Πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση

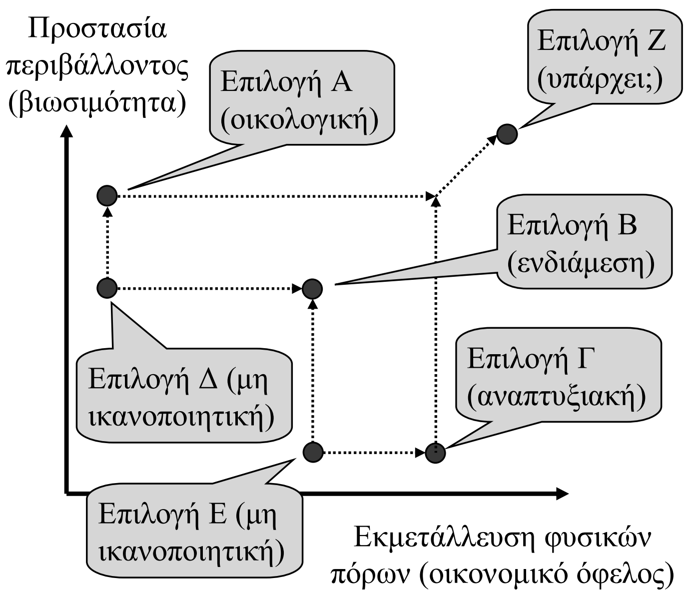
Σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος:
Βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων

Ανδρέας Ευστρατιάδης και Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Λήψη αποφάσεων με αντικρουόμενα κριτήρια

Εισαγωγικό παράδειγμα

1. Αν τα κριτήρια λήψης αποφάσεων είναι αντικρουόμενα, μπορεί να προσδιοριστεί μια επιλογή που να είναι αντικειμενικά βέλτιστη;
2. Υπάρχει δυνατότητα συστηματικού διαχωρισμού των ικανοποιητικών από τις μη ικανοποιητικές επιλογές;
3. Με ποια υπολογιστική διαδικασία είναι δυνατή η εύρεση εναλλακτικών ικανοποιητικών επιλογών;



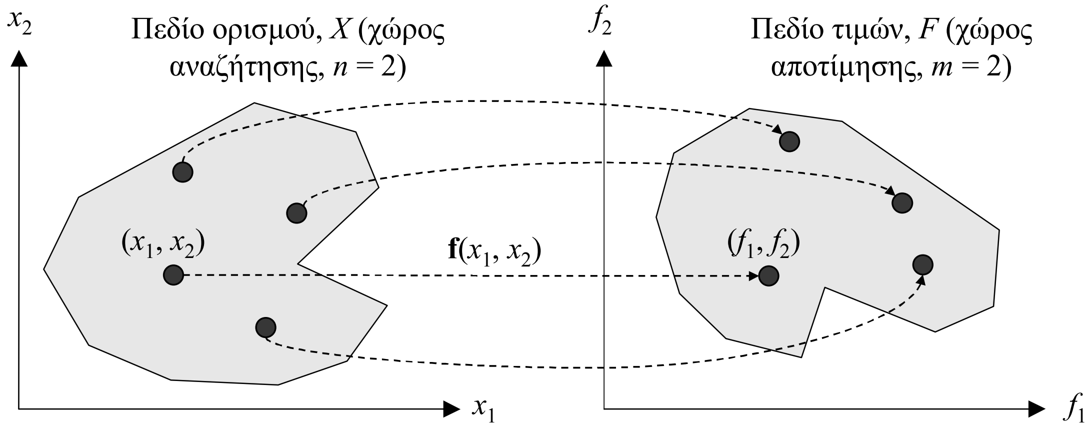
Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Το γενικό πρόβλημα της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης διατυπώνεται ως εξής:

Ζητείται το διάνυσμα $\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*]^T$, ορισμένο στον εφικτό χώρο $X \subseteq R^n$, που βελτιστοποιεί το **διανυσματικό μέτρο επίδοσης** (αντικειμενική συνάρτηση):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})]^T$$

όπου $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ το διάνυσμα των μεταβλητών ελέγχου και $f_i(\mathbf{x})$ τα κριτήρια λήψης αποφάσεων του προβλήματος.



Διαφορές απλής (μονοκριτηριακής) και πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης

Μοναδικό κριτήριο - Βαθμωτή αντικειμενική συνάρτηση, $f(\mathbf{x})$

Δυνατότητα αντικειμενικής αξιολόγησης (σύγκρισης) δυο εφικτών λύσεων $f(\mathbf{x}_1)$ και $f(\mathbf{x}_2)$

Η λύση $f(\mathbf{x}^*)$ είναι η μοναδική βέλτιστη του προβλήματος, εφόσον είναι καλύτερη από κάθε άλλη λύση $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X$

Πολλαπλά κριτήρια - Διανυσματική αντικειμενική συνάρτηση, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

Αδυναμία αντικειμενικής αξιολόγησης δυο εφικτών λύσεων $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ και $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$, αν είναι αντικρουόμενες και δεν μετρώνται σε μια κοινή βάση (π.χ. χρηματική αξία)

Η λύση $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ είναι η μοναδική βέλτιστη, εφόσον είναι καλύτερη από κάθε άλλη εφικτή λύση $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, για το σύνολο των κριτηρίων f_i (**ουτοπική** ή **ιδεατή λύση**)

Για τον χειρισμό ενός προβλήματος ταυτόχρονης βελτιστοποίησης πολλαπλών και αντικρουόμενων κριτηρίων απαιτείται ο καθορισμός μιας διαδικασίας αντικειμενικής αξιολόγησης (σύγκρισης) διανυσματικών λύσεων.

