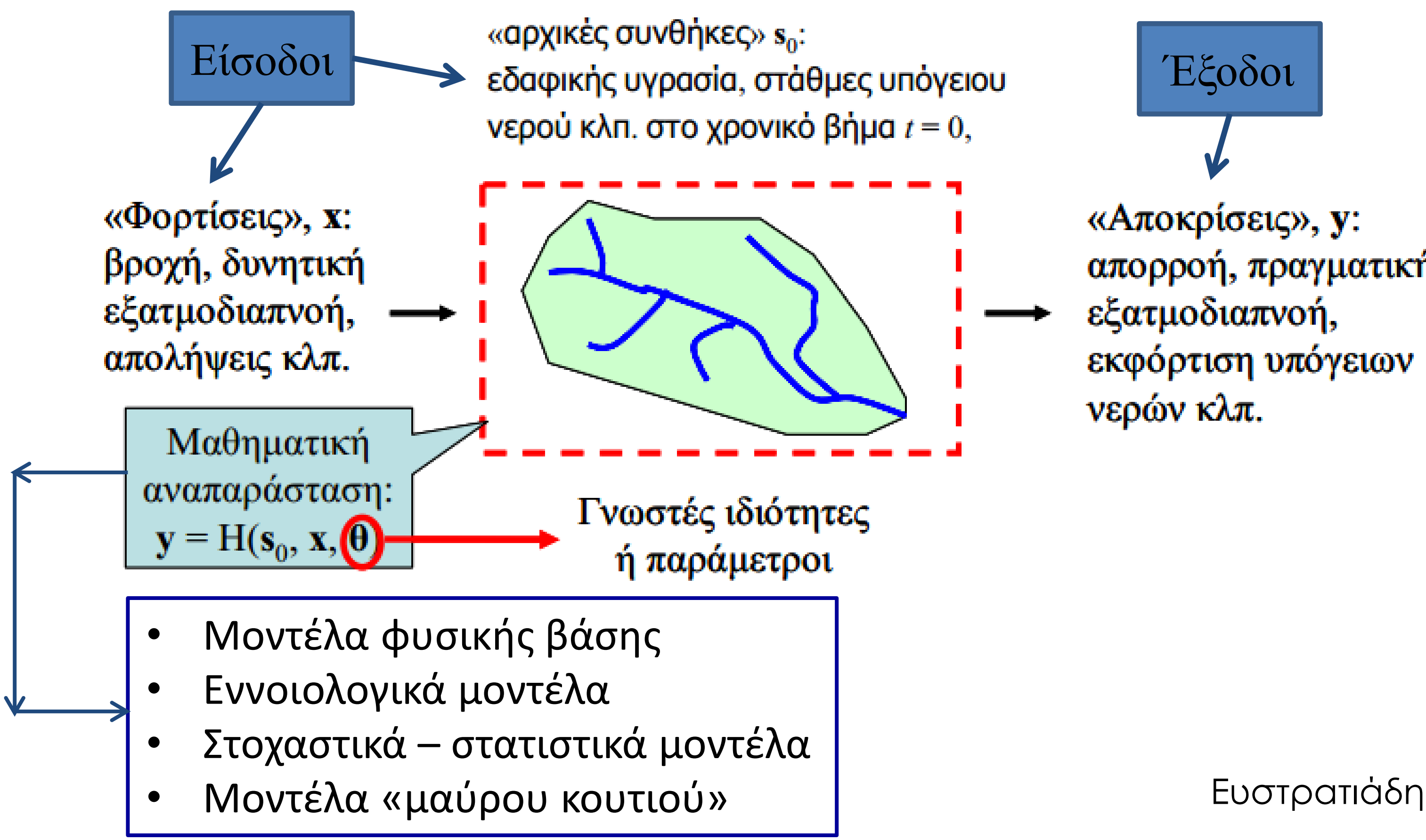
- **Σύστημα:** Σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους στοιχείων, το οποίο χαρακτηρίζεται από: α) ένα **σύνορο** που καθορίζει αν το στοιχείο ανήκει στο σύστημα ή στο περιβάλλον, β) **αλληλεπιδράσεις** με το περιβάλλον (είσοδοι και έξοδοι), και γ) **σχέσεις** μεταξύ των στοιχείων του και των εισόδων και εξόδων (Mays & Tung, 1992).
- **Υδροσύστημα:** Σύστημα αποτελούμενο από **φυσικά υδάτινα σώματα** και **τεχνικά έργα**, που συνεργαζόμενα εξυπηρετούν έναν ή περισσότερους σκοπούς, που αναφέρονται τόσο στην **αξιοποίηση του νερού** ως φυσικού πόρου, όσο και στην **προστασία από την καταστροφική δράση** του ως φυσικού κινδύνου (Κουτσογιάννης & Ξανθόπουλος, 1997, σ.4).
- **Συστήματα υδατικών πόρων:** Όρος με περιεχόμενο στενότερο του υδροσυστήματος – δεν περιλαμβάνει τα συστήματα ελέγχου πλημμυρών (Κουτσογιάννης & Ξανθόπουλος, 1997, σ.4, 33).

# Παράδειγμα: Το υδροσύστημα της Αθήνας



# Ανάλυση συστημάτων

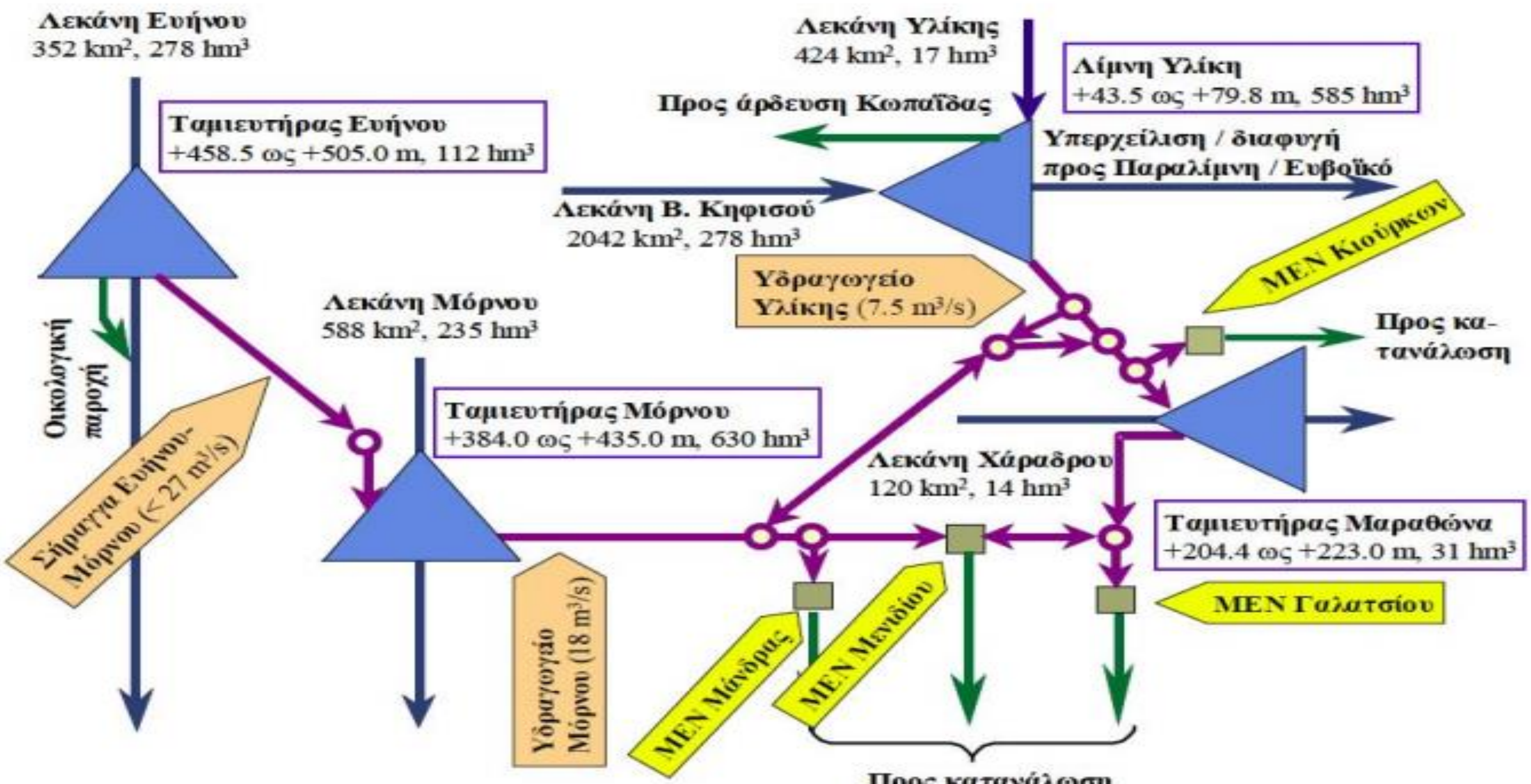
- **Ανάλυση συστημάτων:** Μεθοδολογική **αντιμετώπιση πολύπλοκων φαινομένων και δομών**, για τα οποία **δεν υπάρχει αναλυτική λύση**.
  - **Στόχος:** Αναγνώριση του τρόπου με τον οποίο λειτουργεί ένα σύστημα, χωρίς λεπτομερειακή θεώρηση των σχέσεων ή φυσικών διεργασιών που το διέπουν (Grigg, 1996, σ. 115).




Ευστρατιάδης, 2008

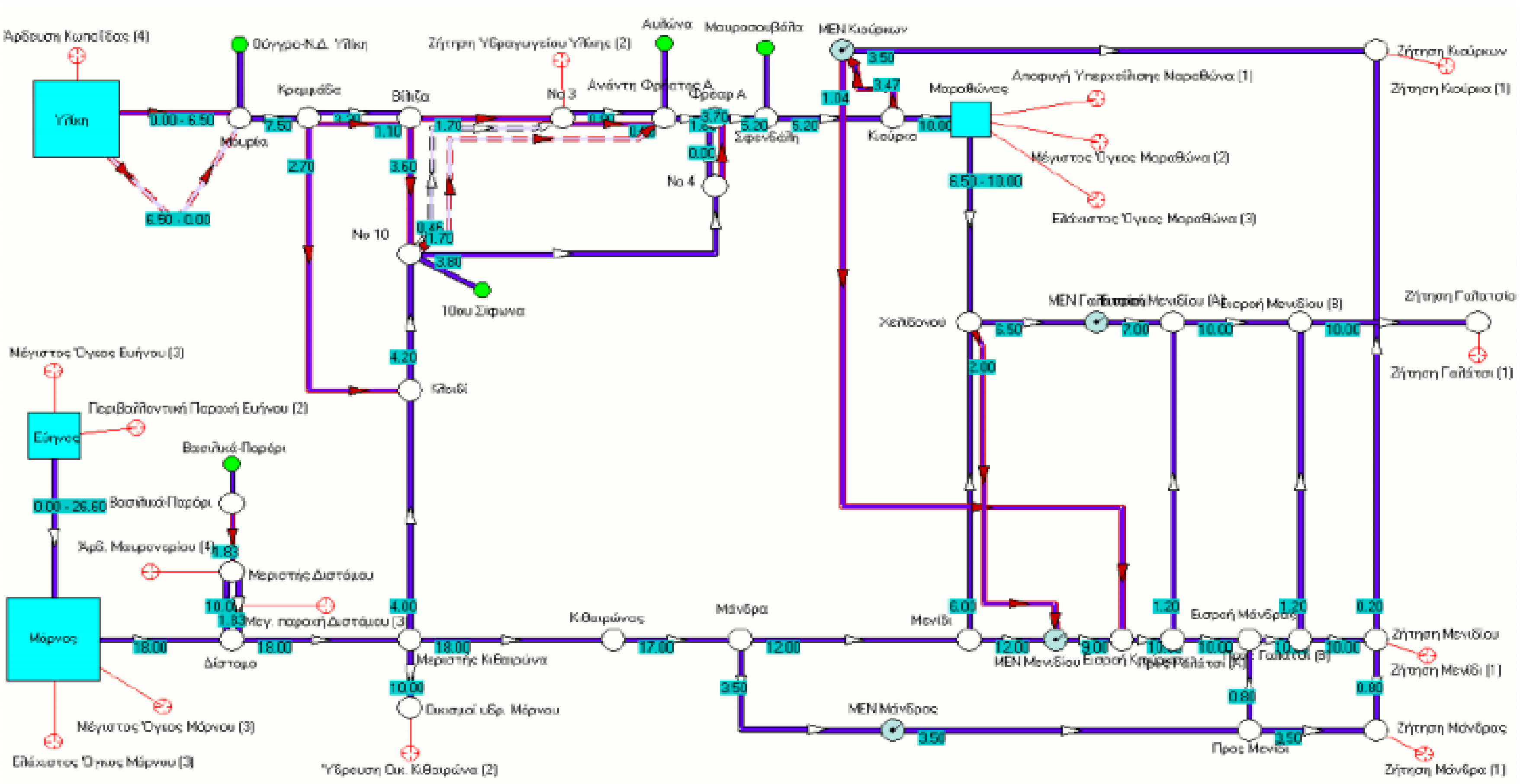
# Αναπαράσταση με τη μορφή συστήματος

- **Ανάλυση συστημάτων υδατικών πόρων:** Συστηματική διαδικασία αναζήτησης της **βέλτιστης διαχειριστικής πολιτικής ενός υδροσυστήματος**, που βασίζεται σε μια διαδοχή από εναλλακτικές αποφάσεις και αξιολογήσεις των επιπτώσεων κάθε απόφασης.



# Μοντέλα συστημάτων

- **Μαθηματικό μοντέλο:** Περιγράφει τη **δομή και λειτουργία** ενός συστήματος **μέσω απλοποιητικών υποθέσεων** που έχουν τη μορφή μαθηματικών ή λογικών σχέσεων και έχουν κωδικοποιηθεί σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού.



# Μοντέλο VS φυσικό σύστημα

- Τα μοντέλα επιτρέπουν να εκτιμήσουμε και να **αξιολογήσουμε τις επιδράσεις/αποτελέσματα** των διαφόρων διαχειριστικών πολιτικών και αποφάσεων μέσω κάποιων **μέτρων επίδοσης** (*performance measures*).

