

ΘΕΜ. Σ. ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧ. Ε.Μ.Π. - ΥΔΡΑΥΛΙΚΟΥ ΜΗΧ. ΠΑΝ. ΤΟΥΛΟΥΖΗΣ
Δρος ΜΗΧ. Ε.Ν.Σ.Ε.Ε.Η.Τ.

ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΝ
ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ
ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ ΥΠΟ ΤΥΧΟΥΣΑΝ ΚΛΙΜΑΚΑ

«CONTRIBUTION DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE ET DES
APPLICATIONS EN LABORATOIRE A LA GÉNÉRALISATION
DE LA THÉORIE ET DES ÉTUDES EXPERIMENTALES SUR
MODÈLES PHYSIQUES A ÉCHELLE QUELCONQUE»

Par **ΤΗ. ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΣ**
Ing. Civil E.P.A.- Ing. Hydraulicien Univ. de Toulouse
Docteur - Ingénieur E.N.S.E.E.H.T.

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΥΦΗΓΕΣΙΑ,
ΥΠΟΒΑΘΕΙΣΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗΝ ΣΧΟΛΗΝ
ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
1965

ΘΕΜ. Σ. ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧ. Ε.Μ.Π. - ΥΔΡΑΥΛΙΚΟΥ ΜΗΧ. ΠΑΝ. ΤΟΤΑΛΟΥΖΗΣ
Δρος ΜΗΧ. Ε.Ν.Σ.Ε.Ε.Η.Τ.

**ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΝ
ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ
ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ ΥΠΟ ΤΥΧΟΥΣΑΝ ΚΛΙΜΑΚΑ**

«CONTRIBUTION DE L' ANALYSE MATHÉMATIQUE ET DES
APPLICATIONS EN LABORATOIRE A LA GÉNÉRALISATION
DE LA THÉORIE ET DES ÉTUDES EXPERIMENTALES SUR
MODÈLES PHYSIQUES A ÉCHELLE QUELCONQUE»

Par **TH. ΧΑΝΘΟΠΟΥΛΟΣ**
Ing. Civil E.P.A.- Ing. Hydraulicien Univ. de Toulouse
Docteur - Ingénieur E.N.S.E.E.H.T.

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΥΦΗΓΕΣΙΑ,
ΥΠΟΒΛΗΘΕΙΣΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗΝ ΣΧΟΛΗΝ
ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

1965

ΣΤΟΥΣ ΓΟΝΕΙΣ ΜΟΥ
ΜΕ ΕΥΓΝΩΜΟΣΥΝΗ ΚΑΙ ΑΓΑΠΗ

ΑΝΤΩΝ ΜΠΑΛΑΝΤΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΣΤΟΝ ΣΕΒΑΣΤΟΝ ΜΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗΝ
ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ κ. Ν. Δ. ΧΩΡΑΦΑΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ ἔμπνευσις καὶ ὁ σκοπὸς τῆς παρούσης Διατριβῆς ἐπὶ Ὑψηγεσία, πηγάζουν ἀπὸ τὴν ἐξῆς γενικὴν σκέψιν:

«Ἡ Ἐπιστήμη προωθεῖται διὰ τῆς γενικεύσεως τῶν ἐπὶ μέρους θεωρητικῶν καὶ πειραματικῶν ἀποτελεσμάτων. Γενίκευσις σημαίνει ἄνοδον πρὸς κορυφὴν, τῆς ὁποίας ἡ περίμετρος εἶναι μικρὰ καὶ ἡ ἄποψις μεγάλη. Συγκρότησις τοῦ πλήθους τῶν περιπτώσεων εἰς ὁμάδα καὶ προσδιορισμὸς τῶν νόμων αὐτῆς, εἰς ὀλίγας σελίδας, εἰς ὀλίγας γραμμὰς ἢ εἰς ἓνα καὶ μόνον τύπον, ἀποτελοῦν τὸν σκοπὸν καὶ τὴν ἐπιτυχίαν τῆς Ἐπιστήμης».

Ὡς πρὸς τὸ θέμα τῆς Διατριβῆς, ἐξελέγη ἐντὸς περιοχῆς θεμάτων ἅτινα ὑπεδείχθησαν ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ τῆς Ὑδραυλικῆς καὶ Ὑδραυλικῶν Ἔργων τῆς Πολυτεχνικῆς Σχολῆς τοῦ Ἀριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης κ. Νικολάου Δ. Χωραφᾶ, πρὸς τὸν ὁποῖον ἐκφράζω τὴν βαθεῖαν μου εὐγνωμοσύνην διὰ τὴν ἀμέριστον συμπαράστασίν του εἰς ὅλα τὰ στάδια τῆς Διατριβῆς.

Τὸ σύνολον τῆς Διατριβῆς δύναται συνοπτικῶς νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς «θέμα προάγον τὴν ἐπιστήμην τῶν μελετῶν ἐπὶ ὁμοιωμάτων» ἐξελέγη δὲ ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς ιδρύσεως συγχρόνου καὶ πλήρους Ἑργαστηρίου Ὑδραυλικῆς καὶ Ὑδραυλικῶν Μελετῶν ἐπὶ Ὅμοιωμάτων, ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ κ. Ν. Δ. Χωραφᾶ, ἐν Θεσσαλονίκῃ.

Καὶ διὰ μὲν τὸ Μαθηματικὸν μέρος καὶ τὴν ἐν γένει θεωρητικὴν συμβολὴν τῆς παρούσης ἐργασίας, θεωρῶ καθήκον μου νὰ εὐχαριστήσω τοὺς Καθηγητὰς κ.κ. J. Nougaro καὶ F. Sananés, διὰ τὰς γενικὰς κατευθύνσεις τὰς ὁποίας μοῦ ὑπέδειξαν καὶ ἰδιαιτέρως τὸν Καθηγητὴν κ. Π. Ρόκον διὰ τὴν ἀφειδῇ διάθεσιν κόπου καὶ χρόνου, εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὸ Ἴον καὶ Ἴον μέρος.

Διὰ τὸ ἐργαστηριακὸν μέρος καὶ τὴν πειραματικὴν μελέτην, ἐκφράζω ἐνθέρμως, τὰς εὐχαριστίας μου πρὸς τὸν Καθηγητὴν, Διευθυντὴν τῆς Σχολῆς Ὑδραυλικῶν Μηχανικῶν Τουλούζης καὶ Ἀκαδημαϊκὸν κ. L. Escande, τὸν Ἀρχιμηχανικὸν τοῦ Ἑργαστηρίου Ὑδραυλικῆς Τουλούζης κ. L. Castex καὶ τὸν Μηχανικὸν κ. Trivelato, διὰ τὰς πολυτίμους συμβουλὰς των ἐπὶ τῶν πειραμάτων ἅτινα ἐξετέλεσα ἐν Τουλούζῃ κατὰ τὴν διετίαν 1962-1964, ὑπὸ τὴν ιδιότητά μου τοῦ ἐμμίσθου Ἐπιμελητοῦ τῆς Θεωρητικῆς καὶ Ἐφαρμοσμένης Ὑδραυλικῆς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Τουλούζης.

Εἰς τὸ ὄνομα, τέλος, τῆς Κας Κυριαζῆ καὶ τοῦ κ. Φαρσιρώτου, εὐχαριστῶ

θερμῶς τὸ προσωπικὸν τῆς "Εδρας Ὑδραυλικῆς διὰ τὴν βοήθειαν ἣν μοι παρέσχεν εἰς τὴν ἐκτύπωσιν καὶ ἐμφάνισιν τῆς Διατριβῆς.

19010701

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι
ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ
ΜΕΡΟΣ Ι

ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ
ΔΙΑ ΤΟΝ ΑΚΡΙΒΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΝ
ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ
ΜΙΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

Ἡ μελέτη ἑνὸς φυσικοῦ φαινομένου ἀνάγεται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς τὸν καθορισμὸν μιᾶς σειρᾶς σχέσεων μεταξὺ διαφόρων σταθερῶν καὶ μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι τὸ χαρακτηρίζουν. Αἱ σχέσεις αὗται, ὀνομαζόμεναι φυσικοὶ νόμοι, περικλείουν τὸ φαινόμενον εἰς ἓνα περιορισμένον ἢ ἐκτεταμένον πεδῖον ἰσχύος, καὶ συνήθως, παρουσιάζονται μαθηματικῶς ὑπὸ τὴν μορφήν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

Μία καθαρῶς θεωρητικὴ ἀνάλυσις τοῦ φαινομένου, βασίζεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν μαθηματικὴν μορφήν αὐτοῦ, καὶ ἐξ αὐτῆς ἐξάγει τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν φυσικῶν νόμων ποὺ τὸ διέπουν. Πλὴν ὅμως αἱ Ἐφαρμοσμένοι Ἐπιστήμαι ἔχουν ἀνάγκην ποσοτικῶν ἀποτελεσμάτων, ἥτοι ἀκριβοῦς ἐπιδόσεως τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τῇ βάσει σαφῶς καθοριζομένων συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια, (ὅρια προβλήματος τύπου Dirichlet, ἢ ἐν ἀνάγκῃ τύπου Newmann), αἱ ὁποῖαι εἰς τὰ πλεῖστα σύνθετα φαινόμενα εἶναι μερικῶς ἢ ὀλικῶς ἀπροσδιόριστοι. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις ὑπάρξεως σαφῶν συνθηκῶν ὁρίων, ἡ ἀκριβὴς ἐπίλυσις τῆς πλήρους μαθηματικῆς μορφῆς ἑνὸς φαινομένου, παρὰ τὰ ἐκπληκτικὰ ἀποτελέσματα τῆς συγχρόνου ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως καὶ τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, εὐρίσκεται πολλάκις εἰς ἀδυναμίαν νὰ προβλέψῃ ἀκριβῶς τὴν εἰς τὸ διάστημα καὶ τὸν χρόνον ἐξελίξιν ἑνὸς συνθέτου φαινομένου.

Ἡ ἀνάγκη ὑπερπηδῆσεως τῶν ἀνωτέρω δυσχερειῶν ὁδήγησεν εἰς τὴν ἀκόλουθον λύσιν διὰ τὴν μελέτην ἑνὸς συνθέτου φαινομένου: Ἀναπαραγωγὴ τοῦ φαινομένου κατὰ τὸν πληρέστερον δυνατὸν τρόπον καὶ ὑπὸ τὴν κατάλληλον κλίμακα, ἥτις καθιστᾷ δυνατὴν τὴν εἰς τὸν χρόνον καὶ χῶρον μελέτην τῆς ἐξελιξέως τοῦ φαινομένου.

Αὕτη εἶναι ἡ γενικὴ ἀρχὴ τῶν «Μελετῶν ἐπὶ Ὁμοιωμάτων» ἥτοι καταλλήλων ἀναπαραστάσεων τοῦ φαινομένου. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ ὁμοίωμα ἀφορᾷ τὴν μαθηματικὴν μορφήν τοῦ φαινομένου ἔχομεν τὰ «Μαθηματικὰ ὁμοιώματα» (Modèles Mathématiques), ἐὰν δὲ τὴν φυσικὴν μορφήν τοῦ φαινομένου ἔχομεν τὰ «Φυσικὰ Ὁμοιώματα» (Modèles Physiques). Εἰς τὴν συνέχειαν τῆς παρούσης μελέτης ἀσχολούμεθα

ἀποκλειστικῶς μὲ Φυσικὰ Ὑπομειώματα τὰ ὅποια εἶναι καὶ τὰ πλέον γνωστὰ διὰ τὴν μεγάλην συμβολὴν τῶν εἰς τὴν ἐπίλυσιν πολλῶν συγχρόνων θεμάτων τοῦ Μηχανικοῦ.

Ἡ μορφή ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐμφανίζεται ἐν φυσικὸν ὁμοίωμα εἶναι πολυποίκιλος: Ἀπὸ τὴν «μακέττα» τοῦ Ἀρχιτέκτονος, ἣτις προσδιορίζει τὸν ἁρμονικώτερον συνδυασμὸν τῶν μαζῶν ἐνὸς συνόλου κατασκευῶν μέχρι τοῦ ὑπὸ σμίκρυνσιν ὁμοιώματος τοῦ Ἀεροναυπηγοῦ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀντιστάσεως εἰς τὴν προώθησιν, ὥς καὶ τῆς ὀριακῆς στοιβάδος, σωμάτων ἐξαιρετικῶς πολυπλόκων διὰ τὰ ὅποια εἶναι ἀδύνατος, πολλάκις, καὶ αὐτὴ αὕτη ἢ κατὰστροφαις τῶν ἐξισώσεων κινήσεως. Μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν ἄκρων χρησιμοποίησεως τῶν ὁμοιωμάτων, θὰ τὰ συναντήσωμεν σχεδὸν παντοῦ. Ὡς ἀναφέρομεν ἐπίσης μίαν ἐνδιάμεσον κατηγορίαν μεταξὺ Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῶν Ὑπομειωμάτων, τὰ «Ἀναλογικὰ Ὑπομειώματα». (Modèles Analogiques). Ὑπὸ τὴν μορφήν τῶν ρεοηλεκτρικῶν ὁμοιωμάτων χρησιμοποιοῦνται εὐρέως εἰς τὴν Ὑδραυλικήν, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὁμοιότητος τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῶν ροῶν πρὸς ἠλεκτρικὰ πεδία. Αὐτὸ τὸ εἶδος ὁμοιωμάτων δίδει τὴν γένεσιν εἰς ἓνα νέον ὅρισμὸν τοῦ ὁμοιώματος ἐν γένει: εἶναι μίᾱ ὑπολογιστικὴ μηχανὴ ἣτις ἐπιτρέπει τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τῶν ὁποίων τὸ πολὺπλοκὸν τῶν συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια, ἢ ἡ ἀδυναμία καταστρώσεως τῶν ἐξισώσεων δὲν ἐπιτρέπουν μίαν μαθηματικὴν ἐπίλυσιν.

Ἐπὶ πλέον, δὲν ἀπαιτοῦμεν πάντοτε ἀπὸ τὴν ὑπολογιστικὴν αὐτὴν μηχανὴν τὴν εὕρεσιν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν διαφορῶν λύσεων. Ἀρκούμεθα πολλάκις εἰς τὴν κατάταξιν τῶν διαφορῶν λύσεων ὥς πρὸς ἓνα βασικὸν κριτήριον τῆς μελέτης καὶ τὴν ἀναζήτησιν νέων λύσεων διὰ μεταβολῆς ὁρισμένων συνθηκῶν. Μεταξὺ αὐτῶν τῶν λύσεων ὁ Μηχανικὸς θὰ ἐκλέξει, βοηθούμενος ἀπὸ τὴν πείραν καὶ τὰς ὑπαρχούσας θεωρίας, τὴν καταλληλοτέραν διὰ τοὺς σκοποὺς τοῦ ὅλου ἔργου.

Εἰς ὅτι ἀφορᾷ τὰς καθαρῶς Ὑδραυλικὰς μελέτας, τὰ Φυσικὰ Ὑπομειώματα ὑπὸ σμίκρυνσιν ἀποτελοῦν τὸν πλέον εὐγλωττον τρόπον διὰ τὴν ἀναπαράστασιν τῶν διαφορῶν φυσικῶν φαινομένων καὶ τῆς ἐπιρροῆς τῶν εἰς τὰς κατασκευὰς - ὁμοιόμορφοι καὶ μεταβαλλόμεναι ροαί, κυματισμοὶ πάσης φύσεως, παλίρροιαι καὶ ρεύματα - καὶ διεμόρφωσαν μίαν τεχνικὴν, τῆς ὁποίας ἡ ἐξέλιξις κατὰ τὴν τελευταίαν εἰκοσαετίαν ἦτο τεραστία. Εἰς τὸν τομέα τῆς κατασκευῆς μεγάλων Ὑδραυλικῶν Ἔργων, ὥς φραγμάτων, λιμένων, διευθετήσεως χειμάρρων καὶ ποταμῶν, κατασκευάζονται ὑπὸ κατάλληλον κλίμακα τὰ ὑπὸ μελέτην τμήματα τοῦ ἔργου καὶ διὰ ποι-

κίλλων τροποποιήσεων τῆς μορφῆς των ἐπιτυγχάνεται τὸ ἐπιζητούμενον ἀποτέλεσμα.

Εἰς τὸν τομέα τέλος τῶν Ὑδραυλικῶν Μηχανικῶν, αἱ ἀποδόσεις τῶν ὑδροστροβίλων ἢ ἀντλιῶν ὡς καὶ ὅλων τῶν ἐνδιαμέσων τύπων μηχανῶν, ἢ κατάλληλος μορφή τῶν ἐπὶ μέρους στοιχείων δι' ἀποφυγὴν σπηλαιώσεως καὶ ἡ χάραξις καὶ βελτίωσις τῶν διαγραμμάτων λειτουργίας, προσδιορίζονται ἀποκλειστικῶς διὰ δοκιμῶν ἐπὶ ὁμοιωμάτων ὑπὸ σμίκρυνσιν καὶ εἰς αὐτὰς καὶ μόνον ὀφείλεται ἡ μεγάλη τελειοποίησις των.

Ἡ εἰς οἰονδήποτε ὅμως τομέα ἐφαρμογὴ τῶν Φυσικῶν ὁμοιωμάτων καὶ ἡ ἐπωφελὴς χρησιμοποίησις των, ἀπαιτεῖ τὴν προγενεστέραν ἀρίστην γνῶσιν τῶν νόμων οἵτινες διέπουν εἰς ἑκάστην περίπτωση τὴν ὁμοιότητα τοῦ φυσικοῦ φαινομένου μὲ τὸ φαινόμενον ἐν ὁμοιώματι.

Πλεῖστοι ἐρευνηταὶ ἀπεκατέστησαν τοὺς βασικοὺς νόμους τῶν συνήθως μελετουμένων περιπτώσεων. Ἡ σύγχρονος ὅμως ἀνάπτυξις τῶν Μαθηματικῶν, ἔχουσα ὡς τάσιν τὴν γενίκευσιν τῶν διαφόρων μερικῶν περιπτώσεων καὶ τὴν συγκρότησιν των εἰς σύνολα διεπόμενα ὑπὸ γενικοῦ τινὸς νόμου, ὁδηγεῖ τὸν ἐρευνητὴν εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῆς γενικῆς μορφῆς τῶν νόμων τῆς Φυσικῆς Ὁμοιότητος. Ἐπὶ τῇ βάσει ἐπομένως τῶν κλασσικῶν ἐννοιῶν τῆς ὁμοιότητος, τὰς ὁποίας ἐν περιλήψει ἀναφέρομεν, γενικεύομεν τὴν θεωρίαν χρησιμοποιοῦντες τὸν λίαν συνεκτικὸν τρόπον ἐκφράσεως τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν καὶ δὴ τῆς Τοπολογίας. Ἀποτέλεσμα τῆς γενικεύσεως αὐτῆς εἶναι ἡ δυνατότης τῆς συστηματικῆς ἐρεῦνης τυχόντος νέου προβλήματος ὁμοιότητος, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν γενικῶν ἐξισώσεων καὶ ἡ ἔνταξις του εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, μὲ πλεονέκτημα τὴν ἀποφυγὴν οἰουδήποτε λογικοῦ ἢ μαθηματικοῦ σφάλματος καὶ τὴν πλήρη κατανόησιν τοῦ φαινομένου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Ἡ κατασκευὴ ἑνὸς ὁμοιώματος ἐν ἐργαστηρίῳ, βασιίζεται εἰς τὰς περισσότερας τῶν περιπτώσεων εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς ἐξελίξεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ φαινομένου, ὑπὸ δύο διαφόρους, ποσοτικῶς, μορφάς. Οὕτω, ἡ φυσικὴ ὁμοιότης δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία γενίκευσις τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιότητος.

Ὡς θὰ εἰδωμεν περαιτέρω, εἰς τὰ πλαίσια τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν, αἱ ὀνομαζόμεναι «Συνθήκαι Ὁμοιότητος» μεταφράζουν ὀρισμένες ἀναλογίας αἵτινες διέπουν τὴν πλήρη Φυσικὴν Ὁμοιότητα. Διὰ νὰ ἀναλυθῇ καλλίτερον τὸ γενικὸν αὐτὸ φαινόμενον τῆς φυσικῆς ὁμοιότητος, θὰ διακρίνωμεν κατὰ σειράν τὴν γεωμετρικὴν, τὴν κινηματικὴν καὶ τὴν δυναμικὴν ὁμοιότητα.

2.1.- ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΜΟΙΟΤΗΣ

Δύο τριδιάστατοι γεωμετρικαὶ παραστάσεις εἶναι ὅμοιαι, ἐὰν ὅλαι αἱ σχέσεις μηκῶν, συνδεουσῶν ὁμόλογα σημεῖα, εἶναι σταθεραί. Προσδιορίσαμεν οὕτω τὴν γεωμετρικὴν ὁμοιότητα.

Ἐν τῇ πράξει, τὸ ὁμοίωμα εἶναι συνήθως γεωμετρικῶς ὅμοιον πρὸς τὸ πρωτότυπον. Εἰς ἄρκετάς ὅμως περιπτώσεις ἡ συνθήκη αὕτη δὲν τηρεῖται παρὰ μερικῶς. Οὕτω, εἰς ὁμοιώματα λιμένων καὶ ποταμῶν ἡ κλίμαξ σμικρύνσεως τῶν ὀριζοντίων διαστάσεων εἶναι διάφορος τῆς τῶν κατακορύφων. Λέγομεν ὅτι τὰ ὁμοιώματα τοῦ τύπου αὐτοῦ εἶναι στρεβλῆς κλίμακος, (Distordues). Ἡ χρῆσις τῆς διπλῆς αὐτῆς κλίμακος κατέστη ἀναγκαία λόγῳ τῆς μεγάλης ἐκτάσεως τῶν ὑπὸ μελέτην ἔργων καὶ τῆς κατ' ἀνάγκην μεγάλης σμικρύνσεως τῶν διαστάσεών των, διὰ τὴν δυνατότητα μελέτης των ἐν ἐργαστηρίῳ. Ἡ σμίκρυνσις αὕτη, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ καὶ διὰ τὰς κατακορύφους διαστάσεις δίδει πολὺ μικρὰ ὕψη ὕδατος, με ἀποτέλεσμα, ἀφ' ἑνὸς τὴν ἀνεπιθύμητον ἐπιρροὴν τῶν ἐπιφανειακῶν τάσεων εἰς τὸ ὁμοίωμα, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸν κίνδυνον εἰσαγωγῆς τῆς ροῆς ἐν ὁμοιώματι εἰς τὴν περιοχὴν τῶν ἀστροβίλων

ροών. Μόνη λύσις είναι επομένως ή έκλογή μεγαλυτέρας κλίμακος δια τās κατακορύφους διαστάσεις, με αντίστοιχον αύξησιν τοῦ ὕψους τῆς ροῆς, (π.χ. κλίμαξ 1:500 δια τās ὀριζοντίας διαστάσεις, 1:100 δια τās κατακορύφους).

2.2.- ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΟΜΟΙΟΤΗΣ

Ἐάν εἰς δύο συστήματα γεωμετρικῶς ὅμοια παράγονται κινήσεις ἢ ροαὶ περιοδικοῦ ἢ μεταβαλλομένου χαρακτήρος, καὶ ἐὰν ἐμφανίζονται βραδεῖαι παραμορφώσεις, εἶναι ἀπαραίτητος ἡ εἰσαγωγή δύο νέων ἐννοιῶν δια τὴν διατύπωσιν τῆς ὁμοιότητος. Πρόκειται περὶ τῶν ὁμολόγων (ἢ ἀντιστοιχῶν) χρόνων, καὶ τῶν ὁμολόγων σωματιδίων.

Ὅταν δύο ὑλικά συστήματα εἶναι κινηματικῶς ὅμοια, τὰ ὁμόλογα σωματίδια αὐτῶν, κατέχουν ὁμολόγους θέσεις εἰς τοὺς ὁμολόγους χρόνους. Εἶναι εὐκόλον τότε νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ διανύσματα ταχύτητος καὶ ἐπιταχύνσεως δύο ὁμολόγων σημείων ἔχουν ὁμολόγους διευθύνσεις εἰς τοὺς ὁμολόγους χρόνους. Κατὰ συνέπειαν, αἱ τροχιαὶ δύο ὁμολόγων σωματιδίων ἀποτελοῦν ὁμολόγους καμπύλας. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν σταθερᾶς ροῆς, αἱ ὁμόλογοι γραμμαὶ ροῆς εἶναι καμπύλαι γεωμετρικῶς ὅμοιαι.

2.3.- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΟΜΟΙΟΤΗΣ

Λέγομεν ὅτι δύο ὑλικά συστήματα εἶναι δυναμικῶς ὅμοια, ἐὰν τὰ ὁμόλογα σωματίδια τῶν συστημάτων αὐτῶν, ὑπόκεινται εἰς ὁμόλογα συστήματα δυνάμεων.

Εἰδικώτερον, ἐὰν μεταξὺ δύο ὑλικῶν συστημάτων ἡ διανομὴ τῶν μαζῶν εἶναι ὁμοία, (γεγονὸς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχη ὡς συνέπειαν τὴν γεωμετρικὴν ὁμοιότητα), τότε λόγφ τῆς σχέσεως $F = mg$ ἡ κινηματικὴ ὁμοιότης ἔχει ὡς συνέπειαν καὶ τὴν δυναμικὴν ὁμοιότητα.

2.4.- ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Ἡ ἐννοια τῆς ὁμοιότητος δύναται ἐπομένως νὰ ἐπεκταθῇ εἰς πλεῖστα ὅσα χαρακτηριστικά. Ἐφηρμόσθη πρὸ ὀλίγου εἰς μίαν διανομὴν μαζῶν: ὁ λόγος τῶν μαζῶν ὁμολόγων σημείων δύο συστημάτων εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκλογῆς τῶν σημείων. Εἰς τās μελέτας ἐπὶ τῶν ἐλαστικῶν παραμορφώσεων ἐφαρμόζομεν τὰ ἴδια διὰ τās ροπὰς ἀντιστάσεως: Ὁ λόγος τῶν ροπῶν ἀντιστάσεως ὁμολόγων διατομῶν εἰς τὸ ὁμοίωμα καὶ τὸ πρωτότυπον δέον νὰ παραμένῃ σταθερός. Ἡ σταθερὰ δὲ πρέπει νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ

τόσον διὰ τὴν ροπὴν εἰς στρέψιν ὅσον καὶ διὰ τὴν ροπὴν εἰς κάμψιν.

Μόνον μία λεπτομερὴς καὶ πλήρης μελέτη ἑνὸς ἐκάστου προβλήματος ἐπιτρέπει τὸν προσδιορισμὸν τοῦ εἶδους τῆς ὁμοιότητος ἣτις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ μεταξὺ ὁμοιώματος καὶ πρωτοτύπου. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν δεδομένου ὅτι ἐνδιαφερόμεθα διὰ ὁμοιότητα μεταξὺ δύο ρευστῶν ἐν κινήσει ἐντὸς τυχόντων ὑποδοχέων, δέον νὰ ἔχομεν συγχρόνως, γεωμετρικὴν, κινηματικὴν καὶ δυναμικὴν ὁμοιότητα.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω, ἐδόθη μία παραστατικὴ εἰκὼν τῆς ἐννοίας τῆς ὁμοιότητος, ἡ ὁποία θὰ διευκολύνει τὴν κατανόησιν τῶν νέων ἐννοιῶν τὰς ὁποίας εἰσάγομεν εἰς τὸ ἐπόμενον κεφάλαιον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

3.1.-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Ἡ ἐπιστήμη τῆς Φυσικῆς διαιρεῖται εἰς κλάδους καὶ ἕκαστος ἐξ αὐτῶν ἔχει πλεῖστας ὅσας ὑποδιαιρέσεις. Εἷς κλάδος ἢ μία ὑποδιάρσεις χαρακτηρίζονται ἀπὸ ὀρισμένους νόμους «ἐσωτερικῆς συνθέσεως» οἵτινες διέπουν ἓνα ὀρισμένον σύνολον φαινομένων. Τὸ συγκεκριμένον αὐτὸ σύνολον φαινομένων, θὰ ὀνομάσωμεν *Φυσικὴν Περιοχὴν*.

Εἷς ἐκάστην Φυσικὴν Περιοχὴν ὑπάρχει ἓνα πεπερασμένον πλῆθος φυσικῶν μεγεθῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὀρισμένα εἶναι ποσοτικῶς γνωστά. Θὰ τὰ καλέσωμεν *δεδομένα*, τὰ συμβολίζομεν δὲ ὡς a_i ($i = 1$ ἕως μ). Τὰ ὑπόλοιπα εἶναι οἱ *ἄγνωστοι* καὶ θὰ τοὺς συμβολίσωμεν ὡς χ_i ($i = 1$ ἕως ν). Μία Φυσικὴ Περιοχὴ εἶναι «θεωρητικῶς γνωστὴ» ὅταν ἐκφρασθοῦν εἰς αὐτὴν ν τὸ πλῆθος σχέσεις, συνδέουσαι τὰ δεδομένα μὲ τοὺς ἀγνώστους. Αὗται θὰ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\left[F_i (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\nu, a_1, a_2, \dots, a_\mu) = 0 \quad (i = 1 \text{ ἕως } \nu) \right] \quad (3.1.a)$$

Ἐστω ἓν ἰδιαίτερον φαινόμενον τῆς περιοχῆς διὰ τὸ ὁποῖον μία στήλη τιμῶν $(\chi_1, \dots, \chi_\nu, a_1, \dots, a_\mu)$ ἱκανοποιεῖ τὰς (3.1.a). Πολλαπλασιάζομεν ἓνα ἕκαστον τῶν ὄρων τῆς στήλης αὐτῆς, ἐπὶ συντελεστὰς τῆς μορφῆς, $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\nu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$. Ζητοῦμεν δὲ τὰς συνθῆκας ποὺ ἀπαιτοῦνται, οὕτως ὥστε τὸ φαινόμενον τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ἡ νέα στήλη τιμῶν $(\kappa_1 \cdot \chi_1, \kappa_2 \cdot \chi_2, \dots, \kappa_\nu \cdot \chi_\nu, \lambda_1 \cdot a_1, \lambda_2 \cdot a_2, \dots, \lambda_\mu \cdot a_\mu)$, νὰ ὑπακούῃ εἰς τοὺς νόμους ἐσωτερικῆς συνθέσεως τοῦ συνόλου, δηλαδὴ *θέλωμεν νὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:*

$$\left[F_i (\kappa_1 \cdot \chi_1, \kappa_2 \cdot \chi_2, \dots, \kappa_\nu \cdot \chi_\nu, \lambda_1 \cdot a_1, \lambda_2 \cdot a_2, \dots, \lambda_\mu \cdot a_\mu) = 0 \right] \quad (3.1.b)$$

δι' οἷανδήποτε ἀρχικὴν στήλην τιμῶν $(\chi_1, \dots, \chi_\nu, a_1, \dots, a_\mu)$ τῆς (3.1.a).

Θέτομεν ἐξ ὀρισμοῦ ὅτι:

Ἡ ὑπαρξίς τῶν συντελεστῶν $(\kappa_1, \dots, \kappa_\nu, \lambda_1, \dots, \lambda_\mu)$,

ἀποτελεῖ τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην διὰ τὴν ὑπαρξιν ὁμοιότητος εἰς τὴν ὑπ' ὄψιν Φυσικὴν Περιοχὴν.

Λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ στήλη τῶν ἀνωτέρω συντελεστῶν δέον ὅπως ἱκανοποιεῖ τὴν (3.1.β) διὰ πᾶσαν στήλην ἀγνώστων καὶ δεδομένων, ἱκανοποιούσαν τὴν (3.1.α), ἐπιβάλλεται ὅπως αἱ ζητούμεναι συνθῆκαι εἶναι σχέσεις ἀνεξάρτητοι τῶν δεδομένων καὶ ἀγνώστων. Θὰ εἶναι ἐπομένως τῆς μορφῆς:

$$\left[\Omega_i (k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0 \quad (i = 1 \text{ ἕως } \pi) \right] \quad (3.1.\gamma)$$

Ἐπομένως, ἀναζητήσεις ὑπαρχούσης ὁμοιότητος, σημαίνει ἀναζητήσιν σχέσεων τῆς μορφῆς (3.1.γ), τοιούτων ὥστε, ἡ ἰσχὺς τῶν (3.1.γ) καὶ (3.1.α) νὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν ἰσχὺν τῶν (3.1.β).

Οἱ συντελεσταὶ $(k_1, k_2, \dots, k_n, a_1, a_2, \dots, a_m)$, ὀνομάζονται κλίμακες.

Αἱ σχέσεις (3.1.γ) μεταξὺ κλιμάκων, ὀνομάζονται σχέσεις ὁμοιότητος. Ἐκτὸς τῆς γενικῆς ἐννοίας τὴν ὁποίαν δίδομεν οὕτω εἰς τὴν λέξιν ὁμοιότης, ὀνομάζομεν εἰδικώτερον ἐφαρμογὴν ὁμοιότητος, ἕκαστον μετασχηματισμόν, διὰ τοῦ ὁποίου μεταβαίνομεν ἀπὸ ἓν φαινόμενον $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, a_1, \dots, a_m)$, εἰς ἓνα ἄλλο φαινόμενον τῆς αὐτῆς φυσικῆς περιοχῆς $(k_1, \chi_1, k_2, \chi_2, \dots, k_n, \chi_n, \lambda_1, a_1, \dots, \lambda_m, a_m)$, ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προσδιορισθεῖσας συνθήκας. Τὰ φαινόμενα αὐτά, προκύπτοντα ἐκ μετασχηματισμοῦ, ὀνομάζονται ὁμοία φαινόμενα.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἐκάστην φυσικὴν περιοχὴν, τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοτήτων ἀποτελεῖ Ὅμαδα, (groupe) διότι ἱκανοποιεῖ τὰ ἀξιώματα τῆς διαρθρώσεως τῶν Ὁμάδων. Πράγματι, ἓν σύνολον διὰ νὰ ἀποτελῇ Ὅμαδα, πρέπει ἐξ ὀρισμοῦ:

α) Νὰ ὑφίσταται μία πραγματοποιήσιμος μαθηματικὴ πρᾶξις μεταξὺ δύο τυχόντων στοιχείων τοῦ συνόλου, ἥτοι νὰ ὑφίσταται εἰς νόμος διὰ τὸν σχηματισμὸν ἐνὸς τρίτου στοιχείου ἐκ τῶν δύο αὐτῶν τυχόντων στοιχείων, καὶ ἀνεξαρτήτως οἷοιδήποτε ἄλλου στοιχείου τοῦ συνόλου.

β) Ἐκαστον τρίτον στοιχεῖον, σχηματισθὲν ὡς ἀνωτέρω, δέον ὅπως ἀνήκῃ ἐπίσης εἰς τὸ σύνολον. Τὰς ιδιότητας α, καὶ β, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν συνοπτικῶς λέγοντες ὅτι δέον νὰ ὑπάρχῃ εἰς τὸ σύνολον εἰς νόμος ἐσωτερικῆς συνθέσεως.

γ) Ὡς πρὸς τὴν ὑφισταμένην μαθηματικὴν πρᾶξιν δέον νὰ ὑπάρχῃ εἰς τὸ σύνολον ἓν οὐδέτερον στοιχεῖον, ἥτοι τὸ ἀποτελέσμα τῆς μαθηματικῆς πράξεως μεταξὺ τοῦ οὐδετέρου στοιχείου καὶ τυχόντος ἄλλου τρίτου στοιχείου, νὰ ἰσοῦται ἐκ ταυτότητος μὲ τὸ τρίτον στοιχεῖον.

δ) Εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου δέον ὥπως ἀντιστοιχῇ ἐν συμμετρικὸν στοιχεῖον, τοιοῦτον ὥστε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως μεταξὺ ἐνὸς στοιχείου καὶ τοῦ συμμετρικοῦ του, νὰ δίδῃ τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον.

ε) Τέλος ἡ μαθηματικὴ αὕτη πράξις δέον ὥπως ὑπακούει εἰς τὸν προσεταιριστικὸν νόμον: $A*(B*\Gamma) = (A*B)*\Gamma = A*B*\Gamma$.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἱκανοποιήσεως τῶν ἀνωτέρω πέντε ἀξιωμάτων τῶν Ὁμάδων, ὑπὸ τοῦ συνόλου τῶν Ὁμοιοτήτων, ἔχει ὡς ἑξῆς:

Αἱ ὁμοιότητες εἶναι μετασχηματισμοί. Ἐπομένως διὰ δύο μετασχηματισμοὺς M_1 καὶ M_2 , ὑφίσταται μία μαθηματικὴ πράξις: Πραγματοποιούμεν πρῶτον τὸν μετασχηματισμὸν M_1 , ἐν συνεχείᾳ δὲ τὸν μετασχηματισμὸν M_2 . Ἐξ οὗ προκύπτει ὁ μετασχηματισμὸς M_3 , διὰ μιᾶς γενικευμένης πράξεως (*), ἥτοι:

$$M_3 \equiv M_2(M_1) = M_2 * M_1$$

προσδιορίζεται δὲ ἐκ τοῦ ὅτι, ἐὰν $\varphi(\chi)$ παριστᾷ τὸ πρὸς μετασχηματισμὸν εἶδος καὶ $M(\varphi(\chi))$ τὸ ἀποτέλεσμα ἐνὸς μετασχηματισμοῦ, θὰ ἰσχύει ἡ ταυτότης:

$$M_2[M_1(\varphi(\chi))] \equiv M_3(\varphi(\chi)) \quad (3.1.δ)$$

Θὰ δεῖξωμεν τώρα ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὁμοιότητος τὸ προκύπτον ἐκ τῆς μαθηματικῆς πράξεως νέον στοιχεῖον εἶναι ἀνεξάρτητον παντὸς ἄλλου στοιχείου. Πράγματι, ἐκάστη ὁμοιότης χαρακτηρίζεται ἀπὸ μίαν στήλην συντελεστῶν, ἥτοι ἡ M_1 ἐκ τῆς στήλης $(\kappa_1, \dots, \kappa_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ καὶ ἡ M_2 ἐκ τῆς $(\kappa'_1, \dots, \kappa'_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$. Ὁ μετασχηματισμὸς M_3 χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὴν στήλην $(\kappa_1 * \kappa'_1, \dots, \kappa_n * \kappa'_n, \lambda_1 * \lambda'_1, \dots, \lambda_m * \lambda'_m)$, ἥτις ἐξαρτάται μόνον ἀπὸ τὰς M_1 καὶ M_2 , ὁ. ἔ. δ.

Ἐξ ἄλλου τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μαθηματικῆς πράξεως ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον. Πράγματι, ἐκ τοῦ ὀρισμοῦ τῆς ὁμοιότητος, ἐὰν χ παριστᾷ μίαν λύσιν τῆς (3.1.α), αἱ στήλαι τῶν τιμῶν $M_1(\chi_i)$ καὶ $M_2(M_1(\chi_i))$ εἶναι διαδοχικῶς λύσεις τῆς (3.1.α). Ἐπομένως ἡ $M_3(\chi_i)$ εἶναι λύσις τῆς (3.1.α) δι' οἵανδήποτε ἀρχικὴν λύσιν χ_i . Ἐπὶ πλέον ἡ λύσις M_3 χαρακτηρίζεται ἀπὸ μίαν σειράν συντελεστῶν. Ἐπομένως ἡ M_3 ἀποτελεῖ νέαν ὁμοιότητα καὶ ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοτήτων τῆς φυσικῆς περιοχῆς.

Ὑπάρχει ἐξ' ἄλλου καὶ οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοτήτων. Πρόκειται περὶ τῆς στήλης τιμῶν $(1, 1, 1, \dots)$ ἥτοι μιᾶς ὁμοιότητος ἐκφυλισθείσης εἰς ταυτότητα.

Εἰς ἐκάστην ὁμοιότητα (κ_i, λ_i) ἀντιστοιχεῖ μία συμμετρικὴ ὁμοιότης $(1/\kappa_i, 1/\lambda_i)$. Ἡ συμμετρικὴ αὕτη ὁμοιότης ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον, διότι ἀποτελεῖ τὴν μετάβασιν ἐκ τοῦ φυσικοῦ φαινομένου $M_1(\chi_i)$ εἰς τὸ ἀρχικὸν φαινόμενον χ_i .

Τέλος, ἡ μαθηματικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου τῶν ὁμοιοτήτων, ὑπακούει εἰς τὸν προσεταιριστικὸν νόμον. Αὐτὸ προκύπτει ὡς ἄμεσος συνέπεια τῆς ταυτότητος (3.1.δ).

Θὰ ὀνομάσωμεν καθολικὴν ὁμοιότητα εἰς τὴν τὰδε φυσικὴν περιοχὴν, ἢ ἀπλούστερον, ὁμοιότητα εἰς τὴν περιοχὴν, τὴν πλεον ἐκτεταμένην ὁμάδα τῶν μετασχηματισμῶν ποὺ δίδουν ὅμοια φαινόμενα. Μίαν ἔκαστην τῶν ὑπο-ὁμάδων αὐτῆς θὰ τὴν καλέσωμεν, μίαν ὁμοιότητα. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὅταν μελετῶμεν τὴν συμμετρίαν μιᾶς εἰκόνας, πρέπει νὰ διακρίνωμεν τὴν γενικὴν ὁμάδα τῶν τρόπων μετασχηματισμοῦ διὰ τῶν ὁποίων δύναται νὰ ἀναπαραχθῇ ὅμοια εἰκόν, καὶ τοὺς εἰδικοὺς μετασχηματισμοὺς, τοὺς ἀπαιτούμενους διὰ μίαν καὶ μόνην ἀναπαραστάσιν. Τὴν γενικὴν ὁμάδα θὰ ὀνομάσωμεν ὀλικὴν συμμετρίαν τῆς εἰκόνας, τὰς δὲ ἐπὶ μέρους ὑπο-ὁμάδας, μίαν συμμετρίαν.

Θὰ καλέσωμεν ἐλευθερίαν ὁμοιότητος, τὸν ἀριθμὸν τῶν αὐθαιρέτων κλιμάκων, ἥτοι τὸν ἀριθμὸν τῶν κλιμάκων ποὺ παραμένουν αὐθαίρετοι μετὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν σχέσεων (3.1.γ).

Παρατήρησις 1: Εἰς τὸν δοθέντα ἀνωτέρω ὀρισμὸν τῆς φυσικῆς ὁμοιότητος, ὀρισμέναι ἐκ τῶν μεταβλητῶν ($\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_\mu$) δύνανται νὰ εἶναι συντεταγμέναι ἢ χρόνος χωρὶς νὰ σημαίνει μετὰ αὐτὸ ὅτι τὰ φαινόμενα ἔχουν τοὺς αὐτοὺς ἄξονας ἀναφορᾶς ἢ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν χρόνων.

