ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΗΣ
ΔΡ ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΥΔΡΟΛΟΓΙΑΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΑ ΣΕΜΙΝΑΡΙΑ

ΑΘΗΝΑ 1994

ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΕΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΕΣ

Επιμέλεια: Δ Κουτσογιάννης, Λέκτορας ΕΜΠ, Τομέας Υδ. Πόρων, Υδρ. & Θαλ. 'Εργων

Η αβεβαιότητα, ουσιαστικό στοιχείο των φυσικών διεργασιών

Η τεχνολογική πρόοδος των τελευταίων δεκαετιών και η παράλληλη απομάκρυνση μας από τη φύση, αποτέλεσμα και αυτή της ρύθμισης των συνθηκών ζωής μέσω της τεχνολογίας, τείνει να μας δημιουργήσει την ψευδαίσθηση της παντοδυναμίας της τεχνολογίας απέναντι στη φύση και της ανεξαρτητοποίησης των κοινωνικών και οικονομικών συνθηκών από τις φυσικές διεργασίες. 'Ετσι θεωρούμε αυτονόητη και βέβαιη την παροχή όσων φυσικών πόρων έχουμε συνηθίσει να μας είναι απαραίτητοι. Σε περίπτωση που κάτι διαταράζει αυτή τη συνεχή και απρόσκοπτη παροχή πόρων, έχουμε την τάση να αναζητούμε ως αποκλειστικά υπεύθυνο κάποιο αρμόδιο κοινωνικό ή πολιτικό φορέα που δεν ενέργησε σωστά.

Ξεπερνώντας τις αυταπάτες του κοινού νού, οι επιστήμονες μπορούν να συμφωνήσουν ότι η τεχνολογική ανάπτυξη δεν έχει καταργήσει ούτε φαίνεται να μπορεί να καταργήσει την αβεβαιότητα. Την έχει όμως περιορίσει; Από πρώτη άποψη η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι θετική, αν απομονώσουμε ένα συγκεκριμένο φαινόμενο.

Για παράδειγμα η κατασκευή ταμιευτήρων υπερετήσιας εξίσωσης μειώνει τις δυσμενείς συνέπειες των ξηρασιών, η κατασκευή αντιπλημμυρικών έργων περιορίζει τους κινδύνους των πλημμυρών. Ωστόσο δεν πρέπει να παραγνωρίζουμε ότι τα αποτελέσματα της αστοχίας ενός μείζονος έργου είναι πολύ πιο οδυνηρά απ' ότι θα ήταν πριν την κατασκευή του έργου, και ακόμη ότι τα ίδια τα έργα προσθέτουν νέες μορφές αβεβαιότητας. Ας σκεφτούμε τις συνέπειες της κατάρρευσης ενός μεγάλου φράγματος ή ενός πολυώροφου κτιρίου και ακόμα τις συνέπειες του ανθρωπογενούς προέλευσης φαινομένου θερμοκηπίου. Στο σημείο αυτό αξίζει να δούμε την "άλλη" άποψη του καθηγητή G. F. White (1973), ο οποίος ομιλεί για αυξανόμενη αβεβαιότητα:

> "Οι προοδευτικά αυξανόμενες κοινωνικές απώλειες από τους φυσικούς κινδύνους πλημμυρών, ξηρασιών ή άλλων καταστροφών γεωφυσικής προέλευσης, στην πραγματικότητα έχουν ενθαρρυνθεί από την κατασκευή τεχνικών έργων εξειδικευμένου χαρακτήρα. Μαζί με αυτό το γεγονός θα πρέπει να τοποθετήσουμε και ένα δεύτερο, το οποίο φαίνεται παράδοξο με την πρώτη ματιά. Αυτό είναι ότι όσο περισσότερο λεπτομερής γίνεται η επιστημονική μας γνώση για τη φύση του κόσμου, τόσο πιο αβέβαιο είναι το μέλλον. Κάθε τεχνική ανάπτυξη, κάθε μικρή ώθηση στα όρια της γνώσης, αυξάνει την αβεβαιότητα μας για το τί θα συμβεί στη συνέχεια. Με το να ανοίγουμε νέους εναλλακτικούς δρόμους, με το να αυξάνουμε τον αριθμό των περιπτώσεων όπου η ανθρώπινη κρίση μπορεί να εξασκηθεί, με το να κάνουμε πιθανό κάτι να μην πάει καλά, γινόμαστε λιγότερο βέβαιοι για το τί θα φέρει το μέλλον. Πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι μια αναπόφευκτη τιμωρία για όλη την έρευνα στην οποία έχουμε δεσμευτεί, είναι η αύξηση της αβεβαιότητας."

Κατάταξη υδρολογικών αβεβαιοτήτων

Αλλά ας εντοπίσουμε το ενδιαφέρον μας στις υδρολογικές αβεβαιότητες, και κυρίως αυτές που αναφέρονται στα φαινόμενα πλημμύρας και ξηρασίας: Είναι πρόδηλος ο τυχαίος χαρακτήρας των φαινομένων αυτών και η αβεβαιότητα που απορρέει από αυτόν. Μήπως όμως η αβεβαιότητα αυτή μπορεί κάτω από ορισμένες συνθήκες να εξαλειφθεί; Στο παρελθόν η απάντηση σε αυτό το ερώτημα μπορεί να ήταν θετική. Ειδικότερα στο θέμα των πλημμυρών η έννοια της "πιθανής μέγιστης πλημμύρας" υπονοούσε μια θετική απάντηση στο θέμα της εξάλειψης της αβεβαιότητας. Αυτή η αντιμετώπιση, στηρίζεται στην υπόθεση ότι υπάρχει κάποιο ανώτατο όριο στο μέγεθος της πλημμύρας που μπορεί να συμβεί σε κάποια περιοχή, το οποίο είναι προσδιορίσιμο. 'Ετσι αν τα έργα μας ήταν επαρκή γι'αυτό το μέγεθος πλημμύρας, τότε δε θα διατρέχαμε κανένα κίνδυνο, θα είχαμε δηλαδή εξασφαλίσει τη βεβαιότητα. Ωστόσο αυτή η αντιμετώπιση του ζητήματος έχει γίνει αντικείμενο έντονης και ουσιαστικής αμφισβήτησης. Οπως παρατηρεί ο M.A.Benson (1973) "η φύση δεν υπόκειται σε όρια" και έτσι "σε ορισμένες περιπτώσεις πραγματοποιήθηκε υπέρβαση της τιμής της μέγιστης πιθανής κατακρήμνισης ή πλημμύρας, λίγο χρόνο μετά ή και πριν τη δημοσίευση της." Ο ίδιος παρατηρεί ότι η μέθοδος της μέγιστης πιθανής πλημμύρας έχει επικρατήσει "όχι για την πραγματική της αξία, αλλά γιατί δίνει μια λύση, η οποία απομακρύνει την υπευθυνότητα στη λήψη σπουδαίων αποφάσεων, όπως είναι ο βαθμός του κινδύνου ή της προστασίας". Η θεωρητική βάση της μεθόδου θα μπορούσε να χαρακτηριστεί υποκριτική, με την έννοια ότι διαβεβαιώνει το κοινωνικό σύνολο ότι τίποτα το κακό δεν πρόκειται ποτέ να συμβεί, ενώ αυτό δεν είναι αλήθεια. Σήμερα η μέθοδος της πιθανής μέγιστης πλημμύρας παραμένει εν ισχύει, αλλά η τιμή που υπολογίζει δε θεωρείται πλέον ως η "μέγιστη δυνατή", αλλά απλώς ως μια πολύ μεγάλη τιμή, για την οποία πάντως υπάρχει μια συγκεκριμένη πιθανότητα να συμβεί ή να ξεπεραστεί. (όπως και για κάθε άλλη τιμή, μικρότερη ή μεγαλύτερη). Η πιθανότητα αυτή θεωρείται ότι είναι της τάξης του 1:10.000.

Στο θέμα της ξηρασίας τα πράγματα είναι κάπως απλούστερα, αφού κανένας δεν έχει προσπαθήσει να θέσει κάτω όριο (διαφορετικό από το μηδέν, το οποίο ούτως ή άλλως δε βοηθάει) στις πιθανές ξηρασίες. Ετσι η αβεβαιότητα στην ξηρασία είναι δεδομένη και αναμφισβήτητη.

Αλλά ποιά είναι η αιτία των υδρολογικών αβεβαιοτήτων; Αναμφίβολα είναι η μεγάλη πολυπλοκότητα και ευαισθησία των υδροκλιματικών φαινομένων, που καθιστούν αδύνατη την μακροπρόθεσμη πρόβλεψη της εξέλιξης τους. Ετσι η υδρολογία είναι υποχρεωμένη να χρησιμοποιεί στατιστικές μεθόδους, και οι μακροπρόθεσμες προγνώσεις της να έχουν καθαρά πιθανοτικό χαρακτήρα. Σε ένα *πρώτο επίπεδο* το μέτρο της αβεβαιότητας μπορεί να αποδοθεί με μαθηματικούς όρους, με τη θεώρηση ότι ένα υδρολογικό μέγεθος περιγράφεται με μια *τυχαία μεταβλητή*, που ακολουθεί μια συγκεκριμένη συνάρτηση κατανομής. Ο τύπος της συνάρτησης κατανομής και οι παράμετροι της προσδιορίζονται από ένα περιορισμένο δείγμα παρατηρήσεων. Εδώ υπεισέρχεται ένα *δεύτερο επίπεδο* αβεβαιότητας που σχετίζεται με τα πιθανά *στατιστικά σφάλματα* για την αποδοχή ή όχι της συγκεκριμένης συνάρτησης κατανομής και την εκτίμηση των παραμέτρων της. Τα δύο αυτά επίπεδα αβεβαιότητας μπορούν να ποσοτικοποιηθούν σε επαρκή βαθμό με βάση τις μεθόδους της θεωρίας πιθανοτήτων και της στατιστικής. 'Ομως προκειμένου για τα ακραία γεγονότα πλημμυρών και ξηρασίων η ποσοτική εκτίμηση είναι αρκετά δύσκολη και μειωμένης αξιοπιστίας επειδή αυτά τα γεγονότα είναι σπάνια και η υδρολογική και μετεωρολογική εμπειρία είναι σχετικά σύντομη. Δύσκολο επίσης είναι να εκτιμηθεί ποσοτικά ένα *τρίτο επίπεδο* αβεβαιότητας που έχει σχέση με τις μετρήσεις βάσει των οποίων σχηματίζεται το στατιστικό δείγμα. Στα συνήθη και συστηματικά *σφάλματα μετρήσεων* πρέπει να προστεθούν και τα σφάλματα που εισάγονται από το γεγονός ότι οι μετρήσεις είναι σημειακές, ενώ τα υδρομετεωρολογικά φαινόμενα είναι επιφανειακά. Υπάρχει τέλος ένα *τέταρτο επίπεδο* αβεβαιότητας που με τα σημερινά επίπεδα της υδρολογικής επιστήμης είναι σχεδόν αδύνατο να ποσοτικοποιηθεί και συνήθως αντιμετωπίζεται με την υιοθέτηση εναλλακτικών, αυθαίρετων σε μεγάλο βαθμό, σεναρίων. Αυτό το επίπεδο αβεβαιότητας προκύπτει επειδή τα συμπεράσματα για το μέλλον εξάγονται από την εμπειρία του παρελθόντος, ενώ τίποτα δε μας διαβεβαιώνει ότι τα πράγματα θα συνεχίσουν να εξελίσσονται με τον ίδιο τρόπο. Αντίθετα, οι βαθμιαίες ή απότομες *κλιματικές μεταβολές*, αποτελούν μάλλον τον κανόνα παρά την εξαίρεση στη φυσική πορεία. Σήμερα στις κλιματικές μεταβολές συμβάλλουν και ανθρωπογενείς παράγοντες, όπως το φαινόμενο θερμοκηπίου, καθιστώντας την αβεβαιότητα αυτού του επιπέδου ακόμη μεγαλύτερη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