Οι έννοιες της μερικής διάταξης και της κυριαρχίας

- Σε μονοκριτηριακά προβλήματα, το βαθμωτό πεδίο τιμών F θεωρείται **πλήρως διατεταγμένο**, με βάση την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Αν σε ένα βαθμωτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης θεωρηθούν δύο εναλλακτικά εφικτά σημεία $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$, το $\mathbf{x}_1$ υπερτερεί σε σχέση με το $\mathbf{x}_2$ εφόσον $f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_2)$. Κατά συνέπεια, ως ολικά βέλτιστο θεωρείται το σημείο για το οποίο ισχύει $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$.
- Εφόσον λαμβάνονται υπόψη περισσότερα του ενός κριτήρια, το πεδίο τιμών είναι διανυσματικό και όχι βαθμωτό. Για την περίπτωση τέτοιων πεδίων, ο *Pareto* (1896) εισήγαγε την έννοια της **μερικής διάταξης** (partial ordering), γενικεύοντας την εφαρμογή των τελεστών =, ≤, και ≥ σε διανύσματα ως εξής:

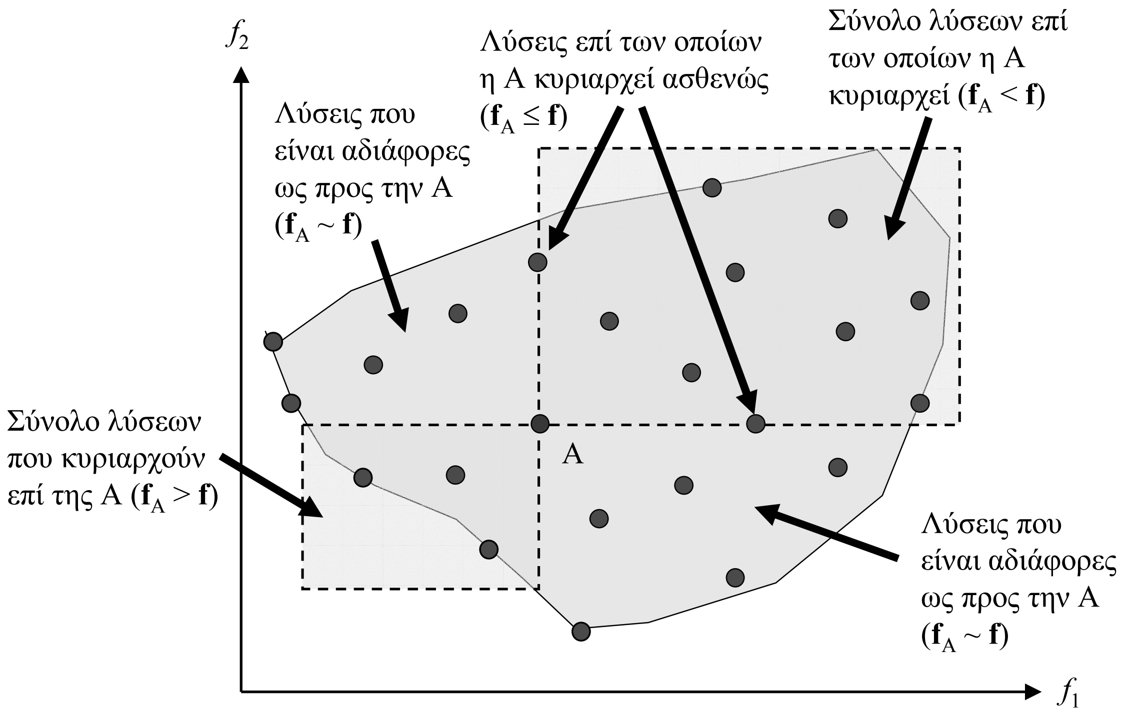
$$\mathbf{a} = \mathbf{b}, \text{ αν } \alpha_i = b_i \ \forall \ i$$

$$\mathbf{a} < \mathbf{b}, \text{ αν } a_i < b_i \ \forall \ i$$

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}, \text{ αν } a_i \leq b_i \ \forall \ i \text{ και } a_i = b_i \text{ για ένα τουλάχιστον } i$$

- Έστω σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης πολλαπλών κριτηρίων δύο εφικτές λύσεις $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$. Εφόσον $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) < \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$, η επιλογή 1 **κυριαρχεί ισχυρώς** έναντι της επιλογής 2, ενώ αν $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$, η επιλογή 1 **κυριαρχεί ασθενώς** έναντι της επιλογής 2.
- Στην περίπτωση που ισχύει $f_i(\mathbf{x}_1) \leq f_i(\mathbf{x}_2)$ για ορισμένα κριτήρια και $f_i(\mathbf{x}_1) > f_i(\mathbf{x}_2)$ για τα υπόλοιπα κριτήρια, τότε οι επιλογές $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ και $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ θεωρούνται **αδιάφορες** (indifferent) μεταξύ τους, σχέση που συμβολίζεται ως $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \sim \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$.