Παρατήρησις 2: Ὅλα τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σύστημα (3.1.α) περιέχει καὶ διαφορικὰς ἐξισώσεις ἢ καὶ ἐξισώσεις μετὰ μερικὰς παραγώγους. Τὸ σύστημα (3.1.α) περιέχει τότε ἐπὶ πλεον, τὰς συνθήκας εἰς τὰ ὅρια, καὶ μία λύσις τοῦ (3.1.α) περιέχει μίαν στήλην συναρτήσεων ἀντὶ μιᾶς στήλης τιμῶν. Τοῦναντίον αἱ κλίμακες παραμένουν διὰ πᾶσαν ὁμοιότητα, μία ὀρισμένη στήλη τιμῶν, συνδεδεμένων μετὰ ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν x_i, α_i .

3.2.-ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ.

Αἱ σχέσεις ὁμοιότητος (3.1.γ) χωρίζονται εἰς δύο κατηγορίας: Πράγματι, εἰς ἕκαστον πρόβλημα ἐν τῇ πράξει καλούμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ποῖα μεγέθη ἀποτελοῦν τὰ δεδομένα, καὶ ποῖα τοὺς ἀγνώστους. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς π τῶν σχέσεων ὁμοιότητος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ ν τῶν ἀγνώστων, θὰ παραμείνουν καὶ σχέσεις μετὰξὺ τῶν κλιμάκων τῶν δεδομένων καὶ μόνον αὐτῶν.

Ἐστω ὅτι ἔχομεν $\pi - \nu = \rho$, (θετικὸς ἀκέραιος). Τὸ σύστημα (3.1.γ) ἀντιστοιχεῖ τότε εἰς:

$$\left[\kappa_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \right] \quad (i=1 \text{ έως } \nu) \quad (3.2.a)$$

$$\left[\varphi_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) = 0 \right] \quad (j=1 \text{ έως } \rho) \quad (3.2.b)$$

Αί σχέσεις (3.2.β), εκ του γεγονότος ότι περιέχουν μόνον τὰς κλίμακας τῶν δεδομένων, ἐκφράζουν τὰς συνθήκας συμβιβαστότητος τὰς ὁποίας εἶναι ἀπαραίτητον νὰ πληροῦν αἱ κλίμακες διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ πραγματοποίησις ὁμοίων φαινομένων. Τὰς ὀνομάζομεν *συνθήκας ὁμοιότητος*.

Ἐὰς ὑποθέσωμεν ἐπὶ πλέον ὅτι εἰς ἕκαστον σύστημα δεδομένων ($\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$) ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον φαινόμενον. Τότε ἡ στήλη (κ_i, χ_i) παριστᾷ τὸ φαινόμενον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ δεδομένα (λ_i, α_i). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, αἱ σχέσεις (3.2.α) ἐμφανίζονται ὡς φυσικαὶ συνέπειαι τῶν σχέσεων (3.2.β). Θὰ ὀνομάσωμεν ἐπομένως τὰς (3.2.α) *ἀποτελέσματα ὁμοιότητος*.

3.3.- ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΛΙΜΑΚΩΝ. ΣΤΡΕΒΛΗ ΚΛΙΜΑΞ.

Πόσας διαφόρους κλίμακας δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν;

Μία σκέψις θὰ ἦτο ἡ χρησιμοποίησις χωριστῆς κλίμακος διὰ κάθε εἶδος φυσικοῦ μεγέθους. Πλὴν ὅμως αὐτὸ οὐδόλως εἶναι ἀπαραίτητον, ἐξαρτᾶται δὲ ἀποκλειστικῶς ἀπὸ τὰς ἀνάγκας αἰτίνες ἐξυπηρετοῦνται ἀπὸ τὸ σύγολον τῶν ὁμοιοτήτων ποὺ διέπουν τὴν φυσικὴν περιοχὴν. Ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὴν φυσικὴν ὁμοιότητα, ἡδυνάμεθα νὰ διανείμωμεν τὰ μεγέθη εἰς περισσοτέρας κατηγορίας ἀπὸ τὰς φυσικῶς ὑπαρχούσας. Πρόκειται περὶ τοῦ κλασσικοῦ παραδείγματος τῆς παρ. 2.1 ὅπου εἰς τὴν Ὑδραυλικὴν χρησιμοποιοῦμεν συχνὰ διὰ τὸ αὐτὸ ὁμοίωμα δύο διαφόρους κλίμακας μηκῶν. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις ἐξ ἄλλου χρησιμοποιοῦμεν διαφόρους κλίμακας διὰ δυνάμεις παραλλήλους, ἐνεργούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁμοιώματος, ἀλλὰ διαφόρου φύσεως ἢ προελεύσεως (Ἀεροδυναμική).

Λέγομεν γενικῶς εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ὅτι χρησιμοποιοῦμεν *στρεβλὴν κλίμακα* (Echelle Distordue) ὡς πρὸς τὸ τάδε φυσικὸν μέγεθος (μῆκος, δυνάμιν κ.λ.π.).

3.4.- ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς ὁμοιότητος ὁδηγεῖ εἰς ἓν θεμελιῶδες θεώρημα, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν: *Θεώρημα τῶν γινομένων τῶν δυνάμεων*. Ἀποδεικνύεται δηλαδὴ ὅτι: *Αἱ σχέσεις ὁμοιότητος, εἶναι, ὑποχρεωτικῶς ἰσότητες μεταξὺ γινομένων τῶν δυνάμεων τῶν κλιμάκων.*

Ἐξεφράσθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Brigman. Θὰ δώσωμεν ἐν συνεχείᾳ μίαν γενικωτέραν ἀπόδειξιν, στηριζόμενοι εἰς τὰ θεωρήματα τοῦ Cauchy, τοῦ Darboux καὶ τοῦ G. Hamel, σχετικῶς μὲ τὰς π ρ ο σ θ ε τ ι κ ᾶ ς σ υ ν ε χ εῖ ς καὶ ἄ σ υ ν ε χ εῖ ς σ υ ν α ρ τ ῆ σ ε ι ς.

Ἐστω ὅτι ἔχομεν ἐπιλύσει τὰς (3.1.α) ὡς πρὸς x_i , ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$x_i = \omega_i(a_1, a_2, \dots, a_\mu) \quad (i = 1 \text{ ἕως } \nu)$$

Ὑποθέτωμεν ἐξ ἄλλου ὅτι ἔχομεν ἐπιλύσει τὰς (3.2.β) ὡς πρὸς $\lambda_\mu, \lambda_{\mu-1}, \dots, \lambda_{\mu-\rho+1}$:

$$\lambda_j = \varphi'_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-\rho}) \quad (j = \mu, \dots, \mu-\rho+1) \quad (3.4.α)$$

Τότε, ἡ ὑπαρξίς τῶν (3.2.β) ἔχει ὡς ἐπακόλουθον τὰς (3.2.α), αἱ ὁποῖαι γράφονται καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν ἐνὸς λόγου, δύο τιμῶν, δύο ὁμοίων φαινομένων, ἥτοι:

$$\kappa_i = \frac{x'_i}{x_i} = \frac{\omega_i(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \dots, \lambda_\mu a_\mu)}{\omega_i(a_1, a_2, \dots, a_\mu)} = f_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \quad (3.4.β)$$

Ἀπαλείφομεν τὰ λ_j ἐκ τῆς (3.4.β):

$$\kappa_i = \frac{\omega_i(\lambda_1 a_1, \dots, \varphi'_j a_\mu)}{\omega_i(a_1, \dots, a_\mu)} = f'_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-\rho}) \quad (3.4.γ)$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις φ'_j καὶ f'_i εἶναι γ ι ν ὶ μ ε ν α δ υ ν ᾶ μ ε ω ν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν φ'_j . Χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ἀποδεικνύοντες κατ' ἀρχὴν τὸ ζητούμενον διὰ $\nu = 1$, $\mu = 3$, καὶ ἐλευθερίαν ὁμοιότητος ἴσιν μὲ δύο.

Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις γράφονται:

$$\begin{cases} x = \omega(a_1, a_2, a_3) \\ \lambda_3 = \varphi'(\lambda_1, \lambda_2) \\ \kappa = \frac{x'}{x} = \frac{\omega(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \lambda_3 a_3)}{\omega(a_1, a_2, a_3)} = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ \kappa = \frac{\omega(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \varphi' a_3)}{\omega(a_1, a_2, a_3)} = f'(\lambda_1, \lambda_2). \end{cases}$$

Ἡ συνθήκη ὁμοιότητος (3.4.α) ἐκφράζει ὅτι:

$\frac{a_3}{a_{o3}} = \varphi'\left(\frac{a_1}{a_{o1}}, \frac{a_2}{a_{o2}}\right)$, διότι ἐν γένει, $\lambda = a/a_o$, ἐνθα a εἶναι μία τυχούσα τιμὴ καὶ a_o εἶναι μία ὁρισμένη τιμὴ, ἀντιστοιχοῦσα εἰς ὁρισμένον φαινόμενον τοῦ συνόλου. Ἡ σχέσις αὕτη γράφεται ἐπίσης:

$$a_3 = g(a_1, a_2) \quad (3.4.δ)$$

Ἡ συνάρτησις g , ἔχει ἐξ ἄλλου τὴν ιδιότητα:

$$\frac{\alpha'_3}{\alpha_3} = \frac{g(\alpha'_1, \alpha'_2)}{g(\alpha_1, \alpha_2)} = \varphi' \left(\frac{\alpha'_1}{\alpha_1}, \frac{\alpha'_2}{\alpha_2} \right) \quad (3.4.ε)$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς (3.4.ε) γράφεται:

$$\frac{g(\alpha'_1, \alpha'_2)}{g(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{g(\alpha'_1, \alpha_2)}{g(\alpha_1, \alpha_2)} \cdot \frac{g(\alpha'_1, \alpha'_2)}{g(\alpha'_1, \alpha_2)} \quad \text{ἢ ἀκόμη:}$$

$$\varphi' \left(\frac{\alpha'_1}{\alpha_2}, \frac{\alpha'_2}{\alpha_2} \right) = \varphi' \left(\frac{\alpha'_1}{\alpha_1}, 1 \right) \cdot \varphi' \left(1, \frac{\alpha'_2}{\alpha_2} \right) \quad \text{ἢ ἀπλούστερον:}$$

$$\left[\varphi'(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi'(\lambda_1, 1) \cdot \varphi'(1, \lambda_2) \right] \quad (3.4.ζ)$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως, διὰ $\alpha'_1 = \mu \cdot \nu \cdot \alpha_1$, $\alpha'_2 \equiv \alpha_2$, ἔχομεν:

$$\frac{g(\mu \cdot \nu \cdot \alpha_1, \alpha_2)}{g(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{g(\mu \alpha_1, \alpha_2)}{g(\alpha_1, \alpha_2)} \cdot \frac{g(\mu \cdot \nu \cdot \alpha_1, \alpha_2)}{g(\mu \cdot \alpha_1, \alpha_2)} \quad \text{ἢ}$$

$$\left[\varphi'(\mu \cdot \nu, 1) = \varphi'(\mu, 1) \cdot \varphi'(\nu, 1) \right] \quad (3.4.η)$$

Θέτομεν $\log \mu = \sigma$, $\log \nu = \tau$, καὶ λογαριθμίζομεν τὴν σχέσιν (3.4.η) ὁπότε προκύπτει:

$$\left[\varphi'(\sigma + \tau) = \varphi'(\sigma) + \varphi'(\tau) \right] \quad (3.4.θ)$$

Ἡ σχέσις (3.4.θ) ἀποτελεῖ ἐξ ὀρισμοῦ τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην διὰ νὰ εἶναι μία συνάρτησις φ' , π ρ ο σ θ ε τ ι κ ῆ, ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς σ , τ . Θὰ περιορισθῶμεν κατ' ἀρχὴν εἰς τὰς προσθετικὰς συνεχεῖς συναρτήσεις. Συμφώνως πρὸς τὴν σχετικὴν θεωρίαν, αἱ μόναι λύσεις τῆς (3.4.θ) θὰ εἶναι τότε τῆς μορφῆς:

$$\left[\varphi'(\sigma) = \beta \cdot \sigma \right] \quad (\beta = \text{σταθερὰ}) \quad (3.4.ι)$$

Ἐπομένως προκύπτει ὅτι $\varphi'(\mu, 1) = \mu^\beta$, καὶ $\varphi'(\nu, 1) = \nu^\beta$. Ἡ σχέσις (3.4.ζ) δίδει τότε:

$$\left[\varphi'(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_3 = \lambda_1^{\beta_1} \cdot \lambda_2^{\beta_2} \right] \quad (3.4.κ)$$

ἐνθα β_1 , β_2 εἶναι σταθεροὶ ἐκθέται. Ἀπεδείχθη ἐπομένως ὅτι ἡ συνάρτησις φ' , εἶναι ἓνα γινόμενον δυνάμεων. Ἀπλὴ ἐφαρμογὴ τῆς τελείας ἐπαγωγῆς δεικνύει ὅτι τὰ αὐτὰ θὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν τῆς σχέσεως (3.4.γ).

Ἄς ἐξετάσωμεν τέλος τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ προσθετικαὶ συναρτήσεις εἶναι ἀσυνεχεῖς. Ἐχει ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν μία προσθετικὴ συνάρτησις εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς ἓνα σημεῖον τότε:

α) Εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς (Cauchy).

β) Διὰ τυχόν πεπερασμένον διάστημα δὲν ἔχει ὄρια (Darboux).

γ) Εἰς τυχόν πεπερασμένον διάστημα, λαμβάνει τιμὰς ὅσον θέλομεν πλησιάζουσας οἰανδήποτε τυχούσαν τιμὴν (Hamel).

Δι' ἓνα φυσικὸν ἢ μηχανικόν, μία τοιαύτη ἀσυνεχὴς προσθετικὴ συνάρτησις δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς χρησιμοποιήσιμος, τοῦλάχιστον διὰ τὴν κλασσικὴν μηχανικὴν. Πράγματι τὰ χρησιμοποιούμενα μεγέθη εἰς τὴν φυσικὴν ἔχουν ὄρια διὰ πᾶν πεπερασμένον διάστημα, καὶ παρουσιάζουν πεπερασμένον ἀριθμὸν ἀσυνεχειῶν.

Ἐπομένως κάθε προσθετικὴ συνάρτησις, παρουσιάζουσα ἔστω καὶ μίαν ἀσυνέχειαν εἶναι ἀπαράδεκτος διὰ τὰ προβλήματα τῆς κλασσικῆς φυσικῆς. Αἱ μόναι προσθετικαὶ συναρτήσεις ποὺ δεχόμεθα εἶναι εἰς πᾶν σημεῖον των συνεχεῖς.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι αἱ μόναι δυναταὶ σχέσεις ὁμοιότητος θὰ εἶναι ἰσότητες μεταξὺ γινομένων τῶν δυνάμεων τῶν κλιμάκων.

3.5.-ΑΝΗΓΜΕΝΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ.-ΑΝΗΓΜΕΝΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν γινομένων τῶν δυνάμεων, προκύπτει κατὰ συνθετικὸν τρόπον ἡ ἔκφρασις τῆς ὑπάρξεως ὁμοιότητος, ἥτοι δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν συγχρόνως τὰς συνθήκας καὶ τὰ ἀποτελέσματα τῆς ὁμοιότητος.

Ἀπεδείξαμεν ὅτι αἱ σχέσεις (3.2.α) καὶ (3.2.β) εἶναι μονώνυμοι, ἐπομένως δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἑξῆς:

$$\left[\kappa_i = \lambda_{i1}^{\beta_{i1}} \cdot \lambda_{i2}^{\beta_{i2}} \dots \lambda_{i\mu}^{\beta_{i\mu}} \right] \quad (i=1 \text{ ἕως } \nu) \quad (3.5.α)$$

$$\left[\lambda_{i1}^{\gamma_{i1}} \cdot \lambda_{i2}^{\gamma_{i2}} \dots \lambda_{i\mu}^{\gamma_{i\mu}} = 1 \right] \quad (i=1 \text{ ἕως } \rho) \quad (3.5.β)$$

Ἄς ἀντικαταστήσωμεν ἐκάστην κλίμακα κ_i , λ_i , διὰ τοῦ λόγου δύο τιμῶν, δύο ὁμοίων φαινομένων, ἥτοι:

$$\kappa_i = \frac{x'_i}{x_i} = \frac{\alpha'_{i1}{}^{\beta_{i1}} \dots \alpha'_{i\mu}{}^{\beta_{i\mu}}}{\alpha_{i1}{}^{\beta_{i1}} \dots \alpha_{i\mu}{}^{\beta_{i\mu}}}$$

Αἱ σχέσεις (3.5.α) καὶ (3.5.β) λαμβάνουν τότε τὴν μορφήν:

$$\left(\frac{x'_i}{\alpha'_{i1}{}^{\beta_{i1}} \dots \alpha'_{i\mu}{}^{\beta_{i\mu}}} = \frac{x_i}{\alpha_{i1}{}^{\beta_{i1}} \dots \alpha_{i\mu}{}^{\beta_{i\mu}}} \right) \quad (3.5.γ)$$

$$\left(\alpha'_{i1}{}^{\gamma_{i1}} \dots \alpha'_{i\mu}{}^{\gamma_{i\mu}} = \alpha_{i1}{}^{\gamma_{i1}} \dots \alpha_{i\mu}{}^{\gamma_{i\mu}} \right) \quad (3.5.δ)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὑπάρξεως μιᾶς καὶ μόνης λύσεως, τὸ σύστημα (3.5.γ) εἶναι συνέπεια τοῦ συστήματος (3.5.δ). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ὅταν αἱ ποσότητες:

$$(A_i = \alpha_{i1}^{\gamma_{i1}} \dots \alpha_{i\mu}^{\gamma_{i\mu}}) \quad (i = 1 \text{ ἕως } \rho) \quad (3.5.ε)$$

λαμβάνουν διαφόρους τιμὰς, αἱ ποσότητες:

$$\left(X_i = \frac{x_i}{\alpha_{i1}^{\beta_{i1}} \dots \alpha_{i\mu}^{\beta_{i\mu}}} \right) \quad (i = 1 \text{ ἕως } \nu) \quad (3.5.ζ)$$

λαμβάνουν ἄλλας ἀντιστοίχους τιμὰς καὶ ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον, ἐπομένως αἱ X_i εἶναι συναρτήσεις τῶν A_i ἥτοι:

$$X_i = F(A_i) \quad (3.5.η)$$

Τὰ γενικευμένα μονώνυμα X_i , A_i , ὀνομάζομεν ἀνηγμένας μεταβλητάς: X_i εἶναι οἱ ἀνηγμένοι ἄγνωστοι, A_i εἶναι τὰ ἀνηγμένα δεδομένα. Αἱ ἐξισώσεις (3.5.η) ὀνομάζονται ἀνηγμέναι ἐξισώσεις. Γενικῶς δὲ θὰ ἔχωμεν ὅτι:

α) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνηγμένων ἀγνώστων, ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων.

β) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνηγμένων δεδομένων ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνθηκῶν ὁμοιότητος, ἢ ἀκόμη μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν σχέσεων ὁμοιότητος μείον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων. Ἐπομένως θὰ εἶναι τὸ πολὺ ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεδομένων καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅλαι αἱ κλίμακες τῶν δεδομένων γίνονται μονὰς καὶ ἡ ὁμοιότης ἐκφυλίζεται εἰς ταυτότητα.

Τὰ πλεονεκτήματα τῶν ἀνηγμένων ἐξισώσεων, εἶναι κεφαλαιώδη, διὰ τοὺς ἐξῆς λόγους:

1) Ἡ ἀναπαράστασις τῶν πειραματικῶν ἀποτελεσμάτων ἀπλοποιεῖται ἀπιστεύτως πολὺ: Εἰς μίαν σελίδα, δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν μίαν καμπύλην συνδέουσαν δύο μεταβλητάς ἢ τὸ πολὺ ἓν διάγραμμα συνδέον τρεῖς μεταβλητάς. Ἐὰν ὑπάρχουν $\nu = 2$ ἄγνωστοι καὶ $\mu = 4$ δεδομένα, καὶ ἐάν θελήσωμεν νὰ ἔχωμεν ὅλα τὰ ἀποτελέσματα διὰ εἴκοσι τιμὰς μιᾶς ἐκάστης ἐκ τῶν τριῶν ἐπὶ πλέον μεταβλητῶν, θὰ ἐχρειάζοντο 8.000 διαγράμματα διὰ νὰ ἀναπαρασταθῇ πλήρως ἡ σχέση $f(x, y, a, b, c, d) = 0$. Διὰ τῆς χρήσεως ἀνηγμένης ἐξισώσεως καὶ μεταβλητῶν, δύο μόνον διαγράμματα εἶναι ἀρκετά.

2) Ἡ σύγκρισις τῶν πειραματικῶν ἀποτελεσμάτων εἶναι ἐπίσης ταχυτάτη. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, μὲ χρήσιν ἀνηγμένων ἐξισώσεων, ἡ σύγκρισις τῶν ἀποτελεσμάτων δύο ἐργαστηρίων γίνεται εὐκόλως, διὰ ἀπλῆς ἐπιθέσεως τῶν διαγραμμάτων, ἀδιαφοροῦμεν δὲ διὰ τὰς μονάδας μετρήσεως τῶν δύο ἐργαστηρίων, δεδομένου ὅτι τὰ χρησιμοποιούμενα εἰς τὰς ἀνηγμένας ἐξισώσεις μεγέθη εἶναι ἀδιάστατα.

3.6.- ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΙ.

Ἐς θεωρήσωμεν τὰς ἀναλλοιώτους ἐνὸς συστήματος ἐξισώσεων, ὡς πρὸς ἓνα ὁρισμένον μετασχηματισμὸν τῶν μεταβλητῶν. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος (3.1.α), ἱκανοποιοῦνται ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν δι' ὁρισμένων ἄλλων νέων τιμῶν. Αἱ ἀναλλοιώτοι αὐταὶ ἐμελετήθησαν ἰδιαίτερος ἀπὸ τοῦ Garret Birkhoff καὶ J. M. Sourian. Δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς συμμετρίας αἰτίων καὶ ἀποτελεσμάτων (τὰ ἀποτελέσματα εἶναι, τοῦλάχιστον, τὸ ἴδιο συμμετρικὰ μὲ τὰ αἷτια), συνάγομεν ὅτι ἐὰν ἐν σύστημα ἐξισώσεων (3.1.α) παρουσιάζει μίαν ὁρισμένην ἀναλλοιώτον, κάθε σχέσις, προκύπτουσα ὡς συνέπεια τῶν (3.1.α), παρουσιάζει τὴν αὐτὴν ἀναλλοιώτον.

Αἱ ὁμοιότητες κατατάσσονται εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ἀναλλοιώτων.

Ἐς συγκρίνωμεν τὴν ὁμοιότητα μὲ ὁρισμένας ἄλλας γνωστὰς ἀναλλοιώτους. Αἱ ἐξισώσεις τῆς Φυσικῆς εἶναι ἐπίσης ἀναλλοιώτοι ὡς πρὸς τὴν ἀλλαγὴν συστήματος συντεταγμένων, ὑπὸ τὸν ὅρον βεβαίως ὅτι καὶ τὸ νέον τρίεδρον ἀναφορᾶς εἶναι σταθερόν, ἢ κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς ὡς πρὸς τὸ παλαιόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν δὲ τοῦ σταθεροῦ τριέδρου ἀναφορᾶς, αἱ προβολαὶ τυχόντος διανύσματος μετατρέπονται διὰ γραμμικῶν σχέσεων.

Ἀλλὰ ὡς ἐδείχθη αἱ σχέσεις ὁμοιότητος εἶναι σχέσεις μονώνυμοι. Ἐς περιορισθῶμεν εἰς τὴν περίπτωσιν θετικῶν κλιμάκων καὶ ἄς θεωρήσωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν κλιμάκων. Ἀμέσως προκύπτει ἡ σοβαρωτάτη ιδιότης ὅτι, αἱ σχέσεις ὁμοιότητος εἶναι γραμμικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν κλιμάκων.

3.7.- ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Ἡ ἀναζήτησις τῶν νόμων ὁμοιότητος ἐνὸς συνόλου φυσικῶν φαινομένων δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ κατὰ δύο διαφόρους μεθόδους.

α) Μέθοδος ἀπ' εὐθείας ἀναζητήσεως: Στηρίζεται εἰς αὐτὸν καθ' ἑαυτὸν τὸν ὁρισμὸν τῆς ὁμοιότητος. Διὰ νὰ τὴν ἐφαρμόσωμεν ἀρχίζομεν γράφοντες τὰς ἐξισώσεις τῶν ὁμοίων φυσικῶν φαινομένων καὶ ἐκφράζομεν τὴν ταυτότητα τῶν διὰ οἷανδήποτε τιμὴν τῶν ἀγνώστων.

Ὡς πρῶτον βασικὸν μειονέκτημα τῆς μεθόδου αὐτῆς προκύπτει ἐπομένως ἡ ἀναγκαιότης γνώσεως ὅλων τῶν ἐξισώσεων τῶν φυσικῶν φαινομένων (εἰς πλεῖστα φυσικὰ φαινόμενα, ἀγνοοῦμεν τὰς ἀκριβεῖς ἐξισώσεις, πλὴν ὅμως ἔχομεν ἀνάγκην τῆς μελέτης τῶν ἐπὶ ὁμοιωμάτων, π.χ. μελέτη λιμένος, ρευμάτων κ.λ.π.).

Ἐάν εἰς μίαν φυσικὴν ἐξίσωσιν ἔχομεν μόνον δύο μονώνυμα τμήματα, αἱ σχέσεις ὁμοιότητος θὰ εἶναι προφανῶς ἡ ἐξίσωσις τῶν κλιμάκων τῶν δύο τμημάτων. Ἐάν μία ἐξίσωσις περιέχει περισσότερα τῶν δύο, μονώνυμα τμήματα, πρέπει νὰ ἐξισωθοῦν αἱ κλίμακες ὅλων τῶν μονωνύμων ὄρων. Πράγματι, ἂς ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς:

$$X = A_1 + A_2 \quad (3.7.a)$$

Θέλομεν νὰ ἐπαληθεύεται καὶ ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος ὅρος δι' αὐθαίρετου παράγοντος. Ἐστώσαν μ , ν , ξ , τρεῖς αὐθαίρετοι παράγοντες:

$$\mu.X = \nu.A_1 + \xi.A_2 \quad (3.7.\beta)$$

Ἡ σχέσις (3.7.a) δέον ὅπως ἐπισύρῃ τὴν σχέσιν (3.7.β) διὰ τυχοῦσαν τιμὴν τῶν μ , ν , ξ . Δέον ἐπομένως, διὰ καταλλήλου ἀφαιρέσεως νὰ ἔχωμεν:

$$(\nu-\mu)A_1 + (\xi-\mu)A_2 = 0 \quad (3.7.\gamma)$$

Ἡ ἐπαλήθευσις τῶν σχέσεων (3.7.γ) διὰ $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ καὶ $A_1=1$, $A_2 = 0$, δίδει τὴν συνθήκην:

$$\mu = \nu = \xi \quad (3.7.\delta)$$

Αἱ τρεῖς κλίμακες πρέπει ἐπομένως νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανή.

β) Μέθοδος Διαστατικῆς Ἀναλύσεως: Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι πολὺ πλέον γενικωτέρα τῆς προηγουμένης, μᾶς ἐπιτρέπει δὲ τὴν εὑρεσιν τῶν νόμων ὁμοιότητος ἑνὸς συνόλου φυσικῶν φαινομένων ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ἀγνοοῦμεν τὰς ἐξισώσεις ποὺ διέπουν τὰ φαινόμενα. Ἡ ἀνάπτυξις τῆς μεθόδου ταύτης ἐπὶ τῇ βάσει νέων ἀρχῶν μαθηματικῆς ἀναλύσεως, ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τοῦ δευτέρου μέρους τῆς παρούσης ἐργασίας.

3.8.- ΝΟΜΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΣΙΚΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

3.8.1.- Προσδιορισμὸς τῆς φυσικῆς περιοχῆς τῶν φαινομένων

Ἐξ ὀρισμοῦ, ὀνομάζομεν Κ λ α σ σ ι κ ᾶ, τὰ Ρευστὰ ποὺ ἱκανοποιοῦν τὰς κάτωθι τρεῖς ὑποθέσεις:

— Γ ρ α μ μ α τ ι κ ὴ τ η ς: Ὁ Τανυστὴς τῶν Τάσεων εἶναι συνάρτησις γραμμικὴ καὶ μὴ ὁμογενὴς τοῦ Τανυστοῦ τῶν Παραμορφώσεων.

— Ὁ μ ο γ ἔ ν ε ι α: Ὁ νόμος τάσεων - παραμορφώσεων εἶναι ἐνιαῖος δι' ὅλον τὸν ὑπὸ τοῦ ρευστοῦ κατεχόμενον χῶρον.

— Ἰ σ ο τ ρ ο π ί α: Ἡ φυσικὴ ἔννοια τῆς ἰσοτροπίας ἐρμηνεύεται ἀπὸ τὸ γεγονός ὅτι ἀπὸ ἄποψιν μηχανικῆς συμπεριφορᾶς, (τάσεων), τὸ ρευστὸν

δὲν παρουσιάζει προνομιούχους διευθύνσεις. Μαθηματικῶς, ἡ ἰσοτροπία ἐκφράζεται ἀπὸ τὸ ὅτι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἕκαστον κύριον σύστημα ἀξόνων τοῦ τανυστοῦ τῶν τάσεων εἶναι καὶ κύριον σύστημα ἀξόνων τοῦ τανυστοῦ τῶν παραμορφώσεων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι διὰ πᾶν κύριον σύστημα ἀξόνων, ὁ νόμος τάσεων - παραμορφώσεων γράφεται:

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k)^{(1)} \quad (3.8.1.a)$$

ἐνθα i, j, k εἶναι μία μετάθεσις τῶν δεικτῶν 1, 2, 3, ἡ δὲ συνάρτησις σ_i εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς δύο τελευταίας μεταβλητάς, ἥτοι, $f(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k) = f(\varepsilon_i, \varepsilon_k, \varepsilon_j)$.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων αὐτῶν προκύπτει ὡς πρὸς κύριον σύστημα ἀξόνων ἡ σχέσις:

$$\sigma_i = -p + 3\lambda e + 2\mu \varepsilon_i \quad (3.8.1.b)$$

ἐνθα $e = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3 =$ πρῶτον στοιχειῶδες ἀναλλοίωτον τοῦ τανυστοῦ τῶν παραμορφώσεων.

Δι' εἰσαγωγῆς τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, καὶ τῶν παρεκκλινόντων τῶν τανυστῶν, προκύπτει ἐκ τῆς (3.8.1.β) ὁ γενικὸς νόμος τάσεων - παραμορφώσεων τῶν κλασσικῶν ρευστῶν, ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \cdot \operatorname{div} \vec{V}) g_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.8.1.\gamma)$$

ἐνθα $\begin{cases} -p = \text{στατική πίεσις ρευστοῦ μορίου ἐν ἰσορροπία} \\ \lambda, \mu = \text{σταθεροὶ παράγοντες, καλούμενοι Συντελεσταὶ τοῦ Lamé.} \\ g_{ij} = \text{τανυστὴς Kronecker.} \end{cases}$

3.8.2.- Γενικαὶ ἐξισώσεις τῶν φαινομένων

Τὸ σύνολον τῶν ἐξισώσεων τῆς ὡς ἀνωτέρω ὀρισθείσης Περιοχῆς τῶν Κλασσικῶν Ρευστῶν, διαιρεῖται εἰς τρεῖς κατηγορίας:

— Ἐξισώσεις ἐκ τοῦ Θεμελιώδους Νόμου τῆς Δυναμικῆς: Ἡ γενικὴ τῶν μορφή εἶναι:

¹ Καλοῦμεν σ_{ij} καὶ ε_{ij} ἀντιστοίχως, τὰς συντεταγμένας τῶν τανυστῶν τῶν τάσεων καὶ παραμορφώσεων εἰς τυχὸν σύστημα συντεταγμένων, καὶ σ_i, ε_i τὴν ἀναγωγὴν τῶν συντεταγμένων εἰς τὴν περίπτωσιν κυρίου συστήματος ἀξόνων. Ὡς τανυστὴν παραμορφώσεων λαμβάνομεν τὸ συμμετρικὸν τμήμα τοῦ τανυστοῦ $\operatorname{grad} \vec{V}$ ($\vec{V} =$ ταχύτης τοῦ τυχόντος ρευστοῦ μορίου), ὁπότε, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$. Ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι διὰ τὰς φυσικὰς ιδιότητες τῶν ρευστῶν, ἡ ἐκλογὴ αὕτη τοῦ τανυστοῦ παραμορφώσεων, εἶναι ἡ πλέον ἐπιτυχής.

$$\rho \gamma_i = f_i + \operatorname{div} \sigma_{ij} \quad (3.8.2.a)$$

$$\text{ένθα} \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{dM}{d\Omega} = \rho(x_i, t) = \text{Ειδική μάζα ρευστοῦ μορίου} \\ \gamma_i = \frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} V_i = \text{ἐπιτάχυνσις με μεταβλητὰς Euler} \\ f_i = \text{ἐξωτερικαὶ δυνάμεις ἀνὰ μονάδα ὄγκου} \end{array} \right.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ σ_{ij} ἐκ τῆς σχέσεως (3.8.1.γ), καὶ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀποκλίσεως αὐτοῦ, προκύπτουν αἱ τελικαὶ ἐξισώσεις:

$$\left[\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} V_i \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta V_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{V}) \right] \quad (3.8.2.β)$$

— Ἐξισώσεις Συνεχειᾶς ἢ Νόμος Διατηρήσεως τῆς Μάζης

Αὕτη ἐκφράζει ὅτι ἡ μάζα M τυχόντος τμήματος ἑνὸς ὕλικου συστήματος, τὸ ὁποῖον ἀκολουθοῦμεν εἰς τὴν κίνησίν του, παραμένει σταθερά, ($dM/dt = 0$), ἥτοι:

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \right] \quad (3.8.2.γ)$$

— Ἐξισώσεις Καταστάσεως (Equations d'Etat):

Πρόκειται περὶ τῶν σχέσεων αἵτινες ἐκφράζουν τὴν ἐξάρτησιν τῶν μεγεθῶν p , λ , μ , ἀπὸ τὴν εἰδικὴν μάζαν ρ , καὶ τὴν θερμοκρασίαν T . Λόγῳ τοῦ ὅτι αἱ σχέσεις αὗται διαφέρουν ἀνὰ κατηγορίας κλασσικῶν Ρευστῶν, δὲν δυνάμεθα νὰ τὰς ἐκφράσωμεν διὰ μίαν γενικὴν περίπτωσιν. Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον, δὲν λαμβάνομεν ἐπομένως ὑπ' ὄψιν τοὺς νόμους φυσικῆς ὁμοιότητος τοὺς προκύπτοντας ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν. Καθίσταται οὕτω πρόδηλον ἐν μειονέκτημα τῆς ἀπ' Εὐθείας Μεθόδου ἐναντι τῆς Διαστατικῆς Ἀναλύσεως. Ἀναγκάζομεθα κατόπιν αὐτοῦ νὰ περιορίσωμεν τὴν Φυσικὴν Περιοχὴν, οὕτως ὥστε εἰς τὸ νέον ὑποσύνολον τῶν φαινομένων τῆς «περιορισμένης περιοχῆς» νὰ γνωρίζωμεν ἅπαντας τοὺς φυσικοὺς νόμους.

Θὰ ἐξετάσωμεν ἐν συνεχείᾳ φαινόμενα Ἀσυμπιεστῶν Ρευστῶν ἄνευ μεταφορᾶς θερμικῆς ἐνεργείας.

Ἐξ ὁρισμοῦ, διὰ τὰ ἀσυμπιεστα ρευστὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις: $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, $\rho = \rho_0(x_i)$ ἢ $d\rho/dt = 0$, ὁπότε αἱ ἐξισώσεις (3.8.2.β) καὶ (3.8.2.γ) ἀνάγονται εἰς τὰς κάτωθι ἀπλουστέρας μορφάς:

$$\left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} V_i = \frac{1}{\rho} f_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta V_i \right] \quad (3.8.2.δ)$$

$$\left[\operatorname{div} \vec{V} = \sum \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \right] \quad (3.8.2.ε)$$

Εἰς τὸ γενικὸν πρόβλημα τῶν Κλασσικῶν Ρευστῶν ἔχωμεν ἔξ ἀγνώστους συναρτήσεις, τὰς:

$$\left[\vec{V}(x_i, t), \rho(x_i, t), p(x_i, t), T(x_i, t) \right] \quad (3.8.2.ζ)$$

ἐννέα δεδομένας συναρτήσεις ἢ γνωστὰς σταθεράς, τὰς:

$$[x_i, t, f_i, v = \mu/\rho, \lambda] \quad (3.8.2.η)$$

καὶ ἔξ ἐξισώσεις, τρεῖς ἐκ τῆς Δυναμικῆς, μίαν ἐκ τῆς Διατηρήσεως τῆς Μάζης καὶ δύο ἐκ τῶν νόμων Καταστάσεως τῶν Ρευστῶν.

Εἰς τὴν ἐν συνεχείᾳ ἐξεταζομένην Φυσικὴν ὑπο-περιοχὴν τῶν Ἀσυμπιέστων Ρευστῶν ἄνευ μεταβολῆς θερμικῆς ἐνεργείας, θεωρῶ τὰ φαινόμενα ἀνεξάρτητα τῆς ἀγνώστου μεταβλητῆς $T(x_i, t)$. Θεωρῶ ἐπίσης γνωστὴν τὴν συνάρτησιν $\rho = \rho_0$.

Ἐν συμπεράσματι τὸ θέμα ἀνάγεται εἰς πρόβλημα τεσσάρων ἐξισώσεων, τῶν (3.8.2.δ) καὶ (3.8.2.ε) μὲ τέσσαρας ἀγνώστους συναρτήσεις, τὰς $\vec{V}$ καὶ p , καὶ ἐννέα δεδομένας, τὰς x_i, t, f_i, v, ρ . Ἡ σχέσις (3.1.α) λαμβάνει κατόπιν αὐτῶν τὴν μορφήν:

$$\left[F_i(\vec{V}, p, x_i, t, f_i, v, \rho) = 0 \right] \quad (i = 1 \text{ ἕως } 4) \quad (3.8.2.θ)$$

3.8.3.- Ἐκλογὴ τῶν κλιμάκων τῆς Φυσικῆς Ὁμοιότητος.

Ἐστω ἐν ἰδιαίτερον φαινόμενον τοῦ ὑποσυνόλου τῶν Ἀσυμπιέστων Ρευστῶν, λαμβάνον χώραν ἐν τῇ φύσει, καὶ τὸ ὁποῖον προτιθέμεθα νὰ μελετήσωμεν ἐν Ἐργαστηρίῳ. Δίδεται ἐπομένως μία στήλη τιμῶν $\vec{V}_1, p_1, x_{i1}, t_1, f_{i1}, v_1$, ἱκανοποιούσα τὰς σχέσεις (3.8.2.θ).

Ἐστω ὅτι τὸ φαινόμενον ἐν Ἐργαστηρίῳ, χαρακτηρίζεται ἀπὸ μίαν ἄλλην στήλην τιμῶν, $\vec{V}_2, p_2, x_{i2}, t_2, f_{i2}, v_2$, προερχομένην ἐκ τῆς πρώτης διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ὀρισμένης σταθεράς, ἥτοι:

$$x_{i2} = \alpha \cdot x_{i1}, t_2 = \beta \cdot t_1, p_2 = \gamma \cdot p_1, \rho_2 = \delta \cdot \rho_1, v_2 = \varepsilon \cdot v_1, \\ \vec{V}_2 = \zeta \cdot \vec{V}_1, \text{ καὶ } f_{i2} = \eta \cdot f_{i1} \quad (3.8.3.α)$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ ταχύτης ἐν γένει εἶναι μῆκος διὰ χρόνου, καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, (π.χ. βαρύτης) προέρχονται κατὰ κανόνα ἀπὸ δυναμικῶν

πεδίων ενεργόν ανά μονάδα μάζης, προκύπτουν άμέσως μεταξύ τών διαφόρων σταθερών αί σχέσεις:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \eta = \delta \quad (f = \text{Δύναμις} / \text{δγκος}) \quad (3.8.3.\beta)$$

Έπί τη βάσει τών όρισμών της παραγράφου 3.1. αί σταθεραί $\alpha, \beta, \dots$ αποτελούν τās Κλίμακας Όμοιότητας τās όρίζομεν δέ άκριβέστερον ως εξής:

α = κλίμαξ όμολόγων γραμμικών διαστάσεων

β = κλίμαξ όμολόγων χρόνων

γ = κλίμαξ όμολόγων πιέσεων

δ = κλίμαξ όμολόγων ειδικών μαζών

ε = κλίμαξ όμολόγων κινηματικών συντελεστών συνεκτικότητας

ζ = κλίμαξ όμολόγων ταχυτήτων

η = κλίμαξ όμολόγων δυνάμεων εις την μονάδα του δγκου

3.8.4.- Σχέσεις Όμοιότητας- Συνθήκαι και άποτελέσματα Όμοιότητας

Διά νά είναι τó φαινόμενον έν Έργαστηρίφ όμοιον πρòς τò έν τη φύσει, πρέπει και άρκεϊ ή στήλη τών τιμών του νά ίκανοποιή τās (3.8.2.θ). Έχομεν έπομένως τās εξισώσεις:

Φαινόμενον έν τη Φύσει: Έξισώσεις (3.8.2.δ) και (3.8.2.ε), με δείκτην 1. (V_{i1}, t_1 , κ.λ.π.)

Φαινόμενον έν Έργαστηρίφ: Έξισώσεις (3.8.2.δ) και (3.8.2.ε) με δείκτην 2. (V_{i2}, t_2 , κ.λ.π.).

Αντικαθιστώμεν εις τās εξισώσεις του φαινομένου έν έργαστηρίφ τās τιμάς τών μεταβλητών του εκ τών σχέσεων (3.8.3.α) και προκύπτουν τελικώς αί σχέσεις (3.8.4.α):

$$\frac{\zeta}{\beta} \left(\frac{\partial V_{i1}}{\partial t} + \vec{V}_1 \text{grad } \vec{V}_{i1} \right) = \frac{\eta}{\delta} \left(\frac{1}{\rho_1} f_{i1} \right) - \frac{\gamma}{\delta \cdot \alpha} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_{i1}} \right) + \frac{\varepsilon \cdot \zeta}{\alpha^2} (v_1 \Delta V_{i1})$$

Έπί τη βάσει τών όσων αναφέρονται εις την παράγραφον 3.7 αί σχέσεις αύται μās όδηγοϋν εις τās κάτωθι εξισώσεις μεταξύ κλιμάκων:

$$\left[\zeta / \beta = \eta / \delta = \gamma / (\delta \cdot \alpha) = (\varepsilon \cdot \zeta) / \alpha^2 \right] \quad (3.8.4.\beta)$$

Αί σχέσεις (3.8.4.β), άποτελοϋν τās ζητούμενας Σχέσεις Όμοιότητας.