M.A. Benson (1973) Thoughts on the design of design floods, in *Floods and draughts, Proc. 2nd Intern. Symp. in Hydrology*, Hydrology Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, U.S.A

G.F. White (1973) Prospering with Uncertainty, in *Floods and draughts, Proc. 2nd Intern. Symp. in Hydrology*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, U.S.A.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΥΔΡΟΛΟΓΙΑ

Επιμέλεια: Δ Κουτσογιάννης, Λέκτορας ΕΜΠ, Τομέας Υδ. Πόρων, Υδρ. & Θαλ. 'Εργων

Γενικά

Η μελέτη της χρονικής εξέλιξης μιας υδρολογικής μεταβλητής (απορροή, βροχόπτωση, εξάτμιση κλπ.) βασίζεται σε ένα σύνολο παρατηρήσεων της μεταβλητής, το οποίο περιγράφεται με τον όρο *χρονοσειρά (time series)*. Λόγω της μη προβλέψιμης εξέλιξης της, μια υδρολογική χρονοσειρά θεωρείται ότι κυβερνιέται από πιθανοτικούς νόμους, και η μελέτη της γίνεται με βάση τη θεωρία Πιθανοτήτων και την πιο προχωρημένη θεωρία Στοχαστικών Ανελίξεων. 'Ετσι η χρονοσειρά θεωρείται ως υλοποίηση μιας *στοχαστικής ανέλιξης (stochastic process)*. δηλαδή μιας τυχαίας συνάρτησης του χρόνου (ή απειροπληθούς οικογένειας τυχαίων μεταβλητών, με δεικτοσύνολο τον χρόνο t).

Στη μελέτη των υδρολογικών χρονοσειρών έχει καθιερωθεί να γίνεται διαχωρισμός τους σε δύο συνιστώσες. Η πρώτη συνιστώσα είναι η *προσδιοριστική* (ντετερμινιστική), και περιλαμβάνει *περιοδικά* και *μη περιοδικά* τμήματα. Η δεύτερη αποδίδεται στην επίδραση τυχαίων παραγόντων, και αποδίδεται με τον όρο *στοχαστική συνιστώσα*.

Οι περιοδικότητες οφείλονται στον ετήσιο και τον ημερήσιο φυσικό κύκλο. Συχνά σε συγκεκριμένες υδρολογικές χρονοσειρές εμφανίζονται και ασθενείς υπερετήσιες περιοδικότητες, οι οποίες δεν μπορούν να αποδοθούν σε γνωστά φυσικά αίτια. Ας σημειωθεί ότι ο κύκλος των ηλιακών κηλίδων, περιόδου 11 ετών, δεν έχει αποδειχτεί ότι επηρεάζει σε ανιχνεύσιμο βαθμό την εξέλιξη των υδρολογικών μεταβλητών.

Στις μη περιοδικές μεταβολές υπάγονται οι βαθμιαίες *τάσεις (trends)* και οι απότομες αλλαγές, που αποκαλούνται *άλματα (jumps)*. Μερικές φορές οι μη περιοδικές μεταβολές μπορούν να αποδοθούν σε ανθρωπογενείς αιτίες, όπως στην αστικοποίηση, τις βιομηχανικές δραστηριότητες, στην καταστροφή των δασών, ή στην κατασκευή μεγάλης κλίμακας τεχνικών έργων. Συχνότερα όμως οι μεταβολές αυτές έχουν άγνωστη προέλευση.

Ας σημειωθεί ότι, παρά την ονομασία τους, οι προσδιοριστικές συνιστώσες είναι συχνά εξίσου αβέβαιες, ως προς την εξέλιξη τους, με τις τυχαίες συνιστώσες. Εξαίρεση αποτελούν οι ημερήσιες και ετήσιες περιοδικότητες που έχουν συγκεκριμένη φυσική αιτία. Τα άλλα τμήματα των προσδιοριστικών συνιστωσών (π.χ. τάσεις ή υπερετήσιες περιοδικότητες), μπορούν μεν να ανιχνευτούν σε μια ιστορική χρονοσειρά, αλλά δεν είναι γνωστό το πως θα εξελιχθούν στο μέλλον.

Η στοχαστική συνιστώσα μιας χρονοσειράς δεν μπορεί να αποδοθεί σε συγκεκριμένους φυσικούς μηχανισμούς, και κατά συνέπεια περιγράφεται μόνο με όρους πιθανοτήτων. Χαρακτηριστική ιδιότητα των στοχαστικών ανελίξεων είναι η *στοχαστική εξάρτηση*, δηλαδή η αλληλεξάρτηση δύο μεταβλητών της ανέλιξης που έχουν μεταξύ τους μια ορισμένη χρονική απόσταση. Η εξάρτηση είναι τόσο εμφανέστερη, όσο μικρότερη είναι η χρονική απόσταση των μεταβλητών. Βασικής σημασίας για τη μελέτη των στοχαστικών ανελίξεων, μέσω των οποίων περιγράφονται οι υδρολογικές διεργασίες είναι οι ιδιότητες της *στασιμότητας (stationarity)* και *εργοδικότητας (ergodicity)*. Μια στοχαστική ανέλιξη είναι στάσιμη όταν οι στατιστικές ιδιότητες της (π.χ. η μέση τιμή, η διασπορά ή η συνάρτηση κατανομής - βλ. επόμενη παράγραφο) είναι αναλλοίωτες στο χρόνο. Μια στάσιμη ανέλιξη είναι εργοδική όταν όλες οι στατιστικές ιδιότητες της μπορούν να προσδιοριστούν από μια υλοποίηση της ανέλιξης, δηλαδή από μια χρονοσειρά. Εφόσον μια ανέλιξη είναι εργοδική, οι χρονικές μέσες τιμές είναι ίσες με τις αναμενόμενες τιμές.

Ενώ στη φυσική πραγματικότητα οι υδρολογικές διεργασίες εξελίσσονται σε συνεχή χρόνο, στις πρακτικές υδρολογικές εφαρμογές συνήθως ενδιαφέρουν μεγέθη που ορίζονται σε διακριτό χρόνο, όπως για παράδειγμα η μέση, η μέγιστη ή η ελάχιστη παροχή ενός έτους. Σε τέτοια μεγέθη η στοχαστική εξάρτηση, συνήθως αγνοείται είτε γιατι είναι είναι πράγματι αρκετά μικρή (λόγω του μεγάλου χρονικού βήματος), είτε γιατί δεν ενδιαφέρει η εξέταση της, αλλά ενδιαφέρουν μόνο οι ιδιότητες της *περιθώριας κατανομής* της υπό εξέταση μεταβλητής (στην τελευταία περίπτωση, η αγνόηση της εξάρτησης εισάγει σφάλμα στις εκτιμήσεις, το οποίο είναι σχετικά μικρό, όταν το μέγεθος της χρονοσειράς είναι μεγάλο). Ακόμα γίνεται η υπόθεση ότι οι αντίστοιχες ανελίξεις είναι στάσιμες (οι περιοδικότητες εξαφανίζονται σε διακριτή κλίμακα έτους) και εργοδικές. Με αυτές τις τρείς υποθέσεις απλουστεύεται πολύ η μελέτη του φαινομένου. 'Ετσι η έννοια της χρονοσειράς αντικαθίσταται από την έννοια του τυχαίου δείγματος από τον ίδιο πληθυσμό (βλ. επόμενη παράγραφο), και αντί της θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων χρησιμοποιείται η κλασική θεωρία Πιθανοτήτων και η κλασική Στατιστική.

Περίληψη βασικές έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στατιστικής

- *Δειγματικός χώρος (sample space)*, δ: Το σύνολο όλων των δυνατών εκβάσεων ζ_i (outcomes) μιας πειραματικής μέτρησης ή παρατήρησης. Μπορεί να είναι: πεπερασμένος, άπειρος και αριθμήσιμος (διακριτός) ή άπειρος και μη αριθμήσιμος (συνεχής).

- *Γεγονός ή συμβάν (event)*, β: Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου (δ). *Στοιχειώδες* είναι ένα γεγονός με ένα μόνο στοιχείο: $\{\zeta_i\}$. Ο δειγματικός χώρος (δ) είναι το *βέβαιο γεγονός*, ενώ το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι το αδύνατο γεγονός.

- *Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας:* 'Εστω ένα σύνολο από γεγονότα (β) ενός δειγματικού χώρου (δ), που σχηματίζουν ένα πεδίο Borel (F). Η πιθανότητα είναι μία πραγματική συνάρτηση του F, που πληρεί τα εξής τρία αξιώματα:

  1. $P(\beta) \geq 0$, όπου $\beta \in F$
  2. $P(\delta) = 1$
  3. Αν $\beta_1 . \beta_2 = \emptyset$ τότε $P(\beta_1 + \beta_2) = P(\beta_1) + P(\beta_2)$, όπου β_1, $\beta_2 \in F$

- *Τυχαία μεταβλητή (random variable):* Μία συνάρτηση $X(\zeta)$ με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο και πεδίο τιμών ένα αριθμοσύνολο (π.χ. πραγματικών αριθμών). Μπορεί να είναι διακριτή ή συνεχής (σε αντιστοιχία με το δειγματικό χώρο).

- *Συνάρτηση κατανομής (distribution function)* ή απλώς *κατανομή:* Είναι εξ ορισμού η πιθανότητα μη υπέρβασης της τυχούσας τιμής x,

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{1}$$

Είναι μη φθίνουσα συνάρτηση και ισχύει $0 \leq F_X(x) \leq 1$

- *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:* Είναι εξ ορισμού η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{2}$$

- *Πιθανότητα υπέρβασης:* Ορίζεται από τη σχέση

$$F_{1X}(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x) \tag{3}$$

Είναι μη αύξουσα συνάρτηση και ισχύει $0 \leq F_{1X}(x) \leq 1$.

- *Περίοδος ή διάστημα επαναφοράς (recurrence interval, return period):* Σε υδρολογικές εφαρμογές μέγιστων παροχών ή βροχών ο όρος περιγράφει το αντίστροφο της πιθανότητας υπέρβασης

$$T(x) = \frac{1}{F_{1X}(x)} \tag{4}$$

Σε εφαρμογές ελάχιστων παροχών με τον ίδιο όρο περιγράφεται το αντίστροφο της συνάρτησης κατανομής, και τότε για διάκριση αναφέρεται ως περίοδος επαναφοράς ελάχιστης τιμής

$$T'(x) = \frac{1}{F_X(x)} = \frac{1}{1-F_{1X}(x)} \tag{5}$$

- *Πληθυσμός:* Στην Στατιστική με τον όρο αυτό περιγράφεται κάθε συλλογή ή σύνολο αντικειμένων, πεπερασμένο ή άπειρο. Κάθε αντικείμενο χαρακτηρίζεται από ένα συγκεκριμένο στοιχείο (έκβαση ζ) ενός δειγματικού χώρου δ, και κατά συνέπεια από μία τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X_i = X(\zeta_i)$. Οι πληθυσμοί στην υδρολογία είναι συνήθως (πρακτικώς) άπειροι και αναφέρονται στο σύνολο των δυνατών παρατηρήσεων ενός μεγέθους (π.χ. το ετήσιο ύψος βροχής X_t, για $t \in (-\infty, +\infty)$.