- Τα μοντέλα αποτελούν **απλοποίηση** του φυσικού συστήματος και συνεπώς η λειτουργία τους εξαρτάται από:
  - **τη δομή του μοντέλου** (σχηματοποίηση, μαθηματικές εξισώσεις)
  - **τα δεδομένα εισόδου** (υδρολογικές χρονοσειρές, χαρακτηριστικά μεγέθη)
  - **τις τιμές των μεταβλητών ελέγχου** (άγνωστες παράμετροι ή μεταβλητές απόφασης που πρέπει να προσδιοριστούν)

⇓

**Αβεβαιότητα** ως προς την ακριβή πρόβλεψη της συμπεριφοράς του φυσικού συστήματος

# Μεταβλητές ελέγχου και τύποι προβλημάτων

- Άγνωστα μεγέθη του μαθηματικού μοντέλου του συστήματος, που προσδιορίζονται μέσω **βελτιστοποίησης**, και αφορούν σε δύο τύπους προβλημάτων (Tsoukalas *et al.*, 2016):

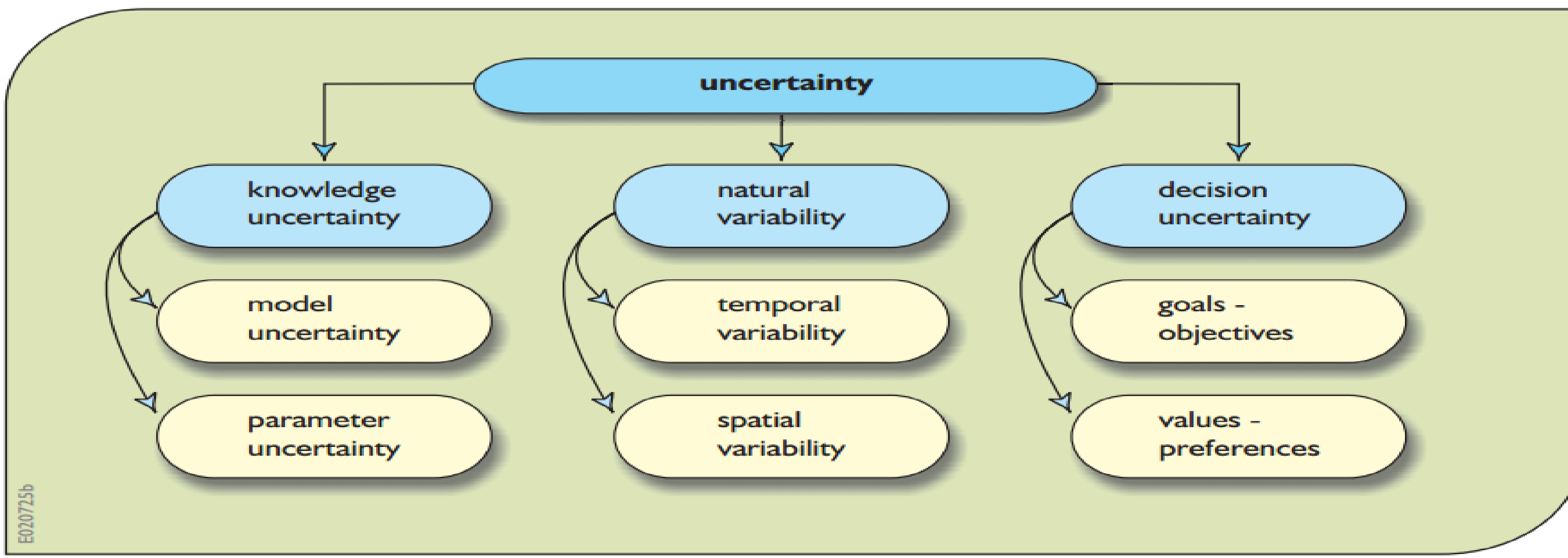
1. Σε μοντέλα προσομοίωσης της **παρατηρημένης λειτουργίας** φυσικών συστημάτων αναφέρονται σε **παραμέτρους** των εξισώσεων του συστήματος, οι οποίες δεν μπορούν να προσδιοριστούν από μετρήσεις πεδίου, και εκτιμώνται έμμεσα, μέσω **βαθμονόμησης** (*αντίστροφο πρόβλημα βελτιστοποίησης*).

2. Σε μοντέλα προσομοίωσης της **μελλοντικής λειτουργίας** φυσικών ή τεχνητών συστημάτων αναφέρονται σε **μεταβλητές απόφασης** που σχετίζονται με τον σχεδιασμό ή τη διαχείριση του συστήματος, και εκτιμώνται με βελτιστοποίηση κάποιων κριτηρίων επίδοσης της λειτουργίας του (*ευθύ πρόβλημα βελτιστοποίησης*)

**Αβεβαιότητα** που σχετίζεται με τη διατύπωση και επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης

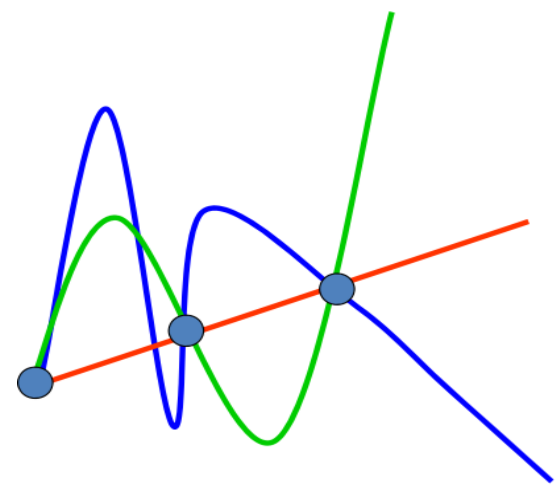
# Πηγές αβεβαιότητας

- **Απλοποιητικές παραδοχές** μοντέλου για κρίσιμες διεργασίες του συστήματος (δομικά σφάλματα μοντέλου – structural uncertainty)
- **Ευαισθησία στις αρχικές και οριακές συνθήκες** (χαοτικά συστήματα)
- **Ελλιπής γνώση** για κρίσιμες παραμέτρους του συστήματος
- **Στοχαστική φύση** και **χωροχρονική μεταβλητότητα** υδρομετεωρολογικών διεργασιών (π.χ. βροχή, εξατμοδιαπνοή, απορροή, άνεμος, ήλιος)
- **Σφάλματα και ανακρίβειες μετρήσεων**
- **Διαχρονική μεταβολή συστήματος** (λόγω εξωτερικών παραγόντων)
- **Αλλαγές στις αποφάσεις/πολιτική** και άρα στα **μέτρα επίδοσης**



# Δομικά σφάλματα μοντέλων

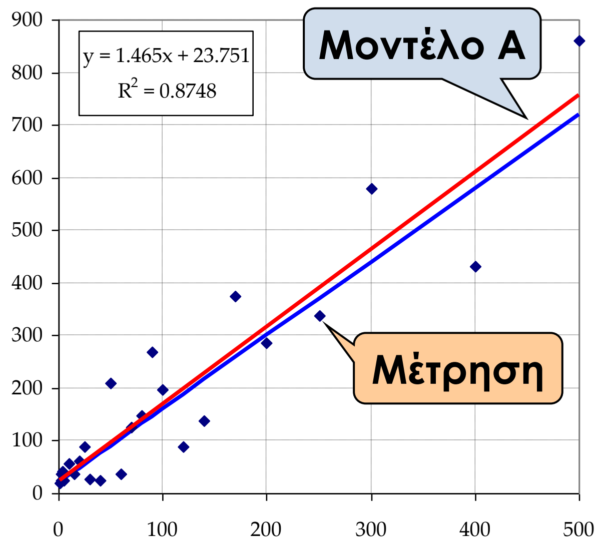
- Θεμελιώδης απαίτηση η απλούστερη δυνατή παραμετροποίηση ενός μοντέλου («**Αρχή της Φειδούς**»)
- Ένα μοντέλο είναι εξ ορισμού ελλιπές («**Αρχή Ελλιπούς Γνώσης**»)
- **Υπέρ-παραμετροποίηση:** υπερβολικά λεπτομερής δομή μοντέλου, με χρήση περισσότερων παραμέτρων από όσες επιβάλλει η πολυπλοκότητα του συστήματος και υποστηρίζουν τα διαθέσιμα δεδομένα μετρήσεων

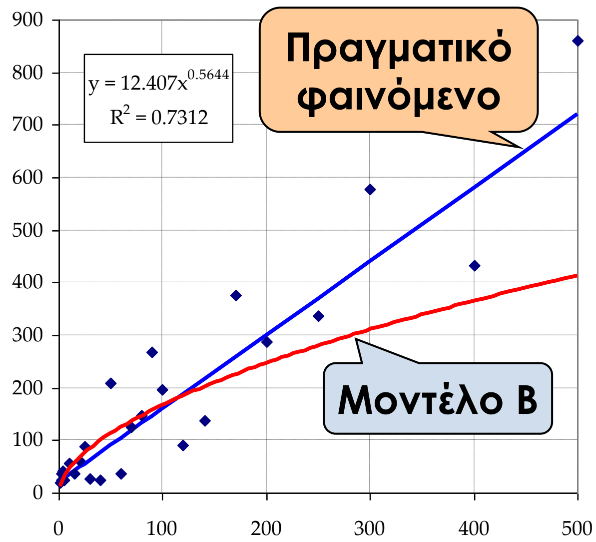


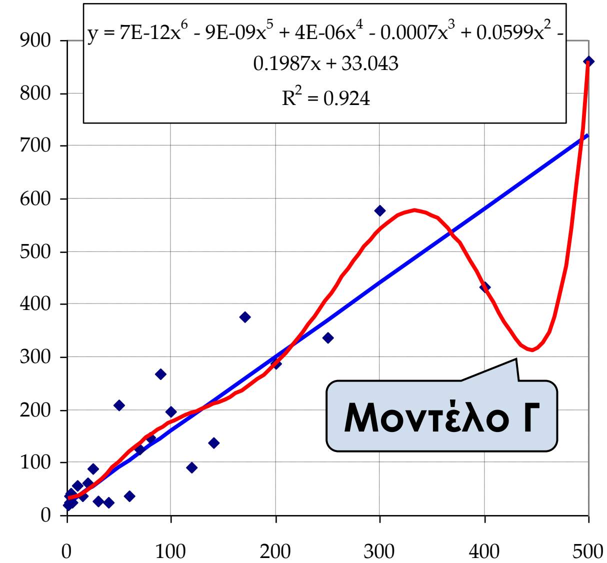
**Αύξηση πολυπλοκότητας μοντέλου ⇒ Αύξηση παραμέτρων ⇒**

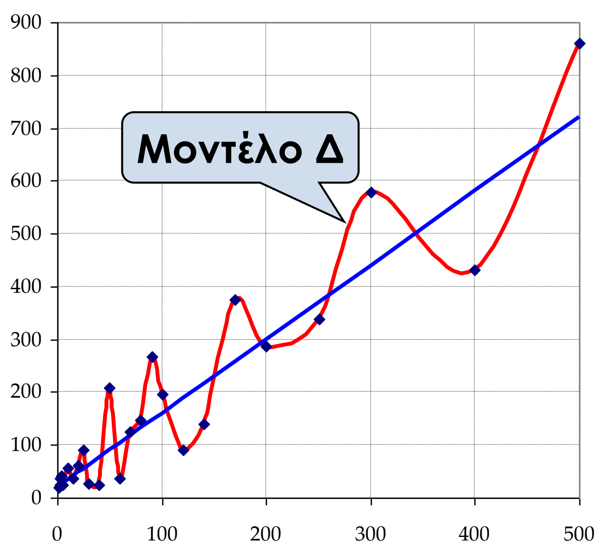
**Αύξηση πηγών σφαλμάτων και αβεβαιότητας στα αποτελέσματα**

# Η έννοια της παραμετροποίησης




**«Πραγματικό» φαινόμενο**: $y = 1.4x + 20$

**Μετρήσεις**: $y_m = y + w$, όπου $w$ τυχαία διαταραχή από κανονική κατανομή $N(0, \sigma)$, με διασπορά $\sigma_y^2$ ανάλογη του μετρούμενου μεγέθους $y$ (σφάλμα μέτρησης)

**Μοντέλο Α**: γραμμικό, 2 παράμετροι, $r^2 = 0.875$

**Μοντέλο Β**: τύπου δύναμης, 2 παράμετροι, $r^2 = 0.731$

**Μοντέλο Γ**: πολυώνυμο 6ης τάξης, 7 παράμετροι, $r^2 = 0.924$

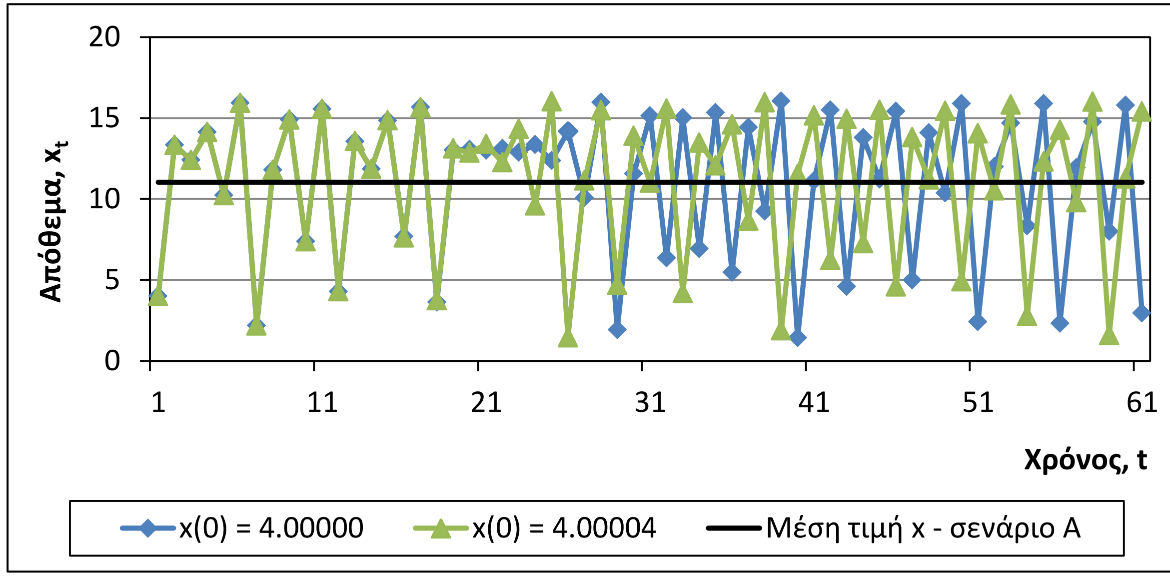
**Μοντέλο Δ**: μη γραμμικό μοντέλο «καρικατούρα», $n + 1$ παράμετροι για δείγμα $n$ μετρήσεων, $r^2 = 1$

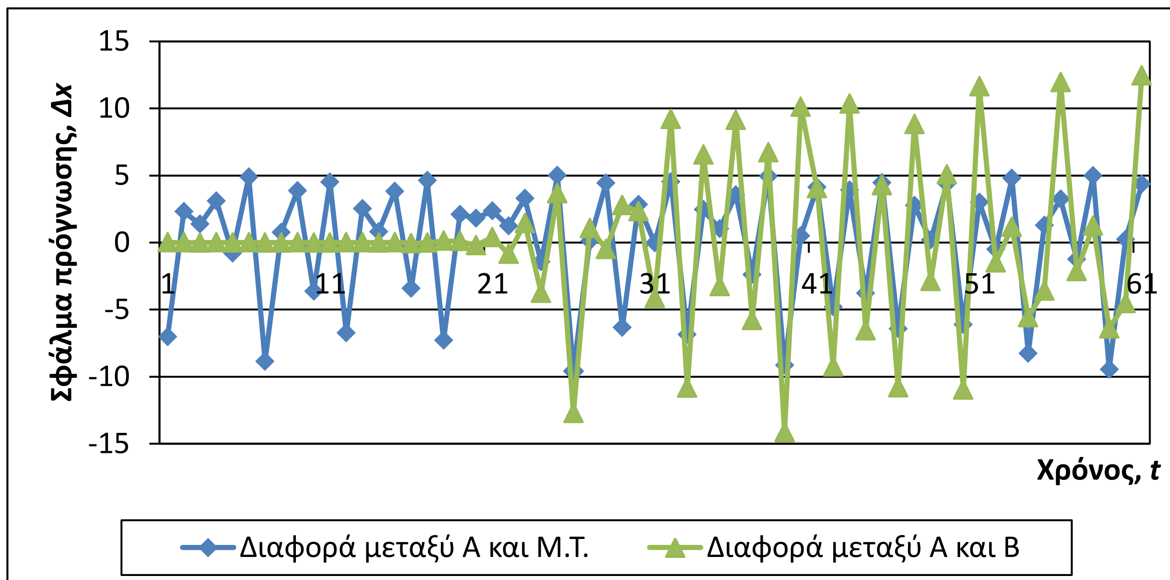
# Αβεβαιότητα αρχικών συνθηκών

- Έστω σύστημα ενός ταμιευτήρα με σταθερή εισροή *I* = 10 και εκροή συνάρτηση του αποθέματος x, Q(x) = 0.2 $e^{0.3x}$.
- Το μοντέλο εξέλιξης του συστήματος θα είναι:

$$x_t = x_{t-1} + 10 - 0.2e^{0.3x_{t-1}}$$

- Θεωρούμε δυο σενάρια Α και Β με αρχικές συνθήκες: $x_A(0) = 4$ και $x_B(0) = 4.00004$
- **Θα εμπιστευόσασταν το μοντέλο για την πρόγνωση του αποθέματος μετά από 1000 χρονικά βήματα;**