Δι' έφαρμογής τών (3.8.3.β), αύται λαμβάνουν την μορφήν:

$$\left[\alpha / \beta^2 = 1 = \gamma / (\delta \cdot \alpha) = \varepsilon / (\alpha \cdot \beta) \right] \quad (3.8.4.\gamma)$$

Πρὸς διαχωρισμόν των εἰς συνθῆκας καὶ ἀποτελέσματα ὁμοιότητος, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ὅτι, $\zeta = a/\beta$ καὶ γ εἶναι αἱ κλίμακες τῶν ἀγνώστων καὶ δ, ε , αἱ κλίμακες τῶν δεδομένων.

Λόγῳ τοῦ ὅτι ἔχομεν τρεῖς σχέσεις ὁμοιότητος καὶ τρεῖς κλίμακας ἀγνώστων, προκύπτουν μόνον Συνθῆκαι Ὁμοιότητος. Αὗται εἶναι:

$$\left. \begin{aligned} a &= \beta^2 \\ \gamma &= a \cdot \delta \\ \varepsilon &= a \cdot \beta = a^3/2 \end{aligned} \right\} \quad (3.8.4.\delta)$$

Σημειωτέον ὅτι αἱ σχέσεις (3.8.3.β) δύνανται νὰ θεωρηθοῦν Ἀποτελέσματα Ὁμοιότητος.

Ἐξ ἄλλου δι' ἀπλῶν ἀντικαταστάσεων, αἱ τρεῖς Συνθῆκαι Ὁμοιότητος (3.8.4.δ) ἀνάγονται εἰς τὰς ἑξῆς:

$$\left[\begin{array}{ll} a/\beta = \sqrt{a}, & \text{ἢ νόμος Froude} \\ \varepsilon = a\sqrt{a} = a \cdot \zeta & \text{ἢ νόμος Reynolds} \\ \gamma = a \cdot \delta & \text{ἢ νόμος πιέσεων} \end{array} \right] \quad (3.8.4.\varepsilon)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὑφίστανται τρεῖς σχέσεις μεταξὺ πέντε κλιμάκων, ἐπομένως ἔχομεν θεωρητικῶς ἐλευθερίαν ὁμοιότητος ἴσην μὲ 2. Ἐν τῇ πράξει εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἐκλέξωμεν τὴν κλίμακα a τῶν γραμμικῶν διαστάσεων (διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν ζητουμένην σμίκρυνσιν) ὥς καὶ τὸ ρευστὸν τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιηθῇ ἐν ἐργαστηρίῳ. Δεσμεύομεν οὕτω ὑποχρεωτικῶς τὰς κλίμακας. a, δ καὶ ε ὅποτε αἱ σχέσεις (3.8.4.δ) δὲν ἔχουν λύσιν ἐν γένει. Ἐπὶ τῆς περαιτέρω διερευνήσεως διὰ τὴν ὑπαρξιν ἢ μὴ δυνατότητος ἀναπαραγωγῆς ὁμοίων φαινομένων εἰς τὴν Μηχανικὴν τῶν Ρευστῶν, παραπέμπομεν εἰς τὸ κεφάλαιον 7 τῆς παρούσης διατριβῆς ὥς καὶ εἰς τὰ Συγγράμματα ὑπ' ἀριθμ. 3, 4, 8 καὶ 9 τῆς Βιβλιογραφίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΜΕΡΟΣ II

ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΙΑ ΜΗΤΡΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΙΝ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΙΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΝΟΜΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ
ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΟ - ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4

ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

Ἡ Διαστατική Ἀνάλυσις, δίδουσα τὴν γενικὴν μορφήν τῶν ἐξισώσεων ποὺ παριστάνουν σχηματικῶς τὰ φυσικὰ φαινόμενα, ἐφαρμόζεται σχεδὸν εἰς ὁλόκληρον τὴν Φυσικὴν. Δίδει μίαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ πολὺ ἀναλυτικωτέραν τοῦ Ἀλγεβρικοῦ ὑπολογισμοῦ καὶ ἐπιτρέπει τὴν λήψιν πολυτίμων πληροφοριῶν ἐπὶ ἑνὸς φαινομένου διότι περιγράφει τὸ φαινόμενον διὰ μιᾶς ἐξισώσεως ἀσφαλῶς ὀρθῆς ὡς πρὸς ὀρισμένας μεταβλητάς.

Ἡ γενικότης τῆς μεθόδου ἀποτελεῖ συγχρόνως τὴν δύναμιν καὶ τὴν ἀδυναμίαν της, διότι δίδει μίαν μερικὴν λύσιν ὅλων τῶν προβλημάτων χωρὶς νὰ δίδῃ πλήρεις ἐξισώσεις, καὶ ἀφήνουσα εἰς τὴν κρίσιν τοῦ Μηχανικοῦ τὴν ἐκλογὴν τῶν μεταβλητῶν ποὺ ὑπείσέρχονται εἰς ἕκαστον φαινόμενον.

Δεδομένου δὲ ὅτι δίδει τὰς ἐξισώσεις ὑπὸ ἀνηγμένην μορφήν, (ἴδε παραγρ. 3.5), ἔχει ὅλα τὰ ἀναφερθέντα ἤδη σχετικὰ πλεονεκτήματα.

Τὰ προβλήματα τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν καὶ αἱ λύσεις των διὰ μελετῶν ἐπὶ προτύπων ἔδωσαν εἰς τὴν Διαστατικὴν Ἀνάλυσιν τὴν μεγάλην της σύγχρονον ἀνάπτυξιν. Ἐφαρμόζεται δὲ τελευταίως καὶ εἰς τὸν τομέα τῆς Ἀντοχῆς τῶν Ὑλικῶν.

4.1.- ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Γνωρίζομεν ὅτι οἰαδήποτε ἐπιστημονικὴ ἔκφρασις στηρίζεται εἰς ἓνα ὀρισμένον ἀριθμὸν φυσικῶν ἐννοιῶν διαφόρου μορφῆς, ὅπως τὸ μήκος, ὁ ὄγκος, ἡ μάζα κ.λ.π. τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν Ὀντότητας (Entités). Ἐκάστη φυσικὴ ὀντότης ἔχει ὀρισμένας ἰδιότητας. Μεταξὺ αὐτῶν, ἡ χαρακτηριστικωτέρα εἶναι τὸ Μέγεθος καὶ ἐκφράζεται διὰ μιᾶς Σχέσεως Προσδιορισμοῦ (Relation de Définition), τῆς μορφῆς:

$$E_1 = f(E_2, E_3, \dots, E_p) \quad (4.1.a)$$

εἰς τὴν ὁποίαν E_1 εἶναι τὸ μέγεθος τῆς φυσικῆς ὀντότητος, ἐκφραζόμενον συναρτήσει μιᾶς σειρᾶς μεγεθῶν $E_2, E_3, \dots, E_p$ ἅτινα ἐκλέγομεν ὡς θεμελιώδη μεγέθη.

Ἡ Σχέσις Προσδιορισμοῦ πάσης φυσικῆς ὀντότητος, ὀνομάζεται καὶ Διαστατικὴ Ἐξίσωσις, διότι δίδεται πάντοτε ὑπὸ τὴν μορφήν ἐνὸς γινομένου τῶν δυνάμεων τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν, ἥτοι:

$$E_1 = E_2^{\alpha} \cdot E_3^{\beta} \cdot E_4^{\gamma} \cdot E_5^{\delta} \cdot \dots \cdot E_p^{\kappa} \quad (4.1.\beta)$$

Οἱ ἐκθέται α, β, γ, δ, ὀνομάζονται διαστάσεις καὶ εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοί. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ὑποχρεωτικοῦ τῆς μορφῆς (4.1.β) δι' οἰανδήποτε Σχέσιν Προσδιορισμοῦ, εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποδείξεως τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς Ὁμοιότητος (3.4).

Ἡ ἐξέλιξις ἐνὸς φαινομένου, εἶναι συνάρτησις ἐνὸς ὀρισμένου ἀριθμοῦ σταθερῶν ἢ μεταβλητῶν μεγεθῶν, τὰ ὅποια θὰ ὀνομάσωμεν Ἀνεξαρτήτους Μεταβλητάς. Κατὰ τὴν διάρκειαν αὐτοῦ τοῦ φαινομένου, πολλά ἄλλα μεγέθη δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν καὶ νὰ ὑποστοῦν μεταβολάς, πλὴν ὅμως αἱ μεταβολαὶ τῶν συνδέονται μὲ αὐτὰς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Οἱ φυσικοὶ νόμοι, προερχόμενοι ἐκ τῆς θεωρίας ἢ καὶ κατ' εὐθείαν ἐκ τοῦ πειράματος, δίδουν τὴν μαθηματικὴν σχέσιν τῆς μορφῆς (4.1.α), μεταξὺ τοῦ μεγέθους E_1 καὶ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $E_2, E_3, \dots, E_p$.

Δυνάμεθα δὲ νὰ γράψωμεν τὴν (4.1.α) ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$[f(E_1, E_2, \dots, E_p) = 0] \quad (4.1.\gamma)$$

Αἱ σχέσεις (4.1.α) ἢ (4.1.γ) ἐκφράζουν ἓνα φυσικὸν νόμον. Πρέπει ἐπομένως νὰ ἔχουν τὴν βασικὴν ιδιότητα πὺρ τὰς καθιστᾷ ἀνεξαρτήτους τῶν ἐκλεγείσων, διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαφόρων μεγεθῶν, μονάδων. Ἡ ιδιότης αὕτη εἶναι τὸ Ἀναλλοίωτον ὡς πρὸς τὴν ἀλλαγὴν τοῦ μεγέθους τῶν μονάδων.

Ἡ Μαθηματικὴ συνθήκη ἢ ἐκφράζουσα αὐτὴν τὴν ιδιότητα συνίσταται εἰς τὸ ὅτι ἡ σχέση (4.1.γ) πρέπει νὰ εἶναι ὁμογενὴς ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν.

Γενικώτερον ἀποδεικνύεται εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν ὅτι μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς:

$$Z = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \nu$$

εἶναι διαστατικῶς ὁμογενὴς, ἐὰν καὶ μόνον, αἱ μεταβληταὶ $Z, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ ἔχουν ἅπασαι τὴν αὐτὴν διάστασιν. Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανή. Ἐπιτρέπει δὲ μίαν πρώτην ἐπαλήθευσιν τοῦ ἀποτελέσματος ἐνὸς τυχόντος ὑπολογισμοῦ. Πλὴν τῶν Ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων ἐφαρμόζεται ἐξ ἄλλου εἰς τὰ Διαφορικὰς ἐξισώσεις καὶ τὸν Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμόν. Ἐν συμπεράσματι, ἡ μαθηματικὴ ἐκφρασις ἐνὸς φυσικοῦ νόμου, εἶναι ὁμογενὴς ὡς πρὸς τὰ θεμελιώδη μεγέθη.

Μία γενικὴ ἐξίσωσις φυσικῆς, γράφεται ἐπομένως ὑπὸ τὴν μορφήν τοῦ

ἄθροίσματος πλήθους ὄρων, ἐχόντων τὸν αὐτὸν βαθμὸν ὡς πρὸς τὰ θεμελιώδη μεγέθη.

Πρόκειται βεβαίως διὰ μίαν ὁμογένειαν ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν ξεχωριστά. Ἐκαστος ὅρος δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν ἐνὸς γινομένου δύο παραγόντων, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι γινόμενον τῶν δυνάμεων τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν καὶ ὁ αὐτὸς δι' ὅλους τοὺς ὅρους καὶ ὁ δευτερος εἶναι μία συνάρτησις παραμέτρων ἄνευ διαστάσεων.

Πλὴν ὅμως ἡ μελέτη τῶν ὁμογενῶν συναρτήσεων ἐπιτρέπει νὰ προχωρήσωμεν μακρύτερον καὶ νὰ γράψωμεν αὐτὴν τὴν φυσικὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ μίαν μορφήν πλεον λεπτὴν καὶ ἀπλουστέραν. Ἡ ἀναζήτησις τῆς εἰδικῆς αὐτῆς μορφῆς ἀποτελεῖ ἓνα τῶν κυρίων σκοπῶν τῆς Διαστατικῆς Ἀναλύσεως, καὶ περικλείεται ἐν περιλήψει, εἰς τὸ θεώρημα τῆς ἐπομένης παραγράφου.

4.1.- ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ π (ἢ VASCHY - BUCKINGHAM)

Τὸ θεμελιώδες αὐτὸ θεώρημα ἔχει ὡς ἀκολούθως:

«Ἡ γενικὴ μορφή οἷα σδὴ ποτε πλήρους ἐξίσωσως τῆς φυσικῆς (4.1.γ), δύναται νὰ γραφῇ:

$$[F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{p-q}) = 0] \quad (4.2.a)$$

Οἱ ὅροι π , παριστάνουν μονώνυμα ἄνευ διαστάσεων, ἀνεξάρτητα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ σχηματισθοῦν ἐκ τῶν p θεωρουμένων φυσικῶν μεγεθῶν.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν μονωνύμων αὐτῶν εἶναι $p-q$ ἐνθα q εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν ἅτινα ὑπεισέρχονται εἰς τὴν μέτρησιν τῶν p μεγεθῶν».

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος π εἶναι ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέροντα εἰς τὰ προβλήματα μεγάλου πλήθους μεταβλητῶν. Χρησιμοποιοῦντες τὴν μορφήν (4.2.a), ἥτις ἀποτελεῖ ἀνηγμένην ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (3.5.η), ἀπαλείφομεν εἰς τὴν πραγματικότητα q μεταβλητάς. Ἡ μαθηματικὴ ἢ γραφικὴ παράστασις ἐμφανίζεται ὑπὸ ἀπλοποιημένην μορφήν. Ἡ πειραματικὴ ἔρευνα, ἀπλοποιεῖται ἐπομένως τὰ μέγιστα.

Ἐπὶ πλεον, λόγφ τοῦ ἀδιαστάτου τῆς μορφῆς των, οἱ ὅροι π , ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως, ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν εἰς οἷονδὴ ποτε σύστημα ἀπολύτων μονάδων μετρήσεως, αὐτὸ δὲ ἀπλοποιεῖ τὴν διεθνῇ συνεργασίαν μεταξὺ ἐργαστηρίων.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τῶν π στηρίζεται εἰς τὸν ἄλγεβρικὸν λογισμόν, ὑπάρχει δὲ εἰς τὰ βασικὰ συγγράμματα Διαστατικῆς Ἀναλύσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΜΕΛΕΤΗΝ ΤΩΝ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ π.

Διὰ τὴν καλλιτέραν χρῆσιν τῶν μεθόδων τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως εἰς τὴν Διαστατικὴν Ἀνάλυσιν, διατάσσομεν τὰς διαστάσεις τῶν φυσικῶν μεταβλητῶν ὑπὸ μορφήν μητρώου.

Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι ἐξετάζομεν τὰ φαινόμενα ροῆς εἰς σωλῆνας καὶ ὅτι αἱ θεωρούμεναι μεταβληταὶ εἶναι ἡ πίεσις p τὸ μήκος τοῦ ἀγωγοῦ L , ἡ ταχύτης V , ἡ εἰδικὴ μᾶζα ρ , ἡ κινηματικὴ συνεκτικότητα ν καὶ ἡ διάμετρος τοῦ ἀγωγοῦ D . Εἰς τὸ ἐπόμενον μητρῶον ἐκάστη στήλη δίδει τοὺς ἐκθέτας εἰς τὴν Διαστατικὴν ἔκφρασιν τῶν ἀντιστοίχων μεταβλητῶν:

	p	ρ	V	L	D	ν
M	1	1	0	0	0	0
L	-1	-3	1	1	1	2
T	-2	0	-1	0	0	-1

Θὰ τὸ ὀνομάσωμεν: Διαστατικὸν Μητρῶον τῶν Μεταβλητῶν.

Ὡς γνωστὸν ἐν Μητρῶον λέγεται τετραγωνικόν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν γίνῃ ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν σειρῶν. Εἰς ἕκαστον μητρῶον περιέχονται τετραγωνικὰ μητρώα, λαμβάνονται δὲ διὰ διαγραφῆς ὀρισμένων γραμμῶν ἢ στηλῶν τοῦ ἀρχικοῦ μητρώου. Αἱ ὀρίζουσαι αὐτῶν τῶν τετραγωνικῶν μητρώων, ὀνομάζονται ὀρίζουσαι τοῦ ἀρχικοῦ μητρώου. Συμβαίνει πολλάκις, ὅλαι αἱ ὀρίζουσαι ὑπεράνω μιᾶς ὀρισμένης τάξεως, νὰ εἶναι μηδενικαί. Λέγομεν τότε ὅτι:

Ἐὰν ἐν μητρῶον, περιέχει μίαν ὀρίζουσαν ν τάξεως μὴ μηδενικὴν καὶ ἂν ὅλαι αἱ δυναταὶ ὀρίζουσαι $\nu + 1$ τάξεως εἶναι μηδενικαί, ἡ τάξις τοῦ μητρώου θὰ εἶναι ν , ἐξ ὀρισμοῦ.

Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ ὀρίζουσα ἡ σχηματισθεῖσα ἐκ τῶν τριῶν τελευταίων στηλῶν τοῦ ἐκτεθέντος προηγουμένου Διαστατικοῦ Μητρώου τῶν

Μεταβλητών έχει αριθμητικήν τιμήν 2 (διάφορον τοῦ μηδενός) καὶ εἶναι τρίτης τάξεως. Συνάγομεν ἐπομένως ὅτι τὸ Διαστατικὸν Μητρώον τῶν Μεταβλητῶν εἶναι τρίτης τάξεως.

Ἡ σημασία τῆς ἐννοίας τῆς τάξεως τοῦ Διαστατικοῦ Μητρώου, προκύπτει ἀπὸ τὴν κάτωθι πρότασιν:

«Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων π μιᾶς πλήρους σειρᾶς, ἰσοῦται πρὸς τὸν ὀλικὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνεξαρτήτων φυσικῶν μεταβλητῶν μείον τὴν τάξιν τοῦ Διαστατικοῦ τῶν Μητρώου τῶν Μεταβλητῶν».

Ἡ σημασία τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι μεγίστη, διότι προσδιορίζει μὲ Μαθηματικὴν ἀκρίβειαν καὶ ἀσφαλῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν γινομένων π , ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν ἀντίστοιχον πρότασιν τῆς παραγράφου (4.2) εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἀριθμὸς τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν q δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ ἐσφαλμένως.

Διὰ τὸ παράδειγμα τῆς παρούσης παραγράφου, δεδομένου ὅτι ἔχομεν ἑξ ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς καὶ Μητρώον τρίτης τάξεως, θὰ προκύψουν τελικῶς τρία μονώνυμα π . Πράγματι, ὁ ἀριθμὸς Reynolds, ὁ ἀριθμὸς D/L καὶ ὁ συντελεστής πίεσεως ἢ ἀριθμὸς Euler ἀποτελοῦν μίαν πλήρη σειράν μονωνύμων π , διὰ τὰς δοθεῖσας ἑξ φυσικὰς μεταβλητάς.

Αἱ γραμμαὶ ἐνὸς μητρώου λέγονται γραμμικῶς ἐξηρτημέναι, ἐὰν τοῦλάχιστον μία σειρά αὐτοῦ εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ἄλλων. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν, αἱ γραμμαὶ τοῦ μητρώου λέγονται γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι. Ἐὰν τὸ μητρώον ἔχει δύο μόνον γραμμάς, ἢ γραμμικὴ ἐξάρτησις ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀναλογίαν μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν. Ἐπομένως ἢ γραμμικὴ ἐξάρτησις εἶναι μία γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς ἀναλογίας.

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως εἰς τὸν ὑπολογισμὸν διὰ μητρώων τὸ κάτωθι θεώρημα, ἔχον σχέσιν μὲ τὴν γραμμικὴν ἐξάρτησιν:

«Αἱ γραμμαὶ ἐνὸς Μητρώου εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημέναι, ἐὰν καὶ μόνον, ἢ τάξις τοῦ Μητρώου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γραμμῶν του».

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ, ἢ τάξις ἐνὸς μητρώου, δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀπαλειφθοῦν αἱ γραμμικῶς ἐξηρτημέναι γραμμαὶ του. Συνήθως δι' ἀπλῆς ἐποπτείας ἐνὸς μητρώου εὐρίσκονται αἱ περισσότεραι τῶν γραμμικῶς ἐξηρτημένων γραμμῶν, ὅποτε εὐκολύνεται πολὺ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς τάξεως τοῦ μητρώου, διὰ τῆς ἀπαλειφῆς των.

Ἄς ἐπανέλθωμεν τώρα εἰς τὰς μεταβλητάς p, ρ, V, L, D, ν .

Ἡ γενικὴ μορφή τοῦ μονωνύμου π θὰ εἶναι:

$$\pi = p^{k_1} \cdot \rho^{k_2} \cdot V^{k_3} \cdot L^{k_4} \cdot D^{k_5} \cdot \nu^{k_6}$$

Δι' οίασδήποτε δὲ τιμὰς τῶν ἐκθετῶν καὶ διαστάσεις τοῦ μονωνύμου π θὰ εἶναι:

$$(\pi) \equiv (M^0 \cdot L^0 \cdot T^0) \equiv (M^1 L^{-1} T^{-2})^{\kappa_1} (M^1 L^{-3})^{\kappa_2} (L^1 T^{-1})^{\kappa_3} (L)^{\kappa_4} (L)^{\kappa_5} (L^2 T^{-1})^{\kappa_6}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς προκύπτει τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} \kappa_1 + \kappa_2 &= 0 \\ \kappa_1 + 3\kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4 - \kappa_5 - 2\kappa_6 &= 0 \\ 2\kappa_1 + \kappa_3 + \kappa_6 &= 0 \end{aligned} \quad (5.a)$$

Κάθε λύσις τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν δίδει μίαν σειρὰν ἐκθετῶν κ καὶ ἐπομένως ἓν μονώνυμον π .

Παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι: Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὄρων κ , ἐκάστης γραμμῆς τοῦ συστήματος (5.a) εἶναι αἱ γραμμαὶ τοῦ Διαστατικοῦ Μητρώου. Ἐπομένως τὸ σύστημα (5.a) δύναται νὰ γραφῇ ἀπ' εὐθείας, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ Διαστατικοῦ Μητρώου.

Ἄς γενικεύσωμεν τώρα τὸ προηγούμενον παράδειγμα, καὶ ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν τὰ μονώνυμα π , εἰς τὴν περίπτωσιν v φυσικῶν μεταβλητῶν. Ὡς ἐδείχθη προηγουμένως, οἱ ἐκθέται $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_v$ τοῦ τυχόντος μονωνύμου π θὰ εἶναι μία λύσις ἑνὸς συστήματος ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, τὸ ὁποῖον ὑπὸ Μητρικὴν μορφήν δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$\left[a_{ij} \cdot \kappa_j = y_i = 0 \right] \quad \text{ἐνθα} \quad \begin{cases} i = \text{ἐλεύθερος δείκτης} = 1 \text{ ἕως } q \\ j = \text{ἄφωτος δείκτης} = 1 \text{ ἕως } v \\ \text{κατὰ συμβολισμὸν Ἀϊνστάιν} \end{cases}$$

$$\text{ἢ ἀπλούστερον:} \quad \left[A \cdot K = Y = 0 \right] \quad (5.\beta)$$

$$\text{ἐνθα: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qv} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_v \end{bmatrix} \quad \text{καὶ } Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (q \text{ τὸ πλῆθος μηδενικῶν στοιχείων})$$

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι q εἶναι ἡ τάξις τοῦ Διαστατικοῦ Μητρώου, συμπίπτουσα συνήθως μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν καὶ v τὸ πλῆθος τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ μητρὸν A εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ Διαστατικὸν Μητρὸν τῶν μεταβλητῶν, θεωρούμενον ὡς q τάξεως, ἥτοι μὲ γραμμικῶς ἀνεξαρτήτους γραμμάς. Εἰς τὸ σύστημα (5.β) διακρίνομεν τὰς ἐξῆς περιπτώσεις:

i) $v \leq q$ Τὸ σύστημα δὲν ἔχει λύσιν ἐν γένει, ἐκτὸς τῆς μηδενικῆς.

Ἡ περίπτωση αὕτη δὲν ἐμφανίζεται προφανῶς ποτὲ ἐν τῇ πράξει.

ii) $v > q$ Εἰς τὴν περίπτωσιν αὕτην, συμφώνως πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ὁμογενῶν συστημάτων, τὸ σύστημα (5.β) ἔχει ἀκριβῶς $v - q$ γραμμικῶς ἀνεξαρτήτους λύσεις, τὸ σύνολον τῶν ὁποίων καλοῦμεν θεμελιῶδες σύστημα λύσεων. Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν λύσεων δίδεται ἀπὸ τὴν διάσπασιν τοῦ συστήματος (5.β) τὸ ὁποῖον γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} A_1^{v-q} \cdot K_1^{v-q} + A_{v-q+1}^v \cdot K_{v-q+1}^v &= 0 \quad \eta \\ A_{v-q+1}^v \cdot K_{v-q+1}^v &= -A_1^{v-q} \cdot K_1^{v-q} \end{aligned} \quad (5.γ)$$

$$\text{ἐνθα: } A_i^j = \begin{bmatrix} a_{1,i}, a_{1,i+1}, \dots, a_{1,j} \\ a_{2,i} \dots \dots \dots a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{q,i} \dots \dots \dots a_{q,j} \end{bmatrix} \quad \text{καὶ } K_i^j = \begin{bmatrix} K_i \\ K_{i+1} \\ \vdots \\ K_j \end{bmatrix}$$

Δι' ἐκάστην σειρὰν ἀριθμητικῶν τιμῶν τοῦ μητρώου K_1^{v-q} προκύπτει μία καὶ μόνη λύσις τῆς σχέσεως (5.γ) ὡς πρὸς K_{v-q+1}^v τῆς μορφῆς:

$$\left[K_{v-q+1}^v = -[A_{v-q+1}^v]^{-1} \cdot [A_1^{v-q} \cdot K_1^{v-q}] \right] \quad (5.δ)$$

Οὕτω διὰ $v - q$ σειρᾶς ἀριθμητικῶν τιμῶν τοῦ μητρώου K_1^{v-q} θὰ προκύψουν $v - q$ λύσεις τῆς (5.δ) ἥτοι, $v - q$ σειραὶ ἀριθμητικῶν τιμῶν τοῦ μητρώου K_{v-q+1}^v . Πλὴν ὅμως, ζητοῦμεν λύσεις πληροῦσας τὰς ἐξῆς ἀπαραιτήτους προϋποθέσεις:

α) Νὰ δίδουν μίαν πλήρη σειρὰν ἀνεξαρτήτων μονωνύμων, π, ἥτοι ἕκαστον μονώνυμον νὰ μὴν προκύπτει ἀπὸ πολλαπλασιαστικὸν συνδυασμὸν τῶν ἄλλων. Δεδομένου ὅτι ἡ γενικὴ μορφή τῶν μονωνύμων εἶναι:

$$\left[\Pi_j = \prod_1^v X_i^{K_{ij}} \right] (5.ε) \quad \text{ἐνθα: } \left\{ \begin{array}{l} j=1 \text{ ἕως } v-q \\ X_i = \alpha_i \text{ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ} \end{array} \right\} (5.ε)$$

διὰ λογαριθμίσεως τῶν σχέσεων (5.ε) προκύπτει τὸ γραμμικὸν σύστημα:

$$\left[\log. \Pi_j = \kappa_{ij} (\log X_i) \right] \quad \text{ἐνθα: } \left\{ \begin{array}{l} j=\text{ἐλεύθερος δείκτης}=1 \text{ ἕως } v-q \\ i=\text{δεσμευμένος δείκτης}=1 \text{ ἕως } v \end{array} \right\}$$

ἢ ἀπλούστερον:

$$\left[\Pi = K \cdot M \right] \quad (5.ζ)$$

$$\text{ένθα : } \Pi = \begin{bmatrix} \log \pi_1 \\ \vdots \\ \log \pi_{v-q} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \log X_1 \\ \log X_2 \\ \vdots \\ \log X_v \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_{11}, & K_{12}, \dots, & K_{1v} \\ K_{21}, & K_{22}, \dots, & K_{2v} \\ \vdots & & \\ K_{v-q,1}, & K_{v-q,2}, \dots, & K_{v-q,v} \end{bmatrix}$$

Προφανώς, αἱ σχέσεις (5.ζ) δίδουν τὰς λύσεις τῶν $v - q$ ζητουμένων μονωνύμων. Διὰ τὰ εἶναι δὲ τὰ μονώνυμα αὐτὰ ἀνεξάρτητα μεταξύ των πλασσιαστικῶς, πρέπει καὶ ἄρκει τὸ μητρώον K νὰ εἶναι $v - q$ τάξεως, ἥτοι νὰ ἔχη γραμμικῶς ἀνεξαρτήτους γραμμάς.

Ἀπεδείξαμεν οὕτω τὴν ἐξῆς θεμελιώδη πρότασιν:

«Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ τὰ προκύψῃ μία πλήρης σειρὰ ἀνεξαρτήτων μονωνύμων π , εἶναι ἡ ὑπαρξίς εἰς τὴν σχέσιν (5.ζ) ἑνὸς μητρώου K , $v - q$ τάξεως».

Τὸ μητρώον αὐτὸ K , καλοῦμεν Μητρώον τοῦ Θεμελιώδους Συστήματος Λύσεων.

β) Ἡ προκύπτουσα πλήρης σειρὰ τῶν ἀνεξαρτήτων μονωνύμων π , νὰ εἶναι ἡ ἀπλουστέρα δυνατὴ ἀπὸ ἄποψιν ἀριθμητικῶν καὶ ἐργαστηριακῶν ἐφαρμογῶν.

Πράγματι, ἐν ἑκάστον τῶν μονωνύμων ἀποτελεῖ νόμον ὁμοιότητος, ὑπάρχει δὲ ἀνάγκη ὅσον τὸ δυνατόν ἀπλουστέρας ἐφαρμογῆς τοῦ εἰς τὰς ἐργαστηριακὰς ἐρεῦνας. Ἐπομένως δεόν ὅπως περιέχῃ τὸν μικρότερον δυνατόν ἀριθμὸν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν X_i , μὲ τοὺς ἀπλουστέρους δυνατοὺς ἐκθέτας k_i . Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν κριτηρίων αὐτῶν θὰ ἐκλέξωμεν τὴν κατάλληλον μορφήν τοῦ μητρώου τῶν Λύσεων K .

Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχὴν ὅτι τὸ μητρώον K εἶναι ὀρθογωνικόν, $v - q$ γραμμῶν καὶ v στηλῶν. Αἱ $v - q$ πρῶται στήλαι τοῦ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ $v - q$ μητρώα K_1^{v-q} τῆς σχέσεως (5.δ) εἰς τὰ ὁποῖα δίδομεν $v - q$ αὐθαιρέτους τιμὰς, τοιαύτας ὥστε νὰ προκύβουν αἱ $v - q$ λύσεις τῆς (5.δ), αἱ δίδουσαι ἀνεξάρτητα μονώνυμα π . Συμφώνως δὲ πρὸς τὴν προηγουμένην παράγραφον, αἱ προκύπτουσαι $v - q$ λύσεις δεόν ὅπως ἀποτελέσουν μητρώον $v - q$ τάξεως.

Ἡ ἀπλουστέρα δυνατὴ ἐκλογή τιμῶν, διὰ τὰς $v - q$ πρῶτας στήλας τοῦ μητρώου K , αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τετραγωνικὸν μητρώον, εἶναι τὸ μοναδιαῖον στοιχεῖον τοῦ Συνόλου τῶν τετραγωνικῶν μητρώων (τὸ ὁποῖον σύνολον ἔχει διάρθρωσιν δακτυλίου), ἥτοι τὸ διαγώνιον μητρώον $v - q$ τάξεως, μὲ στοιχεῖα: $k_{ij} = 0$ διὰ $i \neq j$, καὶ $k_{ij} = 1$ διὰ $i = j$, (ἀντίστοιχον μὲ τὸν Τανυστὴν $Kroncker$ εἰς τὸν δακτύλιον τῶν τανυστῶν β' τάξεως).

Τὸ προκύπτων οὕτω μητρώον Κ πληροῖ ὅλας τὰς τεθείσας προϋποθέσεις εἰς τὰς παραγράφους α καὶ β.

Τὸ γενικὸν ἀντικείμενον τοῦ παρόντος κεφαλαίου ἔχει ἐπιτευχθῆ, ἀπομένει δὲ μόνον ἡ συστηματοποίησις τῶν ἀνωτέρω, ἀποτελοῦσα τὸ ἀντικείμενον τοῦ ἐπομένου κεφαλαίου.

Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285
286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345
346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375
376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405
406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435
436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465
466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495
496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525
526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555
556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585
586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600
601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615
616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630
631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645
646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660
661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675
676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690
691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705
706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720
721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735
736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750
751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765
766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780
781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795
796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810
811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825
826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840
841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855
856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870
871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885
886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915
916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930
931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945
946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975
976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990
991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005
1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020
1021	1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031	1032	1033	1034	1035
1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050
1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065
1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080
1081	1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089	1090	1091	1092	1093	1094	1095
1096	1097	1098	1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108	1109	1110
1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122	1123	1124	1125
1126	1127	1128	1129	1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140
1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154	1155
1156	1157	1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1169	1170
1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185
1186	1187	1188	1189	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1196	1197	1198	1199	1200
1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1210	1211	1212	1213	1214	1215
1216	1217	1218	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229	1230
1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245
1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260
1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1270	1271	1272	1273	1274	1275
1276	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1290
1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305
1306	1307	1308	1309	1310	1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320
1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330	1331	1332	1333	1334	1335
1336	1337	1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350
1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361	1362	1363	1364	1365
1366	1367	1368	1369	1370	1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377	1378	1379	1380
1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391	1392	1393	1394	1395

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6

ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ π .

Ἐστω ὅτι ζητοῦνται τὰ ἀδιάστατα μονώνυμα π , φυσικοῦ τινος φαινομένου μετὰ μεταβλητὰς X_i τῶν ὁποίων τὸ διαστατικὸν μητρώον εἰς τὸ σύστημα C.G.S. εἶναι τὸ ἑξῆς:

	X_1	X_2	X_3	. . .	X_{v-1}	X_v
M	a_{11}	a_{12}	a_{13}	. . .	$a_{1,v-1}$	a_{1v}
L	a_{21}	a_{22}	a_{23}	. . .	$a_{2,v-1}$	a_{2v}
T	a_{31}	a_{32}	a_{13}	. . .	$a_{3,v-1}$	a_{3v}

Τὸ πρῶτον βῆμα εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῆς τάξεως τοῦ μητρώου. Ὑπολογίζομεν τὴν πρώτην ἐκ δεξιῶν ὀρίζουσαν τοῦ μητρώου. Αὕτη εἶναι:

$$\begin{vmatrix} a_{1,v-2} & a_{1,v-1} & a_{1v} \\ a_{2,v-2} & a_{2,v-1} & a_{2v} \\ a_{3,v-2} & a_{3,v-1} & a_{3v} \end{vmatrix} = \beta \quad (\text{τυχόν ἀριθμὸς})$$

Ἐφ' ὅσον ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ β εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἡ τάξις τοῦ μητρώου εἶναι 3. Ἐάν ᾗτο μηδέν, θὰ ἐξετάζαμεν διαδοχικῶς ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν ὀρίζουσῶν τρίτης τάξεως τοῦ μητρώου, με σκοπὸν τὴν εὑρεσιν τοῦλάχιστον μιᾶς διαφοροῦ τοῦ μηδενός. Εἰς τὴν περίπτωσιν μεγάλων μητρώων ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι ἐξαιρετικῶς μακρὰ καὶ ἐπίπονος. Χρησιμοποιοῦνται τότε ἡλεκτρονικοὶ ὑπολογισταί, δίδοντες ταχύτατα ὅλας τὰς τιμὰς τῶν ὀρίζουσῶν. Ὑπάρχουν πρὸς τοῦτο εἰς τὴν βιβλιοθήκην ἐκάστου ὑπολογιστοῦ, ἔτοιμα προγράμματα διὰ μητρώων τυχούσης μορφῆς, ἀλλὰ ὄχι ἀπεριορίστου τάξεως. (Εἰς τὴν I.B.M. 1620 ὑπάρχει ἔτοιμον πρόγραμμα καὶ εἰς γλῶσσαν Fortran καὶ εἰς γλῶσσαν μηχανῆς).

Διὰ τὸ συστηματικὸν τοῦ ὑπολογισμοῦ, φροντίζομεν ὥστε ἡ μὴ μηδενικὴ ὀρίζουσα τάξεως q νὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς πρὸς τὰ δεξιὰ q στήλας τοῦ μητρώου. Εἰς ἐναντίαν περίπτωσιν, ἀνακατατάσσωμεν τὰς στήλας τοῦ μητρώου, οὕτως ὥστε νὰ πληροῦται τὸ μὴ μηδενικὸν τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ ὀρίζουσης.

Μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τάξεως τοῦ μητρώου, εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων, π , διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς τάξεως q ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταβλητῶν. Εἰς τὸ προκείμενον παράδειγμα θὰ ἔχωμεν $n-3$ ἀδιάστατα μονώνυμα π .

Γράφομεν ἐν συνεχείᾳ τὸ σύστημα (5.β) εἰς τὸ ὁποῖον $q = 3$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ (5.γ), τὸ ὁποῖον εἶναι τώρα γραμμικὸν σύστημα 3 ἐξισώσεων, ἐπιλύεται δὲ εὐκόλως, δι' ἀναστροφῆς τοῦ μητρώου A_{v-q+1}^v μὲ τοὺς κλασσικοὺς τύπους τοῦ Cramer.

Προκύπτει οὕτω τὸ σύστημα (5.δ) δίδον τὰς τιμὰς τῶν k_{v-2} , k_{v-1} , k^v , συναρτῆσει τῶν συντελεστῶν a_{ij} τοῦ μητρώου:

$N = -[A_{v-q+1}^v]^{-1} [A_1^{v-q}]$ καὶ τῶν ὑπολοίπων συντελεστῶν k_1 ἕως k_{v-3} .

Τὸ μητρῶον N εἶναι ὀρθογωνικόν, q γραμμῶν καὶ $v-q$ στηλῶν, ἥτοι ἐν προκειμένῳ 3 γραμμῶν καὶ $v-3$ στηλῶν ὡς προκύπτει ἀπὸ τοὺς κανόνας πολλαπλασιασμοῦ τῶν μητρώων.

Οἱ τελευταῖοι q ὅροι τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ μητρώου τῶν λύσεων, προκύπτουν διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ N ἐπὶ τὸ μητρῶον:

$$K_1^{v-q} = \begin{bmatrix} - & 1 & - \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & - \end{bmatrix}$$

Τὸ ἐξαγόμενον εἶναι προφανῶς ἡ πρώτη στήλη τοῦ μητρώου N . Ἐπειδὴ δὲ ἐν γένει ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐνὸς μητρώου κ γραμμῶν καὶ λ στηλῶν ἐπὶ μητρῶον λ γραμμῶν καὶ μιᾶς στήλης μὲ μηδενικὰ ἅπαντα τὰ στοιχεῖα τοῦ πλὴν ἐνὸς μοναδιαίου τῆς ρ στήλης, δίδει μητρῶον μιᾶς στήλης καὶ κ γραμμῶν, μὲ στοιχεῖα, τὰ τῆς ρ στήλης τοῦ πρώτου μητρώου, προκύπτει ἡ ἐξῆς σημαντικωτάτη πρότασις:

«Αἱ ζητούμεναι q τελευταῖαι στηλᾶι τοῦ Μητρώου K τοῦ θεμελιώδους Συστήματος Λύσεων, ἀποτελοῦν Μητρῶον ἐκ ταυτότητος ἴσον μὲ τὸ ἀντιμεταθετὸν (Transposée) μητρῶον τοῦ N ».

Τούτέστιν, τὸ ὑπομητρῶον τῶν q τελευταίων στηλῶν τοῦ K , προκύπτει δι' ἀναστροφῆς γραμμῶν μὲ στήλας τοῦ μητρώου N .

Ἐν συμπεράσματι, ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ μητρώου N δι-

δει ἅπ' εὐθείας τὰ ἐλλείποντα στοιχεῖα τοῦ μητρώου K καὶ λύει πλήρως τὸ τεθὲν πρόβλημα τῆς εὐρέσεως μιᾶς πλήρους σειρᾶς ἀνεξαρτήτων μονωνύμων π .

Βλέπομεν τέλος ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διαφόρους σειράς μονωνύμων π , διατάσσοντες διαφορετικὰ τὰ $X_1, X_2 \dots X_n$. Πρέπει ἐπομένως νὰ ἐκλέξωμεν τὴν προσφορωτέραν διὰ τὰς ἐφαρμογὰς σειρὰν π , ὁ τρόπος δὲ τῆς ἐκλογῆς ταύτης ὀρίζεται μαθηματικῶς διὰ τῆς κάτωθι συνθήκης:

«Εἰς τὸ Διαστατικὸν μητρῶον, θέτομεν ὡς πρώτην μεταβλητὴν, τὴν ζητούμενην μεταβλητὴν τοῦ πρὸς μελέτην φυσικοῦ φαινομένου. Ὡς δευτέραν μεταβλητὴν θέτομεν αὐτὴν τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν περισσότερον πειραματικῶς, ὡς τρίτην αὐτὴν τῆς ὁποίας ἡ εὐκολία μεταβολῆς ἔρχεται εἰς δευτέραν θέσιν, κ.ο.κ.»

Ἡ τήρησις τῆς συνθήκης ταύτης εὐκολύνει πολὺ τὴν ἐν συνεχείᾳ μελέτην τοῦ φαινομένου ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων. Φυσικαὶ μεταβληταί, δυνάμεναι νὰ ὑποστοῦν πολὺ μικρὰν μεταβολήν, ὡς ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος κ.λ.π., τίθενται εἰς τὸ δεξιὸν μέρος τοῦ Διαστατικοῦ Μητρώου, ὁπότε ἔχουν μὲν τοὺς μεγαλυτέρους ἐκθέτας, ἀλλάζουν ὅμως ἐλάχιστα ἢ καὶ καθόλου, ὁπότε ὑπολογίζονται ὀλίγας ἢ καὶ διὰ μίαν μόνον φοράν.