- *Δείγμα:* είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του πληθυσμού (π.χ. τα ετήσια ύψη βροχής X_t της περιόδου 1950 - 1990). Από την εξέταση ενός δείγματος συνάγουμε ποσοτικά συμπεράσματα για τον πληθυσμό, και σε τελευταία ανάλυση για την συνάρτηση πιθανότητας του δειγματικού χώρου που χαρακτηρίζει τον πληθυσμό. Το δείγμα χαρακτηρίζεται ως *τυχαίο* όταν κάθε στοιχείο του πληθυσμού έχει την ίδια πιθανότητα να συμπεριληφθεί σε αυτό.

'Εννοια του όρου "εκτίμηση" ενός υδρολογικού μεγέθους

Λόγω του τυχαίου χαρακτήρα των υδρολογικών μεταβλητών ο όρος "εκτίμηση" χρησιμοποιείται και στην Υδρολογία με ανάλογο περιεχόμενο όπως στην Στατιστική.

Μία πληροφορία για το σφάλμα ή την ακρίβεια της εκτίμησης, λέμε ότι περιγράφει την *αξιοπιστία* της εκτίμησης.

Τα μεγέθη που εκτιμούμε μπορεί να είναι:

- Στατιστικές παράμετροι μιας μεταβλητής (π.χ. μέση τιμή, διασπορά, ασυμμετρία κλπ.).
- Τιμές μιας μεταβλητής που αντιστοιχούν σε δεδομένη πιθανότητα (π.χ. η τιμή της πλημμυρικής παροχής που συμβαίνει κατά μέσο όρο μια φορά στα 100 χρόνια, ή ακριβέστερα, η τιμή της πλημμυρικής παροχής που έχει πιθανότητα υπέρβασης 1:100 - ή διάστημα επαναφοράς Τ = 100 χρόνια).

Μία εκτίμηση μπορεί να είναι:

- *σημειακή* όταν αποδίδεται με ένα συγκεκριμένο αριθμό
- *διαστήματος* όταν δίνεται με ένα διάστημα, μέσα στο οποίο θεωρούμε ότι περιέχεται (με δεδομένο ποσοστό βεβαιότητας) η τιμή της προς εκτίμηση μεταβλητής. Αυτό το δεδομένο ποσοστό βεβαιότητας λέγεται *βαθμός εμπιστοσύνης* και τα όρια του διαστήματος *όρια εμπιστοσύνης*.

Τυπικές στατιστικές εκτιμήσεις

Οι συχνότερες σημειακές στατιστικές εκτιμήσεις αφορούν στις δύο πρώτες στατιστικές ροπές μιας μεταβλητής, Χ: τη μέση τιμή (μ_X) και τη διασπορά (σ_X^2). Οι αμερόληπτες εμπειρικές εκτιμήσεις τους από ένα δείγμα τιμών x_i, i = 1, ..., N δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mu}_X = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad (6)$$

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{\mu}_X)^2}{N-1} \qquad (7)$$

Τα μεγέθη $\hat{\mu}_Q$ και $\hat{\sigma}_{QY}$ ονομάζονται δειγματική μέση τιμή και δειγματική τυπική απόκλιση αντίστοιχα.

Η εκτίμηση διαστήματος για τη $\hat{\mu}_X$, με την προϋπόθεση ότι η Χ ακολουθεί κανονική κατανομή, δίνεται από τα όρια εμπιστοσύνης $\hat{\mu}_{X1}$ και $\hat{\mu}_{X2}$, τα οποία προσδιορίζονται από τη σχέση:

$$\hat{\mu}_{X1,2} = \hat{\mu}_X \pm \frac{\hat{\sigma}_X \, t_{(1-a)/2}}{\sqrt{n}} \tag{8}$$

όπου n το μέγεθος του δείγματος, $t_{(1-a)/2}$ η τιμή της τυχαίας μεταβλητής του Student, για n-1 βαθμούς ελευθερίας και για πιθανότητα υπέρβασης (1-α)/2, και α ο επιθυμητός βαθμός εμπιστοσύνης (0 < α < 1).

Σημειώνεται ότι όσο μεγαλύτερη τιμή του α επιλέγεται, τόσο πιο ευρύ είναι και το διάστημα εμπιστοσύνης. Τυπικές τιμές που χρησιμοποιούνται είναι από α = 0.90 μέχρι α = 0.99.

Τα παραπάνω είναι κατά προσέγγιση σωστά και για περιπτώσεις που η Q_Y δεν ακολουθεί κανονική κατανομή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κάκουλος, Θ. (1978) *Στοχαστικές ανελίξεις*, Αθήνα.

Ξανθόπουλος Θ. (1990) *Εισαγωγή στην Τεχνική Υδρολογία*, Αθήνα.

Box, G.E.P & Jenkins, G.M. (1970) *Time series analysis, Forecasting and control*, Holden-Day, San Fransisco.

Kottegoda, N.T. (1980) *Stochastic Water Resources Technology*, Mac Millan Press, London, U.K.

Papoulis, A. (1965) *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Mc Graw-Hill.

Shaw, E.M. (1983) *Hydrology in Practice*, Van Nostrand Reinhold, U.K.

Spiegel, M.R. (1977) *Πιθανότητες και Στατιστική*, Μετάφραση στα Ελληνικά Σ. Περσίδη, ΕΣΠΙ, Αθήνα.

Yevjevich, V. (1972) *Probability and Statistics in Hydrology*, Water Resources Publications Fort Collins, Colorado, USA.

Values of the standardized normal distribution (*Continued*)

The cumulative distribution function, $F_U(u) = \int_{-\infty}^{u} f_U(u)\, du$

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725									
2.1	0.98214									
2.2	0.98610									
2.3	0.98928									
2.4	0.99180									
2.5	0.99379									
3.0	0.99865									
3.5	0.999767									
4.0	0.9999683									
4.5	0.9999966									
5.0	0.99999971									
5.5	0.999999981									

u	2.32	3.09	3.72	4.27	4.75	5.20	5.61	6.00	6.36	6.71
$1 - F(u)$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}

Τιμές της μεταβλητής τ, των Student-Fisher συναρτήσει των ν και $F_{1,\nu}(\tau)$.

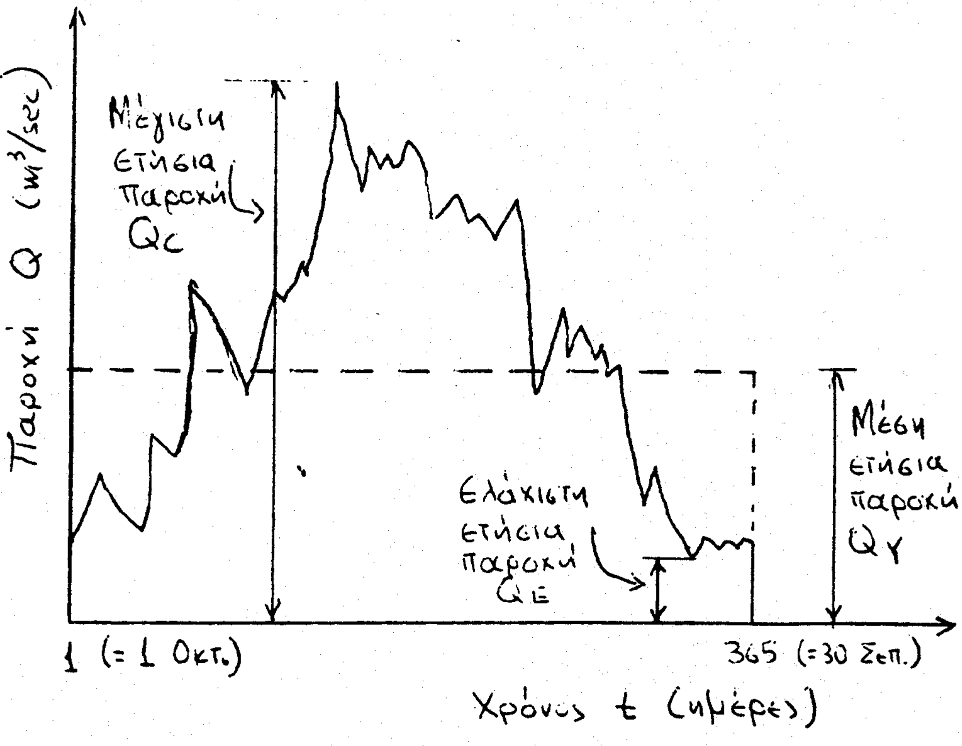
ν \ F_1	0.005	0.010	0.025	0.050	0.10
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΑΠΟΡΡΟΗΣ

Επιμέλεια: Δ Κουτσογιάννης, Λέκτορας ΕΜΠ, Τομέας Υδ. Πόρων, Υδρ. & Θαλ. 'Εργων

Χαρακτηριστικές μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν την απορροή

Η παροχή ενός φυσικού υδατορεύματος αντιπροσωπεύει την συνολική απορροή της υδρολογικής λεκάνης του. Η παροχή εμφανίζει εντονότατες διακυμάνσεις κατά τη διάρκεια ενός έτους, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα (= ετήσιο υδρογράφημα).



Σχήμα 1 Τυπικό ετήσιο υδρογράφημα

Βεβαίως το σχήμα αυτό δεν επαναλαμβάνεται κάθε χρόνο αλλά αντίθετα, εμφανίζεται διαφορετικό. Στο σχήμα αυτό υπάρχει πάντα η ετήσια περιοδικότητα και είναι πιθανό να υπάρχει και κάποια άλλη προσδιοριστική συνιστώσα. Το υπόλοιπο μέρος $Q'(t)$ της συνάρτησης $Q(t)$, (αφού αφαιρεθούν οι προσδιοριστικές συνιστώσες) αντιπροσωπεύεται από μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο.

Στις πιο συνηθισμένες μελέτες της πράξης δεν ενδιαφέρει η πλήρης μαθηματική περιγραφή των ανελίξεων $Q(t)$ ή $Q'(t)$, αλλά μόνο οι τρεις μεμονωμένες στοχαστικές μεταβλητές που διακρίνονται στο σχήμα, οι οποίες παρουσιάζουν και το μεγαλύτερο πρακτικό ενδιαφέρον, ήτοι

- η μέση ετήσια παροχή Q_γ, που εκφράζει το επιφανειακό υδατικό δυναμικό της λεκάνης απορροής,

- η μέγιστη ετήσια παροχή Q_C, που ενδιαφέρει σε προβλήματα εκτίμησης πλημμυρών, και
- η ελάχιστη ετήσια παροχή Q_E, που ενδιαφέρει σε προβλήματα εκτίμησης ξηρασιών, καθώς και σε προβλήματα εκτίμησης της ρύπανσης του υδατορεύματος.