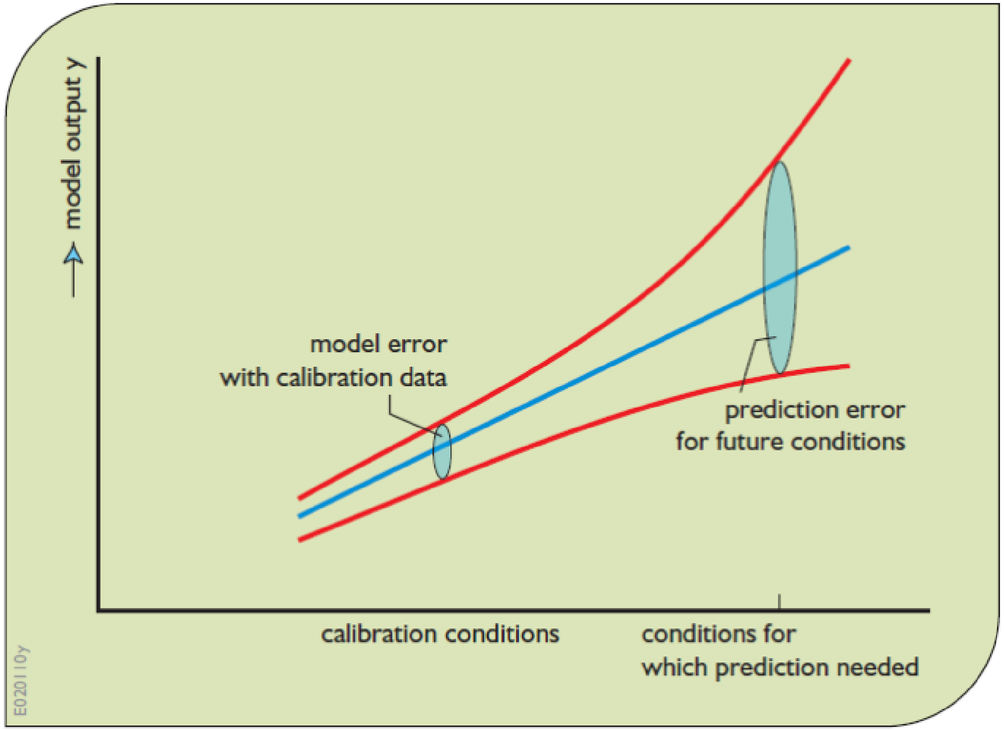




Κουτσογιάννης, 1996

# Μεταβλητότητα υδρολογικών διεργασιών

- Χρήση ιστορικών δεδομένων (χρονοσειρές, συχνά, μικρού μήκους)
  - Η διαθέσιμη πληροφορία περιγράφει όλη τη στατιστική συμπεριφορά του φαινομένου;
  - Τα στατιστικά χαρακτηριστικά και η στοχαστική δομή των ιστορικών χρονοσειρών αντιπροσωπεύουν πλήρως τα μελλοντικά δεδομένα;
- Επίδραση στις παραμέτρους του μοντέλου (βαθμονόμηση) και άρα στην προγνωστική ικανότητα του μοντέλου.

**Η ικανότητα του μοντέλου να προβλέπει τις μελλοντικές αποκρίσεις του συστήματος επηρεάζεται άμεσα από τις συνθήκες κάτω από τις οποίες το μοντέλο έχει βαθμονομηθεί.**



# Αβεβαιότητα παραμέτρων

- Ορισμένες παράμετροι αντιμετωπίζονται ως σταθερές, ενώ στην πραγματικότητα περιγράφουν χρονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη.

  ⇨ Εγγενής αβεβαιότητα που χαρακτηρίζει όλες τις τυχαίες μεταβλητές

- Κατά τη βαθμονόμηση, διαφορετικά δείγματα και διαφορετικά κριτήρια οδηγούν σε διαφορετικά σύνολα παραμέτρων.

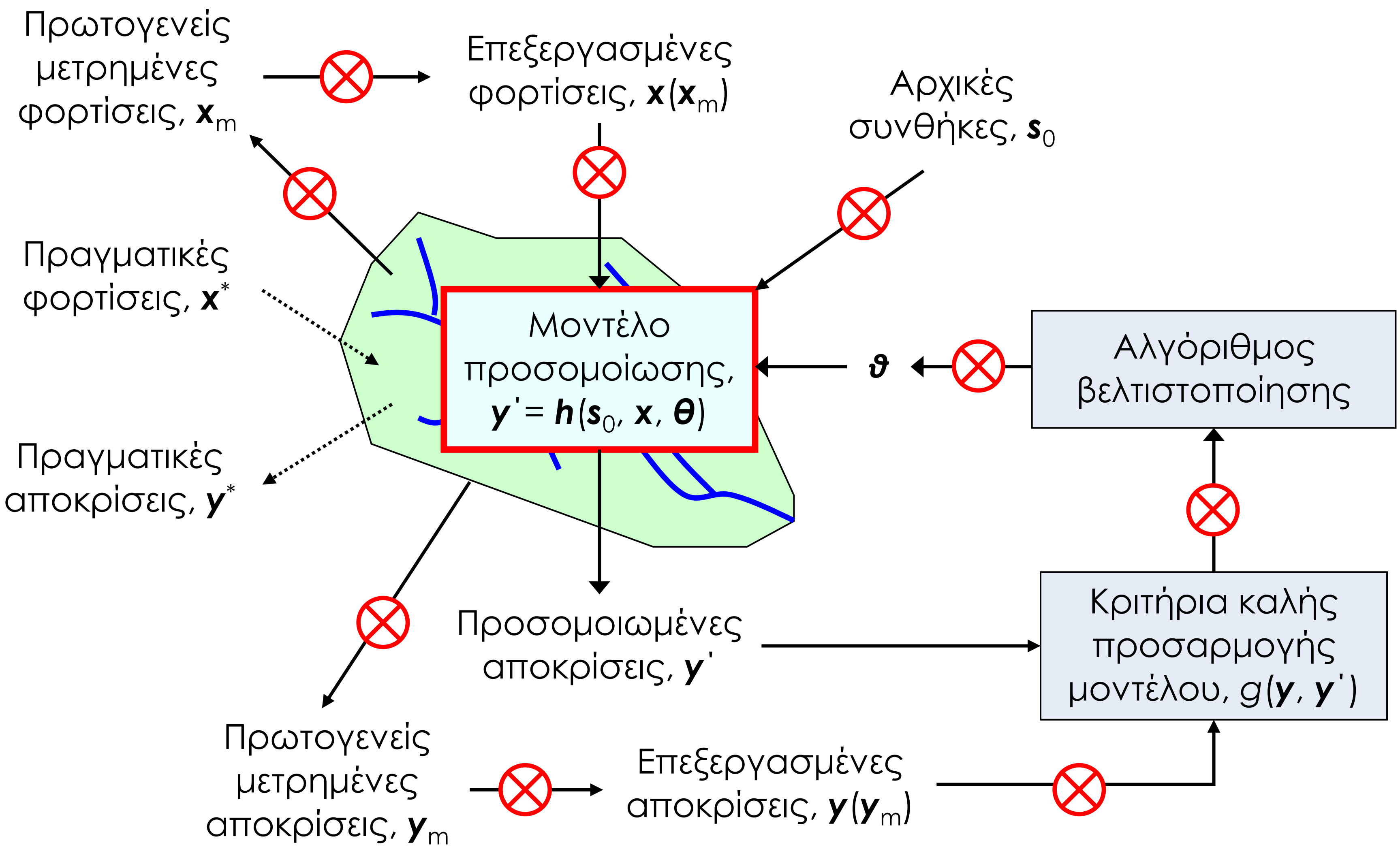
  ⇨ Διαφορετική συμπεριφορά μοντέλου, αποτελέσματα και προγνώσεις

- Διαφορετικά σύνολα παραμέτρων αποδίδουν παρόμοια επίδοση στη βελτιστοποίηση (συχνό στα υδρολογικά μοντέλα)

  ⇨ Μεγάλη αβεβαιότητα ως προς την πρακτική χρήση του μοντέλου ως εργαλείου λήψης αποφάσεων ή προγνώσεων

- Όλες οι πηγές σφαλμάτων και αβεβαιότητες του μοντέλου αλληλεπιδρούν κατά τρόπο μη ελεγχόμενο στη διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων (βαθμονόμηση).

# Η βαθμονόμηση ως υπολογιστικό «παιγνίδι» ανακύκλωσης σφαλμάτων και αβεβαιοτήτων




Ευστρατιάδης, 2008

# Αβεβαιότητα λόγω εξωτερικών αλλαγών

- **Αλλαγή του συστήματος λόγω εξωτερικών παραγόντων** (π.χ. αύξηση πληθυσμού και άρα αύξηση της ζήτησης νερού)
  - Το τρέχον μοντέλο και η ρύθμισή του αντιπροσωπεύουν τις νέες συνθήκες; Αν όχι απαιτείται προσαρμογή στα νέα δεδομένα.
- **Αλλαγή στους στόχους, στις προτεραιότητες και στις αποφάσεις** (π.χ. αλλαγή κανόνων λειτουργίας φραγμάτων, ενσωμάτωση περιβαλλοντικών κανόνων (οικολογική παροχή), αλλαγή κανόνων καταμερισμού νερού)
  - Απαιτείται προσαρμογή των μέτρων επίδοσης και των κριτηρίων (στοχικών συναρτήσεων) στα νέα δεδομένα.
- **Οι μελλοντικές επιθυμίες και ανάγκες δεν ταυτίζονται με τις σημερινές**
  - Απαίτηση για εύρωστες και βιώσιμες λύσεις (αειφορική ανάπτυξη)

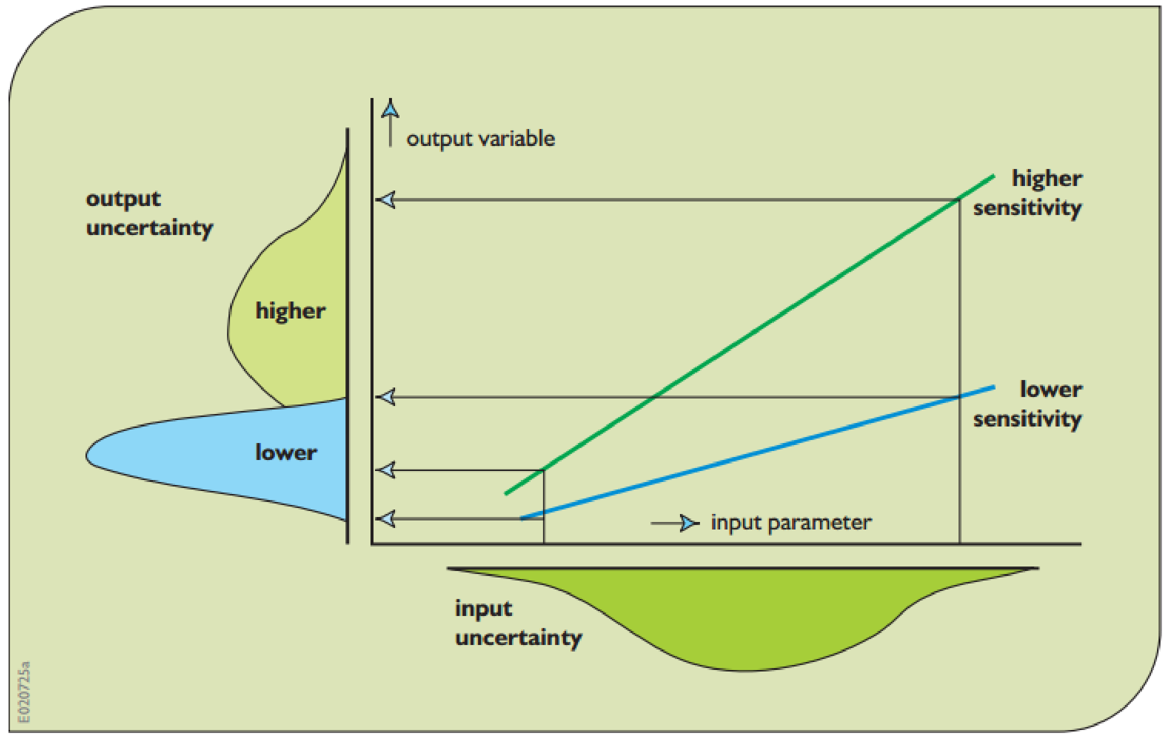
**Αβεβαιότητα ως προς το πώς θα αντιδράσει το σύστημα στις νέες συνθήκες και αλλαγές.**

# Ανάλυση αβεβαιότητας

- **Στόχος:** η απόδοση κάποιας πιθανότητας σε κάθε γεγονός/απόκριση του μοντέλου (ανάλυση πιθανοτικής συμπεριφοράς μεταβλητών)

**Αντιμετώπιση εισόδων και εξόδων ως τυχαίων μεταβλητών**

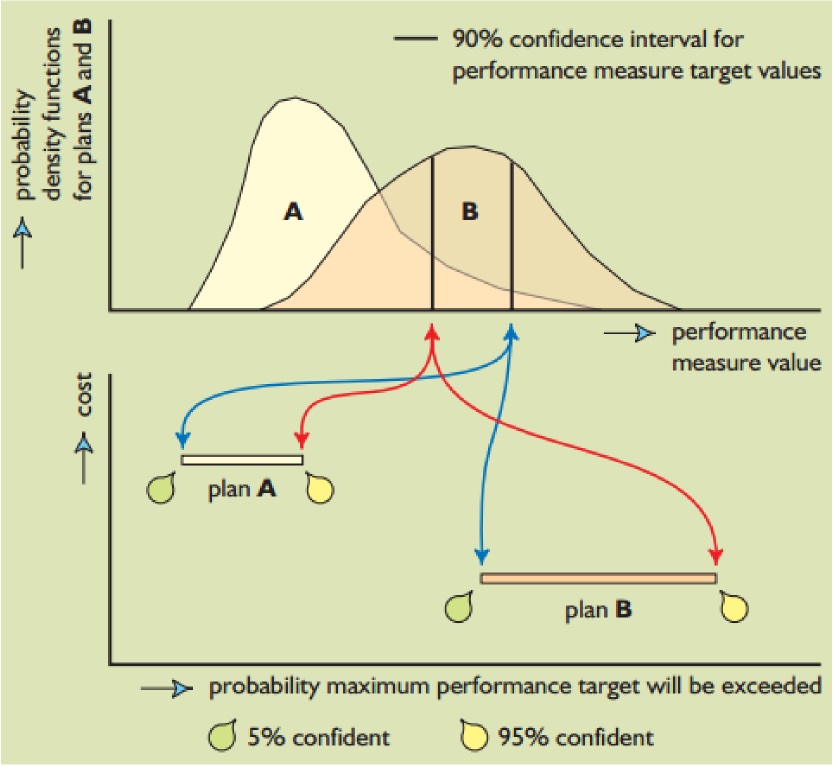
**Βασικό ερώτημα:** Ποιές οι πιθανοτικές κατανομές των παραμέτρων εξόδου για συγκεκριμένες πιθανοτικές κατανομές δεδομένων εισόδου?