Αἱ μεταβαλλόμεναι περισσότερον μεταβληταί, εἰσέρχονται οὕτω εἰς τὴν περιοχὴν ἀπὸ k_1 ἕως $k_n - q$, ὁπότε ἐμφανίζονται εἰς τὴν πρώτην δύναμιν καὶ ἀνὰ μία μόνον εἰς ἕκαστον μονώνυμον.

Ἡ ἐξαιρετικὴ πειραματικὴ ὠφέλεια ἐκ τῆς διατάξεως αὐτῆς εἶναι πρόδηλος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΥΠ' ΑΡΙΘΜ. 1 : ΝΟΜΟΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Μετά την εὑρεσιν δι' ἓν φαινόμενον μιᾶς πλήρους σειρᾶς ἀδιαστάτων μονωνύμων, διὰ τῆς συστηματικῆς μεθόδου τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου, τὸ πρόβλημα τῆς εὐρέσεως τῶν νόμων τῆς φυσικῆς ὁμοιότητος ἔχει αὐτομάτως ἐπιλυθῆ. Πράγματι αἱ σχέσεις ὁμοιότητος προκύπτουν ἀπ' εὐθείας διὰ τῆς ἐξισώσεως τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων τῶν δύο φαινομένων, πραγματικοῦ καὶ ἐν ὁμοιώματι. Ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν σχέσεων ὁμοιότητος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων π τοῦ φυσικοῦ φαινομένου.

Τὴν ὅλην μέθοδον τῶν δύο προηγουμένων κεφαλαίων, θὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν εὑρεσιν τῶν νόμων ὁμοιότητος τυχόντος φαινομένου τῆς Μηχανικῆς τῶν Κλασσικῶν Ρευστῶν, ὡς ὀρίσθησαν εἰς (3.8.1), χρησιμοποιοῦντες, αὐτὴν τὴν φορὰν ὅχι τὰς ἐξισώσεις, ἀλλὰ τὴν φύσιν τῶν συναντωμένων μεταβλητῶν.

Θεωροῦμεν τὴν γενικὴν περίπτωσιν τυχόντος Κλασσικοῦ Ρευστοῦ, (συμπιεστοῦ ἢ ἀσυμπιέστου), εἰς τυχοῦσαν ροήν, καὶ μὲ μεταφορὰν θερμικῆς ἐνεργείας.

Θὰ δεῖξωμεν οὕτω, ὅλην τὴν γενικότητα καὶ τὰς μεγάλας δυνατότητας τῆς Διαστατικῆς Ἀναλύσεως, διὰ τὴν εὑρεσιν τῆς μορφῆς τῶν φυσικῶν νόμων καὶ τῶν νόμων ὁμοιότητος. Ἀκολουθοῦμεν δὲ τὴν συστηματικὴν μέθοδον τοῦ Κεφαλαίου 6.

7.1.-ΕΚΛΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Διὰ νὰ ἐκλέξωμεν ὅλας τὰς ἀπαραιτήτους μεταβλητὰς αἰτίνες ὑπεισέρχονται εἰς τὴν Φυσικὴν περιοχὴν τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν, ἀπαιτεῖται πλήρης ποιοτικὴ γνῶσις τῶν ἐξισώσεων τῶν φαινομένων, τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν καὶ τῶν συνθηκῶν εἰς τὰ ὅρια.

Αἱ θεμελιώδεις ἐξισώσεις καὶ ἡ πειραματικὴ ἐμπειρία, δίδουν ὡς πρῶ-

την σειράν ἀνεξαρτήτων φυσικῶν μεταβλητῶν τὰς ἐξῆς:

F = δύναμις

V = ταχύτης

ρ = εἰδικὴ μᾶζα

μ = δυναμικὸς συντελεστὴς συνεκτικότητος

g = ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος

C_p, C_v = αἱ εἰδικαὶ θερμότητες.

Αἱ ἀρχικαὶ συνθῆκαι καὶ συνθῆκαι εἰς τὰ ὅρια, μᾶς δίδουν ἐξ ἄλλου τὰς κάτωθι μεταβλητάς:

α = ταχύτης ἤχου.

L = χαρακτηριστικὴ γραμμικὴ διάστασις (π.χ. διάμετρος ἀγωγοῦ).

σ = ἐπιφανειακὴ τάσις.

K = συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος

Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως ἐν συνόλῳ ἑνδεκα ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς καὶ ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τυχόντος φαινομένου τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν, θὰ ἔχη τὴν μορφήν:

$$(F, V, L, \rho, \mu, g, C_p, C_v, \alpha, \sigma, K) = 0 \quad (7.1.a)$$

7.2.-ΕΚΛΟΓΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΟΝΑΔΩΝ.-ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΟΝ ΜΗΤΡΩΟΝ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Εἰς τὰ πλεῖστα τῶν προβλημάτων τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν, μὲ μετάδοσιν θερμότητος, τὸ πλεόν πρόσφορον σύστημα μονάδων εἶναι τὸ Μ.Λ.Τ.Θ. ὅπου Θ εἶναι ἡ νέα θεμελιώδης μονὰς διὰ τὴν θερμοκρασίαν. Διὰ τὴν περὶ πτωσὶν μας, ἐκλέγομεν ἐπομένως τὸ σύστημα αὐτό, ὅποτε τὸ Διαστατικὸν Μητρώον λαμβάνει τὴν μορφήν:

	F	V	L	ρ	μ	g	C_p	C_v	α	σ	K
M	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
L	1	1	1	-3	-1	1	2	2	1	0	1
T	-2	-1	0	0	-1	-2	-2	-2	-1	-2	-3
Θ	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	-1

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τάξιν τοῦ μητρώου, ὑπολογίζομεν τὴν πρὸς τὰ δεξιὰ ὀρίζουσιν αὐτοῦ:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ἐπαναδιατάσσομεν τὰς στήλας τοῦ μητρώου διὰ νὰ ὑπάρχη μία πρὸς τὰ δεξιὰ ὀρίζουσα μὴ μηδενική, ὁπότε τὸ Διαστατικὸν Μητρώον λαμβάνει τὴν μορφήν:

	F	V	L	ρ	μ	σ	C_p	C_v	α	g	K
M	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
L	1	1	1	-3	-1	0	2	2	1	1	1
T	-2	-1	0	0	-1	-2	-2	-2	-1	-2	-3
O	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	-1

Ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ ὀρίζουσα εἶναι τώρα διάφορος τοῦ μηδενός ($=1$), ὁπότε τὸ μητρώον εἶναι τετάρτης τάξεως, ἥτοι $\rho = 4$. Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως μίαν πλήρη σειρὰν ἐξ $11 - 4 = 7$ μονωνύμων γινομένων τῆς γενικῆς μορφῆς:

$$\left[\pi = F^{K_1} \cdot V^{K_2} \cdot L^{K_3} \cdot \rho^{K_4} \cdot \mu^{K_5} \cdot \sigma^{K_6} \cdot C_p^{K_7} \cdot C_v^{K_8} \cdot \alpha^{K_9} \cdot \sigma^{K_{10}} \cdot K^{K_{11}} \right]$$

7.3.- ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΟΝ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Αἱ ἐξισώσεις τῶν συντελεστῶν θὰ εἶναι:

$$K_1 + K_4 + K_5 + K_6 + K_{11} = 0$$

$$K_1 + K_2 + K_3 - 3K_4 - K_5 + 2K_7 + 2K_8 + K_9 + K_{10} + K_{11} = 0$$

$$-2K_1 - K_2 - K_5 - 2K_6 - 2K_7 - 2K_8 - K_9 - 2K_{10} - 3K_{11} = 0$$

$$-K_7 - K_8 - K_{11} = 0$$

Ἐπιλύομεν τὸ ἀνωτέρω σύστημα ὡς πρὸς K_8, K_9, K_{10}, K_{11} , διὰ τὰς κάτωθι τιμὰς τῶν $K_1, K_2, \dots, K_7$.

$$K_i = 0 \text{ διὰ } i \neq 1 \text{ (ἥτοι } K_1 = 1, K_2 = K_3 = \dots, K_7 = 0)$$

$$K_i = 0 \text{ διὰ } i \neq 2$$

$$\vdots$$

$$K_i = 0 \text{ διὰ } i \neq 7$$

Αἱ λύσεις τῶν προκυπτόντων ἑπτὰ συστημάτων, δίδονται εἰς τὸ κάτωθι Μητρώον τῶν Λύσεων:

	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6	κ_7	κ_8	κ_9	κ_{10}	κ_{11}
	F	V	L	ρ	μ	σ	C_p	C_v	α	g	K
π_1	1	0	0	0	0	0	0	1	-3	1	-1
π_2	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
π_3	0	0	1	0	0	0	0	0	-2	1	0
π_4	0	0	0	1	0	0	0	1	3	-1	-1
π_5	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1
π_6	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	-1
π_7	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0

7.4.- ΜΟΝΩΝΥΜΑ π . ΜΕΤΑΤΡΟΠΑΙ ΚΑΙ ΤΕΛΙΚΗ ΤΩΝ ΜΟΡΦΗ. ΤΕΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ.

Ἡ πλήρης σειρά τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων π , προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ μητρώου τῶν λύσεων, καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς:

$$\pi_1 = F \cdot C_v \cdot \alpha^{-3} \cdot \sigma \cdot K^{-1}$$

$$\pi_2 = V \cdot \alpha^{-1}$$

$$\pi_3 = L \cdot \alpha^{-2} \cdot g$$

$$\pi_4 = \rho C_v \cdot \alpha^3 \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$$

$$\pi_5 = \mu C_v \cdot K^{-1}$$

$$\pi_6 = \sigma \cdot C_v \cdot \alpha^{-1} \cdot K^{-1}$$

$$\pi_7 = C_p \cdot C_v^{-1}$$

Μεταξὺ αὐτῶν τῶν ἑπτὰ μονωνύμων ἀναγνωρίζομεν ἤδη τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς τοῦ Mach, τοῦ Prandtl καὶ τὸν συντελεστὴν γ , εἰς τὰ μονώνυμα π_2 , π_5 καὶ π_7 . Θὰ πραγματοποιήσωμεν ὁρισμένους μετασχηματισμοὺς εἰς τὰ ὑπόλοιπα μονώνυμα διὰ νὰ τοὺς δώσωμεν τὴν συνήθη μορφήν ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἀπαντῶνται εἰς τὴν Μηχανικὴν τῶν Ρευστῶν. Οὕτω ἔχομεν:

$$\frac{\pi_2^2}{\pi_3} = \frac{V^2}{L \cdot g}$$

$$\frac{\pi_1}{\pi_4 \pi_3^2 \pi_2^2} = \frac{F}{\rho L^2 V^2}$$

$$\frac{\pi_2^2 \pi_3 \pi_4}{\pi_6} = \frac{\rho V^2 \cdot L}{\sigma}$$

$$\frac{\pi_2 \pi_3 \pi_4}{\pi_5} = \frac{V \cdot L}{\mu / \rho}$$

Μὲ τοὺς ἀνωτέρω μετασχηματισμοὺς θὰ ἔχωμεν τὴν πλήρη σειράν τῶν ἀδιαστάτων μονωνύμων π , ὡς ἀκολούθως:

$$\text{Ἀριθμὸς τοῦ Reynolds : } \frac{V \cdot L}{\mu/\rho} = \frac{V \cdot L}{\nu} = R$$

$$\text{Ἀριθμὸς τοῦ Froude : } \frac{V^2}{L \cdot g} = F$$

$$\text{Ἀριθμὸς τοῦ Euler ἢ συντελεστής πίεσεως : } \frac{F}{\rho L^2 V^2} = \frac{p}{\rho V^2} = E$$

$$\text{Ἀριθμὸς τοῦ Weber : } \frac{\rho V^3 \cdot L}{\sigma} = W$$

$$\text{Ἀριθμὸς τοῦ Mach : } \frac{V}{a} = M$$

$$\text{Ἀριθμὸς τοῦ Prandtl : } \frac{\mu \cdot C_p}{K} \text{ ἢ } \frac{\mu \cdot C_p}{K} = P$$

$$\text{Λόγος τῶν εἰδικῶν θερμότητων : } \frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις (7.1.α) τῶν νόμων τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν, ἀπλοποιεῖται καὶ μετατρέπεται ὡς ἑξῆς:

$$\Phi(R, F, E, W, M, P, \gamma) = 0 \quad (7.4.a)$$

Ἀντὶ ἑνδεκα ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῆς (7.1.α), ἔχομεν εἰς τὴν (7.4.α) μόνον ἑπτὰ ἀδιάστατα μονώνυμα. Αἱ μεγάλαι θεωρητικαὶ καὶ πειραματικαὶ ὠφέλειαι ἐκ τῆς ἀπλοποιήσεως αὐτῆς εἶναι προφανεῖς.

7.5.- ΝΟΜΟΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΕΚ ΤΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ π.

Μία πρόχειρος ἐξέτασις τῶν ἑπτὰ ἀδιαστάτων μονωνύμων τῆς προηγούμενης παραγράφου, δεικνύει ὅτι ἡ ὁμοιότης εἶναι ἀδύνατος εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν.

Πράγματι, θὰ ἔπρεπε νὰ ἔχομεν ταυτότητα μεταξὺ ὅλων τῶν μονωνύμων τῶν δύο ὁμολόγων φαινομένων καὶ αὐτὸ ὀδηγεῖ ἀναγκαστικῶς εἰς ταυτότητα αὐτῶν τούτων τῶν φαινομένων.

Εὐτυχῶς διὰ τοὺς ἐρευνητάς, εἰς ἕκαστον εἰδικὸν ὑποσύνολον φαινόμενον τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν πολλαὶ ἐκ τῶν ἑνδεκα ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῆς (7.1.α) οὐδόλως ὑπείσέρχεται. Εἰς τὰ εἰδικὰ αὐτὰ φαινόμενα, τὰ ἀδιάστατα μονώνυμα π, περιορίζονται πολὺ καὶ φθάνομεν εἰς σχέσεις ὁμοιότητος ἐφαρμοσίμους ἐν τῇ πράξει.

Ἐὰν π.χ. ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις εἶναι ἀμελητέα, θὰ παραληφθῇ ὁ ἀριθμὸς Weber, ἐὰν ἡ βαρύτης δὲν ἔχει ἐπίδρασιν θὰ παραληφθῇ ὁ ἀριθμὸς Froude, κ.ο.κ. Φθάνομεν οὕτω εἰς τὰς κάτωθι χαρακτηριστικὰς περιπτώσεις:

7.6.-ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ, ΑΝΕΥ ΜΕΤΑΔΟΣΕΩΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΥ ΕΙΔΙΚΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

Εἰς τὴν μεγάλην αὐτὴν κατηγορίαν τῶν φαινομένων, ἀπαλείφομεν ἤδη τὸν ἀριθμὸν Prandtl, τὸν συντελεστὴν γ , ὥς καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ Mach, δεδομένου ὅτι ἡ ταχύτης πυκνοῦ ρευστοῦ εἶναι πάντοτε ἀσήμαντος συγκρινομένη μετὰ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ρευστοῦ.

Θὰ ὑποδιαιρέσωμεν ἐξ ἄλλου καὶ τὴν κατηγορίαν αὐτὴν εἰς τὰς κάτωθι εἰδικὰς περιπτώσεις, ὥς ἀπαντῶμεν καὶ τὸ συνηθέστερον ἐν τῇ πράξει:

α) Ροαὶ με ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν. Τέλεια ρευστὰ ἢ ρευστὰ με ἰξῶδες ἀλλὰ εἰς στροβιλώδη ροήν. Ἀμελητέα ἐπιφανειακὴ τάσις.

Δεδομένου ὅτι $\mu = 0$ διὰ τὰ τέλεια ρευστὰ καὶ ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(R)$ εἶναι σταθερὰ διὰ τὰ ρευστὰ με ἰξῶδες εἰς τὴν περιοχὴν τῆς στροβιλώδους ροῆς, ἀπαλείφομεν καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ Reynolds. Δὲν λαμβάνεται ἐξ ἄλλου ὑπ' ὄψιν καὶ ὁ ἀριθμὸς Weber τῶν ἐπιφανειακῶν τάσεων. Ἐπὶ πλέον ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τῆς ροῆς, ἀπαλάσσει τὰ ὁμόλογα συστήματα ἀπὸ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις καὶ πιέσεις, ὁπότε ἀπαλείφεται καὶ ὁ ἀριθμὸς τοῦ Euler. Παραμένει ἐπομένως διὰ τὴν κατηγορίαν αὐτὴν τῶν ροῶν εἰς καὶ μόνος νόμος ὁμοιότητος, ὁ νόμος τοῦ Froude. Τὰ δύο ὁμόλογα φαινόμενα εἶναι φυσικῶς ὅμοια, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς Froude εἶναι καὶ διὰ τὰ δύο ὁ αὐτός, εἰς πᾶσαν ὁμολογον στιγμήν.

β) Ροαὶ με ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν. Ρευστὰ με ἰξῶδες εἰς ἀστροβίλον ροήν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, ἐκτὸς τοῦ νόμου ὁμοιότητος τοῦ Froude, ὑπάρχει καὶ ὁ νόμος ὁμοιότητος τοῦ Reynolds, διότι εἰς τὴν ἀστροβίλον ροήν, ἡ συνάρτησις $\varphi(R)$ δὲν εἶναι σταθερὰ ἀλλὰ μεταβάλλεται συναρτήσῃ τῆς ταχύτητος.

Παρ' ὅλον ὅτι ἀπαιτεῖται ἡ πλήρως δύο μόνον ἐκ τῶν ἐπὶ νόμων ὁμοιότητος, ἐν τῇ πράξει ἡ πραγματοποίησις ὁμοιώματος ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτάς, εἶναι εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων ἀδύνατος (ἴδε 3, 4, 8 καὶ 9 βιβλιογραφίας).

γ) Ροαὶ ὑπὸ πίεσιν. Ρευστὰ με ἰξῶδες εἰς τυχοῦσαν ροήν.

Μὴ ὑπαρχούσης ἐλευθέρας ἐπιφανείας, ἡ βαρύτης δὲν ἐπηρεάζει πλέον τὴν ροήν. Ἐπομένως ἀπαλείφεται ὁ ἀριθμὸς Froude καὶ μόνος δυνατὸς νόμος ὁμοιότητος μεταξὺ τῶν ὁμολόγων φαινομένων, εἶναι ὁ τοῦ Reynolds.

7.7.-ΣΥΜΠΙΕΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ ΑΝΕΥ ΜΕΤΑΔΟΣΕΩΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΜΙΚΡΟΥ ΕΙΔΙΚΟΥ ΒΑΡΟΥΣ (ΑΕΡΙΑ)

Εἰς τὴν σημαντικὴν αὐτὴν κατηγορίαν φαινομένων, θὰ ἀπαλείψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν Prandtl, Froude καὶ Weber ὥς καὶ τὸν συντελεστὴν γ , δεδομένου ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀμελήσωμεν τὰς δυνάμεις βαρύτητος καὶ τὰς ἐπιφανειακὰς τάσεις ἐνώπιον τῶν ἄλλων ἐνεργουσῶν δυνάμεων. Ἐξ ἄλλου αἱ μεταβληταὶ p , ρ καὶ a συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}} \quad \eta \quad p = \frac{\rho \cdot \alpha^2}{\gamma}$$

Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ Euler, $E = p/\rho V^2$, διότι μεταπίπτει εἰς τὸν ἀριθμὸν Mach κατὰ προσέγγισιν σταθερᾶς γ .

Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως ἐν τέλει νὰ τηρήσωμεν δύο μόνον νόμους ὁμοιότητος: τοὺς νόμους Reynolds καὶ Mach.

Ἐν τῇ πράξει ἡ ὁμοιότης αὕτη τῶν συμπίεστῶν Ρευστῶν, ἔχει τὰς μεγαλύτερας ἐφαρμογὰς τῆς εἰς τὰς δοκιμὰς ὁμοιωμάτων ἀεροσκαφῶν ἐντὸς ἀεροδυναμικῶν κωδῶνων. Εἰς τὰς δοκιμὰς αὐτάς, χρησιμοποιοῦμεν κατ' ἀνάγκην εἰς τὸ ὁμοίωμα, τὸ αὐτὸ ἀέριον ποὺ ὑπάρχει εἰς τὸ φυσικὸν φαινόμενον, ἥτοι τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα. (Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν ἄλλο ἀέριον, αἱ δοκιμαὶ καθίστανται ἀπραγματοποίητοι λόγῳ ὑψηλοῦ κόστους).

Οἱ νόμοι ὁμοιότητος γίνονται:

$$\alpha) \text{ Reynolds : } \frac{V_1 L_1}{\nu(\text{ἀέρος})} = \frac{V_2 L_2}{\nu(\text{ἀέρος})} \quad \eta \text{τοι :}$$

$$\left[\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_2}{L_1} = \lambda \right]$$

καὶ διὰ κλίμακα $\lambda = 1/20$ ἀπαιτεῖται ταχύτης εἰς τὸν κώδωνα εἰκοσαπλασία τῆς τοῦ φυσικοῦ φαινομένου ἥτοι $V_2 = 20V_1$

$$\beta) \text{ Mach : } \frac{V_1}{a(\text{ἀέρος})} = \frac{V_2}{a(\text{ἀέρος})} \quad \eta \text{τοι}$$

$$\left[V_1 = V_2 \right]$$

Ἀντιλαμβανόμεθα ἀμέσως ὅτι οἱ δύο νόμοι συμβιβάζονται μόνον διὰ $\lambda = 1$, ἥτοι διὰ ὁμοίωμα κατασκευασθὲν εἰς φυσικὸν μέγεθος καὶ αὐτὸ εἶναι κατὰ κανόνα ἀπραγματοποίητον. Εὐτυχῶς ἡ ἐμπειρία δεικνύει ὅτι, διὰ ροὰς μικρᾶς ταχύτητος ($M < 0,4$), ἡ συμπίεστος εἶναι ἀσήμαντος, ἥτοι ὁ ἀῆρ συμπεριφέρεται ὥς ἀσυμπίεστον ρευστόν. Περιορίζομεθα ἐπομένως εἰς τὴν τήρησιν ἑνὸς

μόνον νόμου, τοῦ Reynolds. Διὰ μεγάλας ἐξ ἄλλου ταχύτητας, ($M > 0,6$), ἡ ἐπίδρασις τῆς συνεκτικότητος γίνεται ἀμελετητέα, ἐνώπιον τῆς σημασίας τοῦ νόμου τοῦ Mach, καὶ τότε τηρεῖται μόνον ὁ νόμος Mach, μὲ τὴν μορφήν $V_1 = V_2$, ἥτοι μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα ἐν ὁμοιώματι καὶ ἐν τῇ φύσει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΥΠ' ΑΡΙΘΜ. 2: ΝΟΜΟΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΜΑΓΝΗΤΟ - ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

8.1.- ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

Ἡ Μαγνητοϋδροδυναμικὴ (Magneto-Hydrodynamique, M.H.D.), ὀφείλει τὴν ὑπαρξίν της εἰς τὰς προσπάθειάς τῶν ἀστροφυσικῶν νὰ ἐξηγήσουν ὀρισμένα κοσμικὰ φαινόμενα καὶ ἰδιαίτερος τὰς ἡλιακὰς κηλίδας.

Δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὴν Μ.Υ.Δ. εἰς δύο μεγάλους κλάδους, με βά-
σιν τὰς κατευθύνσεις ἃς ἠκολούθησεν ἡ νέα αὐτὴ ἐπιστήμη κατὰ τὴν τε-
λευταίαν εἰκοσαετίαν.

α) Μ.Υ.Δ., ὑπὸ τὴν εὐρείαν ἔννοιαν, ἀποτελοῦσα μίαν ἐπέκτασιν τῆς
Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν καὶ ἐξετάζουσα τὰ φαινόμενα τῆς κινήσεως τῶν
ρευστῶν με ἠλεκτρικὴν ἀγωγιμότητα.

β) Μ.Υ.Δ., ὑπὸ τὴν στενὴν ἔννοιαν, ἐρευνοῦσα τὰς δυνατότητας χρη-
σιμοποιήσεως ρευστῶν, ἰονισθέντων ἐν μέρει, διὰ τὴν ἀπ' εὐθείας μετατρο-
πὴν τῆς θερμότητος εἰς ἠλεκτρισμόν.

Ἦδη ἀπὸ τὰς ἀρχὰς τοῦ αἰῶνος, πολλοὶ ἐρευνηταὶ ἡσχολοῦντο με Μ.
Υ.Δ. χωρὶς νὰ τὸ γνωρίζουν. Πλὴν ὁμως, ἡ μεγάλη ἀνάπτυξις τῆς νέας αὐτῆς
ἐπιστήμης ὀφείλεται εἰς τὰς Ἑνωμένας Πολιτείας, αἱ ὁποῖαι κατὰ τὸ 1948
ἤρχισαν νὰ ἐνδιαφέρονται ζωηρῶς δι' αὐτήν, διὰ λόγους ἀποκλειστικῶς
στρατιωτικῆς φύσεως, ἀφορῶντας τὰ προβλήματα τῆς τήξεως εἰς ἀτομικὰς
στήλας.

Τὰ δύο συστήματα μονάδων, τὰ πλέον ἐν χρήσει εἰς τὴν Μ.Υ.Δ., εἶναι
τὸ Μ.Κ.Σ.Α. (Giorgi) καὶ τοῦ Gauss. Διὰ τὴν συνέχειαν τῆς παρούσης με-
λέτης, χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύστημα Μ.Κ.Σ.Α., ἐθνικοποιηθὲν ἐν Γαλλίᾳ
καὶ χρησιμοποιούμενον σήμερον εἰς τὰ πλεῖστα τῶν προβλημάτων τῆς
Μ.Υ.Δ.

Ὁ ἐπόμενος πίναξ, δίδει τὰς ἐξισώσεις προσδιορισμοῦ τῶν κυριωτέρων
φυσικῶν μεταβλητῶν τῆς Μ.Υ.Δ. εἰς τὸ σύστημα Μ.Κ.Σ.Α.

ΚΥΡΙΟΤΕΡΑ ΜΕΓΕΘΗ Μ.Υ.Δ. ΕΙΣ Μ.Κ.Σ.Α.

ΜΕΓΕΘΗ	ΣΥΜΒΟΛΑ	ΦΥΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ	ΜΟΝΑΔΕΣ	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ	ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
Θεμελιωδών	l m t i	Μήκος Μάζα Χρόνος Ένταση ρεύματος	Μέτρον Χιλιόγραμμα Δευτερόλεπτον Αμπερ		L M T I	$1\text{ m} = 39,37\text{ in}$ $1\text{ m}^3 = 264,2\text{ U.S. gallons}$ $1\text{ ampere} = 0,1\text{ unités C.C.S. m}$
Μηχανικής	F p w	Δύναμις Πίεσις Ένερργεια	Newton Pascal Joule	$\vec{F} = m\vec{a}$ $p = \frac{F}{S}$ $w = F \cdot l$	MLT^{-2} $ML^{-1}T^{-2}$ ML^2T^{-2}	$1\text{ newton} = 10^5\text{ dynes} = 0,102\text{ kgf}$ $= 0,225\text{ lbs}$ $1\text{ Po} = 10\text{ barres} = 0,01\text{ millibar}$ $= 0,987 \cdot 10^{-5}\text{ atm} = 1,45 \cdot 10^{-4}\text{ psi}$ $= 0,0075\text{ mm Hg}$ $1\text{ J} = 0,24 \cdot 10^{-3}\text{ kcal} = 0,378 \cdot 10^{-6}\text{ kWh}$ $= 948 \cdot 10^{-6}\text{ B.T.U.}$
Ηλεκτρισμού	J R σ	Πυκνότης ρεύματος Αντίστασις Αγωγιμότης	Ampere/m ² Ohm mho/m	$\vec{J} = \frac{i}{S}$ $w = R \cdot i^2$ $\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$L^{-2}I$ $ML^{-2}T^{-2}I^{-2}$ $M^{-1}L^{-2}T^2I^2$	Μονάδα Όμοιοζόμενη με Siemens
Ηλεκτροστατικά	$\vec{E}$ $\vec{D}$ v q C ϵ	Ηλεκτρικόν πεδίου Ηλεκτρική μετασχηματιστική δύναμις Φορτίον Χωρητικότητα Διαπερατότης	Volt/m Coulomb/m ² Volt Coulomb Farad statvolt/m	$\vec{F} = q \vec{E}$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $w = V \cdot q$ $q = i \cdot t$ $q = CV$ $\epsilon = \frac{1}{4\pi k} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$MLT^{-2}I^{-1}$ $L^{-2}TI$ $ML^2T^{-2}I^{-1}$ TI $M^{-1}L^{-2}T^4I^2$ $M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	Διηλεκτρική σταθερά Έν τω κενώ $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$
Ηλεκτρομαγνητικά	$\vec{H}$ $\vec{B}$ μ	Μαγνητικόν πεδίου Μαγνητική Ένταση Μαγνητική διαπερατότης	Ampere/m Weber/m ² Henry/m	$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2i}{r}$ $dW = \frac{1}{2} BH \cdot dV$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$	$L^{-1}I$ $MT^{-2}I^{-1}$ $MLT^{-2}I^2$	Όμοιοζόμενη Ένταση ampere-του/m $1\text{ Weber/m}^2 = 10^4\text{ Gauss}$ Έν τω κενώ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ Henry/m}$

8.2.- ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Μ.Υ.Δ.

Ἡ μελέτη τῶν Κλασσικῶν Ρευστῶν, βασίζεται εἰς τὰς ἐξισώσεις τῆς παραγράφου (3.8.2). Θὰ δώσωμεν τὴν γενίκευσιν αὐτῶν τῶν ἐξισώσεων εἰς τὴν περίπτωσιν κινήσεως Ρευστῶν μὲ Ἀγωγιμότητα, ὑποκειμένων εἰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις ἐκ τοῦ δυναμικοῦ πεδίου τῆς Βαρύτητος ($\vec{f} = -\vec{\rho}g$).

α) Ἡ ἐξίσωσις διατηρήσεως τῆς μάζης (ἐξίσωσις συνεχείας), παραμένει ἡ αὐτὴ τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς:

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \right] \quad (8.2.a)$$

β) Αἱ τρεῖς ἐξισώσεις τῆς δυναμικῆς θὰ ἐκφράσουν ὅτι ἡ διαφορὰ τῆς ποσότητος κινήσεως ἐντὸς ὅγκου τινὸς V , περικλειομένου ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας S , ὀφείλεται εἰς τὴν ροὴν τῆς ποσότητος κινήσεως τῆς διαπερώσεως τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ εἰς τὴν ἐνέργειαν τῶν ἐφαρμοζομένων δυνάμεων, τόσον ἐπιφανειακῶν ὅσον καὶ δυνάμεων μάζης. Διὰ τὰς ἠλεκτρομαγνητικὰς δυνάμεις ἀνὰ μονάδα ὅγκου, (δυνάμεις Lorentz), θὰ ἔχωμεν:

$$\vec{F}_{e,m} = n \cdot \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}$$

όπου: η = όλικόν φορτίον

$\vec{E}$ = ηλεκτρικόν πεδίων εις Volt/m

$\vec{J}$ = πυκνότης ρεύματος εις Amp/m²

$\vec{B}$ = μαγνητική επαγωγή εις Weber/m²

Προκύπτει ούτω εύκόλως μία γενίκευσις τῶν ἐξισώσεων (3.8.2.β), καί ὑπὸ καθαρῶς διανυσματικὴν μορφήν, αὕτη γράφεται:

$$\left[\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } V^2 + (\text{rot } \vec{V}) \vec{V} \right) = -\vec{\rho}g - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{V} + \right. \\ \left. + (\lambda + \mu) \text{grad } (\text{div } \vec{V}) + \frac{n}{\rho} \vec{E} + \frac{1}{\rho} \vec{J} \wedge \vec{B} \right] \quad (8.2.\beta)$$

γ) Μία ἄλλη ἐξίσωσις ἐπεμβαίνουσα ἐν Μ.Υ.Δ., εἶναι ἡ ἐξίσωσις ἐν ε ρ γ ί α ς, προκύπτουσα ἀπὸ τὴν ἰσορροπίαν κατὰ τὴν μετατροπὴν ἐνεργείας ἐντὸς ὅγκου V, περικλειομένου ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας S.

Ἡ ὁρθὴ μορφή τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρέθη τὸ 1957, εἶναι δὲ ἡ ἐξῆς:

$$\left[\rho \cdot \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial \chi_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial \chi_i} \right) - \frac{\partial q_{Ri}}{\partial \chi_i} - p \frac{\partial V_i}{\partial \chi_i} + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial \chi_j} + \frac{j^2}{\sigma} \right] \quad (8.2.\gamma)$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εἶναι:

$$\varepsilon = \text{ἐσωτερικὴ ἐνέργεια τοῦ ρευστοῦ} = \int_0^T C_v dT$$

K = συντελεστής ἀγωγιμότητος

q_{Ri} = ροή, ἀκτινοβοληθεῖσα κατὰ τὴν διεύθυνσιν i, εις Coulomb

i = ἔντασις ἐπαγωγικοῦ ρεύματος εις Ampères

σ = ἡλεκτρικὴ ἀγωγιμότης

τ_{ij} = συνιστώσαι τοῦ τανυστοῦ τοῦ ἰξώδους =

$$= \lambda \text{div } \vec{V} \cdot g_{ij} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial \chi_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \chi_i} \right) = \\ = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial \chi_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \chi_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial V_k}{\partial \chi_k} g_{ij}$$

δ) Αἱ ἐξισώσεις καταστάσεως θὰ εἶναι πάντοτε τῆς μορφῆς:

$$\left[\rho = f(p, T) \right] \quad (8.2.\delta)$$

ε) Τὰ μαγνητικὰ πεδία προκύπτουν ἐκ τῶν ἐξισώσεων Maxwell, αἵτινες συνδέουν τὰς φυσικὰς μεταβλητάς $\vec{E}$, $\vec{D}$ (ἡλεκτρικὴ μετατόπισις εις Coul/m²),

$\vec{H}$ (μαγνητικὸν πεδίον εἰς Amp/m) καὶ $\vec{B}$. Θὰ εἶναι αἱ κάτωθι τέσσαρες διανυσματικαὶ ἐξισώσεις :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{D} = \eta$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(8.2.ε)

ζ) Τέλος, θὰ ἔχωμεν μίαν τελευταίαν διανυσματικὴν ἐξίσωσιν, συνδέουσαν τὰ ρεύματα μὲ τὰ πεδία καὶ ἐρμηνεύουσαν τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$\left[\vec{i} = \vec{J} - \eta \vec{V} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \right] \quad (8.2.ζ)$$

Ἐν συμπεράσματι θὰ ἔχωμεν 16 ἀγνώστους φυσικὰς μεταβλητάς ($p, \rho, \vec{V}, T, \vec{E}, \vec{B}, \vec{J}, \eta$) καὶ 16 ἐξισώσεις.

8.3.-ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΟΝ ΜΗΤΡΩΟΝ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ἐξετάζοντες τὰς ἀγνώστους φυσικὰς μεταβλητάς, ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι ἀπὸ ποιοτικῆς ἀπόψεως, ἥτις καὶ ἐνδιαφέρει πρωτίστως τὴν Διαστατικὴν Ἀνάλυσιν καὶ τὴν Φυσικὴν Ὁμοιότητα, θὰ ἔχωμεν τὰ εἰς τὸν ἐπόμενον πίνακα εἰκονιζόμενα φυσικὰ μεγέθη:

ΠΙΝΑΞ

Χρησίων μεγεθών δια φυσικὴν ὁμοιότητα

Φύσις τῶν μεγεθῶν	Ἐξίσωσις προσδιορισμοῦ	Διαστάσεις M.K.S.A.
Γραμμικὴ διάστασις		L
Δύναμις	$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$	M L T ⁻²
Ταχύτης	$\vec{V} = \frac{\vec{1}}{t}$	L T ⁻¹
Μᾶζα εἰς τὴν μονάδα ὄγκου	$\rho = \frac{m}{vol}$	M L ⁻³
Ἡλεκτρικὸν πεδίου	$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$	M L T ⁻² I ⁻¹
Μαγνητικὴ ἐπαγωγή	$dW = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$	M T ⁻² I ⁻¹
Πυκνότης ρεύματος	$\vec{J} = \frac{\vec{i}}{S}$	L ⁻² T
Ὀλικὸν φορτίον	$\eta = q = i \cdot t$	T I
Ἡλεκτρικὴ ἀγωγιμότης	$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$	M ⁻¹ L ⁻³ T ³ I ²
Δυναμικὸς συντελεστὴς ἐξώδους	$\frac{\vec{E}}{S} = \mu \frac{d\vec{V}}{dx}$	M L ⁻¹ T ⁻¹
Ἐπιτάχυνσις βαρύτητος	$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$	L T ⁻²
Μαγνητικὴ διαπερατότης	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$	M L T ⁻² I ⁻²

Εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα δὲν εἰσῆχθησαν οἱ συντελεσταὶ C_p , C_v , K , ὥς καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου a , διότι ἐκ τοῦ προηγουμένου Κεφαλαίου λαμβάνομεν ἀπ' εὐθείας ὑπ' ὅσιν τὰ ἀδιάστατα μονώνυμα ποὺ προκύπτουν ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι:

$$\text{Ἀριθμὸς Mach : } M = \frac{V}{a}$$

$$\text{Ἀριθμὸς Prandtl : } P = \frac{\mu \cdot C_v}{K}$$

Λόγος ειδικών θερμότητων: $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος προκύπτει ἀμέσως τὸ Διαστατικὸν Μητρώον τῶν Μεταβλητῶν:

	$\vec{F}$	$\vec{V}$	L	ρ	μ	$\vec{g}$	$\vec{E}$	$\vec{B}$	σ	μ_0
M	1	0	0	1	1	0	1	1	-1	1
L	1	1	1	-3	-1	1	1	0	-3	1
T	-2	-1	0	0	-1	-2	-3	-2	3	-2
I	0	0	0	0	0	0	-1	-1	2	-2

Ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ ὀρίζουσα εὐρίσκεται διάφορος τοῦ μηδενός, ἐπομένως ἡ τάξις τοῦ μητρώου εἶναι $q = 4$ καὶ θὰ ἔχωμεν μίαν πλήρη σειρὰν $10 - 4 = 6$ ἀδιαστάτων γινομένων, τῆς γενικῆς μορφῆς:

$$\left[\pi = F^{K_1} \cdot V^{K_2} \cdot L^{K_3} \cdot \rho^{K_4} \cdot \mu^{K_5} \cdot g^{K_6} \cdot E^{K_7} \cdot B^{K_8} \cdot \sigma^{K_9} \cdot \mu_0^{K_{10}} \right] \quad (8.3.a)$$

8.4.-ΑΔΙΑΣΤΑΤΑ ΜΟΝΩΝΥΜΑ π , ΚΑΙ ΝΟΜΟΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ Μ.Υ.Δ.

Ἡ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων τῶν μεταβλητῶν καὶ ὁ σχηματισμὸς τοῦ μητρώου τῶν λύσεων ἐπιτυγχάνονται διὰ τῆς αὐτῆς σειρᾶς πράξεων τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου, Εὐρίσκομεν δὲ τελικῶς τὴν κάτωθι πλήρη σειρὰν ἀδιαστάτων μονωνύμων π :

α) $\pi_1 = R = V \cdot L / (\mu / \rho)$. Πρόκειται περὶ τοῦ γνωστοῦ ἀριθμοῦ Reynolds τῆς Κλασσικῆς Μηχανικῆς.

β) $\pi_2 = F = V^2 / (L \cdot g)$. Πρόκειται περὶ τοῦ ἐπίσης γνωστοῦ ἀριθμοῦ Froude.

γ) $\pi_3 = E = F / (\rho L^2 \cdot V^2)$. Πρόκειται περὶ τοῦ ἀριθμοῦ Euler.

δ) $\pi_4 = R_m = \mu_0 \sigma \cdot V \cdot L$

Οἱ πρῶτοι ἐρευνηταὶ τῆς Μ.Υ.Δ., εἶχον εὑρεῖ τὸ ἀδιάστατον αὐτὸ μονώνυμον ἀκολουθοῦντες τελείως διάφορον ὁδόν.

Παρατήρησαν τὴν σημασίαν καὶ τὸν βασικὸν ρόλον ὃν διεδραμάτιζεν εἰς τὰ φαινόμενα τῆς Μ.Υ.Δ., ὁ λόγος, τοῦ μαγνητικοῦ ἐπαγωγικοῦ ρεύματος πρὸς τὸ ὅλικόν ρεῦμα. Τὸν λόγον αὐτὸν ὀνόμασαν Μαγνητικὸν ἀριθμὸν Reynolds (R_m) καὶ εἶναι τὸ εὐρεθὲν ἀνωτέρω μονώνυμον π . Ἡ σημασία του εἶναι μεγάλη καὶ διὰ τὴν σύγχρονον ἐξέλιξιν τῆς Μ.Υ.Δ., διότι ἀντιπροσωπεύει εἰς πολλὰς

περιπτώσεις, τὸν λόγον τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐνὸς ρευστοῦ ἐν κινήσει, πρὸς τὸ πεδίων τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὰς γεννητρίας.

$$\epsilon) \pi_5 = R_H = \frac{B^2}{\mu_0 \cdot \rho \cdot V^2}$$

Ἐπανευρίσκωμεν καὶ ἐδῶ χρησιμοποιοῦντες τελείως νέαν ὁδόν, τὸν γνωστὸν ἤδη ἐν τῇ Μ.Υ.Δ., ἀριθμὸν τοῦ Hartman. Παρίστανται τὸν λόγον τῆς μαγνητικῆς ἐνεργείας, πρὸς τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν τοῦ ρευστοῦ, ἥτοι εἶναι:

$$\pi_5 = R_H = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_8} = \frac{1/2 B^2/\mu_0}{1/2 \rho V^2}$$

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς R ἀποτελεῖ καὶ τὸν θεμελιωδέστερον νόμον ὁμοιότητος τῆς Μ.Υ.Δ., διότι ἀφ' ἐνὸς χαρακτηρίζει τὴν φύσιν ἐνὸς φαινομένου, ἀφ' ἑτέρου δὲ κατατάσσει τὰ φαινόμενα εἰς κατηγορίας. Οὕτω, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς R εἶναι πολὺ μικρότερος τῆς μονάδος, εὐρίσκόμεθα εἰς τὴν περιοχὴν τῶν φαινομένων τῆς Κλασσικῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν, ἰσχύουν δὲ οἱ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἐκτεθέντες νόμοι ὁμοιότητος. Ἐὰν εἶναι πολὺ μεγαλύτερος τῆς μονάδος, τὰ φαινόμενα μηχανικῆς φύσεως καθίστανται ἄνευ σημασίας καὶ ἡ ροὴ τοῦ ρευστοῦ γίνεται καθαρῶς μαγνητικὴ ροή.