Γεωμετρική ερμηνεία της κυριαρχίας



Η έννοια των Pareto βέλτιστων λύσεων

Ο ορισμός της βέλτιστης λύσης ενός πολυκριτηριακού προβλήματος βελτιστοποίησης, αντίστοιχα με τον ορισμό που δίνεται σε μονοκριτηριακά προβλήματα, διατυπώνεται ως:

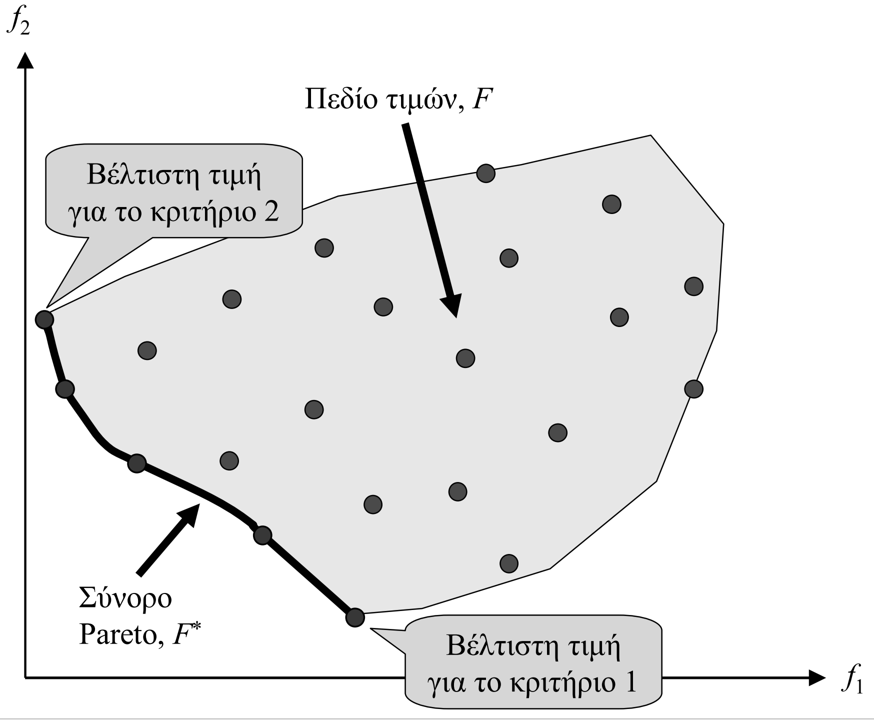
Ορισμός 1: Ένα εφικτό σημείο $\mathbf{x}^* \in X$ είναι βέλτιστο εφόσον δεν κυριαρχείται από κανένα άλλο σημείο του εφικτού χώρου, δηλαδή δεν υπάρχει κανένα άλλο εφικτό σημείο $\mathbf{x} \in X$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \le \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Ορισμός 2: Ένα εφικτό σημείο $\mathbf{x}^* \in X$ είναι βέλτιστο εφόσον δεν υπάρχει εφικτό διάνυσμα $\mathbf{x}$ που να μπορεί να βελτιώσει κάποιο κριτήριο, χωρίς ταυτόχρονα να χειροτερέψει τουλάχιστον ένα άλλο.

Ο παραπάνω ορισμός οδηγεί σε ένα σύνολο εφικτών λύσεων $\mathbf{x}^*$ που καλούνται **Pareto βέλτιστες** ή **μη κατώτερες** (non-inferior) ή **μη κυριαρχούμενες** (non-dominated), και συμβολίζονται με X_P ($X_\mathrm{P} \subseteq X$). Το σύνολο X_P καλείται **σύνολο Pareto** (Pareto set), ενώ η απεικόνισή του $F_\mathrm{P} := \mathbf{f}(X_\mathrm{P})$ ορίζει ένα σύνολο στο R^m ($F_\mathrm{P} \subseteq F$) που καλείται **σύνορο Pareto** (Pareto front) ή **καμπύλη αντιστάθμισης** (trade-off curve).

Αριθμητικό παράδειγμα: Έστω ένα πρόβλημα ταυτόχρονης ελαχιστοποίησης τριών κριτηρίων, με εναλλακτικές εφικτές επιλογές $\mathbf{f}_1 = (0, 5, 10)$, $\mathbf{f}_2 = (3, 8, 8)$, $\mathbf{f}_3 = (5, 6, 12)$, $\mathbf{f}_4 = (1, 7, 11)$, $\mathbf{f}_5 = (8, 4, 7)$. Τα σημεία $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ και $\mathbf{f}_5$ είναι Pareto βέλτιστα, ενώ τα $\mathbf{f}_3$ και $\mathbf{f}_4$ είναι κυριαρχούμενα, δεδομένου ότι $\mathbf{f}_1 < \mathbf{f}_3$ και $\mathbf{f}_1 < \mathbf{f}_4$.

Γεωμετρική απεικόνιση του συνόρου Pareto



Η έννοια της καλύτερα συμβιβαστικής λύσης

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, είναι αναγκαία η επιλογή μίας και μοναδικής λύσης, που θεωρείται ως ο **καλύτερος συμβιβασμός** (best-compromise) και επιλέγεται σύμφωνα με την υποκειμενική κρίση του αναλυτή.

Οι τρόποι προσδιορισμού της καλύτερα συμβιβαστικής λύσης ενός πολυκριτηριακού προβλήματος βελτιστοποίησης είναι:

1. Επιλογή πριν την αναζήτηση: Τα επιμέρους κριτήρια σταθμίζονται σε μια ενιαία αριθμητική έκφραση, που συνιστά την αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος βαθμωτής βελτιστοποίησης. Συνεπώς, η βέλτιστη λύση του βαθμωτού προβλήματος ταυτίζεται με την καλύτερα συμβιβαστική του πολυκριτηριακού.