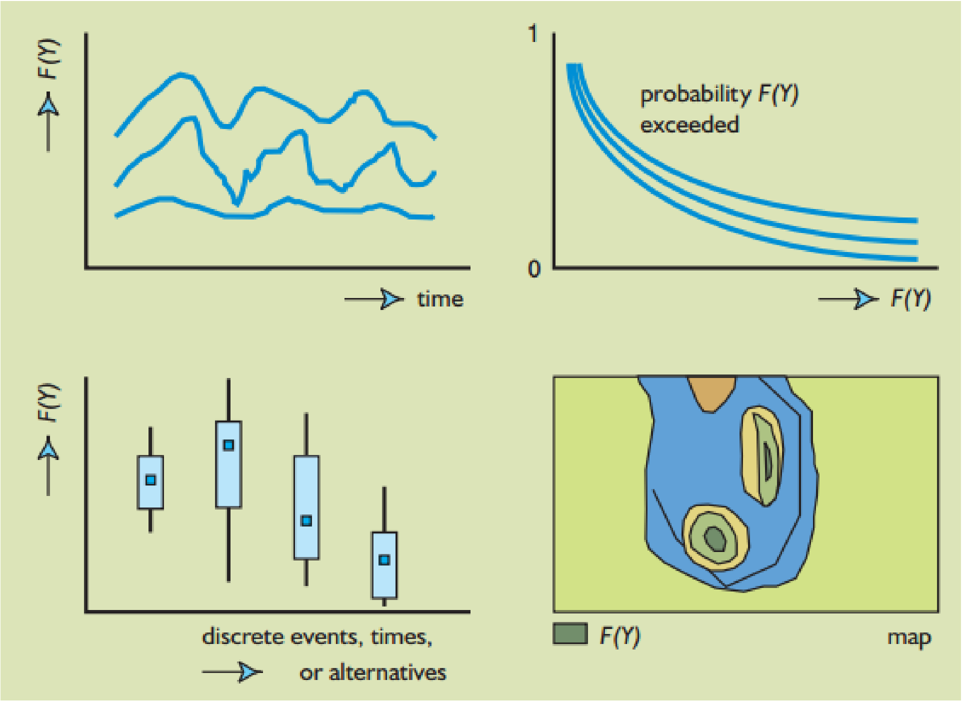



Χρήση **πιθανοτήτων και στατιστικής** για (α) την **ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας**, (β) **τεκμηρίωση αποφάσεων** και (γ) **εκτέλεση προβλέψεων για μελλοντικά γεγονότα**

# Ποσοτικοποίηση αβεβαιότητας

- **Αρκεί ένα νούμερο ή ένα εύρος τιμών?**
- **Απαραίτητη η ταυτόχρονη παρουσίαση ποσοτικών και ποιοτικών στοιχείων (π.χ. Ποιές οι συνέπειες που θα έχει η μείωση της αξιοπιστίας ενός συστήματος ύδρευσης?)**



# Η έννοια της στοχαστικής προσομοίωσης (μέθοδος Monte Carlo)

- Η ***μέθοδος Monte Carlo (ή μέθοδος στοχαστικής προσομοίωσης)*** είναι μια αριθμητική μέθοδος που στηρίζεται σε **επαναλαμβανόμενες τυχαίες δειγματοληψίες** για την επίλυση ενός προβλήματος (μελέτη συμπεριφοράς συστήματος), όταν δεν υπάρχει αναλυτική λύση.

- Αναπτύχθηκε από τον μαθηματικό Stanislaw Ulam (1946), στα πλαίσια του προγράμματος Manhattan, υπό την καθοδήγηση του Robert Oppenheimer.

- Τεκμηριώθηκε επιστημονικά με την κοινή δημοσίευση του Ελληνο-Αμερικανού μαθηματικού Nicolas Metropolis και του Ulam (1949).

- Σε προβλήματα υδατικών πόρων, η στοχαστική προσομοίωση άρχισε να χρησιμοποιείται από τη δεκαετία του 1970 (τα πρώτα βήματα έγιναν τη δεκαετία του 1950 – Barnes, 1954)

# Αριθμητική ολοκλήρωση

- Κατά την αριθμητική ολοκλήρωση, το ολοκλήρωμα συνάρτησης μιας μεταβλητής στο διάστημα [*a*, *b*], σύμφωνα με τη μέθοδο του τραπεζίου, προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$$

όπου *n* ένας θετικός ακέραιος, $\Delta x = (b - a)/2n$ το μήκος των διαστημάτων για τα ακραία σημεία ($i = 0$ και $n$) και $\Delta x = (b - a)/n$ για τα ενδιάμεσα και $x_i = a + i\Delta x$.

- Αντίστοιχα, για την ολοκλήρωση συνάρτησης *s* μεταβλητών, στο διάστημα $I^s = [0, 1]^s$ θα ισχύει:

$$\int_{I^s} f(x)dx \cong \sum_{i_1=0}^{n} \dots \sum_{i_s=0}^{n} \Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_s} f\left(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\right)$$

- Σχηματίζεται ορθογώνιος κάναβος, με πλήθος κόμβων ίσο με $N = (n+1)^s$
- **Το υπολογιστικό σφάλμα είναι συνάρτηση της διάστασης *s*, $O(n^{-2}) = O(N^{-2/s})$**
- **Για δεδομένο σφάλμα, το πλήθος κόμβων *N* αυξάνει εκθετικά με τη διάσταση *s***

# Αριθμητική ολοκλήρωση Monte Carlo [1]

- Έστω ότι ζητείται το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 g(x)dx$

- Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αρκεί να βρούμε μια τ.μ. $\underline{x}$ της οποίας η μέση τιμή θα είναι ίση με το ολοκλήρωμα της $g(x)$.

- Έστω $\underline{x}$ τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο [0, 1] με σ.π.π $f(x)$. Η αναμενόμενη τιμή της $g(\underline{x})$ στο διάστημα [0, 1] θα είναι:

$$E_X[g(\underline{x})] = \int_0^1 g(x)f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$$

- Έστω ότι λαμβάνουμε τυχαίο δείγμα $x_i$, $i$=1, …,$n$ από ομοιόμορφη κατανομή στο [0, 1]. Από τον **νόμο των μεγάλων αριθμών** θα ισχύει:

$$E_X[g(\underline{x})] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

- Άρα το ολοκλήρωμα θα προσεγγίζεται μέσω τυχαίων δειγματοληψιών από τη σχέση:

$$\widehat{I_n} = \int_0^1 g(x)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

**Τυχαία επιλογή *n* κόμβων με συντελεστές βάρους 1/*n*.**

# Αριθμητική ολοκλήρωση Monte Carlo [2]

- Το προσεγγιστικό ολοκλήρωμα είναι και αυτό τ.μ. με διασπορά που εκτιμάται από το τυχαίο δείγμα ως:

$$v_n(\widehat{I_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(g(x_i) - (\widehat{I_n}))^2$$

- Το **υπολογιστικό σφάλμα** της μεθόδου είναι $\sigma_g n^{-1/2}$, όπου $\sigma_g$ η τυπική απόκλιση της συνάρτησης.

- **Το υπολογιστικό σφάλμα είναι ανεξάρτητο της διάστασης s *και ελαττώνεται με ρυθμό* $n^{-1/2}$**

- **Για s > 4, η ολοκλήρωση Monte Carlo είναι προτιμότερη από την αριθμητική**

- **Για s > 20, η ολοκλήρωση Monte Carlo είναι η μόνη εφικτή**

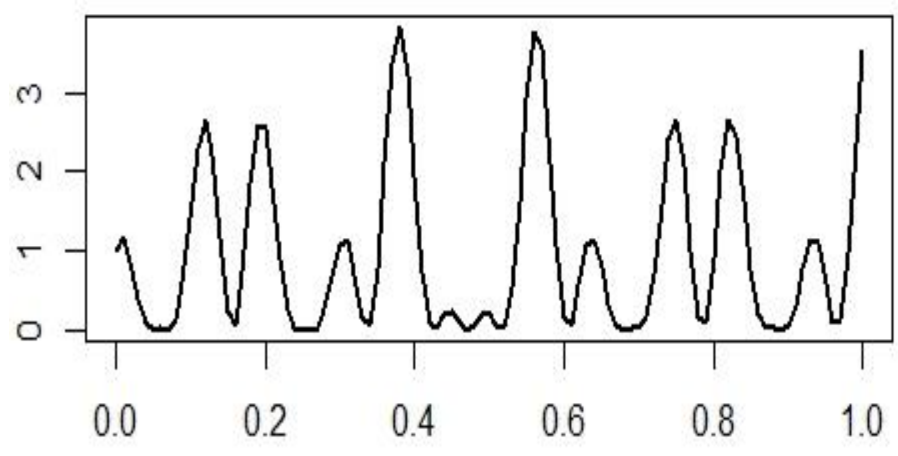
**Αλγόριθμος ολοκλήρωσης Monte Carlo**

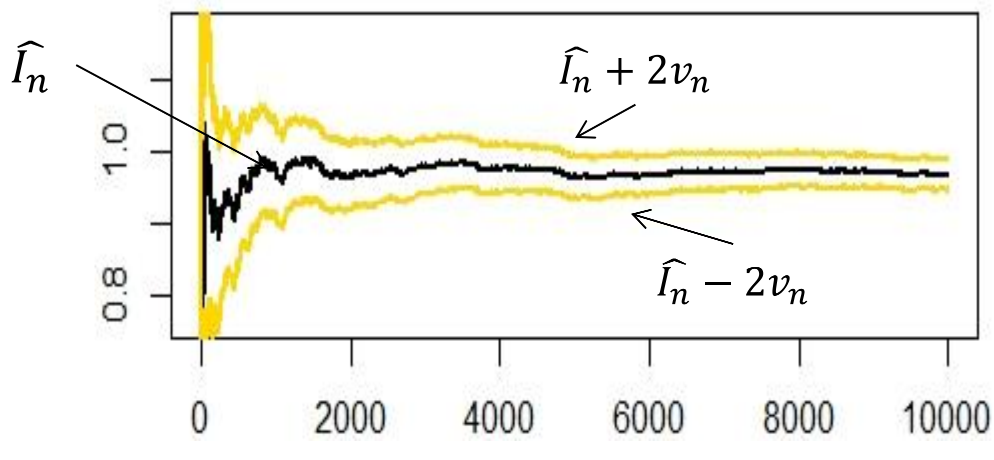
- Παράγουμε $n$ τυχαίους $x_1, x_2, \ldots, x_n \sim U(0, 1)$
- Υπολογίζουμε την $g(x)$ σε κάθε σημείο $x_i$
- Υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$

# Αριθμητική ολοκλήρωση Monte Carlo [3]

- Να υπολογιστεί μέσω Monte Carlo δειγματοληψίας το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 [\cos(50x) + \sin(20x)]^2 dx$$

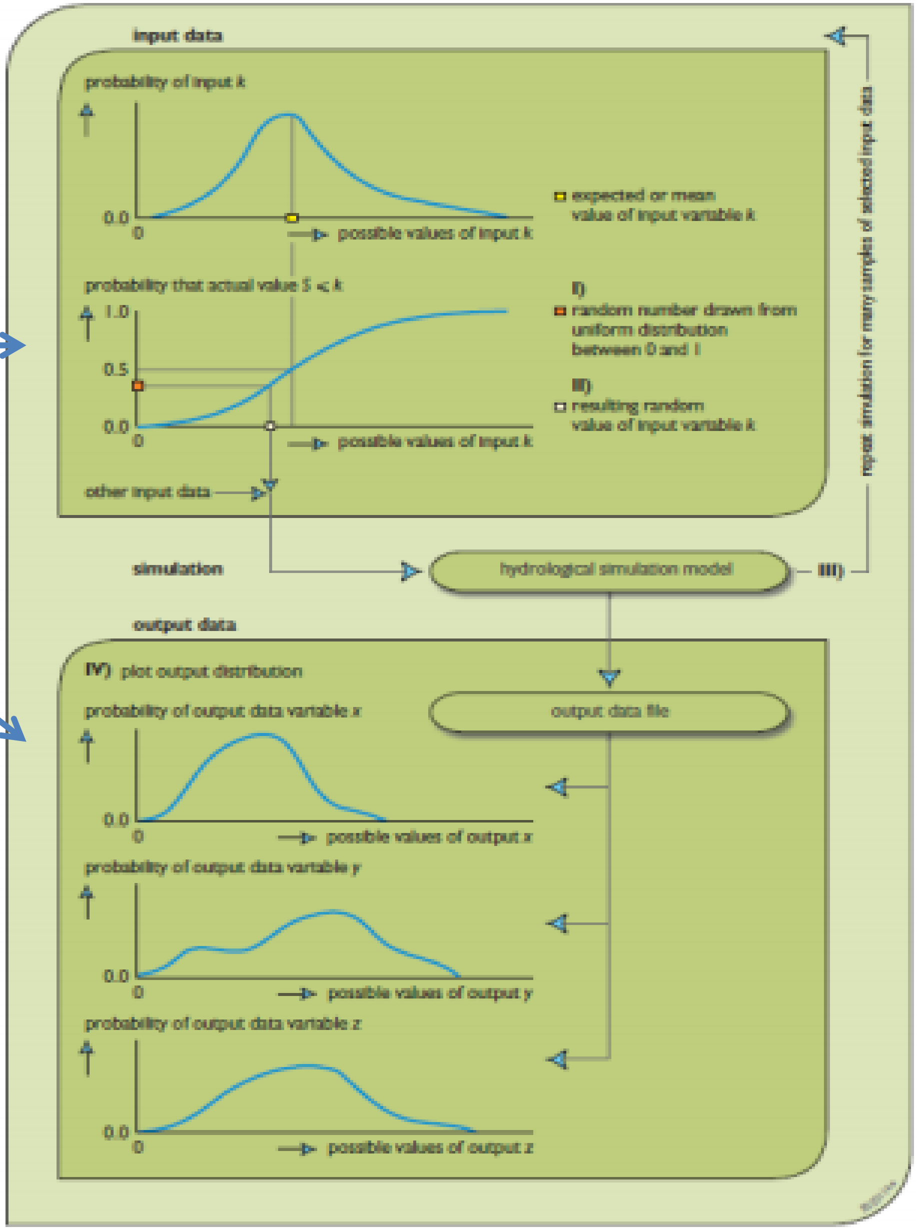



Πλήθος τυχαίων σημείων n

# Προσομοίωση Monte Carlo και αβεβαιότητα μοντέλων

- **Σε κάθε επανάληψη:**
  - Οι παράμετροι εισόδου επιλέγονται τυχαία από συγκεκριμένη κατανομή **(πώς έχει προκύψει η κατανομή;)**
  - Υπολογίζονται οι έξοδοι του μοντέλου και τα μέτρα επίδοσης
- Η διαδικασία επαναλαμβάνεται πολλές φορές και προκύπτει η **εμπειρική κατανομή των παραμέτρων εξόδου.**
- **Διαχείριση υδρολογικής αβεβαιότητας:** χρήση συνθετικών χρονοσειρών από στοχαστικό μοντέλο προσομοίωσης



# Monte Carlo και ορθολογική μέθοδος

- **Ορθολογική μέθοδος**

  Εκτίμηση πλημμυρικής αιχμής με την προϋπόθεση ότι σε βροχές που παρουσιάζουν ομοιόμορφη ένταση και κατανομή στη λεκάνη, η μέγιστη απορροή εμφανίζεται όταν στην έξοδο της λεκάνης φθάσει νερό από όλα τα σημεία της.