Μεδοδολογίες και παραδοχές μελέτης

Προϋπόθεση για την αξιόπιστη μελέτη της κάθε μιας από τις παραπάνω μεταβλητές είναι η ύπαρξη μιας σειράς μετρήσεων ικανοποιητικού μεγέθους, (π.χ. 20 ετών), η οποία λέγεται και *ιστορική χρονοσειρά*. Ας σημειωθεί ότι οι χρονοσειρές των παραπάνω μεταβλητών δεν είναι πάντα στοχαστικά ανεξάρτητες (ιδίως των μέσων ετήσιων παροχών Q_Y σε μεγάλα ποτάμια). 'Ετσι κάθε μεταβλητή Q_{Yi}, αναφερόμενη σε ένα συγκεκριμένο έτος i μπορεί να είναι στοχαστικά εξαρτημένη με τις αντίστοιχες μεταβλητές των προηγουμένων και επόμενων ετών. 'Οταν όμως ενδιαφέρουν μόνο οι ιδιότητες της *περιθώριας κατανομής* της μεταβλητής και όχι η συσχέτιση των διαδοχικών μεταβλητών, μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι η διατιθέμενη ιστορική χρονοσειρά αποτελεί ένα τυχαίο *ομογενές* δείγμα, με την έννοια ότι κάθε στοιχείο της προέρχεται από τον ίδιο πληθυσμό. Εννοείται ότι για να είναι σωστή η παραδοχή αυτή (α) δεν θα πρέπει να υπάρχουν υπερετήσιες ντετερμινιστικές συνιστώσες (π.χ. τάσεις) (β) θα πρέπει να υπάρχει ομογένεια των μετρήσεων, με την έννοια ότι όλες οι μετρήσεις αναφέρονται στο ίδιο σημείο, και έχουν γίνει με τις ίδιες συνθήκες και (γ) η χρονοσειρά πρέπει να έχει επαρκές μήκος, ώστε να μπορεί να αγνοηθεί η επίδραση της στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ των διαδοχικών μεταβλητών, πάνω στα χαρακτηριστικά της περιθώριας κατανομής.

Στην πράξη είμαστε συχνά υποχρεωμένοι να κάνουμε εκτιμήσεις των παραπάνω υδρολογικών μεταβλητών με ανεπαρκή ιστορικά δεδομένα, ή και με πλήρη έλλειψη δεδομένων παροχής, τα οποία αποτελούν την *πρωτεύουσα υδρολογική πληροφορία*. Η υδρολογία διαθέτει κατάλληλες μεθοδολογίες και για αυτές τις περιπτώσεις, αλλά τα αποτελέσματα τους είναι πάντα μειωμένης αξιοπιστίας. Οι μεθοδολογίες αυτές αξιοποιώντας την ισχυρή συσχέτιση μεταξύ βροχής και απορροής, βασίζονται κυρίως σε χρονοσειρές βροχόπτωσης, που αποτελούν τη *δευτερεύουσα υδρολογική πληροφορία*. Συχνά για τις εκτιμήσεις επιστρατεύονται και χρονοσειρές άλλων μεταβλητών του υδρολογικού κύκλου, όπως της εξάτμισης, της διήθησης κλπ. που αποτελούν την *τριτεύουσα υδρολογική πληροφορία*.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξανθόπουλος Θ. (1990) *Εισαγωγή στην Τεχνική Υδρολογία*, Αθήνα.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕΣΩΝ ΠΑΡΟΧΩΝ

Επιμέλεια: Δ Κουτσογιάννης, Λέκτορας ΕΜΠ, Τομέας Υδ. Πόρων, Υδρ. & Θαλ. 'Εργων

Σημασία της εκτίμησης

Η μέση ετήσια απορροή αντιπροσωπεύει το ολικό επιφανειακό *υδατικό δυναμικό* μιας λεκάνης απορροής. Η ποσοτική εκτίμηση της είναι απαραίτητη για τον ορθολογικό σχεδιασμό και τη λειτουργία των έργων αξιοποίησης του υδατικού δυναμικού (για ύδρευση, άρδευση, υδροηλεκτρική εκμετάλλευση κλπ.). Σημειώνεται ότι η εντατική εκμετάλλευση του υδατικού δυναμικού απαιτεί την κατασκευή *ταμιευτήρων υπερετήσιας ρύθμισης (ή εξίσωσης)* οι οποίοι αποθηκεύουν το νερό κατά τα έτη πλούσιας υδροφορίας, και το αποδίδουν κατά τα έτη φτωχής υδροφορίας. Με μικρότερου μεγέθους ταμιευτήρες, γνωστούς ως *ετήσιας ρύθμισης*, στους οποίους το νερό αποθηκεύεται τους μήνες υψηλής υδροφορίας (χειμώνας-άνοιξη) και αποδίδεται το καλοκαίρι, επιτυγχάνεται η αξιοποίηση μικρότερου ποσοστού του υδατικού δυναμικού. Συμπερασματικά, όσο πιο μεγάλο είναι το μέγεθος των έργων ταμίευσης, τόσο πιο μεγάλο ποσοστό του συνολικού επιφανειακού δυναμικού γίνεται εκμεταλλεύσιμο, χωρίς όμως ποτέ να φτάνει το 100%, δεδομένου ότι υπάρχουν πάντα οι απώλειες εξάτμισης, ενώ δεν μπορούν να αποκλειστούν και οι υπερχειλίσεις.

Η εκτίμηση του ολικού επιφανειακού δυναμικού είναι ακόμα χρήσιμη για περιβαλλοντικές μελέτες, κυρίως σε υδατικά συστήματα που περιλαμβάνουν λίμνες, φυσικές ή τεχνητές, καθώς και σε εκβολές ποταμών στη θάλασσα. Από την ποσότητα του υδατικού δυναμικού προκύπτουν βασικές παράμετροι τέτοιων συστημάτων, όπως οι *χρόνοι ανανέωσης* τους.

Τυπικές συναρτήσεις κατανομής

Υπάρχουν θεωρητικοί λόγοι (θεώρημα κεντρικού ορίου) από τους οποίους προκύπτει ότι η κατανομή της μέσης ετήσιας παροχής προσεγγίζει στην κανονική κατανομή του Gauss, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad -\infty \leq x \leq +\infty \tag{1}$$

όπου μ και σ παράμετροι της κατανομής (σ > 0) και η μεταβλητή X χρησιμοποιείται ως ισοδύναμη με την Q_Y. Πράγματι, η κανονική κατανομή είναι κατάλληλη για την περιγραφή μέσων ετήσιων παροχών, σε αρκετά μεγάλες λεκάνες απορροής, με άφθονες βροχοπτώσεις, διανεμημένες σε μακρά χρονική περίοδο.

Για μικρότερες λεκάνες απορροής (χειμάρρων), ή/και για περιοχές αρκετά ξηρές, ταιριάζουν καλύτερα ασύμμετρες συναρτήσεις κατανομής, όπως αυτές που προκύπτουν από εκθετικό ή λογαριθμικό μετασχηματισμό της κανονικής κατανομής (μετασχηματισμός Box-Cox):

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{(2\pi)}} \exp\left[-\frac{(z-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] \qquad (2)$$

όπου

$$z = (x^\lambda - 1) / \lambda, \qquad \lambda \neq 0$$
$$z = \ln(x), \qquad \lambda = 0 \qquad (3)$$

με πρόσθετη παράμετρο (πέραν των μ_Z και σ_Z) τη λ, και $0 \leq x \leq +\infty$. Συχνά χρησιμοποιείται ένας πιο γενικευμένος λογαριθμικός μετασχηματισμός, της μορφής

$$z = \ln(x-\alpha) \qquad \alpha \leq x \leq +\infty \qquad (4)$$

με πρόσθετη παράμετρο την α. Η κατανομή που προκύπτει με το μετασχηματισμό (4) είναι γνωστή ως κατανομή Galton ή λογαριθμοκανονική.

Ευρέως χρησιμοποιείται επίσης σε τέτοιες περιπτώσεις η κατανομή Γάμα ή Pearson III, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\kappa (x-\alpha)^{\kappa-1} \exp[-\lambda(x-\alpha)]}{\Gamma(\kappa)}, \qquad \alpha \leq x \leq +\infty \qquad (5)$$

όπου α, κ, λ παράμετροι (κ, λ > 0) και Γ() η συνάρτηση γάμα. Για α = 0 προκύπτει η κατανομή Γάμα 2 παραμέτρων.

Εκτίμηση παραμέτρων των κατανομών

Η εκτίμηση των παραμέτρων μιας κατανομής γίνεται με βάση το διατιθέμενο ιστορικό δείγμα. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι εκτίμησης, με απλούστερη τη *μέθοδο των ροπών*. Η μέθοδος συνίσταται στην εξίσωση των θεωρητικών ροπών της συνάρτησης κατανομής (που εξαρτώνται από τις παραμέτρους της κατανομής) με τις εμπειρικές εκτιμήσεις τους, που προέρχονται από το δείγμα. Προφανώς καταστρώνονται τόσες εξισώσεις, όσες είναι και οι άγνωστες παράμετροι. Στις πιο τυπικές περιπτώσεις συναρτήσεων κατανομής δύο παραμέτρων χρειάζονται οι δύο πρώτες ροπές, η μέση τιμή (μ) και η διασπορά (σ^2). Με εφαρμογή της μεθόδου των ροπών προκύπτουν οι ακόλουθες, άμεσα εφαρμόσιμες εξισώσεις εκτίμησης παραμέτρων:

α) Για την κανονική κατανομή

$$\mu = \hat{\mu}_X, \qquad \sigma^2 = \hat{\sigma}_X^2 \qquad (6)$$

β) Για την λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων (α = 0)

$$\sigma_Z^2 = \ln[1+ (\hat{\sigma}_X^2 / \hat{\mu}_X^2)], \quad \mu_Z = \ln \hat{\mu}_X - (\hat{\sigma}_Z^2 / 2) \qquad (7)$$

γ) Για την κατανομή γάμα δύο παραμέτρων (a = 0)

$$\kappa = \frac{\hat{\mu}_X^2}{\hat{\sigma}_X^2}, \quad \lambda = \frac{\hat{\mu}_X}{\hat{\sigma}_X^2} \tag{8}$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις για τις συναρτήσεις κατανομής τριών παραμέτρων (λογαριθμοκανονική και γάμα) είναι αρκετά πολύπλοκες και παραλείπονται (ο αναγνώστης παραπέμπεται στον Kottegoda, 1980). Για την εκθετικά μετασχηματισμένη κανονική κατανομή (μετασχ. Box-Cox, σχ. 3), η οποία περιλαμβάνει επίσης τρείς παραμέτρους, η εκτίμηση των παραμέτρων είναι εξίσου πολύπλοκη. Η παράμετρος λ μπορεί κατ' αρχήν να επιλεγεί (μετά από επαναλήψεις) σε τρόπο ώστε να προκύπτει η απολύτως ελάχιστη ασυμμετρία του μετασχηματισμένου δείγματος. Ωστόσο η αποτελεσματικότητα αυτής της μεθόδου είναι αρκετά μικρή, σε σύγκριση με αυτήν της μεθόδου της *μέγιστης πιθανοφάνειας*. Σύμφωνα με την τελευταία η εκτίμηση του λ γίνεται με βάση τη σχέση (Chander κ.α., 1978)

$$L(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda-1}}{\sigma_Z^n} = \max \tag{9}$$

Η παραπάνω σχέση λύνεται μόνο αριθμητικά. Οι παράμετροι μ_Z και σ_Z θεωρούνται ίσες με τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του μετασχηματισμένου δείγματος. Ο Kottegoda (1980) περιγράφει μια σχετικά απλούστερη μέθοδο, αυτήν του Hinkley. Σύμφωνα με αυτή, για κάθε δοκιμαστική τιμή του $\lambda = 0, \pm 0.5, \pm 1.0, \ldots$, υπολογίζεται η μέση τιμή $\hat{\mu}_Z$, η τυπική απόκλιση $\hat{\sigma}_Z$ και η διάμεσος $\hat{\zeta}_Z$ του μετασχηματισμένου δείγματος. Στη συνέχεια συγκρίνονται οι τιμές της παραμέτρου $d_\lambda = (\hat{\mu}_Z - \hat{\zeta}_Z) / \hat{\sigma}_Z$, και επιλέγεται η τιμή λ που ελαχιστοποιεί την d_λ.