2. Επιλογή μετά την αναζήτηση: Διατυπώνεται μια διανυσματική αντικειμενική συνάρτηση, συνιστώσες της οποίας είναι τα επιμέρους κριτήρια, και επιλύεται το πολυκριτηριακό πρόβλημα για τον εντοπισμό του συνόλου των μη κατωτέρων λύσεων. Στη συνέχεια, επιλέγεται μία εξ αυτών, με βάση την υποκειμενική κρίση του αναλυτή.

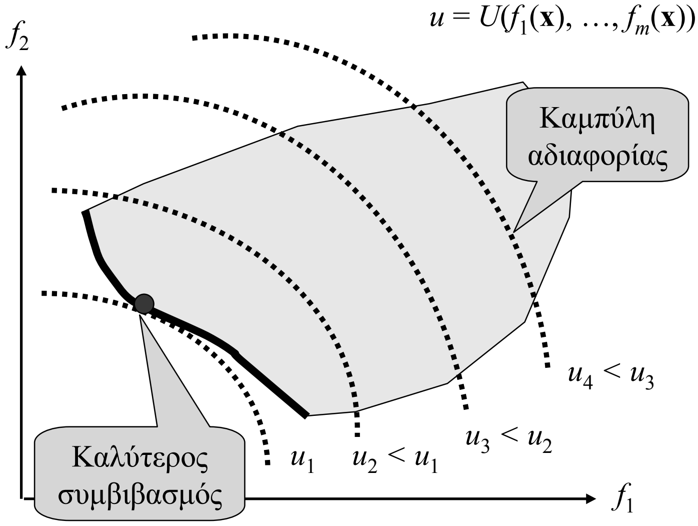
3. Επιλογή κατά την αναζήτηση: Η βελτιστοποίηση γίνεται κατά τρόπο διαδραστικό, ώστε να ενημερώνεται ο αναλυτής για την εξέλιξη της διαδικασίας αναζήτησης και να παρεμβαίνει σε αυτή. Αξιολογώντας τα επίκαιρα αποτελέσματα, ο αναλυτής μπορεί να αναπροσαρμόσει τις προτιμήσεις του ή και να ενσωματώσει νέα κριτήρια, καθοδηγώντας τη διαδικασία αναζήτησης προς την επιθυμητή γι' αυτόν κατεύθυνση.

Η έννοια της συνάρτησης χρησιμότητας

Ως **συνάρτηση χρησιμότητας** (utility function) νοείται μια μαθηματική συνάρτηση που αντιστοιχεί μια συγκεκριμένη επίδοση u σε κάθε συνδυασμό κριτηρίων, ώστε να είναι δυνατή η ταξινόμηση των εναλλακτικών λύσεων. Ως καλύτερα συμβιβαστική λύση θεωρείται αυτή που μεγιστοποιεί την συνάρτηση χρησιμότητας του προβλήματος.

Η συνάρτηση χρησιμότητας διατυπώνεται ως:

$$u = U(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$$



Η συνάρτηση χρησιμότητας απεικονίζεται στο χώρο F με τη μορφή ισοσταθμικών καμπυλών, που καλούνται **καμπύλες αδιαφορίας** (indifference curves). Η καλύτερα συμβιβαστική λύση βρίσκεται στο σημείο στο οποίο η καμπύλη αδιαφορίας εφάπτεται του συνόρου Pareto.

Κλασικές τεχνικές πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης

Η μέθοδος των βαρών

- Διαμορφώνεται μια βαθμωτή αντικειμενική συνάρτηση ως γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους κριτηρίων, με χρήση προεπιλεγμένων συντελεστών βάρους, που εκφράζουν τη σχετική σημασία κάθε κριτηρίου, ήτοι:

$$\min f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(\mathbf{x})$$

Κατά κανόνα, δεχόμαστε ότι:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

- Για να έχουν οι συντελεστές βάρους πραγματικό νόημα και να μην προκύψουν προβλήματα κλίμακας, απαιτείται μετασχηματισμός των f_i (π.χ. αδιαστατοποίηση), ώστε το εύρος διακύμανσης των κριτηρίων να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους.
- Μεταβάλλοντας τις τιμές των βαρών w_i, προκύπτουν διαφορετικές λύσεις του μονοκριτηριακού προβλήματος, που είναι Pareto βέλτιστες. Συνεπώς, ο εντοπισμός όλων των Pareto βέλτιστων λύσεων του πολυκριτηριακού προβλήματος προϋποθέτει θεωρητικά άπειρες επιλύσεις του μετασχηματισμένου βαθμωτού προβλήματος.
- Μειονέκτημα είναι ο αυθαίρετος ορισμός των βαρών και η αδυναμία εντοπισμού των μη κυρτών περιοχών του συνόρου Pareto.

Κλασικές τεχνικές πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης

Η μέθοδος προγραμματισμού στόχων (goal programming)

- Ορίζονται τιμές-στόχοι T_i για κάθε κριτήριο i, που εισάγονται στο πρόβλημα υπό μορφή συναρτήσεων ποινής. Η βαθμωτή συνάρτηση που διαμορφώνεται συνίσταται στην ελαχιστοποίηση της απόκλισης των κριτηρίων από τους αντίστοιχους στόχους, που στη γενική περίπτωση διατυπώνεται ως:

$$\min f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{m} w_i \, |f_i(\mathbf{x}) - T_i|^{p} \right)^{1/p}$$

όπου p παράμετρος κλίμακας (για $p = 2$ και $w_i = 1$, η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει την ευκλείδεια απόσταση των κριτηρίων από τις τιμές-στόχους T_i).