Δυνάμεθα οὕτω νὰ προσδιορίσωμεν ὅτι, ἡ Μ.Υ.Δ., εἶναι ἡ περιοχὴ τῶν φυσικῶν φαινομένων, διὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἀριθμὸς R_H εἶναι παραπλήσιος τῆς μονάδος, καὶ ὅπου πρέπει νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν ἀμφότεραι αἱ μορφαὶ ἐνεργείας.

Λαμβάνοντες τὸν λόγον:

$$\frac{1}{R_H} = \frac{V^2}{B^2/\mu_0 \cdot \rho}$$

εὐρίσκωμεν τὸν Μαγνητικὸν ἀριθμὸν τοῦ Mach, ἢ ἀριθμὸν Alfvén, εἰς τὸν ὁποῖον, ἡ ποσότης $(B^2/\mu_0 \cdot \rho)^{1/2}$, παίζει ρόλον ἀνάλογον τοῦ τῶν ἠχητικῶν κυμάτων τῶν κλασσικῶν ἀερίων.

$$\zeta) \pi_6 = \frac{E}{V \cdot B}$$

Τὸ ἀδιάστατον αὐτὸ μονώνυμον οὐδαμοῦ ἀναφέρεται εἰς τὰ μέχρι σήμερον κυκλοφορήσαντα συγγράμματα τῆς Μ.Υ.Δ., ἢ εἰς τὰς δημοσιεύσεις τοῦ ἐπιστημονικοῦ τύπου. Ἐν τούτοις, δεδομένου ὅτι ἡ ἀκολουθητέα διὰ τὴν εὑρεσίν του μέθοδος εἶναι ὀρθή, ἀποτελεῖ ἀσφαλῶς ἓνα ἐκ τῶν νόμων ὁμοιότητος τῶν φαινομένων τῆς Μ.Υ.Δ. Ἡ σημασία του φαίνεται ἄλλωστε ἀπὸ τὸ γεγονός ὅτι συνδέει τὰ ἠλεκτρικὰ μὲ τὰ μαγνητικὰ φαινόμενα μιᾶς ροῆς.

Νομίζομεν ὅτι πρέπει νὰ ἔχη ἐφαρμογὴν εἰς τὴν Μ.Υ.Δ., ὑπὸ τὴν στενὴν ἔννοιαν, ἥτοι τὴν ἀπ' εὐθείας μετατροπὴν τῆς θερμότητος εἰς ἠλεκτρισμόν. Λόγῳ μὴ ὑπάρξεως εἰδικοῦ ἐργαστηρίου Μ.Υ.Δ., ἐν Γαλλίᾳ, θὰ ἔλθωμεν εἰς ἐπαφὰς μὲ τὰς Ἑνωμένας Πολιτείας διὰ τὴν περαιτέρω πειραματικὴν διερεῦνησιν τοῦ νόμου αὐτοῦ.

Ἡ γενικὴ μορφή τῆς ἐξισώσεως τυχόντος φαινομένου τῆς Μαγνητοῦ-δροδυναμικῆς ἀνάγεται εἰς:

$$\left[f(M, P, \gamma, R, F, E, R_m, R_H, \frac{E}{V \cdot B}) = 0 \right] \quad (8.4.a)$$

Τὸ τυχὸν φαινόμενον ἐξαρτᾶται ἐπομένως ἀπὸ ἑννέα τὸ πολὺ ἀδιάστα-
τα μονώνυμα π. Εἰς ἐκάστην εἰδικὴν περίπτωσιν γίνεται διερεῦνησις ἀνά-
λογος τῆς τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου διὰ τὴν διαπίστωσιν τοῦ πραγμα-
τικοῦ ἀριθμοῦ τῶν «δρῶντων μονωνύμων». Ἐπὶ τῇ βάσει δὲ αὐτῶν
προκύπτει εὐκόλως ἡ ὑπαρξίς ἢ μὴ δυνατότητος πραγματοποιήσεως ὁμοιώ-
ματος ἐν Ἐργαστηρίῳ, ὑπὸ κατάλληλον καὶ συμφέρουσαν κλίμακα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΜΕΛΕΤΑΙ ΜΕΓΑΛΩΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΣ ΣΤΡΕΒΛΗΣ ΚΑΙΜΑΚΟΣ ΔΙΑ ΤΟ ΟΜΟΙΩΜΑ

ΕΙΣ ΤΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΑΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ Ι & ΙΙ ΜΕΡΟΥΣ

ΕΙΣ ΤΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΑΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 9

ΜΕΛΕΤΑΙ ΜΕΓΑΛΩΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΣ ΣΤΡΕΒΛΗΣ ΚΛΙΜΑΚΟΣ ΔΙΑ ΤΟ ΟΜΟΙΩΜΑ

9.1.-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΑΣ ΜΕΛΕΤΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

Διὰ τὸν γενικῆς καταρτίσεως Μηχανικόν, μία μελέτη ἐπὶ ὁμοιώματος εἶναι ἀποκλειστικὸν ἔργον τῶν εἰδικῶν. Διὰ τοῦτο εἰς τὰς εἰσαγωγὰς τοῦ Ι καὶ ΙΙ μέρους τῆς παρούσης ἐργασίας δίδομεν ἐν ὀλίγοις τὰς γενικὰς γραμμὰς τῆς θεωρίας τῶν ὁμοιωμάτων, διὰ νὰ εἰσέλθωμεν εἰς τὸ παρὸν τρίτον μέρος εἰς τὸ σοβαρώτατον θέμα τῶν ἐφαρμογῶν. Διότι, αὐταὶ καὶ μόνον αἱ ἐφαρμογαί, ἀποτελοῦν μίαν ἄκρως ἐξελιγμένην τεχνικὴν, παρὰ τὴν ὀλιγόχρονον παράδοσίν της, καὶ μόνον μία μακρὰ πρακτικὴ ἐξάσκησις εἰς Ἐργαστήριον δύναται νὰ μορφώσῃ μηχανικοὺς καὶ τεχνικοὺς ἱκανοὺς νὰ ἀντιμετωπίσουν προβλήματα κάποιας σχετικῆς δυσκολίας.

Δύο βασικά μειονεκτήματα ἐμποδίζουν ἐξ ἄλλου τὴν διάδοσιν τῶν γνώσεων εἰς τὸν τομέα αὐτόν, καὶ τὴν γενίκευσίν των.

Τὸ πρῶτον ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι πλεῖστα ἐργαστήρια διατηροῦν τὸ μυστικὸν ὀρισμένων ἐπιτεύξεων των, ἢ ἀποφεύγουν ἀναλυτικὰ δημοσιεύσεις ἐπὶ τῶν μελετῶν των.

Τὸ δεύτερον, καὶ ἴσως καὶ τὸ σοβαρώτερον, ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι αἱ μελέται περὶορίζονται συνήθως εἰς τὴν ἄμεσον οἰκονομικὴν ἀπόδοσίν των καὶ παραμελοῦν τὴν καθαρῶς ἐπιστημονικὴν ἔρευναν ὀρισμένων θεμάτων, τὰ ὅποια ἐὰν ἐμελετῶντο ἐν συνεργασίᾳ μὲ ἄλλα ἐργαστήρια θὰ ἀπέδιδον σημαντικώτατα ὀφέλη εἰς τὸν ἐν γένει τομέα τῶν ὁμοιωμάτων.

Σκοπὸς ἐπομένως τοῦ τρίτου αὐτοῦ μέρους εἶναι ἡ ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν θεωρίαν, συστηματικὴ ἀνάλυσις τῶν λεπτῶν σημείων ὀρισμένων ἐν ἐργαστηρίῳ συναντωμένων προβλημάτων καὶ ἡ ἀναζήτησις τοῦ ὀρθοτέρου τρόπου ἐπιλύσεώς των.

Πρὶν δὲ ὑπεισέλθωμεν εἰς λεπτομερειακὰ θέματα, ἐξετάζομεν τὴν γενικὴν περίπτωσιν, μελέτης μεγάλης ἐκτάσεως Ὑδραυλικῶν Ἔργων, ὅπου ἡ πραγματοποιήσις ἐνιαίας κλίμακος σμικρύνσεως καθίσταται ἀδύνατος. Ἀναλύομεν δὲ τὰς τρεῖς κατηγορίας ἔργων εἰς τὰς ὁποίας παρουσιάζεται αὕτη ἡ ἀδυναμία καὶ τὸν θεωρητικὸν καὶ πρακτικὸν τρόπον ὑπερπηδήσεώς της.

9.2.- ΜΕΛΕΤΑΙ ΠΡΟΣΤΑΣΙΑΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΛΙΜΕΝΩΝ ΑΠΟ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

Σκοπός του τύπου αυτού των μελετών, είναι ο προσδιορισμός των απαιτήτων εξωτερικών λιμενικών έργων διά την καλήν προστασίαν του λιμένος από εξωτερικούς κυματισμούς. Ζητείται δηλαδή ή βελτίστη διάταξις των έργων αυτών ώστε να επιτυγχάνονται αί ζητούμεναι συνθήκαι ήρεμίας και λειτουργίας του λιμένος (εισόδου, εξόδου), με τὸ ἐλάχιστον κόστος ἐργασιῶν.

Ἐνώπιον των θεωρητικῶν δυσχερειῶν ἐπιλύσεως του προβλήματος, τὸ μελετῶμεν ἐπὶ ὁμοιώματος ὑπὸ σμίκρυνσιν, καὶ ἄνευ οὐδεμιᾶς ἐξαιρέσεως τὰ σημαντικὰ λιμενικὰ συγκροτήματα μελετῶνται σήμερον εἰς ἐργαστήρια.

Δεδομένου ὅτι τὰ φυσικὰ φαινόμενα ποὺ λαμβάνουν χώραν εἶναι ροαὶ μὲ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν καὶ στροβιλώδους μορφῆς, ὀφείλομεν νὰ ὑπακούσωμεν εἰς ἓνα καὶ μόνον νόμον ὁμοιότητος τὸν τοῦ Froude.

Ἡ ταχύτης τοῦ κυματισμοῦ ἐκφράζεται μὲ ὑπερβολικὰς συναρτήσεις τοῦ λόγου H/L ἔνθα H εἶναι τὸ βάθος τῆς ὑδατίνης μάζης καὶ L τὸ μήκος κύματος τοῦ κυματισμοῦ. Θὰ πρέπει ἐπομένως ἡ κλίμαξ μηκῶν κύματος νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν κλίμακα ὑψῶν, ἔστω λ . Διὰ τοὺς γενικοὺς ὅμως λόγους, τοὺς ἐντεθέντας εἰς κεφ. (2.1), ἐπιβάλλεται ἡ χρῆσις διαφόρου κλίμακος μηκῶν καὶ ὑψῶν. Ἰδιαιτέρως ἀναφέρομεν ὅτι, τὰ δευτερεύοντα φαινόμενα τὰ διαταράσσοντα τὴν λειτουργίαν τοῦ ὁμοιώματος εἶναι εἰς τὴν συγκεκριμένην αὐτὴν περίπτωσιν, ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις, ἥτις καθίσταται πρωταρχικῆς σημασίας ἀπαξ καὶ ἡ περίοδος κυματισμοῦ γίνεи τῆς τάξεως μερικῶν δεκάτων τοῦ δευτερολέπτου, ὁ κίνδυνος ἀνωμάλου ἀποσβέσεως των κυματισμῶν, ὀφειλόμενος εἰς τὴν ἀλληλοεπίδρασιν των ὁριακῶν στοιβάδων ἐπιφανείας καὶ πυθμένος καὶ ὁ ἀριθμὸς τοῦ Reynolds ἐν ὁμοιώματι, ὅστις γενόμενος ἐξαιρετικῶς μικρὸς, ἐγγίζει τὰ ὅρια των ἀστροβίλων ροῶν, ὁπότε ἐνεργεῖ πλέον ἢ συνεκτικότης τοῦ ὕδατος.

Δι' ὅλους αὐτοὺς τοὺς λόγους ἀπαιτεῖται πρακτικῶς ἐν ἐλάχιστον βάθος ὕδατος, τὸ ὁποῖον κατὰ γενικὸν κανόνα εἶναι τῆς τάξεως των 5-6 ἐκ. διὰ τὰ ἐνεργὰ μέρη τοῦ ὁμοιώματος. Δεδομένου δὲ ὅτι διὰ μεγάλους λιμένας ἔχομεν ἐλάχιστα βάθη ἐνεργοῦ λιμένος 10-12 μ., ἔπεται ὅτι ἡ κλίμαξ ὑψῶν θὰ εἶναι τοῦλάχιστον $\lambda = 1/200$.

Ὡς πρὸς τὴν κλίμακα μηκῶν, διὰ νὰ καλυφθοῦν ἐν ὁμοιώματι μήκη 10 ἕως 20 χιλιομέτρων μὲ ἀπασχόλησιν ἐν τῷ χώρῳ τοῦ ἐργαστηρίου, διαστάσεων κατωτέρων των 20 ἕως 25 μέτρων, ἐπιβάλλεται χρῆσις κλίμακος $1/500$ ἕως $1/1000$. Ἐξ οὗ ἡ συχνὴ χρῆσις διπλῆς κλίμακος εἰς τὰ ὁμοιώματα τοῦ τύπου αὐτοῦ.

9.3.- ΜΕΛΕΤΑΙ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΦΕΡΤΩΝ ΥΛΩΝ ΕΙΣ ΛΙΜΕΝΑΣ ΚΑΙ ΠΟΤΑΜΟΥΣ

Αί μελέται κινήσεως φερτῶν ὑλῶν - κροκκαλῶν, ἄμμου κ.λ.π. - ἐν ἐργαστηρίῳ ἀποτελοῦν τὴν τελευταίαν λέξιν τῆς ἐξελίξεως τῶν μελετῶν ἐπὶ ὁμοιωμάτων.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ραδιενεργῶν δεικτῶν, ἀνοίγει ἐξ ἄλλου νέους ὁρίζοντας εἰς τὸ πεδῖον αὐτὸ καὶ ἐπιτρέπει τὴν ἐπίλυσιν ἐξαιρετικῶς πολυπλόκων προβλημάτων.

Διὰ τὰς μελέτας αὐτάς, ἡ ἀναπαράστασις τῶν χονδρῶν κροκκαλῶν, - διαστάσεων μεταξὺ 20 καὶ 50 ἐκ. - , δύναται κάλλιστα νὰ πραγματοποιηθῇ, διατηρουμένης τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιότητος, διότι διὰ $\lambda = 1/200$, αἱ διαστάσεις τῶν ὑλικῶν εἰς τὸ ὁμοίωμα, εἶναι τῆς τάξεως τῶν 1 ἕως 2,5 χιλ. καὶ αἱ ὑδροδυναμικαὶ δυνάμεις ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν ὑλικῶν ὁμοιώματος καὶ πρωτοτύπου, εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως.

Πλὴν ὅμως ἡ κοίτη ἐκ χονδρῶν κροκκαλῶν δὲν εἶναι ὁ κανὼν. Ἀντιθέτως μάλιστα, συνήθως περίπτωσις εἶναι ἡ ἀναπαράστασις λεπτῶν ὑλικῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, ἡ διατήρησις τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιότητος θὰ ἐπέβαλλε τὴν ἀναπαράστασιν μιᾶς ἄμμου δι' ἱλύος καὶ θὰ ὁδήγη εἰς πλήρως ἐσφαλμένα ἀποτελέσματα, διότι αἱ ὑδροδυναμικαὶ δυνάμεις εἶναι τελείως διαφόρου φύσεως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἱλύος.

Πράγματι, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, μία ἐκ τῶν παραμέτρων ποὺ ὁποσδήποτε ἀναπαρίσταται ἐν ὁμοιώματι, εἶναι ἡ ὁμοιότης τῶν ταχυτήτων πτώσεως τῶν μεμονωμένων κόκκων. Τὰ δὲ φαινόμενα ἀπορροφήσεως καὶ θρομβώσεως ἅτινα παράγονται πάντοτε εἰς τὰ ἱλυώδη ὑλικά, αὐξάνουν τὴν ταχύτητα πτώσεως, εἰς σημεῖον ὥστε καθίσταται αὕτη μεγαλύτερα τῆς τῶν κόκκων ἄμμου. Ἡ ὁμοιότης Froude καταστρέφεται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τελείως. Δύο λύσεις εἶναι δυναταὶ διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν καὶ ὑπερπήδησιν αὐτῆς τῆς δυσκολίας:

α) Διὰ τὰς πολὺ μικρὰς ταχύτητας πτώσεως, δεδομένου ὅτι αἱ ταχύτητες πτώσεως εἶναι ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, δεόν νὰ αὐξηθοῦν τὰ κατακόρυφα μεγέθη ἐν ὁμοιώματι, οὕτως ὥστε νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ ἐπιθυμητὴ σχέσις ταχυτήτων (ὑπὸ μορφήν μῆκος/χρόνος), ἐν ὁμοιώματι καὶ πρωτοτύπῳ. Καταλήγομεν ἐπομένως εἰς τὴν στρεβλὴν κλίμακα τῆς προηγουμένης παραγράφου.

β) Ἐκλογὴ εἰδικῶν ὑλικῶν διὰ τὸ ὁμοίωμα, ἐχόντων κόκκους μὲ εἰδικὸν βάρος πολὺ κατώτερον τοῦ τῶν πραγματικῶν κόκκων, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐπιτρέπει νὰ δοθοῦν εἰς τοὺς κόκκους αὐτοὺς, διαστάσεις πολὺ μεγαλύτεραι ἀπὸ τὰς ἐπιβεβλημένας ἐκ τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιότητος. Ἡ λύσις αὕτη θὰ ἐξετασθῇ ἐκτενέστερον εἰς τὸ ἐπόμενον κεφάλαιον.

9.4.- ΜΕΛΕΤΑΙ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ-ΥΠΟΣΚΑΦΑΙ

Εἰς τὰς προμελέτας Ὑδραυλικῶν Ἔργων, οἱ ὑδραυλικοὶ ὑπολογισμοὶ πολλῶν τμημάτων τῶν ἔργων, παρουσιάζουν μίαν μεγάλην ἀσάφειαν, ἐρμηνευομένην συνήθως μὲ ἓνα ἐμπειρικὸν συντελεστήν, ἀσαφῆ ἐπίσης ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν, καὶ τὰ κριτήρια αὐτοῦ. Τὰ ἔργα ἐκτοπίσεως, οἱ ἐκχειλισταί, αἱ ροαὶ διὰ μέσου πυλῶνων, αἱ ὑπερκρίσιμοι ροαὶ μεταβαλλομένης διατομῆς, παρουσιάζουν ἤδη διὰ τὴν θεωρητικὴν τῶν ἐπίλυσιν, μίαν ἀσάφειαν, ὀφειλομένην εἰς διαφόρους ἀπλουστευτικὰς παραδοχάς. Εἰς τὴν ἀσάφειαν αὐτὴν προστίθενται καὶ ἄλλοι σοβαροὶ παράγοντες. Θὰ ἀναφέρωμεν ὡς χαρακτηριστικὸν παράδειγμα, τὸν συντελεστὴν τραχύτητος, ὅστις μετρεῖται μὲ μίαν ἀσάφειαν $\pm 5\%$, καὶ ἐπὶ πλέον μεταβάλλεται εὐρύτατα σὺν τῷ χρόνῳ, ὅπως ἀπέδειξαν τελευταῖαι ἐρευναι τοῦ ἐργαστηρίου Τουλούζης. Συμπεραίνεται ἐπομένως ὅτι διὰ ἔργα μιᾶς κάποιας σημασίας ἡ πειραματικὴ ἐπαλήθευσις τῶν ὑπολογισμῶν εἶναι ἀπαραίτητος, αὐτὸς δὲ εἶναι καὶ ὁ σκοπὸς τῶν μελετῶν ἐπαληθεύσεως.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δοκιμῶν τοῦ ἐργαστηρίου, διορθοῦται ἡ προμελέτη καὶ δίδεται εἰς τὴν μελέτην τοῦ ἔργου ἡ ὀριστικὴ τῆς μορφῆ. Προσδιορίζονται ἐξ ἄλλου αἱ ἐπὶ τοῦ ἔργου ἐφαρμοζόμεναι δυνάμεις, διὰ λήψεων τῆς πίεσεως ἐπὶ διαφόρων σημείων τοῦ ὁμοιώματος καὶ ἐξ αὐτῶν ὑπολογίζονται μὲ ἀσφάλειαν αἱ διαστάσεις τοῦ πραγματικοῦ ἔργου καὶ ὁ ὀπλισμὸς του. Δι' ὅλας τὰς μελέτας ἐπαληθεύσεως, εἶναι προφανὲς ὅτι ἀποφεύγεται εὐκόλως ἡ χρῆσις διπλῆς κλίμακος.

Μία ἄλλη σοβαρωτάτη κατηγορία μελετῶν ἀναφέρεται εἰς τὴν εὐστάθειαν τῶν Ὑδραυλικῶν Ἔργων. Διὰ ταύτης ὑπονοεῖται ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ἀντοχῆς ἐνὸς τμήματος ἔργου, φυσικοῦ ἢ τεχνητοῦ, ἐκτεθειμένου εἰς ἰσχυρὰς ὑδροδυναμικὰς δυνάμεις, ὡς εἶναι τὰ ἐξωτερικὰ λιμενικὰ ἔργα, ἡ ἐπενδεδυμένη ἢ ἀνεπένδυτος κοίτη κατάντι ἐκχειλιστοῦ κ.λ.π. Καὶ διὰ τὰς μελέτας αὐτάς ἀποφεύγεται ἡ διπλὴ κλίμαξ, ἐκτὸς ἐὰν μελετᾶται συγχρόνως τὸ πρόβλημα ὑποσκαφῶν κατάντι ὑδραυλικοῦ τινος ἔργου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ θέμα κινήσεως φερτῶν ὑλῶν καὶ τὸ ἐπιλύομεν συνήθως διὰ διαστολῆς τῆς κλίμακος τῶν κόκκων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 10

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΕΠΙ ΤΗΣ ΣΤΡΕΒΛΗΣ ΚΛΙΜΑΚΟΣ

Εύρισκόμεθα πάντοτε εἰς τὴν περίπτωσιν στροβιλωδους ροῆς μὲ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν-ὁμοιότης Froude- καὶ τίθεται εὐ-
θὺς ἐξ ἀρχῆς τὸ ἐρώτημα: Τὶ χαρακτηριστικὸν μῆκος πρέπει νὰ χρησιμο-
ποιηθῇ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ νόμου τοῦ Froude;

Ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως ὑπαισέρχεται κατ' ἀρχὴν ἡ κατακόρυφος τα-
χύτης, διότι αὐτὴ καὶ μόνον προσδιορίζει τὴν ταχύτητα μεταδόσεως τῶν
κυματισμῶν.

Ἐστώσαν l_1 καὶ l_2 τὰ ὁμόλογα κατακόρυφα μήκη καὶ L_1, L_2 τὰ ὁμό-
λογα ὀριζόντια μήκη.

Θὰ ἔχωμεν:

$$\text{Κατακόρυφος κλίμαξ: } \lambda_v = \frac{l_2}{l_1} \quad (10.a)$$

$$\text{Ὅριζοντία κλίμαξ: } \lambda_H = \frac{L_2}{L_1} \quad (10.b)$$

$$\text{Στρέβλωσις: } D = \frac{\lambda_v}{\lambda_H} \quad (D > 1) \quad (10.\gamma)$$

Ὁ νόμος ὁμοιότητος Froude δίδει:

$$\frac{V_1^2}{l_1 g} = \frac{V_2^2}{l_2 g}$$

Ἐξ ἄλλου ὁ λόγος ταχυτήτων θὰ εἶναι ἴσος πρὸς:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1/T_1}{L_2/T_2} \quad \text{ὅπου } T_1 \text{ καὶ } T_2 \text{ εἶναι οἱ ὁμόλογοι χρόνοι.}$$

Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως τελικῶς:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{L_1/L_2}{\sqrt{l_1/l_2}} = \frac{\sqrt{\lambda_v}}{\lambda_H} \quad (10.\delta)$$

Θὰ προσδιορίσωμεν ἐν συνεχείᾳ τὸν λόγον τραχύτητος τῶν παρειῶν.

Ἐκφράζομεν πρὸς τοῦτο τὴν ταχύτητα δι' ἐνὸς ἐκ τῶν κλασσικῶν τύ-
πων, τῶν συνδεόντων τὰς ταχύτητας μὲ τὰς ἀπωλείας λόγφ τριβῶν εἰς τὰς
παρειάς, π.χ. μὲ τὸν τύπον Manning.

Θά έχωμεν : $V = K \cdot R^{2/3} \cdot J^{1/2}$

Δεδομένου όμως ότι : $\frac{J_2}{J_1} = \frac{\lambda_v}{\lambda_H}$, θά προκύψει :

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\lambda_v} = \frac{K_2 R_2^{2/3}}{K_1 R_1^{2/3}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_v}{\lambda_H}} \text{ ή τέλος :}$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \sqrt{\lambda_H} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2/3} \quad (10.ε)$$

Ἡ σχέσις (10.ε) δίδει εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τὸν συντελεστὴν K_2 τοῦ ὁμοιώματος.

Εἰς τὰς πλείστας τῶν ἐν τῇ πράξει συναντωμένων περιπτώσεων, ἡ ὑδραυλικὴ ἀκτίς R εἶναι περίπου ἴση μὲ τὸ μέσον ὕψος ροῆς h ὅποτε θά ἔχωμεν :

$$\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2/3} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{2/3} = \lambda_v^{-2/3}$$

καὶ τότε θά προκύψει :

$$\frac{K_2}{K_1} = \lambda_H^{1/2} \cdot \lambda_v^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt{D}} \lambda_v^{-1/6} \quad (10.ζ)$$

Φαίνεται πλέον ἀμέσως ὅτι, διὰ τὰς συνήθεις ἀριθμητικὰς ἐφαρμογὰς,

(π.χ. $\lambda_v = 1/20$ $\lambda_H = 1/100$ $D = 5$), θά ἔχωμεν $K_2 < K_1$

$$(π.χ. K_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{5}} \frac{\sqrt[6]{20}}{1} K_1 = 0,7 K_1).$$

Ἐπομένως ἡ τραχύτης τοῦ ὁμοιώματος πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τοῦ πραγματικοῦ ἔργου εἰς τὰς συνήθεις περιπτώσεις.

Διὰ $D = 1$, ἥτοι ἐνιαίαν κλίμακα, θά ἔχωμεν ἐξ ἄλλου :

$$\frac{K_2}{K_1} = \lambda^{-1/6} \quad (10.η)$$

Ἦτοι ἡ τραχύτης ὁμοιώματος εἶναι μικροτέρα, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, τῆς τοῦ πραγματικοῦ ἔργου, αὐτὸ δὲ εἶναι φυσικὴ συνέπεια τῆς πλήρους γεωμετρικῆς ὁμοιότητος ὁμοιώματος καὶ πρωτοτύπου.

Θὰ ἐξετάσωμεν τέλος τὴν περίπτωσιν τῶν προβλημάτων φερτῶν ὑλῶν, περιοριζόμενοι εἰς τὴν συνήθως ἐμφανιζομένην περίπτωσιν τῶν δυνάμεων εἰς ἃς ὑποβάλλονται οἱ μεμονωμένως παρασυρόμενοι κόκκοι.

Ἐστω εἰς μεμονωμένος κόκκος, ὄγκου v καὶ ἐιδικοῦ βάρους d , ὀλικοῦ δὲ βάρους ὑπὸ τὸ ὕδωρ ἴσου πρὸς P , προσβαλλόμενος ὑπὸ ρεύματος ταχύτητος V , καὶ ἀντιτάσσων εἰς τὸ ρεῦμα τὴν χαρακτηριστικὴν ἐπιφάνειαν S . Ἡ ὑδροδυναμικὴ δύναμις ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὸν κόκκον αὐτόν, θά εἶναι τῆς μορφῆς :

$$F = \pi S V^2 \phi(R) \quad (10.θ)$$

ἐνθα $\pi \simeq 1$ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος καὶ R ὁ ἀριθμὸς τοῦ Reynolds ὡς πρὸς μίαν χαρακτηριστικὴν γραμμικὴν διάστασιν τοῦ κόκκου.

Διὰ τοὺς λόγους τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἃς δεχθῶμεν ὅτι ὑπε-
χρεώθημεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἐν ὁμοιώματι, ἓναν κόκκον μὲ γραμμικὰς
διαστάσεις K φορὰς μεγαλυτέρας τῶν ἐπιβεβλημένων ἐκ τῆς γεωμετρικῆς
ὁμοιότητος λ . Θὰ ἔχωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰς σχέσεις:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(d_1 - \pi)}{(d_2 - \pi)} \frac{1_1^3}{1_2^3} = \frac{(d_1 - \pi)}{(d_2 - \pi)} \frac{h^3}{h^3(\lambda K)^3} = \frac{(d_1 - \pi)}{(d_2 - \pi)} \frac{1}{\lambda^3 K^3} \quad (10.ι)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \frac{\varphi(R_1)}{\varphi(R_2)}$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι διὰ στροβιλώδεις ροὰς θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\varphi(R_1)}{\varphi(R_2)} = 1$$

Ἐπίσης δέ: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\lambda^2 K^2}$, τελικῶς προκύπτει:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{\lambda^3 K^2} \quad (10.κ)$$

Γράφοντες τὴν ἰσότητα: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{F_1}{F_2}$, θὰ ἔχωμεν τελικῶς τὴν ζη-

τούμενην συνθήκην ὁμοιότητος: $\left[\frac{d_1 - \pi}{d_2 - \pi} = K \right] \quad (10.λ)$

Ἐν τῇ πράξει ἔχομεν συνήθως ἀνάγκην χρησιμοποίησεως ἑνὸς K τῆς
τάξεως τῶν 10. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, διὰ κόκκους εἰδικοῦ βάρους ἴσου
πρὸς $d_1 = 2,6$ (τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ συνηθέστερον ἐν τῇ φύσει) θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{2,6 - 1}{d_2 - 1} = 10 \quad \eta \quad d_2 = 1,16$$

Ὑλικά ἔχοντα τὰς ιδιότητες αὐτάς, εἶναι κυρίως τὰ πλαστικὰ ὑλικά:
Plexiglas, βακελίτης, πολυστερίνη, ὡς καὶ ὀρισμέ-
ναι μορφαὶ ἄνθρακος, ἐλαφρόπετρας ἢ ρινιδίων
ξύλου. Αὐτὰ δὲ καὶ μόνον χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰς μελέτας ἐπὶ ὁμοιω-
μάτων μὲ μετακινήσεις φερτῶν ὑλῶν καὶ ὑποσκαφάς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 11

ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΕΚΚΕΝΩΤΩΝ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ

Ἡ μελέτη ἐκκενωτῶν πλημμύρας εἶναι τὸ ὑπ' ἀριθμὸν 1 ἔργον τῶν ἐργαστηρίων Ὑδραυλικῆς, ἀπὸ ἀπόψεως συχνότητος ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος καὶ ποικιλίας παρουσιαζομένων περιπτώσεων, διότι ἀποτελεῖ ἓνα ἐκ τῶν λεπτῶν σημείων τῶν ὑδροηλεκτρικῶν ἔργων.

Θὰ ἐξετάσωμεν ἐπομένως εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον μίαν γενικὴν μελέτην ἐν προτύπῳ ἑνὸς τοιούτου ἔργου ἐφαρμόζοντες τὰ συμπεράσματα τῆς θεωρίας, εἰς τὰς ἐκτελεσθεῖσας ὑπὸ τὴν ἐπίβλεψίν μας δοκιμὰς ἐπὶ ἀναλόγων ἔργων εἰς τὸ Ἐργαστήριον Ὑδραυλικῆς τῆς Τουλούζης.

11.1.- ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

Τὸ γραφεῖον μελετῶν δίδει τὰ κάτωθι χαρακτηριστικά:

Ἡ ἐκκένωσις πλημμυρῶν θὰ γίνῃ διὰ δύο ὀρθογωνικῶν στομίων, φρασσομένων ὑπὸ τοξωτῶν θυροφραγμάτων. Ἡ κατὰ μῆκος τομὴ τῆς βάσεως τῶν στομίων θὰ εἶναι τῆς μορφῆς «saut de skiti».

Ἡ ζητούμενη παροχὴ ἐκκενώσεως θὰ εἶναι:

- 1250 μ^3 /δλ. διὰ τὴν κανονικὴν στάθμην τῆς τεχνητῆς λίμνης (+490,0).
- 2500 μ^3 /δλ. διὰ τὴν ἐξαιρετικὴν περίπτωσιν στάθμης (+495,0).

Ζητεῖται δὲ ἀπὸ τὸ ἐργαστήριον ἡ μελέτη τῶν ἐκκενωτῶν πλημμύρας, ἐν ὁμοιώματι.

Κατόπιν τῆς μελέτης τοῦ ὅλου θέματος, τὸ Ἐργαστήριον προσδιορίζει τὸ κάτωθι πρόγραμμα ἐρεῦνης:

α) Μελέτη τοῦ τμήματος εἰσόδου εἰς τὰ στόμια ἐκκενώσεως.

Αἱ δοκιμαὶ θὰ ἔχουν ὡς σκοπὸν νὰ προσδιορίσουν τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς καλλιτέρας διατάξεως εἰσόδου τῶν στομίων καὶ τῆς κατὰ πλάτος καὶ κατὰ μῆκος μορφῆς τῶν, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀρχικῶς δοθέντος πλάτους στομίων καὶ θυροφραγμάτων καὶ τῆς γενικῆς μορφῆς τῆς εἰσόδου τοῦ ἔργου. Δι' ἐκάστην μελετωμένην μορφήν, θὰ ἐξετασθοῦν οἱ συντελεσταὶ παροχῆς

καὶ ἡ μορφή τῆς ροῆς εἰς τὴν εἵσοδον, (ἀποφυγὴ ἀποκολλήσεως καὶ στροβιλισμῶν).

β) Μελέτη τῆς κατὰ μήκος τομῆς τῶν στομιῶν. Τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς κατὰ μήκος τομῆς δίδονται ἀπὸ τὸ γραφεῖον μελετῶν, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ τελευταῖον τμήμα τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται τροποποιήσεις. Αἱ δοκιμαὶ ἐν ὁμοιώματι ἀφοροῦν κυρίως τὴν ἀποτύπωσιν τῆς ἐπιφανείας ροῆς καὶ τῶν γραμμῶν ροῆς, ὡς καὶ τὴν μέτρησιν πιέσεων καὶ ὑποπίσεων εἰς τὴν βάσιν καὶ τὰς παρειάς τῶν στομιῶν.

γ) Μελέτη τῆς διατάξεως διασπορᾶς τοῦ ὕδατος καὶ τῶν ὑποσκαφῶν.

Αἱ δοκιμαὶ ἔχουν ἐπίσης σκοπὸν νὰ προσδιορίσουν τὴν μορφήν τοῦ τελευταίου τμήματος τῶν στομιῶν οὕτως ὥστε:

—Νὰ ἐπιτυγχάνεται εἰς τὸ μέγιστον ἡ καταστροφὴ τῆς ἐνεργείας τῶν ἐκχειλιζόντων ὑδάτων.

—Νὰ διευθύνεται ἡ ἐκχειλίζουσα φλὲξ εἰς τὸν ἄξονα τῆς κοιλάδος, μακρὰν τῶν ὀχθῶν, ὥστε νὰ μὴν τὰς προσβάλῃ.

—Αἱ δημιουργοῦμεναι ὑποσκαφαὶ εἰς τὴν κοιλάδα, νὰ μὴν ἐπισύρουν κίνδυνον διὰ τὴν εὐστάθειαν τοῦ ὅλου ἔργου.

Ἐπομένως ἡ μελέτη τοῦ Ἑργαστηρίου θὰ περιλαμβάνει:

1) Ἐν κεφάλαιον σχετικὸν μὲ τὴν ἐκλογὴν τῶν χαρακτηριστικῶν τῶν διαφόρων ὁμοιωμάτων.

2) Ἐν κεφάλαιον σχετικὸν μὲ τὴν μελέτην τῆς κατὰ πλάτος μορφῆς τῶν στομιῶν.

3) Ἐν κεφάλαιον μετρήσεων εἰς τὰς κατὰ μήκος τομάς.

4) Ἐν κεφάλαιον ἀφορὸν τὰς διατάξεις διασπορᾶς τῶν ὑδάτων καὶ τὰς ὑποσκαφὰς εἰς τὴν κατάντι κοιλάδα.

5) Ἐν τελικὸν συμπέρασμα.

11.2.-ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

Τὰ προβλήματα ποὺ ἀντιμετωπίζονται εἰς τὰς δοκιμὰς αὐτοῦ τοῦ τύπου, ἀφοροῦν ροὴν ἐλευθέρας ἐπιφανείας καὶ στροβιλώδη, ἐπομένως, τὸν βασικὸν ρόλον εἰς τὴν φυσικὴν ὁμοιότητα παίζουν αἱ δυνάμεις βαρύτητος καὶ θὰ ἔχωμεν ὡς ἰσχύοντα νόμον ὁμοιότητος τὸν νόμον τοῦ Froude.

Μὲ τὴν ὁμοιότητα τοῦ Froude, τὰ φαινόμενα τῆς παρασύρσεως τοῦ αἵματος ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐκχειλιζούσης φλεβὸς καὶ τῆς διασπορᾶς εἰς τὰ κατάντι τοῦ ἔργου, δὲν εὐρίσκονται ἐν ἁρμονίᾳ εἰς τὸ ὁμοίωμα καὶ ἐν τῇ φύσει, διότι ἀπαιτεῖται ἡ ἐφαρμογὴ καὶ ἄλλων νόμων ὁμοιότητος. Οἱ νόμοι αὗτοι ἐφαρμοζόμενοι θὰ ὀδηγούν εἰς ἀδυναμίαν ἐκτελέσεως τοῦ ὁμοιώματος. Ἐν τούτοις τὰ ἀποτελέσματα, μὲ μόνον ἰσχύον-

τα τὸν νόμον τοῦ Froude, ἐπιτρέπουν τὴν σύγκρισιν διαφορῶν λύσεων μεταξὺ τῶν καὶ τὴν ἐκλογὴν τῆς καλλιτέρας δυνατῆς.

Ἡ ἐκλεγείσα κλίμαξ σμικρύνσεως δι' ὁλόκληρον τὸ ὁμοίωμα, εἶναι $\lambda = 1/75$ καὶ ἐπιτρέπει τὴν ἐκτέλεσιν μετρήσεων καὶ παρατηρήσεων ἀρκετὰ ἱκανοποιητικῆς ἀκριβείας, μὲ τὸν μέγιστον δυνατόν περιορισμὸν τῶν διαστάσεων τοῦ ὁμοιώματος.

Διὰ νὰ εὑρεθοῦν ὅμως ὁρισμένα πρῶτα γενικὰ συμπεράσματα, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων θὰ κατεσκευάζετο ὁλόκληρον τὸ ὁμοίωμα, κατεσκευάσθη ἐν ἀρχῇ ὁμοίωμα ὑπὸ κλίμακα 1:100, περιλαμβάνον μόνον ἐν στόμιον ἐκροῆς.

Διὰ νὰ προσδιορισθοῦν δὲ μὲ ἀκρίβειαν τὰ τελικὰ στοιχεῖα διασπορᾶς τῆς ὑδατίνης δέσμης, ἀπεφασίσθη ὅπως μετὰ τὰς δοκιμὰς ἐπὶ τοῦ βασικοῦ ὁμοιώματος, μελετηθῇ ἡ διασπορά ὑπὸ κλίμακα 1:40, εἰς ὁμοίωμα περιλαμβάνον τὸ ἐν στόμιον ἐκροῆς. Ἀπεφασίσθη ἐπομένως ἡ κατασκευὴ τῶν ἐξῆς ὁμοιωμάτων:

α) Προκαταρκτικὸν ὁμοίωμα, $\lambda = 100$, μὲ ἐν μόνον στόμιον:

Ἡ προκαταρκτικὴ μελέτη τῶν κατὰ πλάτος μορφῶν τῆς διατομῆς τοῦ στομίου ἐγένινεν εἰς ὀρθογωνικὴν διώρυγα πλάτους 0,50 μ. καὶ βάθους 1,40 μ. μὲ ὁμοιότητα Froude, ἥτοι:

κλίμαξ μηκῶν	$\lambda = 1/100$
κλίμαξ ὑδροδυναμικῶν πιέσεων μετρουμένων μὲ	
ὑψος ὕδατος	$\lambda = 1/100$
κλίμαξ ταχυτήτων	$\lambda^{1/2} = 1/10$
κλίμαξ χρόνου	$\lambda^{1/2} = 1/10$
κλίμαξ παροχῆς	$\lambda^{5/2} = 1/100.000$

Αἱ παροχαὶ πλημμύρας ἐν ὁμοιώματι καὶ διὰ τὸ ἕνα στόμιον γίνονται:

—Κανονικὴ πλήμμυρα ($625 \text{ μ}^3/\delta\lambda$), $Q_k = 6,25 \text{ λιτ}/\delta\lambda$.

—Ἐξαιρετικὴ πλήμμυρα ($1250 \text{ μ}^3/\delta\lambda$), $Q_{μεγ} = 12,50 \text{ λιτ}/\delta\lambda$.

β) Κυρίως ὁμοίωμα $\lambda = 1/75$, ἐπὶ ὅλου τοῦ ἔργου.

κλίμαξ μηκῶν	$\lambda = 1/75$
κλίμαξ πιέσεων	$\lambda = 1/75$
κλίμαξ ταχυτήτων	$\lambda^{1/2} = 1/8,66$
κλίμαξ χρόνου	$\lambda^{1/2} = 1/8,66$
κλίμαξ παροχῆς	$\lambda^{5/2} = 1/48712$

Αἱ παροχαὶ πλημμύρας ἐν ὁμοιώματι καὶ δι' ἀμφότερα τὰ στόμια, γίνονται:

- Κανονική πλήμμυρα ($1250 \mu^3/\delta\lambda$) $Q_K = 25,5 \text{ λιτ}/\delta\lambda$.
 —Εξαιρετική πλήμμυρα ($2500 \mu^3/\delta\lambda$) $Q_{μεγ} = 51,0 \text{ λιτ}/\delta\lambda$.

γ) Όμοιομα τελικής φάσεως $\lambda = 1/40$, εν μόνον στόμιον.

κλίμαξ μηκών	$\lambda = 1/40$
κλίμαξ πιέσεων	$\lambda = 1/40$
κλίμαξ ταχυτήτων	$\lambda^{1/2} = 1/6,32$
κλίμαξ χρόνου	$\lambda^{1/2} = 1/6,32$
κλίμαξ παροχής	$\lambda^{5/2} = 1/10,112$

Αί παροχαί πλημμύρας εν όμοιώματι και διά τὸ ἓνα στόμιον, γίνονται:

- Κανονική πλήμμυρα ($625 \mu^3/\delta\lambda$) $Q_K = 61,8 \text{ λιτ}/\delta\lambda$.
 —Εξαιρετική πλήμμυρα ($1250 \mu^3/\delta\lambda$) $Q_{μεγ} = 123,6 \text{ λιτ}/\delta\lambda$.