  - Για την εμφάνιση μέγιστης αιχμής θα πρέπει η διάρκεια βροχόπτωσης να είναι ίση με το χρόνο συγκέντρωσης της λεκάνης.

- **Εκτίμηση πλημμυρικής αιχμής:**

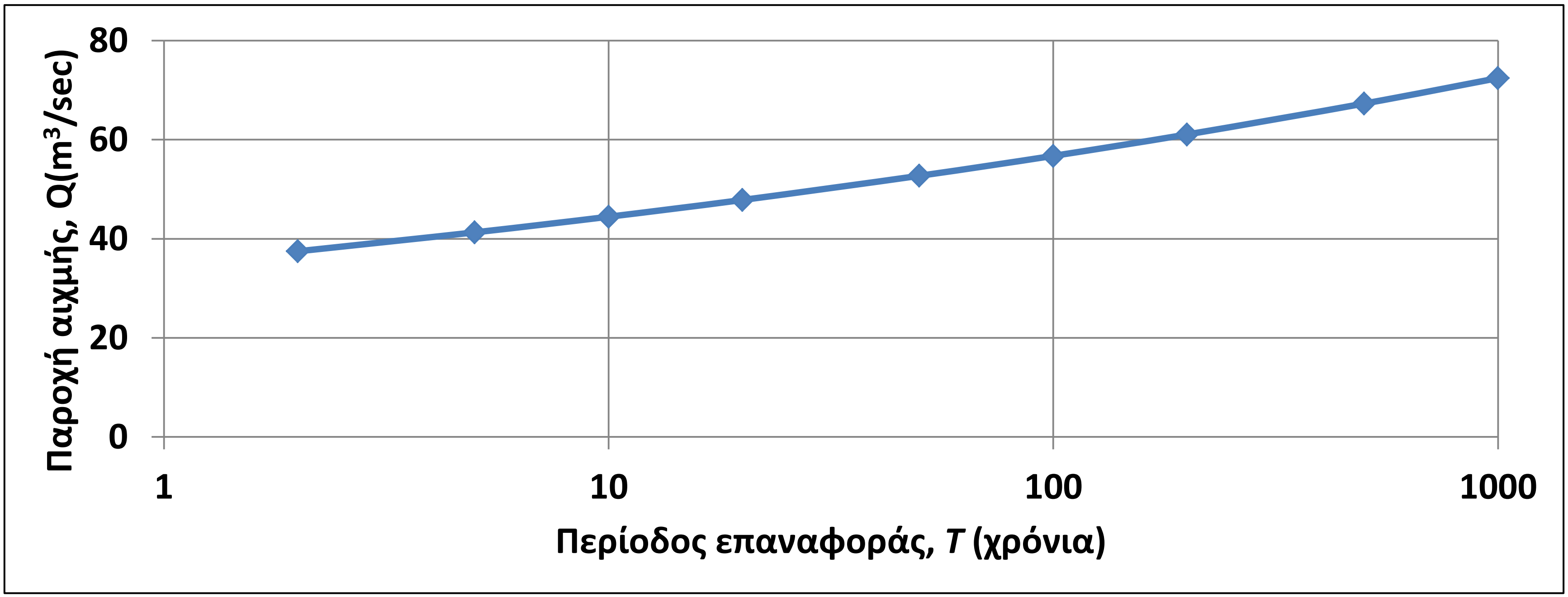
$$Q = 0.278 * c * i * A$$

  όπου $Q$(m$^3$/s): παροχή αιχμής, $c$: συντελεστής απορροής, $i$(mm/hr): ένταση βροχής για χρόνο συγκέντρωσης $t_c$, $A$(km$^2$): επιφάνεια λεκάνης.

- **Κλασσική (ντετερμινιστική) προσέγγιση:**
  - Επιλογή συγκεκριμένης τιμής για τον συντελεστή απορροής $c$ (π.χ. πίνακες ΟΜΟΕ-ΑΣΥΕΟ)
  - Εκτίμηση χρόνου συγκέντρωσης $t_c$ (π.χ. σχέσεις Giandotti, Kirphic, SCS)
  - Υπολογισμός έντασης βροχής $i$ (από όμβριες καμπύλες για δεδομένη περίοδο επαναφοράς $T$ και για διάρκεια $d = t_c$)
  - Εκτίμηση μιας παροχής αιχμής $Q$ για κάθε περίοδο επαναφοράς $T$

# Παράδειγμα: ορθολογική μέθοδος

- Να εκτιμηθεί με την ορθολογική μέθοδο η παροχή αιχμής που αντιστοιχεί σε περιόδους επαναφοράς από $T$ = 2 έως 1000 χρόνια. Τα δεδομένα εισόδου είναι:
  - Επιφάνεια λεκάνης $A$ = 10 km$^2$
  - Μέσος χρόνος συγκέντρωσης: $t_c$ = 1.0 h (= $d$)
  - Μέσος συντελεστής απορροής: $c$ = 0.40
  - Όμβρια καμπύλη: $i = 36.1\ T^{0.106}\ (d+0.196)^{-0.794}$



# Αβεβαιότητες παραμέτρων

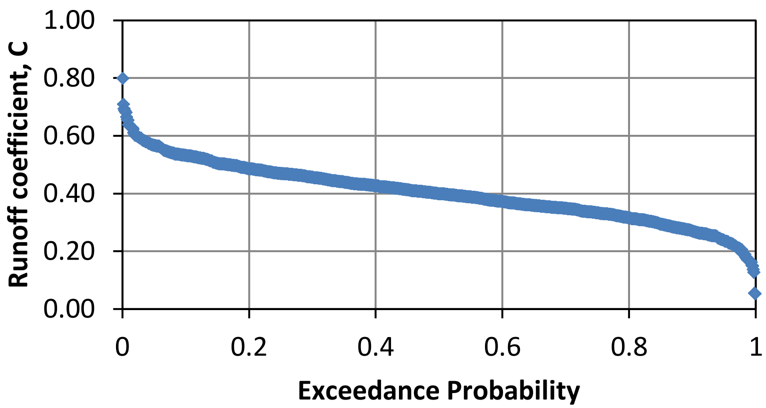
- **Χρόνος συγκέντρωσης $t_c$:** Διαφορετικές προσεγγίσεις αποδίδουν εντελώς διαφορετικές εκτιμήσεις της τιμής του $t_c$.
- **Ένταση βροχής *i*:** Προκύπτει από όμβριες καμπύλες οι οποίες αποτελούν απλοποιημένα στατιστικά μοντέλα που έχουν προκύψει από ιστορικά βροχομετρικά δεδομένα (συνήθως μικρού μήκους).
- **Συντελεστής απορροής c:** Προκύπτει από απλές εκτιμήσεις λαμβάνοντας υπόψη μόνο ένα μέρος των παραγόντων που τον διαμορφώνουν (ανάγλυφο, διηθητικότητα, φυτοκάλυψη).

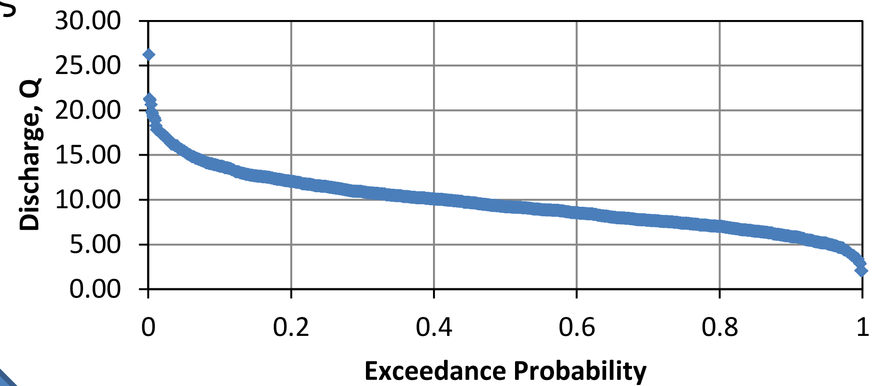
- Ανάλυση και **ποσοτικοποίηση των παραπάνω πηγών αβεβαιότητας** μέσω της αντιμετώπισης των παραμέτρων ως **τυχαίων μεταβλητών** με συγκεκριμένη πιθανοτική κατανομή
- Γνωρίζοντας την κατανομή της κάθε παραμέτρου μπορούμε να παράξουμε τυχαίους αριθμούς ώστε να κατασκευάσουμε την κατανομή των παροχών αιχμής για κάθε περίοδο επαναφοράς

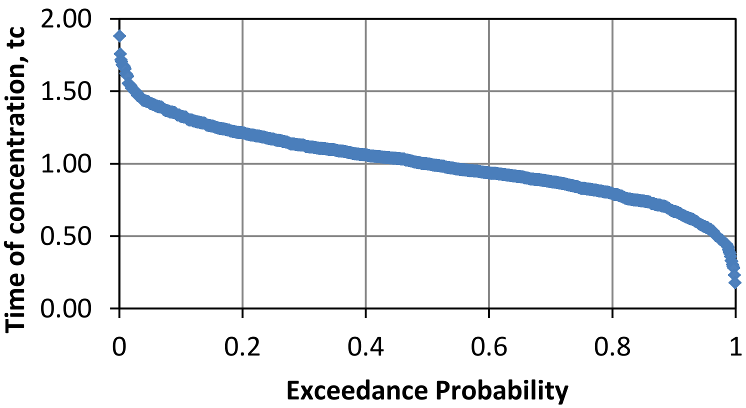
# Συνδυασμός MC και ορθολογικής μεθόδου

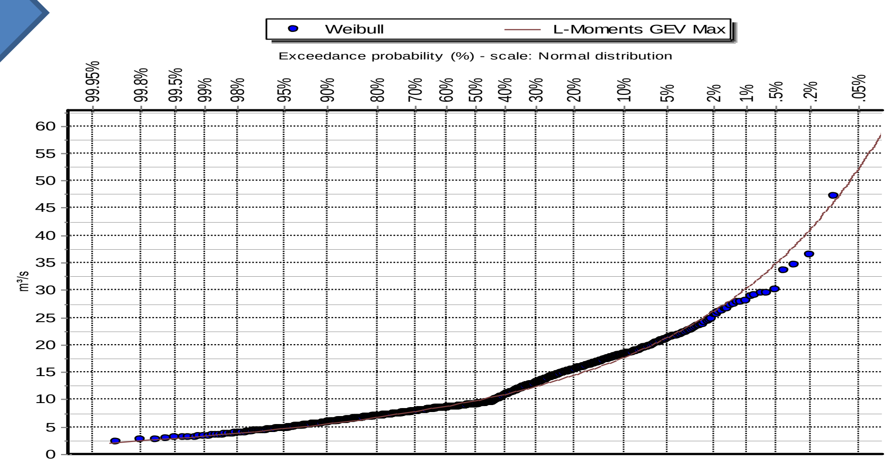
## ❑ Monte Carlo προσομοίωση:

- ➢ Παράμετροι από κανονική κατανομή , $c \sim N(0.40,\ 0.10)$ και $t_c \sim N(1.0,\ 0.25)$
- ➢ Για δεδομένη περίοδο επαναφοράς $T$, παράγονται με τυχαίο τρόπο 1000 σετ παραμέτρων $c$ και $t_c$, και κατασκευάζεται η εμπειρική κατανομή της παροχής $Q$
- ➢ Για κάθε περίοδο επαναφοράς $T$ προσαρμόζεται μια στατιστική κατανομή για την προσομοίωση των παροχών αιχμής