Εκτίμηση της μέσης ετήσιας εισροής για δεδομένη πιθανότητα υπέρβασης

'Οταν είναι γνωστή η μαθηματική μορφή της συνάρτησης κατανομής $F_X(x)$ μιας μεταβλητής X, και έχουν εκτιμηθεί οι παράμετροι της, είναι εύκολο να υπολογιστεί κάποια συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής, που αντιστοιχεί σε δεδομένη τιμή της πιθανότητας μη υπέρβασης $F_X = y$ ή της πιθανότητας υπέρβασης $F_{1X} = 1 - y$: Αρκεί να λυθεί ως προς x η εξίσωση $F_X(x) = y$. Βέβαια, σε όλες τις συναρτήσεις κατανομής της προηγούμενης παραγράφου δεν προκύπτει απλή αναλυτική επίλυση της εξίσωσης ως προς x. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί απαιτούν τη χρήση στατιστικών πινάκων ή ηλεκτρονικού υπολογιστή, με παράλληλη χρήση αριθμητικής ανάλυσης.

Οι προκύπτουσες με τον τρόπο αυτό τιμές της μεταβλητής x, αποτελούν *σημειακές εκτιμήσεις* της. Η εξαγωγή *εκτίμησης διαστήματος* είναι ένα πρόβλημα αρκετά πολύπλοκο και δεν εξετάζεται εδώ. Πάντως για ορισμένες κατανομές όπως η κανονική, το πρόβλημα αντιμετωπίζεται αναλυτικά και με σχετικά απλό τρόπο (βλ. Spiegel, 1977, Ξανθόπουλος, 1990), ενώ για άλλες κατανομές είναι απαραίτητο να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους επίλυσης (π.χ. Monte Carlo).

Ενα παράδειγμα εκτιμήσεων για την κανονική κατανομή δίνεται στην ακόλουθη εφαρμογή.

Εφαρμογή 1

Σε κατάλληλη θέση ενός χειμάρρου μελετάται η κατασκευή ταμιευτήρα ετήσιας ρύθμισης, για αρδευτική εκμετάλλευση. Οι απορροές του χειμάρρου πραγματοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά το χειμώνα και την άνοιξη, ενώ η εκμετάλλευσή τους γίνεται αποκλειστικά το καλοκαίρι και τους πρώτους φθινοπωρινούς μήνες. Τεχνικοί και οικονομικοί λόγοι καθόρισαν την ωφέλιμη χωρητικότητα του ταμιευτήρα σε $25*10^6$ m^3 και τη μέση επιφάνεια που κατακλύζεται σε 1 km^2. Στη θέση του φράγματος έχει εκτελεστεί ένα 20ετές πρόγραμμα υδρομετρήσεων. Από το ιστορικό δείγμα μεγέθους N = 20, προέκυψαν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ετήσιας απορροής (= (μέση ετήσια παροχή) * (1 έτος)): $\hat{\mu} = 21.2*10^6$ m^3 και $\hat{\sigma} = 5.5*10^6$ m^3. Με την προϋπόθεση ότι κατά τη λειτουργία του ταμιευτήρα θα εξαντλούνται σε κάθε αρδευτική περίοδο τα υδατικά αποθέματα, ζητούνται: (α) η δυνατή απόληψη που εξασφαλίζεται με πιθανότητα 90% και 50% και (β) η συχνότητα με την οποία θα συμβαίνουν υπερχειλίσεις στον ταμιευτήρα. Να θεωρηθεί ότι οι καθαρές απώλειες εξάτμισης (= εξάτμιση - βροχόπτωση) κάθε χρόνο θεωρούνται κατά προσέγγιση σταθερές, ίσες με 500 mm.

Λύση: Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο η κατανομή των εισροών στον ταμιευτήρα δεν θα πρέπει να είναι κανονική. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες στο θέμα της επιλογής της κατάλληλης κατανομής θα δεχτούμε σαν τέτοια την λογαριθμοκανονική δύο παραμέτρων. Οι παράμετροι της υπολογίζονται από τις σχέσεις (7) και είναι:

$$\sigma_Z^2 = \ln\,[1 + 5.5^2 / 21.2^2\,] = 0.0651 \quad ή \quad \sigma_Z = 0.255$$

και

$$\mu_Z = \ln 21.2 - 0.0651 / 2 = 3.02$$

(Σημείωση: Για απλοποίηση των πράξεων χρησιμοποιούμε σαν μονάδα το $1*10^6$ m^3).

Ερώτημα (α1): Δίνεται $P(Q_Y \geq q) = F_{1QY}(q) = 90\%$, άρα $F_{QY}(q) = 1 - 0.90 = 0.10$, και ζητείται η τιμή q. Προφανώς ισχύει $F_Z(z) = F_{QY}(q) = 0.10$ όπου $z = \ln q$ (σχ. 4). Η $F_Z(z)$ είναι η κανονική συνάρτηση κατανομής (σχ. 2). Από τον πίνακα της κανονικής κατανομής για F = 0.10 προκύπτει ότι η τυποποιημένη μεταβλητή $U = [(Z-\mu_Z) / \sigma_Z]$ έχει την τιμή u = -1.285 και κατά συνέπεια $z = -1.285 * 0.255 + 3.02 = 2.69$. Άρα $q = e^z = e^{2.69} = 14.8$ ($*10^6$ m^3).

Ερώτημα (α2): Δίνεται $P(Q_Y \geq q) = 50\%$ άρα $F_Z(z) = F_{QY}(q) = 0.50$. Θα είναι $u = 0$ και $z = 3.02$, άρα $q = e^{3.02} = 20.5$ ($*10^6$ m^3).

Τα παραπάνω αποτελέσματα αναφέρονται σε εισροές στον ταμιευτήρα. Οι απολήψεις θα είναι μειωμένες κατά την ποσότητα της καθαρής απώλειας εξάτμισης, που είναι: $\varepsilon = 0.5$ m $*$ 10^6 m^2 = $0.5 * 10^6$ m^3.

Κατά συνέπεια, σε 90 από τις 100 αρδευτικές περιόδους η απόληψη θα είναι μεγαλύτερη ή ίση των $(14.8 - 0.5)*10^6$ m^3 = $14.3 * 10^6$ m^3, ενώ στις μισές αρδευτικές περιόδους η απόληψη θα είναι μεγαλύτερη ή ίση των $(20.5 - 0.5)*10^6$ m^3 = $20.0 * 10^6$ m^3.

Ερώτημα (β): Προφανώς υπερχειλίσεις συμβαίνουν όταν η εισροή είναι μεγαλύτερη από τον όγκο του ταμιευτήρα. Η πιθανότητα να έχουμε υπερχείλιση είναι: $p_Y = P(Q_Y > V)$ όπου $V = 25$ ($*10^6$ m^3). Αλλά $p_Y = F_{1QY}(V) = 1 - F_{QY}(V) = 1 - F_Z(z)$. Η τυποποιημένη κανονική μεταβλητή είναι: $u = (\ln 25 - 3.02) / 2.255 = 0.796$, οπότε από τον πίνακα της κανονικής κατανομής προκύπτει $F_Z = 0.787$. Άρα $p_Y = 1 - 0.787 = 21.3\%$. Συμπερασματικά, κατά μέσο όρο στα 21.3 από τα 100 χρόνια θα πραγματοποιούνται υπερχειλίσεις από τον ταμιευτήρα.

Εκτίμηση της μέσης υπερετήσιας παροχής

Με τον όρο μέση υπερετήσια παροχή μ_{QY} εννοούμε τη μέση τιμή της μεταβλητής Q_Y. Προφανώς η σημειακή εκτίμηση της δίνεται από το μέσο όρο των μέσων ετησίων παροχών του δείγματος $\hat{\mu}_{QY}$. Αντίστοιχα οι εκτιμήσεις διαστήματος της μ_{QY} δίνονται από τη μελέτη της κατανομής της δειγματικής μέσης τιμής $\hat{\mu}_{QY}$, θεωρούμενης ως τυχαίας μεταβλητής.

Με την προϋπόθεση ότι η Q_Y ακολουθεί κανονική κατανομή, τα όρια εμπιστοσύνης q_{Y1}, και q_{Y2} για την μέση υπερετήσια παροχή μ_{QY}, δίνονται από τη σχέση:

$$q_{Y1,2} = \hat{\mu}_{QY} \pm \frac{\hat{\sigma}_{QY}\, t_{(1-a)/2}}{\sqrt{n}} \tag{10}$$

όπου $\hat{\mu}_Q$ η δειγματική μέση τιμή, $\hat{\sigma}_{QY}$ η δειγματική τυπική απόκλιση, n το μέγεθος του δείγματος, $t_{(1-a)/2}$ η τιμή της τυχαίας μεταβλητής του Student, για n-1 βαθμούς ελευθερίας και για πιθανότητα υπέρβασης $(1-a)/2$, και a ο επιθυμητός βαθμός εμπιστοσύνης ($0 < a < 1$).

Τα παραπάνω είναι κατά προσέγγιση σωστά και για περιπτώσεις που η Q_Y δεν ακολουθεί κανονική κατανομή.

Εφαρμογή 2

Μία λίμνη μέσης έκτασης $F = 10$ km^2 και μέσου όγκου $V = 20*10^6$ m^3 τροφοδοτείται με την απορροή χειμάρρων με συνολική έκταση λεκανών 200 km^2. Η αθροιστική ετήσια απορροή των χειμάρρων, εκτιμημένη από δείγμα 18 ετών, έχει μέση τιμή $\hat{\mu}_{QY}$ = $80.0*10^6$ m^3 και τυπική απόκλιση $\hat{\sigma}_{QY}$ = $14.0*10^6$ m^3. Η καθαρή απώλεια εξάτμισης (= εξάτμιση - βροχόπτωση) στη λίμνη μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, ίση με 700 mm ετησίως, ενώ τα περισσεύματα απορροής διαφεύγουν υπόγεια ή υπερχειλίζουν προς παρακείμενη αποχετευτική τάφρο. Ζητείται η σημειακή εκτίμηση και τα όρια εμπιστοσύνης (για βαθμό εμπιστοσύνης 95%) του μέσου χρόνου ανανέωσης της λίμνης.

Λύση: Ο μέσος χρόνος ανανέωσης της λίμνης δίνεται από την προφανή σχέση:

$$t_a(\text{έτη}) = V \ / \ q_K$$

όπου q_K είναι η καθαρή μέση ετήσια εισροή στη λίμνη, (εκφρασμένη σε όγκο/έτος). Στο μέγεθος q_K έχουν αφαιρεθεί οι καθαρές απώλειες εξάτμισης, δεδομένου ότι αυτές δεν συντελούν στην ανανέωση του νερού της λίμνης (εξατμίζεται μόνο καθαρό νερό ενώ οι περιεχόμενες διαλυμένες ουσίες παραμένουν). Αν ο όγκος V της λίμνης θεωρηθεί σταθερός, τότε το πρόβλημα της εκτίμησης του χρόνου t_a μεταπίπτει στην εκτίμηση του q_K.