11.3.- ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΟΥ ΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ 1:100

Περιλαμβάνει τὰ ἐξῆς κύρια στοιχεῖα: (ἴδε καὶ σχ. 1)

α) Διάταξις τροφοδοσίας ἀνάντι, ἥτοι:

Σύνδεσις με δεξαμενὴν σταθερᾶς στάθμης.

Μετρητικὸς ἐκχειλιστὴς ἰκανότητος 50 λιτ/δλ.

Λεκάνη ἡρεμήσεως ἀνάντι.

β) Τμήμα ἐκχειλιστοῦ ἀριστερᾶς ὀχθῆς.

Ἡ ἀνάντι παρειὰ τοῦ φράγματος, ὥς καὶ ὁ πρόβολος τοῦ στομίου κατεσκευάσθησαν ἐκ σκυροδέματος. Ἡ βᾶσις τοῦ στομίου ἔλαβε τὴν ὑπὸ τῶν σχεδίων τοῦ γραφείου μελετῶν προταθεῖσαν μορφήν, ἐλειάνθη δὲ διὰ σιμεντοκονίας. Τὰ πλευρικὰ τοιχώματα ἔγιναν ξύλινα, ἐπιτυγχάνεται δὲ οὕτω μεταβολὴ κατὰ βούλησιν τοῦ πλάτους τοῦ στομίου, διὰ μεταβολῆς τοῦ πάχους τῶν ξυλίνων τοιχωμάτων.

γ) Ἀνάκτησις τῶν ἐκχειλιζόντων ὑδάτων.

Πρόκειται περὶ μιᾶς διώρυγος ἐντὸς τῆς ὁποίας συλλέγονται τὰ ἐκχειλίζοντα ὕδατα καὶ εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὁποίας ὑπάρχει εἰς ἐκχειλιστὴς Bazin διὰ τὴν ἀκριβῆ μέτρησιν τῆς παροχῆς.

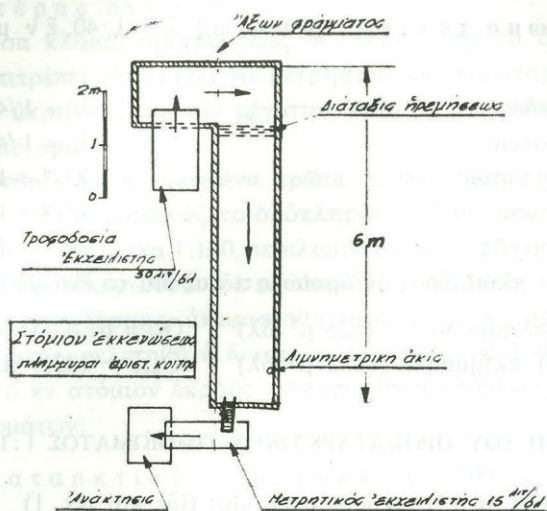
δ) Ὅργανα ρυθμίσεως καὶ μετρήσεων.

Ἡ παροχὴ ρυθμίζεται ἀπὸ δικλείδας καὶ μετράται διὰ τοῦ κατάντι ἐκχειλιστοῦ, μεγίστης ἀποδόσεως 15 λιτ/δλ.

Ἡ ἀνάντι στάθμη ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν παροχὴν καὶ τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ ἐκχειλιστοῦ. Μετράται διὰ λιμνημετρικῆς ἀκίδος, σταθερᾶς.

Ἡ ἀποτύπωσις τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος εἰς τὸ στόμιον, ἐπιτυγχάνεται

τῇ βοηθείᾳ ἄλλης λιμνημετρικῆς ἀκίδος μετακινουμένης ἐπὶ φορείου.



Σχ. 1: ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ 1:100

11.4.-ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΚΥΡΙΩΣ ΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ 1:75

Περιλαμβάνει τὰ ἐξῆς κύρια στοιχεῖα: (ἴδε σχ. 2)

α) Διάταξις τροφοδοσίας ἀνάντι, ἥτοι:

Σύνδεσις μὲ δεξαμενὴν σταθερᾶς στάθμης.

Δύο μετρητικούς ἐκχειλιστὰς ἰκανότητος 30 λίτ/δλ.

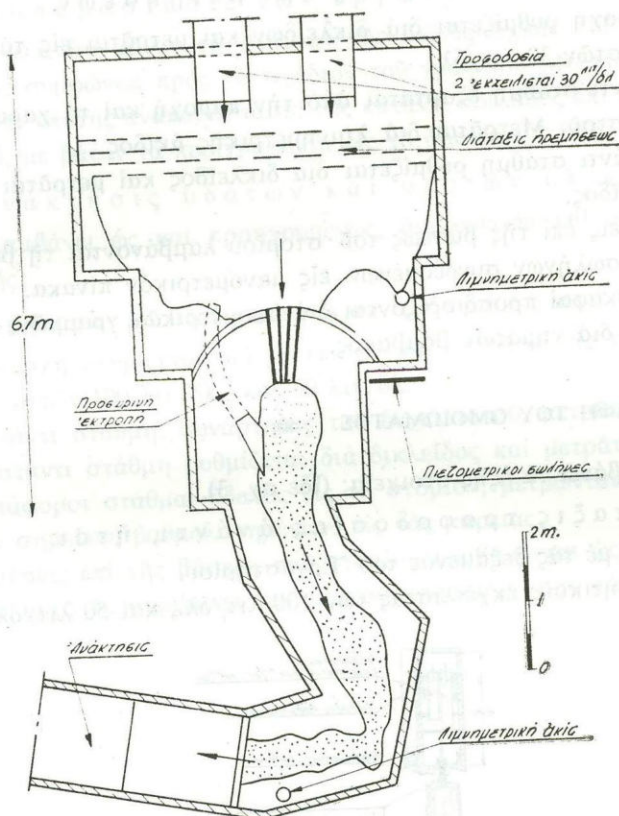
Λεκάνη ἡρεμίσσεως ἀνάντι, ἐξασφαλίζουσα τὴν κανονικὴν διανομὴν τῆς παροχῆς ἐπὶ ὅλου τοῦ πλάτους τῆς παριστανομένης λίμνης τοῦ φράγματος, λόγῳ διελεύσεως τῆς παροχῆς μέσῳ μιᾶς σειρᾶς φίλτρων.

β) Ἀναπαράστασις τῆς κοιλάδος.

Γίνεται πλήρης γεωμετρικὴ σμίκρυνσις ἐπὶ 165 μ. πρὸς τὰ ἀνάντι καὶ 300 μ. πρὸς τὰ κατάντι τοῦ φράγματος. Τὸ ἀνάγλυφον δίδεται ὡς ἐξῆς:

Πρὸς τὰ ἀνάντι, ἀπὸ κατὰ πλάτος τομᾶς τῆς κοιλάδος, ἀνὰ 20 μ. εἰς τὴν κατωτέραν ζώνην ὅπου ἡ κλίσις εἶναι ὁμαλωτέρα καὶ ἀνὰ 5 μ. εἰς τὴν ἀνωτέραν ζώνην ὅπου τὸ ἔδαφος εἶναι βραχῶδες καὶ ἀπόκρημνον.

Πρὸς τὰ κατάντι, ἀκολουθεῖται ἡ αὐτὴ ἀρχὴ μὲ τὴν πρὸς τὰ ἀνάντι ἀναπαράστασιν. Αἱ προσχώσεις τῆς κοίτης, παρίστανται διὰ κινητῶν ὕλικῶν, μὲ κατάλληλον κλίμακα, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ποιοτικὴ ἀναπαράστασις καὶ σύγκρισις τῶν ἐκσκαφῶν ὅς προκαλεῖ ἡ ἐκχειλίζουσα φλέψ.



Εκ 2. ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ 1:75.

γ) Αναπαράστασις τῶν ἔργων.

Ἐκχειλιστῆς πλημμυρῶν: Κατεσκευάσθη συμφώνως πρὸς τὰ σχέδια τοῦ Γραφείου Μελετῶν, ἐκ σκυροκονιάματος, διαστρωθέντος εἰς «καλούπια» ξύλινα. Τὸ ἀριστερὸν μέρος αὐτοῦ εἶναι ἐφοδιασμένον μὲ πιεζομετρικοὺς σωλῆνες διὰ τὴν μελέτην τῆς τυχόν ἀποκολλήσεως τῆς ὑγρᾶς φλεβός.

Φράγμα: Δὲν ἀναπαριστῶμεν τὸν θόλον διότι δὲν ἐξυπηρετεῖ εἰς τὰ ἐξεταζόμενα προβλήματα. Περιοριζόμεθα εἰς ἀναπαράστασιν τῆς ἀνάντι καὶ κατάντι παρειᾶς τοῦ φράγματος.

δ) Ἀνάκτῃσις ὑδάτων καὶ φερτῶν ὑλικῶν.

Περιλαμβάνει ἓνα χάνδακα κατάντι, (ἀμμοπαγίς), διὰ τὴν συλλογὴν τῶν μεταφερομένων ὑλικῶν.

Τὰ ἐκχειλίζοντα ὕδατα συγκεντροῦνται εἰς δεξαμενὴν.

ε) Ὀργανα ρυθμίσεως καὶ μετρήσεων.

Ἡ παροχὴ ρυθμίζεται διὰ δικλείδων καὶ μετῶται εἰς τὰ ἀνάντι διὰ δύο ἐκχειλιστῶν 30 λιτ/δλ.

Ἡ ἀνάντι στάθμη ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν παροχὴ καὶ τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ ἐκχειλιστοῦ. Μετῶται διὰ λιμνημετρικῆς ἀκίδος.

Ἡ κατάντι στάθμη ρυθμίζεται διὰ δικλείδος καὶ μετῶται διὰ λιμνημετρικῆς ἀκίδος.

Αἱ πιέσεις ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ στομίου λαμβάνονται τῇ βοηθείᾳ πιεζομετρικῶν σωλῆνων συνδεομένων εἰς μανομετρικὸν πῖνακα.

Αἱ ὑποσκαφαὶ προσδιορίζονται διὰ ὑψομετρικῶν γραμμῶν, τὰς ὁποίας χαράσσομεν διὰ νημάτων βόμβακος.

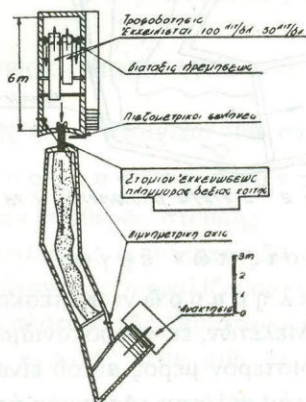
11.5.- ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ 1:40.

Περιλαμβάνει τὰ ἑξῆς στοιχεῖα: (ἴδε σχ. 3).

α) Διάταξις τροφοδοσίας ἀνάντι, ἥτοι:

Σύνδεσιν μὲ τὰς δεξαμενὰς τοῦ Ἐργαστηρίου.

Δύο μετρητικούς ἐκχειλιστὰς τῶν 100 λιτ/δλ., καὶ 50 λιτ/δλ.



ΣΧ. 3 ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ 1:40

Μίαν λεκάνην ἡρεμῆσεως ἀνάντι, ἐξασφαλίζουσιν τὴν διανομὴν τῆς παροχῆς ἐφ' ὅλου τοῦ πλάτους τῆς παριστανομένης λίμνης τοῦ φράγματος, λόγῳ διελεύσεως τῆς παροχῆς μέσῳ μιᾶς σειρᾶς φίλτρων.

β) Ἀναπαράστασις τῆς ἀνάντι κοιλάδος.

Αὕτη δὲν ἀναπαρίσταται, διότι σκοπὸς τῆς μελέτης ἐπὶ τοῦ ὁμοιώματος 1:40, εἶναι ἡ διασπορὰ τῆς ἐκχειλίζουσας φλεβὸς εἰς τὴν κατάντι κοιλάδα. Ἀρκούμεθα εἰς μίαν δεξαμενὴν $6 \times 2 \times 2$ μ.

γ) Ἀναπαραστάσεις τῶν ἔργων.

Κατεσκευάσθη μόνον τὸ στόμιον τῆς δεξιᾶς ὀχθῆς τοῦ ἐκχειλιστοῦ πλημμυρῶν, συμφώνως πρὸς τὸ σχέδιον τοῦ γραφείου Μελετῶν.

Ἐγένετο ἐπίσης ἀναπαραστάσις τῆς κατάντι κοιλάδος ἐπὶ 320 μ. (8μ. ἐν ὁμοιώματι), μὲ βάσιν τὰ περιγραφέντα εἰς τὸ ὁμοίωμα 1:100.

δ) Ἀνάκτησις ὑδάτων καὶ φερτῶν ὑλικῶν.

Περιλαμβάνει ὡς καὶ προηγουμένως, ἀμμοπαγίδα καὶ δεξαμενὴν περισυλλογῆς.

ε) Ὅργανα ρυθμίσεως καὶ μετρήσεων.

Ἡ παροχὴ ρυθμίζεται διὰ δικλείδων καὶ μετρᾶται εἰς τὰ ἀνάντι, διὰ δύο ἐκχειλιστῶν 100 λιτ/δλ., καὶ 50 λιτ/δλ.

Ἡ ἀνάντι στάθμη, συνάρτησις τοῦ ἐκχειλιστοῦ, μετρᾶται δι' ἀκίδος.

Ἡ κατάντι στάθμη ρυθμίζεται διὰ δικλείδος καὶ μετρᾶται δι' ἀκίδος.

Αἱ διαφοροὶ στάθμαι ὕδατος εἰς τὸ στόμιον, μετρῶνται ἐπὶ τῇ βάσει σταθερῶν σημείων, βαθμολογημένων, εἰς τὰς παρειάς.

Αἱ πιέσεις ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ στομίου λαμβάνονται ὡς καὶ προηγουμένως, τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ μὲ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ὑποσκαφῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 12

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ - ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

12.1.- ΟΜΟΙΩΜΑ 1:100

α) Μετρήσεις στάθμης ύδατος.

Αί μετρήσεις στάθμης πραγματοποιούνται διά λιμνημετρικῶν ἀκίδων, καὶ ἐπιτρέπουν ἐν γένει νὰ προσδιορισθῇ με ἀκρίβειαν $\pm 0,1$ χιλ. μία σταθερὰ ὑδατίνη στάθμη. Ἡ ἀκρίβεια αὕτη βεβαίως κυμαίνεται, συναρτῆσει τῶν εἰδικῶν συνθηκῶν ἐκάστης μετρήσεως. (Κανονισμοὶ Α.Φ.Ν.Ο.Ρ. - Ι.Σ.Ο./Τ.Γ. - 30/Σ.Σ.).

Τὸ μῆκος τῆς διώρυγος ἡρεμήσεως ἀνάντι, ἐπιτρέπει μίαν μέτρησιν με $\pm 0,1$ χιλ., ἐντὸς μετρητικοῦ φρεατίου, συνδεομένου με τὴν διώρυγα καὶ ἐξαλείφοντος οὕτω τὰς τυχόν ἐπιφανειακὰς διακυμάνσεις.

Δέον ὅπως προστεθῇ τὸ σφάλμα εἰς τὴν λήψιν τοῦ μηδενὸς διὰ χωροβάτου ($\pm 0,1$ χιλ.), ὥς καὶ τὸ σφάλμα ἀβεβαιότητος εἰς τὴν τοποθέτησιν τῆς στέψεως τοῦ ἐκχειλιστοῦ, ($\pm 0,2$ χιλ.), ἥτοι συνολικῶς ἐν σφάλμα 4 ἐκ. ἐν τῇ φύσει.

Τὰ μέγιστα σχετικὰ σφάλματα εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ πάχους τῆς ἐκχειλίζουσας φλεβός, διὰ μέσον πάχους φλεβός ἴσον πρὸς 9 ἐκ. (9 μ. ἐν τῇ φύσει), θὰ εἶναι:

τυχαῖον σφάλμα	$\pm 0,1/90 = \pm 0,1\%$
συστηματικὸν σφάλμα	$\pm 0,3/90 = \pm 0,3\%$
Μέγιστον δυνατὸν σφάλμα :	$\pm 0,4\%$

β) Μετρήσεις παροχῆς.

Ἡ παροχὴ μετρεῖται τῇ βοηθείᾳ τριγωνικοῦ ἐκχειλιστοῦ, με δυναμικότητα 2 ἕως 15 λιτ/δλ. Τὰ σφάλματα ἐπὶ τῆς μετρήσεως αὐτῆς θὰ εἶναι:

Τυχαῖα σφάλματα: Τὸ σύνολον τῶν τυχαίων σφαλμάτων κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς μετρήσεως τῶν φορτίσεων ἐπὶ τῆς ἀκμῆς τοῦ ἐκχειλιστοῦ, δὲν ὑπερβαίνει τὸ $\pm 0,1$ χιλ., διότι αἱ διακυμάνσεις στάθμης εἰς τὸ φρεάτιον μετρήσεως, εἶναι ἀμελητέαι διὰ τὰς μικρὰς παροχάς. Π.χ. διὰ τὴν μεγίστην παροχὴν τῶν 6,25 λιτ/δλ., ἡ φόρτισις ἐπὶ τῆς ἀκμῆς τοῦ ἐκχειλιστοῦ εἶναι

143,50 χιλ. ήτοι έχομεν ένα σχετικόν μέγιστον σφάλμα ἐπὶ τῆς φορτίσεως:

$$\Delta_h / h = 0,1 / 143,5 \pm 0,07\%$$

καὶ ἐπὶ τῆς παροχῆς:

$$\frac{\Delta_Q}{Q} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta_h}{h} \pm 0,1\%$$

Συστηματικά σφάλματα: Προκύπτουν ἀπὸ δύο διαφορετικὰ αἷτια.

1) Σφάλμα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μηδενὸς εἰς τὸν ἐκχειλιστήν, κατώτερον πάντως τῶν 0,2 χιλ., ήτοι διὰ τὴν παροχὴν θὰ προκύψει ένα μέγιστον σχετικὸν σφάλμα:

$$\frac{\Delta_Q}{Q} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,2}{143,5} \pm 0,1\%$$

2) Σφάλμα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς καμπύλης ὕψους - παροχῆς εἰς τὸν ἐκχειλιστήν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ κατώτερον τοῦ $\pm 1\%$.

Τὸ συνολικὸν μέγιστον σχετικὸν σφάλμα, ἐπὶ τῆς παροχῆς, θὰ εἶναι ἐπομένως:

$$0,1\% + 0,2\% + 1\% = 1,3\%$$

γ) Συντελεστὴς παροχῆς στομίου.

Ὁ συντελεστὴς παροχῆς m , ἑνὸς στομίου, προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$m = \frac{Q}{1 \cdot h^{3/2} \sqrt{2g}}$$

ἐνθα Q εἶναι ἡ ἀποχετευομένη παροχὴ ὑπὸ φόρτισιν h , καὶ διὰ πλάτος στομίου 1.

Τὸ μέγιστον σχετικὸν σφάλμα ἐπὶ τοῦ συντελεστοῦ m , θὰ εἶναι ἐπομένως:

$$\left(\frac{\Delta_m}{m} \right) = \left(\frac{\Delta_Q}{Q} \right) + \left(\frac{\Delta_1}{1} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\Delta_h}{h} \right)$$

Ἡ κατασκευὴ τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων, δὲν ἐπιτρέπει μίαν ἀκρίβειαν μεγαλύτερην τοῦ 0,5 χιλ. εἰς τὸ πλάτος τοῦ στομίου, ὁπότε προκύπτει μέγιστον σχετικὸν σφάλμα:

$$\frac{\Delta_1}{1} = 0,5 / 120 \pm 0,4\%$$

ὁπότε τελικῶς θὰ έχομεν:

$$\left(\frac{\Delta_m}{m} \right) = 1,3\% + 0,4\% + \frac{3}{2} \cdot 0,40\% = 2,3\%$$

12.2.-ΟΜΟΙΩΜΑ 1:75

α) Μετρήσεις παροχών τροφοδοτήσεως.

Το όμοιομα τροφοδοτείται από δύο έκχειλιστάς των 30 λιτ/δλ., εις έκαστον των οποίων αί αιτίαι σφαλμάτων είναι αί ακόλουθοι:

Τυχαία σφάλματα: Τò σύνολον των σφαλμάτων κατά την διάρκειαν μιᾶς μετρήσεως δέν υπερβαίνει τὰ 0,4 χιλ., ήτοι διά την φόρτισιν των 203 χιλ. ἐπὶ τοῦ έκχειλιστοῦ, ἀντιστοιχοῦσαν εις παροχήν 25,5 λιτ/λδ., θὰ έχωμεν ἓνα μέγιστον σχετικόν σφάλμα ἐπὶ τῆς φορτίσεως:

$$\frac{\Delta h}{h} = 0,4/203 = 0,2\%$$

Ἡ καμπύλη φορτίσεως - παροχῆς τοῦ έκχειλιστοῦ έχει ὡς εξίσωσιν,

$$Q = 0,01467 \cdot h^{2,4805}$$

όποτε προκύπτει ἐπὶ τῆς παροχῆς ἓνα μέγιστον σχετικόν σφάλμα:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 2,4805 \cdot \frac{\Delta h}{h} = 0,5\%$$

Συστηματικά σφάλματα: Προκύπτουν ἀπὸ τὰ εξῆς:

1) Σφάλμα εις τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μηδενὸς εις τὸν έκχειλιστήν, κατώτερον των 0,2 χιλ., όποτε θὰ έχωμεν ὡς μέγιστον σχετικόν σφάλμα παροχῆς:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 2,48 \cdot \frac{0,2}{203} = 0,3\%$$

2) Σφάλμα εις τὸν προσδιορισμὸν τῆς καμπύλης ὕψους - παροχῆς, ἐκτιμώμενον κατώτερον τοῦ 1%.

Τò συνολικόν μέγιστον συστηματικόν σφάλμα θὰ εἶναι ἐπομένως:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 0,3 + 1,0 = 1,3\%$$

Τò συνολικόν μέγιστον σχετικόν σφάλμα ἐπὶ τῆς παροχῆς τοῦ έκχειλιστοῦ των 30 λιτ/δλ., θὰ εἶναι ἐξ ἄλλου:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 0,2 + 0,5 + 1,3 = 2\%$$

β) Μετρήσεις στάθμης καὶ φορτίσεων.

Στάθμη ὕδατος ἀνάντι καὶ κατάντι τοῦ φράγματος.

Ἡ ἀκρίβεια των μετρήσεων εξαρτᾶται ἀποκλειστικῶς ἀπὸ τὸ εὖρος των διακυμάνσεων τῆς ὑγρᾶς ἐπιφανείας, διότι υπερβαίνουν σημαντικά τὸ σφάλμα ἀναγνώσεως (1/10 χιλ.). Ἐκ των πειραμάτων προέκυψεν ὅτι αί διακυμάνσεις έχουν εὖρος ἐνὸς ἕως δύο χιλιοστών εις τὴν ἀνάντι ὑδατίνην

ἐπιφάνειαν καὶ φθάνουν τὴν τάξιν τοῦ ἑκατοστοῦ εἰς τὰ κατάντι, πράγμα τὸ ὁποῖον ὁδηγεῖ, διὰ τὴν ἀποτύπωσιν τῆς ἐπιφανείας ροῆς, εἰς μίαν προσέγγισιν 10 ἐκ. ἐν τῇ φύσει, διὰ τὴν στάθμην εἰς τὰ ἀνάντι.

Μέτρησις φορτίσεως εἰς τὴν στέψιν τοῦ ἐκχειλιστοῦ.

Ἡ σταθεροποίησις τῆς στάθμης τοῦ ὕδατος ἀνάντι, καὶ ἡ χρησιμοποιομένη διάταξις ἀποσβέσεως τῶν διαταραχῶν, ἐπιτρέπουν ἓνα σφάλμα κατώτερον τῶν 0,2 χιλ. εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ σφάλμα διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μηδενός, τάξεως $\pm 0,2$ χιλ., ὁπότε ἐν τῷ συνόλῳ ὑπάρχει ἓνα μέγιστον σφάλμα $\pm 0,4$ χιλ.

Διὰ τὴν μεγίστην φόρτισιν τῶν 9 μέτρων, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς $9.000/75 = 120$ χιλ. ἐν ὁμοιώματι, θὰ ἔχωμεν ἓν μέγιστον σχετικὸν σφάλμα ἐπὶ τῆς φορτίσεως:

$$\frac{\Delta h}{h} = 0,4/140 = 0,30\%$$

γ) Σφάλμα ἐπὶ τοῦ συντελεστοῦ παροχῆς.

Ὁ συντελεστὴς παροχῆς m τοῦ στομίου ὀρίζεται ὡς καὶ προηγουμένως, ἡ δὲ κατασκευὴ τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων ἐπιτρέπει νὰ ἐπιτευχθῇ ἐν ὁμοιώματι, μία ἀκρίβεια τῆς τάξεως τῶν $\pm 0,2$ χιλ., ἥτοι θὰ ἔχωμεν μέγιστον σχετικὸν σφάλμα:

$$\frac{\Delta i}{i} = 0,2/146 = 0,15\%$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ, ἐπὶ τοῦ συντελεστοῦ παροχῆς:

$$\frac{\Delta m}{m} = 2 + 0,15 + \frac{3}{2} \cdot 0,3 = 2,6\%$$

δ) Μετρήσεις πιέσεων.

Αἱ μετρήσεις πιέσεων ἐπιτυγχάνονται κατὰ μῆκος τοῦ πυθμένου τοῦ στομίου τῆς ἀριστερᾶς κοίτης. Ἡ διάμετρος τῶν λήψεων ἐλήφθη 3 χιλ., τῶν δὲ σωλῆνων ἐλήφθη ἴση πρὸς 10 χιλ. οὕτως ὥστε νὰ γίνεται ἀμελητέον τὸ σφάλμα λόγῳ τριχοειδῶν φαινομένων. Τὰ σφάλματα εἶναι τριῶν εἰδῶν:

1) Σφάλμα ὑψομέτρου τοποθετήσεως τῆς λήψεως:

Τὸ σφάλμα αὐτὸ δύναται νὰ ἀνέλθῃ εἰς 2 χιλ. διὰ τὰς συνήθεις συνθήκας ἐγκαταστάσεως μιᾶς λήψεως πιέσεως ἐν Ἐργαστηρίῳ.

2) Σφάλμα ἀναγνώσεως εἰς τοὺς πιεζομετρικοὺς σωλῆνας:

Ὅταν ἡ στάθμη εἶναι σταθερά, τὸ σφάλμα ἀναγνώσεως δὲν ὑπερβαίνει τὸ 1 χιλ. Εἰς τὸ γενικὸν αὐτὸ σφάλμα, προστίθεται, δι' ὀρισμένους σωλῆνας ἐν σφάλμα λόγῳ διακυμάνσεων τῆς στάθμης τῶν. Αἱ διακυμάνσεις αὗται, τῶν ὁποίων τὸ εὔρος δύναται νὰ ἀνέλθῃ μέχρι 5 χιλ. ὀφείλονται εἰς τὸ στροβιλῶδες τῆς ροῆς καὶ τὴν ἀστάθειάν της, εἰς ὀρισμένας δοκιμὰς. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς μέσης τιμῆς τῶν ἀναγνώσεων καὶ τῆς

μέσης τιμής των πιέσεων, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ σφάλμα αὐτό, οὐχὶ μεγαλύτερον τῶν 3 χιλ. Τὸ ὅλικόν σφάλμα ἀναγνώσεως περιλαμβάνεται ἐπομένως μεταξὺ 1 χιλ. καὶ 4 χιλ.

3) Σφάλματα λόγω δυναμικῆς πίεσεως:

Θεωρητικῶς αἱ λήψεις πίεσεως ἔχουν ἄξονα κάθετον πρὸς τὴν ροήν, ἐπομένως ἡ δυναμικὴ πίεσις $V^2/2g$ μηδενίζεται. Ἐν τῇ πράξει ὅμως ἡ μὴ πλήρης καθετότης, ὡς καὶ ἡ δημιουργία στροβιλισμῶν παρὰ τὴν ὁπὴν, δημιουργοῦν συνισταμένην τῆς ταχύτητος κατὰ τὸν ἄξονα τῆς λήψεως. Προκύπτει οὕτω ἕν συστηματικὸν σφάλμα, ἐκτιμώμενον εἰς $1\% \cdot V^2/2g$. Διὰ τὴν μεγίστην παροχὴν ἡ ταχύτης ἐν ὁμοιώματι γίνεται 2,7 μ/δλ., ὁπότε $V^2/2g = 0,36 \mu$.

Τὸ συνολικὸν σφάλμα θὰ εἶναι ἐπομένως:

$$\sigma = 2 + 1 + 3 + 3,6 \approx 10 \text{ χιλ.}$$

12.3.-ΟΜΟΙΩΜΑ 1:40

α) Μετρήσεις παροχῶν τροφοδοτήσεως.

Τὸ ὁμοίωμα τροφοδοτεῖται ἐκ δύο ἐκχειλιστῶν τῶν 100 λιτ/δλ. καὶ 50 λιτ/δλ., εἰς τοὺς ὁποίους τὰ τυχαῖα ἢ συστηματικὰ σφάλματα, εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ τοῦ ἐκχειλιστοῦ τῶν 30 λιτ/δλ. Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως:

Ἀκρίβεια ἐκχειλιστοῦ 100 λιτ/δλ.:

Διὰ τὴν μεγίστην παροχὴν τῶν 80 λιτ/δλ., τὸ ὕψος τῆς ἐκχειλιζούσης φλεβὸς εἶναι 170 χιλ. ὁπότε προκύπτει:

$$\frac{\Delta h}{h} = 0,4/170 = 0,25\%$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{3}{2} \frac{\Delta h}{h} = 0,35\% \text{ (τυχαῖα σφάλματα)}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 0,2/170 + 1 = 1,1\% \text{ (συστηματικὰ σφάλματα).}$$

Τὸ συνολικὸν μέγιστον σχετικὸν σφάλμα ἐπὶ τοῦ ἐκχειλιστοῦ αὐτοῦ, τῶν 100 λιτ/δλ. θὰ εἶναι:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 1,50\%$$

Ἀκρίβεια ἐκχειλιστοῦ 50 λιτ/δλ.:

Δι' ἀναλόγου ὑπολογισμοῦ εὐρίσκομεν:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 1,60\%$$

β) Μετρήσεις στάθμης και φορτίσεων.

Στάθμη ύδατος ανάντι και κατάντι του φράγματος:

Ός και προηγουμένως θα έχουμε σφάλμα ενός έως δύο χιλ. ανάντι και τάξεως εκατοστού κατάντι, επομένως ή προσέγγισης της στάθμης πρὸς τὰ ανάντι θα είναι ἐν τῇ φύσει τῆς τάξεως τῶν 5 ἐκ.

γ) Σφάλμα ἐπὶ τοῦ συντελεστοῦ παροχῆς.

Τὸ μέγιστον σχετικὸν σφάλμα θα εἶναι:

$$\frac{\Delta m}{m} = 1,60 + 0,15 + \frac{3}{2} \cdot 0,2 = 2,1\%$$

δ) Μετρήσεις πιέσεων.

Με τὰς αὐτὰς ὥς και προηγουμένως παροδοχὰς θα ἔχουμεν συνολικὸν σφάλμα:

$$\sigma = 2 + 1 + 3 + 6,6 = 14 \text{ χιλ.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 13

ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ ΤΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΔΙΑ ΣΤΟΜΙΑ ΕΚΚΕΝΩΣΕΩΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ

Ο μόνος ακριβής τρόπος μελέτης της καλλιτέρας διατάξεως εισόδου εις στόμια εκκενώσεως πλημμύρας ή υδροληψίας, εις την περίπτωσιν σημαντικών υδραυλικών έργων, είναι ο εργαστηριακός, ήτοι ή μελέτη επί ομοιώματος.

Εις τὸ παρὸν κεφάλαιον ἐξετάζομεν τὸν τρόπον ἀντιμετωπίσεως ἐνὸς ἀναλόγου προβλήματος, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν γενικῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ Κεφ. 11, καὶ δίδομεν συνοπτικῶς τὰ ἀποτελέσματα τῶν πειραμάτων τὰ ὁποῖα διεξήχθησαν ὑφ' ἡμῶν εἰς τὰ Ἑργαστήρια Ὑδραυλικῆς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Τουλούζης.

13.1. ΒΑΣΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ

α) Αἱ δοκιμαὶ γίνονται μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν ροῆς με ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν, δηλαδὴ διὰ πληρὴς ἀνοιγμα τῶν θυροφραγμάτων. Πράγματι, εἰς τὴν περίπτωσιν ροῆς ὑπὸ πίεσιν, αἱ ταχύτητες εἰσόδου εἰς τὸ στόμιον ἐλαττοῦνται κατὰ πολὺ, με ἀντίστοιχον ἐξαφάνισιν τῶν φαινομένων ἀποκολλήσεως ἢ ἄλλων.

β) Ἡ μορφή τῆς εἰσόδου δεόν ὅπως ἐπιτρέπη μίαν ροὴν ἀδιατάρακτον εἰς τὴν περίπτωσιν λειτουργίας καὶ τῶν δύο στομίων ἢ μόνον τοῦ ἐνὸς ἐκ τῶν δύο.

γ) Ἡ ἀξία μιᾶς λύσεως, ἐκτιμᾶται ἐπὶ τῇ βάσει δύο κριτηρίων:

Τῆς τιμῆς τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ παροχῆς.

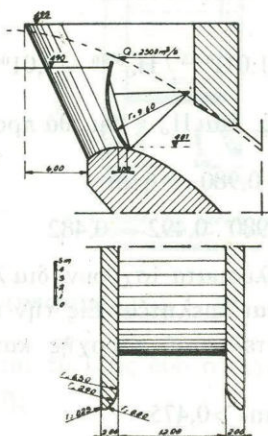
Τῆς ὁμαλότητος τῆς ἐπιφανείας ροῆς καὶ τῶν ὅσον τὸ δυνατόν ὀλιγοτέρων συστολῶν καὶ μικροστροβιλισμῶν παρὰ τὰ πλευρικά τοιχώματα τῆς εἰσόδου.

δ) Αἱ συνθῆκαι λειτουργίας εἶναι αἱ ἐξῆς:

Ὑπὸ φόρτισιν 9μ., ήτοι κανονικὴν στάθμην ὕδατος εἰς τὴν λίμνην τοῦ φράγματος, τὰ στόμια πρέπει νὰ ἀποχετεύουν τὴν κανονικὴν πλήμμυραν τῶν 1250 μ³/δλ., χωρὶς ὑποπιέσεις εἰς τὴν βάσιν των, με ὁμαλὴν ἐπιφάνειαν ροῆς καὶ χωρὶς τὴν παραμικρὰν ἐμφάνισιν τῶν φαινομένων δονήσεως.

Υπό την εξαιρετική φόρτισιν τών 14 μ., τὰ στόμια πρέπει νὰ ἀποχετεύουν τὴν ἐξαιρετικὴν πλημύραν τών 2500 μ³/δλ., χωρὶς κινδύνους διὰ τὴν εὐστάθειαν τοῦ ἔργου καὶ διὰ τὰς ὄχθας τῆς κοιλάδος κατάντι. Ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ τών 128 μ., μεταξὺ κανονικῆς στάθμης ἀνάντι καὶ στάθμης χαμηλῶν ὑδάτων κατάντι, καλύπτεται διὰ μὲν τὰ πρῶτα 83 μ. μετὰ τὸ στόμιον ἐκκενώσεως τῆς μορφῆς «Saut de ski», διὰ δὲ τὰ ὑπόλοιπα 45 μ., μετὰ τευξιν εἰς τὸν ἐλεύθερον ἀέρα.

ε) Τὰ χαρακτηριστικὰ στοιχεῖα τῆς εἰσόδου ἐνὸς στομίου δίδονται εἰς τὸ κατωτέρω σχ. 4.



ΣΧ. 4. ΑΡΧΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΜΙΩΝ

13.2.- ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΟΜΙΩΝ ΕΚΚΕΝΩΣΕΩΣ

Αἱ μετρήσεις τῶν Creager (Engineering for dams, T.H. σ. 367) καὶ Randolph (Transactions of the A.S.C.E., Ἀρ. 1938), ἐπὶ τῶν μηκοτομῶν ἐκχειλιστῶν, μετὰ ἐξισώσεις:

$$Y = 0,50 X^{1,85} \quad (13.2.α)$$

$$Y = 0,53 X^{1,80} \quad (13.2.β)$$

δίδουν διὰ τὸν συντελεστὴν παροχῆς:

$$m = \frac{Q}{1 \sqrt{2g} \cdot h^{3/2}} \quad (13.2.γ)$$

ἀποτελέσματα συμπίπτοντα, τὰ ὅποια ἐπιτρέπουν νὰ προσδιορίσωμεν, διὰ τὰς κάτωθι μηκοτομάς: (ἴδε ἐπόμενον κεφάλαιον):

$$Y = 0,50 X^{1,80} / H_o^{0,80} \quad (13.2.δ)$$

$$Y = 0,47 X^{1,80} / H_o^{0,80} \quad (13.2.ε)$$

τὴν τελικὴν σχέσιν:

$$m = m_0(h/H_0)^{0,17} \quad (13.2.ζ)$$

ἐνθα $0,49 < m_0 < 0,495$, ἀναλόγως τῆς μορφῆς τῆς ἀρχῆς τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων τοῦ ἐκχειλιστοῦ. Ἐν τῇ πράξει, διὰ τοιχώματα δεόντως χαραχθέντα, (ἐστρογγυλευμένα) καὶ διὰ $1/h < 0,33$, δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν:

$$m_0 = 0,492$$

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς σχέσεως (13.2.δ) καὶ τῆς:

$$Y = 0,50 X^{1,85} / H_0^{0,85} \quad (13.2.η)$$

(ἴδε ἐπόμενον κεφάλαιον), ὁδηγεῖ εἰς μίαν αὐξησιν τῆς φορτίσεως H_0 , κατὰ τὸν λόγον:

$$K_1 = \frac{H_1}{H_0} = (H_0 \cdot 1,01)^{0,85} / H_0^{0,85} = 1,01^{0,85} \cdot H_0^{0,05}$$

Εἰς τὴν περίπτωσίν μας, διὰ $H_0 = 9\mu$. θὰ προκύψει: $K_1 = 1,12$, ἐξ οὗ:

$$\frac{m_2}{m_1} = (1/K_1)^{0,17} = 0,980 \quad \text{ἥτοι}$$

$$m_2 = 0,980 \cdot 0,492 = 0,482$$

Τὰ προηγούμενα ἀποτελέσματα ἰσχύουν διὰ λόγον $1/h > 3$ οὕτως ὥστε ἡ πλευρική συστολὴ νὰ εἶναι ἀμελητέα. Εἰς τὴν περίπτωσίν μας ($l = 12\mu$), θὰ ἐπέλθῃ μείωσις τοῦ συντελεστοῦ παροχῆς κατὰ 0,5 ἕως 1,5%, ἥτοι θὰ ἔχωμεν:

$$0,480 > m_0 > 0,475$$

Διὰ τὴν κανονικὴν πλημμύραν τῶν $1250 \mu^3/\delta\lambda.$, ἡ σχέσις (13.2.δ) δίδει:

$$\text{Διὰ } m_0 = 0,475 \rightarrow h = 8,49\mu.$$

$$\text{Διὰ } m_0 = 0,480 \rightarrow h = 8,43\mu.$$

Δυνάμεθα ἐπομένως νὰ περιορίσωμεν τὸ πλάτος τῶν στομιῶν εἰς 11μ , ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$\text{Διὰ } m_0 = 0,475 \rightarrow h = 9,00\mu.$$

$$\text{Διὰ } m_0 = 0,480 \rightarrow h = 8,94\mu.$$

Διὰ τὴν ἐξαιρετικὴν πλήμμυρα τῶν $2500 \mu^3/\delta\lambda.$, ἐπαληθεύομεν εὐκόλως (σχέσις, 13.2.γ), ὅτι:

$$m = m_0(14/9)^{0,17} = 1,07m_0$$

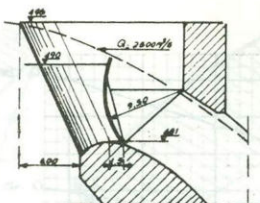
ἥτοι μετὰ τὴν στάθμην 495μ , ἔχωμεν:

$$\text{Διὰ } m = 0,508 \quad Q/2 = 1212,5 \quad \text{ἢ } Q = 2425\mu^3/\delta\lambda.$$

$$\text{Διὰ } m = 0,513 \quad Q/2 = 1225 \quad \text{ἢ } Q = 2450\mu^3/\delta\lambda.$$

Ἐπομένως μετὰ ἐλαχίστην ὑπέρβασιν στάθμης ἡ παροχὴ διοχετεύεται

ἀσφαλῶς. Τὸ σχ. 5 δίδει τὴν νέαν μορφήν τῆς εἰσόδου τῶν στομιῶν, μετὰ τὴν πρώτην τροποποίησιν των.



2 x 5 ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΤΩΝ
ΣΤΟΜΙΩΝ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗΝ
ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΙΝ

13.3.-ΔΟΚΙΜΑΙ ΕΠΙ ΤΟΥ ΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ 1 : 100

Ἐπ' αὐτοῦ μελετῶνται τὰ ἐξῆς δύο στοιχεῖα:

Συντελεστὴς παροχῆς

Μορφή τῆς ροῆς

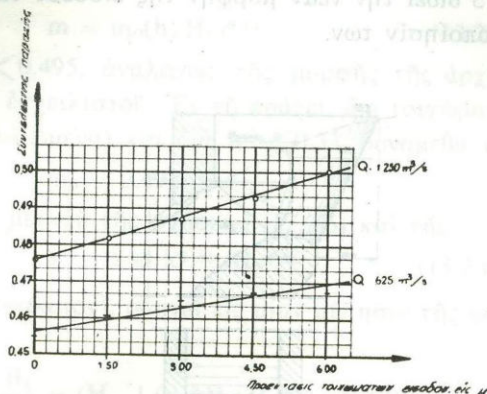
Εὐρέθη ὁ συντελεστὴς παροχῆς καὶ διὰ τὰ δύο πλάτη στομιῶν, ἥτοι ἀρχικὸν καὶ τροποποιηθέν:

$$\text{Πλάτος } 12\mu.: m = \frac{Q}{1\sqrt{2g \cdot h^{3/2}}} = 0,435$$

$$\text{Πλάτος } 11\mu.: m = \frac{Q}{1\sqrt{2g \cdot h^{3/2}}} = 0,475$$

Ἦτοι ἔχομεν αὐξησιν συντελεστοῦ διὰ τὴν διάταξιν τοῦ σχ. 5 λόγῳ καλλιτέρας μορφῆς τῆς ἀρχῆς τῶν στομιῶν (Forme profilée).