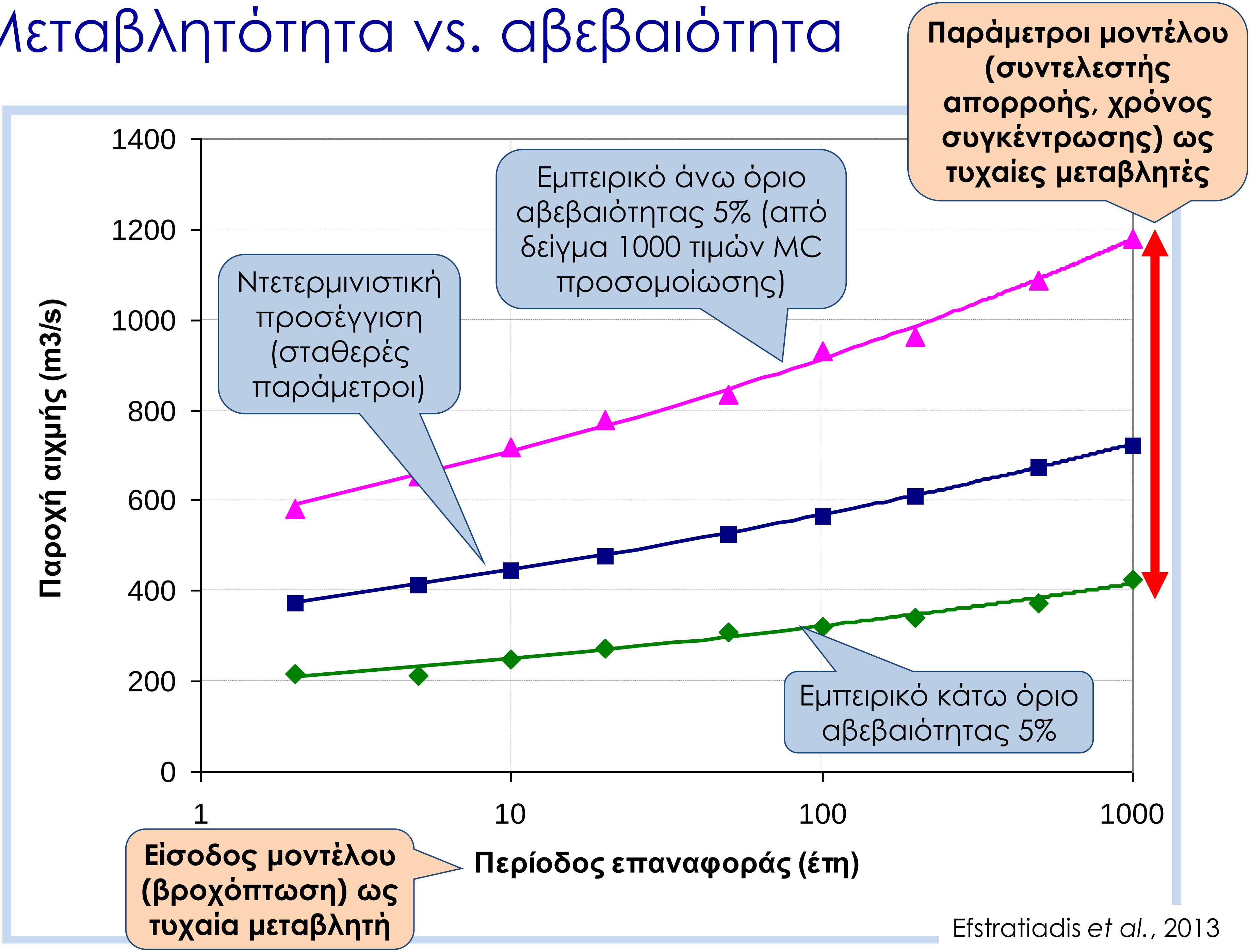


# Μεταβλητότητα vs. αβεβαιότητα




Efstratiadis *et al.*, 2013

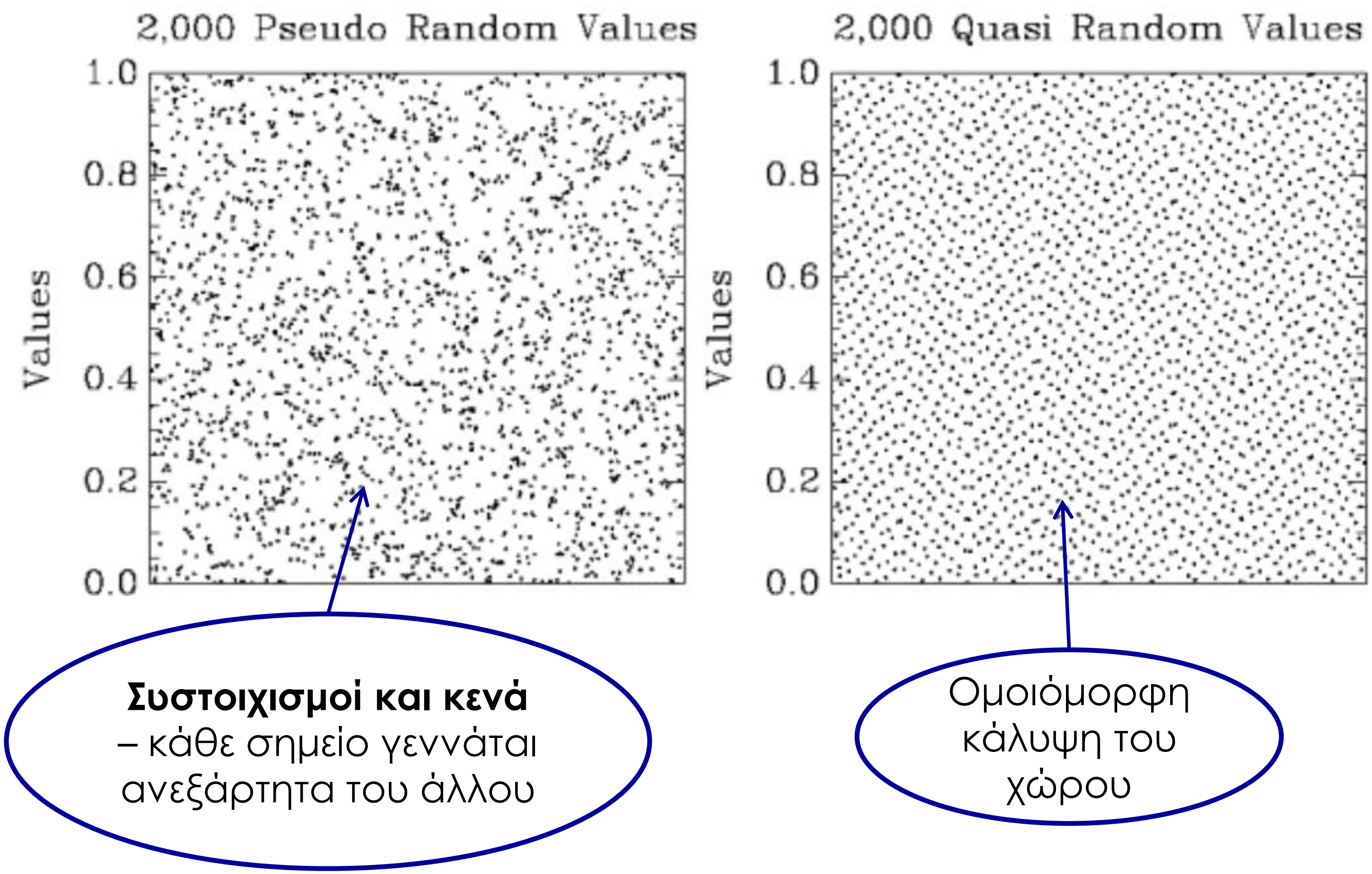
# Αδυναμίες κλασσικών τεχνικών Monte Carlo

- Παραγωγή τιμών (ή συνδυασμούς τιμών) μη συνεπείς («λογικές») με τη φύση του προβλήματος
  - Απαίτηση για συνεχή έλεγχο των τυχαίων σημείων με βάση τους περιορισμούς του προβλήματος και απόρριψη των μη συνεπών συνόλων
- **Μεγάλος υπολογιστικός φόρτος** για την παραγωγή μεγάλου πλήθους τυχαίων σημείων και τον υπολογισμό των αποτελεσμάτων με χρήση του μοντέλου
- Για μικρά δείγματα, **κίνδυνος κατασκευής μη αντιπροσωπευτικής εμπειρικής κατανομής** για τα αποτελέσματα (συγκέντρωση μεγάλου όγκου πληροφορίας για ένα μέρος της κατανομής και λίγης πληροφορίας για ένα άλλο) **– clustering of input parameters –**

**Quasi-Monte Carlo Methods: Συνδυασμός Monte Carlo προσομοίωσης με προσδιοριστικές τεχνικές για την επιτάχυνση της διαδικασίας**

# Quasi-Monte Carlo μέθοδοι

- Οι **quasi-Monte Carlo** τεχνικές παρέχουν **μεγαλύτερη ομοιομορφία** από μια τυχαία ακολουθία και συνεπώς **μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης**
- Χρησιμοποιούν **quasi-τυχαίους αριθμούς**, που είναι **ντετερμινιστικοί**, με συσχετίσεις μεταξύ των σημείων για την ομοιόμορφη κάλυψη του χώρου



# Latin Hypercube δειγματοληψία

- **Στρωματοποιημένη (stratified) δειγματοληψία** χωρίς επανατοποθέτηση
- Ο αλγόριθμος «θυμάται» τις περιοχές (διαστήματα πιθανοτήτων) που έχει γίνει παραγωγή τυχαίων αριθμών και δεν τις ξαναχρησιμοποιεί.
- Εγγυάται πιστότερη αναπαραγωγή της κατανομής, με μικρότερο αριθμό επαναλήψεων από την κλασική μέθοδο Monte Carlo.

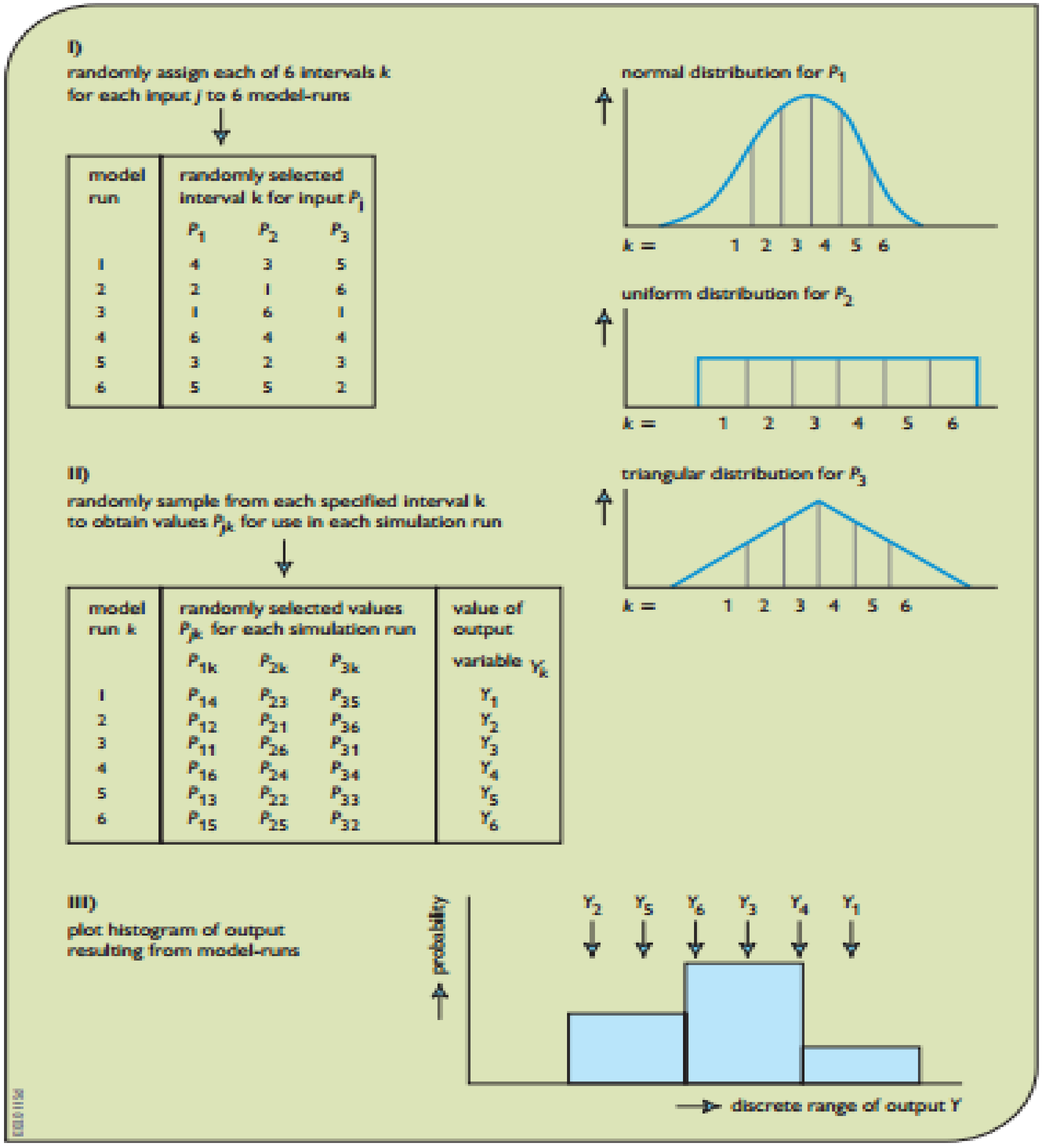
**Αλγόριθμος Latin Hypercube Sampling (LHS)**

- Η κατανομή της παραμέτρου εισόδου χωρίζονται σε *n* ισοπίθανα τμήματα, όπου *n* το πλήθος των επαναλήψεων που θα πραγματοποιηθούν
- Επιλέγεται με τυχαίο τρόπο ένα διάστημα ($n_{k-1}$, $n_k$) από τα συνολικά n διαθέσιμα
- Εκτελείται τυχαία δειγματοληψία από το επιλεγμένο διάστημα
- Η διαδικασία επαναλαμβάνεται αφαιρώντας τα διαστήματα που έχουν χρησιμοποιηθεί ήδη

McKay et al, 1979

# Multivariate Latin Hypercube Sampling

**Στην περίπτωση πολυμεταβλητής ανάλυσης γίνεται ομαδοποίηση των παραμέτρων με τυχαίο τρόπο για τον υπολογισμό της κατανομής των παραμέτρων εξόδου.**



# Αναφορές και περαιτέρω πηγές [1]


- Box, G.E.P., and G.M. Jenkins, Time series analysis, forecasting and control, Holden Day, 1970.
- Bras, R. L., and I. Rodriguez-Iturbe, Random functions and hydrology, Addison-Wesley, USA, 1985.
- Efstratiadis, A., A. D. Koussis, D. Koutsoyiannis, and N. Mamassis, Flood design recipes vs. reality: can predictions for ungauged basins be trusted?, Natural Hazards and Earth System Sciences, 14, 1417–1428, 2014.
- Efstratiadis, A., and D. Koutsoyiannis, One decade of multiobjective calibration approaches in hydrological modelling: a review, Hydrological Sciences Journal, 55(1), 58–78, 2010.
- Efstratiadis, A., I. Nalbantis, and D. Koutsoyiannis, Hydrological modelling of temporally-varying catchments: Facets of change and the value of information, Hydrological Sciences Journal, 60(7-8), 1438–1461, doi:10.1080/02626667.2014.982123, 2015.
- Feldman R. M., and Valdez-Flores C., Applied probability and stochastic processes, Boston, 1996
- Grigg, N. S., Water Resources Management, McGraw-Hill, New York, 1996.
- Hurst, H. E., Long term storage capacities of reservoirs, Trans. ASCE, 116, 776-808, 1951.
- Kottegoda, N. T., Stochastic Water Resources Technology, Macmillan Press, London, 1980.
- Koutsoyiannis, D., A brief introduction to probability, Department of Water Resources and Environmental Engineering – National Technical University of Athens, Athens, 2014.
- Koutsoyiannis, D., A Monte Carlo approach to water management (solicited), European Geosciences Union General Assembly 2012, Geophysical Research Abstracts, Vol. 14, Vienna, 3509, European Geosciences Union, 2012.
- Koutsoyiannis, D., and A. Economou, Evaluation of the parameterization-simulation-optimization approach for the control of reservoir systems, Water Resources Research, 39 (6), 1170, doi:10.1029/2003WR002148, 2003.
- Koutsoyiannis, D., Climate change, the Hurst phenomenon, and hydrological statistics, Hydrological Sciences Journal, 48 (1), 3–24, 2003.

# Αναφορές και περαιτέρω πηγές [2]


- Koutsoyiannis, D., Encolpion of stochastics: Fundamentals of stochastic processes, Department of Water Resources and Environmental Engineering – National Technical University of Athens, Athens, 2013. (http://itia.ntua.gr/en/docinfo/1317/)
- Koutsoyiannis, D., Reliability concepts in reservoir design, Water Encyclopedia, Vol. 4, Surface and Agricultural Water, J. H. Lehr and J. Keeley, 259–265, Wiley, New York, 2005.
- Koutsoyiannis, D., The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy, Hydrological Sciences Journal, 47(4), 573-595, 2002.
- Koutsoyiannis, D., A generalized mathematical framework for stochastic simulation and forecast of hydrologic time series, Water Resources Research, 36(6), 1519-1533, 2000.
- Loucks, D.P., E. van Beek, J.R. Stedinger, J.P.M. Dijkman, Water Resources Systems Planning and Management, An Introduction to Methods, Models and Applications, Studies and Reports in Hydrology, UNESCO Publishing, 680 pages, Paris, 2005.
- Mays, L. W., and Y.-K. Tung, Hydrosystems Engineering and Management, McGraw-Hill, New York, 1992.
- Papoulis, A., Probability and Statistics, Prentice-Hall, 1990.
- Ripley, B. D., Stochastic Simulation, Wiley, New York, 1987.
- Rippl, W., The capacity of storage reservoirs for water supply, Proc. Inst. Civil Eng., 71, 270-278, 1883.
- Robert, C. P., and G. Casella, Introducing Monte Carlo Methods with R, Springer, 2009.
- Ross, S. M., Introduction to probability and statistics for engineers and scientists, San Diego, 2000.
- Tsoukalas, I., P. Kossieris, A. Efstratiadis, and C. Makropoulos, Surrogate-enhanced evolutionary annealing simplex algorithm for effective and efficient optimization of water resources problems on a budget, Environmental Modelling and Software, 77, 122–142, 2016.