- Η μέθοδος χρησιμοποιεί έναν γεωμετρικό ορισμό της καλύτερα συμβιβαστικής λύσης, και αποσκοπεί στην εύρεση της κοντινότερης εφικτής λύσης ως προς κάποιο επιθυμητό σημείο, με βάση ένα μέτρο απόστασης.
- Ως τιμή-στόχος κάθε κριτηρίου μπορεί να θεωρηθεί η ολικά βέλτιστη τιμή f_i^* κάθε επιμέρους κριτηρίου (= ελαχιστοποίηση απόστασης από την ουτοπική λύση).
- Μεταβάλλοντας τις τιμές των στόχων T_i και των βαρών w_i, προκύπτουν διαφορετικές λύσεις του προβλήματος, που είναι Pareto βέλτιστες.

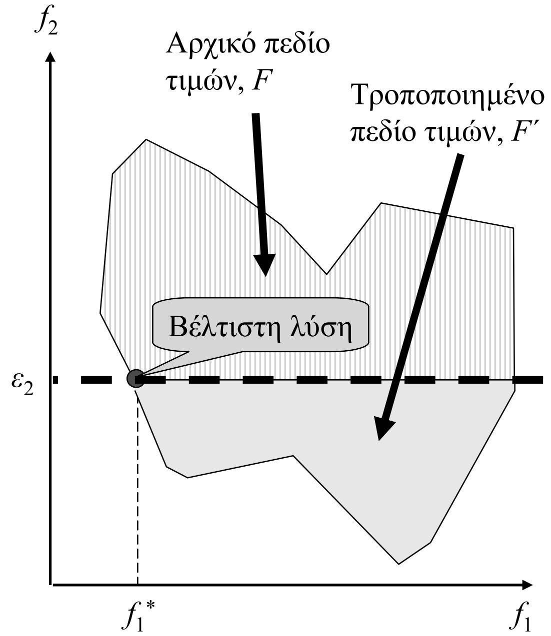
Κλασικές τεχνικές πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης

Η μέθοδος των ε-περιορισμών

- Βελτιστοποιείται ένα πρωτεύον κριτήριο $f_p(\mathbf{x})$, θεωρώντας τα υπόλοιπα ως μαθηματικούς περιορισμούς που φράσσονται από επιτρεπόμενα όρια, ε_i.
- Διαμορφώνεται ένα βαθμωτό πρόβλημα βελτιστοποίησης, με $m - 1$ επιπλέον περιορισμούς της μορφής:

$$f_i(\mathbf{x}) \le \varepsilon_i$$

- Διαφοροποιώντας το πρωτεύον κριτήριο και μεταβάλλοντας τις τιμές των περιορισμών, προκύπτουν λύσεις που είναι Pareto βέλτιστες.
- Η μέθοδος δεν απαιτεί την αδιαστατοποίηση των κριτηρίων. Μειονέκτημα είναι η προσθήκη περιορισμών, εφόσον το αρχικό πρόβλημα είναι χωρίς περιορισμούς.



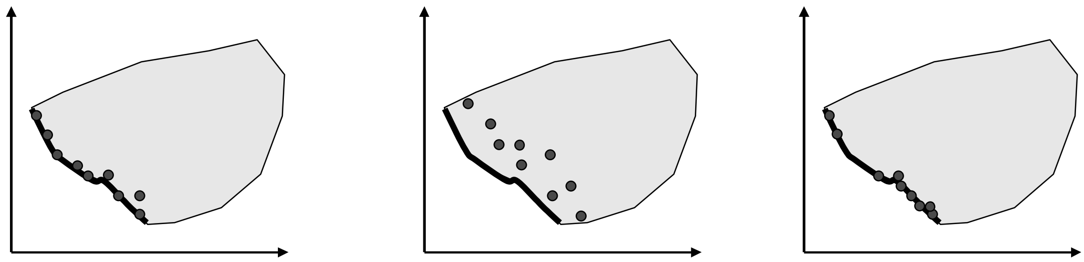
Κλασικές τεχνικές πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης

Σύνοψη - Μειονεκτήματα

- Επιδιώκεται η εύρεση της καλύτερα συμβιβαστικής λύσης, βελτιστοποιώντας την αντικειμενική συνάρτηση ενός μονοκριτηριακού προβλήματος που θεωρείται ότι ταυτίζεται με τη συνάρτηση χρησιμότητας του αρχικού.
- Τα χαρακτηριστικά της καλύτερα συμβιβαστικής λύσης εκφράζονται υπό μορφή συντελεστών βάρους, επιθυμητών τιμών, σειράς προτεραιότητας των κριτηρίων, κλπ.
- Τα εν λόγω χαρακτηριστικά προσδιορίζονται εκ των προτέρων (πριν τη διαδικασία αναζήτησης), με τρόπο υποκειμενικό/εμπειρικό.
- Διαφοροποιώντας τη μαθηματική διατύπωση του μονοκριτηριακού προβλήματος βελτιστοποίησης και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αναζήτησης, είναι δυνατός ο εντοπισμός εναλλακτικών μη κατώτερων λύσεων από το σύνολο Pareto.
- Τα κύρια μειονεκτήματα των κλασικών προσεγγίσεων είναι:
  - ο υποκειμενικός-αυθαίρετος ορισμός της συνάρτησης χρησιμότητας·
  - η δημιουργία εξαιρετικά ανώμαλων επιφανειών απόκρισης, που οφείλεται στην ενσωμάτωση κριτηρίων διαφορετικής κλίμακας σε μια ενιαία έκφραση·
  - η αδυναμία εύρεσης άλλων επιλογών που είναι βέλτιστες κατά Pareto, εκτός και αν πραγματοποιηθεί εξονυχιστική αναζήτηση με διαδοχικές επιλύσεις εναλλακτικών διατυπώσεων του μονοκριτηριακού προβλήματος.