Δεδομένου ὅτι ἡ ἐν προβόλῳ προέκτασις τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων εἰσόδου αὐξάνει τὸν συντελεστὴν παροχῆς, ἐξετάζομεν ἐν συνεχείᾳ πειραματικῶς τὴν ἐπίδρασιν τῆς προεκτάσεως αὐτῆς ἐπὶ τοῦ συντελεστοῦ m. Ἐγιναν μετρήσεις διὰ δύο τιμὰς παροχῆς καὶ τὰ ἀποτελέσματα δίδονται εἰς τὸ ἀκόλουθον διάγραμμα, σχ. 6:



Σχ 6. ΟΜΟΙΩΜΑ 1:100 ΣΠΙΡΑΛΙΣ ΤΗΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΩΣ ΤΗΣ ΤΟΙΧΩΜΑΤΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ ΕΠΙ ΤΟΥ ΕΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΠΑΡΟΧΗΣ

Εκ του διαγράμματος φαίνεται σαφώς ἡ ἐπὶ τῆς αὐξήσεως τῆς παροχῆς εὐμενῆς ἐπίδρασις τῆς προεκτάσεως τῶν τοιχωμάτων εισόδου. Πάντως ἡ αὐξήσις αὕτη τοῦ m δὲν ὑπερβαίνει τὸ 4%, καὶ ὥς ἐκ τούτου πρέπει νὰ ἐξετασθοῦν αἱ προκύπτουσαι ἀλλαγαὶ εἰς τὴν μορφήν τῆς ροῆς.

Ἐξετελέσθη πρὸς τοῦτο μία πρώτη σειρά πειραμάτων μετὰ τὴν ἀρχικὴν διάταξιν, (ἄνοιγμα 12μ.), τὰ ἀποτελέσματα τῆς ὁποίας δίδονται εἰς τὰ σχήματα 7, 8 καὶ 9.

Δι' ἀπλῆς συγκρίσεως προκύπτει ἡ ὑπεροχὴ τῆς λύσεως τοῦ σχήματος 9, μετὰ προέκτασιν τῶν τοιχωμάτων εισόδου κατὰ 6μ.

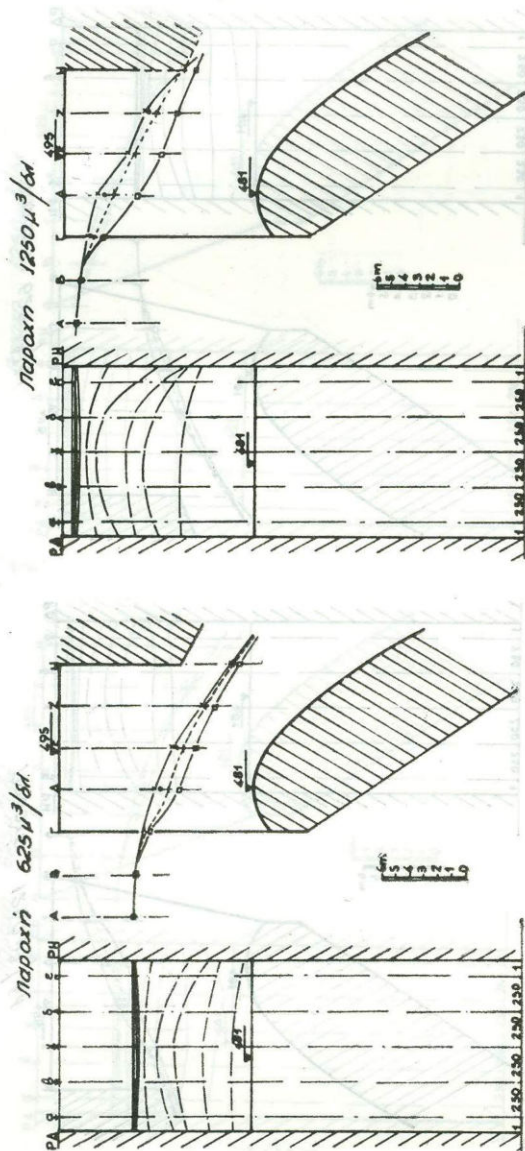
Ἐν συνεχείᾳ ἐξετελέσθη μία δευτέρα σειρά πειραμάτων, μετὰ τὴν διάταξιν τῆς πρώτης τροποποιήσεως τοῦ σχ. 5 καὶ προέκτασιν τῶν τοιχωμάτων εισόδου κατὰ 6μ. Τὰ ἀποτελέσματα τῆς σειρᾶς αὐτῆς δίδονται εἰς τὸ σχ. 10, εἶναι δὲ ἐμφανῆς ἡ ὑπεροχὴ τῆς λύσεως αὐτῆς ἔναντι τῆς καλλιτέρας λύσεως τῆς προηγουμένης σειρᾶς πειραμάτων.

Πράγματι, μετὰ μικρότερον πλάτος εισόδου, (11μ.), ἐπιτυγχάνεται πολὺ καλλιτέρα διανομὴ τῆς ροῆς κατὰ πλάτος καὶ κατὰ μῆκος, μετὰ ἀντίστοιχον βελτίωσιν τοῦ συντελεστοῦ παροχῆς.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν κατεσκευάσθη τὸ κυρίως ὁμοίωμα τοῦ ὅλου ἔργου, ὑπὸ κλίμακα 1:75.

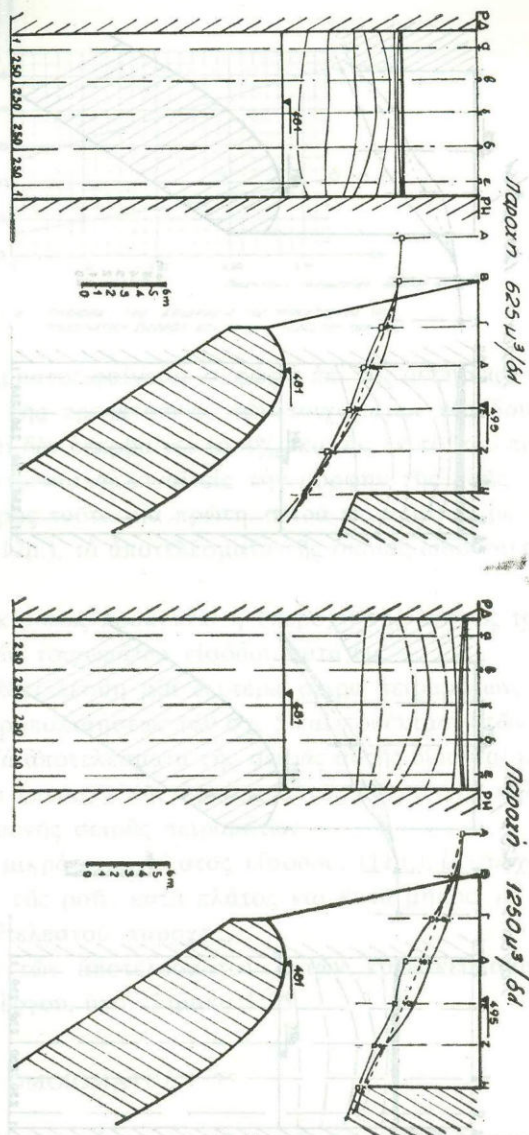
13.4. ΔΟΚΙΜΑΙ ΕΠΙ ΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ 1:75

Ἐπ' αὐτοῦ μελετᾶται ἡ μορφή τῆς ροῆς διὰ τὴν περίπτωσιν ἀσυμμετρίας, ἥτοι εἰς τὴν περίπτωσιν ροῆς δι' ἑνὸς ἐκ τῶν δύο στομιῶν ἐκχειλίσεως. Διετηρήθησαν τὰ στοιχεῖα κατασκευῆς τοῦ σχ. 5 καὶ ἐξετελέσθησαν συγκριτικὰ πειράματα μετὰ ἀλλαγᾶς εἰς τὸ ἐν κατόψει σχῆμα τῆς κεφαλῆς

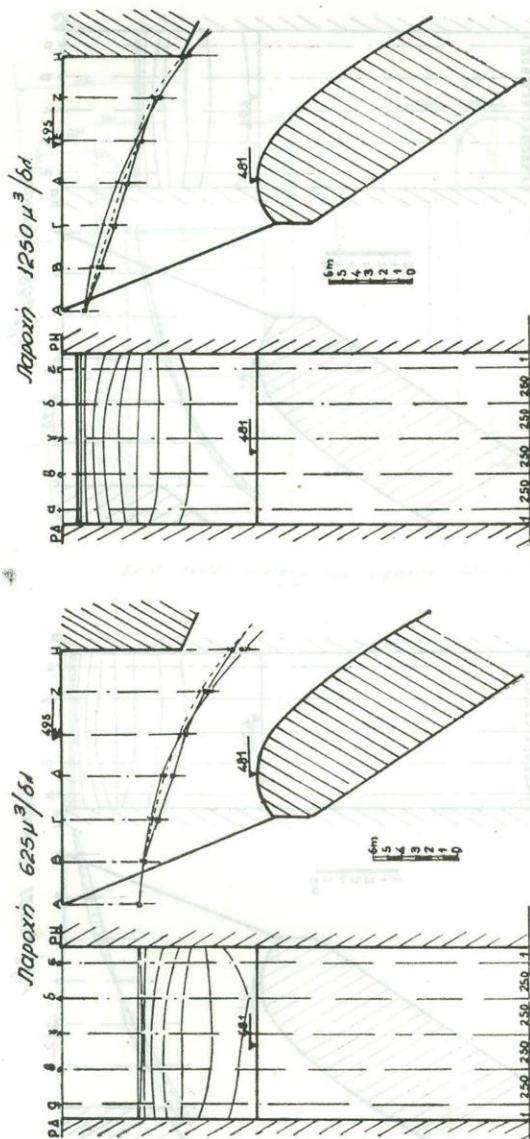


Эк. 7: ЕДИНАНА ПОЛИ ДИЯ ТУН АРХИКУН ДИТАТИН АНЕЙ ПАРЕНТАТОС

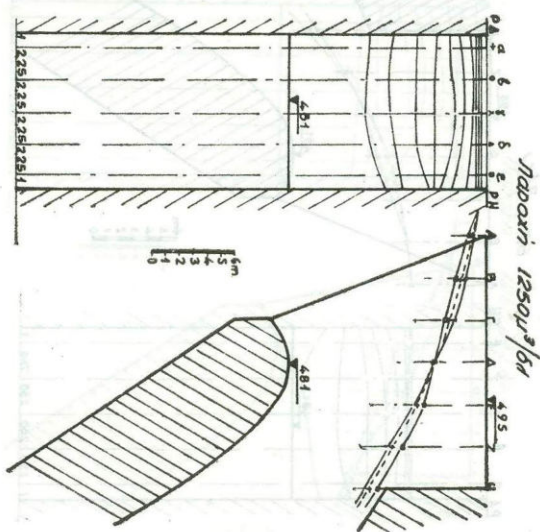
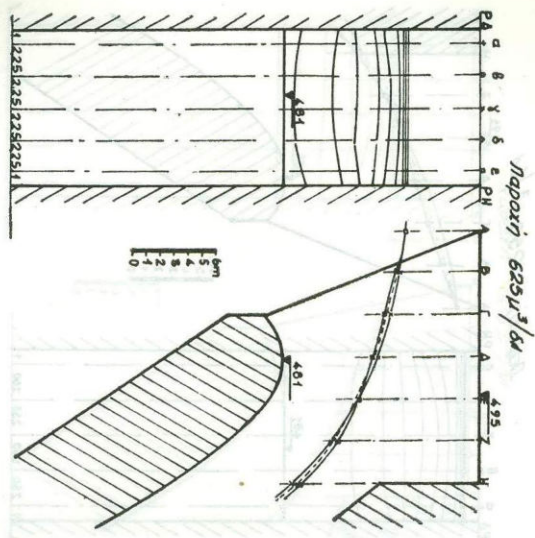
Σχ 8: ΕΠΙΘΑΝΕΙΑ ΡΟΛΕ ΔΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ Κ' ΠΡΟΕΥΤΕΛΕΙΝ 3μ.



των στεγνών βασιμνιν καλλών δοκιμών, με κριτήριο των διαφωγών αποκολλησας και παραβλησμών καρά την εισοδον, κατεστρεψαν εις την οριστικήν μετρήσιν, σελ. 11, διά την οποίαν δίδονται και τή κατ'εξοχήν κατασκευαστικήν σελήνην.

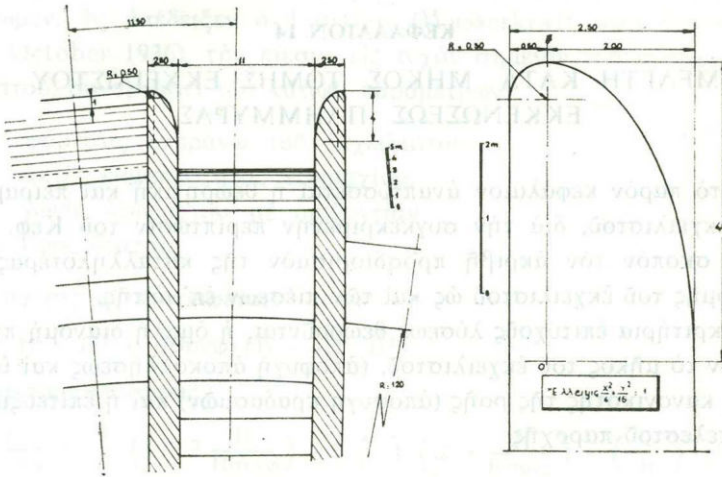


Σχ 6: ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΡΟΗΣ ΔΙΑ ΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗΝ ΔΙΑΤΑΞΙΝ Κ' ΠΡΟΕΚΤΑΣΙΝ 6μ.



Л. 10 : ЕДИНІЦЕНА РОБІ ДІЯ ТИХ ТРОПОНОВИНИХ ДІАГРАМ Л. 5. ґ. ПОВЕРТАТИ 64.

τῶν στομιῶν. Κατόπιν πολλῶν δοκιμῶν, με κριτήριον τὴν ἀποφυγὴν ἀποκολλήσεως καὶ στροβιλισμῶν παρὰ τὴν εἴσοδον, κατελήξαμεν εἰς τὴν ὀριστικὴν μορφήν τοῦ σχ. 11, διὰ τὴν ὁποίαν δίδονται καὶ τὰ τελικὰ κατασκευαστικὰ στοιχεῖα.



Σχ. 11: ΤΕΛΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 14

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΜΗΣ ΕΚΧΕΙΛΙΣΤΟΥ ΕΚΚΕΝΩΣΕΩΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον ἀναπτύσσεται ἡ θεωρητικὴ καὶ πειραματικὴ μελέτη ἐκχειλιστοῦ, διὰ τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν τοῦ Κεφ. 11, μὲ βασικὸν σκοπὸν τὸν ἀκριβῆ προσδιορισμὸν τῆς καταλληλοτέρας κατὰ μῆκος τομῆς τοῦ ἐκχειλιστοῦ ὡς καὶ τῶν πιέσεων ἐπ' αὐτῆς.

Ὡς κριτήρια ἐπιτυχοῦς λύσεως θεωροῦνται, ἡ ὁμαλὴ διανομὴ πιέσεως καθ' ὅλον τὸ μῆκος τοῦ ἐκχειλιστοῦ, (ἀποφυγὴ ἀποκολλήσεως καὶ ὑποπίεσεων), ἡ κανονικότης τῆς ροῆς (ἀποφυγὴ κραδασμῶν) καὶ ἡ ἐπίτευξις ὑψηλοῦ συντελεστοῦ παροχῆς.

14.1.- ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΜΗΣ

Ἐξετάζομεν λεπτομερέστερον τὰς σχέσεις (13.2.δ) (13.2.ε) καὶ (13.2.η), ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πειραματικῶν στοιχείων τὰ ὁποῖα δίδουν οἱ κ.κ. Scimemi καὶ Randolph.

$$\alpha) Y = 0,5 X^{1,80} / H_o^{0,80}$$

Ὁ ἐκχειλιστὴς τῆς μορφῆς αὐτῆς, ὅταν λειτουργῇ ὑπὸ φορτίον H_o δίδει μηδενικὴν πίεσιν ἐπὶ ὅλης τῆς μηκοτομῆς τοῦ ἐξωραχίου του.

$$\beta) Y = 0,47 X^{1,80} / H_o^{0,80}$$

Ὁ ἐκχειλιστὴς αὐτός, ὀλιγώτερον ἀπότομος τοῦ προηγουμένου, δίδει μίαν ἐπὶ πλέον ἀσφάλειαν ἀπὸ ὑποπίεσεις, ἴσην μὲ 6% ὡς πρὸς τὰς συντεταγμένας τῆς κατασκευῆς του, καὶ ἴσην μὲ 8% ὡς πρὸς τὴν προβλεπομένην φόρτισιν.

$$\gamma) Y = 0,50 X^{1,85} / H_o^{0,85}$$

Ὁ ἐκχειλιστὴς αὐτὸς δίδει μίαν ἐλαφρὰν αὐξησιν τοῦ συντελεστοῦ παροχῆς (1%) καὶ μίαν οἰκονομίαν κατασκευῆς λόγῳ τοῦ ὅτι εἶναι περισσότερον ἀπότομος. Διὰ τοῦτο θὰ τὸν προτιμήσωμεν παρ' ὅλον ὅτι ὑπάρχει κίνδυνος ὑποπίεσεων κατὰ τὴν λειτουργίαν. Θὰ ὑπολογίσωμεν δὲ τὰς ὑποπίε-

σεις αὐτάς, ὑποθέτοντες ὅτι κατάντι τῶν θυροφραγμάτων ἔχομεν ροὴν δυναμικοῦ τῶν ταχυτήτων, δηλαδή ἀστρόβιλον καὶ ἄνευ ἀπωλειῶν. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη, σημειωτέον, εἶναι ἐν πολλοῖς ἀκριβής.

Δεδομένου ὅτι τὸ πάχος τῆς ἐκχειλιζούσης φλεβός, εἶναι σχετικῶς μικρὸν ἐν σχέσει μὲ τὴν ἀκτίνα καμπυλότητος τοῦ ἐξωραχίου, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν, ὡς ἀπέδειξεν ὁ Lauffer, (Wasserkraft und Wasserwirtschaft, October 1936), τὴν πίεσιν εἰς τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐξωραχίου τοῦ ἐκχειλιστοῦ, συναρτήσῃ τῶν κάτωθι παραμέτρων:

H = φόρτισις ὑπεράνω τοῦ ἐκχειλιστοῦ.

R = ἀκτίς καμπυλότητος ἐξωραχίου.

φ = γωνία ἐξωραχίου μὲ ὀριζοντίαν

d = ὕψος ὕδατος.

Ἡ σχέσις αὕτη γράφεται:

$$p = H - (H - d \sin \varphi) (R - d)^2 / R^2$$

καὶ μετὰ τροποποιήσεις:

$$\frac{p}{R \sin \varphi} = \frac{d}{R} \left(1 + 2 \frac{H}{R \sin \varphi} \right) - \left(\frac{d}{R} \right)^2 \left(2 + \frac{H}{R \sin \varphi} \right) + \left(\frac{d}{R} \right)^3 \quad (14.1.α)$$

Εἰσάγοντες τοὺς ἀδιαστάτους παράγοντας:

$$\frac{d}{R} = X, \quad \frac{p}{R \sin \varphi} = Y, \quad \frac{H}{R \sin \varphi} = \lambda \quad \text{προκύπτει:}$$

$$Y = X(1 + 2\lambda) - X^2(2 + \lambda) + X^3 \quad (14.1.β)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου $R < 0$, ἡ μελέτη τῆς συναρτήσεως (14.1.β) δεικνύει ὅτι:

Ἐὰν $\lambda > -1/2$ οὐδεμία ὑποπίεσις ἐμφανίζεται ἐπὶ τοῦ ἐξωραχίου, τῆς πίεσεως αὐξανομένης συνεχῶς μὲ τὴν στάθμην τοῦ ὕδατος.

Ἐὰν $\lambda < -1/2$, ὑφίσταται ὑποπίεσις διὰ τὰ μικρὰ ὕψη ὕδατος, ἥτις διέρχεται δι' ἐνὸς μεγίστου, προσδιοριζομένου ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$X_m = (1 + 2\lambda)/3$$

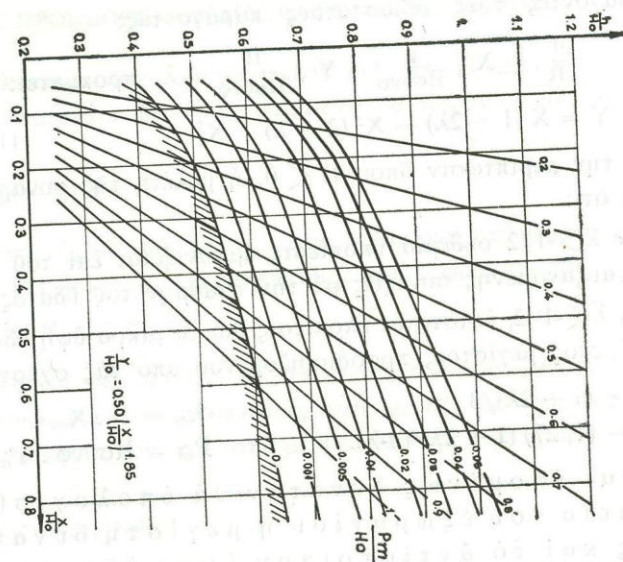
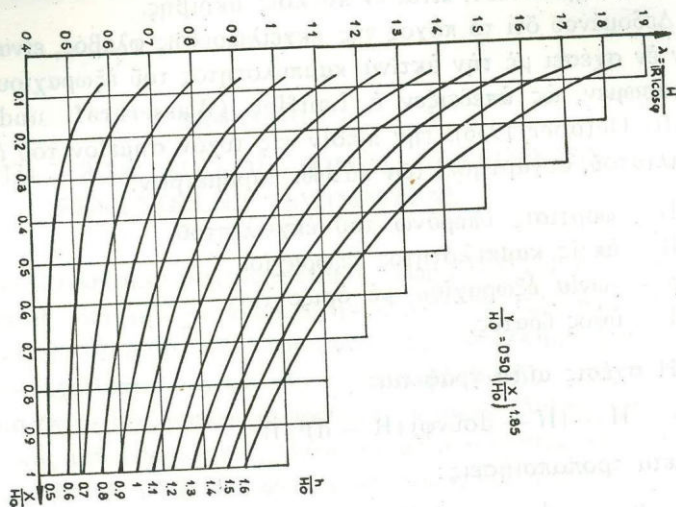
$$\lambda_m = R \cdot X_m$$

$$Y_m = (1/27)(1 + 2\lambda)^2(4 - \lambda),$$

$$P_m = R \sin \varphi \cdot Y_m$$

Εἶναι ἐπομένως δυνατόν νὰ ὑπολογισθῇ, δι' ὅλα τὰ σημεία τοῦ ἐξωραχίου ἡ μεγίστη δυνατὴ ὑποπίεσις, ὡς καὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος ὕδατος.

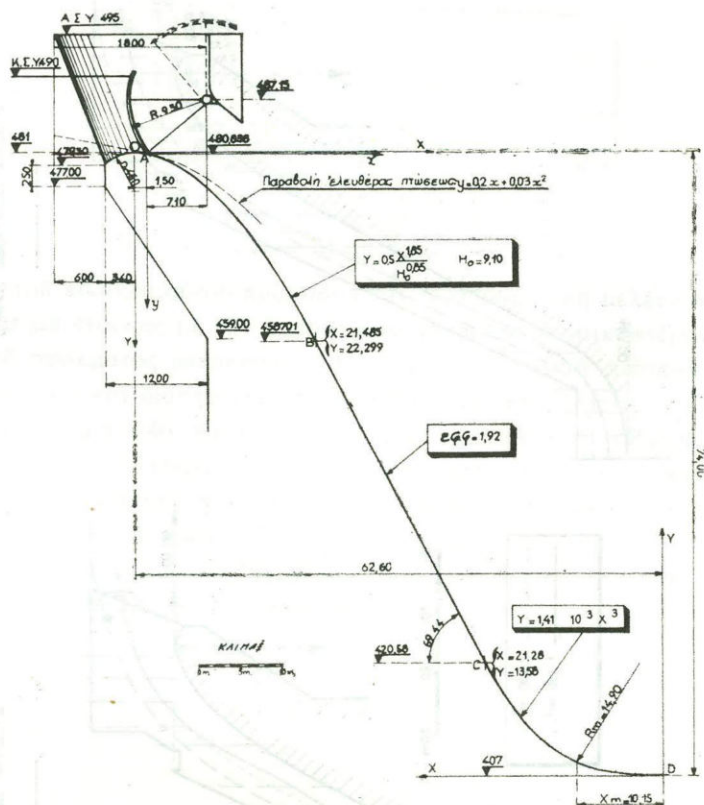
Ὁ ὑπολογισμὸς αὐτὸς ἐγίνε διὰ προγράμματος εἰσαχθέντος εἰς τὸν ἠλεκτρονικὸν ὑπολογιστὴν I.B.M. 1620 τῆς Sud-Aviation Τουλούζης καὶ ἔδωσε τὰ διαγράμματα τοῦ σχ. 12.



Εκ. 12: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΥΠΟΒΕΒΑΣΕΩΝ ΕΛΕ ΕΞΟΡΑΧΙΩΝ ΣΤΟΙΧΙΩΝ ΕΚΚΕΝΩΣΕΩΣ

14.2.- ΤΕΛΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΜΗΣ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΕΠΙ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑπολογισμῶν τῆς προηγουμένης παραγράφου ἐχαράχθη καὶ κατεσκευάσθη ἐν ὁμοιώματι ἢ κατὰ μῆκος τομὴ τοῦ σχ. 13. Ἐπηκολούθησε δὲ ἡ πειραματικὴ μελέτη.

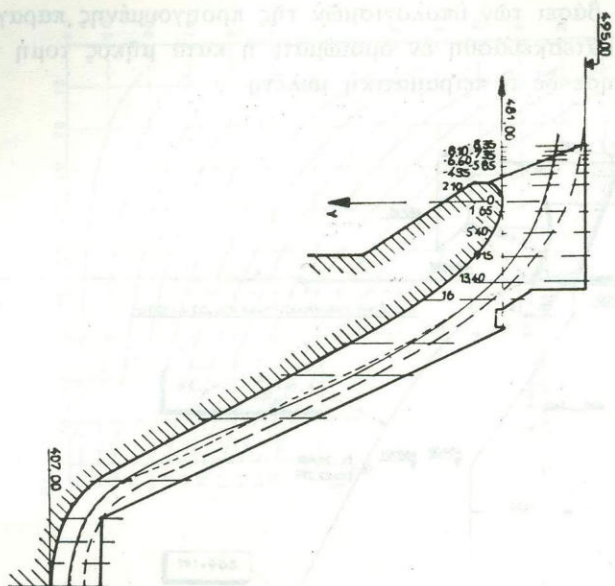


Σχ. 13: ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΜΗ ΕΞΟΡΑΧΙΟΥ ΕΚΚΕΝΩΤΟΥ.

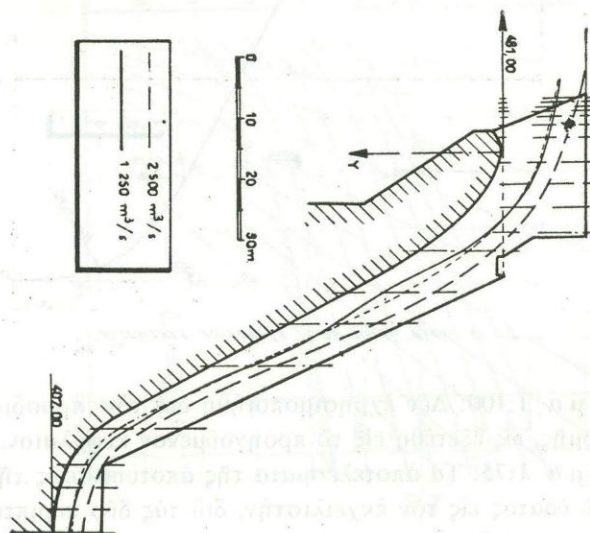
Ὁ μ ο ί ω μ α 1:100: Δέν ἐχρησιμοποιοῖθῃ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς κατὰ μῆκος τομῆς, ὡς ἐξετέθῃ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον.

Ὁμοίωμα 1:75: Τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀποτυπώσεως τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος εἰς τὸν ἐκχειλιστὴν, διὰ τὰς δύο περιπτώσεις πλημμύρας, (συνήθους καὶ ἐξαιρετικῆς) καὶ διὰ ἀμφότερα τὰ στόμια ἐκκενώσεως, δίδονται εἰς τὸ σχ. 14. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ διανομαὶ ὕδατος εἶναι κανονικαί, ἡ δὲ ἀποχέτευσις τῶν πλημμυρῶν γίνεται μὲ σχετικῶς χαμηλὴν στάθ-

ΕΓΧΩΡΙΟ ΔΡΑΣΤΕΡΑΣ ΔΕΧΘΗ



ΕΓΧΩΡΙΟ ΔΕΣΙΔΕ ΔΕΧΘΗ



ΕΥ 14 : ΠΕΡΙΡΑΦΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΤΑ ΜΙΚΡΟ ΤΟΜΗ ΕΓΧΩΡΙΩΝ ΕΚΚΕΝΩΣΕΩΣ ΠΛΗΜΜΗΤΩΣ.

μην ύδατος, ήτοι ό συντελεστής παροχής παραμένει ύψηλός. Ός πρός τήν διανομήν τών πιέσεων αύτη δίδεται είς τόν κάτωθι πίνακα:

ΠΙΕΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΑΞΟΝΟΣ ΤΟΥ ΕΝΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΝΚΛΙΣΜΕΝΟΥ
επ. το/μ² (άνορθο: 0,75 μ/μ²)

Ύψος	Ύψος στήλης έναντι αξόνα	Ύψος είσοδου												
Παύσιον	482 00	490 00	5 20	0 70	-0 50	0 80	0 80	-0 80	0	4 00	4 40	5 00	0	0
	484 50	490 00	2 60	0 50	0 80	0 80	0 80	-0 80	0	5 00	7 80	12 00	0	0
	486 00	490 00	1 40	0 70	0 80	-0 80	0 80	-0 80	1 00	4 80	13 80	20 60	0	0
Παύσιον	491 50	490 80	1 40	0 70	-0 60	-0 80	-0 80	-0 80	1 00	4 80	13 80	20 60	0	0
	495 00	495 00	2 80	3 20	1 00	1 10	0 80	0 80	2 10	11 00	27 60	37 60	0	0

Έκ του πίνακος αυτού προκύπτει ότι ή πειραματική μελέτη δίδει ύπο-πίεσεις συμπιπτούσας με τήν θεωρητικήν, με διαφοράν μικροτέραν του παραδεκτού σφάλματος μετρήσεων. Έπομένως ή διανομή πιέσεων κρίνεται ίκανοποιητική και διατηρείται ή προταθείσα μορφή τής κατά μήκος τομής.

Ό μ ο ί ω μ α 1:40: Κύριος σκοπός του όμοιώματος αυτού είναι ό προσδιορισμός τής καλλιτέρας διατάξεως διασποράς των ύδάτων κατάντι του φράγματος. Αί τροποποιήσεις τās όποιās επιφέρει τó όμοίωμα αυτό είς τήν τελικήν διάταξιν τής κατά μήκος τομής, επηρεάζουν μόνον τó τελευταίον τμήμα αυτής, αί δέ μορφαι επιφανείας ροής και διανομαι πιέσεων παραμένουν αί αύται με τās του όμοιώματος 1:75.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 15

ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΤΩΝ ΥΔΑΤΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΣΚΑΦΩΝ ΕΙΣ ΤΑ ΚΑΤΑΝΤΙ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ

15.1.- ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

Μία ἐκ τῶν κομψωτέρων καὶ πλέον οἰκονομικῶν λύσεων διὰ τὴν ἀσφαλῆ διοχέτευσιν τῆς παροχῆς πλημμυρῶν εἰς τὰ κατάντι φράγματος, εἶναι ἡ ἐκτόξευσις τοῦ ὕδατος διὰ καταλλήλου διαμορφώσεως τοῦ τελευταίου τμήματος τοῦ ἐκχειλιστοῦ, ὀνομαζομένου «Saut de ski».

Ἡ μορφή αὕτη ἐφηρμόσθη μὲ ἐπιτυχίαν εἰς πλείστα ἔργα, μελετᾶται δὲ πάντοτε ἐπὶ προτύπου. Ἐν χαρακτηριστικὸν παράδειγμα ἀποτελεῖ τὸ φράγμα Karadji εἰς Ἰράν, μελετηθὲν ὑπὸ τοῦ Ἐργαστηρίου Ὑδραυλικῆς τῆς Τουλούζης καὶ τὴν λειτουργίαν τοῦ ὁποίου ἐδίδαξεν ὁ γράφων κατὰ τὰς τριώρους ἀσκήσεις Ὑδραυλικῆς, εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς Σχολῆς Μηχανικῶν Τουλούζης.

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον ἐξετάζεται μία γενικευμένη λύσις ἀναλόγου θέματος, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν στοιχείων τοῦ Κεφ. 11.

Ἡ μορφή τοῦ ἐκχειλιστοῦ ἐν τῇ συνόλῳ τῆς, προσδιορίζεται ἀπὸ ἄλλα κριτήρια, ὥς αἱ ὑποπώσεις, ὁ συντελεστὴς παροχῆς καὶ ἡ ὁμαλὴ μορφή τῆς ροῆς. Σκοπὸς ἐπομένως τῆς μελέτης τοῦ παρόντος Κεφαλαίου, εἶναι ἡ κατάλληλος διαμόρφωσις τοῦ τελευταίου τμήματος τοῦ ἐκχειλιστοῦ, οὕτως ὥστε:

α) Διὰ τὴν κανονικὴν πλήμμυραν, ($1250 \text{ m}^3/\delta\lambda.$), ὁ ὑδάτινος πίδαξ δὲν πρέπει κατ' οὐδέναν τρόπον νὰ ἐγγίξῃ τὰς ὄχθας τῆς κατάντι κοιλάδος, ἀλλὰ νὰ πίπτῃ εἰς χάνδακα ἐκσκαφῶν, ἐντὸς τῶν προσχώσεων τοῦ ποταμοῦ.

β) Ἡ διάταξις διασπορᾶς τῶν ὑδάτων πρέπει νὰ δίδῃ τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν καταστροφὴν ἐνεργείας διὰ στροβιλώδους ἀναμίξεως τοῦ ὕδατος μὲ ἀέρα καὶ νὰ πίπτῃ εἰς ἱκανὸν μῆκος εἰς τὴν κατάντι κοιλάδα.

γ) Διὰ τὴν ἐξαιρετικὴν πλήμμυραν ($2500 \text{ m}^3/\delta\lambda.$), δέον ὅπως τηρηθοῦν αἱ αὐταὶ γενικαὶ συνθήκαι μὲ τὴν παράγραφον (α). Ἡ κατὰ μῆκος τομὴ δέον νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ ἀποφεύγεται πᾶσα ἀποκόλλησις τῆς φλεβὸς ἥτις θὰ εἶχε σοβαρωτάτας συνεπείας εἰς τὴν ἐν συνεχείᾳ πτώσιν τοῦ ὕδατος.

15.2.-ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

Ἡ ἀρχικὴ μορφή τῆς διατάξεως διασποράς, ἐλήφθη ἐπὶ τῇ βάσει ὑπαρχόντων ἤδη ἀναλόγων ἔργων. Ἀναφέρομεν τρία ἐξ αὐτῶν, τὸ φράγμα τοῦ «Chastang», τὸ φράγμα τοῦ «Aigle» καὶ τὸ φράγμα «Karadjji».

Αἱ δοκιμαὶ ἐπὶ προτύπου χωρίζονται εἰς τρεῖς σειράς, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν κυρίων χαρακτηριστικῶν τοῦ ἔργου:

Πρώτη σειρά δοκιμῶν: Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐγκριθείσης τελικῆς μηχανομῆς τοῦ ἐκχειλιστοῦ, σχ. 13, ἀναζητεῖται ἡ προσθήκη καταλλήλου ἄκρου, θετικῆς καμπυλότητος, οὕτως ὥστε ὁ ὑδάτινος πίδαξ νὰ πίπτῃ ὅσον τὸ δυνατόν μακρύτερον εἰς τὴν κατάντι κοιλάδα.

Δευτέρα σειρά δοκιμῶν: Σκοπὸς τῆς σειρᾶς αὐτῆς εἶναι ἡ, διὰ τῆς ἐπιρροῆς τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων, ἐπίτευξις τῆς μεγαλυτέρας δυνατῆς ἐπιμηκύνσεως εἰς τὴν ζώνην ἐπαφῆς μεταξὺ πίδακος καὶ κοίτης ποταμοῦ.

Τρίτη σειρά δοκιμῶν: Ἐμελετήθη ἡ ἐπιρροή τῆς μορφῆς τοῦ ἄκρου εἰς τὴν καλλίτεραν κατανομήν τῆς ζώνης ἐπαφῆς πίδακος καὶ κοίτης ποταμοῦ. Ἀνεζητήθη δὲ ὁ καλλίτερος συνδυασμὸς πλευρικῶν τοιχωμάτων καὶ καμπυλότητος τοῦ ἄκρου τοῦ ἐκχειλιστοῦ.

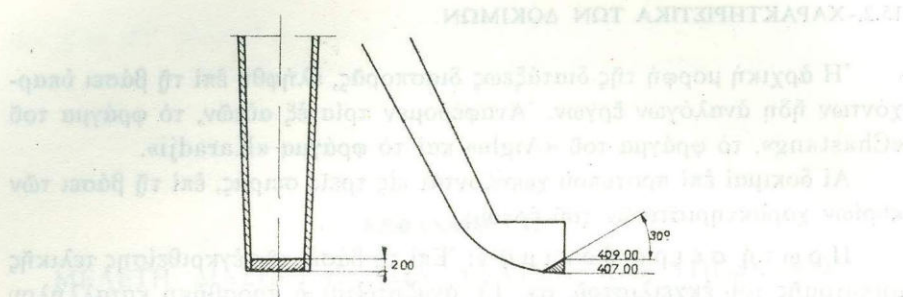
15.3.-ΠΡΩΤΗ ΣΕΙΡΑ ΔΟΚΙΜΩΝ.-ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΝ ΑΚΡΟΝ

Ἐφηρμόσθησαν κατὰ σειρὰν αἱ ἐξῆς λύσεις:

α) Κατὰ μῆκος τομῆ, σχ. 13, μὲ κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα, ὀριζοντίαν ἐφαπτομένην εἰς τὸ ἄκρον καὶ ἐξίσωσιν: $Y = 1,41 \cdot 10^{-3} X^3$.

Αἱ δοκιμαὶ ἔγιναν διὰ τρεῖς παροχάς, $625 \mu^3/\delta\lambda.$, $1250 \mu^3/\delta\lambda.$, $2500 \mu^3/\delta\lambda.$ καὶ ἔδειξαν γενικῶς ὅτι ὁ πίδαξ εἶναι πολὺ συμπαγής, ἡ δὲ ζώνη ἐπαφῆς του μὲ τὴν κοίτην, πολὺ μικροῦ πλάτους. Ἀποτέλεσμα αὐτῶν εἶναι ἡ καταστροφή μικροῦ μόνον μέρους τῆς ἐνεργείας τοῦ πίδακος εἰς τὸν ἀέρα καὶ ἡ συγκέντρωσις τῶν ὑποσκαφῶν εἰς περιορισμένον χῶρον τῆς κοίτης μὲ μεγάλον βάθος ἐκσκαφῆς καὶ σοβαρὰν διατάραξιν τῆς ὅλης ἰσορροπίας τῆς κοίτης. Ἐπίσης παρετηρήθη ὅτι, τὸ σκάμμα μετατίθεται πρὸς τὰ κατάντι καὶ πρὸς τὸ φράγμα, μὲ τὴν αὔξησιν τῆς παροχῆς πλημμυρῶν.

β) Κατὰ μῆκος τομῆ, σχ. 13, μὲ τὴν τροποποίησιν τοῦ σχ. 15, ἥτοι εὐθύγραμμον ἄκρον μὲ κλίσιν 30° μὲ τὴν ὀριζοντίαν:

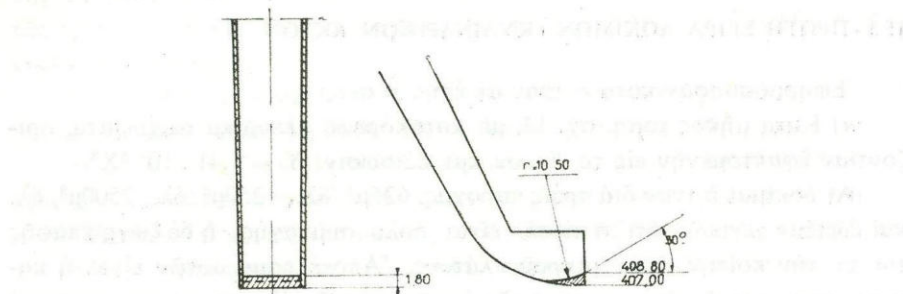


Σχ 15 ΠΡΩΤΗ ΣΕΙΡΑ ΔΟΚΙΜΩΝ - ΕΙΣΟΔΗΤΙΚΟΝ ΑΚΡΟΝ

Ἡ βελτίωσις τῆς μορφῆς τοῦ πίδακος εἶναι πολὺ μικρά, διότι παραμένει συγκεντρωμένος. Αὐξάνεται μόνον ἐλαφρῶς (15%) τὸ μήκος ἐπαφῆς του μετὰ τὴν κοίτην.

γ) Κατὰ μήκος τομὴ, σχ. 13, μετὰ τὴν τροποποίησιν τοῦ σχ. 16, ἤτοι κυλινδρικοῦ ἄκρου ἀκτίνος 10,50 μ. καὶ γωνίας ἐξόδου 30°.

Αἱ δοκιμαὶ δεικνύουν σημαντικὴν βελτίωσιν τῆς μορφῆς τοῦ πίδακος, τὸ ἀποτέλεσμα δὲ φαίνεται εἰς τὸ μήκος ἐπαφῆς του μετὰ τὴν κοίτην (αὐξήσις κατὰ 30%) καὶ εἰς τὴν μείωσιν τῶν ὑποσκαφῶν αὐτῆς κατὰ 40%.