# Αναφορές και περαιτέρω πηγές [3]


- Ευστρατιάδης, Α., Μη γραμμικές μέθοδοι σε πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης υδατικών πόρων, με έμφαση στη βαθμονόμηση υδρολογικών μοντέλων, Διδακτορική διατριβή, 391 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Φεβρουάριος 2008.
- Κουτσογιάννης, Δ., Σημειώσεις Διαχείρισης Υδατικών Πόρων - Μέρος 1, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2007.
- Κουτσογιάννης, Δ., Σημειώσεις Στοχαστικών Μεθόδων στους Υδατικούς Πόρους, Έκδοση 4, 100 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2013.
- Κουτσογιάννης, Δ., και Θ. Ξανθόπουλος, Τεχνική Υδρολογία, Έκδοση 3, 418 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1999.

# Παράρτημα: Βασικά στοιχεία πιθανοτήτων και στατιστικής

# Τυχαία πειράματα και τυχαίες μεταβλητές

- **Τυχαίο πείραμα:** Λήψη διαφορετικών αποτελεσμάτων, ακόμα και όταν αυτό επαναλαμβάνεται κάτω από τις ίδιες συνθήκες κάθε φορά.

  ⇒ **Αβεβαιότητα ως προς την έκβαση του πειράματος**

  π.χ. ρίψη ζαριού, ρίψη νομίσματος, επιλογή φύλου από τράπουλα

- Το **σύνολο** των δυνατών αποτελεσμάτων καλείται **δειγματικός χώρος** Ω του τυχαίου πειράματος.

- **Θεωρία πιθανοτήτων:** απόδοση κάποιας πιθανότητας σε κάθε δυνατή έκβαση του πειράματος (ποσοτικοποίηση μέσω ενός αριθμού που λαμβάνει τιμές στο διάστημα [0, 1]).

- **Τυχαία μεταβλητή** (τ.μ.) $\underline{x}$ είναι μια **συνάρτηση** που αντιστοιχεί σε κάθε δυνατό αποτέλεσμα έναν πραγματικό αριθμό $x$. Αντιπροσωπεύει ταυτόχρονα το σύνολο του δειγματικού χώρου.

# Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας (Kolmogorov, 1933)

- Έστω $\Omega$ δειγματικός χώρος τυχαίου πειράματος. Σε κάθε ενδεχόμενο $A$ αναθέτουμε έναν αριθμό $P(A)$ τον οποίο αποκαλούμε ***πιθανότητα του ενδεχομένου*** $A$. Αυτός ο αριθμός επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιεί τις εξής τρεις συνθήκες:
  - $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο $A \in \Omega$
  - $P(\Omega) = 1$
  - αν $A \cap B = \{\emptyset\}$, δηλαδή Α και Β **ασυμβίβαστα** ενδεχόμενα, τότε:

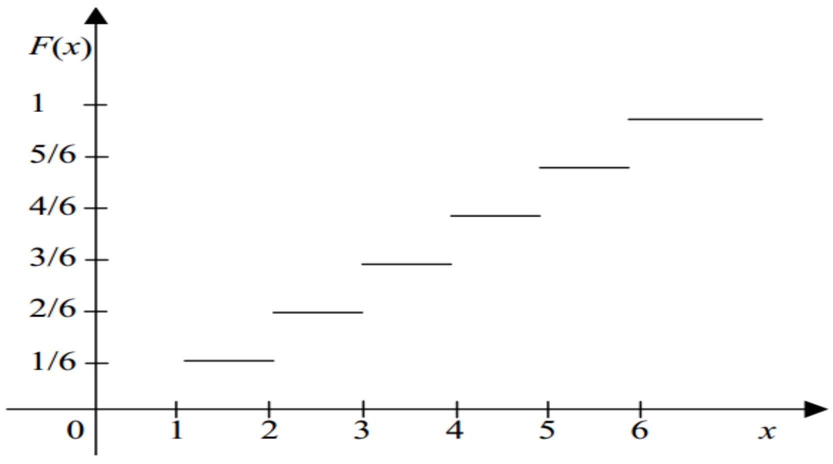
    $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- **Ο παραπάνω ορισμός δεν καθορίζει συγκεκριμένη έκφραση για τον υπολογισμό της πιθανότητας του ενδεχομένου *A*. Θέτει τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση P(*A*).**
- Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής:
  - $P(\emptyset) = 0$
  - $P(A') = 1 - P(A)$
  - Εάν $B \subseteq A$ τότε $P(A) \geq P(B)$
- Κανόνας της πρόσθεσης: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

# Συνάρτηση κατανομής

- **Συνάρτηση κατανομής (σ.κ.):**

$$F_{\underline{x}}(\mathrm{x}) = P\left(\underline{x} \leq \mathrm{x}\right)$$

**Πρακτικά:** Πιθανότητα η τ.μ. να είναι μικρότερη ή ίση της δεδομένης τιμής $x$.



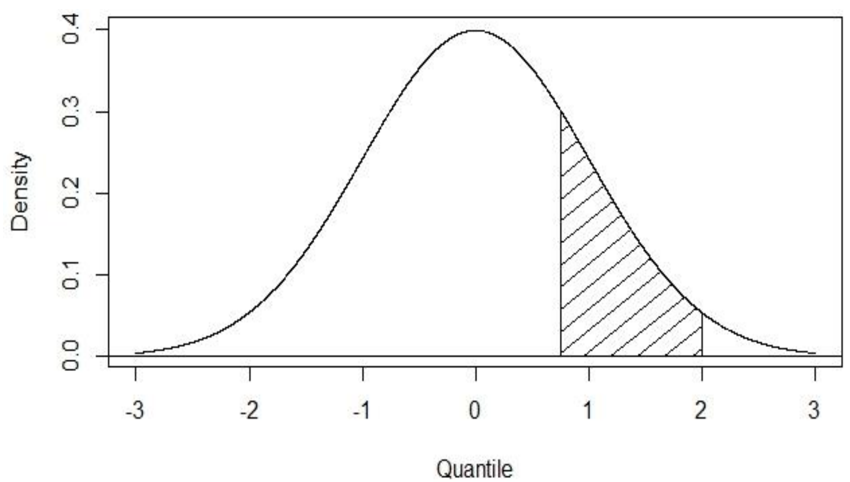

- **Πιθανότητα υπέρβασης:**

$$\overline{F}_{\underline{x}}(\mathrm{x}) = P\left(\underline{x} \geq \mathrm{x}\right) = 1 - F_{\underline{x}}(\mathrm{x})$$

- **Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας**

$$f_{\underline{x}}(x) = \frac{dF_{\underline{x}}(x)}{dx}$$

**Πρακτικά:** Πιθανότητα η διακριτή τ.μ. $\underline{\mathrm{x}}$ να λάβει τιμή ίση με x.



# Περίοδος επαναφοράς

- Ως **περίοδος επαναφοράς**, *T*, μιας δεδομένης τιμής x της τ.μ. $\underline{x}$ ορίζεται ο **μέσος** αριθμός χρονικών διαστημάτων που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών εμφανίσεων της τ.μ. με μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο της τιμής x.

$$T = \frac{1}{P(\underline{x} > x)} = \frac{1}{F_{1_{\underline{x}}}(x)} = \frac{1}{1 - F_{\underline{x}}(x)}$$

- **Διακινδύνευση** – πιθανότητα να παρατηρηθεί μέσα σε *n* έτη τιμή x της τ.μ. $\underline{x}$ με περίοδο επαναφοράς *T*.

$$R = 1 - (1 - \frac{1}{T})^{n}$$

**Βασική προϋπόθεση για την ισχύ των παραπάνω σχέσεων είναι η ύπαρξη στοχαστικής ανεξαρτησίας μεταξύ των γεγονότων.**

# Το ποσοστημόριο $x_p$

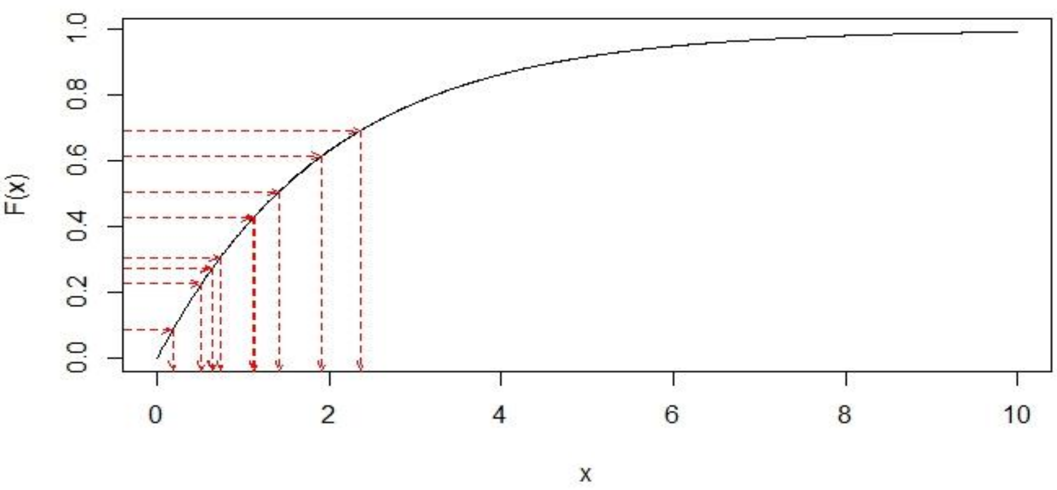
- Οποιοδήποτε σημείο $x_p$ τέτοιο ώστε:

$$P(\underline{x} < x_p) \leq p \leq P(\underline{x} \leq x_p)$$

  λέγεται *p*-ποσοστημόριο ή ποσοστιαίο σημείο της τ.μ. $\underline{x}$ ή της κατανομής της.

- Όταν η τ.μ. $\underline{x}$ είναι συνεχής, το *p*-ποσοστημόριο είναι κάθε σημείο $x_p$ που ικανοποιεί την εξίσωση $F_{\underline{x}}(x_p) = p \Longrightarrow x_p = F_{\underline{x}}^{-1}(p)$.

- Το *p*-ποσοστημόριο για $p = 0.50$ λέγεται διάμεσος, ενώ για $p = 0.25$ και $p = 0.75$ τα σημεία λέγονται πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.



# Στατιστική ανάλυση

- **Αντικείμενο στατιστικής ανάλυσης: Εξαγωγή συμπερασμάτων** για ένα πληθυσμό βάσει ενός δείγματος μετρήσεων ή παρατηρήσεων.

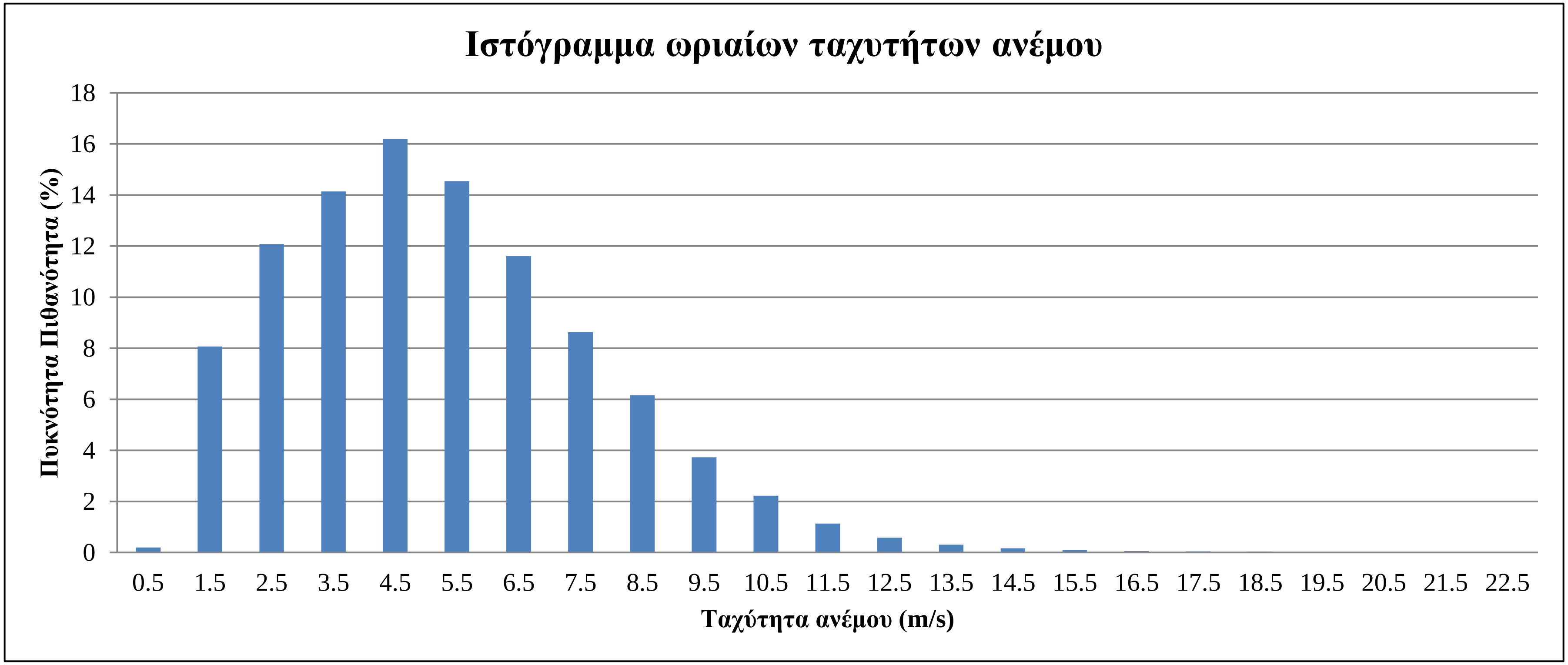
1. Λήψη δείγματος μεγέθους $N_Δ$ από πληθυσμό μεγέθους $N_Π$ ($N_Δ < N_Π$)
2. Επεξεργασία πληροφορίας – στατιστική ανάλυση
   - Δειγματικές ροπές (μέση τιμή, διασπορά, συντελεστής ασυμμετρίας και κύρτωσης)
   - Συνοπτικά χαρακτηριστικά διατεταγμένου δείγματος (ελάχιστη και μέγιστη τιμή, διάμεσος, άνω και κάτω τεταρτημόριο, διατεταρτημοριακό πλάτος)
   - Εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής και πιθανότητας
3. Προσαρμογή θεωρητικών κατανομών
   - Επιλογή κατάλληλης κατανομής και εκτίμηση των παραμέτρων της
   - Έλεγχος καλής προσαρμογής
4. Εξαγωγή συμπερασμάτων για τον πληθυσμό
   - Τι πιθανότητα έχει η εμφάνιση κάποιου γεγονότος που δεν ανήκει στο δείγμα?
   - Σε τι τιμή αντιστοιχεί μια δεδομένη πιθανότητα?