Ποια είναι τα επιθυμητά χαρακτηριστικά μιας μεθόδου συστηματικής αναζήτησης μη κατωτέρων λύσεων;

- Η διαδικασία αναζήτησης θα πρέπει να αποσκοπεί στον εντοπισμό όχι μιας μεμονωμένης λύσης αλλά ενός συνόλου (πληθυσμού) σημείων, αντιπροσωπευτικών του συνόλου Pareto (σύνολο σημείων → **εξελικτικοί αλγόριθμοι**).
- Δεδομένου ότι σε ένα πρόβλημα συνεχών μεταβλητών οι Pareto βέλτιστες λύσεις είναι άπειρες, κριτήρια επιτυχίας της διαδικασίας αναζήτησης είναι:
  - η σύγκλιση του τελικού πληθυσμού προς το σύνορο Pareto·
  - η κατά το δυνατόν πιο ομοιόμορφη κάλυψη του συνόρου Pareto.



Ο πληθυσμός έχει συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνορο Pareto | Ο πληθυσμός δεν έχει συγκλίνει στο πραγματικό σύνορο Pareto | Τα σημεία δεν είναι καλά κατανεμημένα στο σύνορο Pareto

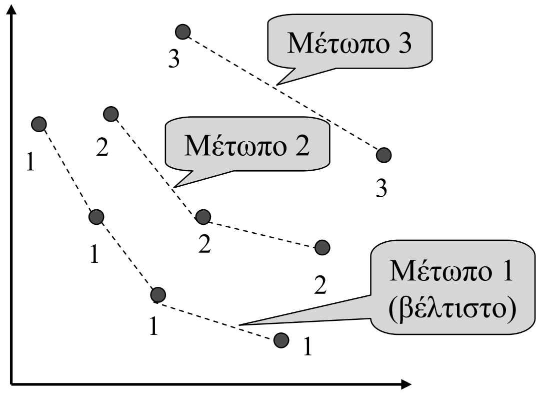
Γενικές αρχές εξελικτικών αλγορίθμων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης

- Διατηρούνται οι υπολογιστικές διαδικασίες που αναφέρονται στη γέννηση του αρχικού πληθυσμού, την κωδικοποίηση των μεταβλητών και την παραγωγή νέων λύσεων (διασταύρωση, μετάλλαξη), ενώ τροποποιείται η διαδικασία **επιλογής**.
- Η επιλογή ενός ατόμου για επιβίωση στην επόμενη γενιά γίνεται με βάση:
  - ένα **μέτρο κυριαρχίας** r, που ευνοεί την επιλογή ατόμων που κυριαρχούν έναντι όσο το δυνατό περισσότερων άλλων μελών του πληθυσμού, εξασφαλίζοντας έτσι τη σύγκλιση του πληθυσμού προς το σύνορο Pareto·
  - ένα **μέτρο διασποράς** S, που ευνοεί την επιλογή ατόμων που έχουν λιγότερα άλλα μέλη του πληθυσμού στη γειτονιά τους, εξασφαλίζοντας έτσι την ομοιόμορφη κατανομή του τελικού πληθυσμού.
- Ο καθορισμός του μέτρου κυριαρχίας προϋποθέτει την κατάταξη του πληθυσμού, με βάση τη σχετική θέση των διανυσμάτων $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ στο πεδίο τιμών.
- Το μέτρο διασποράς εξαρτάται από την κατανομή των λύσεων στο πεδίο αναζήτησης X ή το πεδίο αποτίμησης F (συνήθως του δεύτερου).
- Το πολυκριτηριακό πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως μονοκριτηριακό, υπολογίζοντας την καταλληλότητα κάθε ατόμου i από μια σύνθετη σχέση της μορφής:

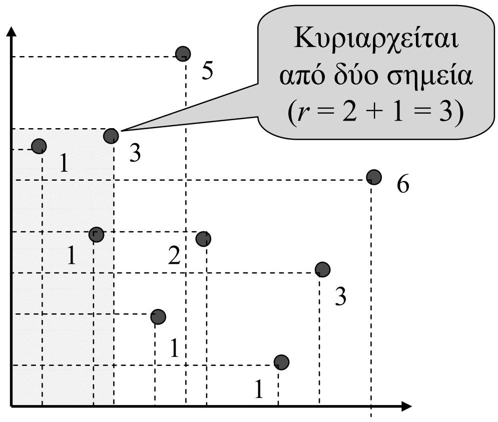
$$\varphi(i) = \varphi(r_i, S_i)$$

Η έννοια της μη κυριαρχούμενης κατάταξης

Η **μη κυριαρχούμενη κατάταξη** (non-dominated sorting) συνίσταται στη διαμόρφωση ομάδων ή αλλιώς **μετώπων** (fronts), όπου η πρώτη περιλαμβάνει τις μη κατώτερες λύσεις του συνόλου του πληθυσμού, το δεύτερο τις μη κατώτερες λύσεις όλου του πληθυσμού πλην των μελών του πρώτου, κοκ. Σε κάθε μέτωπο αντιστοιχεί ένας κοινός **δείκτης κατάταξης** ή αλλιώς **τάξη** (rank), που αποτελεί το μέτρο κυριαρχίας των αντίστοιχων ατόμων-λύσεων.