Η σημειακή εκτίμηση της μέσης ετήσιας εισροής είναι προφανώς η:

$$\hat{\mu}_{QY} = 80 * 10^6 \ m^3$$

Από τον πίνακα τιμών της μεταβλητής Student για (1-a)/2 = 0.025 και για n-1 = 17 βαθμούς ελευθερίας προκύπτει $t_{(1-a)/2}$ = 2.11 οπότε τα όρια για την μ_{QY} θα είναι:

$$q_{Y1} = 80 - \overset{14.0}{14}*2.11 \ / \ \sqrt{\overset{18}{17}} = 73.0 \ (*10^6 \ m^3)$$
$$q_{Y2} = 80 + 14*2.11 \ / \ \sqrt{17} = 87.0 \ (*10^6 \ m^3)$$

Για να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές της q_K θα πρέπει να αφαιρέσουμε το μέγεθος της καθαρής απώλειας εξάτμισης, που σε ετήσια βάση είναι:

$$\varepsilon = 0.7 * 10 * 10^6 = 7 * 10^6 \ m^3$$

Κατά συνέπεια τα αντίστοιχα μεγέθη για την μέση ετήσια καθαρή εισροή είναι:

$$q_{K\mu} = 73.0 * 10^6 \ m^3/\text{έτος}$$
$$q_{K1} = 66.0 * 10^6 \ m^3/\text{έτος}$$

$q_{\kappa 2} = 80.0 * 10^6 \ m^3/\text{έτος}$

Τέλος οι τιμές του χρόνου ανανέωσης είναι:

$$t_{\alpha\mu} = 20*10^6 \ / \ 73.0*10^6 = 0.274 \text{ έτη} = 3.3 \text{ μήνες}$$
$$t_{\alpha 1} = 20*10^6 \ / \ 66.0*10^6 = 0.304 \text{ έτη} = 3.6 \text{ μήνες}$$
$$t_{\alpha 2} = 20*10^6 \ / \ 80.0*10^6 = 0.250 \text{ έτη} = 3.0 \text{ μήνες}$$

Κατά συνέπεια, από τα υπάρχοντα στοιχεία προκύπτει ότι με διακινδύνευση λάθους 1-α = 5%, ο μέσος χρόνος ανανέωσης της λίμνης κυμαίνεται στο διάστημα από 3.0 μέχρι 3.6 μήνες με μέση τιμή 3.3 μήνες.

Πρακτικές μέθοδοι εκτίμησης με ελλιπή στοιχεία

Θα αναφερθούμε σε δύο σχετικά απλές μεθόδους εκτίμησης του υδατικού δυναμικού, όταν τα διαθέσιμα στοιχεία είναι ανεπαρκή, ή και λείπουν παντελώς.

Η πρώτη μέθοδος στηρίζεται (α) στη βροχόπτωση της υπό εξέταση λεκάνης απορροής και (β) στην απορροή και τη βροχόπτωση μιας γειτονικής λεκάνης, με παρόμοιο μέγεθος, τοπογραφική διαμόρφωση και γεωλογική σύσταση, που βρίσκεται κάτω από παρόμοιες κλιματικές συνθήκες. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η απορροή της υπό εξέταση λεκάνης (μέση ετήσια παροχή ενός συγκεκριμένου έτους, ή μέση υπερετήσια παροχή) εκφρασμένη σε ισοδύναμο ύψος στη λεκάνη προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$Q_\gamma = C \ P \tag{11}$$

όπου P η ετήσια βροχόπτωση και C ο συντελεστής απορροής, ο οποίος λαμβάνεται ίσος με τον αντίστοιχο συντελεστή της γειτονικής λεκάνης C′,

$$C = C' = \frac{Q'_\gamma}{P'} \tag{12}$$

όπου Q'_γ η μετρημένη απορροή και P′ η μετρημένη βροχόπτωση της γειτονικής λεκάνης.

Η δεύτερη μέθοδος στηρίζεται στη βροχόπτωση και την εξάτμιση της υπό εξέταση λεκάνης και βασίζεται στην απλή εξίσωση υδατικού ισοζυγίου:

$$Q_\gamma = P - ET \tag{13}$$

όπου P η ετήσια βροχόπτωση και ET η ετήσια *πραγματική εξατμισοδιαπνοή* της λεκάνης. Η τελευταία εξίσωση ισχύει κατά προσέγγιση σε ετήσια βάση με την προϋπόθεση ότι η λεκάνη είναι στεγανή, δηλαδή δεν έχουμε υπόγεια κυκλοφορία νερού από και προς άλλες λεκάνες. Η βροχόπτωση P προσδιορίζεται πάντα με ικανοποιητική ακρίβεια, αλλά ο προσδιορισμός της πραγματικής εξατμισοδιαπνοής είναι πολύπλοκος και μειωμένης αξιοπιστίας, δεδομένου ότι αυτή εξαρτάται *και από την διαθεσιμότητα νερού στο έδαφος*, πέρα από την προφανή εξάρτηση της από πλήθος κλιματικών παραγόντων. Στην απλούστερη των περιπτώσεων προσδιορίζεται αρχικά η *δυναμική εξατμισοδιαπνοή* (δηλαδή η εξατμισοδιαπνοή που θα συνέβαινε κάτω από συνθήκες συνεχούς κορεσμού του εδάφους) και στη συνέχεια χρησιμοποιείται ένα απλό μοντέλο που αναπαριστά την διακύμανση της εδαφικής υγρασίας, π.χ. σε μηνιαία βάση, από το οποίο υπολογίζεται στη συνέχεια η πραγματική εξατμισοδιαπνοή. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και χωρίς να υπάρχουν καθόλου μετρήσεις παροχής, αλλά πάντως τέτοιες μετρήσεις, αν υπάρχουν έστω και για λίγα χρόνια, αυξάνουν σοβαρά την αξιοπιστία της εκτίμησης, δεδομένου ότι βοηθούν στην αντικειμενικότερη εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου που χρησιμοποιείται.

Μοντέλα λεκανών απορροής

Οι δυνατότητες που παρέχουν οι σύγχρονοι υπολογιστές επέτρεψαν την κατάρτιση πολύπλοκων μαθηματικών μοντέλων, που αναπαριστούν μαθηματικά είτε την πλήρη εξέλιξη του υδρολογικού κύκλου σε μία λεκάνη απορροής, είτε ένα συγκεκριμένο τμήμα του υδρολογικού κύκλου που ενδιαφέρει. Η εφαρμογή τέτοιων μοντέλων δίνει πολύ πιο αξιόπιστους τρόπους εκτίμησης του υδατικού δυναμικού, σε σχέση με αυτούς που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Βεβαίως η εφαρμογή τους απαιτεί κάποιες, έστω και μικρού μεγέθους (λίγων ετών), χρονοσειρές ιστορικών δεδομένων, για τη ρύθμιση των παραμέτρων τους.

Σύμφωνα με την επικρατούσα κατάταξη τα μοντέλα διακρίνονται σε στοχαστικά και προσδιοριστικά. Στα πρώτα αγνοούνται οι φυσικοί μηχανισμοί που επενεργούν κατά την εξέλιξη του υδρολογικού κύκλου, και τα μοντέλα καταστρώνονται βάσει μαθηματικών (στοχαστικών) συσχετισμών των διάφορων μεταβλητών. Τα δεύτερα, αντίθετα βασίζουν τη μαθηματική τους δομή σε αυτούς τους φυσικούς μηχανισμούς. Τα προσδιοριστικά μοντέλα εν γένει περιγράφουν πληρέστερα τη συνδυασμένη εξέλιξη του συνόλου των υδρολογικών μεταβλητών μιας λεκάνης. Παίρνουν ως "εισόδους" τα χαρακτηριστικά της λεκάνης, την βροχόπτωση και τη δυναμική εξατμισοδιαπνοή, αναπαριστούν την εξέλιξη της πραγματικής εξατμισοδιαπνοής, της κατακράτησης, της διήθησης, της εδαφικής και της υπόγειας αποθήκευσης νερού, της αποθήκευσης και της τήξης του χιονιού κλπ., και καταλήγουν στην εξαγωγή της χωροχρονικής εξέλιξης της απορροής.

Τα στοχαστικά μοντέλα μπορούν να υποκαταστήσουν τα προσδιοριστικά σε συγκεκριμένα τμήματα του υδρολογικού κύκλου, και παράλληλα δίνουν τις "εισόδους" στα προσδιοριστικά μοντέλα, σε περιπτώσεις που γίνεται συνθετική προσομοίωση (simulation) της υδρολογικής δίαιτας της λεκάνης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξανθόπουλος Θ. (1990) *Εισαγωγή στην Τεχνική Υδρολογία*, Αθήνα.

Chander, S., Spolia, S.K. & Kumar, A. (1978) Flood frequency analysis by power transformation. *Proc. ASCE*, 104 (HY11) 1495.

Kottegoda, N.T. (1980) *Stochastic Water Resources Technology*, Mac Millan Press, London, U.K.

Papoulis, A. (1965) *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Mc Graw-Hill.

Shaw, E.M. (1983) *Hydrology in Practice*, Van Nostrand Reinhold, U.K.

Spiegel, M.R. (1977) *Πιθανότητες και Στατιστική*, Μετάφραση στα Ελληνικά Σ. Περσίδη, ΕΣΠΙ, Αθήνα.

Yevjevich, V. (1972) *Probability and Statistics in Hydrology*, Water Resources Publications Fort Collins, Colorado, USA.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΠΑΡΟΧΩΝ

Επιμέλεια: Δ Κουτσογιάννης, Λέκτορας ΕΜΠ, Τομέας Υδ. Πόρων, Υδρ. & Θαλ. 'Εργων

Σημασία της εκτίμησης

Κατ' αρχήν πρέπει να διευκρινίσουμε ότι η εκτίμηση ελαχίστων παροχών έχει νόημα όταν πρόκειται για ποταμούς ή αξιόλογους χειμάρρους, που τροφοδοτούνται από πηγές συνεχούς υδροφορίας. Μικρότεροι χείμαρροι καθαρώς επιφανειακής τροφοδοσίας, ξηραίνονται τελείως κατά τους καλοκαιρινούς μήνες.

Η εκτίμηση των ελάχιστων παροχών ξηρασίας αποκτά ενδιαφέρον σε περιπτώσεις που η εκμετάλλευση του νερού γίνεται με άμεση απόληψη από ένα υδατόρευμα χωρίς έργα ταμίευσης (π.χ. απευθείας άντληση). Τότε βέβαια η ελάχιστη παροχή καθορίζει την απολήψιμη ποσότητα νερού από το υδατόρευμα.

Επίσης η εκτίμηση των ελάχιστων τιμών της παροχής είναι αποφασιστικής σημασίας προϋπόθεση για μία ορθολογική περιβαλλοντική μελέτη ενός υδατορεύματος, στο οποίο καταλήγουν οποιασδήποτε μορφής ρυπαντικές ουσίες (π.χ. από διάθεση λυμάτων-αποβλήτων). Είναι προφανές ότι κατά τις περιόδους της ξηρασίας παρατηρούνται οι μέγιστες τιμές της συγκέντρωσης ρυπαντών στο νερό, και κατά συνέπεια το πρόβλημα της ξηρασίας συνδυάζεται και με την κρισιμότητα από πλευράς ρύπανσης.

Σημειώνεται ότι η ελάχιστη τιμή της παροχής δεν περιγράφει πλήρως τα χαρακτηριστικά μιας ξηρασίας. Αλλες μεταβλητές όπως η διάρκεια της ξηρασίας θα πρέπει γενικά να εξετάζονται σε συνδυασμό. 'Ομως εδώ θα περιοριστούμε μόνο στη μελέτη της ελάχιστης παροχής αποκλειστικά.