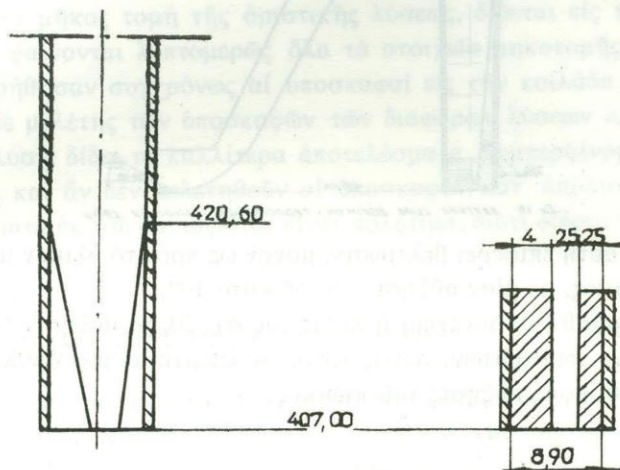
Σχ 16 ΠΡΩΤΗ ΣΕΙΡΑ ΔΟΚΙΜΩΝ - ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΝ ΑΚΡΟΝ

Ἐν Συμπεράσματι, συνάγεται ἐκ τῆς πρώτης σειρᾶς δοκιμῶν, ὅτι ἡ καλλιτέρα κατὰ μήκος μορφή τοῦ ἄκρου εἶναι ἡ κυλινδρική, πλὴν ὅμως, ἡ μελέτη αὐτῆς καὶ μόνον δὲν ἐπαρκεῖ διὰ τὴν εὑρεσιν τῆς καλλιτέρας λύσεως. Πράγματι, λόγῳ μεγάλης ταχύτητος τοῦ πίδακος εἰς τὴν γέννεσίν του καὶ μεγάλης ὑψομετρικῆς διαφορᾶς μεταξὺ ἄκρου καὶ κοίτης (47 μ.), τὰ πλευρικὰ τοιχώματα παίζουν βασικὸν ρόλον εἰς τὴν διαμόρφωσιν τοῦ πίδακος.

15.4.- ΔΕΥΤΕΡΑ ΣΕΙΡΑ ΔΟΚΙΜΩΝ.- ΕΠΙΔΡΑΣΙΣ ΠΛΕΥΡΙΚΩΝ ΤΟΙΧΩΜΑΤΩΝ

Ἐφηρμόσθησαν κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς λύσεις:

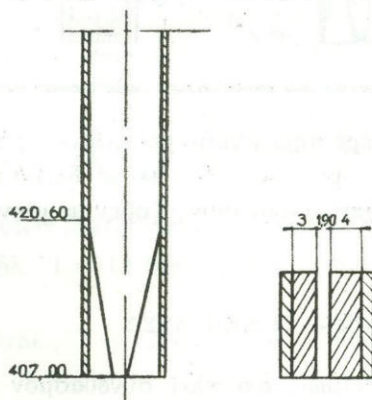
α) Κατὰ μῆκος τομὴ σχ. 13, μὲ τὰ πλευρικά τοιχώματα τοῦ σχ. 17:



Σχ. 17: ΔΕΥΤΕΡΑ ΣΕΙΡΑ ΔΟΚΙΜΩΝ - ΔΙΑΟΙΚΤΗ 2,5μ.

Αἱ δοκιμαὶ δεικνύουν ὅτι ὁ πίδαξ δὲν εἶναι ἀρκετὰ ἀνεπτυγμένος καθ' ὕψος καὶ αὐτὸ ὁδηγεῖ διὰ τὰς ἐπομένους δοκιμὰς, εἰς τὴν μεγαλυτέραν στένωσιν τοῦ στομίου ἐξόδου.

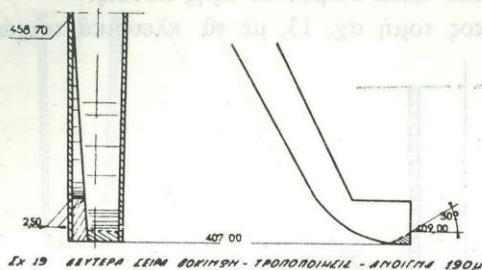
β) Κατὰ μῆκος τομὴ σχ. 13, μὲ τὰ πλευρικά τοιχώματα τοῦ σχ. 18:



Σχ. 18: ΔΕΥΤΕΡΑ ΣΕΙΡΑ ΔΟΚΙΜΩΝ - ΔΙΑΟΙΚΤΗ 1,90μ

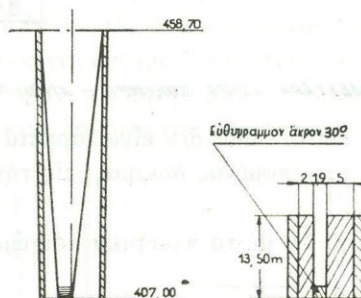
Αἱ δοκιμαὶ τῆς σειρᾶς αὐτῆς βελτιώνουν μὲν τὴν καθ' ὕψος ἀνάπτυξιν τοῦ πίδακος, δεικνύουν ὅμως συγκέντρωσιν τοῦ μεγαλυτέρου μέρους τῆς ὑδατίνης παροχῆς εἰς τὸ κατώτερον μέρος αὐτοῦ.

γ) Πρὸς διόρθωσιν τῆς προηγουμένης λύσεως, δίδεται ἡ τροποποίησις τοῦ σχ. 19:



Ἡ λύσις αὕτη ἐπιφέρει βελτίωσιν, μόνον ὡς πρὸς τὸ ὅλικόν μήκος πτώσεως τοῦ πίδακος, μὲ μίαν αὐξησιν αὐτοῦ κατὰ 10%.

δ) Ἐδοκιμάσθη ἐν συνεχείᾳ ἡ λύσις τοῦ σχ. 20, μὲ αὐξησιν τοῦ μήκους τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων, οὕτως ὥστε νὰ ἐπέρχεται μία ὁμαλωτέρα συστολή καὶ καθ' ὕψος αὐξησις τοῦ πίδακος.



Ἡ λύσις αὕτη ἐπέφερε σημαντικὴν βελτίωσιν εἰς τὴν ὅλην μορφήν τοῦ πίδακος. Διὰ τὰς μικρὰς ὅμως παροχὰς ($300 \text{ μ}^3/\delta\lambda.$) ὁ πίδαξ προσβάλλει τὰ πρηνῆ τῆς κοίτης. Κατόπιν αὐτῶν συνεχίζομεν μὲ μίαν τρίτην σειρὰ δοκιμῶν.

15.5.- ΤΡΙΤΗ ΣΕΙΡΑ ΔΟΚΙΜΩΝ.- ΤΕΛΙΚΗ ΛΥΣΙΣ

Ἡ τρίτη σειρά δοκιμῶν, ἀποτελεῖ συνδυασμὸν τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς πρώτης καὶ δευτέρας σειρᾶς δοκιμῶν. Ἐφηρμόσθη ἐπομένως ἡ κατὰ μήκος τομὴ τοῦ σχήματος 16, μὲ τὴν διάταξιν πλευρικῶν τοιχωμάτων τοῦ σχ. 20. Ἐγένετι σειρά μικρῶν τροποποιήσεων τῆς κατὰ μήκος τομῆς, μὲ σκοπὸν τὴν καλλιτέραν τοποθέτησιν τῆς ἐπιφανείας ἐπαφῆς πίδακος - κοίτης. Ἐπετεύχθη οὕτω ἡ ἀπομάκρυνσις τοῦ πίδακος ἀπὸ τὰ πρηνῆ, ἀκόμη καὶ διὰ μικρὰς παροχὰς, ($625 \text{ μ}^3/\delta\lambda.$), ἡ ὁμοιόμορφος ἀνάπτυξις τοῦ πίδα-

κος καθ' ὕψος καὶ ἡ μεγαλυτέρα δυνατὴ ἐπιμήκυνσις τῆς ζώνης ἐπαφῆς πίδακος - κοίτης.

Ἡ κατὰ μῆκος τομὴ τῆς ὀριστικῆς λύσεως, δίδεται εἰς τὸ σχῆμα 21. Εἰς αὐτὴν φαίνονται λεπτομερῶς ὅλα τὰ στοιχεῖα μηκοτομῆς.

Ἐμετρήθησαν συγχρόνως αἱ ὑποσκαφαὶ εἰς τὴν κοιλάδα, ἐκ τῆς συγκριτικῆς δὲ μελέτης τῶν ὑποσκαφῶν τῶν διαφόρων λύσεων προέκυψεν ὅτι ἡ τελικὴ λύσις δίδει τὰ καλλίτερα ἀποτελέσματα. Συμπεραίνομεν ἐπομένως ὅτι ἀκόμη καὶ ἂν δὲν μελετηθοῦν αἱ ὑποσκαφαὶ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, τὰ συμπεράσματα ἐκ τοῦ ὁμοιώματος εἶναι πολύτιμα, διότι δίδουν τὴν σχετικῶς καλλιτέραν λύσιν.

15.6.- ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΣΥΡΣΕΩΣ ΦΕΡΤΩΝ ΥΑΙΚΩΝ

Διὰ τὴν ὀριστικὴν λύσιν μελετᾶται τὸ πραγματικὸν βάθος ἐκσκαφῆς, διὰ πλήμμυραν πραγματικῆς διαρκείας 12 ὥρων καὶ διὰ τὰς παροχὰς τῶν $625 \mu^3/\delta\lambda.$, $1250 \mu^3/\delta\lambda.$, καὶ $2500 \mu^3/\delta\lambda.$

Διὰ τὸ ὁμοίωμα 1:75 προκύπτουν τὰ κάτωθι στοιχεῖα:

Χρόνος πλήμμυρας: $12 \times 60/\lambda^{-1/2} = 12 \times 60/8,66 = 83'$

Παροχαί: $Q/\lambda^{-5/2} = 12,2 \text{ λιτ}/\delta\lambda., 25,5 \text{ λιτ}/\delta\lambda. \text{ καὶ } 51 \text{ λιτ}/\delta\lambda.$

Υλικά κοίτης: Πρόκειται περὶ κροκκαλῶν ἐστρογγυλευμένων, μέσης διαμέτρου 5 ἐκ. καὶ ἐκτεινομένων εἰς βάρος 25-35 μ. Ἡ ἐφαρμογὴ γεωμετρικῆς ὁμοιότητος ὀδηγεῖ εἰς διάμετρον 0,67 χιλ. ἐπομένως εὐρισκόμεθα εἰς τὴν περιοχὴν τῆς ἄμμου, διὰ τὴν ὁποῖαν ἡ ταχύτης πτώσεως τῶν κόκκων ἀκολουθεῖ τὸν νόμον φυσικῆς ὁμοιότητος. (Δὲν ὑπάρχουν φαινόμενα θρομβώσεως). Ἀποφεύγομεν οὕτω τὴν στρεβλὴν κλίμακα ὁμοιώματος ἢ ὑλικοῦ καὶ χρησιμοποιοῦμεν, ἀπλῶς, ἄμμον ποταμίαν, μέσης διαμέτρου 0,7 χιλ.

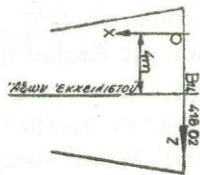
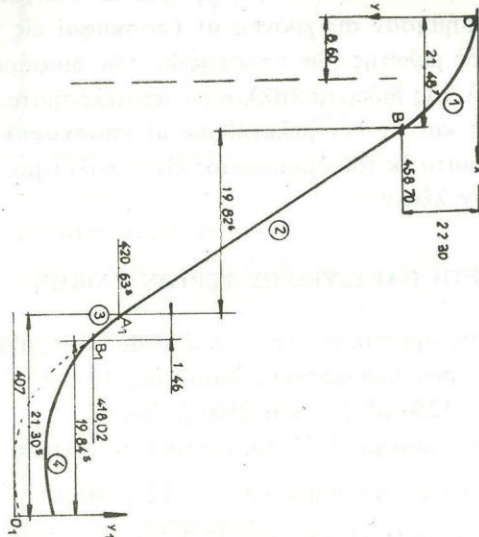
Ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῶν ἐμετρήθησαν ἐν ὁμοιώματι αἱ κάτωθι ὑποσκαφαί:

α) $Q = 625 \mu^3/\delta\lambda., T = 12 \text{ ὥραι}, \text{ βάθος ἐκσκαφῆς } 16 \mu., (\text{ὁμοίωμα, βάθος } 21 \text{ ἐκ}).$

β) $Q = 1250 \mu^3/\delta\lambda., T = 12 \text{ ὥραι}, \text{ βάθος ἐκσκαφῆς } 19 \mu., (\text{ὁμοίωμα, βάθος } 25,4 \text{ ἐκ}).$

γ) $Q = 2500 \mu^3/\delta\lambda., T = 12 \text{ ὥραι}, \text{ βάθος ἐκσκαφῆς } 30 \mu., (\text{ὁμοίωμα, βάθος } 40 \text{ ἐκ}).$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς τοπογραφίας τῆς κοίτης, αἱ ἐν λόγῳ ἐκσκαφαὶ δὲν ἐκθέτουν εἰς κίνδυνον, οὔτε τὰς παρειὰς τῆς κοίτης, οὔτε τὴν κατάντι παρειὰν τοῦ φράγματος.



- ① $y = 0.07652 \times 1.85$ μεταβλ 451 και 458.70 (OB)
- ② Καθώς της επιβελαι 1.92 μεταβλ 458.70 και 420.63 (B-A1)
- ③ $x_1 = 1.43 \cdot 10^{-3} \times 3$ μεταβλ 420.63 και 418.02 (A1-B1)

Εκ 21 ΚΑΤΑ ΠΑΡΟΔ ΤΟΝΗ ΟΡΙΣΤΙΚΗΣ ΑΠΕΡΕΣ

$$\begin{aligned}
 & -0.0054x^3 \cdot \frac{Z}{8} \cos x \cdot 0.61x \cdot 5.20 \\
 & -[0.330 \cdot 0.16(x \cdot 5.20)]^2 \cos x \cdot 5.20 \sin x \cdot 20 \\
 & -[0.630 \cdot 0.16(x \cdot 7.20) - 0.03(x \cdot 7.20)^2] \frac{Z}{8} \\
 & \quad \text{οπο } x \cdot 7.20 \sin x = 14.30 \\
 & -[0.2767 - 0.266(x \cdot 4.30)] \frac{Z}{8} \\
 & \quad \text{οπο } x \cdot 14.30 \sin x = 15.34 \\
 & +[0.266(x \cdot 15.34)] \left(\frac{Z}{8}\right) \cdot \frac{5.18.34}{5} \\
 & \quad \text{μετο } 70 \times 15.34
 \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 16

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟΣ ΑΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εἰς τὸν Πρόλογον τῆς παρούσης Διατριβῆς ἐτέθησαν ὁ σκοπὸς καὶ ἡ γενικὴ τῆς κατεύθυνσις. Ἠκολούθησεν ἡ ἀνάπτυξις ὅλων τῶν ἐπὶ μέρους θεμάτων καὶ καταλήγοντες εἰς τὸ τέλος τῆς ὅλης ἐργασίας εὐρισκόμεθα ἐνώπιον τοῦ ἐξῆς λογικοῦ ἐρωτήματος: «Ποῖα εἶναι τὰ Συνοπτικὰ Συμπεράσματα ἐκ τῆς ὅλης μελέτης;». Ἡ ἀνάγκη μᾶς ἀπαντήσεως, ὁδήγησεν εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ παρόντος Κεφαλαίου.

Νόμοι φυσικῆς ὁμοιότητος ἐφηρμόσθησαν ἀπὸ παλαιωτάτων χρόνων καὶ σήμερον ἀποτελοῦν πλεον τὸν κανόνα τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης τῶν φαινομένων ἐν Ἑργαστηρίῳ. Τὸ θέμα δὲν εἶναι ἐπομένως νέον. Ἡ ταχυτάτη ὁμως ἐξέλιξις τῶν τελευταίων ἐτῶν εἰς τὴν τεχνικὴν τῶν ὁμοιωμάτων ἐδημιούργησε τὴν ἀνάγκην μᾶς καλλιτέρας ἐδράσεως τοῦ θέματος, ἥτις ἐπιτυχάνεται μόνον διὰ τῆς γενικεύσεως καὶ τῆς συστηματοποιήσεως. Ἐπεδιώχθη ἐπομένως εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ἡ Μαθηματικὴ καὶ Ἑργαστηριακὴ Συγκρότησις, μὲ ἐφαρμογὰς, - εἰς τὸν τομέα τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν καὶ Θεωρητικῆς Ὑδραυλικῆς - τοῦ ὅλου θέματος τῶν νόμων Φυσικῆς Ὁμοιότητος, μὲ τὴν κάτωθι λογικὴν σειράν:

Α) Γενίκευσις τῶν νόμων Φυσικῆς Ὁμοιότητος τυχόντος φαινομένου, τῇ βοηθείᾳ τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων. Εὗρεσις τῆς γενικῆς μορφῆς τῶν σχέσεων ὁμοιότητος καὶ κατάταξις τῶν εἰς κατηγορίας.

Β) Μέθοδοι ἀναζητήσεως τῶν νόμων Φυσικῆς Ὁμοιότητος. Γενίκευσις τῆς ἀπ' εὐθείας μεθόδου εἰς τὴν Θεωρητικὴν Ὑδραυλικήν. Εὗρεσις τῶν νόμων Ὁμοιότητος αὐτῆς καὶ ἀνάλυσις αὐτῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν γενικῶν ἀρχῶν τῆς παραγράφου Α.

Γ) Γενίκευσις τῶν μεθόδων τῆς Διαστατικῆς Ἀναλύσεως τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὑπολογισμοῦ διὰ Μητρῶν, καὶ συστηματοποιήσις τῆς εὐρέσεως τῆς γενικῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων ὡς καὶ τῶν Νόμων Ὁμοιότητος τυχόντος Φαινομένου. Ἐφαρμογὴ τῶν ἀνωτέρω εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν γενικῶν ἐξισώσεων καὶ τῶν νόμων ὁμοιότητος τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν καὶ τῆς Μαγνητοῦδρودυναμικῆς. Εὗρεσις νέου νόμου Ὁμοιότητος καὶ ἀνάγκη περαιτέρω διερευνήσεώς του εἰς κατάλληλον Ἑργαστήριον.

Δ) Ἐφαρμογή τῶν ἀνωτέρω εἰς τὴν Θεωρητικὴν Ὑδραυλικήν, διὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν χρησιμοποίησεως στρεβλῆς κλίμακος εἰς τὰ ὁμοιώματα. Διαχωρισμός τῶν Ὑδραυλικῶν Ἔργων εἰς κατηγορίας καὶ θεωρητικὴ μελέτη τῆς στρεβλῆς κλίμακος.

Ε) Συστηματοποιήσις Ἑργαστηριακῆς Μελέτης ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω Θεωρητικῶν Ἀρχῶν, διὰ τοὺς Ἐκχειλιστάς Ἐκκενώσεως Πλημμύρας. Ὑπολογισμός κλιμάκων, διάταξις ὁμοιωμάτων καὶ γενικοὶ ὑπολογισμοὶ σφαλμάτων καὶ ἀκριβείας τῶν μετρήσεων.

ΣΤ) Ἑργαστηριακὸς προσδιορισμός καὶ σύγκρισις μὲ θεωρητικὰ ἀποτελέσματα, τῶν ἐξῆς θεμάτων:

- α) Βελτίστη διάταξις εἰσόδου στομίῳ ἐκκενώσεως πλημμύρας.
- β) Προσδιορισμός τῆς κατὰ μῆκος τομῆς ἐκχειλιστοῦ ἐκκενώσεως πλημμύρας.
- γ) Βελτίστη διασπορά τῶν ὑδάτων, διὰ τὴν μορφήν «Saut de ski», καὶ προσδιορισμός τῶν ὑποσκαφῶν εἰς τὰ κατάντι τοῦ φράγματος.

Τὰ Συμπεράσματα προκύπτουν τώρα ἀφ' ἑαυτῶν μετὰ τὴν ἔκθεσιν τῶν ἀνωτέρω βασικῶν στοιχείων τῆς Διατριβῆς. Ἦτοι ἔχομεν:

1) Ἡ γενίκευσις τῶν νόμων ὁμοιότητος ἀπλουστεύει τὴν μέθοδον ἀναζητήσεως τῶν καὶ τὴν ἀπαλλάσσει ἀπὸ βασικὰ σφάλματα ἐπὶ τῶν ἀρχικῶν παραδοχῶν.

2) Ἡ γενίκευσις τῶν μεθόδων τῆς Διαστατικῆς Ἀναλύσεως τὰς καθιστᾷ μαθηματικῶς «ἀδιαβλήτους» καὶ δίδει ταχεῖαν καὶ συστηματικὴν λύσιν εἰς τὴν εὑρεσιν ἐξισώσεων καὶ νόμων ὁμοιότητος ἐνὸς τυχόντος φαινομένου. Παράδειγμα, ἡ εὑρεσις νέου νόμου ὁμοιότητος εἰς Μαγνητοῦδροδυναμικὴν.

3) Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀνωτέρω εἰς τὴν περίπτωσιν χρησιμοποίησεως στρεβλῆς κλίμακος εἰς τὴν Θεωρητικὴν Ὑδραυλικήν, δίδει μίαν γενικὴν λύσιν, ἐφαρμοζομένην εἰς ὅλας τὰς κατηγορίας μελετῶν ἐπὶ Ὁμοιωμάτων, τῶν μεγάλων Ὑδραυλικῶν Ἔργων.

4) Ἡ Ἑργαστηριακὴ μελέτη ἐπὶ ἐνὸς Ὑδραυλικοῦ Ἔργου, μορφῆς μᾶλλον πολυπλόκου, δίδει τὴν ἀκολουθητέαν ὁδὸν συστηματικῆς ἐρεῦνης καὶ ἀποδεικνύει τὴν ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν μεταξὺ ἀποτελεσμάτων ἐπὶ ὁμοιωμάτων καὶ ἐξελίξεων ἐν τῇ φύσει. Πράγματι τὸ μελετηθὲν ἐν Ἑργαστηρίῳ ἔργον, κατεσκευάσθη, αἱ δὲ διαφοραί,

(Μέτρησις ἐν τῇ Φύσει) - (Μέτρησις Ἑργαστηρίου)
(Μέτρησις ἐν τῇ Φύσει)

κατατάσσονται ὡς ἀκολουθῶς:

Εἴσοδος στομίων ἐκχειλίσεως: $+0,6\%$ ἕως $-0,2\%$
 Στέψις ἐκχειλιστοῦ: $+0,4\%$ ἕως $-0,2\%$
 Διαφοραὶ Στάθμης: Ἐκχειλιστής, (τμήμα ἰσχυρᾶς κλίσεως): $+6\%$
 ἕως $+1\%$
 Στάθμη τεχνητῆς λίμνης: Ἐλήφθη ὡς Βάσις
 Στάθμη ὑδάτων κατάντι: $+1,5\%$ ἕως -1%

Μὲ βάσιν τὴν ἀνάντη στάθμην τῆς τεχνητῆς
 Διαφοραὶ Παροχῆς: λίμνης, προέκυψαν διαφοραὶ, ἀπὸ $+1,5\%$ ἕως
 $-2,5\%$

Διαφοραὶ Πιέσεω: Αὗται κυμαίνονται μεταξύ $+1\%$ καὶ $-2,3\%$

Διὰ πραγματικὴν πλημ-
 Διαφοραὶ ἐπὶ Διασπορᾶς Ὑδάτων: μύραν $650 \text{ μ}^3/\delta\lambda.$, πα-
 ρετηρήθησαν τὰ ἑξῆς:

- i) Μεγαλυτέρα διασπορὰ τῆς ἐν ὁμοιώματι εὐρεθείσης.
- ii) Αὐξήσις κατὰ $5-10\%$ τῆς ἐπιφανείας ἐπαφῆς πίδακος καὶ κοίτης πο-
 ταμοῦ.
- iii) Ἐλαφρὰ μετατόπισις τῆς ἐπιφανείας ἐπαφῆς πρὸς τὰ ἀνάντι.
- iv) Αὐξήσις τῆς καταστροφῆς ἐνεργείας κατὰ τὴν διαδρομὴν τοῦ πί-
 δακος εἰς τὸν ἀέρα.

Διὰ τὴν αὐτὴν πλημμύραν,
 παρατηρήθησαν πραγματι-
 Διαφοραὶ ἐπὶ τῶν Ὑποσκαφῶν: καὶ ὑποσκαφαὶ μικρότεραι
 τῶν ὑπολογισθεῖσων ἐν ὁ-
 μοιώματι κατὰ $3-10\%$.

5) Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἀνωτέρω διαφορῶν προκύπτουν εἰδικώτερον
 τὰ ἑξῆς:

Διὰ τὰ πλεῖστα τῶν φαινομένων ὑπαισέρχεται μόνον ὁ ὁρισθεὶς, θεωρη-
 τικὸς νόμος ὁμοιότητος τοῦ Froude, αἱ δὲ προσεγγίσεις πειραμάτων - φυ-
 σικοῦ φαινομένου εἶναι ἀπολύτως ἱκανοποιητικά.

Εἰς ὅσας περιπτώσεις ὑπαισέρχονται φαινόμενα «παρασύρσεως
 τοῦ ἀέρος» (entraînement d' air), παρατηρεῖται αἰσθητὴ αὐξήσις τῶν
 διαφορῶν, (τμήμα ἰσχυρᾶς κλίσεως ἐκχειλιστοῦ, διασπορὰ ὑδάτων καὶ κα-
 ταστροφή ἐνεργείας εἰς τὸν ἀέρα). Αὐτὸ προεβλέπετο ἐκ τῆς θεωρητικῆς
 μελέτης, διότι ἡ παράσυρσις ἀέρος εἰσάγει τοὺς νέους νόμους ὁμοιότητος
 μίγματος ὕδατος μὲ ἀέρα. Δεδομένου δὲ ὅτι ἡ παρασυρομένη ποσότης ἀέ-
 ρος εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐπιφανειακῆς ταχύτητος τοῦ ὕδατος, ἥτις ἐν τῇ
 φύσει εἶναι $\lambda^{-1/2}$ φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἐν ὁμοιώματι, παρατηρεῖται ἀντί-
 στοιχος διόγκωσις τῆς στάθμης τῶν ὑδάτων, αὐξήσις τῆς καταστροφῆς

ἐνεργείας καὶ τῆς διασπορᾶς τῶν ὑδάτων καὶ ἐλάττωσις τῆς διαβρωτικῆς ἐπιδράσεως τοῦ ὕδατος ἐπὶ τῶν ὑποσκαφῶν. Ἐπὶ τῶν φαινομένων παρασύρσεως τοῦ ἀέρος εἰς τὰς ὑπερκρισίμους ροὰς παραπέμπομεν εἰς τὰ ὑπ' ἀριθμ. 3, 10, 24 συγγρ. τῆς βιβλιογραφίας.

«CONTRIBUTION DE L' ANALYSE MATHÉMATIQUE ET DES APPLICATIONS EN LABORATOIRE A LA GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE ET DES ÉTUDES EXPÉRIMENTALES SUR MODÈLES PHYSIQUES A ÉCHELLE QUELCONQUE».

SYNOPSIS

L' ensemble de la présente publication a été guidé par l' idée directrice d' une nécessité de «généralisation» dans la Science, théorique ou appliquée; car la Logique a bien besoin de regrouper des cas particuliers et de former des lois générales qui englobent le plus grand nombre possible de phénomènes physiques. Une analyse systématique de l' ensemble des lois d' un phénomène physique, pour leur donner par la suite une structure solide, simple et générale, se trouve donc à la base de notre propre effort, dans le cadre de la Similitude Physique et de ses applications.

Le besoin de l' étude d' un phénomène physique sur modèle s' avère très ancien. Il est certain que les grands constructeurs de tout âge ont utilisé cette méthode, en extrapolant les renseignements obtenus lors de la construction d' ouvrages analogues, mais de plus modestes dimensions, qui constituaient un modèle réduit de la réalisation future. Les grands progrès théoriques de nos jours n' ont pas permis de diminuer la nécessité des études sur Modèles. Car, l' analyse mathématique, précise ou approchée, malgré les impressionnantes conquêtes de l' analyse numérique et des ordinateurs, se révèle souvent incapable de prévoir le déroulement d' un phénomène dans l' espace et le temps. Il ne reste dans ce cas qu' une solution pour étudier le phénomène: le reproduire d' une façon quasi-complète, à une échelle qui rend l' étude possible et convenable. C' est le principe des études sur Modèles Physiques.

Pour traiter d' une façon logique et naturelle l' ensemble des sujets de cette étude, nous avons suivi la voie qui conduit graduellement de la généralité aux applications. Le schéma des points principaux pourra donc se résumer, d' après ces graduations, comme suit:

I) Généralisation des notions de la Similitude Physique d' un phé-

nomène quelconque, à l' aide des lois de structure des Groupes. Forme générale des lois de Similitude et leur classement en catégories.

II) Méthodes de recherche des lois de Similitude Physique. Application de la méthode directe pour une généralisation des lois de Similitude, dans le cas des Fluides réels incompressibles (Hydraulique Théorique) et analyse qualitative de ces lois et de leurs applications.

III) Généralisation des méthodes de l' Analyse Dimensionnelle, à l' aide du calcul matriciel. Application à la recherche systématique de l' allure générale d' une équation et des lois de Similitude d' un ensemble de Phénomènes, dépendant d' un certain nombre de variables physiques indépendantes.

IV) Recherche pour la méthode précédente des équations générales et d' une série complète de lois de Similitude, pour le domaine Physique de la Mécanique des Fluides et de la Magnétohydrodynamique. Mise en apparence d' une nouvelle loi de Similitude en M.H.D. et nécessité d' une étude expérimentale de cette loi dans un Laboratoire compétent.

V) Réflexions sur l' application de l' échelle distordue pour l' étude des grands ouvrages hydrauliques. Classification de ces ouvrages en catégories et étude théorique des différents cas d' application d' une distorsion.

VI) Schéma d' une étude systématique sur modèle réduit, des évacuateurs de crues. Réflexions sur le choix des échelles, la disposition générale des modèles et les calculs d' erreurs de mesurage.

VII) Application à l' étude expérimentale de l' entonnement d' un évacuateur, de son profil en long, de la dispersion des jets et des affouillements à l' aval, dans le cas particulier de la forme en «saut de ski».

Les quelques conclusions d' après l' ensemble de l' étude, peuvent d' ailleurs se résumer dans le schéma suivant:

1) La généralisation des lois de Similitude facilite les méthodes suivies pour leur recherche et les rend plus «sûres» au point de vue forme mathématique.

2) La généralisation des méthodes de l' Analyse Dimensionnelle offre un procédé systématique, rapide et correct à priori, pour obtenir les formes des équations et les lois de Similitude de n' importe quel phénomène physique.

3) L' étude de plusieurs cas pratiques en Hydraulique conduit à la nécessité d' une échelle distordue sur le modèle réduit. L' étude des principes de cette distorsion et la classification des cas où elle est in-

dispensable, facilite beaucoup la recherche expérimentale en Laboratoire.

4) Une application de la théorie des modèles en Hydraulique montre la marche à suivre dans un cas plutôt général et prouve les avantages de l'étude expérimentale et sa précision satisfaisante. La théorie de Similitude explique d'ailleurs la différence accentuée entre phénomène sur modèle et phénomène nature, dans certains cas limites d'utilisation d'une loi de Similitude.

Nous signalerons enfin que la très proche inauguration d'un Laboratoire d'Hydraulique à Thessaloniki, donnera pour la première fois en territoire hellénique la possibilité d'appliquer l'ensemble de la théorie dans des ouvrages complexes d'une certaine importance, avec l'aide et la collaboration de quelques éminents spécialistes étrangers.

ΚΥΡΙΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΕΙΣΑ

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(Bibliographie Principale)

- 1) Mécanique des Fluides - Brun, Martinot-Lagarde.
- 2) Mécanique Expérimentale des Fluides - Comolet.
- 3) Hydraulique Générale, Tome II, - L. Escande.
- 4) Analyse Dimensionnelle et Théorie des Maquettes - Comolet.
- 5) Hydraulique Technique - Jaeger.
- 6) Guide à travers la Mécanique des Fluides - Prandtl.
- 7) Fluid Dynamics - Streeter.
- 8) Analyse Dimensionnelle - Langhaar.
- 9) Dimensional Analysis - Bridgman.
- 10) Hydraulics of Open Channels - Bakmeteff.
- 11) Hydrodynamics - Birkoff.
- 12) Tour d'horizon sur la Magnétohydrodynamique, H. Lagaze - *Publication Scientifique et Technique du Ministère de l'Air - N° B.S.T. 128.*
- 13) The Physics of Fluids, 2, 366 (1959). - Bazer Fleishman.
- 14) Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, *Publication N° 97* (1959) - Germain.
- 15) The Physics of Fluids, 2, 341 (1959) - Green.
- 16) La théorie des gaz neutres et ionisés, Hermann, Paris (1960) - Kruskal.
- 17) Landshoff, Plasma in Magnetic Field, Stanford University. *Press - Stanford* (1958) - Rosenbluth.
- 18) Landshoff, Magneto hydrodynamics, Stanford University *Press, Stanford* (1957) - Kantroqitz.
- 19) Landshoff, Magneto hydrodynamics, *Stanford University Press, Stanford* (1957) - Hoyle.
- 20) Magneto hydrodynamics, Interscience, New York (1957), *Traduction: Dunod, Paris* (1960) - Cowling.
- 21) Fluid Meters - A.S.M.E., N.Y. (1937).
- 22) Flow Measurements and Meters - Linford.
- 23) Hydraulic Measurements - Addison.
- 24) Mésures et Essais, Notes E.N.S.E.E.H.T. (1961) - Castex.
- 25) Mécanique des Fluides réels, Notes, (1963) - Sananés.
- 26) Etudes des conditions d'écoulement à grande vitesse dans un canal courbe de section rectangulaire, muni de seuils obliques, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 3-8-1964, groupe 2. - Sananés, Xanthopoulos.
- 27) Considerations sur la similitude généralisée et la magnétohydrodynamique, *Conférence du 30-6-1964 à la Faculté des Sciences de Toulouse à titre de 2eme Sujet de Thèse*, - Xanthopoulos.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ Ι

ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΔΙΑ ΤΟΝ ΑΚΡΙΒΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΝ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΜΙΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ.

Σελίς

ΚΕΦ. 1: Είσαγωγή - Γενικότητες	11
ΚΕΦ. 2: Ἡ Ἑννοια τῆς Φυσικῆς Ὁμοιότητος	14
2.1.-Γεωμετρικὴ Ὁμοιότης	14
2.2.-Κινηματικὴ Ὁμοιότης	15
2.3.-Δυναμικὴ Ὁμοιότης	15
2.4.-Γενίκευσις τῆς Ἑννοίας τῆς Ὁμοιότητος	15
ΚΕΦ. 3: Θεωρητικὴ Μελέτη τῆς Φυσικῆς Ὁμοιότητος	17
3.1.-Μαθηματικὸς Ὁρισμὸς τῆς Ὁμοιότητος	17
3.2.-Συνθήκαι Ὁμοιότητος - Ἀποτελέσματα Ὁμοιότητος	20
3.3.-Ἀριθμὸς Κλιμάκων. Στρεβλὴ Κλίμαξ	21
3.4.-Θεμελιῶδες Θεώρημα τῆς Ὁμοιότητος	21
3.5.-Ἀνηγμέναι Μετάβληται - Ἀνηγμέναι Ἐξισώσεις	24
3.6.-Ἀναλλοίωτοι	26
3.7.-Μέθοδοι Ἀναζητήσεως τῶν Νόμων τῆς Φυσικῆς Ὁμοιότητος	26
3.8.-Νόμοι Φυσικῆς Ὁμοιότητος τῶν Κλασσικῶν Ρευστῶν διὰ τῆς ἀπ' Ἐδθείας Μεθόδου	27
3.8.1.-Προσδιορισμὸς τῆς Φυσικῆς Περιοχῆς τῶν Φαινομένων	27
3.8.2.-Γενικαὶ Ἐξισώσεις τῶν Φαινομένων	28
3.8.3.-Ἐκλογὴ τῶν Κλιμάκων τῆς Φυσικῆς Ὁμοιότητος	30
3.8.4.-Σχέσεις Ὁμοιότητος - Συνθήκαι καὶ Ἀποτελέσματα Ὁμοιότητος	31

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΙΑ ΜΗΤΡΩΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΙΝ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΙΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΝΟΜΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΟ - ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΚΕΦ. 4: Ἀρχαὶ τῆς Διαστατικῆς Ἀναλύσεως	35
4.1.-Βασικαὶ Ἑννοιαί καὶ Ὁρισμοί	35
4.2.-Θεώρημα τῶν π (ἢ Vascy - Buckingham)	37

ΚΕΦ. 5: Συμβολή εις τὴν Μαθηματικὴν Μελέτην τῶν Διαστατικῶν Ἐξισώσεων καὶ τῶν Ἀδιαστάτων Μονωνύμων π	38
ΚΕΦ. 6: Συστηματικὸς Ὑπολογισμὸς μιᾶς Πλήρους Σειρᾶς Ἀδιαστάτων Μονωνύμων π	44
ΚΕΦ. 7: Ἐφαρμογὴ ὑπ' ἀριθμ. 1: Νόμοι Ὁμοιότητος Τυχόντος Φαινομένου τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν	47
7.1.-Ἐκλογὴ τῶν Μεταβλητῶν τοῦ Προβλήματος	47
7.2.-Ἐκλογὴ τοῦ Θεμελιώδους Συστήματος Μονάδων.-Διαστατικὸν Μητρώον τῶν Μεταβλητῶν	48
7.3.-Ἐξισώσεις τῶν Συντελεστῶν καὶ Μητρώον τῶν Λύσεων	49
7.4.-Μονώνυμα π . Μετατροπαὶ καὶ Τελικὴ τῶν Μορφῶν. Τελικὴ Μορφή τῆς Γενικῆς Ἐξισώσεως τῆς Μηχανικῆς τῶν Ρευστῶν	50
7.5.-Νόμοι Ὁμοιότητος ἐκ τῶν Μονωνύμων π	51
7.6.-Ἀσυμπίαστα Ρευστά, ἄνευ Μεταδόσεως Θερμότητος καὶ μετὰ Σημαντικοῦ Εἰδικοῦ Βάρους	52
7.7.-Συμπίαστα Ρευστά ἄνευ Μεταδόσεως Θερμότητος καὶ μικροῦ Εἰδικοῦ Βάρους, (Ἀέρια)	53
ΚΕΦ. 8: Ἐφαρμογὴ ὑπ' ἀριθμ. 2: Νόμοι Ὁμοιότητος Τυχόντος Φαινομένου τῆς Μαγνητο - ὑδροδυναμικῆς	55
8.1.-Γενικότητες	55
8.2.-Θεμελιώδεις Ἐξισώσεις Μ.Υ.Δ.	56
8.3.-Διαστατικὸν Μητρώον τῶν Μεταβλητῶν	58
8.4.-Ἀδιάστατα Μονώνυμα π , καὶ Νόμοι Ὁμοιότητος Μ.Υ.Δ.	60

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ Ι ΚΑΙ ΙΙ ΜΕΡΟΥΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΑΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

ΚΕΦ. 9: Μελέται Μεγάλων Ὑδραυλικῶν Ἔργων καὶ Ἀναγκαιότης Στρεβλῆς Κλίμακος διὰ τὸ Ὁμοίωμα	65
9.1.-Εἰσαγωγὴ εἰς τὰς Ἐργαστηριακὰς Μελέτας Ὑδραυλικῶν Ἔργων	65
9.2.-Μελέται Προστασίας Ἐσωτερικοῦ Λιμένων ἀπὸ Κυματισμοῦς	66
9.3.-Μελέται Κινήσεως Φερτῶν Ὑλῶν εἰς Λιμένας καὶ Ποταμοὺς	67
9.4.-Μελέται Ἐπαληθεύσεως καὶ Ἐδσταθείας.- Ὑποσκαφαὶ	68
ΚΕΦ. 10: Θεωρητικὴ Μελέτη ἐπὶ τῆς Στρεβλῆς Κλίμακος	69
ΚΕΦ. 11: Γενικὰ Στοιχεῖα Ἐργαστηριακῆς Μελέτης Ἐκκενωτῶν Πλημμύρας	72
11.1.-Σκοπὸς καὶ Δεδομένα τῆς Μελέτης	72
11.2.-Χαρακτηριστικὰ τῶν Ὁμοιωμάτων	73
11.3.-Περιγραφή τοῦ Προκαταρκτικοῦ Ὁμοιώματος 1:100	75
11.4.-Περιγραφή τοῦ Κυρίως Ὁμοιώματος 1:75	76
11.5.-Περιγραφή τοῦ Ὁμοιώματος 1:40	78
ΚΕΦ. 12: Ὑπολογισμὸς Σφαλμάτων.-Ἀκρίβεια τῶν Μετρήσεων	80
12.1.-Ὁμοίωμα 1:100	80
12.2.-Ὁμοίωμα 1:75	82

12.3.-'Ομοίωμα 1:40	84
ΚΕΦ. 13: Μελέτη Διατάξεως τῆς Εἰσόδου διὰ Στόμια Ἐκκενώσεως Πλημύρας	86
13.1.-Βασικαὶ Ἀρχαὶ	86
13.2.-Θεωρητικὰ Στοιχεῖα Ὑπολογισμοῦ Στομίων Ἐκκενώσεως	87
13.3.-Δοκιμαὶ ἐπὶ Ὅμοιώματος 1:100	89
13.4.-Δοκιμαὶ ἐπὶ Ὅμοιώματος 1:75	90
ΚΕΦ. 14: Μελέτη κατὰ Μῆκος Τομῆς Ἐκχειλιστοῦ Ἐκκενώσεως Πλημύρας	96
14.1.-Θεωρητικὸς Προσδιορισμὸς τῆς κατὰ Μῆκος Τομῆς	96
14.2.-Τελικὰ Χαρακτηριστικὰ κατὰ Μῆκος Τομῆς καὶ Μελέτη ἐπὶ Ὅμοιωμάτων	99
ΚΕΦ. 15: Μελέτη Διασπορᾶς τῶν Ὑδάτων καὶ Ὑποσκαφῶν εἰς τὰ Κατάντι Φράγματος	102
15.1.-Γενικότητες	102
15.2.-Χαρακτηριστικὰ τῶν Δοκιμῶν	103
15.3.-Πρώτη Σειρὰ Δοκιμῶν.- Κυλινδρικὸν Ἄκρον	103
15.4.-Δευτέρα Σειρὰ Δοκιμῶν.- Ἐπίδρασις Πλευρικῶν Τοιχωμάτων	105
15.5.-Τρίτη Σειρὰ Δοκιμῶν.- Τελικὴ Λύσις	106
15.6.-Μελέτη Παρασύρσεως Φερτῶν Ὑλικῶν	107
ΚΕΦ. 16: Ἀνακεφαλαιωτικὸς Ἀπολογισμὸς - Συμπεράσματα	109
SYNOPSIS	113
BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	116