Κατάταξη σε μέτωπα κατά *Goldberg* (1989)



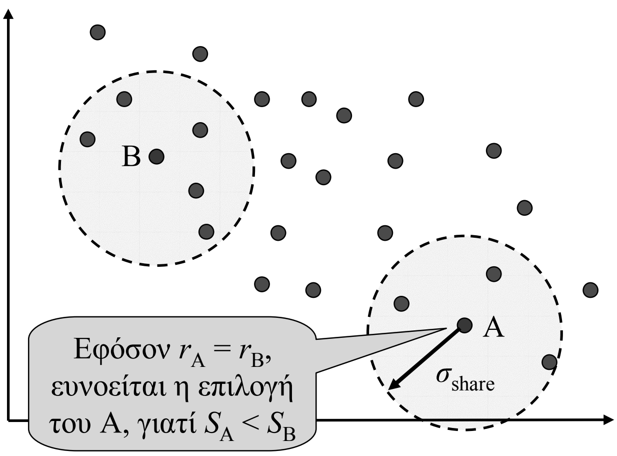
Κατάταξη κατά *Fonseca and Fleming* (μέθοδος MOGA, 1993)

Συναρτήσεις συσσώρευσης

Συνάρτηση συσσώρευσης (sharing function) είναι ένα μέτρο γειτνίασης της μορφής:

$$s(\delta_{ij}) = \begin{cases} 1 - (\delta_{ij} / \sigma_{\text{share}})^a & \text{εφόσον } \delta_{ij} < \sigma_{\text{share}} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου δ_{ij} ένα μέτρο απόστασης (π.χ. ευκλείδεια) μεταξύ δύο ατόμων i και j, a παράμετρος σχήματος και σ_{share} παράμετρος κλίμακας, γνωστή ως **ακτίνα θύλακα** (niche radius)· ως θύλακας νοείται ένα σύνολο γειτονικών ατόμων-λύσεων, με κοινά χαρακτηριστικά.



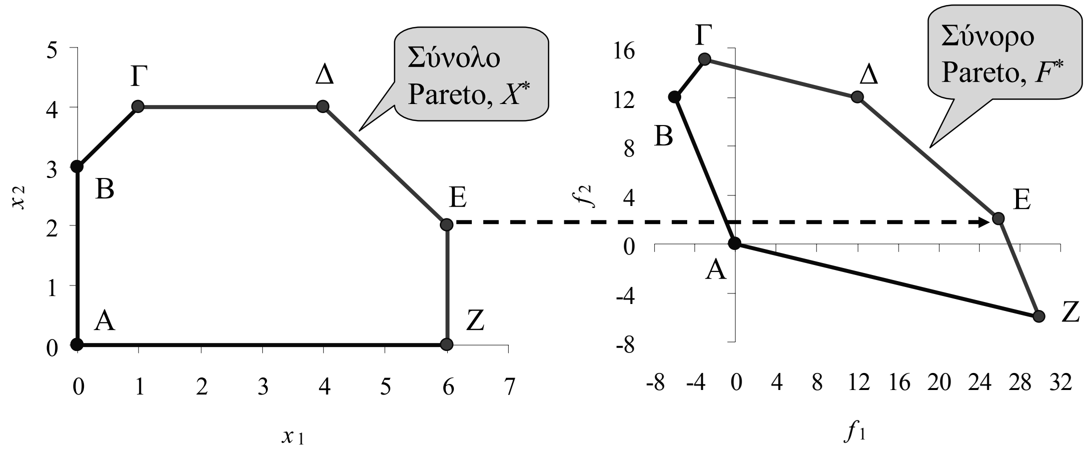
Για τη διατήρηση της διασποράς του πληθυσμού στο πεδίο F (ή X), στο μέτρο καταλληλότητας κάθε ατόμου, που εκφράζεται από τον αντίστοιχο δείκτη κατάταξης r_i, εισάγεται, ως ποινή, ένα **μέτρο συσσώρευσης**, ώστε να εμποδιστεί η δημιουργία θυλάκων. Αν N το μέγεθος του πληθυσμού, το εν λόγω μέτρο υπολογίζεται ως:

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} s(\delta_{ij})$$

Γραμμικός πολυστοχικός προγραμματισμός

Στα γραμμικά πολυστοχικά προβλήματα, ο χώρος αποτίμησης είναι ένα πολύεδρο στο R^m, όπως και ο χώρος αναζήτησης (εφικτή περιοχή) είναι ένα πολύεδρο στο R^n. Για τη χάραξη του συνόρου Pareto, αρκεί ο εντοπισμός των κορυφών που αντιστοιχούν στις μη κατώτερες λύσεις του προβλήματος.

Για την ταυτόχρονη εύρεση όλων των μη κατώτερων κορυφών, μπορεί να εφαρμοστεί η **πολυστοχική μέθοδος simplex** (*Cohon*, 1978, p. 140-155).