Η στιγμιαία ελάχιστη τιμή της παροχής, Q_E, δεν αποδίδει πιστά τα προβλήματα μιας περιόδου ξηρασίας, δεδομένου ότι οι επιπτώσεις της ξηρασίας προκύπτουν από την εμφάνιση μιας σειράς χαμηλών παροχών. Για το λόγο αυτό, αντί της στιγμιαίας τιμής προτιμάται η μελέτη μιας ελάχιστης "μέσης" παροχής, που προκύπτει ως ο μέσος όρος των παροχών σε n διαδοχικές μέρες ξηρασίας (π.χ. n = 10, 20, 30 ημέρες). Πάντως κατά τις περιόδους ξηρασίας δεν εμφανίζονται σημαντικές διακυμάνσεις της παροχής, και κατά συνέπεια η ελάχιστη στιγμιαία τιμή δεν διαφέρει πολύ από την ελάχιστη μέση παροχή. Σε κάθε περίπτωση η μεθοδολογία στατιστικής ανάλυσης που ακολουθείται είναι η ίδια, ανεξάρτητα από το ποιά χαρακτηριστική μεταβλητή έχει επιλεγεί.

Θα πρέπει τέλος να τονιστεί ότι, προϋπόθεση για την εκτίμηση της ελάχιστης παροχής, είναι η ύπαρξη μετρήσεων παροχής, έστω και στιγμιαίων υδρομετρήσεων. Δεδομένου ότι οι παροχές των περιόδων ξηρασίας προέρχονται αποκλειστικά από εκφόρτιση υπόγειων υδροφορέων, δεν συσχετίζονται άμεσα με άλλες μεταβλητές του υδρολογικού κύκλου, και κατά συνέπεια δεν μπορούν να εκτιμηθούν με έμμεσο τρόπο από τις τελευταίες. Τα προσδιοριστικά μοντέλα της πλήρους (επιφανειακής και υπόγειας) υδρολογικής δίαιτας μιας λεκάνης απορροής μπορεί να βοηθήσουν, σε περίπτωση ανεπάρκειας στοιχείων, αλλά και αυτά απαιτούν ρύθμιση με βάση έστω και μια μικρού μήκους χρονοσειρά παροχών.

Τυπικές συναρτήσεις κατανομής και χρήση τους

Οι ασυμπτωτικές κατανομές ελαχίστων, οι οποίες προκύπτουν από θεωρητικές υποθέσεις και αναλύσεις, περιγράφουν συνήθως με ικανοποιητικό τρόπο τις ελάχιστες ετήσιες παροχές Q_E. Οι κατανομές αυτές είναι:

α) Κατανομή *ελαχίστων τύπου I, ή Gumbel* με συνάρτηση κατανομής:

$$F_X(x) = 1 - \exp(-\exp(a(x-x_0))), \quad -\infty \leq x \leq +\infty \tag{1}$$

όπου a και x_0 παράμετροι ($a > 0$).

β) Κατανομή *ελαχίστων τύπου III ή Weibull*, με συνάρτηση κατανομής.

$$F_X(x) = 1 - \exp\left[-\left[\frac{x-a}{b-a}\right]^c\right], \quad a \leq x \leq +\infty \tag{2}$$

όπου a, b και c παράμετροι ($b > a$, $c > 0$). Για $a = 0$ προκύπτει η κατανομή Weibull δύο παραμέτρων.

γ) Εκθετικά μετασχηματισμένη κανονική κατανομή:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{(2\pi)}} \exp\left[-\frac{(z-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] \tag{3}$$

όπου

$$z = (x^\lambda - 1) / \lambda, \quad 0 \leq x \leq +\infty \tag{4}$$

με πρόσθετη παράμετρο (πέραν των μ_Z και σ_Z) τη $\lambda \neq 0$

Εκτίμηση παραμέτρων των κατανομών

Η εκτίμηση των παραμέτρων των κατανομών ελαχίστων γίνεται ως εξής:

α) Για την κατανομή ελαχίστων Gumbel η μέθοδος των ροπών δίνει τις σχέσεις

$$a = \frac{\pi/\sqrt{6}}{\hat{\sigma}_X}, \qquad x_0 = \hat{\mu}_X + (\gamma/a) \tag{5}$$

όπου $\pi = 3.14159$ και $\gamma = 0.57722$ (= σταθερά Euler[1]). Από τις σχέσεις

---

1. Η σταθερά Euler ορίζεται από τη σχέση

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right]$$

αυτές προκύπτουν άμεσα οι τιμές των παραμέτρων a και x_0.

γ) Για την κατανομή Weibull 2 παραμέτρων (a = 0), η μέθοδος των ροπών δίνει τις σχέσεις:

$$\frac{\Gamma(1+2/c)}{\Gamma^2(1+1/c)} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\hat{\mu}_X} + 1, \qquad b = \frac{\hat{\mu}_X}{\Gamma(1+2/c)} \tag{6}$$

όπου Γ() η συνάρτηση Γάμα. Η άμεση επίλυση των εξισώσεων αυτών ως προς b και c δεν είναι δυνατή, αλλά απαιτείται η εφαρμογή αριθμητικών επαναληπτικών μεθόδων. Λόγω της πολυπλοκότητας του χειρισμού των παραπάνω εξισώσεων της κατανομής Weibull, χρησιμοποιείται συχνά ο μετασχηματισμός

$$z = \ln x \tag{7}$$

Η κατανομή της Z είναι η κατανομή ελαχίστων τύπου I, με παραμέτρους a = c και x_0 = ln b και κατά συνέπεια οι παράμετροι b και c μπορούν να προσδιοριστούν από τις σχέσεις:

$$c = \frac{\pi/\sqrt{6}}{\hat{\sigma}_{\ln X}}, \qquad b = \exp(\hat{\mu}_{\ln X} + \gamma/c) \tag{8}$$

γ) Για την εκθετικά μετασχηματισμένη κανονική κατανομή η εκτίμηση των παραμέτρων είναι αρκετά πολύπλοκη. Η παράμετρος λ μπορεί κατ' αρχήν να επιλεγεί (μετά από επαναλήψεις) σε τρόπο ώστε να προκύπτει η απολύτως ελάχιστη ασυμμετρία του μετασχηματισμένου δείγματος. Ωστόσο η αποτελεσματικότητα αυτής της μεθόδου είναι αρκετά μικρή, σε σύγκριση με αυτήν της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας. Σύμφωνα με την τελευταία η εκτίμηση του λ γίνεται με βάση τη σχέση (Chander κ.α., 1978)

$$L(\lambda) = \frac{\prod_{i=1} x_i^{\lambda-1}}{\sigma_Z^n} = \max \tag{9}$$

Η παραπάνω σχέση λύνεται μόνο αριθμητικά. Οι παράμετροι μ_Z και σ_Z θεωρούνται ίσες με τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του μετασχηματισμένου δείγματος. Ο Kottegoda (1980) περιγράφει μια σχετικά απλούστερη μέθοδο, αυτήν του Hinkley. Σύμφωνα με αυτή, για κάθε δοκιμαστική τιμή του λ = 0, ±0.5, ±1.0, ..., υπολογίζεται η μέση τιμή $\hat{\mu}_Z$, η τυπική απόκλιση $\hat{\sigma}_Z$ και η διάμεσος $\hat{\zeta}_Z$ του μετασχηματισμένου δείγματος. Στη συνέχεια συγκρίνονται οι τιμές της παραμέτρου $d_\lambda = (\hat{\mu}_Z - \hat{\zeta}_Z) / \hat{\sigma}_Z$, και επιλέγεται η τιμή λ που ελαχιστοποιεί την d_λ.

Εκτίμηση ελάχιστης παροχής για δεδομένη πιθανότητα μη υπέρβασης

Λόγω των απλούστατων αναλυτικών εκφράσεων των συναρτήσεων κατανομής ελαχίστων Gumbel και Weibull, η σημειακή εκτίμηση της ελάχιστης παροχής που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή της πιθανότητας μη υπέρβασης $F_X(x) = y$, είναι πολύ εύκολη. Από την επίλυση των εξισώσεων (1) και (2) ως προς x προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις

$$x = x_0 + \frac{\ln[-\ln(1-y)]}{a} \qquad (10)$$

για την κατανομή Gumbel, και

$$x = b[-\ln(1-y)]^{1/c} \qquad (11)$$

για την κατανομή Weibull.

Στην περίπτωση της εκθετικά μετασχηματισμένης κανονικής κατανομής δεν υπάρχουν αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις. Η επίλυση γίνεται είτε με αριθμητικές μεθόδους, είτε με τη βοήθεια των γνωστών πινάκων της κανονικής κατανομής, παίρνοντας υπόψη ότι η μεταβλητή

$$w = \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{x^{\lambda} - 1 - \lambda\,\mu_Z}{\lambda\,\sigma_Z} \qquad (12)$$

ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή (0, 1).

Συνήθως οι κατανομές Weibull και εκθετικά μετασχηματισμένη κανονική προσαρμόζονται καλύτερα από την κατανομή Gumbel στα δείγματα ελαχίστων παροχών, ενώ έχουν και το πλεονέκτημα να δίνουν πάντα θετικές τιμές της ελάχιστης παροχής πράγμα που δεν συμβαίνει με την Gumbel.

Εφαρμογή

Για την μελέτη των περιβαλλοντικών επιπτώσεων της διάθεσης των επεξεργασμένων αστικών λυμάτων των Ιωαννίνων στον Καλαμά (Ξανθόπουλος κ.α., 1984), ζητήθηκε η εκτίμηση των ελαχίστων παροχών δεκαημέρου του ποταμού για διαστήματα επαναφοράς T = 5 και 10 έτη. Η εκτίμηση έγινε για τη θέση Κιοτέκι, όπου λειτουργεί υδρομετρικός σταθμός, από τα δεδομένα του οποίου προέκυψε ένα δείγμα ελάχιστων παροχών δεκαημέρου μεγέθους 12 ετών. Τα στατιστικά χαρακτηριστικά του δείγματος είναι $\hat{\mu}_X = 14.70\ m^3/s$ και $\hat{\sigma}_X = 1.84\ m^3/s$. Τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των λογαριθμημένων τιμών είναι $\hat{\mu}_Z = 2.681$ και $\hat{\sigma}_Z = 0.1287$.

Λύση: Εξετάζονται οι δύο σχετικά απλούστερες κατανομές Gumbel και Weibull[2].

----

2. Στη μελέτη Ξανθόπουλου κ.α. (1984) εξετάστηκε ακόμη και η εκθετικά μετασχηματισμένη κανονική κατανομή. Η κατανομή που τελικά χρησιμοποιήθηκε ήταν η Weibull.

Οι παράμετροι της κατανομής Gumbel είναι:

$$a = \frac{3.14159/\sqrt{6}}{1.84} = 0.697$$

$$x_0 = 14.70 + \frac{0.57722}{0.697} = 15.53$$

Για T = 5 η πιθανότητα μη υπέρβασης είναι $y = F_X(q_E) = 1/T = 1/5 = 0.20$, οπότε από την (10) προκύπτει:

$$q_E = 15.53 + \frac{\ln(-\ln(0.80))}{0.967} = 13.38 \ m^3/s$$

Αντίστοιχα, για T = 10 είναι $y = 1/T = 0.10$, οπότε:

$$q_E = 15.53 + \frac{\ln(-\ln(0.90))}{0.697} = 12.30 \ m^3/s$$

Οι παράμετροι της κατανομής Weibull είναι

$$c = \frac{3.14159/\sqrt{6}}{0.1287} = 9.964$$

$$b = \exp\,(2.681 + 0.57722/9.964) = 15.47$$

Για T = 5 η κατανομή Weibull δίνει:

$$q_E = 15.47 * [-\ln(1-0.2)]^{1/9.964} = 13.30 \ m^3/s$$

και, αντίστοιχα, για T = 10:

$$q_E = 15.47 * [-\ln(1-0.1)]^{1/9.964} = 12.34 \ m^3/s$$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο συναρτήσεις κατανομής δίνουν σχεδόν τις ίδιες τιμές της ελάχιστης παροχής για διαστήματα επαναφοράς 5 και 10 ετών. Όμως, για σημαντικά μεγαλύτερα διαστήματα επαναφοράς οι δύο συναρτήσεις αποκλίνουν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξανθόπουλος Θ. (1990) *Εισαγωγή στην Τεχνική Υδρολογία*, Αθήνα.