# Ιστογράμματα συχνοτήτων

- Κλιμακωτή συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση:

$$\widehat{f_X}(x) = \frac{n_i}{n\Delta}, \qquad c_i \leq x \leq c_{i+1}\ \gamma\iota\alpha\ i = 1, \dots, k$$

όπου $k$ το πλήθος διαστημάτων, μεγέθους Δ, στα οποία έχει χωριστεί το δείγμα.



# Εμπειρική συνάρτηση κατανομής

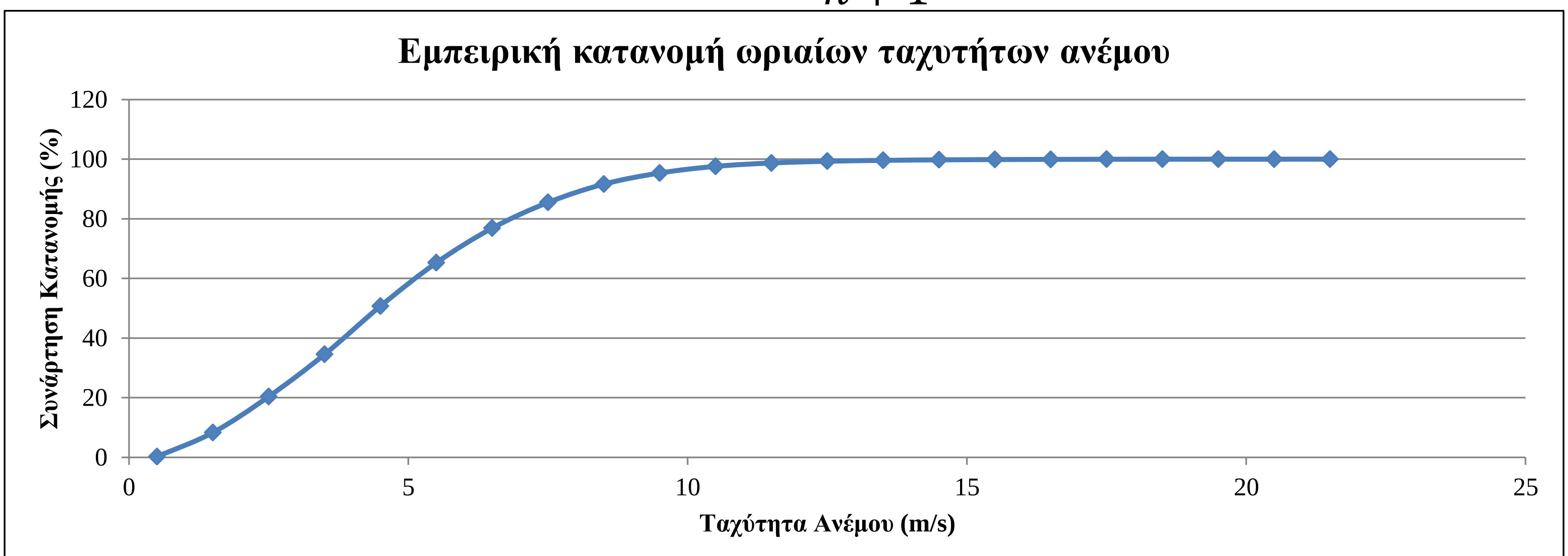
- Κλιμακωτή συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση:

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{n_{\mathrm{x}}}{n}$$

όπου $n_X$ το πλήθος των σημείων του δείγματος που είναι μικρότερα ή ίσα με την τιμή x, και *n* το συνολικό πλήθος του δείγματος.

- Για την αμερόληπτη εκτίμηση της πιθανότητας υπέρβασης χρησιμοποιείται συχνά η κατάταξη Weibull, σύμφωνα με την οποία:

$$\widehat{F_X}(x) = \frac{n_x}{n+1}$$



# Τυχαίοι αριθμοί

- Μια ακολουθία αριθμών $x_i$ λέγεται **ακολουθία τυχαίων αριθμών** δεδομένης κατανομής $F(x)$ αν αποτελεί δείγμα της τ.μ. $\underline{x}$, η οποία έχει συνάρτηση κατανομής $F(x)$.

- **Άμεση λύση:** Αν $F^{-1}(\ )$ η αντίστροφη συνάρτηση της σ.κ. $F(x)$, και $u_i$ διαδοχικοί ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα (0, 1), τότε οι αριθμοί

$$w_i = F^{-1}(u_i)$$

  αποτελούν όρους ακολουθίας τυχαίων αριθμών με σ.κ. $F(x)$.

  - Εφαρμογή εφόσον υπολογίζεται αναλυτικά η $F^{-1}(\ )$.

- Η γέννηση των τυχαίων αριθμών γίνεται μέσω ενός αλγορίθμου, συνήθως αναδρομικού, που μπορεί να παράγει οσουσδήποτε όρους τυχαίας ακολουθίας.
  - Συνήθως, ντετερμινιστική διαδικασία που εξαρτάται από μια αρχική τιμή **(σπόρος αλγορίθμου)**. Λόγω αυτού οι τυχαίοι αριθμοί συχνά ονομάζονται «ψευδοτυχαίοι».
  - Η γεννήτρια μπορεί να παράγει μεγάλο αλλά σίγουρα πεπερασμένο πλήθος τυχαίων αριθμών. Πάνω από κάποιο όριο γίνεται επανάληψη των ίδιων αριθμών, δηλαδή η ακολουθία είναι σίγουρα **περιοδική**.

# Γεννήτριες «ψευδοτυχαίων» αριθμών

- Η βάση των περισσότερων γεννητριών τυχαίων αριθμών είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0, 1].
  - Γεννώνται οι ακέραιοι αριθμοί από τον αναδρομικό αλγόριθμο:

    $$q_i = (kq_{i-1} + c)\ mod\ m$$

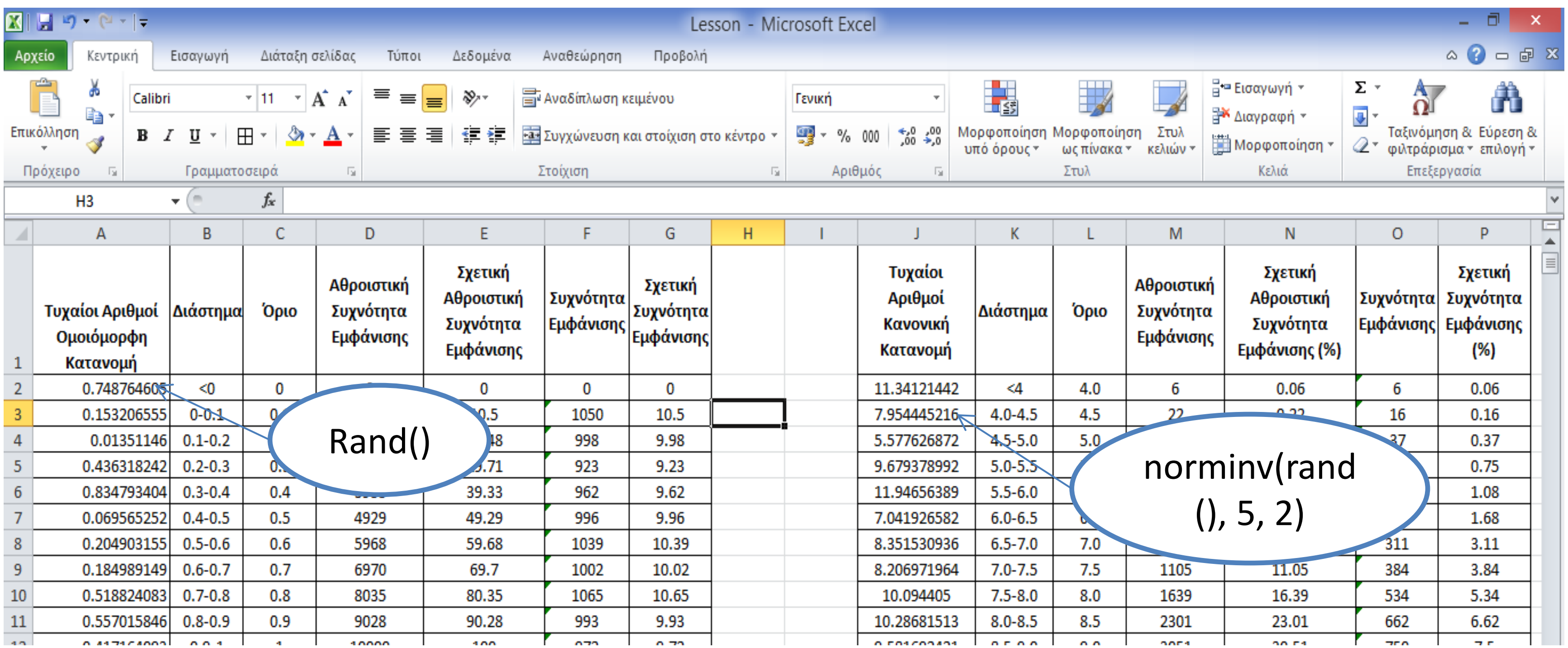
    όπου *k*, *c* και *m* κατάλληλες ακέραιες σταθερές (π.χ. $k = 69069$, $c = 1$, $m = 2^{32}$ ή $k = 7^5$, $c = 0$, $m = 2^{31} - 1$ (Ripley, 1987, σελ. 39), οι αποτελούν τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφα κατανεμημένους στο διάστημα [1, *m* – 1].
  - Υπολογίζεται η ακολουθία τυχαίων αριθμών $u_i$ με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0, 1] από τον τύπο:

    $$u_i = \frac{q_i}{m}$$

- Στη βιβλιογραφία υπάρχει πλήθος μεθοδολογιών για τη παραγωγή τυχαίων αριθμών από διάφορες κατανομές
- Ένας πιο πρόσφατος και αποτελεσματικός αλγόριθμος είναι ο *Mersenne twister* (http://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_twister)
- Η διαδικασία γέννησης τυχαίων αριθμών είναι γνωστή και ως **δειγματοληψία *Monte Carlo***.

# Παραγωγή τυχαίων αριθμών στο Excel

- **Συνάρτηση rand():** Παράγει τυχαίους αριθμούς από **ομοιόμορφη κατανομή** στο διάστημα [0,1].
- **Συνάρτηση norminv(rand(),α,β):** Παράγει τυχαίους αριθμούς από **κανονική κατανομή** με **μέση τιμή α και τυπική απόκλιση β**.
- **Συνάρτηση gammainv(rand(),α,β):** Παράγει τυχαίους αριθμούς από **γάμμα κατανομή** με **παράμετρο α και παράμετρο β**.




| | A: Τυχαίοι Αριθμοί Ομοιόμορφη Κατανομή | B: Διάστημα | C: Όριο | D: Αθροιστική Συχνότητα Εμφάνισης | E: Σχετική Αθροιστική Συχνότητα Εμφάνισης | F: Συχνότητα Εμφάνισης | G: Σχετική Συχνότητα Εμφάνισης |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.748764605 | <0 | 0 | [illegible] | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0.153206555 | 0-0.1 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 1050 | 10.5 |
| 4 | 0.01351146 | 0.1-0.2 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 998 | 9.98 |
| 5 | 0.436318242 | 0.2-0.3 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 923 | 9.23 |
| 6 | 0.834793404 | 0.3-0.4 | 0.4 | [illegible] | 39.33 | 962 | 9.62 |
| 7 | 0.069565252 | 0.4-0.5 | 0.5 | 4929 | 49.29 | 996 | 9.96 |
| 8 | 0.204903155 | 0.5-0.6 | 0.6 | 5968 | 59.68 | 1039 | 10.39 |
| 9 | 0.184989149 | 0.6-0.7 | 0.7 | 6970 | 69.7 | 1002 | 10.02 |
| 10 | 0.518824083 | 0.7-0.8 | 0.8 | 8035 | 80.35 | 1065 | 10.65 |
| 11 | 0.557015846 | 0.8-0.9 | 0.9 | 9028 | 90.28 | 993 | 9.93 |

| | J: Τυχαίοι Αριθμοί Κανονική Κατανομή | K: Διάστημα | L: Όριο | M: Αθροιστική Συχνότητα Εμφάνισης | N: Σχετική Αθροιστική Συχνότητα Εμφάνισης (%) | O: Συχνότητα Εμφάνισης | P: Σχετική Συχνότητα Εμφάνισης (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 11.34121442 | <4 | 4.0 | 6 | 0.06 | 6 | 0.06 |
| 3 | 7.954445216 | 4.0-4.5 | 4.5 | 22 | [illegible] | 16 | 0.16 |
| 4 | 5.577626872 | 4.5-5.0 | 5.0 | [illegible] | [illegible] | 37 | 0.37 |
| 5 | 9.679378992 | 5.0-5.5 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0.75 |
| 6 | 11.94656389 | 5.5-6.0 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 1.08 |
| 7 | 7.041926582 | 6.0-6.5 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 1.68 |
| 8 | 8.351530936 | 6.5-7.0 | 7.0 | [illegible] | [illegible] | 311 | 3.11 |
| 9 | 8.206971964 | 7.0-7.5 | 7.5 | 1105 | 11.05 | 384 | 3.84 |
| 10 | 10.094405 | 7.5-8.0 | 8.0 | 1639 | 16.39 | 534 | 5.34 |
| 11 | 10.28681513 | 8.0-8.5 | 8.5 | 2301 | 23.01 | 662 | 6.62 |

# Παραγωγή τυχαίων αριθμών στο Matlab [1]

- **rand(m, n):** Παράγει πίνακα $m \times n$, με τυχαίους αριθμούς από **ομοιόμορφη κατανομή** στο διάστημα [0,1].

- **normrnd(mu, sigma, m, n):** Παράγει πίνακα $m \times n$, με τυχαίους αριθμούς από **κανονική κατανομή** με **μέση τιμή mu και τυπική απόκλιση sigma**.

- **gamrnd(A,B,m,n,...):** Παράγει πίνακα $m \times n$, με τυχαίους αριθμούς από **γάμμα κατανομή** με **παράμετρο σχήματος A και παράμετρο κλίμακας B**. **H μέση τιμή της κατανομής γάμμα είναι A/B, ενώ η διασπορά A/B$^2$.**

- Για άλλες στατιστικές κατανομές δείτε:

  http://www.mathworks.com/help/stats/functionlist.html

# Παραγωγή τυχαίων αριθμών στο Matlab [2]

- **mvnrnd(MU, SIGMA, n):** Παράγει πίνακα *m* × *n*, με τυχαίους αριθμούς από **κανονική κατανομή *m* μεταβλητών**, όπου:
  - MU: διάνυσμα 1 × *m με τις μέσες τιμές κάθε μεταβλητής*
  - SIGMA: πίνακας συσχετίσεων *m* × *m με μοναδιαία στοιχεία στη διαγώνιο και τους συντελεστές συσχέτισης στις υπόλοιπες θέσεις*
- Παράδειγμα – Παραγωγή 1000 ζευγών τυχαίων αριθμών [x, y] με μέση τιμή [50, 20] και τυπική απόκλιση [10, 5], από κανονική κατανομή με συντελεστή συσχέτισης 0.8.

```
r = mvnrnd([0,0],[1,0.8;0.8,1],1000);

x = 50 + r(:,1)*10;

y = 20 + r(:,2)*5;

R = [x,y];

corr(R);
```