Λήψη αποφάσεων με αντικρουόμενα κριτήρια

Τελικές επισημάνσεις

- Εφόσον το μέτρο επίδοσης ενός συστήματος περιλαμβάνει πολλαπλά, αντικρουόμενα μεταξύ τους, κριτήρια, δεν είναι δυνατή η εύρεση μιας εφικτής επιλογής που να βελτιστοποιεί ταυτόχρονα το σύνολο των κριτηρίων.
- Ως αποδεκτές επιλογές νοούνται αυτές για τις οποίες δεν μπορεί να υπάρξει βελτίωση της επίδοσης ενός κριτηρίου, χωρίς να χειροτερέψει ένα τουλάχιστον από τα άλλα κριτήρια· οι εν λόγω επιλογές καλούνται **μη κατώτερες** ή **Pareto βέλτιστες**.
- Η κλασική προσέγγιση αποσκοπεί στην ενσωμάτωση των κριτηρίων σε μια ενιαία αντικειμενική συνάρτηση, με εκ των προτέρων καθορισμό των χαρακτηριστικών της λεγόμενης **καλύτερα συμβιβαστικής** επιλογής, που είναι μία από τις θεωρητικά άπειρες βέλτιστες λύσεις του πολυκριτηριακού προβλήματος.
- Η σύγχρονη προσέγγιση αποσκοπεί στον ταυτόχρονο εντοπισμό ενός ικανού πλήθους μη κατωτέρων λύσεων, που είναι αντιπροσωπευτικές του συνόλου Pareto, με χρήση **εξελικτικών τεχνικών**, προσαρμοσμένων για διανυσματικές συναρτήσεις.
- Δεν υπάρχει αντικειμενικός τρόπος προσδιορισμού της πλέον συμβιβαστικής λύσης. Η τελική επιλογή είναι ζήτημα **προσωπικής κρίσης**, **διαίσθησης** και **εμπειρίας**.

Σε θέματα πολιτικής, ο τεχνικός σύμβουλος οφείλει να προτείνει τεχνικά αποδεκτές, οικονομικά βιώσιμες και περιβαλλοντικά φιλικές λύσεις, όχι να λαμβάνει αποφάσεις!

Βιβλιογραφία πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης

- Coello, C. A. C., A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques, *Knowledge and Information Systems: An International Journal*, 1(3), 269-308, 1999.
- Cohon, J. I., *Multiobjective Programming and Planning*, Academic Press, London, 1978.
- Deb, K., Evolutionary algorithms for multi-criterion optimization in engineering design, in *Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science*, C. Miettinen, M. M. Makella, P. Niettananmaki, and J. Pieraux (editors), Ch. 8, 135-161, John Wiley & Sons, New York, 1999b.
- Fonseca, C. M., and P. J. Fleming, An overview of evolutionary algorithms in multiobjective optimization, *Evolutionary Computation*, 3(1), 1-16, 1995.
- Horn, J., N. Nafpliotis, and D. E. Goldberg, A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization, *Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation*, IEEE World Congress on Computational Intelligence, Vol. 1, 82-87, 1994.
- Osyczka, A., Multicriteria optimization problems for engineering design, in *Design Optimization*, J. S. Gero (editor), 193-227, 1985.
- Srinivas, N., and K. Deb, Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms, *Evolutionary Computation*, 2(3), 221-248, 1994.
- Van Veldhuizen, D. A., and G. B. Lamont, Multiobjective evolutionary algorithms: analyzing the state-of-the-art, *Evolutionary Computation*, 8(2), 125-147, 2000.
- Winston, W. L., *Operations Research – Applications and Algorithms*, Duxbury Press, 1994.
- Wierzbicki, A. P., On the role of intuition in decision making and some ways of multicriteria aid of intuition, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 6, 65-76, 1997.

Εφαρμογές πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης σε προβλήματα υδατικών πόρων (επιλεγμένα άρθρα)

- Erickson, M., A. Mayer, and J. Horn, Multi-objective optimal design of groundwater remediation systems: application of the niched Pareto genetic algorithm (NPGA), *Advances in Water Resources*, 25, 51-65, 2002.
- Madsen, H., Parameter estimation in distributed hydrological catchment modelling using automatic calibration with multiple objectives, *Advances in Water Resources*, 26, 205-216, 2002.
- Yapo, P. O., H. V. Gupta, and S. Sorooshian, Multi-objective global optimization for hydrologic models, *Journal of Hydrology*, 204, 83-97, 1998.
- Halhal, D., G. A. Walters, D. Ouazar, and D.A. Savic, Multi-objective improvement of water distribution systems using a structure messy genetic algorithm approach, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 123(3), 137-146, 1997.
- Ko, S.-K., D. G. Fontane, and J. W. Labadie, Multiobjective optimization of reservoir systems operation, *Water Resources Bulletin*, 28, 3-12, 1992.
- Prasad, T., and N.-S. Park, Multiobjective genetic algorithms for design of water distribution networks, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 130(1), 73-82, 2004.
- Reed, P., B. S. Minsker, and D. E. Goldberg, A multiobjective approach to cost effective long-term groundwater monitoring using an elitist nondominated sorting genetic algorithm with historical data, *Journal of Hydroinformatics*, 03.2, 71-89, 2002.
- Yeh, C., and J. W. Labadie, Multiobjective watershed-level planning of storm-water detention systems, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 123(6), 336-343, 1997.