Ξανθόπουλος Θ., Κουζέλη-Κατσίρη Α., Ανδρεαδάκης Α., Κουτσογιάννης Δ. & Βαμβακερίδου Λ. (1984) *Διερεύνηση ποιότητας και αφομοιωτικής ικανότητας νερών ποταμού Καλαμά και λίμνης Παμβώτιδας (Ιωαννίνων)*, Τεχνική Έκθεση, ΕΜΠ, Αθήνα.

Chander, S., Spolia, S.K. & Kumar, A. (1978) Flood frequency analysis by power transformation. *Proc. ASCE*, 104 (HY11) 1495.

Kottegoda, N.T. (1980) *Stochastic Water Resources Technology*, Mac Millan Press, London, U.K.

Papoulis, A. (1965) *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Mc Graw-Hill.

Shaw, E.M. (1983) *Hydrology in Practice*, Van Nostrand Reinhold, U.K.

Spiegel, M.R. (1977) *Πιθανότητες και Στατιστική*, Μετάφραση στα Ελληνικά Σ. Περσίδη, ΕΣΠΙ, Αθήνα.

Yevjevich, V. (1972) *Probability and Statistics in Hydrology*, Water Resources Publications Fort Collins, Colorado, USA.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΠΑΡΟΧΩΝ

Επιμέλεια: Δ Κουτσογιάννης, Λέκτορας ΕΜΠ, Τομέας Υδ. Πόρων, Υδρ. & Θαλ. 'Εργων

Σημασία της εκτίμησης

Η εκτίμηση των πλημμυρικών παροχών παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για τη μελέτη έργων καθαρά αντιπλημμυρικών και αποχετευτικών ή και άλλων έργων που διατρέχουν κινδύνους από ένα ενδεχόμενο πλημμύρας. (πχ. γέφυρες, οδικά δίκτυα, φράγματα κ.α.). Λόγω του ενδιαφέροντος αυτού, ένα σημαντικό μέρος της Τεχνικής Υδρολογίας ασχολείται με την εκτίμηση των πλημμυρικών παροχών.

Από τη σκοπιά των περιβαλλοντικών επιπτώσεων οι πλημμύρες ενδιαφέρουν μόνο ως προς τις καταστροφές ή την υποβάθμιση που μπορούν να προκαλέσουν στο φυσικό περιβάλλον, και κυρίως σε συνδυασμό με τις φυσικές διεργασίες διάβρωσης, μεταφοράς και εναπόθεσης φερτών υλικών. Η μελέτη αυτών των φυσικών διεργασιών αποτελεί ένα ιδιαίτερο και αρκετά πολύπλοκο επιστημονικό και τεχνολογικό αντικείμενο.

Τυπικές συναρτήσεις κατανομής

Η ασυμπτωτική κατανομή *μεγίστων* τύπου Ι ή κατανομή *Gumbel* έχει την πιο διαδεδομένη χρήση για τη στατιστική περιγραφή των μέγιστων παροχών. Πρόκειται για κατανομή θετικά ασύμμετρη με συνάρτηση κατανομής:

$$F_X(x) = \exp(-\exp(-a(x-x_0))) \qquad -\infty \le x \le +\infty \tag{1}$$

όπου a και x_0 παράμετροι (a > 0).

Ακόμη χρησιμοποιούνται αλλά με μικρότερη συχνότητα οι εξής κατανομές:

- Η *λογαριθμοκανονική* κατανομή ή κατανομή *Galton*, που ορίζεται από τις σχέσεις

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{(2\pi)}} \exp\left[-\frac{(z-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] \tag{2}$$

όπου

$$z = \ln(x-\alpha) \qquad \alpha \le x \le +\infty \tag{3}$$

η οποία έχει τρείς παραμέτρους, τις α, μ_Z και σ_Z. Για α = 0 προκύπτει η αντίστοιχη κατανομή δύο παραμέτρων.

- Η κατανομή *Γάμα ή Pearson III*, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\kappa (x-\alpha)^{\kappa-1} \exp[-\lambda(x-\alpha)]}{\Gamma(\kappa)} \qquad \alpha \le x \le +\infty \tag{4}$$

όπου a, κ, λ παράμετροι ($\kappa, \lambda > 0$) και $\Gamma()$ η συνάρτηση γάμα. Για $a = 0$ προκύπτει η κατανομή Γάμα 2 παραμέτρων.

- Η λεγόμενη κατανομή *Log-Pearson III*, που προκύπτει από την κατανομή γάμα με βάση το μετασχηματισμό

$$z = \ln x \tag{5}$$

Εκτίμηση παραμέτρων των κατανομών

Με εφαρμογή της μεθόδου των ροπών προκύπτουν οι ακόλουθες, άμεσα εφαρμόσιμες εξισώσεις εκτίμησης παραμέτρων:

α) Για την κατανομή Gumbel:

$$a = \frac{\pi/\sqrt{6}}{\hat{\sigma}_X}, \quad x_0 = \hat{\mu}_X - \gamma/a \tag{6}$$

όπου $\pi = 3.14159$ και $\gamma = 0.57722$ (= σταθερά Euler[1]).

β) Για την λογαριθμοκανονική κατανομή δύο παραμέτρων ($a = 0$)

$$\sigma_Z^2 = \ln[1 + (\hat{\sigma}_X^2 / \hat{\mu}_X^2)], \quad \mu_Z = \ln \hat{\mu}_X - (\hat{\sigma}_Z^2 / 2) \tag{7}$$

γ) Για την κατανομή γάμα δύο παραμέτρων ($a = 0$)

$$\kappa = \frac{\hat{\mu}_X^2}{\hat{\sigma}_X^2}, \quad \lambda = \frac{\hat{\mu}_X}{\hat{\sigma}_X^2} \tag{8}$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις για τις συναρτήσεις κατανομής τριών παραμέτρων (λογαριθμοκανονική, γάμα και Log-Pearson) είναι αρκετά πολύπλοκες και παραλείπονται (ο αναγνώστης παραπέμπεται στον Kottegoda, 1980).

Μέθοδοι εκτίμησης με ελλιπή στοιχεία

'Οταν δεν υπάρχουν κατάλληλα δεδομένα παροχής από μετρήσεις, η εκτίμηση της παροχής εξάγεται έμμεσα, με συσχετισμό με την βροχόπτωση. Προϋπόθεση βέβαια είναι η ύπαρξη αξιόπιστων ιστορικών δεδομένων εντάσεων βροχής, για μικρές διάρκειες, από βροχογραφικό σταθμό της περιοχής.

----

1. Η σταθερά Euler ορίζεται από τη σχέση

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right]$$

Η απλούστερη μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της παροχής αιχμής *της πλημμύρας σχεδιασμού* ενός υπό μελέτη έργου (και όχι ενός πραγματικού πλημμυρικού φαινομένου) είναι η λεγόμενη ορθολογιστική μέθοδος, που βασίζεται στη σχέση:

$$Q_p = C\ i\ A \tag{9}$$

όπου Q_p η παροχή αιχμής σχεδιασμού σε μία καθορισμένη θέση ενός υδατορεύματος, A η έκταση της λεκάνης απορροής, i η ένταση της κρίσιμης βροχόπτωσης, και C ο συντελεστής απορροής ($0 < C < 1$).

Η κρίσιμη βροχόπτωση θεωρείται ότι έχει διάρκεια ίση με το *χρόνο συγκέντρωσης* της λεκάνης απορροής, δηλαδή το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει η απορροή από το πιο απομακρυσμένο σημείο της λεκάνης μέχρι την θέση του υδατορεύματος που εξετάζεται. Η ένταση i της βροχής προκύπτει από τις λεγόμενες *όμβριες καμπύλες*, αφού επιλεγεί η κατάλληλη συχνότητα υπέρβασης. Οι καμπύλες αυτές καταρτίζονται μετά από στατιστική ανάλυση διαθέσιμων δειγμάτων εντάσεων βροχής, σε ένα ή περισσότερους σταθμούς της υπό μελέτη περιοχής. Τέλος ο συντελεστής απορροής C επιλέγεται με τη βοήθεια πινάκων ανάλογα με τις γενικές συνθήκες της λεκάνης απορροής (τοπογραφικές, γεωλογικές, χρήσης γης, φυτοκάλυψης κλπ).

Πιο αξιόπιστες εκτιμήσεις, όχι μόνο της πλημμυρικής αιχμής αλλά της συνολικής χρονικής εξέλιξης ενός πλημμυρικού φαινομένου (πραγματικού ή σχεδιασμού) δίνει η μέθοδος του *μοναδιαίου υδρογραφήματος*. Βάση της μεθόδου αποτελεί η θεωρία των γραμμικών συστημάτων, σύμφωνα με την οποία η *έξοδος* y(t) ενός *γραμμικού συστήματος* συνδέεται με την *είσοδο* x(t) που την προκαλεί, με μια συνελικτική σχέση της μορφής:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau).h(t-\tau)d\tau \tag{10}$$

όπου h(t) είναι η λεγόμενη συνάρτηση συστήματος. Εν προκειμένω η είσοδος x(t) είναι η καθαρή βροχόπτωση (= ολική βροχόπτωση - απώλειες κατακράτησης και διήθησης), y(t) είναι η (πλημμυρική) παροχή και h(t) είναι το (στιγμιαίο) μοναδιαίο υδρογράφημα. Η εφαρμογή της μεθόδου απαιτεί να υπάρχουν ταυτόχρονες ακριβείς μετρήσεις βροχής και παροχής σε συνεχή χρονική βάση, ώστε να μπορεί να προσδιοριστεί η συνάρτηση h(t). Οι αριθμητικοί υπολογισμοί της μεθόδου είναι αρκετά απλοί στην πράξη, δεδομένου ότι γίνονται σε διακριτό χρόνο. Η μέθοδος του μοναδιαίου υδρογραφήματος είναι αρκετά αξιόπιστη για ευρεία κλίμακα λεκανών απορροής και η χρήση της είναι πολύ διαδεδομένη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξανθόπουλος Θ. (1990) *Εισαγωγή στην Τεχνική Υδρολογία*, Αθήνα.

Chander, S., Spolia, S.K. & Kumar, A. (1978) Flood frequency analysis by power transformation. *Proc. ASCE*, 104 (HY11) 1495.

Kottegoda, N.T. (1980) *Stochastic Water Resources Technology*, Mac Millan Press, London, U.K.

Papoulis, A. (1965) *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Mc Graw-Hill.

Shaw, E.M. (1983) *Hydrology in Practice*, Van Nostrand Reinhold, U.K.

Spiegel, M.R. (1977) *Πιθανότητες και Στατιστική*, Μετάφραση στα Ελληνικά Σ. Περσίδη, ΕΣΠΙ, Αθήνα.

Yevjevich, V. (1972) *Probability and Statistics in Hydrology*, Water Resources Publications Fort Collins, Colorado, USA.